ECUACIONES DIFERENCIALES

Introducción: Ahora estudiaremos las ecuaciones diferenciales de segundo orden y de orden superior. En esta sección examinaremos una parte de la teoría en que se basan las ecuaciones diferenciales lineales. Después, en las cinco secciones siguientes, aprenderemos cómo resolver ecuaciones diferenciales lineales de orden superior.

Docente: Dra. Ma. Gloria Guerrero Tinajero

Ecuaciones Diferenciales

- Unidad I. Ecuaciones Diferenciales de primer orden
- Unidad II. Ecuaciones diferenciales de orden superior
- Unidad III. Transformadas de Laplace

Unidad II. Ecuaciones diferenciales de orden superior

- 2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales
  2.1.1 Problemas de valor inicial y de valores en la frontera
  2.1.2 Ecuaciones homogéneas
  2.1.3 Ecuaciones no homogéneas
- **2.2 Reducción de orden**
- **2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes**
- 2.4 Coeficientes indeterminados
- **2.5 Variación de parámetros**
- **2.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior**

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.1 Problemas de valor inicial y de valores en la frontera

Problema de valor inicial: En la sección anterior definimos un problema de valor inicial para una ecuación diferencial de **n**-ésimo orden. Para una ecuación diferencial lineal, **un problema de valor inicial de n-ésimo orden** es

$$\textit{Resolver:} \quad a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\textit{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \qquad (1)$$

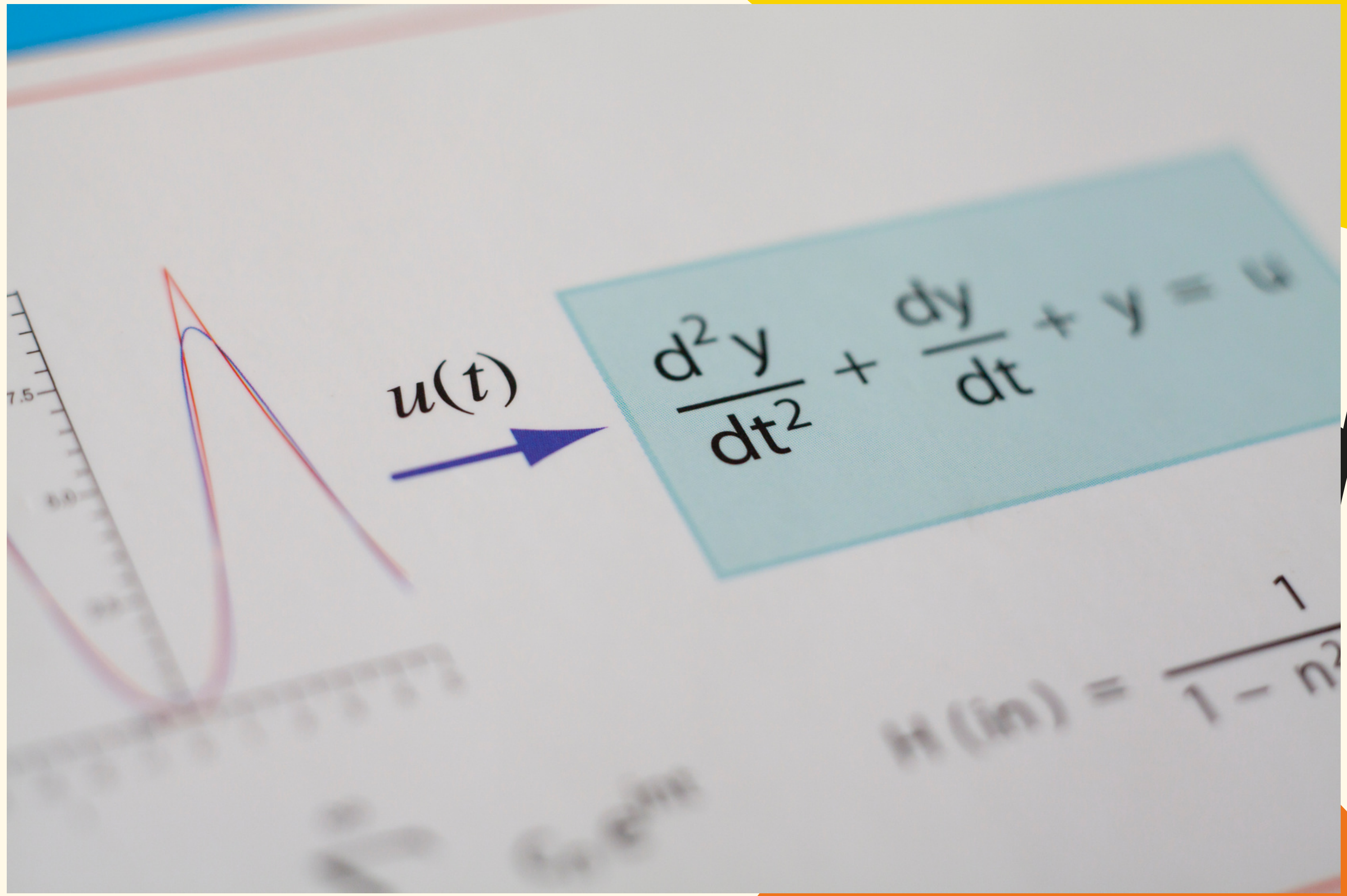
2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.1 Problemas de valor inicial y de valores en la frontera

TEOREMA 2.1: Existencia de una solución única

Digamos que $a_n(x), a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ y $g(x)$

son continuas en un intervalo **I**, y que $a_n(x) \neq 0$ para toda **x** presente en este intervalo. Si **x=x0** está en cualquier punto de este intervalo, entonces en el intervalo existirá una solución **y(x)** para el problema de valor inicial **(PVI) (1)** y será única.



2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales
2.1.1 Problemas de valor inicial y de valores en la frontera

Ejemplo 1: Solución única de un PVI

El problema de valor inicial

$$3y''' + 5y'' - y' + 7y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0$$

posee la solución trivial **y=0**. Dado que la ecuación de tercer orden es lineal con coeficientes constantes, se deduce que todas las condiciones del teorema 2.1 se cumplen.

Por lo tanto, **y=0** será la **única** solución en cualquier intervalo que contenga **x=1.**

Ejemplo 2: Solución única de un PVI

Verificar que la función $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$

es una solución del problema de valor inicial $y'' - 4y = 12x, \; y(0) = 4, \; y'(0) = 1.$

Ahora, la ecuación diferencial es lineal, tanto los coeficientes como **g(x)=12x** son continuos, y **a2(x)=1≠0** en cualquier intervalo **I** que contenga a **x=0.** Con base en el teorema 2.1 concluimos que la función dada es la única solución en **I.**

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.1 Problemas de valor inicial y de valores en la frontera

Problema de valores en la frontera: Otro tipo de problema consiste en resolver una ecuación diferencial de segundo orden o mayor en la cual la variable dependiente y, o sus derivadas, esté especificada en puntos diferentes. Un problema como

$$\textit{Resolver:}\quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

$$\textit{Sujeto a:}\quad y(a) = y_0,\quad y(b) = y_1$$

se denomina problema de valores en la frontera (PVF). Los valores prescritos **y(a)=y0** y **y(b)=y1** se conocen como condiciones de frontera. Una solución del problema anterior es una función que satisface la ecuación diferencial en algún intervalo I, el cual contiene a y b, y cuya gráfica atraviesa los puntos **(a, y0)** y **(b, y1)**. Vea la figura 3.1.

