

## Работа 2.4. *Определение вязкости воздуха по скорости течения через тонкие трубки.*

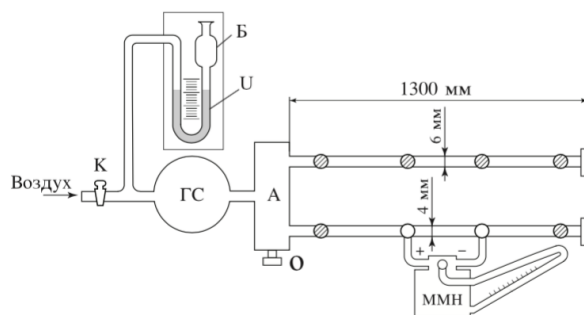
Зотов Алексей, 497

23 сентября 2016 г.

### Цель работы:

1. Экспериментально выявить участки ламинарного и турбулентного течения.
2. Определить число Рейнольдса.
3. Определить вязкость воздуха.
4. Экспериментально определить зависимость расхода воздуха в трубках от радиуса.

**В работе используются:** металлические трубки, укрепленные на горизонтальной подставке; газовый счетчик; микроманометр типа ММН; стеклянная U-образная трубка; секундомер.



**Теоретическое введение.** Если два соприкасающихся слоя газа текут с разной скоростью, то между ними возникает сила вязкого трения. Та же сила может действовать на твёрдые тела (по касательной к поверхности), помещённые в поток жидкости или газа. Причина возникновения этой силы заключается в следующем. Скорость частиц в текучей среде складывается из средней скорости потока и хаотической — тепловой — составляющей. Следовательно, частицы могут перескакивать случайным образом из слоя в слой, перенося вместе с собой часть импульса потока из того слоя, откуда совершен скачок. Перенос же импульса от слоя к слою, согласно 2-му закону Ньютона, эквивалентен силовому взаимодействию между ними. Эта сила направлена по касательной к слоям, поскольку переносится компонента импульса, направленная вдоль среднего потока. Для количественного описания вязкого трения рассмотрим взаимодействие слоёв газа, текущего вдоль оси  $x$ , скорость потока которого изменяется в поперечном направлении  $v_x = v_y(y)$  (см. рис. 1).

Пусть концентрация всюду одинакова и равна  $n$ , а средняя тепловая скорость хаотичного движения молекул равна  $v_T$ . Также для дальнейшего рассмотрения нам понадобится понятие длины свободного пробега  $\lambda$  — среднего расстояния, которое пролетает молекула между столкновениями с другими молекулами.

Рассмотрим плоскость  $y = 0$ . Предположим, что через неё сверху вниз пролетают только молекулы, вылетевшие из слоя  $0 < y < +\lambda$  (слой 2) и снизу вверх — вылетевшие из слоя  $-\lambda < y < 0$  (слой 1). Данное предположение вполне разумно для качественной оценки явления, поскольку молекулы из более дальних слоёв имеют значительно меньшую вероятность добраться до  $y = 0$ , поскольку по пути они скорее всего столкнутся с другими молекулами.

Количество молекул, перелетающих из слоя 1 в слой 2 за единицу времени через единичную площадку (плотность потока), равно:

$$j = \frac{dN}{S \cdot dt} = \frac{1}{4}nv_t. \quad (1)$$

Каждая из этих молекул массой  $m_0$  обладает, помимо хаотично распределённой тепловой составляющей (в среднем  $v_T$ ), дополнительной горизонтальной скоростью, связанной с движением в потоке  $v_{1x} = v_x(-\lambda)$ , и горизонтальным импульсом  $p_{1x} = m_0v_{1x}$ . И наоборот, из слоя 2 в слой 1 поступает такое же количество молекул, но их средний горизонтальный импульс равен  $p_{2x} = m_0v_{2x}$ . Горизонтальный импульс, который они переносят в сумме в единицу времени, и есть касательная сила вязкого трения:

$$F_x = \left(\frac{dP_x}{dt}\right)_{2 \rightarrow 1} - \left(\frac{dP_x}{dt}\right)_{1 \rightarrow 2} = jS(p_{2x} - p_{1x}) = S \cdot \frac{1}{4}m_0nv_T \cdot (v_{2x} - v_{1x}).$$

