1 求解 ODE

$\frac{du}{dt} = -\alpha u, u(0) = \beta, t \in [0, 2]$ 的精确解为 $\beta e^{-\alpha t}$，其中 $\beta = 1, \alpha = 5$。

1.1 显式欧拉方法

由公式 $\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} = f(t_n, u^n)$，代码如下：

```
// 向前插商（欧拉法）
std::pair<double, double> euler(double t0, double u0, double t1, int n)
{
    double dt = (t1 - t0) / n;
    double u = u0;
    std::vector<double> U(n); // 存储数值解
    std::vector<double> T(n); // 存储精确解
    for (int i = 0; i < n; ++i)
    {
        u = u + dt * f(t0 + i * dt, u); // (u_n+1 - u_n) / dt约等于f(t_n,u_n)
        U[i] = u;
        T[i] = solution_ode(t0 + (i + 1) * dt);
    }
    double error1 = L2Error(U, T);     // L2误差
    double error2 = L_Chebyshev(U, T); // L无穷误差
    return std::make_pair(error1, error2);
}
```

运行结果如下：

```
---euler---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.0473164           0                   0.117879            0
40              0.0214204           1.14336             0.0514732           1.19542
80              0.0102672           1.06094             0.0242705           1.08462
160             0.00503411          1.02824             0.0118053           1.03977
```

图 1: Euler

显式欧拉方法是一阶方法，其收敛阶为 1。由图 1可见，随着 N 的增大，L2 误差和 L 无穷误差逐渐减小，且误差阶始终在 1 附近并越来越接近 1，符合理论预期。

1.2 中心格式

由公式 $\frac{u^{n+1}-u^{n-1}}{2\Delta t} = f(t_n, u^n)$，代码如下：

```
// 中心差商
std::pair<double, double> leapfrog(double t0, double u0, double t1, int n)
{
    double dt = (t1 - t0) / n;
    double u_prev = u0;
```

```
    // 使用欧拉法计算第一步
    double u_curr = u_prev + dt * f(t0, u_prev);

    std::vector<double> U(n); // 数值解
    U[0] = u_curr;
    std::vector<double> T(n); // 精确解
    T[0] = solution_ode(t0 + dt);
    for (int i = 1; i < n; ++i)
    {
        double u_next = u_prev + 2 * dt * f(t0 + i * dt, u_curr); //(u_n+1 - u_n-1) / 2dt约等于f(t_n
            ,u_n)
        u_prev = u_curr;
        u_curr = u_next;
        U[i] = u_curr;
        T[i] = solution_ode(t0 + (i + 1) * dt);
    }
    double error1 = L2Error(U, T);
    double error2 = L_Chebyshev(U, T);
    return std::make_pair(error1, error2);
}
```

运行结果如下:

```
---leapfrog---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              227.119             0                   798.5               0
40              75.1931             1.59478             297.137             1.42617
80              19.7233             1.9307              82.8744             1.84213
160             4.91587             2.00438             21.3085             1.9595
```

图 2: 中心格式

中心格式是二阶方法，其收敛阶为 2。由图 2可见，当 N=20 和 40 时 L2 误差和 L 无穷误差很大，二者的误差阶也与 2 相差甚远。这说明理论上的收敛阶只有在 Δt 足够小时才显现, 当 N=20 或 40 时，步长仍较大，高阶项影响显著。同时由于第一步使用了欧拉法，此误差会持续参与后面的迭代，在 N 较小时可能更加明显。但随着 N 的增大，L2 误差和 L 无穷误差逐渐减小，误差阶越来越接近 2，符合理论预期。

1.3 三阶 Runge-Kutta 方法

由公式

$$
\begin{aligned}
u^{(1)} &= u^n + \Delta t\, f(t_n, u^n) \\
u^{(2)} &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t\, f(t_{n+1}, u^{(1)}) \\
u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t\, f(t_{n+\frac{1}{2}}, u^{(2)})
\end{aligned}
$$

