ECUACIONES DIFERENCIALES

Introducción: Los términos diferencial y ecuación indican, sin lugar a dudas, la resolución de cierto tipo de ecuaciones que contienen derivadas; sin embargo, antes de iniciar la resolución de cualquier ecuación, primero debemos aprender las definiciones elementales y la terminología del tema.

Docente: Dra. Ma. Gloria Guerrero Tinajero

Ecuaciones Diferenciales

- Unidad I. Ecuaciones Diferenciales de primer orden
- Unidad II. Ecuaciones diferenciales de orden superior
- Unidad III. Transformadas de Laplace

Unidad 1: Ecuaciones diferenciales de primer orden

- 1.1 Definiciones y terminología
- **1.2 Problemas de valor inicial**
- **1.3 Variables separables**
- 1.4 Soluciones por sustitución
- **1.5 Ecuaciones exactas**
- **1.6 Ecuaciones lineales**
- **1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden**

1.1 Definiciones y terminología

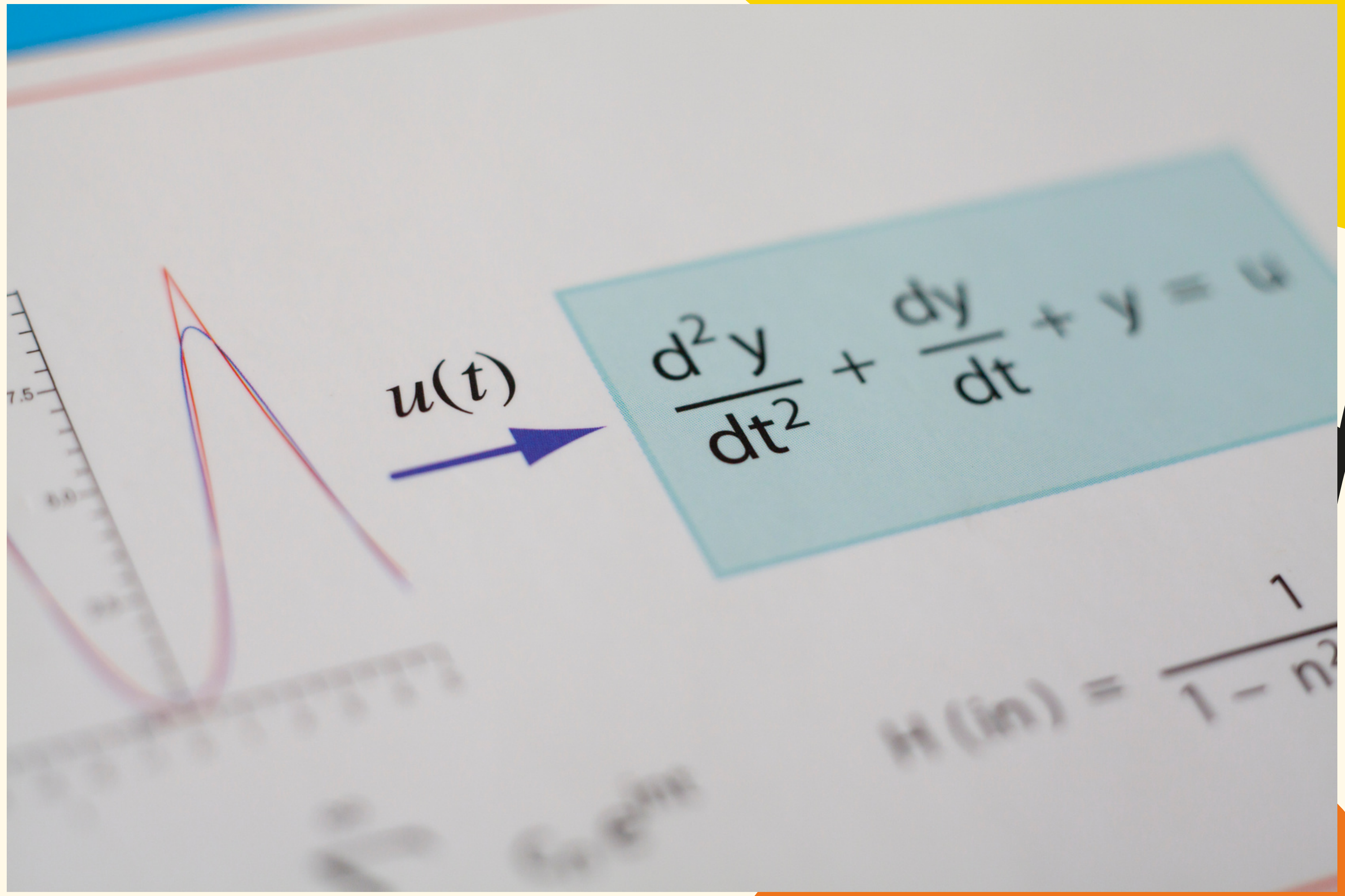
Una definición: La derivada **dy/dx** de una función **y=f′(x)** representa en sí misma otra función **f′(x)** que se encuentra mediante una regla específica.

Por ejemplo, la función $y = e^{0.1x^2}$ es diferenciable sobre el intervalo (-∞, ∞), y su derivada es $\frac{dy}{dx} = 0.2xe^{0.1x^2}$. Si reemplazamos $e^{0.1x^2}$ por el símbolo **y**, obtenemos $\frac{dy}{dx} = 0.2xy.$

1.1 Definiciones y terminología

DEFINICIÓN: Ecuación diferencial

Se dice que una ecuación diferencial (ED) es cualquier ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.



