RADICE CUBICA, E NON SOLO …

Tanti anni fa (sembra l'inizio di una favola..) ero incaricato nel Marketing Olivetti della Pianificazione dei prodotti derivati dalla Programma 101, e per svolgere meglio il mio ruolo cercai di approfondire come "utente" l'uso di quella macchina, che era già all'apice del suo successo.

Esaminando le librerie di programmi mi resi conto a un certo punto che mancava qualcosa: non c'erano programmi, in particolare, per risolvere semplici problemi geometrici come ricavare il raggio di una sfera dal suo volume, cioè problemi che richiedevano di estrarre una radice cubica. Questa era un'operazione eseguibile con qualche colpetto del regolo calcolatore che allora portavo ancora nel taschino, e mi meravigliai quindi che comportasse delle difficoltà per uno strumento molto più avanzato. In effetti la radice cubica si può calcolare attraverso un logaritmo ed un esponenziale, intercalati da una divisione per 3, e le librerie della P101 contenevano delle routine per queste funzioni, ma il numero di istruzioni complessivo delle routine di logaritmo e di esponenziale superava la capacità della memoria disponibile; d'altra parte mi sembrava uno smacco dover spezzare in due passate un calcolo così semplice. Dopo vari tentativi di ottimizzazione delle routine mi misi allora a provare se la radice quadrata, calcolata dalla P101 con una sola istruzione, poteva essere d'aiuto: poiché ripetendola si ottengono la radice quarta, ottava, eccetera, sembrava plausibile poterle combinarle in qualche modo per avvicinarsi alla radice cubica.

Bastarono pochi tentativi per scoprire che mettendo un valore nel registro B ed un "seme" iniziale, cioè una stima grossolana della sua radice cubica, nell'accumulatore A, la sequenza di istruzioni Bx √√ otteneva un risultato più vicino del seme alla radice cubica di B; la ripetizione della sequenza convergeva quindi verso la radice cubica desiderata. Fu una piacevole sorpresa, ma per renderla utilizzabile occorreva dimostrare che questo risultato era sistematico.

Il primo pezzetto di dimostrazione fu una verifica: se la sequenza convergeva, il valore raggiunto dopo una certa iterazione (indichiamolo con r) doveva essere molto vicino, anzi al limite uguale, al valore raggiunto nell'iterazione successiva, cioè √√(Br). E fu facile verificare con un po' d'algebra che l'eguaglianza b=√√(Br) è soddisfatta da due soli valori di r, cioè proprio la radice cubica di B e "zero". Quest'ultimo valore appariva l'unico da evitare come seme iniziale delle iterazioni, perché da lui non ci si distaccava mai; invece ogni valore positivo del seme sembrava assicurare la convergenza verso la radice cubica.

Cercando allora di analizzare questa convergenza, mi resi conto che partendo dal seme 1 le iterazioni calcolavano ad ogni ciclo un prodotto di potenze della "base" B, e precisamente il prodotto delle sue potenze con esponenti frazionari ¼, 1/16, 1/64 e così via. D'altra parte il prodotto di potenze di una stessa base corrisponde all'elevazione della base alla somma degli esponenti, e la somma dei numeri ¼, 1/16, 1/64, ... (si tratta di una progressione geometrica di ragione ½) converge proprio verso il valore 1/3, che è l'esponente della potenza nota come radice cubica. Con questo il risultato era confermato e la convergenza a partire dal seme 1 era dimostrata.

Ma la stessa cosa si poteva anche vedere da un altro punto di vista, più familiare agli "informatici".

La conversione di 1/3 in binario (ottenibile ad esempio sviluppando la divisione di 1 per 3, cioè 11 binario, operazione che si può fare in binario con lo stesso metodo della divisione decimale insegnata alle elementari, ed anzi risulta più semplice) dà luogo infatti alla frazione binaria periodica 0,$\underline{01}$…, dalla quale risulta direttamente che 1/3 è la somma di 2^{-2}=¼, 2^{-4}=1/16, ecc. Ora, la sequenza di operazioni considerata prima corrisponde alla creazione di potenze successive della base B; in rappresentazione binaria ogni radice quadrata dimezza l'esponente precedentemente raggiunto, ovvero fa slittare di una cifra verso destra la sua rappresentazione binaria, e la moltiplicazione per la base B introduce un nuovo 1 nella posizione delle unità, che slitterà poi in posizione frazionaria; alternando un "per" e due radici si costruiscono quindi le potenze della base con gli esponenti successivi 0,01, 0,0101, ecc, che approssimano sempre di più 1/3.

Questa interpretazione mostra direttamente perché ogni seme positivo, anche diverso da 1, porti allo stesso risultato finale: la sua rappresentazione binaria iniziale, qualunque essa sia, viene infatti progressivamente resa meno pesante, rispetto alle cifre binarie successivamente introdotte, dagli slittamenti verso destra. Il seme 1 è comunque in generale preferibile.

La stessa interpretazione permette anche di valutare quanti cicli siano necessari per ottenere un'approssimazione desiderata: dopo n cicli l'errore relativo corrispondente alla parte omessa della frazione binaria infinita che rappresenta esattamente 1/3 è dell'ordine di $1/2^{2n}$ e si può dedurre che l'errore sulla radice r è dell'ordine di $\log r / 2^{2n}$, che cala rapidamente crescendo n.

Ma l'interpretazione binaria porta anche in modo naturale ad una generalizzazione:

Si scelga un valore x qualsiasi minore di 1 e si costruisca la sua rappresentazione binaria frazionaria troncandola ad un certo punto. Si costruisca una sequenza di operazioni facendo corrispondere ad ogni cifra binaria (partendo da quella meno significativa e procedendo verso sinistra) una radice quadrata, seguita, prima della successiva radice, da una moltiplicazione per B se la cifra toccata è 1. La sequenza di operazioni così ottenuta approssimerà, se applicata ad un valore iniziale 1, la potenza B^x. L'approssimazione sarà tanto maggiore quanto più si è ritardato il troncamento della rappresentazione dell'esponente x.

Per valori razionali di x la frazione binaria risulta in generale periodica (come avviene in decimale), dopo un eventuale "antiperiodo" iniziale; la parte corrispondente della sequenza di operazioni è iterativa.

Ad esempio considerando 1/5 = $0{,}\underline{0011}$… si costruisce la sequenza Bx√Bx√√√ che iterata converge verso la radice quinta, considerando 1/7 = $0{,}\underline{001}$… si costruisce la sequenza Bx√√√ che iterata converge verso la radice settima, eccetera.

Facile: peccato solo che non ci sia bisogno di estrarle tanto spesso!

Non so se questo procedimento per calcolare potenze con esponenti frazionari utilizzando come fattori le radici quadrate successive di una base fosse già noto nel 1968 a qualcun altro. (Ho saputo invece in seguito che il procedimento speculare per il calcolo di potenze con esponenti interi utilizzando come fattori i quadrati successivi di una base era noto ed è utilizzato ad esempio nella crittografia.)

Fatto sta che dopo la mia "scoperta" il procedimento è rimasto a dormire per vari decenni nei miei appunti: infatti la sua utilità pratica era limitata a macchine calcolatrici con la sola radice quadrata, mentre grazie all'incremento esplosivo della capacità di memorie e ROM disponibili stavano già apparendo sul mercato per pochi dollari calcolatrici scientifiche che facevano non solo la radice cubica, ma proprio tutto!

Resta quindi una curiosità di interesse intellettuale e, forse, didattico.

Mauro Caprara 19/2/2013