代码如下:

```
// 三阶Runge-Kutta方法
std::pair<double, double> runge_kutta(double t0, double u0, double t1, int n)
{
    double dt = (t1 - t0) / n;
    std::vector<double> U(n); // 数值解
    std::vector<double> T(n); // 精确解
    for (int i = 0; i < n; ++i)
    {
        double y1 = u0 + dt * f(t0 + i * dt, u0);
        double y2 = 0.75 * u0 + 0.25 * y1 + 0.25 * dt * f(t0 + (i + 1) * dt, y1);
        u0 = u0 / 3.0 + 2.0 * y2 / 3.0 + 2.0 * dt * f(t0 + (i + 0.5) * dt, y2) / 3.0;
        U[i] = u0;
        T[i] = solution_ode(t0 + (i + 1) * dt);
    }
    double error1 = L2Error(U, T);
    double error2 = L_Chebyshev(U, T);
    return std::make_pair(error1, error2);
}
```

运行结果如下:

```
---Runge-Kutta---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.00122533          0                   0.00286208          0
40              0.000125754         3.2845              0.000292685         3.28964
80              1.42226e-05         3.14436             3.30923e-05         3.14478
160             1.69096e-06         3.07227             3.93432e-06         3.07231
```

图 3: 三阶 Runge-Kutta 方法

三阶 Runge-Kutta 方法是三阶方法，其收敛阶为 3。由图 3可见，随着 N 的增大，L2 误差和 L 无穷误差逐渐减小，且误差阶始终在 3 附近并越来越接近 3，符合理论预期。

对比三种方法，三阶 Runge-Kutta 方法的误差远小于前两种方法，$N = 20$ 时的三阶 Runge-Kutta 方法的误差已经小于 $N = 160$ 时的 Euler 法误差，可见其高精度的优势。

2 求解 PDE 的三种 scheme

$u_t(x,t) = au_x(x,t), \quad x \in [0, 2\pi],\ t > 0$ 且 $u(x,0) = \sin(kx)$ 的精确解为 $\sin(k(x+at))$.

首先给出三种 scheme 及实现代码:

2.1 scheme1

在周期边界条件下，由公式

$$V_j^{n+1} = V_j^n + a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n\right)$$
$$V_j^0 = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, N-1$$

代码如下:

```
std::pair<double, double> scheme1(double a, double k, double T, int N)
{
    auto rule1 = [](const std::vector<double> &u, int j, int N, double a, double dt, double dx)
    {
        int j_prev = (j - 1 + N) % N;
        int j_next = (j + 1) % N;
        return u[j] + a * (dt / (2.0 * dx)) * (u[j_next] - u[j_prev]);
    };
    return scheme(a, k, T, N, rule1);
}
```

2.2 scheme2

在周期边界条件下，由公式

$$V_j^{n+1} = \frac{V_{j+1}^n + V_{j-1}^n}{2} + a\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(V_{j+1}^n - V_{j-1}^n\right)$$
$$V_j^0 = f(x_j)$$

代码如下：

```
std::pair<double, double> scheme2(double a, double k, double T, int N)
{
    auto rule2 = [](const std::vector<double> &u, int j, int N, double a, double dt, double dx)
    {
        int j_prev = (j - 1 + N) % N;
        int j_next = (j + 1) % N;
        return 0.5 * (u[j_next] + u[j_prev]) + a * (dt / (2.0 * dx)) * (u[j_next] - u[j_prev]);
    };
    return scheme(a, k, T, N, rule2);
}
```

2.3 scheme3

在周期边界条件且 $a > 0$ 下，由公式

$$V_j^{n+1} = V_j^n + a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(V_{j+1}^n - V_j^n\right)$$
$$V_j^0 = f(x_j)$$