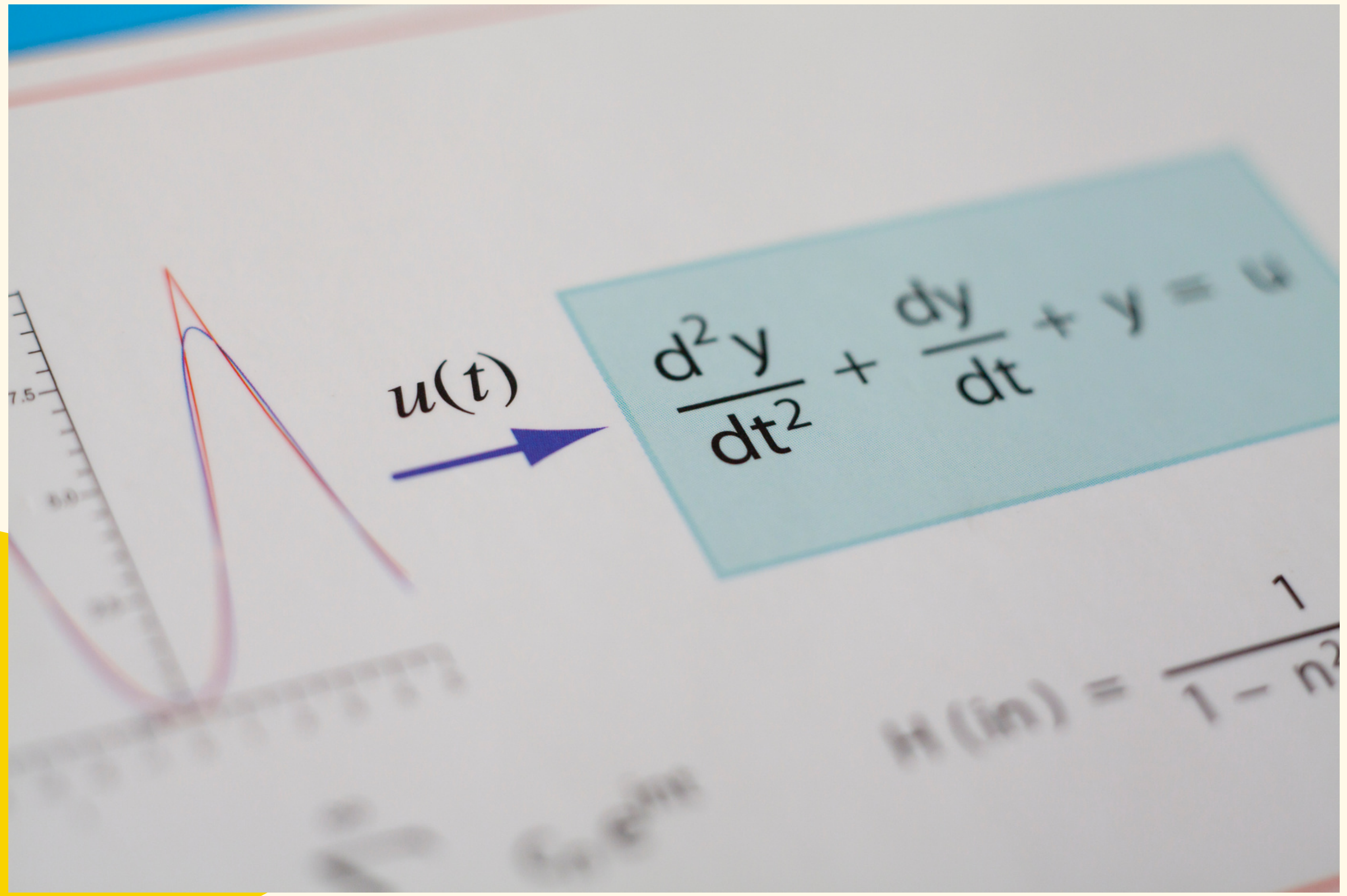
1.1 Definiciones y terminología

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES SE CLASIFICAN POR TIPO, ORDEN Y LINEALIDAD

Según el Tipo

Ecuación diferencial ordinaria (EDO) $\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$

Ecuación diferencial parcial (EDP) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$



Notación: A lo largo de este libro, las derivadas ordinarias se presentarán utilizando la notación de Leibniz $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots,$

o la notación prima **y′, y″, y‴,** … .

1.1 Definiciones y terminología

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES SE CLASIFICAN POR TIPO, ORDEN Y LINEALIDAD

Según el orden

El orden de una ecuación diferencial (EDO o EDP) representa el orden de la derivada más alta presente en la ecuación

$$\overset{\text{segundo orden}}{\overset{\downarrow}{\frac{d^2y}{dx^2}}} + 5\left(\overset{\text{primer orden}}{\overset{\downarrow}{\frac{dy}{dx}}}\right)^3 - 4y = e^x$$

1.1 Definiciones y terminología

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES SE CLASIFICAN POR TIPO, ORDEN Y LINEALIDAD

Por linealidad

Se dice que una ecuación diferencial ordinaria de **n**-ésimo ordenes lineal si **F** es lineal en **y, y′, y′′, … ,y^n.**

Esto significa que una EDO de **n-**ésimo orden es lineal cuando $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, es

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y - g(x) = 0 \text{ o}$$

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

1.1 Definiciones y terminología

LAS ECUACIONES DIFERENCIALES SE CLASIFICAN POR TIPO, ORDEN Y LINEALIDAD

Ejemplos de ecuaciones lineales

$$(y - x)dx + 4x\,dy = 0, \quad y'' - 2y' + y = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^3} + 3x\frac{dy}{dx} - 5y = e^x,$$

$$4xy' + y = x.$$

Ejemplos de ecuaciones no lineales

término no lineal: el coeficiente depende de y $\downarrow$

$$(1 - y)y' + 2y = e^x,$$

término no lineal: función no lineal de y $\downarrow$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} y = 0,$$

término no lineal: potencia diferente de 1 $\downarrow$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0,$$

1.1 Definiciones y terminología

DEFINICIÓN: SOLUCIÓN DE UNA EDO

Toda función **f**, definida sobre un intervalo **I** y que posea al menos n derivadas continuas sobre **I**, y que al ser sustituida en una ecuación diferencial ordinaria de **n**-ésimo orden reduzca la ecuación a una identidad, se dice que es una **solución** de la ecuación sobre el intervalo.

1.1 Definiciones y terminología

Ejemplo: Verificación de una solución

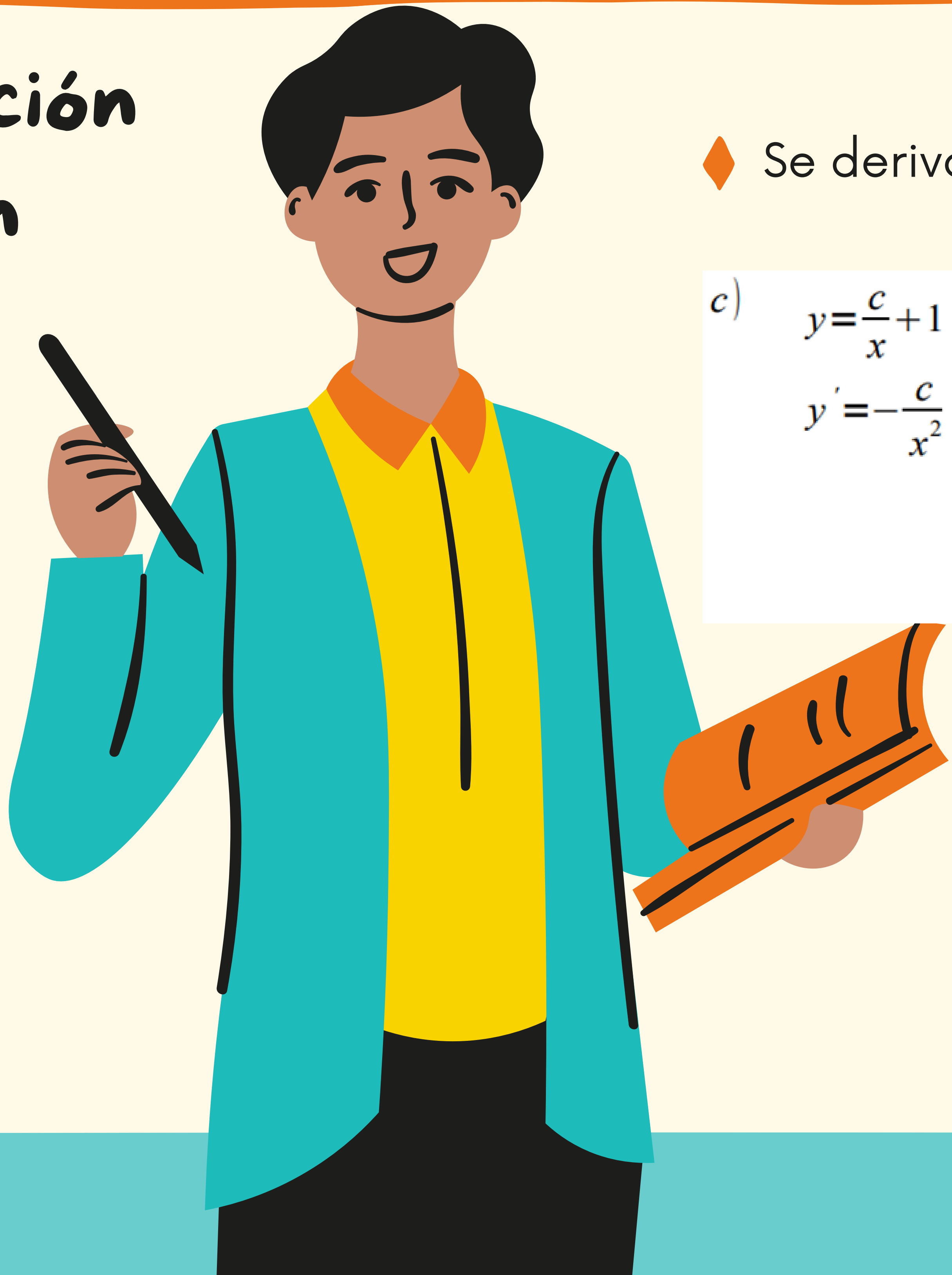
- Compruebe que la función señalada representa una solución de la ecuación diferencial dada, sobre el intervalo (-∞, ∞).

$$dy/dx = xy^{1/2};\ y = x^4/16$$

- Derivando la función $\frac{dy}{dx} = 4\frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$
- Sustituyendo en la ecuación $\frac{x^3}{4} = x(\frac{x^4}{16})^{1/2}$
- Desarrollando $\frac{x^3}{4} = x(\frac{x^2}{4})$
- Simplificando $\frac{x^3}{4} = \frac{x^3}{4}$

