

不确定性一阶拟线性双曲系统的随机 Galerkin 方法

第 11 组

Dec 24th, 2025

目录

引言

一维 gPC-SG 方法

对称化

随机空间离散化

空间离散化

时间离散化

二维 gPC-SG 方法

数值实验

Example 4.1: 光滑问题

Example 4.2: 平滑问题 (2 个随机变量)

Example 4.3: 不确定边界条件问题

引言

核心问题

gPC-SG 方法在拟线性双曲系统中的应用仍然有限

线性/标量双曲方程

- ✓ 构建的 gPC-SG 系统保持双曲性
- ✓ 理论和数值均良好

一般拟线性双曲系统

- ✗ gPC-SG 系统可能不是全局双曲的
- ✗ Jacobi 矩阵可能含复特征值
- ✗ 导致不稳定性且数值计算的不稳定性

一维 gPC-SG 方法

问题设定

考虑一维拟线性双曲系统：

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}(x, t, \xi) + A(\mathbf{U}; \xi) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{U}(x, t, \xi) = 0 \quad (2.1)$$

符号说明

- $\mathbf{U}(x, t, \xi) \in \mathbb{R}^N$: 未知量
- $A(\mathbf{U}; \xi)$: $N \times N$ 实矩阵
- $\xi \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$: 随机变量

双曲性假设

- $A(\mathbf{U}; \xi)$ 对所有可容许状态 $\mathbf{U} \in \mathcal{G}$ 和几乎处处 $\xi \in \Theta$ 是实可对角化的
- 即矩阵 $A(\mathbf{U}; \xi)$ 有 N 个实特征值和一组对应的实特征向量

构造对称双曲系统：论文的起点

设 $L(U; \xi)$ 为矩阵 $A(U; \xi)$ 的左特征向量矩阵，则：

$$A = L^{-1} \Lambda(U; \xi) L, \quad \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$$

用对称正定矩阵 $A_0(U; \xi) := L^T L$ 左乘方程 (2.1)，得到对称系统：

$$A_0(U; \xi) \frac{\partial}{\partial t} U + A_1(U; \xi) \frac{\partial}{\partial x} U = 0 \tag{2.3}$$

其中 $A_1(U; \xi) := L^T \Lambda L$ 是实对称矩阵。

构建对称双曲系统有利于数值计算的稳定性。

gPC 展开与 Galerkin 投影

设 $\{\phi_i(\xi)\}$ 为正交多项式基: $\int_{\Theta} \phi_i \phi_j d\mu(\xi) = \delta_{ij}$, 其中 μ 为概率密度函数

gPC 近似:

$$u_M(x, t, \xi) = \sum_{i=0}^M \hat{u}_i(x, t) \phi_i(\xi) \in \mathcal{G} \quad (2.5)$$

Galerkin 投影 \Rightarrow 确定性 gPC-SG 系统:

$$\hat{A}_0 \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(x, t) + \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} \hat{U}(x, t) = 0 \quad (2.6)$$

其中 $\hat{U} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_M)^T \in \mathbb{R}^{(M+1)N}$, $\hat{A}_k \in \mathbb{R}^{(M+1)N \times (M+1)N}$

$$\hat{A}_{ij}^{(k)} = \int_{\Theta} \phi_i \phi_j A_k(u_M; \xi) d\mu$$

定理 2.1: gPC-SG 系统的对称双曲性

定理

如果 $u_M(x, t, \xi) \in \mathcal{G}$, 则:

1. \hat{A}_0 是实对称正定的
2. \hat{A}_1 是实对称的
3. gPC-SG 系统 (2.6) 是对称双曲的

证明思路

- 利用 A_0, A_1 的对称性
- 通过二次型证明半正定性
- 利用正交多项式基的线性无关性

定理 2.1 证明：对称性

第一步：证明 \hat{A}_k 的对称性 ($k = 0, 1$)

设 $\tilde{A}_{ij}^{(k)}$ 为 \hat{A}_k^T 的子块，则：

$$\tilde{A}_{ij}^{(k)} = \left(\hat{A}_{ji}^{(k)} \right)^T = \left(\int_{\Theta} \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) A_k(u_M; \xi) d\mu(\xi) \right)^T$$

$$= \int_{\Theta} \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) \underbrace{A_k^T(u_M; \xi)}_{=A_k \text{ (对称)}} d\mu(\xi)$$

$$= \int_{\Theta} \phi_i(\xi) \phi_j(\xi) A_k(u_M; \xi) d\mu(\xi) = \hat{A}_{ij}^{(k)}$$

$\Rightarrow \hat{A}_k^T = \hat{A}_k$, 即 \hat{A}_k 是对称矩阵

定理 2.1 证明：半正定性

第二步：证明 \hat{A}_0 的半正定性

对任意 $z = (z_0, \dots, z_M)^T \in \mathbb{R}^{(M+1)N}$, 考虑二次型：

$$\begin{aligned} z^T \hat{A}_0 z &= \sum_{i,j=0}^M z_i \hat{A}_{ij}^{(0)} z_j^T = \sum_{i,j=0}^M z_i \left(\int_{\Theta} \phi_i \phi_j A_0 \, d\mu \right) z_j^T \\ &= \int_{\Theta} \left(\sum_{i=0}^M \phi_i z_i \right) A_0 \left(\sum_{j=0}^M \phi_j z_j \right)^T \, d\mu \\ &= \int_{\Theta} \underbrace{w^T A_0 w}_{\geq 0 \text{ (因 } A_0 \text{ 正定)}} \, d\mu \geq 0 \end{aligned}$$

其中 $w := \sum_{i=0}^M \phi_i(\xi) z_i^T$

定理 2.1 证明：严格正定

第三步：证明严格正定性

若 $z^T \hat{A}_0 z = 0$, 由于 A_0 正定, 必有:

$$w = \sum_{i=0}^M \phi_i(\xi) z_i^T = 0, \quad \text{a.e. } \xi \in \Theta$$

由于 $\{\phi_i(\xi)\}_{i=0}^M$ 是线性无关的正交多项式基, 所以:

$$z_i = 0, \quad \forall i = 0, \dots, M \quad \Rightarrow \quad z = 0$$

结论

$z^T \hat{A}_0 z = 0 \Leftrightarrow z = 0$, 即 \hat{A}_0 是严格正定的 \square

弱解

构建的 gPC 系统 (2.6) 是拟线性且非守恒的：

$$\hat{A}_0 \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(x, t) + \hat{A}_1 \frac{\partial}{\partial x} \hat{U}(x, t) = 0 \quad (2.6)$$

(2.6) 的弱解通过基于路径族的 DLM 理论定义：

$$\Psi(s, \hat{U}^-, \hat{U}^+) = \hat{U}^- + s(\hat{U}^+ - \hat{U}^-),$$

推论

$\hat{B} := \hat{A}_0^{-1} \hat{A}_1$ 是实可对角化的

WENO 算法

空间域 Ω 被划分为均匀网格：

$$\left\{ x_{j+\frac{1}{2}} = \left(j - \frac{1}{2} \right) \Delta x \in \Omega \mid j \in \mathbb{Z} \right\},$$

其中 Δx 表示空间步长。

将前面的 gPC 系数方程左乘 $\hat{\mathbf{A}}_0^{-1}$ 可得： $\partial \hat{\mathbf{U}} / \partial t + \hat{\mathbf{B}} \partial \hat{\mathbf{U}} / \partial x = 0$.

$$\frac{d \bar{\hat{U}}_j(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} \left(\hat{\mathbf{B}}_{j-\frac{1}{2}}^+ \left(\hat{\mathbf{U}}_{j-\frac{1}{2}}^+(t) - \hat{\mathbf{U}}_{j-\frac{1}{2}}^-(t) \right) + \hat{\mathbf{B}}_{j+\frac{1}{2}}^- \left(\hat{\mathbf{U}}_{j+\frac{1}{2}}^+(t) - \hat{\mathbf{U}}_{j+\frac{1}{2}}^-(t) \right) \right) \quad (1)$$

$$- \sum_{m=1}^q \omega_m \hat{\mathbf{B}} \left(\hat{\mathbf{U}}_j^{\text{WENO}}(\mathbf{x}_m^G, t) \right) \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}_j^{\text{WENO}}}{\partial x}(\mathbf{x}_m^G, t) =: \mathcal{L} \left(\bar{\hat{U}}(t); j \right),$$

单元平均近似与 WENO 重构

- $\bar{\hat{U}}_j(t)$: 单元 $I_j := \left[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}\right]$ 上 $\hat{U}(x, t)$ 的单元平均近似。
- $\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x, t)$: 在单元 I_j 内逼近 $\hat{U}(x, t)$ 的多项式函数，由以下三项重构得到：
 $\bar{\hat{U}}_j(t), \quad x_m^G, \quad \omega_m$

其中 x_m^G, ω_m 分别为第 m 个 Gauss-Lobatto 节点及其权重（经坐标变换至区间 I_j ）。

- 左右界面极限值：

$$\text{右极限 (前一个单元)} : \hat{U}_{j-\frac{1}{2}}^+(t) := \hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_{j-\frac{1}{2}} + 0, t) \quad (2)$$

$$\text{左极限 (后一个单元)} : \hat{U}_{j+\frac{1}{2}}^-(t) := \hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_{j+\frac{1}{2}} - 0, t) \quad (3)$$