代码如下：

```
// scheme3
std::pair<double, double> scheme3(double a, double k, double T, int N)
{
    auto rule3 = [](const std::vector<double> &u, int j, int N, double a, double dt, double dx)
    {
        int j_prev = (j - 1 + N) % N;
```

```
        int j_next = (j + 1) % N;
        return u[j] + a * (dt / dx) * (u[j_next] - u[j]);
    };
    return scheme(a, k, T, N, rule3);
}
```

3 求解 PDE

3.1 第 1 题

scheme1 的运行结果如下：

```
--------------------(1)--------------------
---scheme1,k=1,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.677787            0                   0.95136             0
40              0.294508            1.20253             0.415993            1.19343
80              0.135987            1.11483             0.192223            1.11378
---scheme1,k=1,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              1.98738             0                   2.80923             0
40              0.713808            1.47726             1.00819             1.47841
80              131.839             -7.52902            357.161             -8.46866
---scheme1,k=1,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              9.31803             0                   13.1723             0
40              24.1725             -1.37527            54.0905             -2.03787
80              1.8636e+20          -62.7414            4.12847e+20         -62.7269
---scheme1,k=5,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              128.087             0                   163.405             0
40              278.715             -1.12167            370.043             -1.17924
80              36.8702             2.91826             51.8                2.83667
---scheme1,k=5,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              24067.4             0                   25241.4             0
40              115128              -2.25808            162568              -2.68718
80              1940.17             5.89091             2854.39             5.83171
---scheme1,k=5,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              8.85415e+08         0                   1.25087e+09         0
40              1.90262e+10         -4.42549            2.67916e+10         -4.42078
80              1.13473e+20         -32.4736            2.36585e+20         -33.0399
---scheme1,k=10,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.262375            0                   0.262375            0
40              24067.4             -16.4851            25241.4             -16.5538
80              115128              -2.25808            162568              -2.68718
---scheme1,k=10,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.506366            0                   0.506366            0
40              8.85415e+08         -30.7035            1.25087e+09         -31.202
80              1.90262e+10         -4.42549            2.67916e+10         -4.42078
---scheme1,k=10,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.873297            0                   0.8733              0
40              1.12646e+18         -60.162             1.59062e+18         -60.6597
80              1.5323e+21          -10.4097            3.82188e+21         -11.2305
```

图 4: scheme1

根据稳定性分析，scheme1 是无条件不稳定的，计算过程中的微小误差会在时间步进中被不断放大，最终导致数值解发散。k=1，T=5 是最平滑的初始条件，此时 N 从 20 增加到 80，误差逐渐减小，且误差阶似乎较为稳定，这可能是因为在很短的时间内，对于非常光滑的解，不稳定性带来的误差增长还没有超过因网格加密 (Δx 减小) 而带来的离散化误差的减小。当 k 和 T 增大时，误差迅速增大，数值解完全崩溃。

3.2 第 2 题

scheme2 的运行结果如下：

```
--------------------(2)--------------------
---scheme2,k=1,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.122095            0                   0.171334            0
40              0.0627599           0.96009             0.0886569           0.950507
80              0.0295849           1.08498             0.0418385           1.0834
160             0.0148935           0.990181            0.0210614           0.990227
---scheme2,k=1,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.219476            0                   0.308284            0
40              0.11105             0.98285             0.157022            0.973291
80              0.0577064           0.944412            0.0815944           0.944428
160             0.0287625           1.00454             0.0406762           1.00428
---scheme2,k=1,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.350595            0                   0.494342            0
40              0.204026            0.781054            0.28843             0.777286
80              0.108201            0.915041            0.153015            0.914553
160             0.0563527           0.941155            0.0796899           0.9412
---scheme2,k=5,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.77911             0                   1.09385             0
40              0.65942             0.24063             0.904098            0.274864
80              0.466474            0.499401            0.654307            0.46651
160             0.291789            0.67687             0.412529            0.665472
---scheme2,k=5,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.701455            0                   0.956681            0
40              0.712894            -0.0233366          0.966139            -0.0141927
80              0.628391            0.182024            0.887104            0.123127
160             0.457249            0.458684            0.645485            0.458719
---scheme2,k=5,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.706958            0                   0.862319            0
40              0.707504            -0.00111362         0.968256            -0.167167
80              0.699811            0.0157732           0.978049            -0.0145179
160             0.619796            0.175171            0.876295            0.15849
---scheme2,k=10,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.262375            0                   0.262375            0
40              0.701455            -1.41872            0.956681            -1.86641
80              0.712894            -0.0233366          0.966139            -0.0141927
160             0.628391            0.182024            0.887104            0.123127
---scheme2,k=10,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.506366            0                   0.506366            0
40              0.706958            -0.481446           0.862319            -0.768042
80              0.707504            -0.00111362         0.968256            -0.167167
160             0.699811            0.0157732           0.978049            -0.0145179
---scheme2,k=10,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.873297            0                   0.873297            0
40              0.707107            0.304545            0.873297            1.60171e-15
80              0.707107            5.97265e-07         0.962008            -0.139575
160             0.70719             -0.000170507        0.993414            -0.0463461
```

