ECUACIONES DIFERENCIALES

Introducción:

En el curso de cálculo elemental, se aprendió que la <u>diferenciación y la integración son transformadas</u>, lo cual significa, a grandes rasgos, que estas operaciones transforman una función en otra.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ se transforma, según sea el caso, en una función lineal, en una familia de funciones polinomiales cúbicas, y en una constante gracias a operaciones de diferenciación, integración indefinida e integración definida: $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$, $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + c$, $\int_0^3 x^2dx = 9$.

Docente: Dra. Ma. Gloria Guerrero Tinajero

ECUACIONES DIFERENCIALES

Además, estas dos transformadas poseen la propiedad de linealidad: ello significa que la transformada de una combinación lineal de funciones es una combinación lineal de las transformadas. Para las constantes α y β,

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x)\, dx$$

y

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

siempre que existan cada derivada y cada integral.

Ecuaciones Diferenciales

- Unidad I. Ecuaciones Diferenciales de primer orden
- Unidad II. Ecuaciones diferenciales de orden superior
- Unidad III. Transformadas de Laplace

Unidad III. Transformadas de Laplace

- 3.1 Definición de la transformada de Laplace
- **3.2 La transformada inversa**
- **3.3 Teoremas de traslación**
- **3.4 Transformadas de derivadas**
- 3.5 Propiedades operacionales adicionales
- **3.6 Aplicaciones de la Transformada de Laplace**

3.1 Definición de la transformada de Laplace

DEFINICIÓN 3.1 Transformada de Laplace

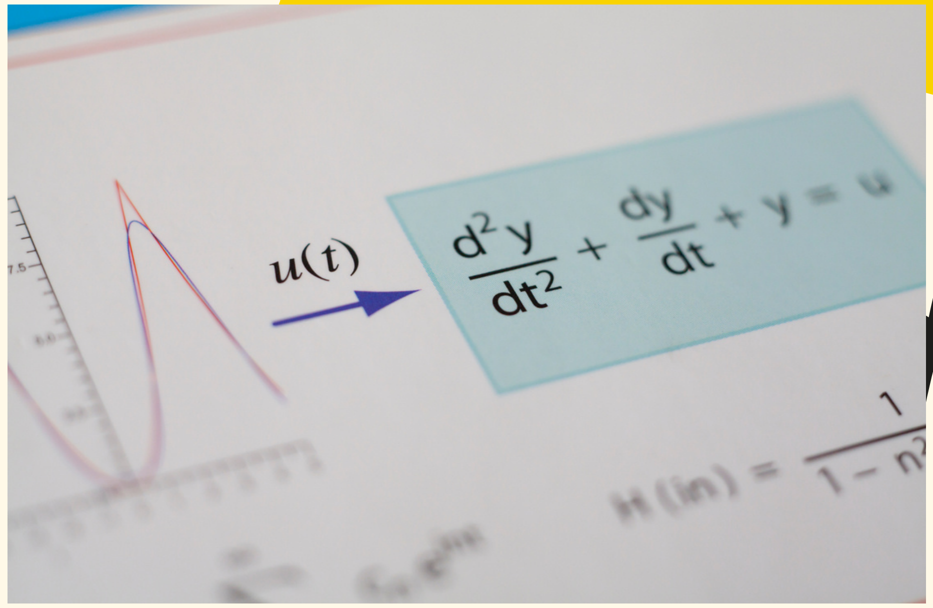
Sea **f** una función definida para **t≥0.** Entonces se dice que la integral $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$ (1)

es la **transformada de Laplace** de **f**, siempre y cuando la integral converja.

Cuando la integral definitoria (1) converge, el resultado es una función de **s.**

En el análisis general, cuando utilicemos letras minúsculas nos referiremos a la función que se va a transformar, y letras mayúsculas denotarán su transformada de Laplace; **por ejemplo**,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s),\ \mathcal{L}\{g(t)\} = G(s),\ \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) \ \ y \ \ \mathcal{L}\{H(t)\} = h(s).$$



3.1 Definición de la transformada de Laplace

EJEMPLO: a)

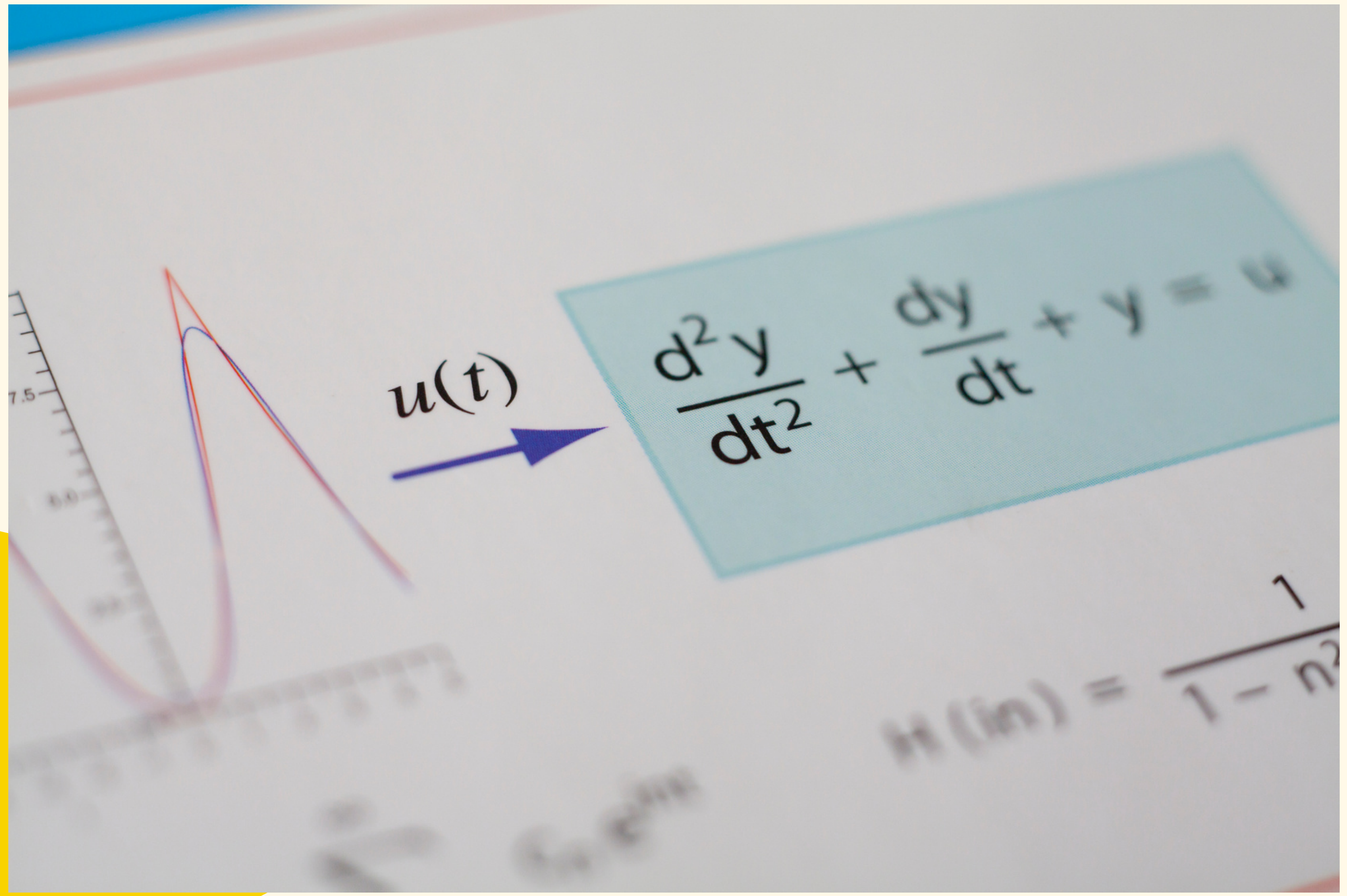
$$\mathscr{L}\{k\} = \int_0^{\infty} (k) e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^{\infty} k e^{-st}\, dt$$

$$= -\frac{k}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty}$$

$$= -\frac{k}{s} e^{-s(\infty)} + \frac{k}{s} e^{-s(0)}$$

$$= \frac{k}{s}$$



3.1 Definición de la transformada de Laplace

EJEMPLO: $b)$

$$\mathscr{L}\{t\} = \int_0^\infty (t) e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\infty t\, e^{-st}\, dt$$

$$u = t \qquad dv = e^{-st}\, dt$$

$$du = dt \qquad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

$$= -\frac{t}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt$$

$$= -\frac{t}{s} e^{-st}\Big|_0^\infty - \frac{1}{s^2} e^{-st}\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{\infty}{s} e^{-s(\infty)} + \frac{0}{s} e^{-s(0)} - \frac{1}{s^2} e^{-s(\infty)} + \frac{1}{s^2} e^{-s(0)}$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