单元平均近似与 WENO 重构

目标：在单元界面（如 $x_{j+1/2}$ ）处，由单元平均值 $\{\bar{U}_{j-2}, \dots, \bar{U}_{j+2}\}$ 重构出 $u_{j+1/2}^-$ 。

1. **子模板构造：**用 3 个 3 点模板构造 3 个三阶插值：

$$q_1 = \frac{1}{3}u_{j-2} - \frac{7}{6}u_{j-1} + \frac{11}{6}u_j \quad (S_1 : j-2, j-1, j)$$

$$q_2 = -\frac{1}{6}u_{j-1} + \frac{5}{6}u_j + \frac{1}{3}u_{j+1} \quad (S_2 : j-1, j, j+1)$$

$$q_3 = \frac{1}{3}u_j + \frac{5}{6}u_{j+1} - \frac{1}{6}u_{j+2} \quad (S_3 : j, j+1, j+2)$$

2. **平滑度：**计算各模板光滑度因子 β_r

$$\beta_1 = \frac{13}{12}(u_{j-2} - 2u_{j-1} + u_j)^2 + \frac{1}{4}(u_{j-2} - 4u_{j-1} + 3u_j)^2, \text{ etc.}$$

3. **加权：**非线性权重 $w_r = \frac{\alpha_r}{\sum \alpha}$, $\alpha_r = \frac{d_r}{(\beta_r + \varepsilon)^2}$

$$d_1 = 0.1, \quad d_2 = 0.6, \quad d_3 = 0.3, \quad \varepsilon = 10^{-6}$$

重构值： $u_{j+1/2}^- = w_1 q_1 + w_2 q_2 + w_3 q_3$

单元平均近似与 WENO 重构

1. WENO 重构

```
for j = 1 to N do
     $\{\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t)\}_{m=1}^4 \leftarrow \text{WENO5}(\hat{U}_{j-2}, \hat{U}_{j-1}, \hat{U}_j, \hat{U}_{j+1}, \hat{U}_{j+2})$ 
end for
```

```
function val = WENO_pos(v)
    % v 是长度为5的向量: [v1, v2, v3, v4, v5]
    % 对应 [j-2, j-1, j, j+1, j+2]
    % 平滑度因子, beta越小, 模板越光滑
    beta1 = 13/12 * (v(1) - 2*v(2) + v(3))^2 + 1/4 * (v(1) - 4*v(2) + 3*v(3))^2;
    beta2 = 13/12 * (v(2) - 2*v(3) + v(4))^2 + 1/4 * (v(2) - v(4))^2;
    beta3 = 13/12 * (v(3) - 2*v(4) + v(5))^2 + 1/4 * (3*v(3) - 4*v(4) + v(5))^2;
    d1 = 0.1; d2 = 0.6; d3 = 0.3;
    eps = 1e-6; % 这里不加保护在example 4.3中会崩溃
    alpha1 = d1 / (beta1+eps)^2; % 非线性权重
    alpha2 = d2 / (beta2+eps)^2;
    alpha3 = d3 / (beta3+eps)^2;
    w_sum = alpha1 + alpha2 + alpha3; % 归一化
    w1 = alpha1 / w_sum;
    w2 = alpha2 / w_sum;
    w3 = alpha3 / w_sum;
    q1 = 1/3*v(1) - 7/6*v(2) + 11/6*v(3);
    q2 = -1/6*v(2) + 5/6*v(3) + 1/3*v(4);
    q3 = 1/3*v(3) + 5/6*v(4) - 1/6*v(5);
    val = w1*q1 + w2*q2 + w3*q3;
end
```

3: 构造多项式与导数

```
for j = 1 to N do
     $\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x, t) \leftarrow \text{LagrangeInterp}(\{(x_m^G, \hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t))\}_{m=1}^4)$ 
    for m = 1 to 4 do
         $\frac{\partial \hat{U}_j^{\text{WENO}}}{\partial x}(x_m^G) \leftarrow \sum_{k=1}^4 \hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_k^G, t) \cdot \ell'_k(x_m^G)$ 
    end for
end for
```

```
parfor j = 1:Nx
    % 论文公式 (2.8) 第二行: - sum w_m B(U) du/dx
    % 严格来说应该用高斯点处的 WENO 重构值
    % 近似计算: 使用单元平均值计算 B, 使用重构边界值计算 du/dx

    % U_R(:, :, j) 是单元 j 左侧重构值 (U_{-j+1/2}^+)
    % U_L(:, :, j+1) 是单元 j 右侧重构值 (U_{-j+1/2}^-)
    U_left_bound = U_R(:, :, j);
    U_right_bound = U_L(:, :, j+1);

    % du_dx_coeffs = (U_right_bound - U_left_bound) / dx; %-du/dx
    U_center_coeffs = 0.5 * (U_left_bound + U_right_bound);%-这里直接取平均值了
    % 还是投影到物理空间
    u_center_phys = U_center_coeffs * Phi_val;
    du_dx_phys = du_dx_coeffs * Phi_val;
    du_dx_phys_3D = reshape(du_dx_phys, nVar, 1, N_quad);
    [A_batch, ~] = Euler_Eigen_Batch(u_center_phys, gamma); % 直接用平均值的简化版本
    [%A_batch, ~] = Euler_Eigen_Batch_2D(u_center_phys, gamma); % Example 4.5
    term_phys_3D = pagetimes(A_batch, du_dx_phys_3D);
    term_phys = reshape(term_phys_3D, nVar, N_quad);
    Projected = term_phys * P_mat;
    Volume_Term_coeffs = Projected;
    Volume_Term_All(:, :, j) = Volume_Term_coeffs;
end
```

限制器 Limiter(Remark 2.2)

- WENO 重构得到的 $\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x, t)$ 可能超出容许状态集 \hat{G}_M , 导致数值不稳定。
- 限制策略:** 假设 $\bar{U}_j(t) \in \hat{G}_M$, 对每个 Gauss-Lobatto 点 x_m^G , 若 $\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t) \notin \hat{G}_M$, 则:

$$\tilde{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t) = \theta \left(\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t) - \bar{U}_j(t) \right) + \bar{U}_j(t), \quad m = 1, \dots, q$$

其中:

- $\theta = \min_{1 \leq m \leq q} \theta_m$
- 若 $\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t) \in \hat{G}_M$, 则 $\theta_m = 1$ (无需限制)
- 否则, θ_m 为线段 $\left\{ \Psi(s, \bar{U}_j(t), \hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t)), s \in [0, 1] \right\}$ 与 \hat{G}_M 边界的交点参数。

限制器 Limiter(Remark 2.2)

- 进一步讨论：

- 若 \hat{G}_M 是凸集（如 Euler 方程），则交点唯一
- 单元平均值 $\bar{\hat{U}}_j(t) \in \hat{G}_M$ 可能发生

$$\bar{\hat{U}}_j(t; \bar{\theta}) = (\bar{u}_0, \bar{\theta}\bar{u}_1, \dots, \bar{\theta}\bar{u}_M)^\top$$

其中 $\bar{\theta}$ 为从 $\bar{\hat{U}}_j(t)$ 到 \hat{G}_M 边界的交点参数。

限制器 Limiter

2. 限制器 (缩放)

```
for j = 1 to N do
    θ ← 1
    for m = 1 to 4 do
        if  $\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t) \notin \hat{G}_M$  then
             $\psi(s) \leftarrow \hat{U}_j(t) + s \cdot (\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t) - \hat{U}_j(t))$ 
             $\theta_m \leftarrow \min\{s > 0 \mid \psi(s) \in \partial \hat{G}_M\}$ 
             $\theta \leftarrow \min(\theta, \theta_m)$ 
        end if
    end for
    for m = 1 to 4 do
         $\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t) \leftarrow \theta \cdot (\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t) - \hat{U}_j(t)) + \hat{U}_j(t)$ 
    end for
end for
```

```
% 限制器, 把超出容许状态集的拉回
function U_limited = Limiter(U_target, U_base, Phi_val, gamma)
    % U_target: 待检查的WENO重构值
    % U_base: 单元平均值
    [is_valid,~,~] = check_Euler(U_target, Phi_val, gamma);
    if is_valid
        U_limited = U_target;
        return;
    end
    % 如果超过限制, 开始寻找 theta
    % U_new = U_base + theta * (U_target - U_base)
    dU = U_target - U_base;
    % 二分法查找最大 theta
    theta_low = 0;
    theta_high = 1;
    tol = 1e-6;
    for iter = 1:40
        theta_mid = 0.5 * (theta_low + theta_high);
        U_test = U_base + theta_mid * dU;
        [is_valid,~,~] = check_Euler(U_test, Phi_val, gamma);
        if is_valid
            theta_low = theta_mid; % 可行, 尝试更大的 theta
        else
            theta_high = theta_mid; % 不可行, 减小 theta
        end
        if (theta_high - theta_low) < tol
            break;
        end
    end
    % 返回修正值
    U_limited = U_base + theta_low * dU;
end
```

中间矩阵 \hat{B}_ψ 的分裂

- $\hat{B}_{j+\frac{1}{2}}^+$ 和 $\hat{B}_{j+\frac{1}{2}}^-$ 由中间矩阵 \hat{B}_ψ 分裂得到：

$$\hat{B}_\psi \left(\hat{U}_{j+\frac{1}{2}}^-, \hat{U}_{j+\frac{1}{2}}^+ \right) = \hat{B}_{j+\frac{1}{2}}^- + \hat{B}_{j+\frac{1}{2}}^+$$