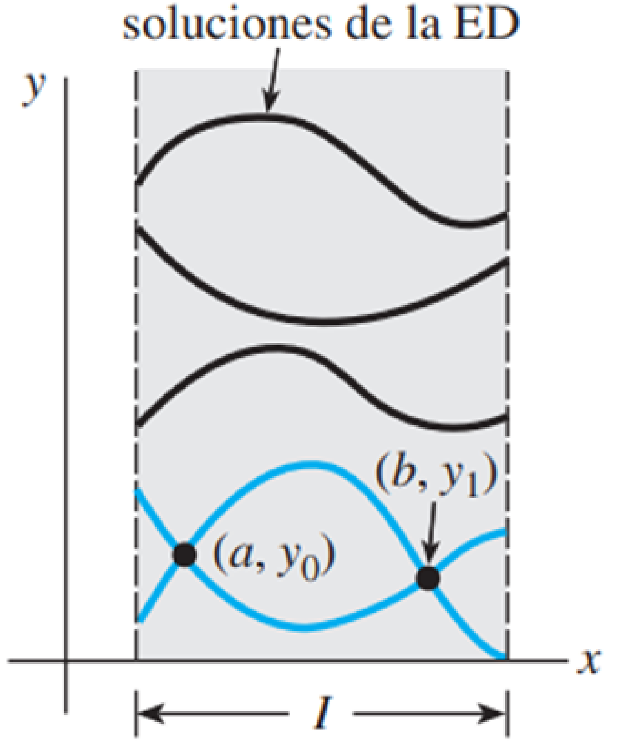


Figura 3.1 Las curvas coloreadas son las soluciones de un PVF

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.2 Ecuaciones homogéneas

Se dice que una ecuación diferencial lineal de **n**-ésimo orden de la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \qquad (6)$$

es **homogénea**, mientras que una ecuación del tipo

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \qquad (7)$$

con **g(x)** no idéntica a cero, es **no homogénea.**

Por ejemplo, $2y'' + 3y' - 5y = 0$ es una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden, en tanto que $x^2y''' + 6y' + 10y = e^x$ es una ecuación diferencial lineal no homogénea de tercer orden.

Veremos que para poder resolver una ecuación lineal no homogénea (7), primero debemos ser capaces de resolver la ecuación homogénea asociada (6).

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.2 Ecuaciones homogéneas

Operadores diferenciales: En cálculo, la diferenciación se denota muchas veces mediante la letra mayúscula **D**, es decir, **dy/dx=Dy.** El símbolo **D** se denomina **operador diferencial** debido a que transforma una función diferenciable en otra función. **Por ejemplo,** **D(cos4x)= −4 sen 4x** y **D(5x^3 – 6x^2)=15x^2– 12x.** Las derivadas de orden superior se pueden expresar en términos de **D** en forma natural:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = D(Dy) = D^2y \quad \text{y en general} \quad \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny,$$

donde **y** representa una función bastante diferenciable. Las expresiones polinomiales que involucran a **D,** como **D + 3, D^2+ 3D – 4 y 5x^3 D^3 – 6x^2 D^2 + 4xD + 9,** también son operadores diferenciales. En general, definimos un operador diferencial de **n**-ésimo orden como

$$L = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x). \qquad (8)$$

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.2 Ecuaciones homogéneas

Ecuaciones diferenciales: Toda ecuación diferencial puede expresarse en términos de la notación **D. Por ejemplo**, es posible escribir la ecuación diferencial **$y'' + 5y' + 6y = 5x - 3$** como **$D^2 y + 5Dy + 6y = 5x - 3$** o **$(D^2 + 5D + 6)y = 5x - 3$.** Mediante **(8)**, las ecuaciones diferenciales de **n**-ésimo orden **(6)** y **(7)** se pueden escribir de manera compacta como **$L(y) = 0$** y **$L(y) = g(x)$**, respectivamente.

Principio de superposición: En el teorema siguiente vemos que la suma, o **superposición**, de dos o más soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea también es una solución.

TEOREMA 2.2 Principio de superposición: ecuaciones homogéneas

Digamos que **$y_1, y_2, \ldots, y_k$**, son soluciones de la ecuación diferencial homogénea **(6)** de **n**-ésimo orden en un intervalo **I**. Entonces la combinación lineal **$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ky_k$**, donde las **$c_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$** son constantes arbitrarias, es también una solución en el intervalo.

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales
2.1.2 Ecuaciones homogéneas

Dependencia lineal e independencia lineal: Los siguientes dos conceptos son básicos en el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales.

DEFINICIÓN 2.1 Dependencia lineal e independencia lineal

Se dice que un conjunto de funciones **f1(x), f2(x), ... , fn(x)** es **linealmente dependiente** en un intervalo I si existen constantes **c1, c2, ..., cn**, diferentes de cero, de modo que

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0,$$

para toda **x** en el intervalo. Si el conjunto de funciones no es linealmente dependiente en el intervalo, se dice que es **linealmente independiente**.

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.2 Ecuaciones homogéneas

Soluciones de ecuaciones diferenciales: Nos interesan principalmente las funciones linealmente independientes o, de manera más concreta, las soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal. Aunque siempre podríamos apelar directamente a la definición 2.1, resulta que la cuestión de si las **n** soluciones **y1, y2**, ···, **yn** de una ecuación diferencial lineal homogénea de **n**-ésimo orden (6) son linealmente independientes puede resolverse de manera un tanto mecánica si usamos un determinante.

DEFINICIÓN 2.2 Wronskiano
Suponga que cada una de las funciones **f1(x), f2(x), ... , fn(x)** posee al menos **n-1** derivadas. El determinante

$$W(f_1, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

donde las primas denotan derivadas, se denomina **wronskiano** de las funciones.

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.2 Ecuaciones homogéneas

TEOREMA 2.3 Criterio para soluciones linealmente independientes

Digamos que $y_1, y_2, \cdots, y_n$ son **n** soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea **(6)** de **n**-ésimo orden en un intervalo **I**. Entonces el conjunto de soluciones es **linealmente independiente** en **I** si, y sólo si, $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ para toda **x** en el intervalo.

DEFINICIÓN 2.3 Conjunto fundamental de soluciones

Cualquier conjunto $y_1, y_2, \cdots, y_n$ de **n** soluciones linealmente independiente de la ecuación diferencial lineal homogénea **(6)** de **n**-ésimo orden en un intervalo **I** se dice que es un conjunto fundamental de soluciones en el intervalo.

TEOREMA 2.4 Existencia de un conjunto fundamental

Existe un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial lineal homogénea **(6)** de **n**-ésimo orden en un intervalo.

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.2 Ecuaciones homogéneas

TEOREMA 2.5 Solución general: ecuaciones homogéneas

Digamos que **y1, y2, ⋯, yn** es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea **(6)** de **n**-ésimo orden en un intervalo **I**. Entonces, en el intervalo, la solución general de la ecuación es **y=c1y1(x) + c2y2(x) +...+ cnyn(x),** donde **ci, i=1, 2, ..., n** son constantes arbitrarias.

Ejemplo a):

Ambas funciones $y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de la ecuación lineal homogénea $y'' - 9y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Por inspección, las soluciones son linealmente independientes en el eje x. Este hecho se puede corroborar al observar que el wronskiano

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

para toda x. Concluimos que y_1 y y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones y, en consecuencia, $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$ es la solución general de la ecuación en el intervalo. ❑

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.2 Ecuaciones homogéneas

Ejemplo b): Solución general ED homogénea

Las funciones **y1=e^x, y2=e^2x** y **y3=e^3x,** satisfacen la ecuación de tercer orden **y''' - 6y''+11y'-6y=0.** Dado que

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

para todo valor real de x, las funciones **y1 , y2** y **y3** forman un conjunto fundamental de soluciones en **(-∞, ∞)**. Concluimos que **y=c1e^x + c2e^2x + c3e^3x** es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo.

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.2 Ecuaciones homogéneas

Ejemplo c): Las funciones **y1=sen^2 x** y **y2=1-cos2x** determinar si son linealmente dependiente o linealmente independiente.

$$W=\begin{vmatrix} sen^2 x & 1-\cos 2x \\ 2\,sen\,x\cos x & 2\,sen\,2x \end{vmatrix}=2\,sen^2 x\,sen\,2x-2\,sen\,x\cos x+2\,sen\,x\cos x\cos 2x$$

$$W=2\,sen^2 x\,sen\,2x-sen\,2x+sen\,2x\cos 2x$$

$$W=sen\,2x\,(2\,sen^2 x-1+\cos 2x)$$

$$W=sen\,2x\,(1-\cos 2x-1+\cos 2x)$$

$$W=(sen\,2x)(0)$$

$$W=0$$

Linealmente dependiente.