3.1 Definición de la transformada de Laplace

EJEMPLO: $c)$

$$\mathscr{L}\{e^{3t}\}=\int_0^\infty (e^{3t})e^{-st}\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{3t}e^{-st}\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-(s-3)t}\,dt$$

$$=-\frac{1}{s-3}e^{-(s-3)t}\Big|_0^\infty$$

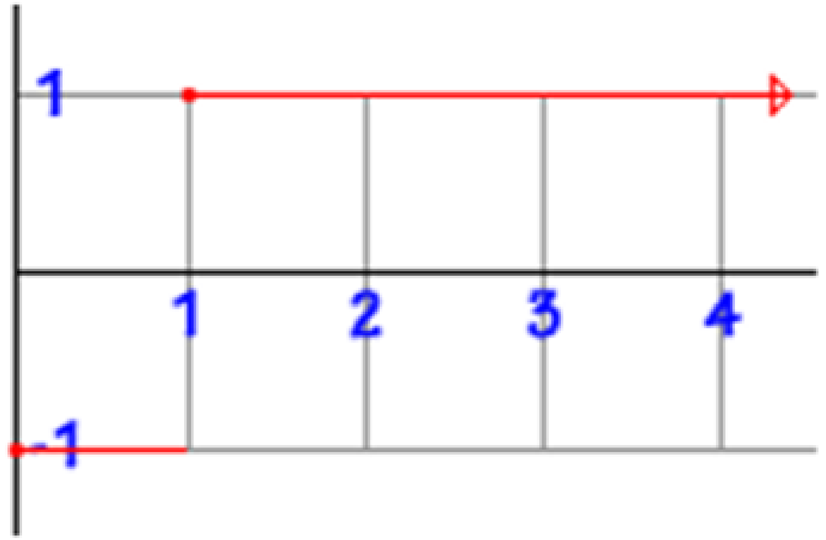
$$=-\frac{1}{s-3}e^{-(s-3)\infty}+\frac{1}{s-3}e^{-(s-3)(0)}$$

$$=\frac{1}{s-3}$$

3.1 Definición de la transformada de Laplace

EJEMPLO:

d)
$$f(t)=\begin{cases}-1 & 0\le t<1\\ 1 & t\ge 1\end{cases}$$



$$f(t)=-\int_0^1 e^{-st}\,dt+\int_1^\infty e^{-st}\,dt$$

$$=\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_1^\infty$$

$$=\frac{1}{s}e^{-s(1)}-\frac{1}{s}e^{-s(0)}-\frac{1}{s}e^{-s(\infty)}+\frac{1}{s}e^{-s(1)}$$

$$=\frac{2}{s}e^{-s}-\frac{1}{s}$$

3.1 Definición de la transformada de Laplace

EJEMPLO: $e)$

$$\mathscr{L}\{sen2t\}=\int_0^\infty e^{-st}\,sen\,2t\,dt$$

$$u=sen\,2t \qquad dv=e^{-st}dt$$
$$du=2\cos 2t\,dt \qquad v=-\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$\mathscr{L}\{sen2t\}=-\frac{1}{s}e^{-st}\,sen\,2t\Big|_0^\infty+\frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\,dt$$

$$u=\cos 2t \qquad dv=e^{-st}dt$$
$$du=-2\,sen2t\,dt \qquad v=-\frac{1}{s}e^{-st}$$

$$\mathscr{L}\{sen2t\}=\frac{2}{s}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\cos 2t\Big|_0^\infty-\frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,sen\,2t\,dt\right)$$

$$\mathscr{L}\{sen2t\}=\frac{2}{s}\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s}\mathscr{L}\{sen2t\}\right)$$

$$\mathscr{L}\{sen2t\}=\frac{2}{s^2}-\frac{4}{s^2}\mathscr{L}\{sen2t\}$$

$$\mathscr{L}\{sen2t\}\left(1+\frac{4}{s^2}\right)=\frac{2}{s^2}$$

$$\mathscr{L}\{sen2t\}\left(\frac{s^2+4}{s^2}\right)=\frac{2}{s^2}$$

$$\mathscr{L}\{sen2t\}=\frac{2}{s^2}\left(\frac{s^2}{s^2+4}\right)$$

$$\mathscr{L}\{sen2t\}=\frac{2}{s^2+4}$$

3.1 Definición de la transformada de Laplace

ACTIVIDAD 1: Usa la Definición 3.1 para encontrar

1) $f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<1 \\ 1 & t\ge 1 \end{cases}$

2) $f(t)=\begin{cases} sen\, t & 0\le t<\pi \\ 0 & t\ge \pi \end{cases}$

3) $f(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<1 \\ t & t\ge 1 \end{cases}$

4) $f(t)=\begin{cases} 1-t & 0\le t<1 \\ 0 & t\ge 1 \end{cases}$

5) $\mathscr{L}\{e^{t+7}\}$

6) $\mathcal{L}\{f(t)\} = te^{-2t}$

7) $\mathcal{L}\{f(t)\} = t^2e^{-2t}$

3.1 Definición de la transformada de Laplace

Teorema 3.1 Transformadas de algunas funciones básicas

$$a)\quad \mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$b)\quad \mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}},\ n = 1, 2, 3, \ldots \qquad c)\quad \mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$d)\quad \mathscr{L}\{\text{sen } kt\} = \frac{k}{s^2+k^2} \qquad e)\quad \mathscr{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$$

$$f)\quad \mathscr{L}\{\text{senh } kt\} = \frac{k}{s^2-k^2} \qquad g)\quad \mathscr{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2-k^2}$$

3.1 Definición de la transformada de Laplace

EJEMPLOS:

$f)$

$$\mathscr{L}\{3t-5\,sen\,2t\}=3\,\mathscr{L}\{t\}-5\,\mathscr{L}\{sen\,2t\}$$
$$=3\left(\frac{1}{s^2}\right)-5\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$
$$=\frac{3}{s^2}-\frac{10}{s^2+4}$$
$$=\frac{3(s^2+4)-10s^2}{s^2(s^2+4)}$$
$$=\frac{3s^2+12-10s^2}{s^2(s^2+4)}$$
$$=\frac{-7s^2+12}{s^2(s^2+4)}$$

$g)$

$$\mathscr{L}\{sen^2 t\}=\mathscr{L}\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\mathscr{L}\{1-\cos 2t\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{s^2+4-s^2}{s(s^2+4)}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{s(s^2+4)}\right]$$
$$=\frac{2}{s(s^2+4)}$$

3.1 Definición de la transformada de Laplace

ACTIVIDAD 2

- Use el Teorema 3.1 para encontrar

19. $f(t) = 2t^4$
20. $f(t) = t^5$
21. $f(t) = 4t - 10$
22. $f(t) = 7t + 3$
23. $f(t) = t^2 + 6t - 3$
24. $f(t) = -4t^2 + 16t + 9$
25. $f(t) = (t + 1)^3$
26. $f(t) = (2t - 1)^3$
27. $f(t) = 1 + e^{4t}$
28. $f(t) = t^2 - e^{-9t} + 5$
29. $f(t) = (1 + e^{2t})^2$
30. $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$
31. $f(t) = 4t^2 - 5 \operatorname{sen} 3t$
32. $f(t) = \cos 5t + \operatorname{sen} 2t$
33. $f(t) = \operatorname{senh} kt$
34. $f(t) = \cosh kt$
35. $f(t) = e^t \operatorname{senh} t$
36. $f(t) = e^{-t} \cosh t$

Unidad III. Transformadas de Laplace

- 3.1 Definición de la transformada de Laplace
- 3.2 La transformada inversa
- **3.3 Teoremas de traslación**
- **3.4 Transformadas de derivadas**
- 3.5 Propiedades operacionales adicionales
- **3.6 Aplicaciones de la Transformada de Laplace**

3.2 La transformada inversa

El problema de la inversa Si $F(s)$ representa la transformada de Laplace de una función $f(t)$, que es $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces decimos que $f(t)$ es la **transformada inversa de Laplace** de $F(s)$ y escribimos $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$. Para los ejemplos 1, 2 y 3 dados en la sección 4.1, tenemos, respectivamente,

$$1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}, \quad t = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} \quad \text{y} \quad e^{-3t} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}.$$