- 中间矩阵 \hat{B}_ψ 的 *Lax – Friedrichs* 分裂：

$$\hat{B}_{j+\frac{1}{2}}^\pm = \frac{1}{2} \left(\hat{B}_\psi \left(\hat{U}_{j+\frac{1}{2}}^-, \hat{U}_{j+\frac{1}{2}}^+ \right) \pm \alpha_{j+\frac{1}{2}} I_{(M+1)N} \right)$$

- $\alpha_{j+\frac{1}{2}}$: 不小于 \hat{B}_ψ 的谱半径（即所有特征值绝对值的最大值）。
- $I_{(M+1)N}$: $(M+1)N$ 阶单位矩阵。

- 性质：

- $\hat{B}_{j+\frac{1}{2}}^+$ 只含非负特征值
- $\hat{B}_{j+\frac{1}{2}}^-$ 只含非正特征值
- $\alpha_{j+\frac{1}{2}}$ 可通过矩阵 $A(U; \xi)$ 的特征值估计（定理 2.2）。

引理 2.1：谱半径与半正定性

引理

设 \mathcal{A}_0 是实对称正定矩阵， \mathcal{A}_1 是实对称矩阵， λ 是实数。则：

$$\lambda\mathcal{A}_0 \pm \mathcal{A}_1 \text{ 半正定} \iff \lambda \geq \alpha(\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{A}_1)$$

其中 $\alpha(\cdot)$ 表示谱半径。

证明：利用合同变换

$$\lambda\mathcal{A}_0 \pm \mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}_0^{1/2})^T \left(\lambda I \pm \mathcal{A}_0^{-1/2} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_0^{-1/2} \right) \mathcal{A}_0^{1/2}$$

矩阵 $\mathcal{A}_0^{-1/2} \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_0^{-1/2}$ 与 $\mathcal{A}_0^{-1} \mathcal{A}_1$ 相似，具有相同特征值

\Rightarrow 半正定 $\Leftrightarrow \lambda \geq \text{最大特征值模} = \alpha(\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{A}_1) \square$

定理 2.2：谱半径估计

定理

若 $\Psi(s_m, \hat{U}^-, \hat{U}^+) \in \mathcal{G}_M$, $m = 1, \dots, \bar{q}$, 则中间矩阵 \hat{B}_Ψ 的谱半径满足：

$$\alpha := \max_{\ell, m} \sup_{\xi \in \Theta} \left| \lambda_\ell(u_M^{(m)}(\xi); \xi) \right| \geq \alpha(\hat{B}_\Psi)$$

其中 λ_ℓ 是原系统矩阵 $A(U; \xi)$ 的第 ℓ 个特征值。

实际意义

- 避免计算大矩阵 $\hat{B}_\Psi \in \mathbb{R}^{(M+1)N \times (M+1)N}$ 的特征值
- 只需计算原 $N \times N$ 系统的特征值
- 大大简化了 Lax-Friedrichs 分裂的计算

定理 2.2 证明

证明思路：

Step 1：由定理 2.1， \hat{A}_0^Ψ 正定对称， \hat{A}_1^Ψ 对称

Step 2：由引理 2.1，需证 $\alpha\hat{A}_0^\Psi \pm \hat{A}_1^\Psi$ 半正定

Step 3：该矩阵的子块为

$$A_{ij}^\Psi = \sum_{m=1}^{\bar{q}} \hat{\omega}_m \int_{\Theta} \phi_i \phi_j \left(\underline{\alpha A_0(u_M^{(m)}; \xi) \pm A_1(u_M^{(m)}; \xi)} \right) d\mu$$

Step 4：由 α 的定义和引理 2.1：

$\alpha A_0(u_M^{(m)}; \xi) \pm A_1(u_M^{(m)}; \xi)$ 对所有 ξ 半正定

Step 5：类比定理 2.1 的证明方法，得 $\alpha\hat{A}_0^\Psi \pm \hat{A}_1^\Psi$ 半正定 \square

LaxFriedrichs 分裂

- Lax-Friedrichs 分裂：

$$A^\pm = \frac{1}{2} (A \pm \alpha I)$$

其中：

- I 是单位矩阵；
- $\alpha \geq \rho(A)$, 即 α 不小于矩阵 A 的谱半径：

$$\rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$$

- 设 $Av_i = \lambda_i v_i$, 则：

$$A^+ v_i = \frac{1}{2} (\lambda_i + \alpha) v_i, \quad A^- v_i = \frac{1}{2} (\lambda_i - \alpha) v_i$$

- 若 $\alpha \geq |\lambda_i|$, 则：

- $\lambda_i + \alpha \geq 0 \Rightarrow A^+$ 特征值非负
- $\lambda_i - \alpha \leq 0 \Rightarrow A^-$ 特征值非正

欧拉方程系数矩阵的特征值

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E + p) \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma-3}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ u\left(\frac{\gamma-1}{2}u^2 - H\right) & H - (\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}, \quad H = \frac{E+p}{\rho}$$

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + c$$

$$c = \sqrt{\gamma p / \rho}$$

$$LA = \Lambda L$$

```
% 欧拉方程的特征值
function [A, L, alpha, lambda] = Euler_Eigen(U, gamma)
    rho = U(1); m = U(2); E = U(3);
    u = m / rho;
    p = (gamma - 1) * (E - 0.5 * rho * u^2);
    c = sqrt(gamma * p / rho);
    alpha = abs(u) + c;
    A = zeros(3,3);
    H = (E+p)/rho;
    gm1 = gamma - 1;
    u2 = u^2;
    % Jacobian A: aF/au
    A(1,2) = 1;
    A(2,1) = 0.5*(gamma-3)*u2; A(2,2) = (3-gamma)*u; A(2,3) = gm1;
    A(3,1) = u*(0.5*gm1*u2 - H); A(3,2) = H - gm1*u2; A(3,3) = gamma*u;
    % 左特征向量
    % 对应特征值: U-c, U, U+c
    L = zeros(3,3);
    b1 = 0.5 * gm1 * u2;
    b2 = gm1 * u;
    % U - c
    L(1,1) = (b1 + c*u) / (2*c^2);
    L(1,2) = -(b2 + c) / (2*c^2);
    L(1,3) = gm1 / (2*c^2);
    % U
    L(2,1) = 1 - b1 / c^2;
    L(2,2) = b2 / c^2;
    L(2,3) = -gm1 / c^2;
    % U + c
    L(3,1) = (b1 - c*u) / (2*c^2);
    L(3,2) = -(b2 - c) / (2*c^2);
    L(3,3) = gm1 / (2*c^2);
```

中间矩阵 $\hat{B}_\psi(\hat{U}^-, \hat{U}^+)$ 的计算

- 中间矩阵 $\hat{B}_\psi(\hat{U}^-, \hat{U}^+)$ 用来近似路径积分：

$$\hat{B}_\psi(\hat{U}^-, \hat{U}^+) \approx \left(\int_0^1 \hat{A}_0(\Psi(s, \hat{U}^-, \hat{U}^+)) ds \right)^{-1} \left(\int_0^1 \hat{A}_1(\Psi(s, \hat{U}^-, \hat{U}^+)) ds \right)$$

- 积分路径： $\Psi(s, \hat{U}^-, \hat{U}^+) = \hat{U}^- + s(\hat{U}^+ - \hat{U}^-)$, $s \in [0, 1]$, 即连接左右状态的直线段。
- 数值实现：用 Gauss 积分：

$$\hat{B}_\psi \approx \left(\sum_{m=1}^{\tilde{q}} \tilde{\omega}_m \hat{A}_0(\Psi(s_m, \hat{U}^-, \hat{U}^+)) \right)^{-1} \left(\sum_{m=1}^{\tilde{q}} \tilde{\omega}_m \hat{A}_1(\Psi(s_m, \hat{U}^-, \hat{U}^+)) \right)$$

其中 s_m 是映射到 $[0, 1]$ 的第 m 个 Gauss 节点, $\tilde{\omega}_m$ 为其权重 (论文中取 $\tilde{q} = 3$)。

中间矩阵 $\hat{B}_\psi(\hat{U}^-, \hat{U}^+)$ 的计算

算法 3 ComputeIntermediateMatrix(\hat{U}^- , \hat{U}^+)

for $m = 1$ to 3 do

$s_m \leftarrow$ Gauss 节点 on $[0, 1]$, $\tilde{\omega}_m \leftarrow$ 对应权重

$\psi_m \leftarrow \hat{U}^- + s_m(\hat{U}^+ - \hat{U}^-)$

$\hat{A}_0^{(m)} \leftarrow \hat{A}_0(\psi_m)$, $\hat{A}_1^{(m)} \leftarrow \hat{A}_1(\psi_m)$

end for

$\hat{A}_0^\psi \leftarrow \sum_{m=1}^3 \tilde{\omega}_m \hat{A}_0^{(m)}$, $\hat{A}_1^\psi \leftarrow \sum_{m=1}^3 \tilde{\omega}_m \hat{A}_1^{(m)}$