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.3 Ecuaciones no homogéneas

Toda función **yp** libre de parámetros arbitrarios y que satisfaga **(7)** es una **solución particular** o **integral particular** de la ecuación. **Por ejemplo**, resulta una tarea sencilla mostrar que la función constante **yp=3** es una solución particular de la ecuación no homogénea **y′′+9y=2**

TEOREMA 2.6 Solución general: ecuaciones no homogéneas
Digamos que **yp** es alguna solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea **(7)** de **n**-ésimo orden en un intervalo **I**, y establecemos que **y1, y2, ⋯, yn** es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea **(6)** asociada en **I.** Entonces la **solución general** de la ecuación en el intervalo es

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p,$$

donde **ci**, **i=1, 2, ..., n** son constantes arbitrarias.

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.3 Ecuaciones no homogéneas

Función complementaria Vemos en el teorema 2.6 que la solución general de una ecuación lineal no homogénea consiste en la suma de dos funciones:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

La combinación lineal **yc=c1 y1(x) + c2y2(x) +...+ cnyn(x)**, que representa la solución general de **(6)**, se denomina **función complementaria** de la ecuación **(7)**. En otras palabras, para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea primero resolvemos la ecuación homogénea asociada y después encontramos cualquier solución particular de la ecuación no homogénea. La solución general de la ecuación no homogénea es entonces

y= función complementaria + cualquier solución particular,

O simplemente **y=yc+yp**.

2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales

2.1.3 Ecuaciones no homogéneas

- Ejemplo:

Mediante sustitución, la función $y_p = -\frac{11}{12} - \frac{1}{2}x$ muestra fácilmente que es una solución particular de la ecuación no homogénea

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 3x. \tag{11}$$

Con el fin de escribir la solución general de (11), primero debemos poder resolver la ecuación homogénea asociada

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Pero en el ejemplo 9 vimos que en el intervalo $(-\infty, \infty)$, la solución general de esta última ecuación fue $y_c = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$. Por lo tanto, en el intervalo, la solución general de (11) es

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{11}{12} - \frac{1}{2}x.$$

Unidad II. Ecuaciones diferenciales de orden superior

- 2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales
  2.1.1 Problemas de valor inicial y de valores en la frontera
  2.1.2 Ecuaciones homogéneas
  2.1.3 Ecuaciones no homogéneas
- **2.2 Reducción de orden**
- **2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes**
- 2.4 Coeficientes indeterminados
- **2.5 Variación de parámetros**
- **2.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior**

2.2 Reducción de orden

INTRODUCCIÓN:

En la sección 2.1 vimos que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (1)$$

era una combinación lineal **$y=c_1y_1 + c_2y_2$**, donde **y_1** y **y_2** son soluciones que constituyen un conjunto linealmente independiente en algún intervalo **I**. A partir de la siguiente sección examinamos un método para determinar estas soluciones cuando los coeficientes de la ED de **(1)** son constantes. Este método, que es un sencillo ejercicio de álgebra, se descompone en algunos casos y sólo produce una solución única **y_1** de la ED. Resulta que podemos construir una segunda solución **y_2** de una ecuación homogénea **(1)** (aunque los coeficientes de **(1)** sean variables) siempre y cuando conozcamos una solución no trivial de **y_1** de la ED. La idea básica descrita en esta sección es que la ecuación lineal de segundo orden **(1)** se puede reducir a una ED de primer orden mediante una sustitución que involucre la solución conocida **y_1**. Una segunda solución, **y_2** de **(1)**, aparece después que esta ED de primer orden se resuelve.

2.2 Reducción de orden

REDUCCIÓN DE ORDEN

Suponga que y(x) denota una solución conocida de la ecuación (1). Buscamos una segunda solución **y2(x)** de **(1)** de manera que **y1** y **y2** sean linealmente independientes en algún intervalo **I.**
La idea es encontrar **u(x)** mediante la sustitución de **y2(x)=u(x)y1(x)** en la ecuación diferencial dada. Este método se denomina **reducción de orden** ya que debemos resolver una ecuación de primer orden para encontrar **u.**

- **Método de Solución**

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^{\,2}}dx$$

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

2.2 Reducción de orden

EJEMPLO:

$a)$ $\quad x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \qquad\qquad y_1 = x^2$

$$\left(x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0\right)\frac{1}{x^2}$$

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

$$P(x) = -\frac{3}{x}$$

$$y_2 = x^2 \int \frac{e^{\int \frac{3}{x}dx}}{(x^2)^2}dx = x^2 \int \frac{e^{3\ln x}}{x^4}dx = x^2 \int \frac{e^{\ln x^3}}{x^4}dx$$

$$y_2 = x^2 \int \frac{x^3}{x^4}dx = x^2 \int \frac{1}{x}dx = x^2 \ln x$$

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x$$

2.2 Reducción de orden

EJEMPLO:

b) $x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$ $\qquad y_1 = \frac{sen\,x}{\sqrt{x}}$

$$\left(x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0\right) \frac{1}{x^2}$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) y = 0$$

$$P(x) = \frac{1}{x}$$

$$y_2 = \frac{sen\,x}{\sqrt{x}} \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x} dx}}{\left(\frac{sen\,x}{\sqrt{x}}\right)^2} dx = \frac{sen\,x}{\sqrt{x}} \int \frac{e^{-\ln x}}{\frac{sen^2 x}{x}} dx = \frac{sen\,x}{\sqrt{x}} \int \frac{e^{\ln x^{-1}}}{\frac{sen^2 x}{x}} dx$$

$$y_2 = \frac{sen\,x}{\sqrt{x}} \int \frac{x^{-1}}{\frac{sen^2 x}{x}} dx = \frac{sen\,x}{\sqrt{x}} \int \frac{1}{sen^2 x} dx = \frac{sen\,x}{\sqrt{x}} \int csc^2 x\, dx$$

$$y_2 = \frac{sen\,x}{\sqrt{x}} (-cot\,x) = \frac{sen\,x}{\sqrt{x}} \left(-\frac{cos\,x}{sen\,x}\right)$$

$$y_2 = -\frac{cos\,x}{\sqrt{x}}$$

$$y = c_1 \frac{sen\,x}{\sqrt{x}} + c_2 \frac{cos\,x}{\sqrt{x}}$$

2.2 Reducción de orden
Actividad 1

- Resuelve la siguiente Actividad por el Método de Reducción de Orden

1)	$y'' - 4y' + 4y = 0$	$y_1 = e^{2x}$
2)	$y'' + 16y = 0$	$y_1 = cos\,4x$
3)	$y'' - y = 0$	$y_1 = cosh\,x$
4)	$9y'' - 12y' + 4y = 0$	$y_1 = e^{\frac{2x}{3}}$
5)	$x^2 y'' - 7xy' + 16y = 0$	$y_1 = x^4$
6)	$xy'' + y' = 0$	$y_1 = \ln x$

Unidad II. Ecuaciones diferenciales de orden superior

- 2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales
  2.1.1 Problemas de valor inicial y de valores en la frontera
  2.1.2 Ecuaciones homogéneas
  2.1.3 Ecuaciones no homogéneas
- **2.2 Reducción de orden**
- **2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes**
- 2.4 Coeficientes indeterminados
- **2.5 Variación de parámetros**
- **2.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior**

2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

1Introducción: Hemos visto que la ED lineal de primer orden **y′+ay=0**, donde **a** es una constante, posee la solución exponencial **y=c1e^(-ax)** en el intervalo **(−∞,∞)**. Por lo tanto, es natural preguntarse si existen soluciones exponenciales para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden superior

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad (1)$$

donde los coeficientes **ai, i=1, 2, ..., n** son constantes reales y **an≠0**. Lo sorprendente es que todas las soluciones de estas ecuaciones de orden superior son funciones exponenciales o están construidas a partir de funciones exponenciales.