Teorema 3.3 Algunas Transformadas Inversas

a) $$1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

b) $$t^n = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}, n = 1, 2, 3, \ldots$$

c) $$e^{at} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$$

d) $$\operatorname{sen} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^s + k^2}\right\}$$

e) $$\cos kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + k^2}\right\}$$

f) $$\operatorname{senh} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 - k^2}\right\}$$

g) $$\cosh kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 - k^2}\right\}$$

3.2 La transformada inversa

EJEMPLOS:

$$a)\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}=\frac{1}{4!}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}=\frac{1}{24}t^4$$

$n+1=5$

$n=4$

$$b)\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+64}\right\}=\frac{1}{8}\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s^2+64}\right\}=\frac{1}{8}\,sen\,8t$$

$k^2=64$

$k=8$

$$c)\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2+7}\right\}=3\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+7}\right\}+5\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}$$

$k^2=7$

$k=\sqrt{7}$

$$=3\cos\sqrt{7}\,t+\frac{5}{\sqrt{7}}\,sen\,\sqrt{7}\,t$$

3.2 La transformada inversa

Actividad 3

- Use el Teorema 3.3 para encontrar la Transformada Inversa

1) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)^3}{s^4}\right\}$

2) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s-2}\right\}$

3) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{4s+1}\right\}$

4) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s^2+49}\right\}$

5) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{4s}{4s^2+1}\right\}$

6) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-16}\right\}$

7) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-6}{s^2+9}\right\}$

3.2 La transformada inversa

EJEMPLO:

a) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}$

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s+2}+\frac{D}{(s+2)^2}+\frac{E}{(s+2)^3}$$

$$s+1=As(s+2)^3+B(s+2)^3+Cs^2(s+2)^2+Ds^2(s+2)+Es^2$$

$$s+1=As(s^3+6s^2+12s+8)+B(s^3+6s^2+12s+8)+Cs^2(s^2+4s+4)+Ds^2(s+2)+Es^2$$

$$s+1=As^4+6As^3+12As^2+8As+Bs^3+6Bs^2+12Bs+8B+Cs^4+4Cs^3+4Cs^2+\cdots$$

$$\cdots+Ds^3+2Ds^2+Es^2$$

$$s+1=s^4(A+C)+s^3(6A+B+4C+D)+s^2(12A+6B+4C+2D+E)+s(8A+12B)+8B$$

$$A+C=0$$
$$C=-A$$
$$C=\frac{1}{16}$$

$$6A+B+4C+D=0$$
$$6\left(-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{8}+4\left(\frac{1}{16}\right)+D=0$$
$$-\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+D=0$$
$$D=0$$

$$12A+6B+4C+2D+E=0$$
$$12\left(-\frac{1}{16}\right)+6\left(\frac{1}{8}\right)+4\left(\frac{1}{16}\right)+E=0$$
$$-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+E=0$$
$$E=-\frac{1}{4}$$

$$8A+12B=1$$
$$8A+12\left(\frac{1}{8}\right)=1$$
$$8A=1-\frac{3}{2}$$
$$8A=-\frac{1}{2}$$
$$A=-\frac{1}{16}$$

$$8B=1$$
$$B=\frac{1}{8}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}=-\frac{1}{16}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\frac{1}{16}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-\frac{1}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}$$

$$=-\frac{1}{16}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\frac{1}{16}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-\frac{1}{4(2)}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^3}\right\}$$

$$=-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}t+\frac{1}{16}e^{-2t}-\frac{1}{8}t^2e^{-2t}$$

3.2 La transformada inversa

EJEMPLO:

b) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\}$

$$\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{s^3}+\frac{Ds+E}{(s^2+4)}$$

$$3s-2=As^2(s^2+4)+Bs(s^2+4)+C(s^2+4)+(Ds+E)s^3$$

$$3s-2=As^4+4As^2+Bs^3+4Bs+Cs^2+4C+Ds^4+Es^3$$

$$3s-2=s^4(A+D)+s^3(B+E)+s^2(4A+C)+s(4B)+4C$$

$A+D=0$	$B+E=0$	$4A+C=0$	$4B=3$	$4C=-2$
$D=-A$	$E=-B$	$4A-\frac{1}{2}=0$	$B=\frac{3}{4}$	$C=-\frac{1}{2}$
$D=-\frac{1}{8}$	$E=-\frac{3}{4}$	$4A=\frac{1}{2}$	$A=\frac{1}{8}$	

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)}\right\}=\frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}-\frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{3}{4}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-\frac{1}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}-\frac{1}{8}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}-\frac{3}{4(2)}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}t-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{8}\cos 2t-\frac{3}{8}\operatorname{sen} 2t$$

3.2 La transformada inversa

EJEMPLO: $c)$ $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}$

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+4}$$

$$1=A(s+2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s+2)$$

$$A\Big|_{s\to 1}\quad 1=A(3)(5) \qquad A=\frac{1}{15}$$

$$B\Big|_{s\to -2}\quad 1=B(-3)(2) \qquad B=-\frac{1}{6}$$

$$C\Big|_{s\to -4}\quad 1=C(-5)(-2) \qquad C=\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{15}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+\frac{1}{10}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}=\frac{1}{15}e^{t}-\frac{1}{6}e^{-2t}+\frac{1}{10}e^{-4t}$$

3.2 La transformada inversa

Actividad 4

- Use el Teorema 3.3 para encontrar la Transformada Inversa por **Fracciones Parciales**

1) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\}$

2) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s-3}\right\}$

3) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{0{,}9s}{(s-0{,}1)(s+0{,}2)}\right\}$

4) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}\right\}$

5) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}\right\}$

6) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right\}$

7) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)(s+2)}\right\}$

8) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

Unidad III. Transformadas de Laplace

- 3.1 Definición de la transformada de Laplace
- **3.2 La transformada inversa**
- **3.3 Teoremas de traslación**
- **3.4 Transformadas de derivadas**
- 3.5 Propiedades operacionales adicionales
- **3.6 Aplicaciones de la Transformada de Laplace**

3.3 Teoremas de Traslación

Introducción:

No es conveniente usar la definición 3.1 cada vez que deseemos encontrar la transformada de Laplace para una función f(t) dada. Por ejemplo, la integración por partes requerida para determinar la transformada de, digamos, f(t)=e^t t^2 sen 3t es, en pocas palabras, formidable cuando se hace a mano. En este tema y en el siguiente presentamos varios teoremas que ahorran esfuerzo y permiten crear una lista más amplia de transformadas (vea la tabla incluida en el apéndice III del libro de Ecuaciones Diferenciales de Dennis G. Zill) sin la necesidad de usar la definición de la transformada de Laplace.

3.3 Teoremas de Traslación

Traslación en el eje s

Evaluar transformadas tales como $L\{e^{5t} t^3\}$ y $L\{e^{-2t} \cos 4t\}$ resulta sencillo siempre que conozcamos $L\{t^3\}$ y $L\{\cos 4t\}$, lo cual sabemos. En general, si conocemos $L\{f(t)\}=F(s)$ es posible calcular la transformada de Laplace de un múltiplo exponencial de la función f, es decir, $L\{e^{at} f(t)\}$, sin ningún esfuerzo adicional que el de trasladar, o desplazar, $F(s)$ a $F(s-a)$. Este resultado se conoce como primer teorema de la traslación o primer teorema del desplazamiento.

