

# Курсова робота

ст.гр 1СІ-07 Бондарчук О.В.

2 жовтня 2009 р.

## ЗМІСТ

1 Розділ перший . . . . .	3
1.1 Підрозділ перший . . . . .	3
1.1.1 Підпідрозділ перший . . . . .	3
2 Короткі теоретичні відомості . . . . .	6
2.1 Розв’язання диференціальних рівнянь . . . . .	6
2.2 Методи розв’язання задачі Коші . . . . .	7
2.2.1 Метод Ейлера . . . . .	8
2.2.2 Виправлений метод Ейлера . . . . .	9
2.2.3 Модифікований метод Ейлера . . . . .	10
2.2.4 Метод Рунге-Кутта . . . . .	10
2.3 Розв’язання диференціальних рівнянь вищих порядків . . . . .	11
2.4 Обчислення похибок . . . . .	12

## **1 РОЗДІЛ ПЕРШИЙ**

Цей документ створено для тестування latex-стилю для оформлення курсових робіт за вимогами ВНТУ.

На даний момент стиль підтримує тільки курсові роботи (ДСТУ 3008-95). В майбутньому (наступному триместрі) планується підтримка курсових проектів (ГОСТ 2.105-95), і написання документації.

### **1.1 Підрозділ перший**

Список того, що необхідно зробити, чи закінчити:

- а) підтримка бібліографії;
- б) підтримка нумерованих розділів (анотація, вступ, і т.п.);
- в) підтримка додатків;
- г) шаблони обов'язкових сторінок (титульний лист, обов'язкові додатки).

#### **1.1.1 Підпідрозділ перший**

Складний список згідно госту:

- а) перший рядок першого рівня містить достатньо довгий текст, що повинен перенестися на нову стрічку;
- б) другий рядок першого рівня містить:
  - 1) перший підрядок другого рядка;
  - 2) другий підрядок другого рядка також містить достатньо довгий текст, що повинен перенестися на нову стрічку;
  - 3) третій підрядок другого рядка:
- в) третій рядок третього рівня;
- г) 4;
- д) 5;
- е) 6;
- є) 7;
- ж) 8;
- з) 9;

- и) 10;
- і) 11;
- ї) 12;
- й) 13;
- к) 14;
- л) 15;
- м) 16;
- н) 17;
- о) 18;
- п) 19;
- р) 20;
- с) 21;
- т) 22;
- у) 23;
- ф) 24;
- х) 25;
- ц) 26;
- ч) 27;
- ш) 28;
- щ) 29;
- ю) 30;
- я) 31.

Текст після списку. Текст після списку. Текст після списку. Текст після списку. Текст після списку. Текст після списку. Текст після списку.

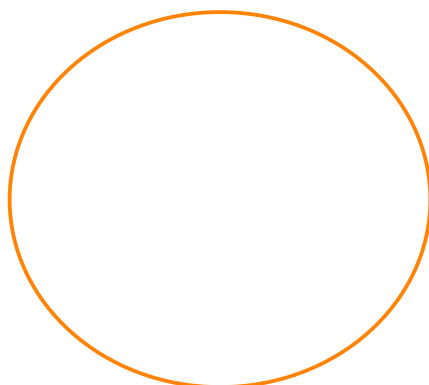


Рисунок 1.1 — Пример рисунка.

Метод Голда[?] ] получен из метода ван Циттерта[?] ], но с предположением, что действует он только для положительных чисел. Восстанавливает по следующему алгоритму[? ? ? ].

Порядок методу дорівнює  $p$ , якщо існує таке позитивне число  $c$ , що

$$\Delta \leq ch^{p+1}, \quad (1.1)$$

де  $\Delta$  — локальна похибка на кроці;

$h$  — крок дискретизації;

$p$  — порядок методу.

Текст після формули. Текст після формули. Текст після формули. Текст після формули. Текст після формули.