图 5: scheme2

scheme2 的精度是 $O(\Delta t) + O\left(\frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right) + O(\Delta x^2)$，稳定性条件是 $|\lambda| = \left|a\frac{\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1$，由于 $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.9$，因此在最后一个时间步，空间上的误差阶是 1 阶的。

scheme3 的运行结果如下：

```
---scheme3,k=1,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.0590458           0                   0.0830928           0
40              0.0288048           1.03553             0.0406534           1.03135
80              0.0140853           1.03212             0.0199097           1.02991
160             0.00701696          1.00527             0.00992345          1.00455
---scheme3,k=1,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.108355            0                   0.152079            0
40              0.0546799           0.98668             0.077168            0.978744
80              0.0276526           0.983597            0.0391061           0.98061
160             0.0137722           1.00566             0.0194746           1.0058
---scheme3,k=1,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.194696            0                   0.272714            0
40              0.10429             0.900619            0.147476            0.886909
80              0.0534998           0.963001            0.0756243           0.96356
160             0.0272732           0.972046            0.0385702           0.971365
---scheme3,k=5,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.647176            0                   0.888633            0
40              0.459153            0.495184            0.630387            0.495351
80              0.279761            0.714779            0.389196            0.695741
160             0.156049            0.842198            0.220648            0.818746
---scheme3,k=5,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.70719             0                   0.958745            0
40              0.617734            0.195111            0.826475            0.214176
80              0.446949            0.466878            0.630649            0.390134
160             0.274716            0.702168            0.387049            0.704321
---scheme3,k=5,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.707606            0                   0.862988            0
40              0.697357            0.0210492           0.958088            -0.150818
80              0.609485            0.194305            0.849246            0.173976
160             0.442784            0.460988            0.625958            0.440117
---scheme3,k=10,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.262375            0                   0.262375            0
40              0.70719             -1.43047            0.958745            -1.86952
80              0.617734            0.195111            0.826475            0.214176
160             0.446949            0.466878            0.630649            0.390134
---scheme3,k=10,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.506366            0                   0.506366            0
40              0.707606            -0.482766           0.862988            -0.76916
80              0.697357            0.0210492           0.958088            -0.150818
160             0.609485            0.194305            0.849246            0.173976
---scheme3,k=10,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
20              0.873297            0                   0.873297            0
40              0.707106            0.304546            0.873297            7.32432e-07
80              0.707133            -5.37641e-05        0.961917            -0.13944
160             0.694144            0.026746            0.975949            -0.0208929
```

图 6: scheme3

scheme3 的精度是 $O(\Delta t) + O(\Delta x)$，当 $a > 0$ 时，稳定性条件是 $0 \leq \lambda = a\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$，在最后一个时间步，空间上的误差阶同样是 1 阶的。

在 scheme2 和 scheme3 的运行结果中都出现了下述现象：当 k=1 时，随着 N 从 20 增加到 160，误差逐渐减小，且误差阶始终在 1 附近，符合理论预期。而当 k 增加到 5 和 10，误差阶不再在 1 附近，且误差也不再随着 N 的增大而减小，甚至误差会增加。