Считая  $\lambda$  достаточно малой, раскладываем по Тэйлору  $v_{2x} - v_{1x} = v_x(\lambda) - v_x(-\lambda)$ , из чего получим окончательное выражение для силы вязкого трения. В общем виде оно выглядит следующим образом:

$$F_x = S\eta \frac{dv_x}{dy}, \quad (2)$$

где  $\eta$  — коэффициент вязкости (сокращенно вязкость),  $y$  — направление, перпендикулярное потоку,  $S$  — площадь поверхности, для которой рассчитывается приложенная сила. В общих чертах механизм возникновения вязких сил трения во всех текучих средах (жидкостях и газах) одинаков, и формула (2) представляет собой определение коэффициента вязкости. Для идеального газа, как следует из приведенных выше выкладок, вязкость можно оценить по порядку величины:

$$\eta \sim \frac{1}{2}m_0nv_T\lambda = \frac{1}{2}\rho v_t\lambda, \quad (3)$$

Более детальное рассмотрение даёт значение вязкости, отличающееся от полученного на множитель  $\frac{2}{3}$ . Хотя такое отличие не существенно для оценки по порядку величины, этот ответ является общепринятым для оценки  $\eta$ :

$$\eta \sim \frac{1}{3}\rho v_t\lambda, \quad (4)$$

#### Течение вязкой жидкости.

Имеется два существенно различных класса течений. Ламинарное течение — течение, происходящее без перемешивания и пульсаций, в параллельных слоях жидкости; турбулентное течение, в котором образуются вихри и пульсации, а слои беспорядочно перемешиваются.

То, каким будет данное конкретное течение, зависит от соотношения физических параметров и от геометрических характеристик системы. Если у системы есть характерный размер  $r$  (радиус трубки при течении по трубе, радиус шарика при обтекании его внешним потоком и т. п.), то из  $r$ , плотности, вязкости  $\eta$  и характерной скорости потока  $v$  можно составить безразмерное соотношение:

$$Re = \frac{\rho vr}{\eta} \quad (5)$$

называемое числом Рейнольдса. Безразмерные параметры отражают связь между физическими явлениями, происходящими на разных масштабах, и часто используются при описании сложных физических явлений, для которых нет точных решений. Величины  $v, \rho, r, \eta$  могут меняться в широком диапазоне (например, течение воздуха в аэродинамической трубе диаметром в десятки метров и течение воды в капилляре), но если число  $Re$  для этих случаев будет одинаково, то эти течения будут подобны друг другу. Такие зависимости в физике называют законами подобия.

Число Рейнольдса характеризует (по порядку величины) отношение кинетической энергии элемента жидкости к работе сил вязкого трения, совершаемой над ним. Действительно, кинетическая энергия в кубике со стороной  $r$  равна  $k \sim \frac{\rho r^3 v^2}{2}$ , сила трения  $F \sim \frac{r^2 \eta v}{r}$  и её работа  $A_F \sim Fr \sim \eta vr^2$ , откуда

$$Re \sim \frac{K}{A_F}.$$

Вязкие силы стремятся стабилизировать течение, тогда как избыток кинетической энергии может приводить к переходу её части в вихревое движение. Таким образом, можно заключить, что большие числа Рейнольдса благоприятствуют рождению турбулентных течений, а при малых  $Re$  течение будет, скорее всего, ламинарным.

Эксперимент подтверждает эти рассуждения: для заданной геометрии течения существует критическое значение числа Рейнольдса  $Re_{кр}$ , так что при  $Re > Re_{кр}$  ламинарное течение оказывается неустойчивым и рождается турбулентность. Для течения по трубе эксперимент даёт  $Re_{кр} \sim 10^3$ .

**Течение по трубе.** Рассмотрим стационарное течение вязкой жидкости или газа по трубе круглого сечения радиуса  $R$ . Закон такого движения описывается формулами Пуазейля:

$$v = \frac{P_1 - P_2}{L} \frac{1}{4\eta} (R^2 - r^2), \quad (6)$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (P_1 - P_2) \quad (7)$$

где  $P_2$  и  $P_1$  — давления на концах трубы, а  $L$  — длина трубы.