2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Ecuación auxiliar: Comencemos por considerar el caso especial de una ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (2)$$

Si intentamos encontrar una solución de la forma **y=e^mx**, entonces, después de sustituir **y′=me^mx** y **y″= m^2 e^mx**, la ecuación **(2)** se convierte en

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \text{ o } e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Como **e^mx** nunca es cero para valores reales de **x**, evidentemente la única forma que tiene esta función exponencial de satisfacer la ecuación diferencial **(2)** es elegir m como una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0. \qquad (3)$$

Esta última ecuación se denomina **ecuación auxiliar** de la ecuación diferencial (2).

2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

- De acuerdo a la Ecuación Auxiliar $am^2 + bm + c = 0.$

Nos vamos a encontrar con tres tipos de soluciones

Caso 1: Raíces reales diferentes.

Si $m_1 \neq m_2$

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

Caso 2: Raíces reales repetidas.

Si $m_1 = m_2$

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_2 x}$$

Caso 3: Raíces conjugadas o imaginarias.

$$m = \underbrace{\alpha}_{Real} \pm \underbrace{\beta i}_{Imaginario}$$

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x)$$

2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Ejemplo a) Caso 1

$$2y'' - 5y' - 3y = 0$$
$$2m^2 - 5m - 3 = 0$$
$$(2m+1)(m-3) = 0$$
$$2m+1 = 0 \qquad m-3 = 0$$
$$m_1 = -\frac{1}{2} \qquad m_2 = 3$$
$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 e^{3x}$$

Ejemplo b) Caso 2

$$y'' - 10y' + 25y = 0$$
$$m^2 - 10m + 25 = 0$$
$$(m-5)^2 = 0$$
$$m-5 = 0 \qquad m-5 = 0$$
$$m_1 = 5 \qquad m_2 = 5$$
$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}$$

Ejemplo c) Caso 3

$$y'' + y' + y = 0$$
$$m^2 + m + 1 = 0$$
$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$
$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$
$$m = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$$
$$\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Ejemplo d)

$$y''' + 3y'' - 4y = 0$$

$$m^3 + 3m^2 - 4 = 0$$

$$(m-1)(m^2 + 4m + 4) = 0$$

$$(m-1)(m+2)^2 = 0$$

$$m_1 = 1 \qquad m_2 = -2 \qquad m_3 = -2$$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$$

$$a_n = 1 \qquad q = \pm 1$$

$$a_o = -4 \qquad p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

$$\begin{array}{c|cccc} \underline{1} & 1 & 3 & 0 & -4 \\ & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 0 \end{array}$$

2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Ejemplo e)

$$3y''' + 5y'' + 10y' - 4y = 0$$

$$3m^3 + 5m^2 + 10m - 4 = 0$$

$$a_n = 3 \qquad q = \pm 1, \pm 3$$

$$a_o = -4 \qquad p = \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

$$\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}$$

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{3} & 3 & 5 & 10 & -4 \\ & & 1 & 2 & 4 \\ \hline & 3 & 6 & 12 & 0 \end{array}$$

$$\left(m - \frac{1}{3}\right)(3m^2 + 6m + 12) = 0$$

$$\left(m - \frac{1}{3}\right)3(m^2 + 2m + 4) = 0$$

$$m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2}$$

$$m_1 = \frac{1}{3} \qquad \alpha = -1 \qquad \beta = \sqrt{3}$$

$$y = c_1 e^{\frac{1}{3}x} + e^{-x}\left(c_2 \cos\sqrt{3}x + c_3 \operatorname{sen}\sqrt{3}x\right)$$

2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Ejemplo f)

$$y''-4y'+13y=0 \qquad y(0)=-1 \quad y'(0)=2$$

$$m^2-4m+13=0 \qquad m=\frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{4\pm 6i}{2}$$

$$\alpha=2 \qquad \beta=3$$

$$y=e^{2x}(c_1 cos 3x+c_2 sen 3x)$$

$$-1=e^{0}(c_1 cos 0+c_2 sen 0)$$

$$-1=1(c_1+0)$$

$$c_1=-1$$

$$y=e^{2x}(-cos 3x+c_2 sen 3x)$$

$$y'=e^{2x}(3 sen 3x+3c_2 cos 3x)+2e^{2x}(-cos 3x+c_2 sen 3x)$$

$$2=e^{0}(3 sen 0+3c_2 cos 0)+2e^{0}(-cos 0+c_2 sen 0)$$

$$2=1(0+3c_2)+2(-1+0)$$

$$2=3c_2-2$$

$$c_2=\frac{4}{3}$$

$$y=e^{2x}\left(-cos 3x+\frac{4}{3} sen 3x\right)$$

2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes

Actividad 2

4) $y'' - y' - 6y = 0$

5) $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 8\dfrac{dy}{dx} + 16y = 0$

6) $y'' + 3y' - 5y = 0$

7) $12y'' - 5y' - 2y = 0$

8) $y'' - 4y' + 5y = 0$

12) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$

13) $y''' + y'' - 2y = 0$

14) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

15) $y'' + 16y = 0$ $\quad y(0) = 2 \quad y'(0) = -2$

16) $y'' + 6y' + 5y = 0$ $\quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 3$

Unidad II. Ecuaciones diferenciales de orden superior

- 2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales
  2.1.1 Problemas de valor inicial y de valores en la frontera
  2.1.2 Ecuaciones homogéneas
  2.1.3 Ecuaciones no homogéneas
- **2.2 Reducción de orden**
- **2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes**
- 2.4 Coeficientes indeterminados
- **2.5 Variación de parámetros**
- **2.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior**

2.4 Coeficientes indeterminados

Introducción:

Para resolver una ecuación diferencial lineal **no homogénea**

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ ... + a_1 y' + a_0 y = g(x) \qquad (1)$$

Debemos hacer dos cosas:
i) encontrar la función complementaria **yc**;
ii) encontrar cualquier solución particular **yp** de la ecuación **no homogénea.**
Después, como se analizó en la sección 2.1, la solución general de **(1)** en un intervalo **I** es $y = y_c + y_p$.

La función complementaria **yc** es la solución general de la ED **homogénea asociada** de **(1)**, es decir, $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ ... + a_1 y' + a_0 y = 0$.

En la sección previa vimos cómo resolver esta clase de ecuaciones cuando los coeficientes eran constantes. Por lo tanto, nuestro objetivo en esta sección es examinar un método para obtener soluciones particulares.

2.4 Coeficientes indeterminados

Como se mostró anteriormente en el tema 2.1.2

Operadores Diferenciales
En cálculo la derivada se representa con frecuencia con la letra **D** esto es

$$y' = \frac{dy}{dx} = D\,y$$

El símbolo **D** se llama operador diferencial y este transforma una función derivable en otra función, **por ejemplo**:

$$\begin{aligned} &a) \quad D(e^{4x}) = 4\,e^{4x} \\ &b) \quad D(5\,x^3 - 6\,x^2) = 15\,x^2 - 12\,x \\ &c) \quad D(\cos 2\,x) = -2\,\mathrm{sen}\,2\,x \end{aligned}$$

Factorización de operadores diferenciales

$$D^2 - 1 = (D+1)(D-1)$$

2.4 Coeficientes indeterminados

El operador Anulador

Formula 1

El Operador Diferencial $\boldsymbol{D^n}$ anula cada una de las funciones

$$\underset{n=1}{k},\quad \underset{n=2}{x},\quad \underset{n=3}{x^2},\ \ldots,\ x^{n-1}$$

Formula 2

El Operador Diferencial $(\boldsymbol{D-\alpha})^n$ anula cada una de las funciones

$$\underset{n=1}{e^{\alpha x}},\ \underset{n=2}{xe^{\alpha x}},\ \underset{n=3}{x^2e^{\alpha x}},\ \ldots,\ x^{n-1}e^{\alpha x},$$