## 2 КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

### 2.1 Розв'язання диференціальних рівнянь

Диференціальні рівняння — розділ математики, який вивчає теорію та способи розв'язування рівнянь, що містять шукану функцію та її похідні різних порядків одного аргументу (звичайні диференціальні) чи кількох аргументів (диференціальні рівняння в частинних похідних). Диференціальні рівняння широко використовуються на практиці, зокрема для опису перехідних процесів.

Теорія диференціальних рівнянь — розділ математики, що займається вивченням диференціальних рівнянь і пов'язаних з ними задач. Їх результати застосовуються в багатьох природничих науках, особливо широко — у фізиці.

Простіше кажучи, диференціальне рівняння — це рівняння, в якому невідомою величиною є деяка функція. При цьому, в самому рівнянні бере участь не тільки невідома функція, але й різні її похідні. Диференціальним рівнянням описується зв'язок між невідомою функцією та її похідними. Такі зв'язки віднаходяться в різних областях знань: у механіці, фізиці, хімії, біології, економіці та ін.

Розрізняють звичайні диференціальні рівняння і диференціальні рівняння в частинних похідних. Більш складними є інтегро-диференціальні рівняння.

Звичайні диференціальні рівняння — це рівняння виду:

$$F(t, x, x', x'', x^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

де  $x = x(t)$  — невідома функція (можливо, вектор-функція; в такому випадку часто говорять про систему диференціальних рівнянь), що залежить від змінної часу  $t$ , штрих означає диференціювання по  $t$ . Число  $n$  називається порядком диференціального рівняння.

У випадку, коли додаткові умови задаються при одному значенні незалежної змінної, має місце задача Коші (задача з початковими умовами). Якщо умови задаються для двох або більше значень незалежної змінної, то задача стає крайовою. У задачі Коші додаткові умови називаються початковими, а у крайовій задачі — граничними. При розв'язанні цих задач використовуються

різні методи і алгоритми.

Задачу Коші можна сформулювати таким чином.

Нехай дано диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2.2)$$

Потрібно знайти функцію на відрізку від  $x = a$  до  $x = b$ , що задовольняє як рівняння (2.2), так і початкову умову  $y(a) = y_0$  (при цьому завжди припускається, що існує єдиний розв'язок на всьому відрізку).

Задача, що полягає в розв'язанні звичайного диференціального рівняння при додаткових умовах, які поставлені при декількох значеннях незалежної змінної, називається крайовою. Постановки і методи розв'язання рівнянь більш високих порядків аналогічні.

## 2.2 Методи розв'язання задачі Коші

Основою чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь слугує розкладання функції  $y$  в ряд Тейлора в околі початкової точки:

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2}h^2y''(x_0) + \dots \quad (2.3)$$

де  $h$  — відстань (крок) між початковою точкою  $x_0$  і точкою  $x_1 = x_0 + h$ , в якій відшукується розв'язок.

В різних методах враховується різна кількість членів розкладання (в багатокрокових методах в поєднанні з інтерполяційними формулами), що визначає точність обчислень. При використанні цих методів на ЕОМ слід розрізняти похибки округлення через обмеженість кількості значущих цифр в ЕОМ; похибка зрізання (обмеження) — методична похибка, що пов'язана з апроксимацією розв'язків скінченними рядами, замість нескінченних, наприклад, а.

Внаслідок цих причин виникають два види похибок:

а) локальна — сума похибок, що вносяться в обчислювальний процес на конкретному кроці;

б) глобальна (сумарна) — різниця між точним і обчисленим значеннями, яка включає так звану похибку розповсюдження внаслідок накопичення

помилку на попередніх етапах обчислення.

Порядок методу дорівнює  $p$ , якщо існує таке позитивне число  $c$ , що

$$\Delta \leq ch^{p+1}, \quad (2.4)$$

де  $\Delta$  — локальна похибка на кроці,  $h$  — крок дискретизації.

Число не залежить від номера кроку і його величини, а визначається похідними і довжиною інтервалу. При апроксимації розв'язання рядами Тейлора воно зв'язане зі степенем членів ряду, які відкидаються.