### Ход работы:

1. Будем снимать зависимость разности давлений  $\Delta P$  на некотором участке трубы от расхода воздуха  $\Delta Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ , при этом  $\Delta V$  измеряется газовым счетчиком, а  $\Delta t$  — секундомером. Измерения будем проводить на участке с установившимся потоком (для трубки с диаметром 3.9 и 5.9 мм возьмём участок длиной 50 см). Множитель на стойке микроманометра установим равным 0.2. Постепенно увеличим расход, начиная с маленьких перепадов давления.

Найдем  $k = \frac{\Delta P}{Q}$  как коэффициент наклона прямой  $\Delta P(Q)$  на участке, соответствующему ламинарному течению.

Получим  $\eta$  из формулы Пуазейля(10):

$$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8QL} = k \frac{\pi R^4}{8L} \quad (8)$$

Оценку  $Re$  получим из следующих соотношений:

$$Re = \frac{\rho v r}{\eta} = \frac{\rho l r S}{\eta t S} = \frac{\rho Q}{\eta \pi r} \quad (9)$$

Относительную погрешность  $\sigma_\eta$  определим из формулы:

$$\varepsilon_\eta^2 = 4^2 \varepsilon_r^2 + \varepsilon_k^2 + \varepsilon_L^2 \quad (10)$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{\sqrt{m-1}} \varepsilon_{k_i} = \frac{1}{\sqrt{m-1}} \sqrt{\varepsilon_{\Delta P}^2 + \varepsilon_Q^2}, \text{ где } m - \text{ количество точек на участке ламинарного течения} \quad (11)$$

Погрешности измерения:

$$\sigma_d = 0.05 \text{ мм}$$

$$\sigma_V = 0.01 \text{ дм}^3$$

$$\sigma_T = 0.5 \text{ с}$$

$\Delta P(Q)$ ,  $d = 3.9 \text{ мм}$

$\Delta T, \text{с}$	67.9	41.1	22.2	39.1	18.9	25.4	21.2	19.4	17.5	14.7
$\Delta V, \text{м}^3 * 10^{-3}$	0.3	1.0	1.0	2.5	1.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5
$Q, \text{м}^3/\text{с} * 10^{-5}$	0.442	2.433	4.513	6.395	7.949	9.839	11.815	12.92	14.286	17.053
$\Delta P, \text{Па}$	7.845	33.343	60.801	84.337	107.873	154.945	245.166	302.045	360.885	519.752

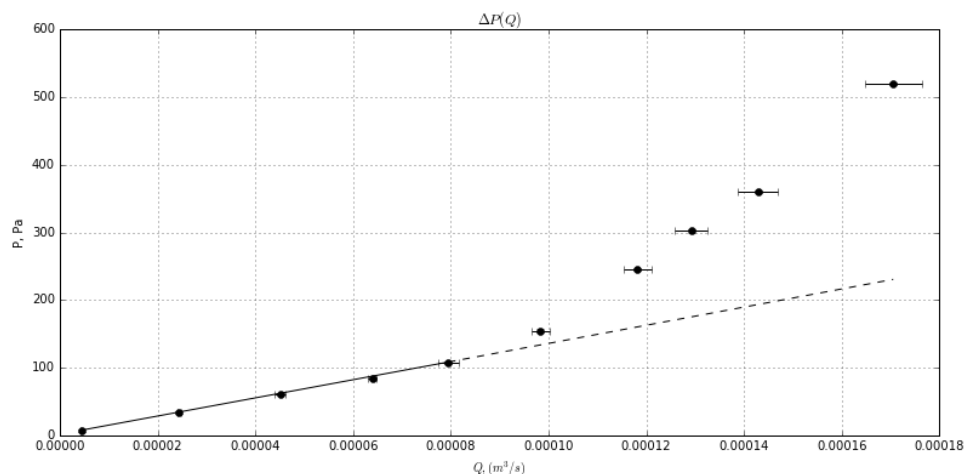


Рис. 1: График зависимости разности давлений от расхода в трубке 1 ( $d = 3.9\text{мм}$ ).