1.1 Definiciones y terminología

Ejemplo: Verificación de una solución



- Se deriva

b)
$$y = xe^x$$
$$y' = xe^x + e^x$$
$$y'' = xe^x + 2e^x$$

- Se sustituye

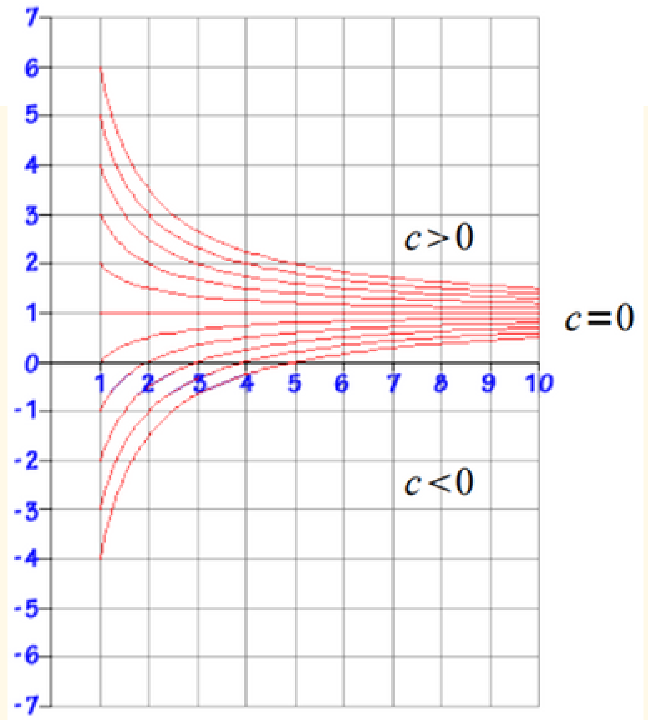
$$y'' - 2y' + y = 0$$
$$xe^x + 2e^x - 2(xe^x + e^x) + xe^x = 0$$
$$xe^x + 2e^x - 2xe^x - 2e^x + xe^x = 0$$
$$0 = 0$$

- Se deriva

c)
$$y = \frac{c}{x} + 1$$
$$y' = -\frac{c}{x^2}$$

- Se sustituye

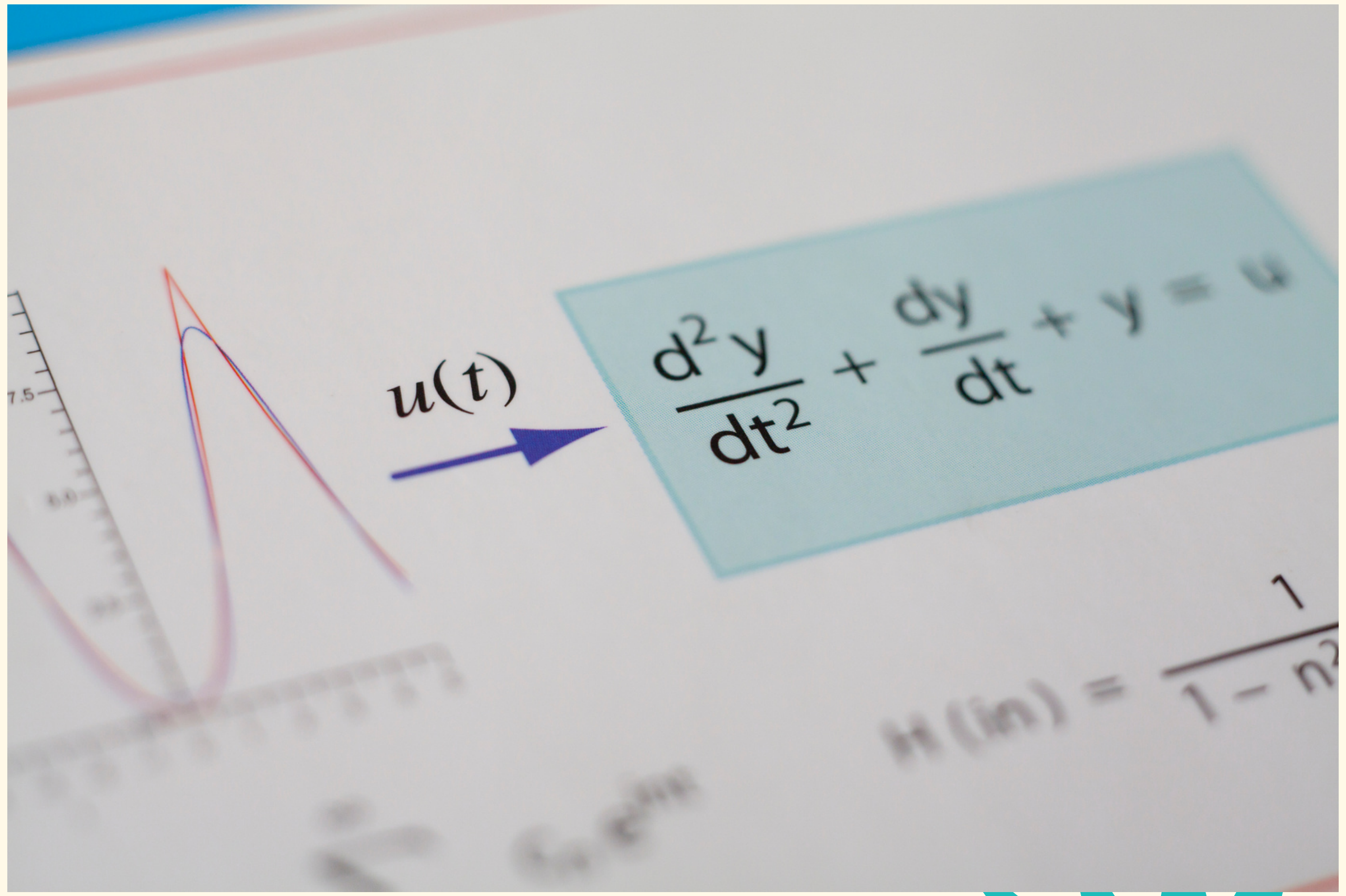
$$x\frac{dy}{dx} + y = 1$$
$$x\left(-\frac{c}{x^2}\right) + \frac{c}{x} + 1 = 1$$
$$-\frac{c}{x} + \frac{c}{x} + 1 = 1$$
$$1 = 1$$



1.1 Definiciones y terminología

FAMILIAS DE SOLUCIONES

Una solución que contiene una constante arbitraria representa un conjunto **G(x, y, c)=0** de soluciones denominadas **familia de soluciones** de un parámetro. Al resolver una ecuación diferencial de **n**-ésimo orden **F(x, y, y′, ..., y^(n)) = 0**, buscamos obtener una familia de soluciones de **n** parámetros **G(x, y, c1, c2, ..., cn) = 0**



1.1 Definiciones y terminología

Actividad 4

- Verifique que la función sea solución de la ecuación

1)	$y=e^{-\frac{x}{2}}$	$2y'+y=0$
2)	$y=e^{3x}+10e^{2x}$	$\frac{dy}{dx}-2y=e^{3x}$
3)	$y=5\tan 5x$	$y'=25+y^2$
4)	$y=\frac{1}{2}\operatorname{sen} x-\frac{1}{2}\cos x+10e^{-x}$	$y'+y=\operatorname{sen} x$
5)	$y=-\frac{1}{x^2}$	$x^2\frac{dy}{dx}+2xy=0$
6)	$y=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-20t}$	$\frac{dy}{dt}+20y=24$

Unidad 1: Ecuaciones diferenciales de primer orden

- 1.1 Definiciones y terminología
- 1.2 Problemas de valor inicial
- **1.3 Variables separables**
- 1.4 Soluciones por sustitución
- **1.5 Ecuaciones exactas**
- **1.6 Ecuaciones lineales**
- **1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden**

1.2 Problemas de valor inicial

Introducción: Con frecuencia enfrentamos problemas en los que buscamos una solución **y(x)** de una ecuación diferencial de modo que **y(x)** satisfaga condiciones adicionales establecidas, es decir, condiciones impuestas sobre la incógnita **y(x)** o sobre sus derivadas.