3.3 Teoremas de Traslación

TEOREMA 3.6
Primer teorema de la traslación

- Si **L{f(t)}=F(s)** y **a** es cualquier número real, entonces $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
  - o

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)_{s\to s-a}\}$$

3.3 Teoremas de Traslación

Ejemplos del Primer Teorema de Traslación:

$$a)\quad \mathscr{L}\{t\,e^{-2t}\} = \mathscr{L}\{t\}_{s\to s+2} = \frac{1}{s^2}\bigg|_{s\to s+2} = \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$b)\quad \mathscr{L}\{t^2 e^{-2t}\} = \mathscr{L}\{t^2\}_{s\to s+2} = \frac{2}{s^3}\bigg|_{s\to s+2} = \frac{2}{(s+2)^3}$$

$$c)\quad \mathscr{L}\{e^{3t}\cos 4t\} = \mathscr{L}\{\cos 4t\}_{s\to s-3} = \frac{s}{s^2+16}\bigg|_{s\to s-3} = \frac{s-3}{(s-3)^2+16}$$

3.3 Teoremas de Traslación

Forma inversa del Teorema 3.6

Para calcular la inversa de **F(s−a)** debemos reconocer **F(s)**, encontrar **f(t)** al tomar la transformada inversa de Laplace de **F(s)**, y después multiplicar **f(t)** por la función exponencial **e^at**. Este procedimiento se puede resumir de manera simbólica en la siguiente forma

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)|_{s\to s-a}\} = e^{at}f(t)$$

donde $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

3.3 Teoremas de Traslación

Ejemplos:

$$d)\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}_{s\to s-1}=\frac{1}{2}t^2e^t$$

$$n=2$$

$$e)\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s-8}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+2s+1)-8-1}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2-9}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-9}\right\}_{s\to s+1}$$

$$=\frac{1}{3}e^{-t}\,senh\,3t$$

$$f)\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+11}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+6s+9)+11-9}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+2}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+3-3}{(s+3)^2+2}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+2}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s+3)^2+2}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}_{s\to s+3}-3\,\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\}_{s\to s+3}$$

$$=e^{-3t}\cos\sqrt{2}\,t-\frac{3}{\sqrt{2}}e^{-3t}\,sen\sqrt{2}\,t$$

3.3 Teoremas de Traslación

ACTIVIDAD 5: Resuelve mediante el Primer Teorema de Traslación, transformadas directas del 1-6 y transformadas Inversas del 7-11

1) $\mathscr{L}\{t\,e^{10t}\}$

2) $\mathscr{L}\{t^3 e^{-2t}\}$

3) $\mathscr{L}\{e^t \operatorname{sen} 3t\}$

4) $\mathscr{L}\{e^{5t} \operatorname{senh} 3t\}$

5) $\mathscr{L}\{t(e^t+e^{2t})^2\}$

6) $\mathscr{L}\{e^{-t} \operatorname{sen}^2 t\}$

7) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^3}\right\}$

8) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-6s+10}\right\}$

9) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4s+5}\right\}$

10) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^2}\right\}$

11) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^2(s+1)^3}\right\}$

3.3 Teoremas de Traslación

Traslación en el eje t

Función escalón unitario En ingeniería es común encontrar funciones que están en estado "activo" o "inactivo". **Por ejemplo**, una fuerza externa que actúe sobre un sistema mecánico o un voltaje aplicado a un circuito pueden ser suspendidas después de cierto tiempo. Resulta conveniente, entonces, definir una función especial que sea del número 0 (inactiva) hasta cierto tiempo **t=a**, y de número 1 (activa) después de ese tiempo. Esta función se denomina **función escalón unitario** o **función de Heaviside**.

DEFINICIÓN: Función escalón unitario

La función escalón unitario u(t−a) se define como

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a. \end{cases}$$

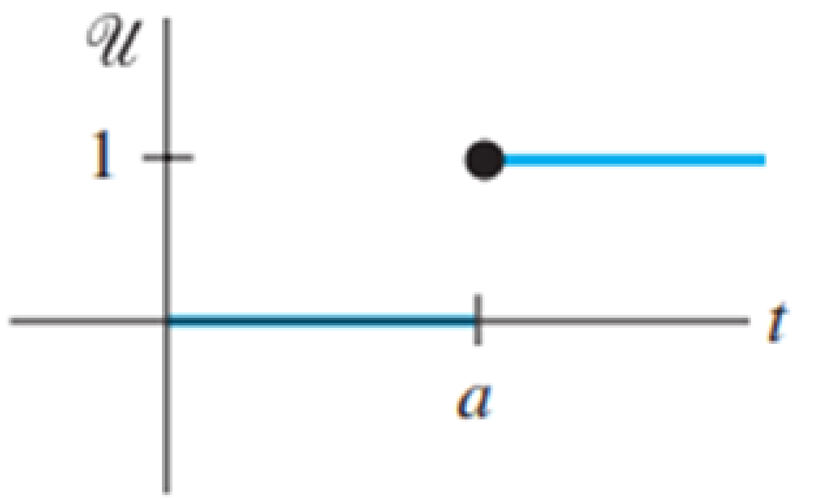


Figura 4.11 Gráfica de la función escalón unitario

3.3 Teoremas de Traslación

Observe que definimos $\mathcal{U}(t-a)$ sólo en el eje t no negativo puesto que es todo lo que nos interesa en el estudio de la transformada de Laplace. En un sentido más amplio, $\mathcal{U}(t-a) = 0$ cuando $t < a$. La gráfica de $\mathcal{U}(t-a)$ se presenta en la figura 4.11.

Cuando una función f definida para $t \geq 0$ se multiplica por $\mathcal{U}(t-a)$, la función escalón unitario "desactiva" una porción de la gráfica de esa función. Por ejemplo, considere la función $f(t) = 2t - 3$. Para "desactivar" la parte de la gráfica de f en, digamos, el intervalo $0 \leq t < 1$, simplemente formamos el producto $(2t-3)\mathcal{U}(t-1)$. Vea la figura 4.12. En general, la gráfica de $f(t)\mathcal{U}(t-a)$ es 0 (desactivado) para $0 \leq t < a$ y es la porción de la gráfica desactivada (activada) cuando $t \geq a$.

La función escalón unitario también se puede utilizar para escribir en forma compacta funciones definidas por tramos. Por ejemplo, al considerar los intervalos $0 \leq t < 2$, $2 \leq t < 3$, $t \geq 3$, y los valores correspondientes de $\mathcal{U}(t-2)$ y $\mathcal{U}(t-3)$, debe resultar evidente que la función definida por tramos mostrada en la figura 4.13 es la misma que $f(t) = 2 - 3\mathcal{U}(t-2) + \mathcal{U}(t-3)$. También, una función general definida por tramos del tipo

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a \end{cases} \tag{9}$$

es la misma que

$$f(t) = g(t) - g(t)\mathcal{U}(t-a) + h(t)\mathcal{U}(t-a). \tag{10}$$

De manera similar, una función del tipo

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ g(t), & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b \end{cases} \tag{11}$$

se puede escribir como $\quad f(t) = g(t)[\mathcal{U}(t-a) - \mathcal{U}(t-b)]. \qquad (12)$

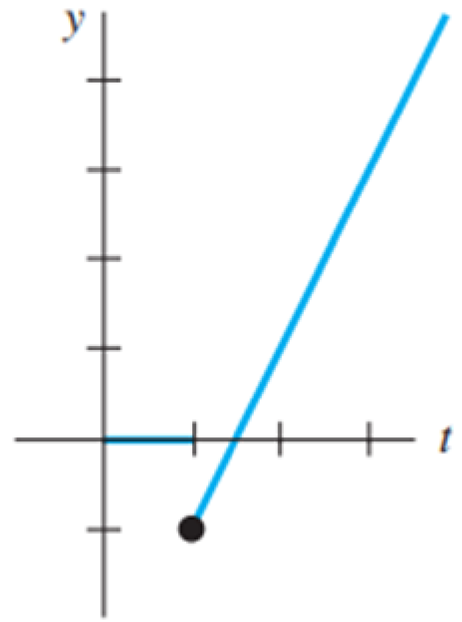


Figura 4.12 La función se puede escribir como $f(t) = (2t-3)\mathcal{U}(t-1)$

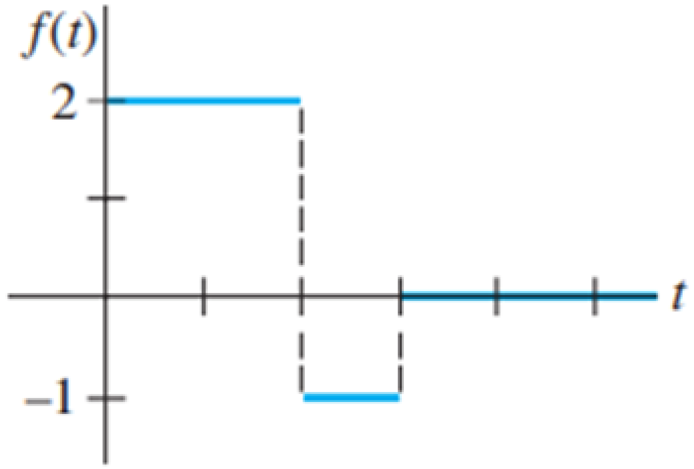


Figura 4.13 La función se puede escribir como $f(t) = 2t - 3\mathcal{U}(t-2) + \mathcal{U}(t-3)$

3.3 Teoremas de Traslación

Ejemplo: Una función definida por tramos

Exprese $f(t) = \begin{cases} 20t, & 0 \le t < 5 \\ 0, & t \ge 5 \end{cases}$ en términos de funciones escalón unitario. Grafíquelos.