Методи розв'язання задачі Коші поділяють на однокрокові та багатокрокові.

В однокрокових методах для знаходження наступної точки на кривій  $y = f(x)$  потрібна інформація лише про один попередній крок (методи Ейлера і Рунге-Кутта).

В багатокрокових методах (прогнозу і корекції) для знаходження наступної точки на кривій  $y = f(x)$  потрібна інформація більш ніж про одну з попередніх точок. Щоб отримати достатньо точне чисельне значення часто використовується ітераційна процедура (наприклад, в методах Мілна-Адамса, Башфорта, Хеммінга).

### 2.2.1 Метод Ейлера

Найбільш простим однокроковим методом, який потребує мінімальних затрат обчислювальних ресурсів, але дає змогу обчислювати результат із порівняно низькою точністю, є метод Ейлера.

В цьому методі для оцінки наступної точки на кривій  $y=f(x)$  використовується лише один лінійний член в формулі Тейлора,

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0), \quad (2.5)$$

де  $y'(x)$  визначається з початкового рівняння.

Цей процес можна розповсюдити на наступні кроки:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n). \quad (2.6)$$



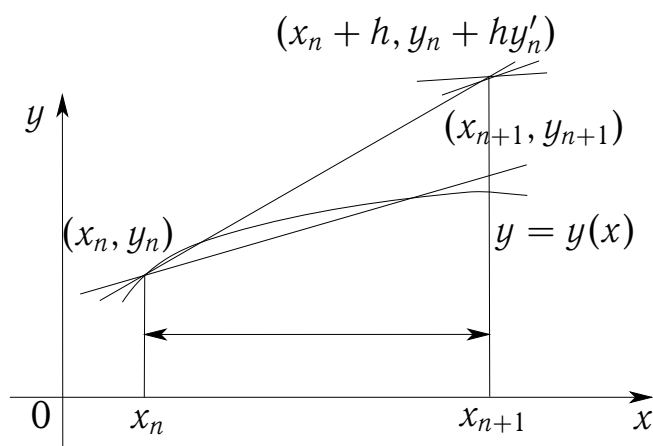


Рисунок 2.1 — Виправлений метод Ейлера

Метод Ейлера є методом першого порядку ( $p = 1$ ):

$$\Delta \leq ch^2, \quad (2.7)$$

де  $c = (M_1 + M_0M_2)/2$ ,  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  — визначаються як:

$$\begin{aligned} M_0 &\geq |f(x, y)|, \\ M_1 &\geq \left| \frac{df(x, y)}{dx} \right|, \\ M_2 &\geq \left| \frac{df(x, y)}{dy} \right|, \end{aligned} \quad (2.8)$$

для всіх  $x \in [a, b]$  і  $y = y(x)$ .

Метод Ейлера, крім значної похибки зрізання часто буває нестійким (малі локальні помилки призводять до значного збільшення глобальної).

Цей метод можна вдосконалити різними способами.

### 2.2.2 Виправлений метод Ейлера

Ітераційні формула для цього методу має вигляд:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))) \quad (2.9)$$

Графічне зображення методу подане на рисунку 2.1.

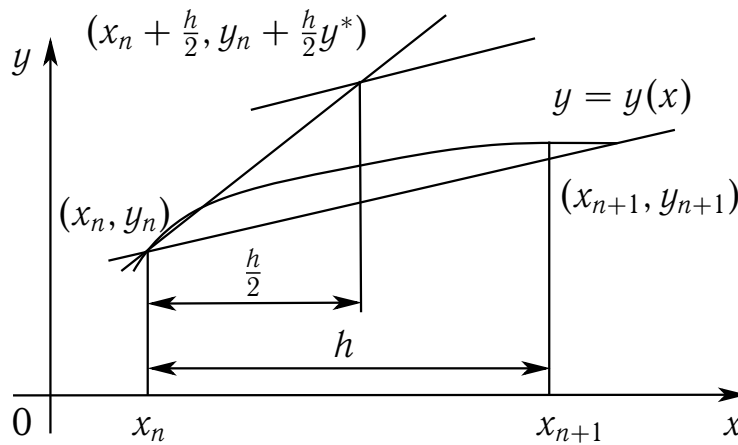


Рисунок 2.2 — Модифікований метод Ейлера

### 2.2.3 Модифікований метод Ейлера

Ітераційні формула для цього методу має вигляд:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))) \quad (2.10)$$

Графічне зображення методу подане на рисунку 2.2.