$\hat{B}_\psi \leftarrow (\hat{A}_0^\psi)^{-1} \hat{A}_1^\psi$

return \hat{B}_ψ

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}$$

$$\hat{A}_0 \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \hat{A}_1 \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + B \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} = 0, \quad B = \hat{A}_0^{-1} \hat{A}_1$$

$$\hat{A}_0 = \int \phi_i \phi_j A_0(U; \xi) d\mu, \quad \hat{A}_1 = \int \phi_i \phi_j A_1(U; \xi) d\mu$$

$$A_0^{-1} A_1 = A(U) \quad (\text{物理空间})$$

$$B \cdot v \approx \underbrace{\left[\sum_q w_q \cdot A(U(\xi_q)) \cdot v(\xi_q) \right]}_{\text{投影回系数空间}} \cdot \Phi^T$$

投影回系数空间

```
% i 对应论文中的 j+1/2
u_l_coeffs = U_L(:, :, i); % U_{j+1/2}^-
u_r_coeffs = U_R(:, :, i); % U_{j+1/2}^+
jump_coeffs = u_r_coeffs - u_l_coeffs; % (U^+ - U^-)

% 先在物理空间上计算，后面投影回去
u_l_phys = u_l_coeffs * Phi_val; % (3, N_quad)
u_r_phys = u_r_coeffs * Phi_val;
jump_phys = u_r_phys - u_l_phys; %(U_R(xi) - U_L(xi))
jump_phys_3D = reshape(jump_phys, nVar, 1, N_quad);
% B = A0^-1 * A1
% 通过 B(path) * Jump(path) = A0(path)^-1 * A1(path) * Jump(path) 来计算
% 下面计算 <Phi_k, B(path) * Jump(path)>
B_Jump_coeffs = zeros(nVar, nModes);
local_max_alpha = 0;
% 用3个gauss积分节点
for p = 1:3
    s = path_nodes(p);
    w_path = path_weights(p);
    % 三点积分: U(s, xi) = U_L(xi) + s * (U_R(xi) - U_L(xi))
    u_path_phys = u_l_phys + s * jump_phys;
    % 对于欧拉方程, B 矩阵 = 对于随机样本xi, 计算Jacobian 矩阵 A(U(xi))再投影回系数空间
    % 批量计算所有gauss积分点的jacobian矩阵dF/dU, 加快运行速度
    [A_batch, alpha_vec] = Euler_Eigen_Batch(u_path_phys, gamma); % Example 4.1 4.3
    local_max_alpha = max(local_max_alpha, max(alpha_vec)); % 找最大特征值
    % 批量矩阵乘法 Term_phys = A(u) * jump
    Term_phys_3D = pagemtimes(A_batch, jump_phys_3D);
```

中间矩阵 $\hat{B}_\psi(\hat{U}^-, \hat{U}^+)$ 的计算

关键性质：若路径上所有点 $\Psi(s_m, \hat{U}^-, \hat{U}^+)$ 均为容许状态，则 \hat{B}_ψ 是 **实对角化矩阵** \rightarrow 系统为双曲型 \rightarrow 数值稳定

$$\mathbf{u}_M^{(m)}(\xi) = \sum_{i=0}^M \left(\hat{u}_i^{(m)} \phi_i(\xi) \right)^\top \in G, \quad \forall \xi \in \Theta,$$

其中：

$$\left(\hat{u}_0^{(m)}, \dots, \hat{u}_M^{(m)} \right)^\top := \Psi(s_m, \hat{U}^-, \hat{U}^+).$$

启示

限制器 Limiter 是本方法中保持系统双曲性的重要技术

2 WENO 算法伪代码

算法 1 WENO 算法

输入: 单元平均 gPC 系数 $\{\hat{U}_j(t)\}_{j=1}^N$, 网格 $\{x_{j\pm 1/2}\}$

输出: $\left\{ \frac{d\hat{U}_j}{dt} \right\}_{j=1}^N$

1. WENO 重构

for $j = 1$ to N do

$$\{\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t)\}_{m=1}^4 \leftarrow \text{WENO5}(\hat{U}_{j-2}, \hat{U}_{j-1}, \hat{U}_j, \hat{U}_{j+1}, \hat{U}_{j+2})$$

end for

2. 限制器 (缩放)

for $j = 1$ to N do

$$\theta \leftarrow 1$$

for $m = 1$ to 4 do

if $\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t) \notin \hat{G}_M$ then

$$\psi(s) \leftarrow \hat{U}_j(t) + s \cdot (\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t) - \hat{U}_j(t))$$

$$\theta_m \leftarrow \min\{s > 0 \mid \psi(s) \in \partial\hat{G}_M\}$$

$$\theta \leftarrow \min(\theta, \theta_m)$$

end if

end for

for $m = 1$ to 4 do

$$\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t) \leftarrow \theta \cdot (\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t) - \hat{U}_j(t)) + \hat{U}_j(t)$$

end for

end for

3: 构造多项式与导数

for $j = 1$ to N do

$$\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x, t) \leftarrow \text{LagrangeInterp}(\{(x_m^G, \hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t))\}_{m=1}^4)$$

for $m = 1$ to 4 do

$$\frac{\partial \hat{U}_j^{\text{WENO}}}{\partial x}(x_m^G) \leftarrow \sum_{k=1}^4 \hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_k^G, t) \cdot \ell'_k(x_m^G)$$

end for

end for

算法 2 WENO 算法 (续)

```

4: 计算界面通量与时间导数
for  $j = 1$  to  $N$  do
    左界面  $x_{j-1/2}$ 
     $\hat{U}_{j-1/2}^- \leftarrow \hat{U}_{j-1}^{\text{WENO}}(x_{j-1/2}^+)$ 
     $\hat{U}_{j-1/2}^+ \leftarrow \hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_{j-1/2})$ 
     $\hat{B}_{\psi}^{(j-1/2)} \leftarrow \text{ComputeIntermediateMatrix}(\hat{U}_{j-1/2}^-, \hat{U}_{j-1/2}^+)$ 
    Lax-Friedrichs 分裂
     $\alpha_{j-1/2} \leftarrow \max_{\ell,m} \sup_{\xi \in \Omega} |\lambda_\ell(u_M^{(m)}(\xi); \xi)|$ 
     $\hat{B}_{\psi}^+ \leftarrow \frac{1}{2}(\hat{B}_{\psi}^{(j-1/2)} + \alpha_{j-1/2} I)$ 
     $B_{j-1/2}^- \leftarrow \frac{1}{2}(\hat{B}_{\psi}^{(j-1/2)} - \alpha_{j-1/2} I)$ 
    右界面  $x_{j+1/2}$ 
     $\hat{U}_{j+1/2}^- \leftarrow \hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_{j+1/2}^-)$ 
     $\hat{U}_{j+1/2}^+ \leftarrow \hat{U}_{j+1}^{\text{WENO}}(x_{j+1/2}^+)$ 
     $\hat{B}_{\psi}^{(j+1/2)} \leftarrow \text{ComputeIntermediateMatrix}(\hat{U}_{j+1/2}^-, \hat{U}_{j+1/2}^+)$ 
    Lax-Friedrichs 分裂
     $\alpha_{j+1/2} \leftarrow \max_{\ell,m} \sup_{\xi \in \Omega} |\lambda_\ell(u_M^{(m)}(\xi); \xi)|$ 
     $\hat{B}_{\psi}^+ \leftarrow \frac{1}{2}(\hat{B}_{\psi}^{(j+1/2)} + \alpha_{j+1/2} I)$ 
     $B_{j+1/2}^- \leftarrow \frac{1}{2}(\hat{B}_{\psi}^{(j+1/2)} - \alpha_{j+1/2} I)$ 
    组成  $\mathcal{L}(\bar{U}(t); j)$ 
     $D_{\text{plus}, j-\frac{1}{2}} \leftarrow \hat{B}_{j-\frac{1}{2}}^+ (\hat{U}_{j-\frac{1}{2}}^+ - \hat{U}_{j-\frac{1}{2}}^-)$ 
     $D_{\text{minus}, j+\frac{1}{2}} \leftarrow \hat{B}_{j+\frac{1}{2}}^+ (\hat{U}_{j+\frac{1}{2}}^+ - \hat{U}_{j+\frac{1}{2}}^-)$ 
     $\frac{d\bar{U}}{dt} \leftarrow -\frac{1}{2\Delta x} (D_{\text{plus}, j-\frac{1}{2}} + D_{\text{minus}, j+\frac{1}{2}})$ 
     $\frac{d\psi}{dt} \leftarrow \frac{d\bar{U}}{dt} - \sum_{m=1}^k \omega_m \cdot \hat{B}(\hat{U}_j^{\text{WENO}}(x_m^G, t)) \cdot \frac{\partial G^{\text{WENO}}}{\partial x}(x_m^G)$ 
end for
return  $\left\{ \frac{d\bar{U}_j}{dt} \right\}_{j=1}^N$ 

```

算法 3 ComputeIntermediateMatrix(\hat{U}^- , \hat{U}^+)

```

for  $m = 1$  to  $3$  do
     $s_m \leftarrow$  Gauss 节点 on  $[0, 1]$ ,  $\tilde{\omega}_m \leftarrow$  对应权重
     $\psi_m \leftarrow \hat{U}^- + s_m(\hat{U}^+ - \hat{U}^-)$ 
     $\hat{A}_0^{(m)} \leftarrow \hat{A}_0(\psi_m)$ ,  $\hat{A}_1^{(m)} \leftarrow \hat{A}_1(\psi_m)$ 
end for
 $\hat{A}_0^G \leftarrow \sum_{m=1}^3 \tilde{\omega}_m \hat{A}_0^{(m)}$ ,  $\hat{A}_1^G \leftarrow \sum_{m=1}^3 \tilde{\omega}_m \hat{A}_1^{(m)}$ 
 $\hat{B}_{\psi} \leftarrow (\hat{A}_0^G)^{-1} \hat{A}_1^G$ 
return  $\hat{B}_{\psi}$ 

