Задача об оптимальном расписании (Scheduling Problem)

Зотов Алексей, 497

28 ноября 2016 г.

Формулировка задачи

Имеется множество работ J и множество машин M. Также задана функция $p : J \times M \to \mathbb{R}_+$. Значение $p(i, j) = p_{ij}$ означает время выполнения i-ой работы на j-ой машине.
Требуется найти распределние работ по машинам, так чтобы время выполнения всех работ было минимально. Формально, требуется построить функцию $x : J \times M \to \{1, 0\}$ такую, что:

$$\sum_{j \in M} x_{ij} = 1, \quad \forall i \tag{1}$$

$$\max_{j \in M} \sum_i x_{ij} p_{ij} \to \min \tag{2}$$

NP - полнота

Теорема. Задача об оптимальном расписании является **NP** - полной.
Здесь рассматривается измененный вариант задачи:

$$\max_{j \in M} \sum_i x_{ij} p_{ij} \le k \tag{3}$$

Доказательство.

1. **SCHEDULING** $\in$ **NP**
   Действительно, сертификатом будет являться значения функции x на множестве J. Полиномиально вычисляется искомый функционал.

2. Рассмотрим задачу **SUBSETSUM**.
   Дано множество A, определена весовая функция $s : A \to \mathbb{N}$ на элементах множества. Необходимо найти подмножество $A' \subseteq A$, такое что $\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A \setminus A'} s(a)$.
   Легко свести данную задачу к задаче о расписании, взяв $J = A$ - множество элементов как множество работ, $M = \{1, 2\}$ - два подмножества в задаче о разбиении как две машины, $p_{ij} = s(a_i)$ - вес элемента как сложность выполнения работы и $k = 0$, так как нам нужно точное разбиение. Тогда, решив задачу о расписании, мы получим решение задачи о разбиении.
   Покажем теперь, что **SUBSETSUM NP** - трудна, что завершит доказательство теоремы.

   Утверждение. SUBSETSUM $\in$ **NPH**.
   Доказательство утверждения. Сведем **NP** полную задачу о покрытии ребрами 3-дольного 3-однородного гиперграфаграфа (**3-dimensional matching , 3DM**) к задаче **SUBSETSUM**.
   Пусть $W = \{w_1, \dots w_q\}, X = \{x_1, \dots x_q\}, Y = \{y_1, \dots y_q\}$, $V = W \cup X \cup Y$- вершины и $M \subseteq W \times X \times Y$, $|M| = k$ - ребра гиперграфа из задачи **3DM**.
   Будем считать, что $\forall v \in V \exists e \in M : v \in e$, то есть для каждой вершины существует ребро, которое

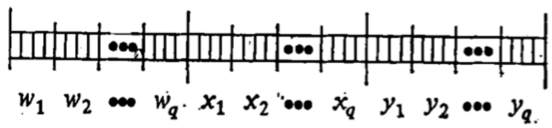
ее содержит. Если это не так, то ответ на задачу отрицательный, и это можно вычислить за полиномиальное время.
Требуется построить множество A и размеры $s(a)$ всех его элементов так, чтобы было выполнено:

$$\exists A' \in A \sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A' \setminus A} s(a) \iff \exists J \subseteq \{1 \dots k\}, m_j \in M, j \in J : \bigsqcup_J m_j = V \tag{4}$$

то есть, что в A можно найти подмножество, равное по весу своему дополнению, тогда и только тогда, когда M содержит искомое покрытие.
Множество A будет состоять из $k+2$ элементов. Первые k элементов множества A будут $\{a_i : 1 \leq i \leq k\}$, вес элемента $s(a_i)$ будет определеяться по m_i. Построим двоичную запись числа $s(a_i)$ по $m_i = (w_{f(i)}, x_{g(i)}, y_{h(i)})$. Для записи $s(a_i)$ будем использовать ровно $3qp$ бит, где $p = \lceil \log_2 (k+1) \rceil$. Каждой из трех компонент m_i соответствует один подотрезок длины qp в двоичной записи числа $s(a_i)$, который состоит из q блоков длины p, каждый блок соответствует своему $1 \leq i \leq q$. В числе $s(a_i)$ правые концы зон, соответствующих $w_{f(i)}, x_{g(i)}, y_{h(i)}$ равны 1, остальные биты равны 0:

$$s(a_i) = 2^{p(3q - f(i))} + 2^{p(2q - g(i))} + 2^{p(q - h(i))} \tag{5}$$

$s(a_i)$ имеет длину не больше $3pq$, и может быть построено за полиномиальное время.



$s(a_i)$

Заметим, что если просуммировать содержимое одной зоны всех элементов множества $\{a_i : 1 \leq i \leq k\}$, то результат не будет превосходить $2^p - 1$. Следовательно, при суммировании по любому подмножеству, никогда не придется переносить единицы из одной зоны(p бит) в соседнюю.
Положим :

$$B = \sum_{j=0}^{3q-1} 2^{pj} \tag{6}$$

B - число, в двоичной записи которого в правом конце каждой зоны стоит 1. Тогда для любого подмножества $A' \subseteq \{a_i : 1 \leq i \leq k\}$, соотношение:

$$\sum_{a \in A'} s(a) = B \tag{7}$$

выполняется тогда и только тогда $M' = \{m_i : a_i \in A'\}$ - решение **3DM**. Последние два элемента b_1 и b_2 множества A такие, что выполнено:

$$s(b_1) = 2 \left(\sum_{i=1}^{k} s(a_i) \right) - B \tag{8}$$

$$s(b_2) = \left(\sum_{i=1}^{k} s(a_i) \right) + B \tag{9}$$

Двоичные записи $s(b_1)$ и $s(b_2)$ имеют длину не более $3pq + 1$ и могут быть построены за полиномиальное время.