Принцип, на якому побудований модифікований метод Ейлера, можна пояснити, користуючись рядом Тейлора і зберігаючи в ньому член з  $h^2$ . Апроксимація другої похідної  $y''(x_0)$  здійснюється кінцевою різницею:

$$y''(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x_0 + h) - y'(x_0)}{h} \quad (2.11)$$

Аналогічно обчисленню другої похідної в кінцево-різницевому вигляді можна обчислити більш високі похідні: значення  $n$ -ї за значеннями попередньої  $(n - 1)$ -ї.

### 2.2.4 Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге-Кутта дає набір формул для обчислення координат внутрішніх точок, які потрібні для реалізації цієї ідеї. Оскільки існує ряд способів знаходження цих точок, то метод Рунге-Кутта об'єднує цілий клас методів для розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку.

Найбільш розповсюджений класичний метод четвертого порядку точно-

сті:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3}{6}, \quad (2.12)$$

де

$$\begin{aligned} k_0 &= hf(x_n, y_n); \\ k_1 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_0}{2}\right); \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right); \\ k_3 &= hf(x_n + h, y_n + k_2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Метод Ейлера і його модифікації ще називають методами Рунге-Кутта першого і другого порядку. Метод Рунге-Кутта має значно більш високу точність, що дозволяє збільшити крок розв'язання. Його максимальну величину визначає припустима похибка. Такий вибір часто здійснюється автоматично і включається як складова частина в алгоритм, побудований за методом Рунга-Кутта.

### 2.3 Розв'язання диференціальних рівнянь вищих порядків

Будь-яку з формул Рунге-Кутта можна використовувати для розв'язання диференціальних рівнянь вищих порядків і систем диференціальних рівнянь. Рівняння порядку  $n$  можна звести до  $n$  диференціальних рівнянь першого порядку.

Як приклад розглянемо розв'язання звичайного диференціального рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right). \quad (2.14)$$

Введемо заміну  $z = \frac{dy}{dx}$ , тоді  $\frac{dz}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ , а рівняння (2.14) прийме вигляд системи:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = g(x, y, z); \\ \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \end{cases} \quad (2.15)$$

де  $f(x, y, z) = z$ .

Задача Коші в цьому випадку містить дві початкових умови:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0; \\ z(x_0) = y'(x_0) = z_0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.15) отримаємо розв'язок диференціального рівняння (2.14), що задовольнятиме задані початкові умови (2.16).

## 2.4 Обчислення похибок

В розділі 2.2.1 було зазначено, що помилка зрізання при використанні методів Рунге-Кутта  $n$ -го порядку визначається за формулою (2.7). Обчислення верхніх границь для коефіцієнта  $c$  являє собою складну задачу, пов'язану з необхідністю оцінки ряду додаткових параметрів. Існує декілька способів для оперативного обчислення. Найбільшого поширення набув екстраполяційний метод Річардсона (ще його називають методом Рунге), коли послідовно знаходять значення  $y_n$  з кроком  $h$  і з кроком  $\frac{h}{2}$ , а після цього прирівнюють отримані величини та визначають  $c$  з рівняння:

$$y = y_n^{(h)} + ch^{p+1} = y_n^{(\frac{h}{2})} + c \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1} \quad (2.17)$$

де  $y$  — точне значення на даному кроці.

Отримаємо оціночне співвідношення:

$$c = \frac{y_n^{(h)} - y_n^{(\frac{h}{2})}}{h^{p+1} - \left(\frac{h}{2}\right)^{p+1}} \quad (2.18)$$