1.2 Problemas de valor inicial

En cierto intervalo **I** que contiene a **x0**, el problema de

$$\textit{Resolver:} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

$$\textit{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

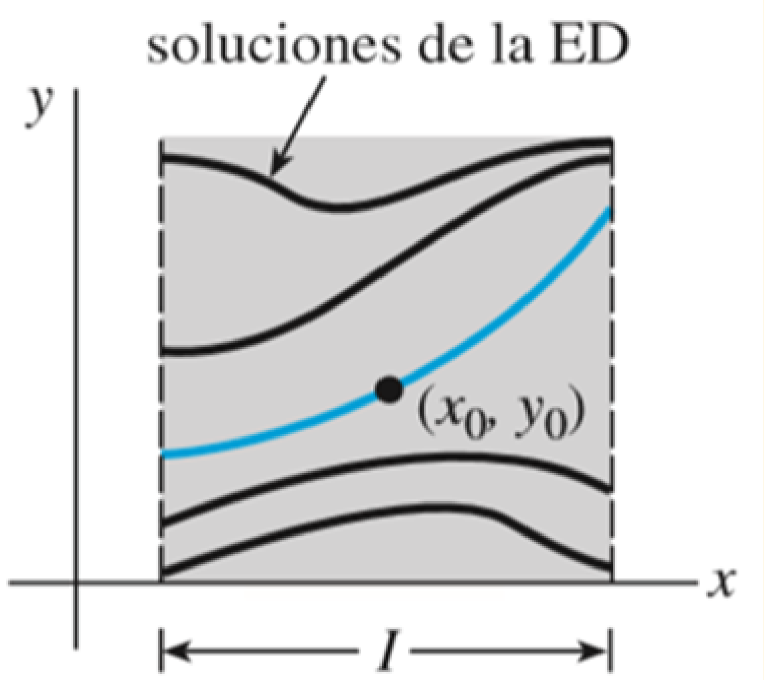
Donde **y0, y1, ..., y(n-1)** son constantes reales especificadas de forma arbitraria, se denomina **problema de valor inicial** (PVI). Los valores de **y(x)** y de sus primeras **n-1** derivadas en un solo punto **x0, y(x0)=y0, y′(x0)=y1, ..., y^(n-1) (x0)=y(n-1),** se denominan **condiciones iniciales.**

1.2 Problemas de valor inicial

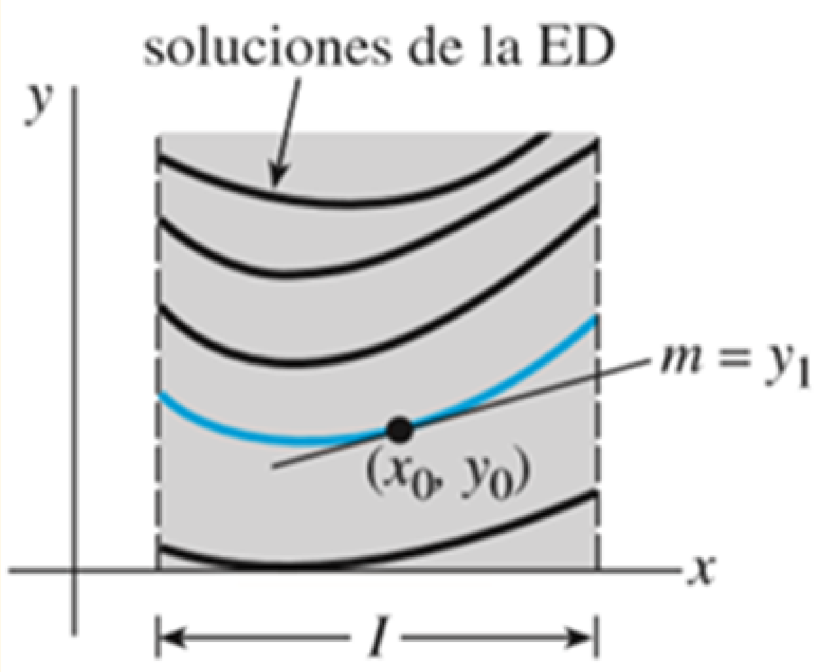
De primero y segundo orden

- El problema presentado en (1) también se denomina problema de valor inicial de **n**-ésimo orden. **Por ejemplo,**

$$\text{Resolver:} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$
$$\text{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0$$



$$\text{Resolver:} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$
$$\text{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1$$



Unidad I: Ecuaciones diferenciales de primer orden

- 1.1 Definiciones y terminología
- **1.2 Problemas de valor inicial**
- **1.3 Variables separables**
- 1.4 soluciones por sustitución
- **1.5 Ecuaciones exactas**
- **1.6 Ecuaciones lineales**
- **1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden**

1.3 Variables separables

- **Introducción:** Considere las ecuaciones de primer orden **$dy/dx = f(x, y)$**. Cuando **f** no depende de la variable **y**, es decir, **$f(x,y)=g(x)$**, la ecuación diferencial

  $dy/dx=g(x)$ (1)

  se puede resolver por integración. Si **$g(x)$** es una función continua, al integrar ambos lados de **(1)** se produce la solución **$y=g(x)dx=G(x)+c$**, donde **$G(x)$** es una antiderivada (integral indefinida) de **$g(x)$**.

1.3 Variables separables

DEFINICIÓN: Ecuación separable

- Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma **dy/dx= (g(x))/(h(y))** es separable o que tiene variables separables.

- **Metodo de solución**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

$$h(y)dy = g(x)dx$$

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c$$

1.3 Variables separables

Ejemplos:

a) $\dfrac{dy}{dx}=2+e^{3x}$

$\int dy=\int (2+e^{3x})\,dx$

$y=2x+\dfrac{1}{3}e^{3x}+c$

b) $\dfrac{dy}{dx}=sen\,5x$

$\int dy=\int sen\,5x\,dx$

$y=-\dfrac{1}{5}\cos 5x+c$

c) $(x+1)\,dy-y\,dx=0$

$(x+1)\,dy=y\,dx$

$\int \dfrac{dy}{y}=\int \dfrac{dx}{x+1}$

$\ln y=\ln|x+1|+\ln c$

$\ln y=\ln|c(x+1)|$

$e^{\ln y}=e^{\ln|c(x+1)|}$

$y=c(x+1)$

1.3 Variables separables

Mas ejemplos:

$d)$ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ $\qquad \overset{y}{y}\left(\overset{x_0}{4}\right) \overset{=}{=} \overset{y_0}{3}$