Soluciones La gráfica de f se presenta en la figura 4.14. Ahora, a partir de (9) y (10) con $a = 5$, $g(t) = 20t$ y $h(t) = 0$, obtenemos $f(t) = 20t - 20t\,\mathscr{U}(t-5)$. ❑

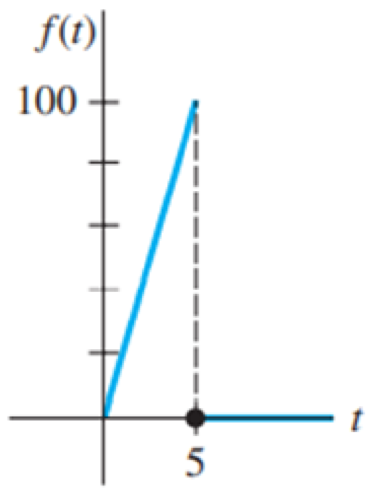


Figura 4.14 La función se puede escribir como $f(t) = 20t - 20t\,\mathscr{U}(t-5)$

Considere una función general $y = f(t)$ definida para $t \ge 0$. La función definida por tramos

$$f(t-a)\mathscr{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ f(t-a), & t \ge a \end{cases} \tag{13}$$

desempeña un papel importante en el siguiente análisis. Como se muestra en la figura 4.15, cuando $a > 0$ la gráfica de la función $y = f(t-a)\mathscr{U}(t-a)$ coincide con la gráfica de $y = f(t-a)$ cuando $t \ge a$ (la cual es *toda* la gráfica de $y = f(t)$, $t \ge 0$, desplazada en a unidades hacia la derecha en el eje t), pero es idéntica a cero cuando $0 \le t < a$.

En el teorema 4.6 vimos que un múltiplo exponencial de $f(t)$ da como resultado una traslación de la transformada $F(s)$ en el eje s. Como una consecuencia del teorema siguiente vemos que siempre que $F(s)$ se multiplique por una función exponencial e^{-as}, $a > 0$, la transformada inversa del producto $e^{-as}F(s)$ será la función f desplazada a lo largo del eje t en la forma ilustrada por la figura 4.15*b*). Este resultado, presentado a continuación en su versión transformada directa, se denomina **segundo teorema de la traslación** o **segundo teorema del desplazamiento**.

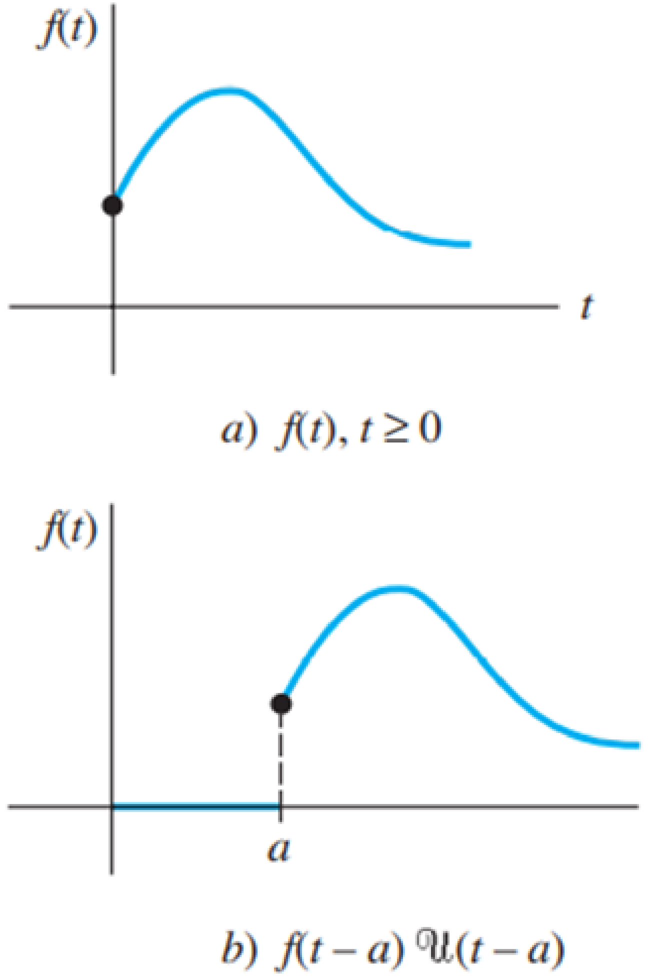


Figura 4.15 Desplazamiento en el eje t

3.3 Teoremas de Traslación

TEOREMA Segundo teorema de la traslación

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, y $a > 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{(t-2)^3\mathcal{U}(t-2)\} = e^{-2s}\mathcal{L}\{t^3\}$$
$$= e^{-2s}\left(\frac{3!}{s^4}\right)$$
$$= \frac{6e^{-2s}}{s^4}$$

Si identificamos $f(t) = 1$ en el teorema, entonces $f(t-a) = 1, F(s) = \mathcal{L}\{1\} = 1/s$, y así

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2\mathcal{L}\{1\} - 3\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-2)\} + \mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-3)\}$$
$$= 2\frac{1}{s} - 3\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}.$$

3.3 Teoremas de Traslación

Forma inversa del teorema Si $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, la forma inversa del teorema, $a > 0$, es

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\mathcal{U}(t-a).$$

Ejemplo: Evalúe $a)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\}$ y $b)\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\}$.

Solución *a)* Con las identificaciones $a = 2$, $F(s) = 1/(s-4)$, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{4t}$, a partir de (15) tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}e^{-2s}\right\} = e^{4(t-2)}\mathcal{U}(t-2).$$

b) Con $a = \pi/2$, $F(s) = s/(s^2+9)$, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \cos 3t$, (15) produce

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}e^{-\pi s/2}\right\} = \cos 3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} 3t\,\mathcal{U}(t-\pi/2).$$

3.3 Teoremas de Traslación

Forma Alternativa del Segundo Teorema de Traslación

$$\mathscr{L}\{g(t)\mathscr{U}(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{g(t+a)\}.$$

Ejemplo:

Evalúe $\mathscr{L}\{\cos t\,\mathscr{U}(t-\pi)\}$.

Solución Con $g(t) = \cos t$, $a = \pi$, entonces $g(t+\pi) = \cos(t+\pi) = -\cos t$ mediante la fórmula de la adición para la función coseno. Entonces, por (16)

$$\mathscr{L}\{\cos t\,\mathscr{U}(t-\pi)\} = -e^{-\pi s}\mathscr{L}\{\cos t\} = -\frac{s}{s^2+1}e^{-\pi s}.$$

3.3 Teoremas de Traslación

Encuentre F(s) o f(t), como se indica.

Actividad 6

37. $\mathscr{L}\{(t-1)\,\mathscr{U}(t-1)\}$

39. $\mathscr{L}\{t\,\mathscr{U}(t-2)\}$

41. $\mathscr{L}\{\cos 2t\,\mathscr{U}(t-\pi)\}$

43. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^3}\right\}$

45. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$

47. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}$

Unidad III. Transformadas de Laplace

- 3.1 Definición de la transformada de Laplace
- **3.2 La transformada inversa**
- **3.3 Teoremas de traslación**
- **3.4 Transformadas de derivadas**
- 3.5 Propiedades operacionales adicionales
- **3.6 Aplicaciones de la Transformada de Laplace**

3.4 Transformadas de Derivadas

Transformada de una derivada

Tal como fue señalado en la introducción a esta Unidad, nuestra meta inmediata es usar la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales. Con ese fin, necesitamos evaluar cantidades como $\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}$ y $\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}$.

Por ejemplo, si **f'** es continua cuando **t ≥0**, la integración por partes da entonces

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$= -f(0) + s\mathscr{L}\{f(t)\}$$

o

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \tag{6}$$

Aquí hemos asumido que $e^{-st}f(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. De manera similar, con ayuda de (6),

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f''(t)\,dt = e^{-st}f'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f'(t)\,dt$$

$$= -f'(0) + s\mathscr{L}\{f'(t)\}$$

$$= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) \quad \leftarrow \text{De (6)}$$

o

$$\mathscr{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \tag{7}$$

Asimismo, es posible demostrar que

$$\mathscr{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0). \tag{8}$$

La naturaleza recursiva de la transformada de Laplace de las derivadas de una función **f** debe ser evidente en los resultados obtenidos en **(6)**, **(7)** y **(8)**.