Предположим, что имеется подмножество $A' \subseteq A$, такое, что:

$$\sum_{a \in A'} s(a) = \sum_{a \in A' \setminus A} s(a) \tag{10}$$

Тогда каждая из этиъ сумм должна быть равна $\frac{1}{2} \sum_{a \in A} s(a) = 2 \sum_{i=1}^{k} s(a_i)$. Также $s(b_1) + s(b_2) = 3 \left(\sum_{i=1}^{k} s(a) \right)$, значит одно из множеств A' или $A' \setminus A$ содержит b_1 и не содержит b_2. Значит остальные

элементы этого подмножества из $\{a_i : 1 \le i \le k\}$ и сумма их весов в точности равна B. Тогда, по сделанному ранее замечанию, этому подмножеству соответствует $M' \subseteq M$ являющееся решением задачи **3DM**.
Обратно, если задано покрытие $M' \subseteq M$, являющееся решением задачи **3DM**, то $b_1 \cup a_i : m_i \in M'$ - искомое множество A'.
Утверждение даказано, и тем самым даказана теорема об **NP** - полноте задачи о расписании.

Полиномиальное приближение

Найдем полиномиальное приближенное решение для частного случая задачи об оптимальном расписании, когда мощности всех машин одинаковы, то есть $p_{ij} = p_i$.

Рассмотрим алгоритм **LPTR** (Longest Processing Time Rule):

1. Отсортируем работы в порядке невозрастания сложности работы p_i, то есть так, что $p_i \ge p_{i+1} \quad \forall i$.
2. Пройдем все работы в данном порядке, назначая на i-м шаге данную работу той машине, которая завершит обработку уже назначенных ей задач раньше всех остальных машин.

Теорема. LPTR - имеет коэффициент аппроксимации $\frac{4}{3}$ для задачи об оптимальном расписании, то есть $\mathrm{LPTR}(x) \le \frac{4}{3}\mathrm{OPT}(x) \quad \forall x$ - входные данные , $\mathrm{OPT}(x)$ - оптимальное решение.
$\triangleleft$ Пусть S - расписание, результат работы **LPTR** алгоритма, $w(S)$ - время окончания работ. Пусть l - работа, которая завершится последней. Можно считать, что l - это номер последней работы. Если это не так, то докажем для $J' = \{1 \cdots l\}$. Тогда для новой и исходной задачи алгоритм выдаст расписание с одним и тем же временем окончания работы, то есть $w(S') = w(S)$, в то время как оптимальное время в исходной задаче может быть только больше либо равно оптимальному времени в новой задаче ($\mathrm{OPT} \ge \mathrm{OPT}'$). Значит, доказав аппроксимацию для работы на J', автоматически докажем и для работы на J.

Пусть t_l - время начала выполнения работы l. Тогда в этот момент времени все машины заняты (одна или несколько могли освободиться в данный момент), иначе если какая-то машина была свободна, то t_l было бы меньше (в момент времени $t = 0$ все машины считаются занятыми). Значит все время t_l все m машин работали непрерывно:

$$t_l \le (\sum_{j \in M} p_j - p_l)/m \le \mathrm{OPT} - \frac{p_l}{m} \tag{11}$$

$$w(S) = t_l + p_l \le \mathrm{OPT} + p_l(1 - \frac{1}{m}) \tag{12}$$

Лемма. Если $p_{\min} > \frac{\mathrm{OPT}}{3}$, то $w(S) = OPT$.
Доказательство леммы. В условиях леммы в оптимальном расписании будет не более двух задач на одной машине. Покажем что LPTR алгоритм также не назначит более двух задач на одну машину. Всего работ не более чем $2m$. Предположим в S на какой-то машине не менее 3х работ. Пусть k - первая работа которая стала 3-ей на какой-то машине. Тогда есть и работа j, которая единственна на своей машине в S и не единственна в оптимальном. Заметим, что в LPTR j будет рассмотрена раньше k , иначе k была бы распределена на свободную машину. Тогда $p_j < 2\mathrm{OPT}/3$. С другой стороны, $p_j > 2p_{\min} > 2\mathrm{OPT}/3$, иначе работа k могла бы быть распределена на машину к работе j. Значит $LPTR$ назначает не более двух работ на машину. Можно найти такое оптимальное расписание S_2, что $a_i \ge a_j \quad i \le j$ и $b_i \le b_j \quad i \le j$, где a_i и b_i - время обработки первой и второй работ соответственно на i-ой машине. Именно такое расписание и выдаст LPTR алгоритм.
Завершим доказательство теоремы.
Если $p_{\min} > \frac{\mathrm{OPT}}{3}$, то S - оптимальное расписание. Иначе $p_l \le \frac{\mathrm{OPT}}{3}$ и по (12) получаем :

$$w(S) \le \mathrm{OPT} + \frac{\mathrm{OPT}}{3}(1 - \frac{1}{m}) \le \frac{4}{3}\mathrm{OPT} \tag{13}$$

Что завершает доказательство. $\triangleright$

Список литературы

- [1] http://research.microsoft.com/en-us/um/people/dechakr/Courses/CO454/Lectures/lecture12.pdf
- [2] М.Гэри, Д.Джонсон "Вычислительные машины и труднорешаемые задачи". М.: Мир, 1982.