```

三阶 Runge-Kutta

三阶 Runge-Kutta

$$\hat{U}^* = \hat{U}^n + \Delta t \mathcal{L}(\hat{U}^n)$$

$$\hat{U}^{**} = \frac{3}{4}\hat{U}^n + \frac{1}{4}(\hat{U}^* + \Delta t \mathcal{L}(\hat{U}^*))$$

$$\hat{U}^{n+1} = \frac{1}{3}\hat{U}^n + \frac{2}{3}(\hat{U}^{**} + \Delta t \mathcal{L}(\hat{U}^{**}))$$

数值实验

1D 欧拉方程

守恒形式：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

其中：

- $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, E)^\top$
- $\mathbf{F} = (\rho u, \rho u^2 + p, uE + up)^\top$
- $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$
- $E = \rho e + \frac{1}{2} \rho u^2$

状态方程（理想气体）：

$$p = (\Gamma - 1)\rho e, \quad \text{空气通常取绝热率 } \Gamma = 1.4$$

2D 欧拉方程

守恒形式：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{G}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = 0$$

其中：

- $\mathbf{U} = (\rho, \rho u, \rho v, E)^\top$
- $\mathbf{F}_1 = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, uE + up)^\top$
- $\mathbf{F}_2 = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, vE + vp)^\top$
- $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \partial \mathbf{F}_1 / \partial \mathbf{U}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \partial \mathbf{F}_2 / \partial \mathbf{U}$
- $E = \rho e + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2)$

状态方程（理想气体）：

$$p = (\Gamma - 1) \rho e, \quad \text{空气通常取绝热率 } \Gamma = 1.4$$

数值解与参考解

Example 4.1

光滑问题

精度验证

收敛阶测试

Example 4.3

不确定边界

周期性驱动
波传播问题

Example 4.5

2D 黎曼问题

四稀疏波
相互作用

数值解: gPC-SG 方法 (WENO + Runge Kutta)

参考解: 随机配点法 (WENO/迎风格式)

对于求得的数值解, 有:

- $\mathbb{E}[u_M] = \hat{u}_0$, 即第一个 gPC 系数
- $\text{Var}[u_M] = \sum_{i=1}^M \hat{u}_M^2$, 即剩下的 gPC 系数的平方和

Example 4.1: 光滑问题

对于平滑问题

$$(\rho, u, p)(x, t, \xi) = (1 + 0.2 \sin(2\pi(x - (0.8 + 0.2\xi)t)), 0.8 + 0.2\xi, 1),$$

其中 $\xi \sim \mathcal{U}[-1, 1]$.

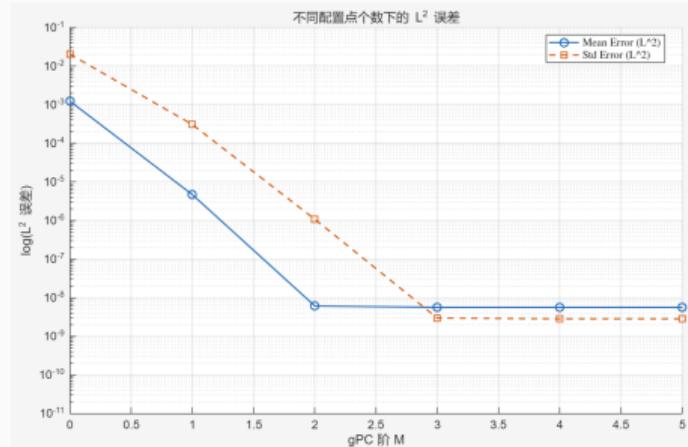
解析统计量：

$$\theta := 2\pi(x - 0.8T), \quad \beta := 0.4\pi T$$

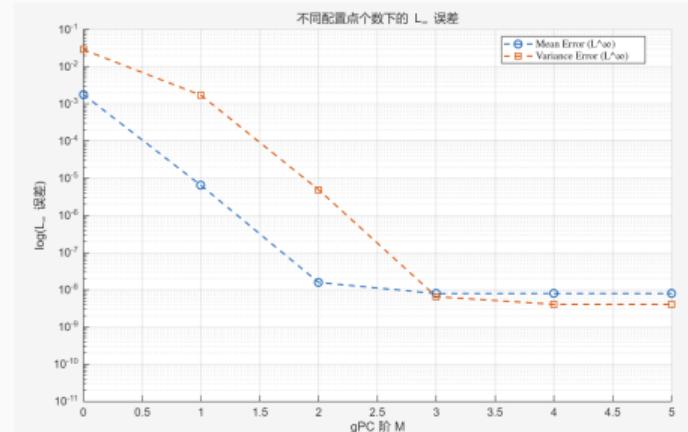
$$\mathbb{E}[\rho] = 1 + 0.2 \sin \theta \cdot \frac{\sin \beta}{\beta}$$

$$\text{Std}[\rho] = 0.2 \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \cos(2\theta) \frac{\sin(2\beta)}{2\beta} \right) - \left(\sin \theta \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2}$$

Example 4.1: gPC 阶数收敛性



$t = 0.2$ 时数值解期望和标准差的 L^2 误差



$t = 0.2$ 时数值解期望和标准差的 L 无穷误差

观察

- 前半段：指数收敛 ($\log(\text{error}) \sim -kM$)
- 后半段：误差饱和，被空间和时间离散误差主导

Example 4.1: WENO 五阶收敛阶验证

表 1: 不同 N_x 下的误差 (期望, gPC 阶数 $M = 4$)

| N_x | L^2 误差 | L^2 阶 | L^∞ 误差 | L^∞ 阶 |
|-------|----------|---------|---------------|--------------|
| 10 | 2.96e-03 | – | 4.38e-03 | – |
| 20 | 1.44e-04 | 4.36 | 2.23e-04 | 4.30 |
| 40 | 4.49e-06 | 5.01 | 7.63e-06 | 4.87 |
| 80 | 1.36e-07 | 5.04 | 2.30e-07 | 5.05 |
| 160 | 4.21e-09 | 5.02 | 6.60e-09 | 5.12 |

注

取 $\Delta t_n \sim \Delta x^{5/3}$, 实现空间和时间上的五阶收敛

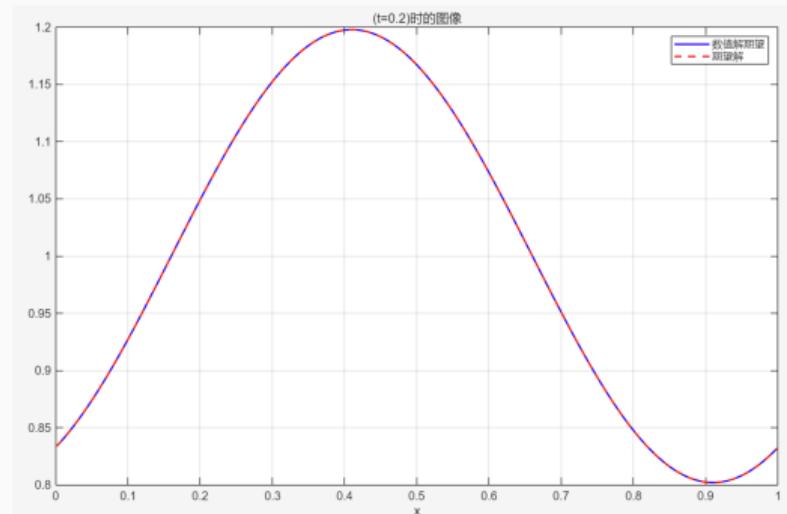
Example 4.1: WENO 五阶收敛阶验证

表 2: 不同 N_x 下的误差 (标准差, gPC 阶数 $M = 4$)

| N_x | L^2 误差 | L^2 阶 | L^∞ 误差 | L^∞ 阶 |
|-------|----------|---------|---------------|--------------|
| 10 | 4.63e-04 | – | 7.51e-04 | – |
| 20 | 2.36e-05 | 4.30 | 4.89e-05 | 3.94 |
| 40 | 9.03e-07 | 4.71 | 1.41e-06 | 5.12 |
| 80 | 2.78e-08 | 5.02 | 5.98e-08 | 4.56 |
| 160 | 7.37e-10 | 5.24 | 1.57e-09 | 5.25 |

标准差同样实现五阶收敛，验证了方法的高精度

Example 4.1: 数值解对比

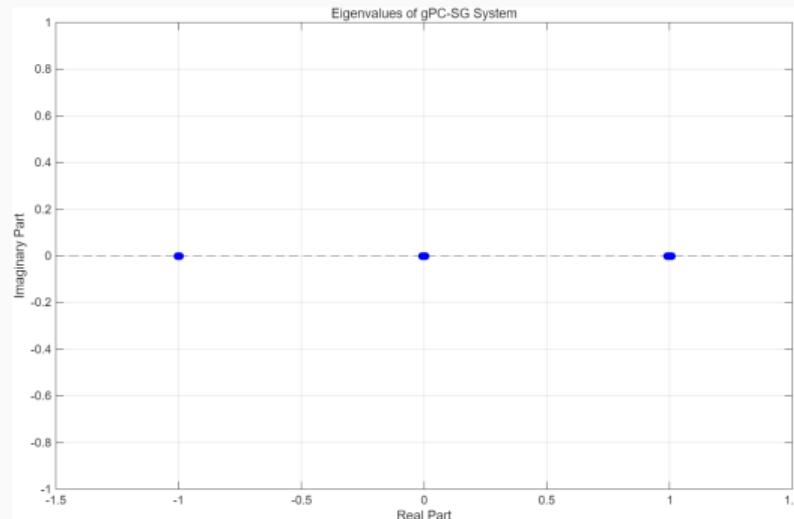


$t = 0.2$ 时 gPC-SG 方法数值解的期望与参考解的对比

观察

- 数值解与参考解几乎完全重合
- 验证了 gPC-SG 方法的有效性

Example 4.1: 双曲性验证



矩阵 \hat{B} 的特征值 ($\hat{B} = \hat{A}_0^{-1} \hat{A}_1$)