$$\Delta P(Q), d = 5.9\text{мм}$$

$\Delta T, c$	42.2	27.3	16.7	13.8	19.7	17.3
$\Delta V, m^3 * 10^{-3}$	1.0	2.5	3.0	3.0	5.0	5.0
$Q, m^3/s * 10^{-5}$	2.367	9.154	17.986	21.708	25.355	28.868
$\Delta P, \text{Па}$	7.845	29.42	94.144	137.293	182.404	229.476

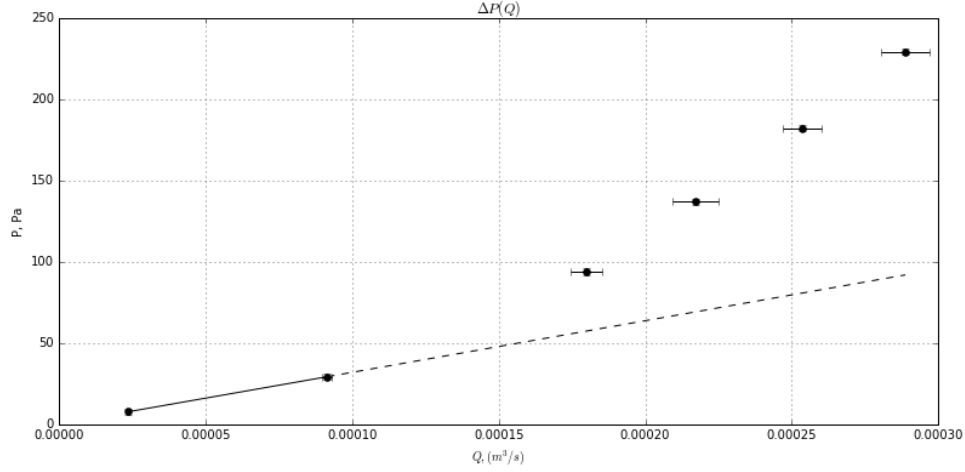


Рис. 2: График зависимости разности давлений от расхода в трубке 2 ( $d = 5.9\text{мм}$ ).

Для  $d = 3.9\text{мм}$ :  $m = 5$  - как видно из графика, 6-я точка уже немного отклоняется от начальной прямой. Можно предположить, что нарушение ламинарного течения происходит между 5 и 6 точкой.

$$k = 13.41 * 10^{-5} \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}, \varepsilon_k = 0.037$$

$$\varepsilon_\eta = 0.063$$

$$\eta = (1.52 \pm 0.1) * 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$$Re_{кр} \sim 930 \text{ (взяв расход } Q = (Q_5 + Q_6)/2)$$

Для  $d = 5.9\text{мм}$ :

$m = 2$  - уже первые 3 точки не лежат на прямой, можно сделать предположение что на участке от 1 до 2 течение ламинарное, а между 2 и 3 ламинарность нарушается.

$$k = 3.18 * 10^{-5} \frac{\text{Па} \cdot \text{с}}{\text{м}^3}, \varepsilon_k = 0.10$$

$$\varepsilon_\eta = 0.11$$

$$\eta = (1.89 \pm 0.21) * 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$$

$Re_{кр} \sim 937$  (взяв расход  $Q = (Q_2 + Q_3)/2$ ), получили значение близкое к полученному для тонкой трубки, что может говорить о правильности предположения длины участка ламинарного течения.

2. Теоретическая вязкость при  $\lambda \sim 10^{-5}\text{см}$ :

$$\eta_{th} = \frac{1}{3} \rho v_T \lambda = \frac{1}{3} \rho \lambda \sqrt{\frac{3RT}{m_{mol}}} \approx 2.02 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с} \quad (12)$$

где  $m_{mol} \approx 28.98\text{г/моль}$  - молярная масса воздуха

Также в таблицах можно найти значение вязкости воздуха для  $T \sim 15 - 20^\circ\text{C}$ :

$$\eta_{table} = 1.86 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$$

Полученные опытным путем и теоретические значения совпадают в пределах погрешности.

