Задача 4 (Кинетика социального неравенства и предельные формы). а)** В некотором городе живет $N \gg 1$ жителей (четное число). В начальный момент у каждого жителя имеется по $\bar{s}$ монеток. Каждый день жители случайно разбиваются на пары. В каждой паре жители скидываются по монетке (если один или оба участника банкроты, то банкрот не скидывается, в то время, как не банкрот, в любом случае, обязан скинуть монетку). Далее в каждой паре случайно разыгрывается победитель, который и забирает "призовой фонд". Обозначим через $c_s(t)$ – долю жителей города, у которых ровно s ($s = 0,...,\bar{s}N$) монеток на t-й день. Покажите, что

$$\exists\ a > 0:\ \forall\ \sigma > 0, t \ge a(\bar{s})\ln N \to P\left(\left\|c(t) - c^*\right\|_2 \ge \frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{\ln\left(\sigma^{-1}\right)}}{\sqrt{N}}\right) \le \sigma,$$

$$\exists\ b, D > 0:\ \forall\ \sigma > 0, t \ge b(\bar{s})\ln N \to P\left(\left\|c(t) - c^*\right\|_1 \ge D\sqrt{\frac{\ln^2 N + \ln\left(\sigma^{-1}\right)}{N}}\right) \le \sigma,$$

где $c_s^* \simeq C\exp\left(-s/\bar{s}\right)$, а $C \simeq 1/\bar{s}$ находится из условия нормировки $\sum_{s=0}^{\bar{s}N} C\exp\left(-s/\bar{s}\right) = 1$. Таким образом, кривая (предельная форма) $C\exp\left(-s/\bar{s}\right)$ характеризует распределение населения по богатству на больших временах.

Указание. Для решения этой задачи полезно рассмотреть схожий процесс, в котором каждой паре жителей приписан свой (независимый) пуассоновский будильник (звонки происходят в случайные моменты времени, соответствующие скачкам пуассоновского процесса; параметр интенсивность этого пуассоновского процесса называют интенсивностью/параметром будильника). Все будильники "приготовлены" одинаково: у всех у них одна и та же интенсивность λN^{-1}. Далее следует погрузить задачу в модель стохастической химической кинетики с бинарными реакциями и воспользоваться результатом из замечания к задаче 19. Наиболее технически сложными моментами в получении указанного в условии задачи результата является оценка mixing time $\sim \ln N$ и получение поправки под корнем $\ln^2 N$. Насколько нам известно, пока это еще нигде аккуратно не обосновано.

Замечание. Название модели мы взяли из одноименной статьи К.Ю. Богданова[5] в журнале "Квант". В этой статье предлагаются и другие правила обмена. О возможных обобщениях этой модели также можно посмотреть в работах *Dragulescu A., Yakovenko*

[5] К.Ю. Богданов выпустил очень познавательную брошюрку "Прогулки с физикой" в серии "Библиотечка Квант", в которую вошел этот сюжет и многие другие. Также у К.Ю. Богданова мы позаимствовали идею одной из стохастических динамик, приводящих к модели хищник–жертва и системе уравнений Лотки–Вольтера, см. задачу 10.