$$\int y\,dy = -\int x\,dx$$

$$\left(\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c\right)2$$

$$y^2 = -x^2 + c$$

$$x^2 + y^2 = c^2 \qquad \left(\overset{x_0}{4}, \overset{y_0}{3}\right)$$

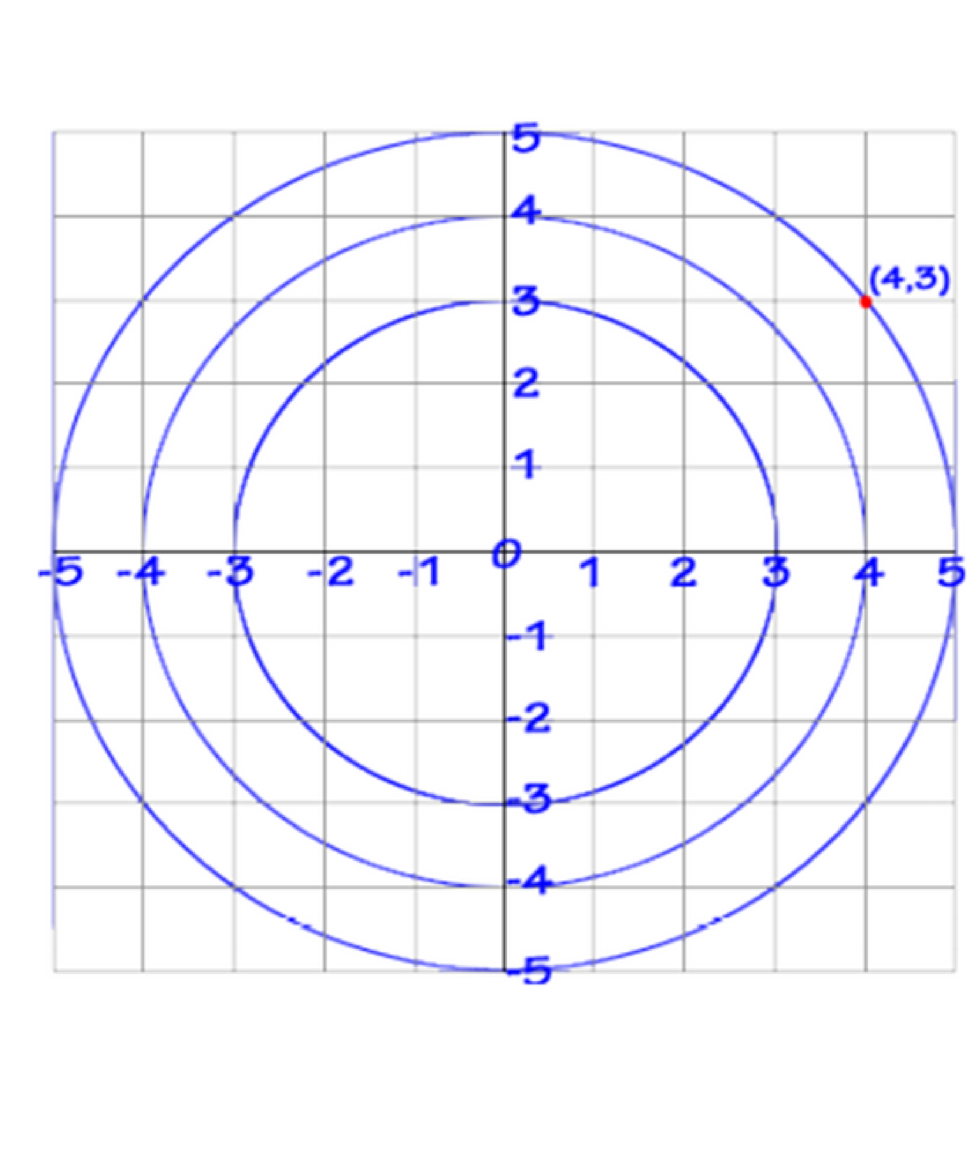
$$(4)^2 + (3)^2 = c^2$$

$$16 + 9 = c^2$$

$$25 = c^2$$

$$c = 5$$

$$x^2 + y^2 = 25$$



1.3 Variables separables

Mas ejemplos:

$e)$

$$x e^{-y} \operatorname{sen} x\, dx - y\, dy = 0$$

$$x e^{-y} \operatorname{sen} x\, dx = y\, dy$$

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = \int y e^{y}\, dy$$

$$\begin{array}{ll} u = x & u = y \\ du = dx & du = dy \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx & dv = e^{y}\, dy \\ v = -\cos x & v = e^{y} \end{array}$$

$$-x \cos x + \int \cos x\, dx = y e^{y} - \int e^{y}\, dy$$

$$-x \cos x + \operatorname{sen} x = y e^{y} - e^{y} + c$$

$$-x \cos x + \operatorname{sen} x = e^{y}(y-1) + c$$

1.3 Variables separables

Actividad 5

Resuelva la ecuación diferencial dada mediante separación de variables

6) $\frac{dx}{dy}=\frac{x^2y^2}{1+x}$

7) $\frac{dy}{dx}=e^{3x+2y}$

8) $(4y+yx^2)dy-(2x+xy^2)dx=0$

9) $2y(x+1)dy=x\,dx$

10) $(e^{-y}+1)\,sen\,x\,dx=(1+\cos x)dy \qquad y(0)=0$

11) $y\,dy=4x(y^2+1)^{\frac{1}{2}}dx \qquad y(0)=1$

Unidad 1: Ecuaciones diferenciales de primer orden

- 1.1 Definiciones y terminología
- **1.2 Problemas de valor inicial**
- **1.3 Variables separables**
- 1.4 Soluciones por sustitución
- **1.5 Ecuaciones exactas**
- **1.6 Ecuaciones Lineales**
- **1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden**

1.4 Soluciones por sustitución

Introducción: Por lo general, resolvemos una ecuación diferencial al reconocerla como cierto tipo de ecuación (digamos, separable) y llevando a cabo entonces un procedimiento, constituido por pasos matemáticos específicos para la ecuación, que produzca una función que satisfaga la ecuación. Muchas veces, el primer paso para resolver una ecuación diferencial determinada consiste en transformarla en otra ecuación diferencial mediante una sustitución.

1.4 Soluciones por sustitución

- **Función Homogénea**

Se dice que es una Función homogénea si los términos de ésta son del mismo grado.

Ejemplo: $f(x, y) = x^3 + y^3$ es una **función homogénea** de grado 3.

Ejemplo: $f(x, y) = x^3 + y^3 + 1$ es una función **no-homogénea.**

1.4 Soluciones por sustitución

DEFINICIÓN

Una ED de primer orden escrita en la forma diferencial **M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 (1)** se dice que es homogénea si ambos coeficientes **M** y **N** son funciones homogéneas del mismo grado.

Metodo de solución

$$y = ux$$
$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$
$$u = \frac{y}{x}$$

o

$$x = vy$$
$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$
$$v = \frac{x}{y}$$

1.4 Soluciones por sustitución

Ejemplo de condición inicial

$$a)\quad x\frac{dy}{dx}=y+xe^{\frac{y}{x}} \qquad\qquad y(1)=1$$

$$\left(x\frac{dy}{dx}=y+xe^{\frac{y}{x}}\right)\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$$

$$u+x\frac{du}{dx}=u+e^{u}$$

$$x\frac{du}{dx}=e^{u}$$

$$\int e^{-u}du=\int\frac{1}{x}dx$$

$$-e^{-u}=\ln x+c$$

$$-e^{-\frac{y}{x}}=\ln x+c$$

$$-e^{-1}=\ln(1)+c$$

$$c=-e^{-1}$$

$$-e^{-\frac{y}{x}}=\ln x-e^{-1}$$

1.4 Soluciones por sustitución

Ejemplo:

b)

$$2x^3y\,dx+(x^4+y^4)\,dy=0$$
$$2x^3y\,dx=-(x^4+y^4)\,dy$$
$$\frac{dx}{dy}=-\frac{(x^4+y^4)}{2x^3y}$$
$$\frac{dx}{dy}=-\left(\frac{x}{2y}+\frac{y^3}{2x^3}\right)$$
$$v+y\frac{dv}{dy}=-\left(\frac{v}{2}+\frac{1}{2v^3}\right)$$
$$y\frac{dv}{dy}=-\left(\frac{v}{2}+\frac{1}{2v^3}+v\right)$$
$$y\frac{dv}{dy}=-\left(\frac{3v}{2}+\frac{1}{2v^3}\right)$$
$$y\frac{dv}{dy}=-\left(\frac{3v^4+1}{2v^3}\right)$$
$$\frac{2v^3}{3v^4+1}dv=-\frac{1}{y}dy$$

$$\int\frac{2v^3}{3v^4+1}dv=-\int\frac{1}{y}dy$$
$$u=3v^4+1$$
$$du=12v^3dv$$
$$\left(\frac{1}{6}\ln(3v^4+1)=-\ln y+c\right)6$$
$$\ln(3v^4+1)=-6\ln y+\ln c$$
$$\ln(3v^4+1)+\ln y^6=\ln c$$
$$\ln[y^6(3v^4+1)]=\ln c$$
$$y^6(3v^4+1)=c$$
$$y^6\left(3\frac{x^4}{y^4}+1\right)=c$$
$$y^6\left(\frac{3x^4+y^4}{y^4}\right)=c$$
$$y^2(3x^4+y^4)=c$$
$$3x^4y^2+y^6=c$$

1.4 Soluciones por sustitución

Ejemplo:

c)

$$(2\sqrt{x\,y}+y)\,dx-x\,dy=0$$

$$\left(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y\right)dx=x\,dy$$

$$\frac{2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y}{x}=\frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{y}{x}=\frac{dy}{dx}$$

$$2u^{\frac{1}{2}}+u=u+x\frac{du}{dx}$$

$$2u^{\frac{1}{2}}=x\frac{du}{dx}$$

$$\frac{2}{x}dx=\frac{1}{u^{\frac{1}{2}}}du$$

$$2\int\frac{1}{x}dx=\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$2\ln x=2u^{\frac{1}{2}}+c$$

$$\frac{1}{2}\left(2\ln x=2u^{\frac{1}{2}}+c\right)$$

$$\ln x=\sqrt{u}+c$$

$$\left(\ln x=\sqrt{\frac{y}{x}}+c\right)\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x}\ln x=\sqrt{y}+c\sqrt{x}$$