Formula 3

El Operador Diferencial $\left[\boldsymbol{D^2-2\alpha D+(\alpha^2+\beta^2)}\right]^n$ anula cada una de las funciones

$$\underset{n=1}{e^{\alpha x}cos\beta x},\ \underset{n=2}{xe^{\alpha x}cos\beta x},\ \underset{n=3}{x^2e^{\alpha x}cos\beta x},\ \ldots,\ x^{n-1}cos\beta x$$

$$\underset{n=1}{e^{\alpha x}sen\beta x},\ \underset{n=2}{xe^{\alpha x}sen\beta x},\ \underset{n=3}{x^2e^{\alpha x}sen\beta x},\ \ldots,\ x^{n-1}sen\beta x$$

Caso Especial: $D^2+\beta^2\begin{cases}cos\ \beta x\\ sen\ \beta x\end{cases}=0$

2.4 Coeficientes indeterminados

Ejemplos:

$a)$ $1-5x^2+8x^3$

$$D^4\underbrace{(1-5x^2+8x^3)}_{y}=0$$

$b)$ e^{5x}

$n=1 \quad \alpha=5$

$(D-5)e^{5x}=0$

$De^{5x}-5e^{5x}=0$

$5e^{5x}-5e^{5x}=0$

$0=0$

$e)$ $sen\,5x$

$n=1 \quad \alpha=0 \quad \beta=5$

$(D^2+25)\,sen\,5x=0$

$D^2\,sen\,5x+25\,sen\,5x=0$

$y=sen\,5x$

$y'=5\cos 5x$

$y''=-25\,sen\,5x$

$-25\,sen\,5x+25\,sen\,5x=0$

$0=0$

$d)$ $e^{-x}\cos 2x$

$n=1 \quad \alpha=-1 \quad \beta=2$

$\{D^2+2D+[(-1)^2+(2)^2]\}\,e^{-x}\cos 2x=0$

$(D^2+2D+5)\,e^{-x}\cos 2x=0$

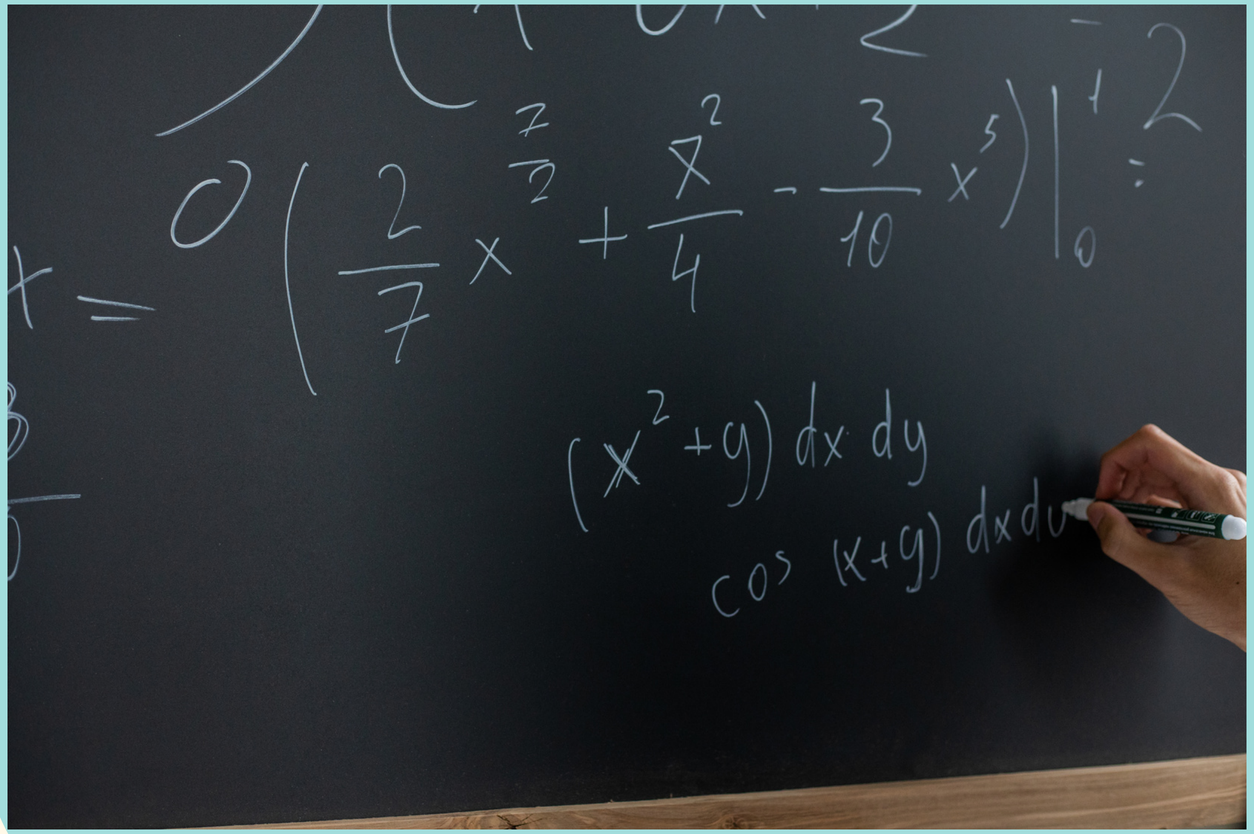
2.4 Coeficientes indeterminados

ACTIVIDAD 3:
Determina el Operador Diferencial de cada una de las funciones

15) $1+6x-2x^3$
16) $x^3(1-5x)$
17) $1+7e^{2x}$
18) $x+3xe^{6x}$
19) $\cos 2x$
20) $1+\operatorname{sen} x$
21) $13x+9x^2-\operatorname{sen} 4x$
22) $8x-\operatorname{sen} x+10\cos 5x$
23) $e^{-x}+2xe^x-x^2e^x$
24) $(2-e^x)^2$
25) $3+e^x\cos 2x$
26) $e^{-x}\operatorname{sen} x-e^{-2x}\cos x$

2.4 Coeficientes indeterminados

Solución de ecuaciones No-homogéneas por el Método de coeficientes indeterminados



Para obtener la solución general de una ecuación diferencial lineal **no homogénea** se deben llevar a cabo dos pasos.

a) Hallar la función complementaria **yc**

b) Encontrar cualquier solución particular **yp** para la ecuación **no homogénea**

$$y = y_c + y_p.$$

2.4 Coeficientes indeterminados

Ejemplo:

a) $$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=4x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=0$$

$$m^2+3m+2=0$$

$$(m+1)(m+2)=0$$

$$m_1=-1 \qquad m_2=-2$$

$$y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$$

$$D^3(4x^2)=0$$

$$m^3=0$$

$$m_3=0 \qquad m_4=0 \qquad m_5=0$$

$$y_p=c_3+c_4x+c_5x^2$$

$$y=A+Bx+Cx^2$$

$$y'=B+2Cx$$

$$y''=2C$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+2y=4x^2$$

$$2C+3(B+2Cx)+2(A+Bx+Cx^2)=4x^2$$

$$2C+3B+6Cx+2A+2Bx+2Cx^2=4x^2$$

$$x^2(2C)+x(6C+2B)+(2C+3B+2A)=4x^2$$

$$2C=4 \qquad 6C+2B=0 \qquad 2C+3B+2A=0$$

$$C=2 \qquad 12+2B=0 \qquad 4-18+2A=0$$

$$B=-6 \qquad A=7$$

$$y_p=7-6x+2x^2$$

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}+7-6x+2x^2$$

2.4 Coeficientes indeterminados

Ejemplo:

b) $y''-3y'=8e^{3x}+4\,sen\,x$

$m^2-3m=0$

$m(m-3)=0$

$m_1=0 \qquad m_2=3$

$y_c=c_1+c_2e^{3x}$

$(D-3)(D^2+1)(8e^{3x}+4\,sen\,x)=0$

$(m-3)(m^2+1)=0$

$m_3=3 \qquad m^2=-1$

$m=i \qquad \alpha=0 \qquad \beta=1$

$y_p=c_3xe^{3x}+c_4\cos x+c_5\,sen\,x$

$y=Axe^{3x}+B\cos x+C\,sen\,x$

$y'=3Axe^{3x}+Ae^{3x}-B\,sen\,x+C\cos x$

$y''=9Axe^{3x}+3Ae^{3x}+3Ae^{3x}-B\cos x-C\,sen\,x$

$y''=9Axe^{3x}+6Ae^{3x}-B\cos x-C\,sen\,x$

$y''-3y'=8e^{3x}+4\,sen\,x$

$9Axe^{3x}+6Ae^{3x}-B\cos x-C\,sen\,x-3(3Axe^{3x}+Ae^{3x}-B\,sen\,x+C\cos x)=8e^{3x}+4\,sen\,x$