我用 python 分别画出了 scheme2 和 scheme3 在 k=1，5，10 和 T=10 时数值解和精确解的图像进行对比。

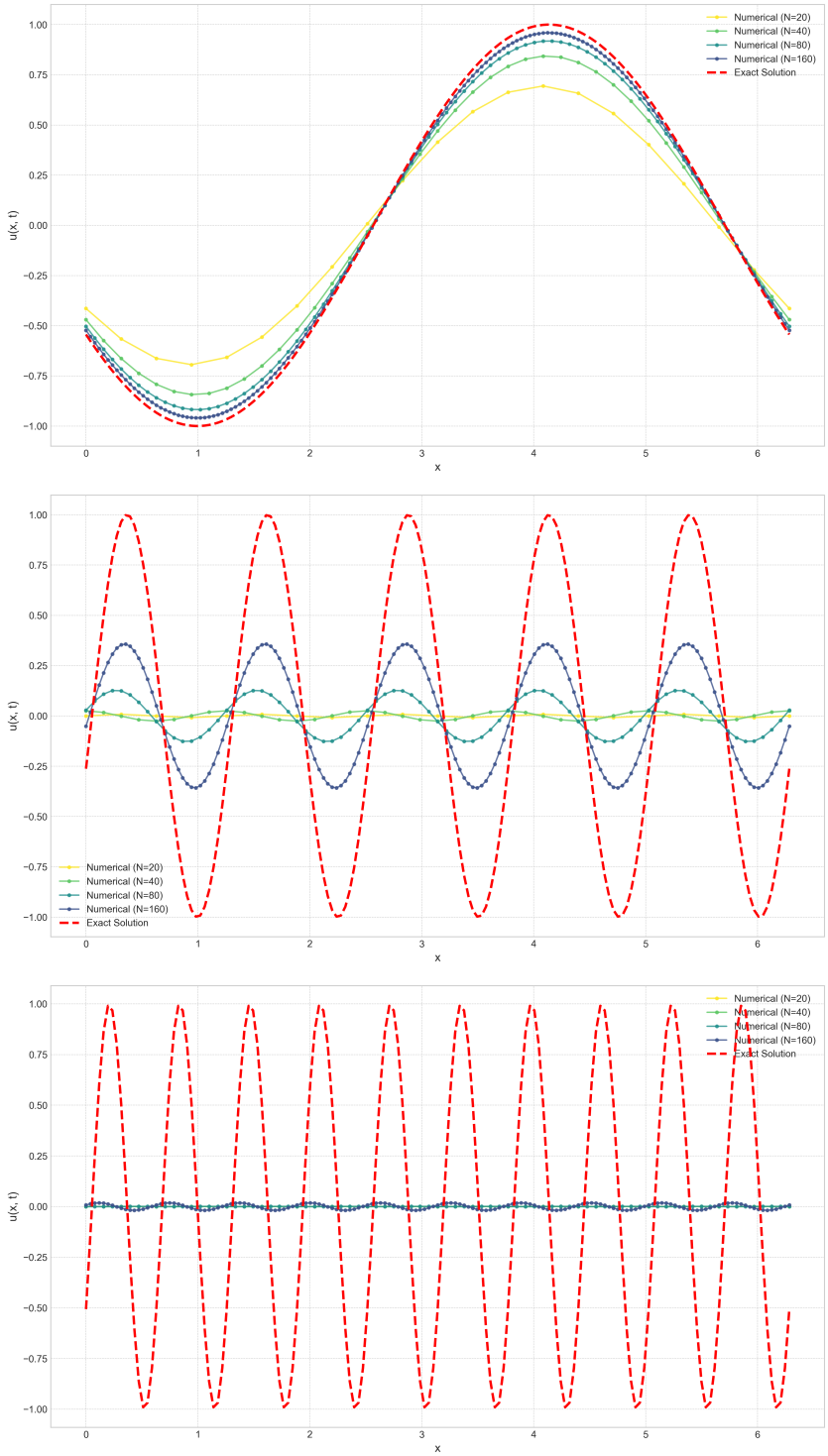

图 7: scheme2 的数值解和精确解