1.4 Solución por sustitución

Actividad 6

Resuelva la ecuación diferencial dada mediante solución por sustitución

4) $-y\,dx+\left(x+\sqrt{x\,y}\right)dy=0$

5) $2x^2y\,dx=(3x^3+y^3)\,dy$

6) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

7) $y\dfrac{dx}{dy}=x+4ye^{-\frac{2x}{y}}$

8) $xy^2\dfrac{dy}{dx}=y^3-x^3$ $\quad y(1)=2$

9) $2x^2\dfrac{dy}{dx}=3xy+y^2$ $\quad y(1)=-2$

Unidad 1: Ecuaciones diferenciales de primer orden

- 1.1 Definiciones y terminología
- 1.2 Problemas de valor inicial
- 1.3 Variables separables
- 1.4 Soluciones por sustitución
- 1.5 Ecuaciones exactas
- 1.6 Ecuaciones Lineales
- 1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden

1.5 Ecuaciones exactas

Introducción: Aunque la ecuación diferencial simple **$ydx+xdy=0$** es separable, podemos resolverla de manera alternativa si reconocemos que el lado izquierdo es equivalente al diferencial del producto de **x** por **y**, es decir, **$xdy+ydx=d(xy)$**. Al integrar ambos lados de la ecuación obtenemos de inmediato la solución implícita **$xy=c$**.

1.5 Ecuaciones exactas

DEFINICIÓN: Ecuación exacta

Una expresión diferencial **M(x,y)dx+N(x,y)dy** es una diferencial exacta en una región **R** del plano **xy** si corresponde al diferencial de alguna función **f (x, y)**. Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma **M(x,y)dx+N(x,y)dy=0** es una ecuación exacta si la expresión del lado izquierdo es una diferencial exacta.

1.5 Ecuaciones exactas

TEOREMA: Criterio para una diferencial exacta

- Digamos que **M(x,y)y N(x,y)** son continuos y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región rectangular **R** definida por **a<x<b, c<y<d**. Entonces, una condición necesaria y suficiente para que **M(x,y)dx+N(x,y)dy** sea una diferencial exacta es

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

- **Método de solución**

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ es exacta

$$\int M(x,y)dx = \int M(x,y)dx + h(y)$$

$$\int N(x,y)dy = \int N(x,y)dy + g(x)$$

$$f(x,y) = c$$

1.5 Ecuaciones exactas

Ejemplos:

a)

$$\underbrace{2xy}_{M}\,dx+\underbrace{(x^2-1)}_{N}\,dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

$$\int 2xy\,dx=x^2y+h(y)$$

$$\int (x^2-1)\,dy=x^2y-y+g(x)$$

$$x^2y-y=c$$

b)

$$\underbrace{(e^{2y}-y\cos xy)}_{M}\,dx+\underbrace{(2xe^{2y}-x\cos xy+2y)}_{N}\,dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2e^{2y}+xy\,\mathrm{sen}\,xy-\cos xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=2e^{2y}+xy\,\mathrm{sen}\,xy-\cos xy$$

$$\int (e^{2y}-y\cos xy)\,dx=xe^{2y}-\mathrm{sen}\,xy+h(y)$$

$$\int (2xe^{2y}-x\cos xy+2y)\,dy=xe^{2y}-\mathrm{sen}\,xy+y^2+g(x)$$

$$xe^{2y}-\mathrm{sen}\,xy+y^2=c$$

1.5 Ecuaciones exactas

Ejemplo de problema de valor inicial

$$\underbrace{(\cos x \operatorname{sen} x - x y^2)}_{M}\, dx + \underbrace{y(1-x^2)}_{N}\, dy = 0 \qquad y(0)=2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy$$

$$\int (\cos x \operatorname{sen} x - x y^2)\, dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2} x^2 y^2 + h(y)$$

$$\int (y - x^2 y)\, dy = \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} x^2 y^2 + g(x)$$

$$-\frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{2} y^2 = c$$

$$-\cos^2 x - x^2 y^2 + y^2 = c \qquad\qquad -\cos^2(0) - (0)^2(2)^2 + (2)^2 = c$$

$$-1 + 4 = c$$

$$-\cos^2 x - x^2 y^2 + y^2 = 3 \qquad\qquad c = 3$$

1.5 Ecuaciones exactas

Actividad 7

Resuelva la ecuación diferencial dada mediante Ecuaciones Exactas

5) $(1+y\cos xy)\,dx+(x\cos xy)\,dy=0$

6) $(y^3-y^2\,\text{sen}\,x-x)\,dx+(3xy^2+2y\cos x)\,dy=0$

7) $(y\ln y-e^{-xy})\,dx+\left(\dfrac{1}{y}+x\ln y\right)dy=0$

8) $x\dfrac{dy}{dx}=2xe^x-y+6x^2$

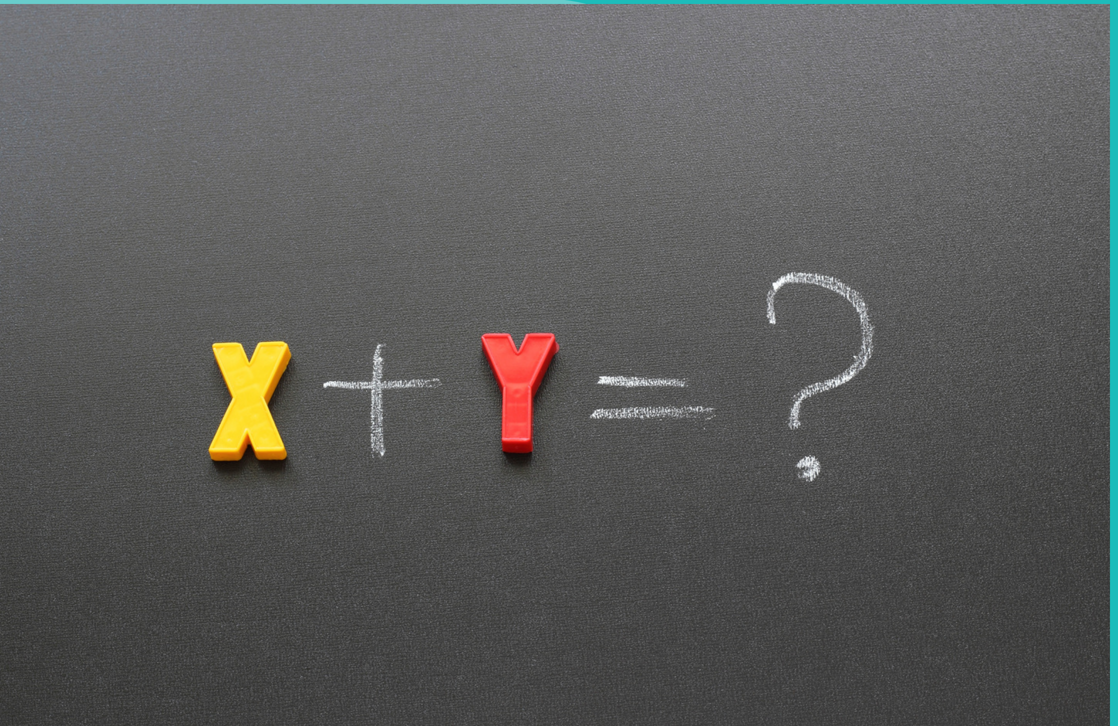
11) $(x+y)^2\,dx+(2xy+x^2-1)\,dy=0 \qquad y(1)=1$

12) $(4y+2x-5)\,dx+(6y+4x-1)\,dy=0 \qquad y(-1)=2$

Unidad I: Ecuaciones diferenciales de primer orden

- 1.1 Definiciones y terminología
- 1.2 Problemas de valor inicial
- 1.3 Variables separables
- 1.4 Soluciones por sustitución
- 1.5 Ecuaciones exactas
- 1.6 Ecuaciones Lineales
- 1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden

1.6 Ecuaciones Lineales



Introducción: Las ecuaciones diferenciales lineales son una familia de ecuaciones diferenciales especialmente "amistosa" en cuanto a que, dada una ecuación lineal, ya sea de primer orden o de orden superior, siempre hay una buena posibilidad de encontrar alguna clase de solución de la ecuación que podamos considerar.

1.6 Ecuaciones Lineales

DEFINICIÓN: Ecuación lineal

- Se dice que una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (1)$$

es una **ecuación lineal** en la variable dependiente **y**.