$9Axe^{3x}+6Ae^{3x}-B\cos x-C\,sen\,x-9Axe^{3x}-3Ae^{3x}+3B\,sen\,x-3C\cos x=8e^{3x}+4\,sen\,x$

$3Ae^{3x}-B\cos x-C\,sen\,x+3B\,sen\,x-3C\cos x=8e^{3x}+4\,sen\,x$

$e^{3x}(3A)+\cos x(-B-3C)+sen\,x(-C+3B)=8e^{3x}+4\,sen\,x$

$3A=8 \qquad -B-3C=0 \qquad 3B-C=4$

$A=\frac{8}{3} \qquad (-B-3C=0)3 \qquad -3B-9C=0$

$-3B-9C=0 \qquad -10C=4$

$B=-3C \qquad C=-\frac{2}{5}$

$B=\frac{6}{5}$

$y_p=\frac{8}{3}xe^{3x}+\frac{6}{5}\cos x-\frac{2}{5}\,sen\,x$

$y=c_1+c_2e^{3x}+\frac{8}{3}xe^{3x}+\frac{6}{5}\cos x-\frac{2}{5}\,sen\,x$

2.4 Coeficientes indeterminados

ACTIVIDAD 4:
Resuelve las Ecuaciones No-homogéneas por Coeficientes Indeterminados

2) $y''+4y'+4y=2x+6$

3) $y''+8y=5x+2e^{-x}$

4) $y'''+y''=8x^2$

5) $y''-2y'-3y=4e^x-9$

6) $y''-y'-12y=e^{4x}$

7) $y''+25y=6\,sen\,x$

8) $y''+6y'+9y=-x\,e^{4x}$

9) $y''-y=x^2e^x+5$

10) $y''-2y'+5y=e^x\,sen\,x$

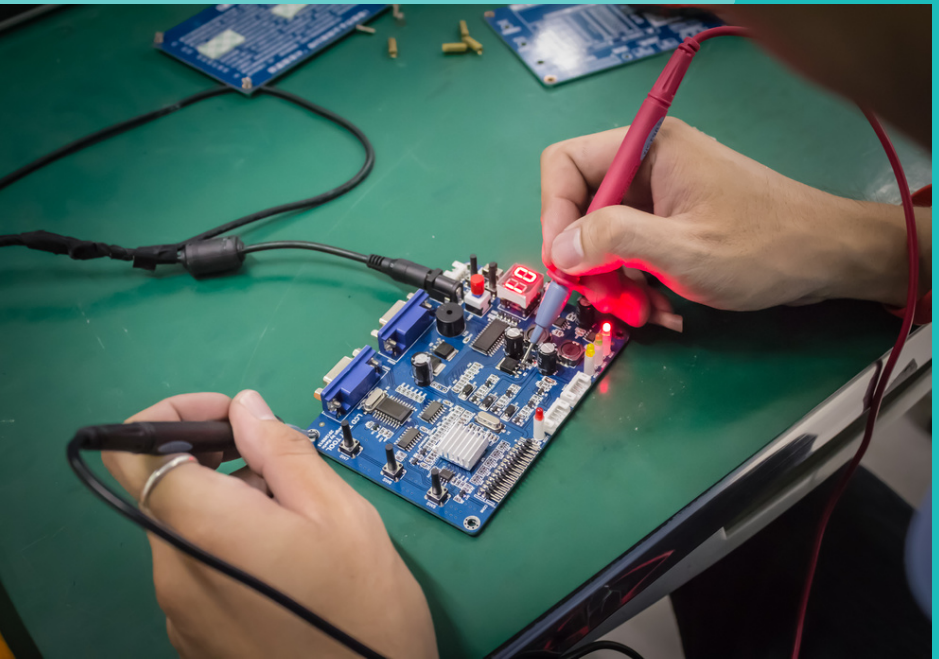
11) $y''-64y=16$ $\qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=0$

Unidad II. Ecuaciones diferenciales de orden superior

- 2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales
  2.1.1 Problemas de valor inicial y de valores en la frontera
  2.1.2 Ecuaciones homogéneas
  2.1.3 Ecuaciones no homogéneas
- **2.2 Reducción de orden**
- **2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes**
- 2.4 Coeficientes indeterminados
- **2.5 Variación de parámetros**
- **2.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior**

2.5 Variación de parámetros

Introducción: El método de variación de parámetros, usado en la sección 1.6 para encontrar una solución particular de una ecuación diferencial lineal de primer orden, es aplicable también a ecuaciones de orden superior. La variación de parámetros tiene una ventaja clara sobre el método de la sección previa en cuanto a que siempre produce una solución particular de y_p a condición de que la ecuación homogénea asociada se pueda resolver. Además, el método presentado en esta sección, a diferencia de los coeficientes indeterminados, no está limitado a casos donde la función de entrada es una combinación de los cuatro tipos de funciones, ni se circunscribe a ecuaciones diferenciales co coeficientes constantes.



2.5 Variación de parámetros

Algunos supuestos

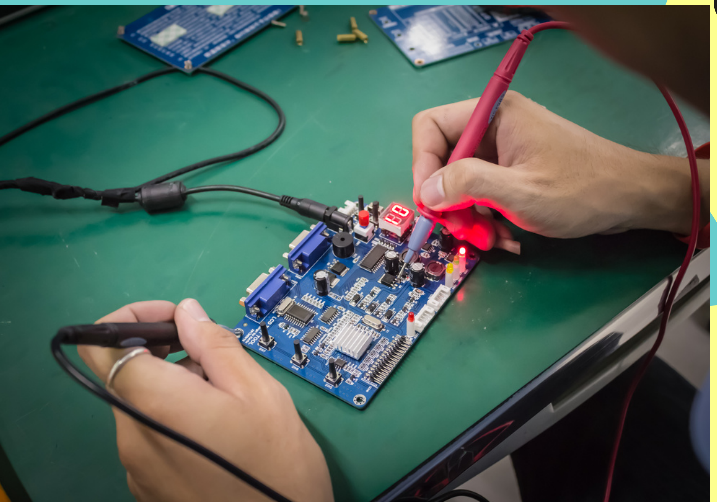
Para adaptar el método de **variación de parámetros** a una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \qquad (1)$$

empezamos como lo hicimos en la sección 2.2 (Reducción de Orden): escribimos **(1)** en la forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

al dividir entre el coeficiente **a2 (x)**. La ecuación **(2)** es el análogo de segundo orden de la ecuación lineal de primer orden



$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x).$$

2.5 Variación de parámetros

Método de Variación de Parámetros

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$$

① $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$

② Identificar y_1, y_2

③ $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

④ $y'' + P(x) y' + Q(x) y = f(x)$

⑤ Identificar $f(x)$

⑥ $W_1 = -f(x) y_2$ $\qquad$ $W_2 = f(x) y_1$

⑦ $\mu_1' = \dfrac{W_1}{W}$ $\qquad$ $\mu_2' = \dfrac{W_2}{W}$

⑧ μ_1 $\qquad$ μ_2

⑨ $y_p = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2$

⑩ $y = y_c + y_p$

EJEMPLO: Resolver

2.5 Variación de parámetros

$$y''-4y'+4y=(x+1)e^{2x}$$
$$m^2-4m+4=0$$
$$(m-2)^2=0$$
$$m_1=2 \qquad m_2=2$$

① $y_c=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$

② $y_1=e^{2x} \qquad y_2=xe^{2x}$

③ $W=\begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 2xe^{2x}+e^{2x} \end{vmatrix}=2xe^{4x}+e^{4x}-2xe^{4x}=e^{4x}$