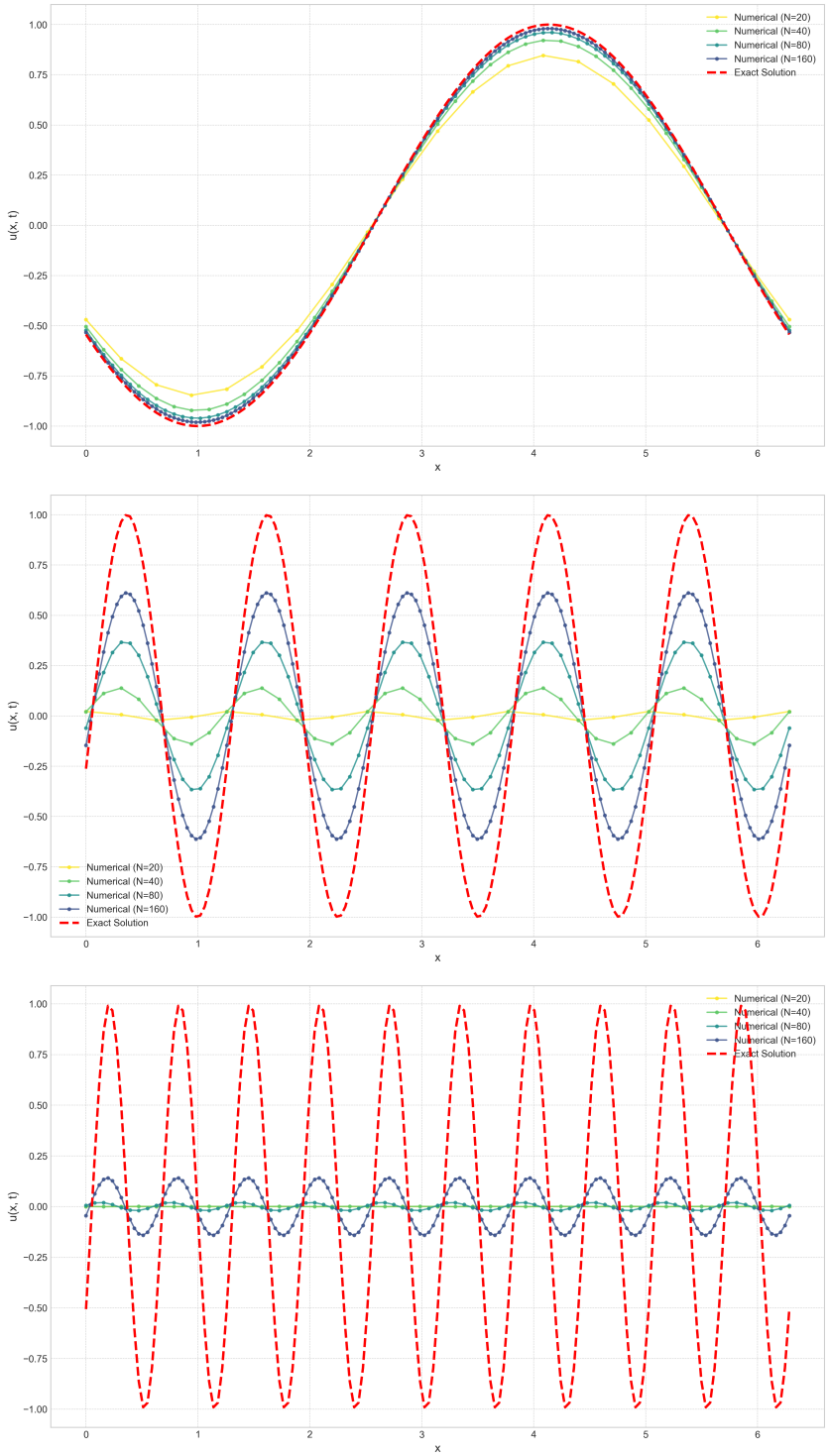

图 8: scheme3 的数值解和精确解

可以看到，当 k=1 时，数值解图像和精确解图像拟合得较好；而当 k 增大到 5 和 10 时，函数的频率增大，数值解的图像和精确解的图像差距较大。且增大 N 有助于减小数值解和精确解的差距。