3.4 Transformadas de Derivadas

El teorema siguiente produce la transformada de Laplace de la **n**-ésima derivada de **f**.

TEOREMA 3.4 Transformada de una derivada

Si $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas en **[0, ∞)** y de orden exponencial, y si $f^{(n)}(t)$ es continua por tramos en **[0, ∞)**, entonces

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

3.4 Transformadas de Derivadas

Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales

A partir del resultado general que se da en el teorema 3.4, resulta evidente que $\mathcal{L}\{d^n y/dt^n\}$ depende de $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y de las derivadas **n–1** de **y(t)** evaluadas en **t=0**. Esta propiedad hace que la transformada de Laplace sea tan adecuada para resolver problemas de valor inicial lineales donde la ecuación diferencial tenga coeficientes constantes. Una ecuación diferencial de tal índole simplemente es una combinación lineal de los términos $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y = g(t),$$

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1},$$

donde $a_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ y $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ son constantes.

3.4 Transformadas de Derivadas

Gracias a la propiedad de linealidad, la transformada de Laplace de esta combinación lineal es una combinación lineal de transformadas de Laplace:

$$a_n \mathscr{L}\left\{\frac{d^n y}{dt^n}\right\} + a_{n-1}\mathscr{L}\left\{\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}\right\} + \cdots + a_0 \mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{g(t)\}. \qquad (9)$$

Con base en el teorema 4.4, (9) se convierte en

$$\begin{aligned} &a_n[s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)] \\ &\quad + a_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)] + \cdots + a_0 Y(s) = G(s), \qquad (10) \end{aligned}$$

Donde $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$ y $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$.

En otras palabras, la transformada de Laplace de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes se convierte en una ecuación algebraica en Y(s).

3.4 Transformadas de Derivadas

En resumen, las transformadas de Derivadas son:

$$\mathscr{L}\{y\}=Y(S)$$

$$\mathscr{L}\{y'\}=sY(S)-y(0)$$

$$\mathscr{L}\{y''\}=s^2Y(S)-sy(0)-y'(0)$$

$$\mathscr{L}\{y'''\}=s^3Y(S)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

3.4 Transformadas de Derivadas

Ejemplo:

a) $\frac{dy}{dt}-3y=e^{2t} \qquad y(0)=1$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}-3\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{e^{2t}\}$$

$$sY(S)-y(0)-3Y(S)=\frac{1}{s-2}$$

$$sY(S)-1-3Y(S)=\frac{1}{s-2}$$

$$sY(S)-3Y(S)=\frac{1}{s-2}+1$$

$$Y(S)(s-3)=\frac{1+s-2}{s-2}$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-2)(s-3)}\right\}$$

$$\frac{s-1}{(s-2)(s-3)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-3}$$

$$s-1=A(s-3)+B(s-2)$$

$$A\Big|_{s=2} \quad 1=A(-1) \qquad A=-1$$

$$B\Big|_{s=3} \quad 2=B(1) \qquad B=2$$

$$y(t)=-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$y(t)=-e^{2t}+2e^{3t}$$

3.4 Transformadas de Derivadas

Ejemplo (b): Usar la transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial de primer orden

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 13 \operatorname{sen} 2t, \qquad y(0) = 6.$$

Solución Primero tomamos la transformada de cada miembro de la ecuación diferencial:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 3\,\mathscr{L}\{y\} = 13\,\mathscr{L}\{\operatorname{sen} 2t\}. \tag{12}$$

Pero de (6), $\mathscr{L}\{dy/dt\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 6$, y de la parte *d*) del teorema 4.1, $\mathscr{L}\{\operatorname{sen} 2t\} = 2/(s^2 + 4)$, y por lo tanto (12) es lo mismo que

$$sY(s) - 6 + 3Y(s) = \frac{26}{s^2 + 4} \quad \text{o} \quad (s + 3)Y(s) = 6 + \frac{26}{s^2 + 4}.$$

Al resolver la última ecuación para $Y(s)$, obtenemos

$$Y(s) = \frac{6}{s + 3} + \frac{26}{(s + 3)(s^2 + 4)} = \frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)}. \tag{13}$$

Puesto que el polinomio cuadrático $s^2 + 4$ no se factoriza con números reales, su numerador asumido en la descomposición de la fracción parcial es un polinomio lineal en s:

$$\frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)} = \frac{A}{s + 3} + \frac{Bs + C}{s^2 + 4}.$$

$$Y(s) = \frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)} = \frac{8}{s + 3} + \frac{-2s + 6}{s^2 + 4}.$$

Aún no hemos terminado porque la última expresión racional todavía tiene que escribirse como dos fracciones. Pero esto se hizo en el ejemplo 2 mediante la división término a término. Con base en (2) de ese ejemplo,

$$y(t) = 8\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 3}\right\} - 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 4}\right\} + 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\}.$$

$$y(t) = 8e^{-3t} - 2\cos 2t + 3\operatorname{sen} 2t.$$

3.4 Transformadas de Derivadas

Ejemplo (c): Usar la transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial de segundo orden

Resuelva $y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5.$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} - 3\mathscr{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + 2\mathscr{L}\{y\} = \mathscr{L}\{e^{-4t}\}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{1}{s+4}$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) = s + 2 + \frac{1}{s+4}$$

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2-3s+2} + \frac{1}{(s^2-3s+2)(s+4)} = \frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}$$

y, por lo tanto, $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$

$$y(t) = -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}.$$

Ejemplo 3 Fracciones parciales y linealidad

Evalúe $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$.

Solución Existen constantes únicas A, B y C tales que

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+4}$$
$$= \frac{A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+4)}.$$

Puesto que los denominadores son idénticos, los numeradores son idénticos:

$$s^2 + 6s + 9 = A(s-2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s-2). \quad (3)$$

Por comparación de los coeficientes de potencias de s en ambos lados de la igualdad, sabemos que (3) es equivalente a un sistema de tres ecuaciones en las tres incógnitas: A, B y C. No obstante, recuerde que hay una vía más corta para determinar estas incógnitas. Si establecemos $s = 1$, $s = 2$ y $s = -4$ en (3) obtenemos, respectivamente,*

$$16 = A(-1)(5), \quad 25 = B(1)(6), \quad 1 = C(-5)(-6),$$

y entonces $A = -\frac{16}{5}$, $B = \frac{25}{6}$, $C = \frac{1}{30}$. Por lo tanto, la descomposición de la fracción parcial es

$$\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = \frac{16/5}{s-1} + \frac{25/6}{s-2} + \frac{1/30}{s+4}, \quad (4)$$

y de esta manera, con base en la linealidad de $\mathscr{L}^{-1}$ y el inciso c) del teorema 4.3,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\} = -\frac{16}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{25}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{1}{30}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$
$$= -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}. \quad (5) \; \square$$

3.4 Transformadas de Derivadas

Ejemplo (d): Usar la transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial de segundo orden

$$y''-6y'+9y=t^2e^{3t} \qquad y(0)=2 \qquad y'(0)=6$$

$$\mathscr{L}\{y''\}-6\mathscr{L}\{y'\}+9\mathscr{L}\{y\}=\mathscr{L}\{t^2e^{3t}\}$$

$$s^2Y(S)-sy(0)-y'(0)-6[sY(S)-y(0)]+9Y(S)=\frac{2}{(s-3)^3}$$

$$s^2Y(S)-2s-6-6sY(S)+12+9Y(S)=\frac{2}{(s-3)^3}$$

$$Y(S)(s^2-6s+9)-2s+6=\frac{2}{(s-3)^3}$$

$$Y(S)(s-3)^2=\frac{2}{(s-3)^3}+2s-6$$

$$Y(S)(s-3)^2=\frac{2}{(s-3)^3}+2(s-3)$$

$$Y(S)=\frac{2}{(s-3)^5}+\frac{2(s-3)}{(s-3)^2}$$

$$Y(S)=\frac{2}{(s-3)^5}+\frac{2}{s-3}$$

$$y(t)=2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^5}\right\}+2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$y(t)=\frac{2}{4!}t^4e^{3t}+2e^{3t}$$

$$y(t)=\frac{1}{12}t^4e^{3t}+2e^{3t}$$

3.4 Transformadas de Derivadas

Use la derivada de la transformada para resolver el problema de valor inicial dado.