- **Forma estándar:** Al dividir ambos lados de **(1)** entre el primer coeficiente **a1 (x)** obtenemos una forma todavía más útil, la **forma estándar** de una ecuación lineal

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \qquad (2)$$

- **Factor integrante**

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

1.6 Ecuaciones Lineales

Método de solución:

$$\left[a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)\,y=g(x)\right]\frac{1}{a_1(x)}$$

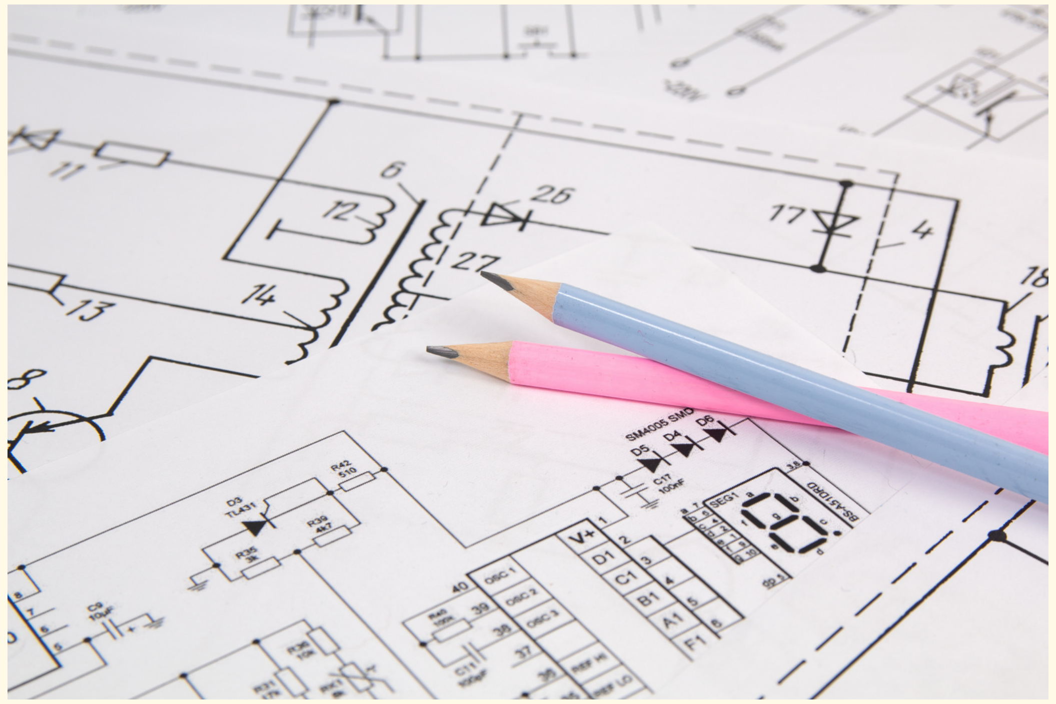
$$\frac{dy}{dx}+\frac{a_0(x)}{a_1(x)}y=\frac{g(x)}{a_1(x)}$$

$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=f(x)$$

$$\mu(x)=e^{\int p(x)\,dx}$$

$$\mu(x)\left[\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=f(x)\right]$$

$$\mu(x)\,dy+\left[p(x)\mu(x)\,y-\mu(x)f(x)\right]dx=0$$



$$\frac{dy}{dx}+p(x)\,y=f(x) \qquad \mu(x)=e^{\int p(x)\,dx} \qquad y=f(x,y)$$

$$\frac{dx}{dy}+p(y)\,x=f(y) \qquad \mu(y)=e^{\int p(y)\,dy} \qquad x=f(x,y)$$

1.6 Ecuaciones Lineales

Ejemplos:

$$a)\quad \left(x\frac{dy}{dx}-4y=x^6e^x\right)\frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^5e^x$$

$$p(x)=-\frac{4}{x}$$

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln x}=x^{-4}$$

$$x^{-4}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x^5e^x\right)$$

$$x^{-4}dy+(-4x^{-5}y-xe^x)dx=0$$

$$\int x^{-4}dy=x^{-4}y+g(x)$$

$$\int(-4x^{-5}y-xe^x)dx=x^{-4}y-xe^x+e^x+h(y)$$

$$u=x \qquad dv=e^x dx$$

$$du=dx \qquad v=e^x$$

$$x^{-4}y-xe^x+e^x=c$$

$$x^4(x^{-4}y-xe^x+e^x=c)$$

$$y-x^5e^x+x^4e^x=cx^4$$

$$y=x^5e^x-x^4e^x+cx^4$$

1.6 Ecuaciones Lineales

Ejemplo de problema de valor inicial

b) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y^2}$ $\qquad y(-2)=0$

$$\frac{dx}{dy}=x+y^2$$

$$\frac{dx}{dy}-x=y^2$$

$$p(y)=-1$$

$$\mu(y)=e^{-\int dy}=e^{-y}$$

$$e^{-y}dx+(-xe^{-y}-y^2e^{-y})dy=0$$

$$\int e^{-y}dx=xe^{-y}+h(y)$$

$$\int(-xe^{-y}-y^2e^{-y})dy=xe^{-y}-(-y^2e^{-y}+2\int ye^{-y}dy)$$

$u=y^2$ $\quad dv=e^{-y}dy$ $\qquad u=y$ $\quad dv=e^{-y}dy$

$du=2y\,dy$ $\quad v=-e^{-y}$ $\qquad du=dy$ $\quad v=-e^{-y}$

$$=xe^{-y}+y^2e^{-y}-2(-ye^{-y}+\int e^{-y}dy)$$

$$=xe^{-y}+y^2e^{-y}+2ye^{-y}+2e^{-y}+g(x)$$

$$xe^{-y}+y^2e^{-y}+2ye^{-y}+2e^{-y}=c$$

$$(-2)e^0+(0^2)e^0+2(0)e^0+2e^0=c$$

$$-2+2=c$$

$$c=0$$

$$(xe^{-y}+y^2e^{-y}+2ye^{-y}+2e^{-y}=0)e^{y}$$

$$x+y^2+2y+2=0$$

$$x=-y^2-2y-2$$

1.6 Ecuaciones Lineales

Actividad 8: Resuelva la actividad dada por ecuaciones lineales

3) $y' + 3x^2 y = x^2$

4) $x^2 y' + x y = 1$

5) $(x + 4y^2)\,dy + 2y\,dx = 0$

6) $x\,dy = (x \operatorname{sen} x - y)\,dx$

7) $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 20$ $\quad y(0) = 2$

8) $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E$ $\quad L, R, E$ son constantes, $i(0) = i_0$

Unidad 1: Ecuaciones diferenciales de primer orden

- 1.1 Definiciones y terminología
- **1.2 Problemas de valor inicial**
- **1.3 Variables separables**
- 1.4 Soluciones por sustitución
- **1.5 Ecuaciones exactas**
- **1.6 Ecuaciones Lineales**
- **1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden**

1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Modelos lineales

Introducción: En esta sección resolveremos algunos de los modelos lineales de primer orden presentados en la sección anterior.

1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Aplicaciones de Modelos lineales

Crecimiento y decamiento: El problema de valor inicial

$$dx/dt=kx, \qquad x(t_0)=x_0, \qquad (1)$$

donde **k** es la constante de proporcionalidad, sirve como un modelo para diversos fenómenos que implican **crecimiento o decamiento.**

1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Aplicaciones de Modelos lineales

Vida media. En física, el término vida media es una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva. La vida media es simplemente el tiempo que le toma desintegrarse a la mitad de los átomos presentes en una cantidad inicial A0, o transmutar en átomos de otro elemento. Cuanto más larga sea la vida media de una sustancia, tanto más estable será. Por ejemplo, la vida media del radio altamente radiactivo Ra-226, es de aproximadamente 1 700 años. En todo este tiempo, la vida media de cierta cantidad de Ra-226 se transmuta en radón, Rn-222. El isótopo de uranio que se presenta con más frecuencia, el U-238, tiene una vida media de casi 4 500 000 000 de años. En alrededor de 4 500 millones de años, la mitad de cierta cantidad de U-238 transmutará en plomo, Pb-206. La formula esta dada por **$dA/dt=kA,\ A0=A(0),$** **(2)**

1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Aplicaciones de Modelos lineales

Fechado por carbono: Alrededor del año 1950, el químico Willard Libby diseñó un método para usar el carbono radiactivo como un medio con el cual determinar la edad aproximada de los fósiles. La teoría de fechado por carbono se basa en que el isótopo de carbono-14 (C-14) se produce en la atmósfera por acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. La relación entre la cantidad de C-14 con respecto al carbono ordinario que hay en la atmósfera resulta ser una constante y, en consecuencia, la cantidad proporcional del isótopo presente en todos los organismos vivientes es igual a la que tiene la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción de C-14, ya sea por respirar o por comer, se detiene. Así, al comparar la cantidad proporcional del C-14 presente en, digamos, un fósil con la relación constante encontrada en la atmósfera, es posible obtener una estimación razonable de la edad del fósil. El método está basado en el conocimiento de que la vida media del C-14 radiactivo es de unos 5 600 años. Por su trabajo, Libby ganó el Premio Nobel de química en 1960. El método de Libby se ha usado para fechar el mobiliario de madera encontrado en las tumbas egipcias, las envolturas de lino de los rollos del Mar Muerto, y la sábana del enigmático Sudario de Turín.