双曲性保持

所有特征值均为实数

意义：

- gPC-SG 系统保持双曲性
- 保证数值方法的稳定性
- 验证了理论分析（定理 2.1）
- 代码的主体逻辑正确

Example 4.2: 平滑问题 (2 个随机变量)

对于以下平滑问题，初始条件为：

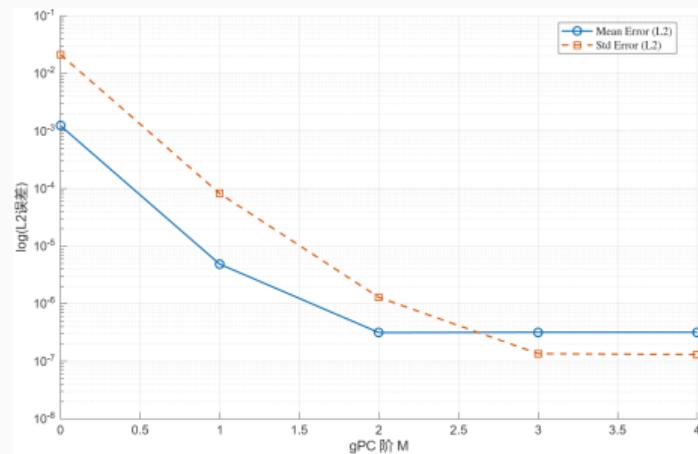
$$(\rho, u, p)(x, 0, \xi) = (1.0 + 0.2(1 + 0.1 \sin(\pi \xi_1 / 4)) \sin(2\pi x), 0.8 + 0.2\xi_2, 1),$$

其中 ξ_1 和 ξ_2 独立服从 $[-1, 1]$ 上的均匀分布。

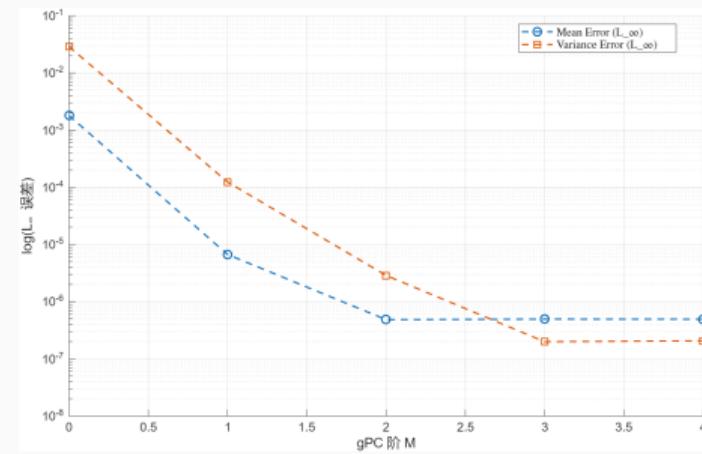
注

使用总次数不超过 M 的二维 *Legendre* 多项式

Example 4.2: gPC 阶数收敛性



$t = 0.2$ 时数值解期望和标准差的 L_2 误差



$t = 0.2$ 时数值解期望和标准差的 L_{∞} 无
穷误差

观察

- 前半段：**指数收敛** ($\log(\text{error}) \sim -kM$)
- 后半段：误差饱和，被空间和时间离散误差主导

Example 4.2: WENO 五阶收敛阶验证

表 3: $t = 0.2$ 时密度期望的数值误差与收敛阶

| N_x | L_2 误差 | L_2 阶 | L_∞ 误差 | L_∞ 阶 |
|-------|----------|---------|---------------|--------------|
| 10 | 2.91e-03 | 0.0000 | 4.31e-03 | 0.0000 |
| 20 | 1.44e-04 | 4.3410 | 2.22e-04 | 4.2795 |
| 40 | 4.49e-06 | 5.0022 | 7.62e-06 | 4.8640 |
| 80 | 1.35e-07 | 5.0511 | 2.27e-07 | 5.0717 |

注

取 $\Delta t_n \sim \Delta x^{5/3}$, 实现空间和时间上的五阶收敛

Example 4.3: 不确定边界条件问题

初始条件: 静止流体, $\rho = 1$, $p = 0.6$, $\gamma = 5/3$

边界条件:

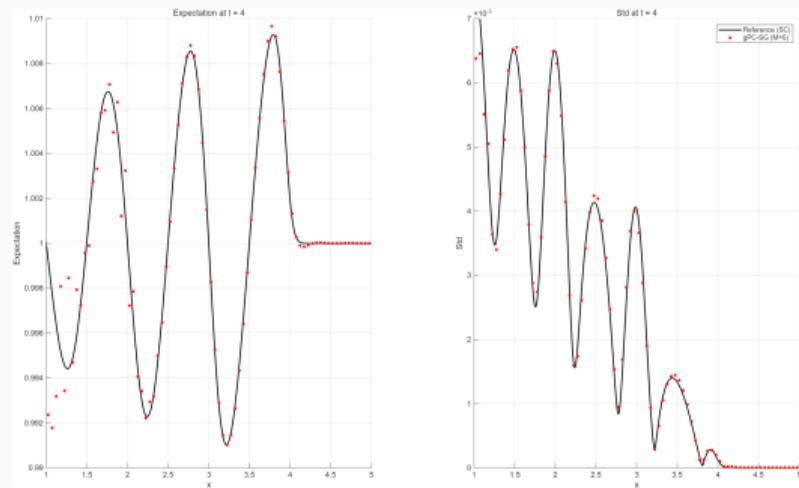
- 左边界 $x = 0$: 周期性驱动 $(\rho, u, p)(0, t) = (1, 0.02 \sin(2\pi wt), 0.6)$
- 右边界 $x = 5$: 出流边界

不确定性: 频率参数 $w(\xi) = 1 + 0.1\xi$, 其中 $\xi \sim \mathcal{U}[-1, 1]$

注

必须使用论文 Remark 2.2 中提出的 limiter, 否则会导致数值解崩溃!

Example 4.3: 数值结果



$t = 4$ 时 ρ 的期望与标准差 ($M = 5$)

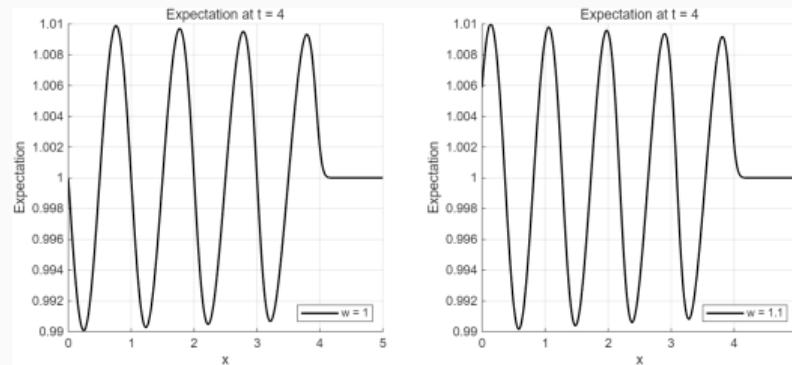
观察

- 红点: gPC-SG 数值解
- 黑线: 随机配点法参考解
(迎风格式和 5000 个均匀网格)
- 良好一致性

发现

频率不确定影响密度期望的局部峰谷值

Example 4.3: 与确定性情形对比



确定性 w 下 ρ 的期望 ($w=1$ (左), $w=1.1$ (右))

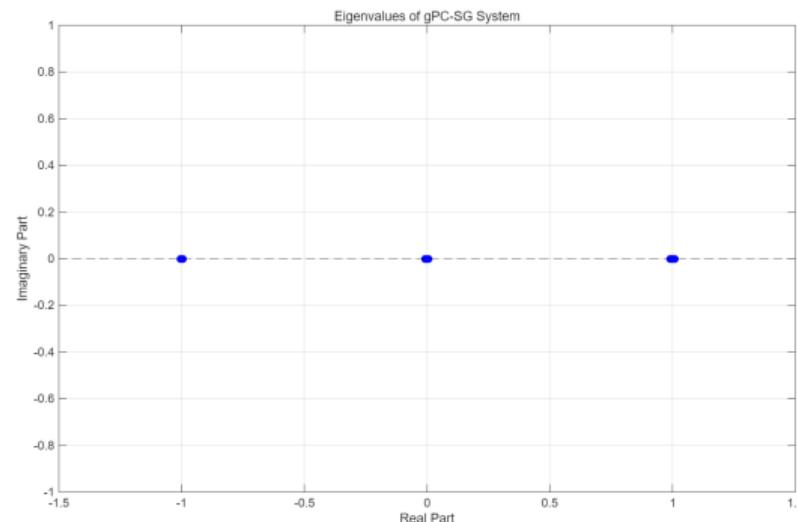
确定性情形

- 不同频率 w
- 波的振幅（峰谷值）保持一致

随机情形

- 不同频率波的相位干涉
- 导致均值波形峰值衰减

Example 4.3: 双曲性与特征值



矩阵 \hat{B} 的特征值 ($\hat{B} = \hat{A}_0^{-1} \hat{A}_1$)