Actividad 7

1.- $y' + 6y = e^{4t}, \; y(0) = 2$

2.- $y' - y = 2\cos 5t, \; y(0) = 0$

3.- $y'' + 5y' + 4y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

4.- $y'' - 4y' + 4y = t^3 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$

5.- $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t} \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 0$

6.- $y'' - 2y' + 5y = 1 + t \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 4$

Unidad III. Transformadas de Laplace

- 3.1 Definición de la transformada de Laplace
- **3.2 La transformada inversa**
- **3.3 Teoremas de traslación**
- **3.4 Transformadas de derivadas**
- 3.5 Propiedades operacionales adicionales
- **3.6 Aplicaciones de la Transformada de Laplace**

3.5 Propiedades operacionales adicionales

Introducción: En esta sección desarrollamos muchas más propiedades operacionales de la transformada de Laplace. En específico, veremos cómo encontrar la transformada de una función f(t) que está multiplicada por un monomio t^n, la transformada de un tipo especial de integral, y la transformada de una función periódica. Las dos últimas propiedades de las transformadas nos permiten resolver algunas ecuaciones con las cuales no hemos trabajado hasta este punto: las ecuaciones integrales de Volterra, ecuaciones integrodiferenciales, y ecuaciones diferenciales ordinarias donde la función de entrada es una función periódica definida por tramos.

3.5 Propiedades operacionales adicionales

Derivadas de transformadas

Multiplicación de una función por t^n. La transformada de Laplace del producto de una función **f(t)** con **t** se puede encontrar al diferenciar la transformada de Laplace de **f(t).**

TEOREMA: Derivadas de transformadas

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $n = 1, 2, 3, \dots,$ entonces $$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

Ejemplo:

Primer Teorema de Traslación $$\mathcal{L}\{te^{3t}\} = \mathcal{L}\{t\}_{s \to s-3} = \left.\frac{1}{s^2}\right|_{s \to s-3} = \frac{1}{(s-3)^2}$$

Teorema de Derivadas

$$\mathcal{L}\{te^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{e^{3t}\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-3} = (s-3)^{-2} = \frac{1}{(s-3)^2}.$$

3.5 Propiedades operacionales adicionales

Transformada de Integrales

Convolución Si las funciones f y g son continuas por tramos en $[0, \infty)$, entonces un producto especial, denotado como $f * g$, está definido por la integral

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau \tag{2}$$

y se conoce como **convolución** de f y g. La convolución $f * g$ es una función de t. Por ejemplo,

$$e^t * \operatorname{sen} t = \int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t - \tau)\, d\tau = \frac{1}{2}(-\operatorname{sen} t - \cos t + e^t). \tag{3}$$

Se puede demostrar que $\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)\, d\tau = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)\, d\tau$, es decir, $f * g = g * f$. Esto significa que la convolución de dos funciones es conmutativa.

No es verdad que la integral de un producto de funciones sea el producto de las integrales. No obstante, *es verdad* que la transformada de Laplace del producto especial (2) es el producto de las transformadas de Laplace de f y g. Esto significa que es posible encontrar la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones sin evaluar realmente la integral como lo hicimos en (3). El resultado que se deriva es conocido como **teorema de convolución.**

TEOREMA 4.9 Teorema de convolución

Si $f(t)$ y $g(t)$ son continuas por tramos en $[0, \infty)$ y de orden exponencial, entonces

$$\mathscr{L}\{f * g\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\} = F(s)G(s).$$

3.5 Propiedades operacionales adicionales

Transformada de Integrales

Ejemplo: Transformada de una Convolución

Evalúe $\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau\right\}$.

Solución Con $f(t)=e^t$ y $g(t)=\operatorname{sen} t$ el teorema de convolución establece que la transformada de Laplace de la convolución de f y g es el producto de sus transformadas de Laplace:

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t e^\tau \operatorname{sen}(t-\tau)\,d\tau\right\} = \mathscr{L}\{e^t\}\cdot\mathscr{L}\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s-1}\cdot\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}.$$

3.5 Propiedades operacionales adicionales

Transformada de una función Periódica

- **Función periódica** Si una función periódica **f** tiene periodo **T, T>0,** entonces **f(t+T)=f(t).** La transformada de Laplace de una función periódica se puede obtener por integración en un periodo.

Teorema: Transformada de una función Periódica

Si $f(t)$ es continua por tramos en $[0, \infty)$, de orden exponencial, y periódica con periodo T, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\, dt.$$

3.5 Propiedades operacionales adicionales

Transformada de una función Periódica

Ejemplo:

Encontrar la transformada de Laplace de la función periódica mostrada en la figura 4.35.

Solución La función $E(t)$ se denomina onda cuadrada y tiene periodo $T = 2$. En el intervalo $0 \leq t < 2$, $E(t)$ puede definirse mediante

$$E(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2, \end{cases}$$

y fuera del intervalo por $f(t+2) = f(t)$. Ahora, con base en el teorema 4.10,

$$\mathscr{L}\{E(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} E(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-st}} \left[\int_0^1 e^{-st} \cdot 1\,dt + \int_1^2 e^{-st} \cdot 0\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2s}} \frac{1-e^{-s}}{s} \qquad \leftarrow 1 - e^{-2s} = (1+e^{-s})(1-e^{-s})$$

$$= \frac{1}{s(1+e^{-s})}. \qquad (12)$$

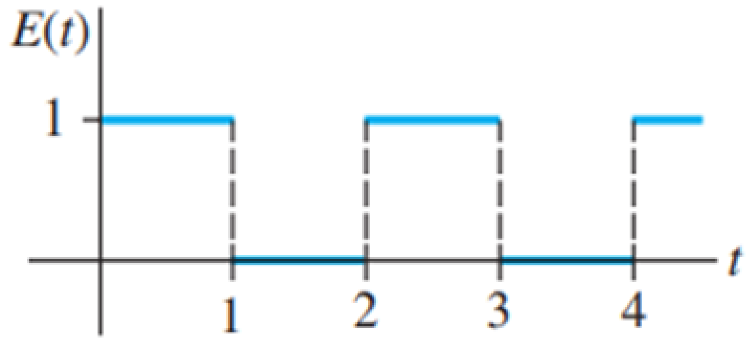


Figura 4.35 Onda cuadrada

3.5 Propiedades operacionales adicionales

Derivadas de transformadas

ACTIVIDAD 8:

1. $\mathscr{L}\{te^{-10t}\}$

3. $\mathscr{L}\{t\cos 2t\}$

5. $\mathscr{L}\{t\operatorname{senh} t\}$

Unidad III. Transformadas de Laplace

- 3.1 Definición de la transformada de Laplace
- **3.2 La transformada inversa**
- **3.3 Teoremas de traslación**
- **3.4 Transformadas de derivadas**
- 3.5 Propiedades operacionales adicionales
- **3.6 Aplicaciones de la Transformada de Laplace**

3.6 Aplicaciones de la Transformada de Laplace

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Introducción: Cuando las condiciones iniciales están especificadas, la transformada de Laplace se reduce de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes a un conjunto de ecuaciones algebraicas simultáneas en las funciones transformadas. Resortes acoplados En nuestro primer ejemplo resolvimos el modelo

$$m_1x_1'' = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$
$$m_2x_2'' = -k_2(x_2 - x_1)$$

que describe el movimiento de dos masas **m1** y **m2** en el sistema de resorte acoplado que se vio anteriormente.