1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Aplicaciones de Modelos lineales

- **Ley de enfriamiento de Newton:** La formulación matemática de la ley empírica de Newton sobre el enfriamiento de un objeto está dada por la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$dT/dt=k(T-T_m), \qquad (3)$$

donde **k** es una constante de proporcionalidad, **T(t)** es la temperatura del objeto para **$t>0$, y Tm** es la temperatura del medio ambiente.

1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Aplicaciones de Modelos lineales

- **Circuitos en serie:** Para un circuito en serie compuesto por sólo un resistor y un inductor, la segunda ley de Kirchhoff señala que la suma de la caída de voltaje a través del inductor **$L(di/dt)$** y la caída de voltaje a través del resistor **(Ri)** es igual a la cantidad de voltaje suministrado **$E(t)$** al circuito. Vea la figura 2.39.

Por lo tanto, obtenemos la ecuación diferencial lineal para la corriente **$i(t)$**,

$$L\,di/dt + Ri = E(t),$$

donde **L** y **R** son constantes conocidas como inductancia y resistencia, respectivamente. La corriente **$i(t)$** se conoce también como **respuesta** del sistema.

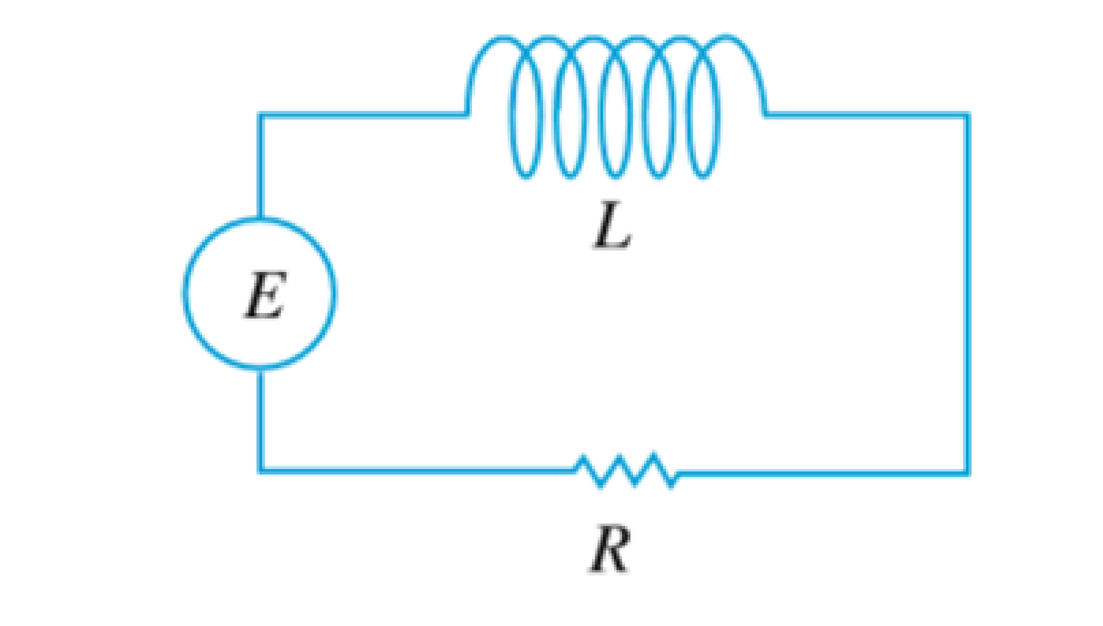


Figura 2.39 Circuito *LR* en serie

1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Ejemplos:

Una batería de $12\,V$ se conecta a un circuito en serie con una inductancia de $\frac{1}{2}H$ y la resistencia es de $10\,\Omega$ Determinar la corriente si la intensidad inicial es de cero.

$$\frac{1}{2}\frac{di}{dt}+10i=12 \qquad i(0)=0$$

Multiplicamos por 2.

$$\frac{di}{dt}+20i=24$$
$$P(t)=20$$
$$\mu(t)=e^{\int 20\,dt}$$
$$\mu(t)=e^{20t}$$
$$\left(\frac{di}{dt}+20i=24\right)e^{20t}$$
$$e^{20t}\,di+(20i\,e^{20t}-24e^{20t})\,dt=0$$
$$\int e^{20t}\,di=i\,e^{20t}+h(t)$$
$$\int(20i\,e^{20t}-24e^{20t})\,dt=\frac{20}{20}i\,e^{20t}-\frac{24}{20}e^{20t}+g(i)$$
$$\left(i\,e^{20t}-\frac{6}{5}e^{20t}=c\right)e^{-20t}$$

$$i=\frac{6}{5}+c\,e^{-20t}$$
$$i(0)=0$$
$$0=\frac{6}{5}+c\,e^{-20(0)}$$
$$0=\frac{6}{5}+c$$
$$c=-\frac{6}{5}$$
$$i(t)=\frac{6}{5}-\frac{6}{5}e^{-20t}$$

1.7 Aplicación de las Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Ejemplos:

Al sacar un pastel del horno su temperatura es $300^\circ F$. Después de 3 minutos $200^\circ F$ ¿En cuánto tiempo se enfriará a la temperatura ambiente de $70^\circ F$?

$$\frac{dT}{dt}=K(T-Tm)$$

$$t(0)=300^\circ F$$

$$t(3)=200^\circ F$$

$$t(x)=70^\circ F$$

$$\frac{dT}{dt}=K(T-70)$$

$$\int \frac{dT}{T-70}=K\int dt$$

$$\ln(T-70)=Kt+c$$

$$e^{\ln(T-70)}=e^{Kt+c}$$

$$T-70=e^{Kt}e^{c}$$

$$T-70=e^{Kt}c$$

$$T=ce^{Kt}+70$$

Cuando $T(0)=300$ tenemos: $300=c_2+70$ donde $c_2=230$ y por lo tanto:

$$T=230e^{Kt}+70$$

De $T(3)=200$ se obtiene:

$$200=230e^{3k}+70$$

$$200-70=230e^{3k}$$

$$130=230e^{3k}$$

$$\frac{130}{230}=e^{3k}$$

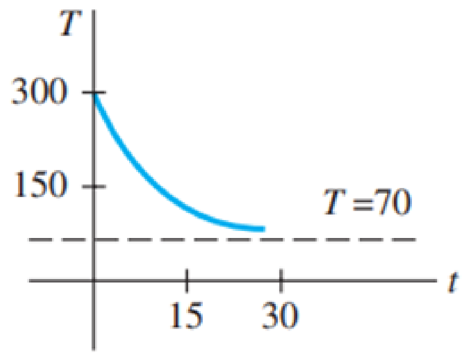
$$\frac{13}{23}=e^{3k}$$

$$\ln\frac{13}{23}=3k$$

$$\frac{1}{3}\ln\frac{13}{23}=k$$

$$k=-0{,}19018$$

$$T(t)=230e^{-0{,}19018t}+70$$



a)

$T(t)$	t (min)
75°	20.1
74°	21.3
73°	22.8
72°	24.9
71°	28.6
70.5°	32.3

b)

Figura 2.37 La temperatura de un pastel enfriándose alcanza la temperatura ambiente