二维 gPC-SG 方法

二维系统的分裂

二维拟线性双曲系统：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A(\mathbf{U}; \xi) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + G(\mathbf{U}; \xi) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = 0$$

算子分裂：将二维系统分解为 2 个子系统（x 方向和 y 方向）

x-分裂系统

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0$$

y-分裂系统

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + G \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = 0$$

分别调用 1 维程序即可

算子分裂

三阶精度算子分裂：

$$\hat{\mathbf{U}}_{jk}^{n+1} = \mathcal{E}_x^{\tau_1} \mathcal{E}_y^{\tau_1 + \tau_2} \mathcal{E}_x^{\tau_2} \mathcal{E}_y^{\tau_3} \mathcal{E}_x^{\tau_3 + \tau_4} \mathcal{E}_y^{\tau_4} \hat{\mathbf{U}}_{jk}^n$$

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{2\Delta t_n}{5 - \sqrt{13} + \sqrt{2(1 + \sqrt{13})}}, & \tau_2 &= \frac{7 + \sqrt{13} - \sqrt{2(1 + \sqrt{13})}}{12} \Delta t_n, \\ \tau_3 &= \frac{\tau_1^2}{\tau_2 - \tau_1}, & \tau_4 &= \Delta t_n - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3).\end{aligned}$$

Example 4.5: 二维黎曼问题 (config 1)

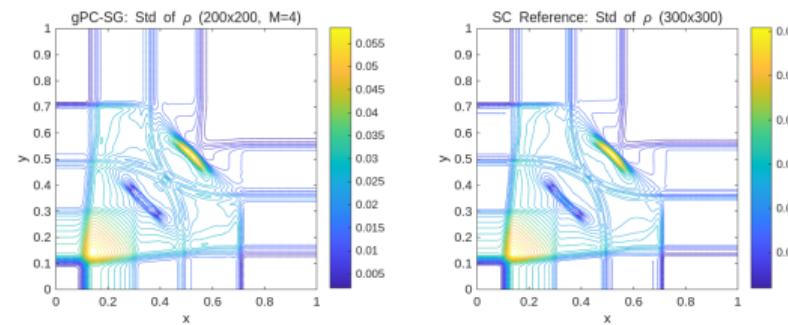
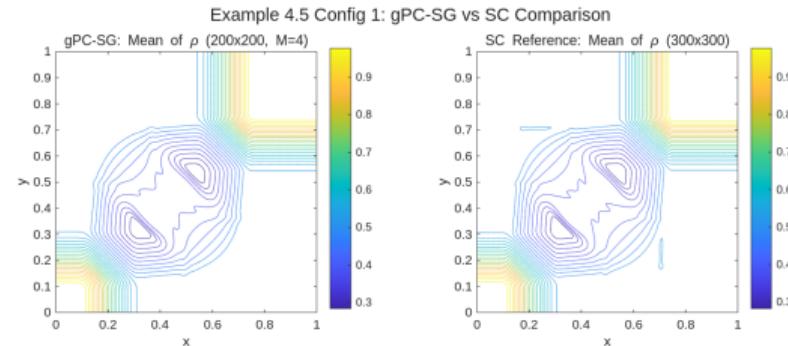
经典 2D 黎曼问题 (四稀疏波相互作用):

$$(\rho, u, v, p)(x, y, 0) = \begin{cases} (1, 0, 0, 1), & x > 0.5, y > 0.5 \\ (0.5197, -0.7259, 0, 0.4), & x < 0.5, y > 0.5 \\ (1, -0.7259, -0.7259, 1), & x < 0.5, y < 0.5 \\ (0.5197, 0, -0.7259, 0.4), & x > 0.5, y < 0.5 \end{cases}$$

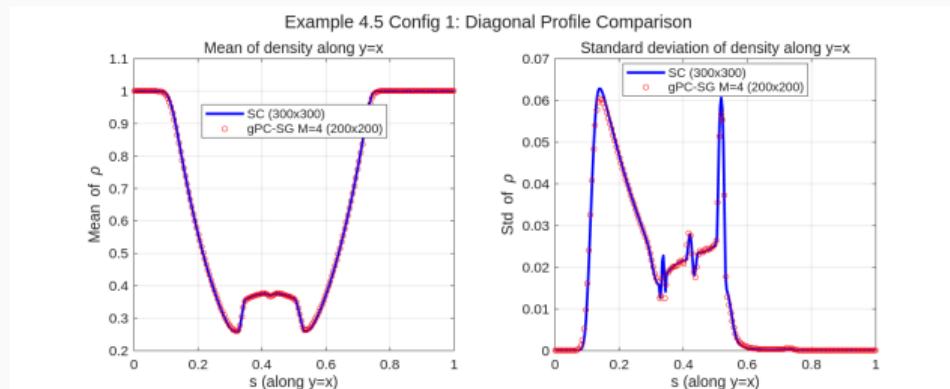
不确定性: 速度 -0.7259 扰动为 $-0.7259 + 0.1\xi$, $\xi \sim \mathcal{U}[-1, 1]$

参数: $\Gamma = 1.4$, $M = 4$, 250×250 网格

Example 4.5: 等高线图对比



Example 4.5: 对角线剖面



对角线图（期望（左）和标准差（右））

注

- 红点: gPC-SG, 实线: 参考解

Example 4.5: 二维黎曼问题 (config 2)

经典 2D 黎曼问题 (四稀疏波相互作用):

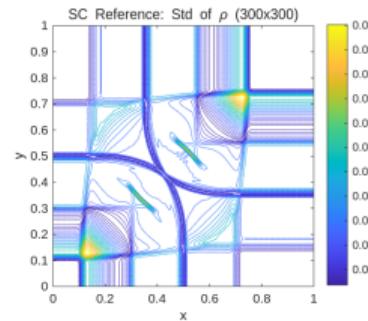
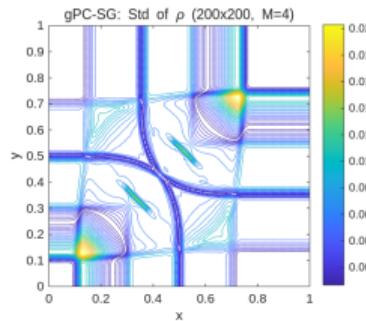
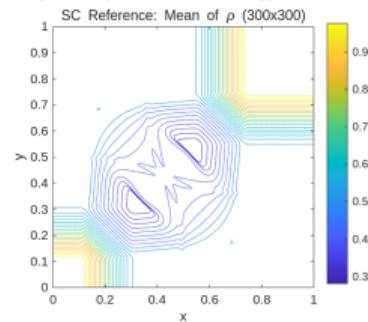
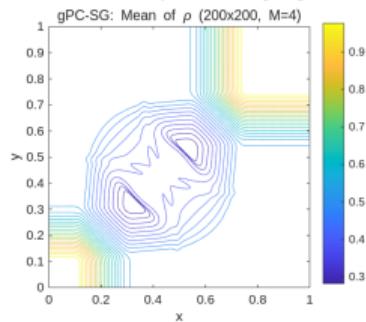
$$(\rho, u, v, p)(x, y, 0) = \begin{cases} (1, 0, 0, 1), & x > 0.5, y > 0.5 \\ (0.5197, -0.7259, 0, 0.4), & x < 0.5, y > 0.5 \\ (1, -0.7259, -0.7259, 1), & x < 0.5, y < 0.5 \\ (0.5197, 0, -0.7259, 0.4), & x > 0.5, y < 0.5 \end{cases}$$

不确定性: $\Gamma = 1.4 + 0.1\xi$, $\xi \sim \mathcal{U}[-1, 1]$

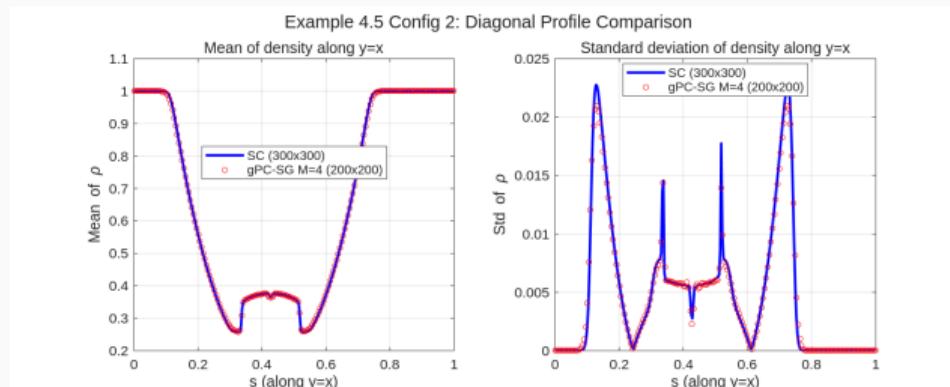
参数: $M = 4$, 250×250 网格

Example 4.5: 等高线图对比

Example 4.5 Config 2: gPC-SG vs SC Comparison (Gamma Uncertainty)