这可能是因为当 k 增大、函数变得高频、变得更加精细时，N 过小导致网格分辨率不足。解函数 $\sin(kx)$ 的波长是 $\frac{2\pi}{k}$。一个波长内的网格点数是 $\frac{N}{k}$。当 k=10，N=20 时，一个波长内仅有两个点，这显然不足以描述波的变化趋势，从而引入了较大的误差。

而当我将 scheme2 的 N 增加到 $1280, 2560, 5120, 10240$ 时，如图 9所示，即使 k=5 和 10，误差阶仍然能稳定在 1 附近，且误差随着 N 的增大而减小。对比图 10和图 7，可以看到数值解和精确解的差距也大大减小。因此上述 N

过小导致误差发散的猜测似乎是合理的，同时由于在理论上分析精度时，我们会让 Δx 趋于 0，这也需要较大的 N 值。

```
1280            0.00183274          0                   0.00259188          0
2560            0.000916779         0.999353            0.00129652          0.999354
5120            0.000458353         1.00011             0.00064821          1.00011
10240           0.00022908          1.00061             0.000323968         1.00061
---scheme2,k=1,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
1280            0.00365999          0                   0.00517599          0
2560            0.00183163          0.998709            0.00259032          0.998706
5120            0.000915873         0.999909            0.00129524          0.999909
10240           0.000457947         0.999966            0.000647635         0.999966
---scheme2,k=1,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
1280            0.0072981           0                   0.0103211           0
2560            0.00365638          0.997105            0.0051709           0.997104
5120            0.00183001          0.998564            0.00258803          0.998564
10240           0.000915446         0.999305            0.00129464          0.999305
---scheme2,k=5,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
1280            0.04442             0                   0.0628193           0
2560            0.0225662           0.977043            0.0319131           0.977061
5120            0.0113701           0.988918            0.0160798           0.988901
10240           0.00570478          0.995005            0.00806777          0.995004
---scheme2,k=5,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
1280            0.0860335           0                   0.121665            0
2560            0.044395            0.954503            0.0627838           0.954446
5120            0.0225444           0.977626            0.0318826           0.977622
10240           0.0113601           0.988789            0.0160657           0.988789
---scheme2,k=5,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
1280            0.161543            0                   0.228455            0
2560            0.0859555           0.910259            0.121559            0.910251
5120            0.0443571           0.954424            0.0627305           0.954422
10240           0.0225341           0.977057            0.031868            0.977057
---scheme2,k=10,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
1280            0.16162             0                   0.228564            0
2560            0.0860335           0.909638            0.121665            0.909692
5120            0.044395            0.954503            0.0627838           0.954446
10240           0.0225444           0.977626            0.0318826           0.977622
---scheme2,k=10,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
1280            0.28627             0                   0.40481             0
2560            0.161543            0.825453            0.228455            0.825333
5120            0.0859555           0.910259            0.121559            0.910251
10240           0.0443571           0.954424            0.0627305           0.954422
---scheme2,k=10,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
1280            0.456576            0                   0.645695            0
2560            0.286057            0.674553            0.404536            0.674585
5120            0.16142             0.82548             0.228282            0.825448
10240           0.0859184           0.909781            0.121507            0.909785
```