3. Найдем зависимость  $P$  от длины для трубок диаметром 3.9см и 5.9см при малом давлении

$$d = 3.9\text{мм}, Q = 0.042\text{дм}^3/\text{с}$$

$x, \text{м}$	0.105	0.405	0.805	1.305
$P(x), \text{Па}$	27.5	66.7	107.9	164.8

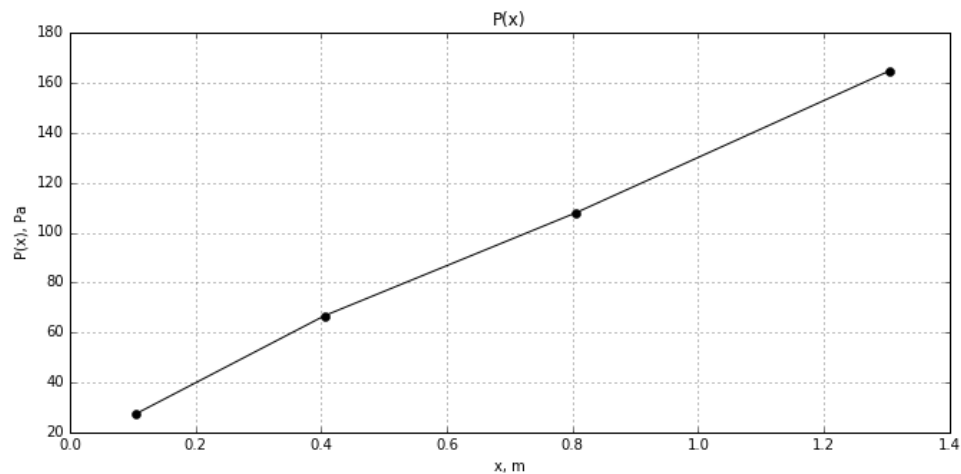


Рис. 3: График распределения давления от координаты  $x$ .

Как видно из графика, коэффициент наклона на участке  $[0.1:0.4]$  отличается от коэффициента наклона на последующих участках:  $L_{\text{установления}} \in (0.1, 0.4) \text{ м}$

$$d = 5.9\text{мм}, Q = 0.084\text{дм}^3/\text{с}$$

$x, \text{м}$	0.105	0.405	0.805	1.305
$P(x), \text{Па}$	23.5	39.2	60.8	88.3

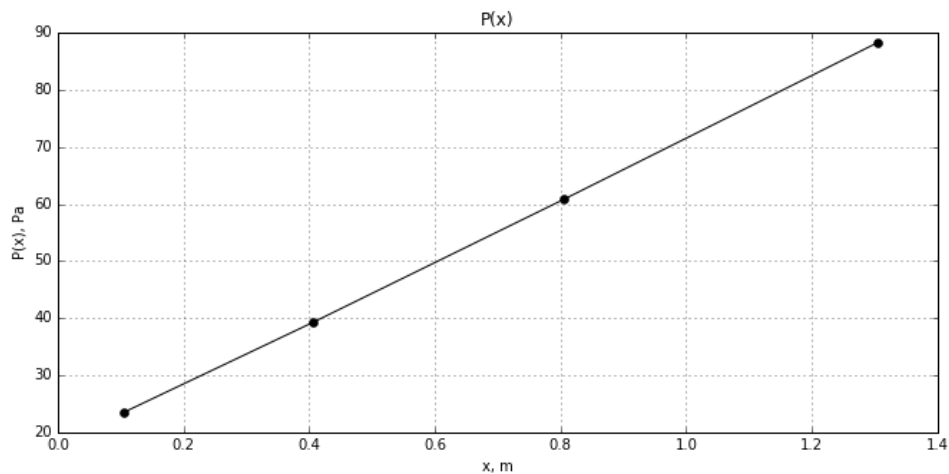


Рис. 4: График распределения давления координаты  $x$ .

График линейен на измеренном участке, значит  $L_{\text{установления}} \leq 0.1 \text{ м}$ .