Example 4.5: 对角线剖面



对角线图（期望（左）和标准差（右））

注

- 红点: gPC-SG, 实线: 参考解

Example 4.6: 二维黎曼问题 (config 1)

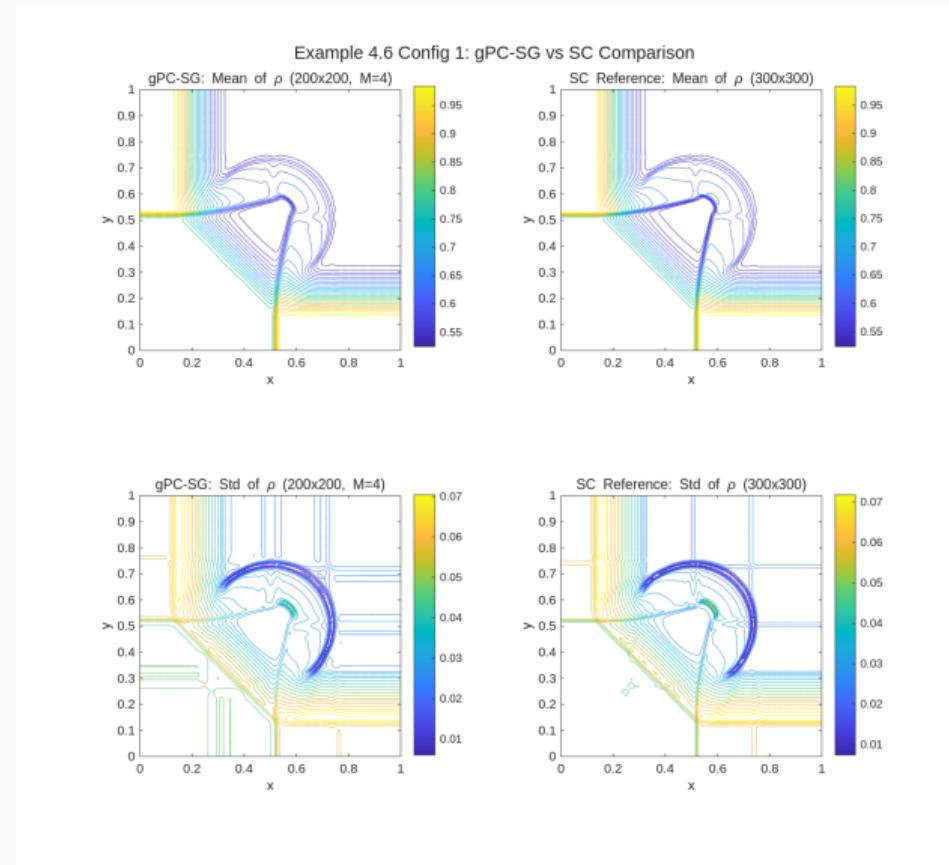
经典 2D 黎曼问题两稀疏波与两接触间断相互作用：

$$(\rho, u, v, p)(x, y, 0) = \begin{cases} (0.5197, 0.1, 0.1, 0.4), & x > 0.5, y > 0.5 \\ (1, -0.6259, 0.1, 1), & x < 0.5, y > 0.5 \\ (0.8, 0.1, 0.1, 1), & x < 0.5, y < 0.5 \\ (1, 0.1, -0.6259, 1), & x > 0.5, y < 0.5 \end{cases}$$

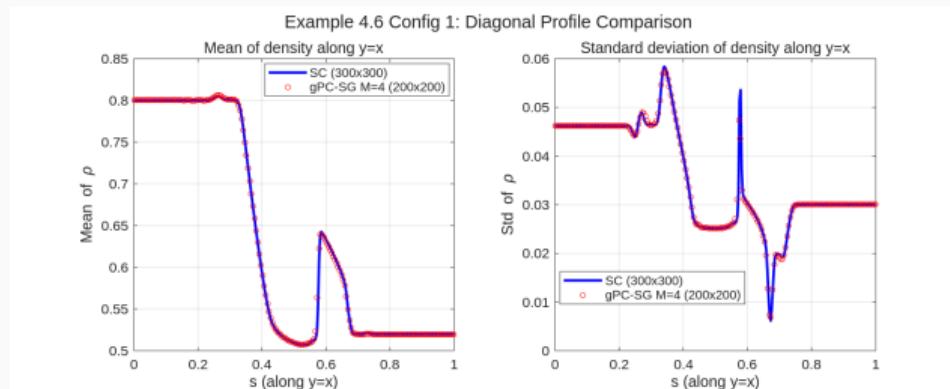
不确定性：扰动为 $(1 + 0.1\xi)\rho(x, y, 0)$, $\xi \sim \mathcal{U}[-1, 1]$

参数： $\Gamma = 1.4$, $M = 4$, 250×250 网格

Example 4.6: 等高线图对比



Example 4.6: 对角线剖面



对角线图（期望（左）和标准差（右））

注

- 红点: gPC-SG, 实线: 参考解

Example 4.6: 二维黎曼问题 (config 2)

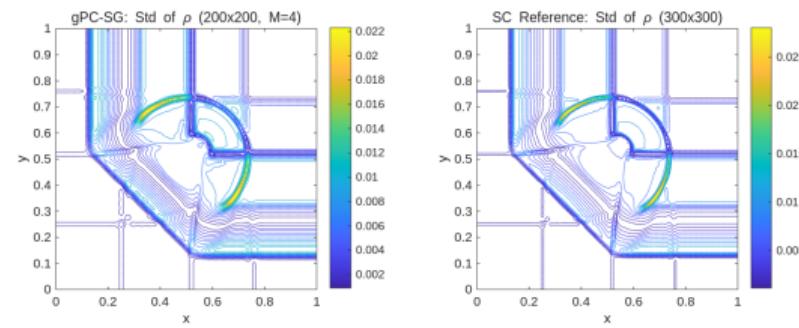
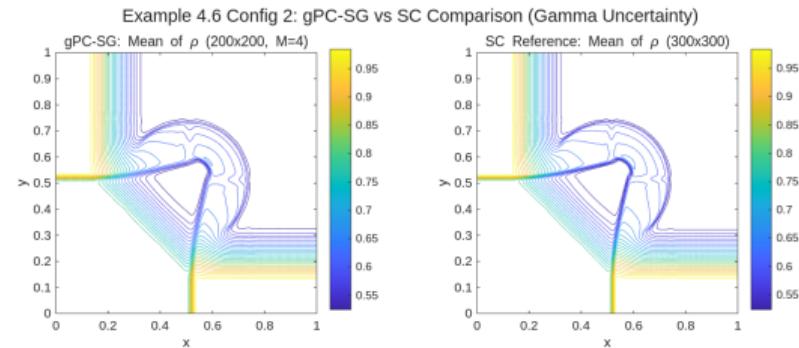
经典 2D 黎曼问题两稀疏波与两接触间断相互作用：

$$(\rho, u, v, p)(x, y, 0) = \begin{cases} (0.5197, 0.1, 0.1, 0.4), & x > 0.5, y > 0.5 \\ (1, -0.6259, 0.1, 1), & x < 0.5, y > 0.5 \\ (0.8, 0.1, 0.1, 1), & x < 0.5, y < 0.5 \\ (1, 0.1, -0.6259, 1), & x > 0.5, y < 0.5 \end{cases}$$

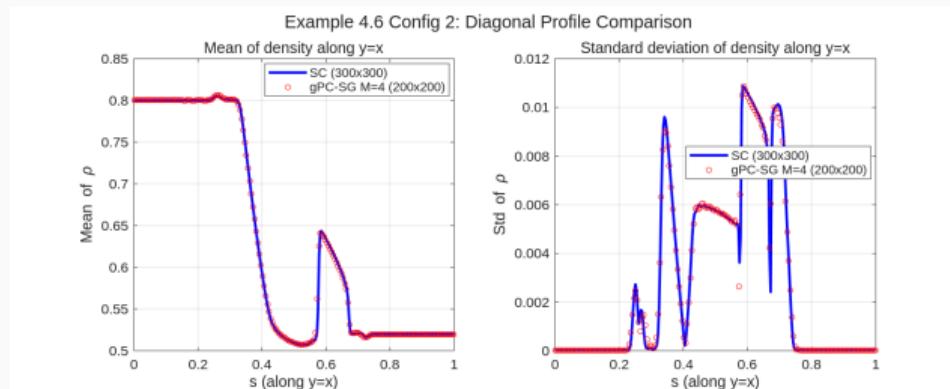
不确定性： $\Gamma = 1.4 + 0.1\xi$, $\xi \sim \mathcal{U}[-1, 1]$

参数： $M = 4$, 250×250 网格

Example 4.6: 等高线图对比



Example 4.6: 对角线剖面



对角线图（期望（左）和标准差（右））

注

- 红点: gPC-SG, 实线: 参考解

总结

主要贡献

1. 对称化

- 通过左特征向量矩阵对一维双曲系统进行对称化

2. 理论保证

- 证明了 gPC-SG 系统的对称双曲性 (定理 2.1)
- 谱半径上界估计 (定理 2.2)

3. 数值方法

- 空间: 五阶 WENO + 路径守恒格式
- 时间: 三阶 Runge-Kutta

4. 数值验证

- 光滑问题达到五阶收敛
- 1D/2D 问题均保持双曲性

谢谢！