3.6 Aplicaciones de la Transformada de Laplace

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Redes En la expresión (18) de la sección 2.9 vimos que las corrientes $i_1(t)$ e $i_2(t)$ mostradas en la red que contiene el inductor, el resistor y el capacitor de la figura 4.47 estaban regidas por el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} L\frac{di_1}{dt} + Ri_2 &= E(t) \\ RC\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

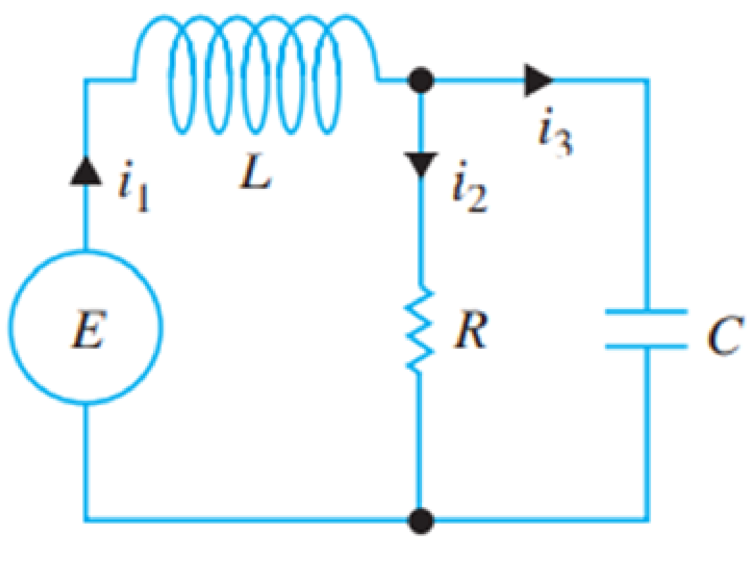


Figura 4.47 Red eléctrica

3.6 Aplicaciones de la Transformada de Laplace

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Ejemplo: Red Eléctrica

Resuelva el sistema dado en (5) bajo las condiciones $E(t) = 60$ V, $L = 1$ h, $R = 50\ \Omega$, $C = 10^{-4}$ f, considerando que las corrientes i_1 e i_2 son inicialmente cero.

Solución Debemos resolver

$$\frac{di_1}{dt} + 50i_2 = 60$$

$$50(10^{-4})\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0$$

sujeta a $i_1(0) = 0,\ i_2(0) = 0$.

Cuando se aplica la transformada de Laplace a cada ecuación del sistema y se simplifica resulta

$$sI_1(s) + \qquad 50I_2(s) = \frac{60}{s}$$

$$-200I_1(s) + (s + 200)I_2(s) = 0,$$

3.6 Aplicaciones de la Transformada de Laplace

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Continuación del ejemplo: Red Eléctrica

donde $I_1(s) = \mathscr{L}\{i_1(t)\}$ e $I_2(s) = \mathscr{L}\{i_2(t)\}$. Al resolver el sistema para I_1 e I_2 y descomponer los resultados en fracciones parciales se tiene

$$I_1(s) = \frac{60s + 12\,000}{s(s+100)^2} = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{60}{(s+100)^2}$$

$$I_2(s) = \frac{12\,000}{s(s+100)^2} = \frac{6/5}{s} - \frac{6/5}{s+100} - \frac{120}{(s+100)^2}.$$

Al tomar la transformada inversa de Laplace, encontramos que las corrientes son

$$i_1(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t}$$

$$i_2(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}.$$

Observe que tanto $i_1(t)$ como $i_2(t)$ del ejemplo 2 tienden hacia el valor $E/R = \frac{6}{5}$ cuando $t \to \infty$. Además, como la corriente que atraviesa el capacitor es $i_3(t) = i_1(t) - i_2(t) = 60te^{-100t}$, observamos que $i_3(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

3.6 Aplicaciones de la Transformada de Laplace

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Péndulo doble Tal como ilustra la figura 4.48, un péndulo doble oscila en un plano vertical debido a la influencia de la gravedad. Para desplazamientos pequeños $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$, se puede demostrar que el sistema de ecuaciones diferenciales que describe el movimiento es

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2\theta_1'' + m_2 l_1 l_2 \theta_2'' + (m_1 + m_2)l_1 g\theta_1 &= 0 \\ m_2 l_2^2 \theta_2'' + m_2 l_1 l_2 \theta_1'' + m_2 l_2 g \theta_2 &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Como se indica en la figura 4.48, θ_1 se mide (en radianes) desde una línea vertical que se extiende hacia abajo a partir del eje del sistema, y θ_2 se mide desde una línea vertical que se extiende hacia abajo a partir del centro de la masa m_1. La dirección positiva es hacia la derecha y la negativa hacia la izquierda.

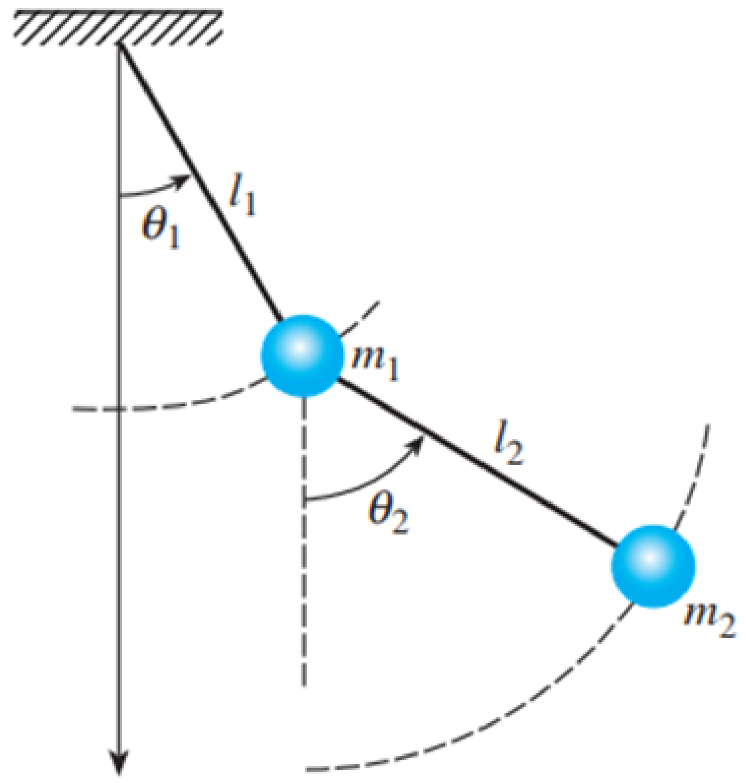


Figura 4.48 Péndulo doble

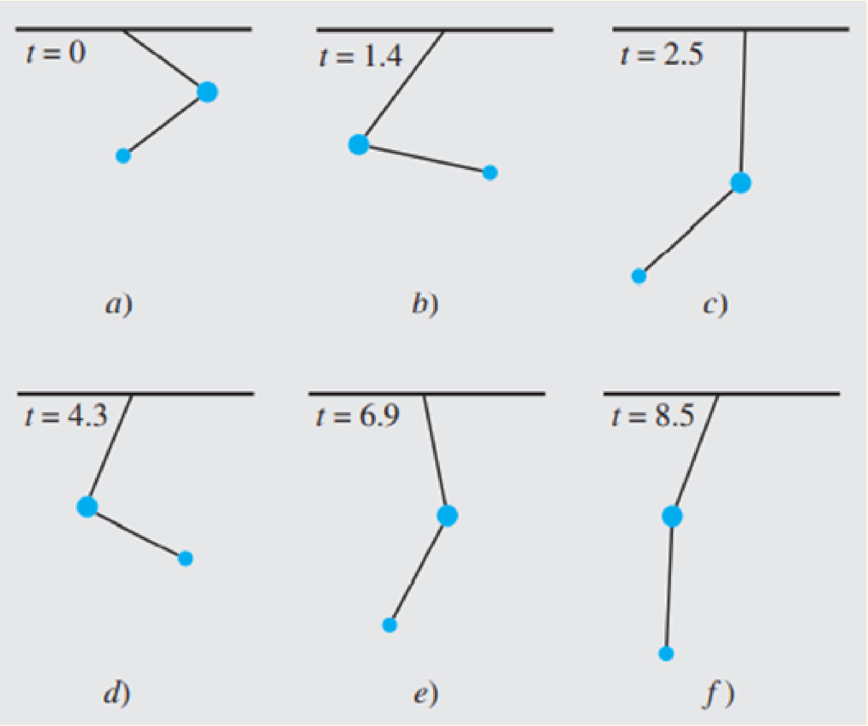
3.6 Aplicaciones de la Transformada de Laplace

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

Ejemplo: Péndulo Doble

Se deja como ejercicio completar los detalles mediante la transformada de Laplace para resolver el sistema (6) cuando $m_1 = 3$, $m_2 = 1$, $l_1 = l_2 = 16$, $\theta_1(0) = 1$, $\theta_2(0) = -1$, $\theta_1'(0) = 0$ y $\theta_2'(0) = 0$. Debe encontrarse que

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \frac{1}{4}\cos\frac{2}{\sqrt{3}t}t + \frac{3}{4}\cos 2t\\ \theta_2(t) &= \frac{1}{2}\cos\frac{2}{\sqrt{3}}t - \frac{3}{2}\cos 2t.\end{aligned} \tag{7}$$



Con ayuda de un CAS, se obtuvieron las posiciones de las dos masas en $t = 0$ y en los momentos siguientes que se muestran en la figura 4.49.