图 9: 增大 N 后 scheme2 的误差

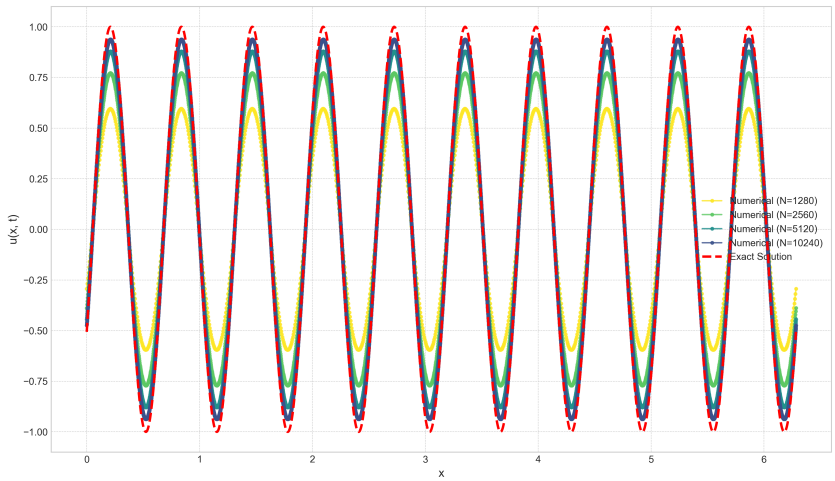

图 10: 增大 N 后 scheme2 的数值解和精确解

在查阅资料时发现，数值耗散对 scheme2 误差较大也有一定的影响。由于对其缺乏足够的了解，这里不作讨论。

3.3 第 3 题

scheme3 的运行结果如下：

```
--------------------(3)--------------------
---scheme3,k=1,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
10              6.29086             0                   8.71722             0
20              2.12412             1.56639             2.99371             1.54193
40              0.766891            1.46977             1.13895             1.39423
---scheme3,k=1,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
10              60.1351             0                   81.5246             0
20              10.3506             2.53849             14.6982             2.47159
40              3.43848e+14         -44.9171            7.77471e+14         -45.5882
---scheme3,k=1,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
10              5055.46             0                   6915.33             0
20              2.64573e+14         -35.607             4.51569e+14         -35.9264
40              1.16126e+46         -105.114            2.42401e+46         -105.404
---scheme3,k=5,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
10              0.132352            0                   0.132352            0
20              374380              -21.4317            529208              -21.931
40              149211              1.32715             210792              1.32801
---scheme3,k=5,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
10              0.262375            0                   0.262375            0
20              1.9124e+11          -39.4069            2.70406e+11         -39.9066
40              2.50191e+15         -13.6754            6.20546e+15         -14.4861
---scheme3,k=5,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
10              4.62358             0                   5.21608             0
20              4.91887e+22         -73.1717            6.93896e+22         -73.4942
40              9.42152e+46         -80.6639            1.81818e+47         -81.116
---scheme3,k=10,T=5---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
10              0.262375            0                   0.262375            0
20              0.262375            -6.57478e-07        0.262375            -9.38361e-07
40              1.9124e+11          -39.4069            2.70406e+11         -39.9066
---scheme3,k=10,T=10---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
10              0.506366            0                   0.506366            0
20              10.8554             -4.42209            13.838              -4.77231
40              4.91887e+22         -71.9404            6.93896e+22         -72.0866
---scheme3,k=10,T=20---
N               L2_error            L2_order            L_inf_error         L_inf_order
10              1.29351             0                   2.14706             0
20              6.34783e+16         -55.4458            7.83025e+16         -55.0175
40              2.81078e+47         -101.804            4.76434e+47         -102.263
```

图 11: scheme3

由于本来的公式对应的是 a>0 的情形，当将其用于 a<0 时不满足稳定性条件，因此数值解几乎完全崩溃。按照对称性，当 a<0 时，本应使用的公式是

$$V_j^{n+1} = V_j^n + a\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(V_j^n - V_{j-1}^n\right)$$
$$V_j^0 = f(x_j)$$

此时误差将与 a=1 时完全相同。