④ $y''-4y'+4y=xe^{2x}+e^{2x}$

⑤ $f(x)=xe^{2x}+e^{2x}$

⑥ $W_1=-(xe^{2x}+e^{2x})xe^{2x} \qquad W_2=(xe^{2x}+e^{2x})e^{2x}$

$W_1=-x^2e^{4x}-xe^{4x} \qquad W_2=xe^{4x}+e^{4x}$

⑦ $\mu_1'=\dfrac{-x^2e^{4x}-xe^{4x}}{e^{4x}}=-x^2-x \qquad \mu_2'=\dfrac{xe^{4x}+e^{4x}}{e^{4x}}=x+1$

⑧ $\mu_1=\int(-x^2-x)\,dx=-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2 \qquad \mu_2=\int(x+1)\,dx=\dfrac{1}{2}x^2+x$

⑨ $y_p=\left(-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2\right)e^{2x}+\left(\dfrac{1}{2}x^2+x\right)xe^{2x}$

$y_p=-\dfrac{1}{3}x^3e^{2x}-\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}+\dfrac{1}{2}x^3e^{2x}+x^2e^{2x}$

$y_p=\dfrac{1}{6}x^3e^{2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}$

⑩ $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}+\dfrac{1}{6}x^3e^{2x}$

2.5 Variación de parámetros

ACTIVIDAD 5:
Resuelve las ED No-homogéneas por el método de Variación de Parámetros

1) $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

2) $y'' - y' - 12y = e^{4x}$

3) $y'' - 2y' - 3y = 4e^{x} - 9$

4) $y'' - y = x^2 e^{x} + 5$

Unidad II. Ecuaciones diferenciales de orden superior

- 2.1 Teoría preliminar: ecuaciones lineales
  2.1.1 Problemas de valor inicial y de valores en la frontera
  2.1.2 Ecuaciones homogéneas
  2.1.3 Ecuaciones no homogéneas
- **2.2 Reducción de orden**
- **2.3 Ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes**
- 2.4 Coeficientes indeterminados
- **2.5 Variación de parámetros**
- **2.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior**

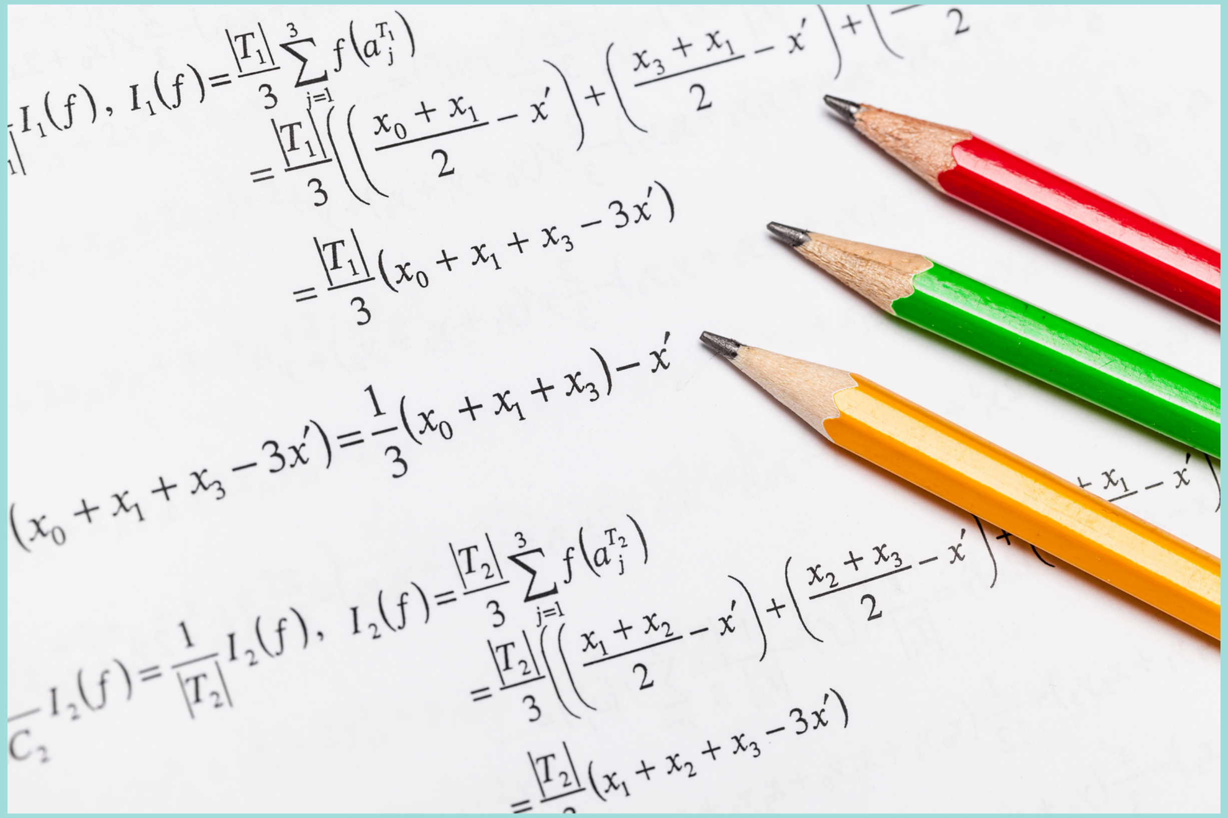
2.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior

Modelos lineales: problemas de valor inicial

Introducción: En esta sección consideraremos diversos sistemas lineales dinámicos en los cuales cada modelo matemático es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes junto con condiciones iniciales especificadas en el tiempo **t0**:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1.$$

Recuerde que **g** es la **función de entrada**, **impulsora** o **forzadora**, del sistema. La **salida** o **respuesta** del sistema es una función **y(t)** definida en un intervalo **I** que contiene **t0** y satisface tanto la ecuación diferencial como las condiciones iniciales en el intervalo **I.**



2.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior

Sistemas resorte-masa: movimiento libre no amortiguado

Ley de Hooke Suponga que un resorte flexible está suspendido verticalmente de un soporte rígido y después una masa **m** se sujeta a su extremo libre. La cantidad de estiramiento o elongación del resorte dependerá, por supuesto, de la masa; las masas con diferentes pesos estiran el resorte en diferentes cantidades. De acuerdo con la ley de Hooke, el propio resorte ejerce una fuerza de recuperación **F** que es contraria a la dirección de la elongación y proporcional a la cantidad de elongación **s.** Expresado de manera sencilla, **F= ks**, donde **k** es una constante de proporcionalidad llamada **constante del resorte**. El resorte está caracterizado esencialmente por el número **k.**

Por ejemplo, si una masa que pesa **10 libras** estira un resorte **1/2** pie, entonces **10=k(1/2)** implica **k=20 lb/ft**.
Entonces, necesariamente, una masa que pesa, digamos, **8 libras**, estira el mismo resorte sólo **1/2 pie**.

2.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior

Segunda ley de Newton Después de que una masa **m** se anexa a un resorte, estira el resorte por una cantidad **s** y alcanza una posición de equilibrio en la cual su peso **W** se balancea por la fuerza de recuperación **ks.** Recuerde que el peso está definido por **W=mg**, donde la masa se mide en **slugs**, **kilogramos** o **gramos** y **g=32 ft/s^2** , **9.8 m/s^2** o **980 cm/s^2**, respectivamente.

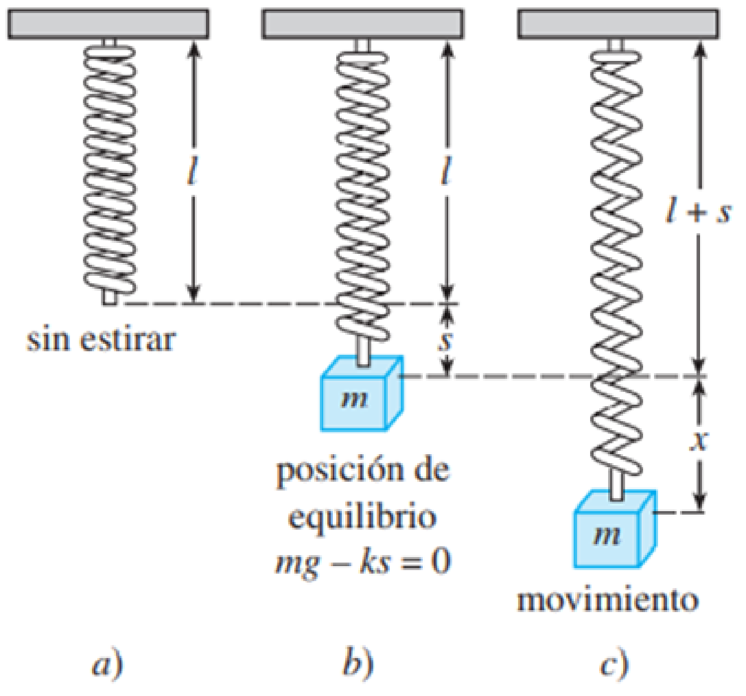


Figura 3.18 Sistema resorte-masa

Como indica la figura **3.18b)**, la condición de equilibrio es **mg=ks** o **mg – ks=0.** Si la masa se desplaza por una cantidad **x** desde su posición de equilibrio, la fuerza de recuperación del resorte es entonces **k(x+s)**. Si se supone que no hay fuerzas de retardo que actúen sobre el sistema y que la masa vibra libre de otras fuerzas externas —**movimiento libre**— podemos igualar la segunda ley de Newton con la fuerza neta, o resultante, de la fuerza restauradora y el peso: **m**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\,k(s+x) + mg = -\,kx + \underbrace{mg - ks}_{Cero} = -\,kx. \qquad (1)$$

En **(1)**, el signo negativo indica que la fuerza restauradora del resorte actúa en dirección opuesta al movimiento. Además, podemos adoptar la convención de que los desplazamientos medidos **por debajo** de la posición de equilibrio son positivos. Vea la figura **3.19**.

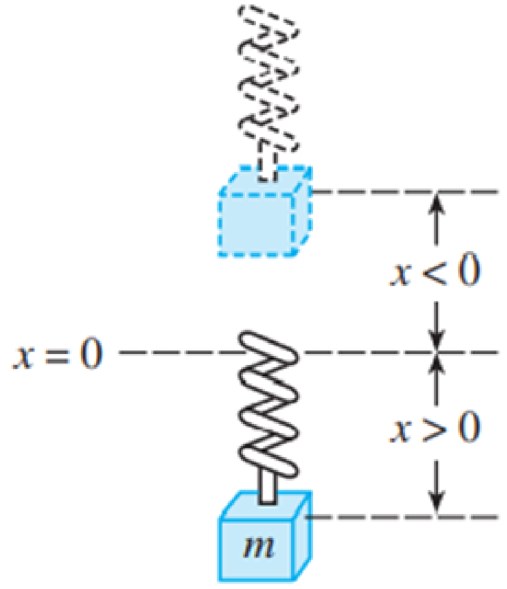


Figura 3.19 La dirección positiva está por debajo de la posición de equilibrio

2.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior

Ecuación diferencial de movimiento libre no amortiguado Al dividir **(1)** entre la masa **m** obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \qquad (2)$$

donde **ω^2=k/m**. Se dice que la ecuación **(2)** describe el **movimiento armónico simple** o movimiento libre no amortiguado. Dos condiciones iniciales evidentes asociadas con **(2)** son **x(0)=x0**, la cantidad de desplazamiento inicial, y **x′(0)=x1**, la velocidad inicial de la masa.

Por ejemplo, si **x0>0**, **x1<0**, la masa comienza desde un punto situado **por debajo** de la posición de equilibrio con una velocidad impartida en forma ascendente.

Cuando **x1=0** se afirma que la masa se libera del **reposo**.

Por ejemplo, si **x0<0**, **x1=0**, la masa es liberada del reposo desde un punto **|x0|** unidades localizado **por encima** de la posición de equilibrio.

2.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior

Solución y ecuación de movimiento Para resolver la ecuación **(2)**, observemos que las soluciones de la ecuación auxiliar $m^2 + \omega^2 = 0$ son los números complejos **m1=ωi, m2=ωi**. Por lo tanto, a partir de la expresión $y = e^{\alpha x}(c_1 cos\, \beta x + c_2 sen\, \beta x)$, encontramos que la solución general de **(2)** es

$$x(t) = c_1 cos\, \omega t + c_2 sen\, \omega t \qquad (3)$$

El **periodo** de vibraciones libres descrito por **(3)** es **T=2π/ω**, y la **frecuencia** es **f=1/T=ω/2π**.

Por ejemplo, para $x(t) = 2cos\,3t - 4sen\,3t$ el periodo es **2π/3** y la frecuencia es **3/2π**. El número anterior significa que la gráfica de **x(t)** se repite cada **2π/3** unidades; este último número significa que hay **3 ciclos** de la gráfica cada **2 unidades** o, de manera equivalente, que la masa experimenta **3/2π** vibraciones completas por unidad de tiempo. Además, se puede mostrar que el periodo **2π/ω** es el intervalo de tiempo entre dos máximos sucesivos de **x(t)**. Tenga en mente que un máximo de **x(t)** representa un desplazamiento positivo que corresponde al logro de la masa desde una distancia máxima calculada **por debajo** de la posición de equilibrio, mientras un mínimo de **x(t)** es un desplazamiento negativo que corresponde al logro de la masa desde una altura máxima situada **por encima** de la posición de equilibrio. Nos referimos a cualquiera de estos casos como un **desplazamiento extremo** de la masa. Por último, cuando las condiciones iniciales se usan para determinar las constantes **c1** y **c2** en **(3)**, decimos que la solución particular resultante o respuesta es la **ecuación de movimiento**.

2.6 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden superior

Ejemplo 1 Movimiento libre no amortiguado

Una masa que pesa 2 libras estira un resorte 6 pulgadas. En $t = 0$ la masa se libera de un punto situado 8 pulgadas por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de $\frac{4}{3}$ pies/s. Determinar la ecuación de movimiento libre.

Solución Debido a que estamos usando el sistema de unidades para ingeniería, las mediciones dadas en términos de pulgadas se deben convertir a pies: 6 in. $= \frac{1}{2}$ ft; 8 in. $= \frac{2}{3}$ ft. Además, debemos convertir las unidades de peso dadas en libras en unidades de masa. De $m = W/g$ tenemos $m = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ slug. También, con base en la ley de Hooke, $2 = k(\frac{1}{2})$ implica que la constante del resorte es $k = 4$ lb/ft. Por lo tanto, (1) da

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0.$$

El desplazamiento inicial y la velocidad inicial son $x(0) = \frac{2}{3}$, $x'(0) = -\frac{4}{3}$, donde el signo negativo presente en la última condición es consecuencia de que la masa está dada con velocidad inicial en dirección negativa, o ascendente.

Ahora, $\omega^2 = 64$ o $\omega = 8$, de manera que la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t. \tag{4}$$

Al aplicar las condiciones iniciales a $x(t)$ y $x'(t)$ se tiene $c_1 = \frac{2}{3}$ y $c_2 = -\frac{1}{6}$. De esta forma, la ecuación del movimiento es

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos 8t - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 8t. \tag{5}$$

❑