

TP Chaines de Markov

18 octobre 2019

1 M. Shadock

M. Shadock peut être dans trois états : 1 (bonne santé), 2 (enrhumé), 3 (malade). Son état le jour $n + 1$ dépend de son état au jour n et pas des jours précédents : s'il est en bonne santé, il le reste le lendemain avec probabilité $\frac{5}{6}$, il devient malade avec probabilité $\frac{1}{12}$. S'il est malade, il le reste avec probabilité $\frac{3}{4}$ et devient en bonne santé avec probabilité $\frac{1}{4}$. S'il est enrhumé, il guérit avec probabilité $\frac{1}{4}$ et devient malade avec probabilité $\frac{1}{4}$.

Q 1 – Écrire la matrice de transition de la chaîne qui peut modéliser la situation. La chaîne est-elle *fortement connexe* ? *apériodique* ?

Q 2 – Implémenter une routine qui vérifie si une matrice donnée en argument est bien une matrice *stochastique*. Vérifier avec cette routine la matrice saisie.

Q 3 – Existe-t-il un état absorbant (puits) dans le graphe associé ? Comment se manifeste un tel état (puits) dans la matrice de transition ? Écrire une fonction qui vérifie, sur la matrice, si un état donné (en indice) est un état puits.

Q 4 – Afficher les probabilités dans le temps $\pi_i(t)$. Vous pouvez utiliser la commande `plot(t, pi)`. Vous pouvez implémenter la fonction `simulation`, `[t, pi] = simulation(P, pi0, duree)` qui prend en entrée la matrice stochastique P , le vecteur stochastique *initial* $\pi(0)$, la durée totale de la simulation (un entier) et renvoie le couple `[t, pi]`. Le vecteur `t` contient tous les entiers $0 \leq n \leq \text{duree}$ et la matrice `pi` contient, pour tous ces instants n , le vecteur (ligne) stochastique $\pi(n)$.

Q 5 – Déterminer la probabilité invariante (stationnaire) π^* en résolvant l'équation linéaire $\pi = \pi P$, autrement dit, $(\text{Id} - P')\pi' = 0$, où P' désigne la matrice transposée de P et π' le vecteur (colonne) transposé de π .

Vous pouvez utiliser

- la fonction `eye(n)` de la bibliothèque `numpy` qui retourne la matrice *identité* de taille n .

2 M. Shadock : ergodicité

On souhaite tester numériquement la propriété d'ergodicité d'une chaîne de Markov : il existe une unique distribution stationnaire π^* telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n) = \pi^*,$$

et cela pour tout vecteur initial $\pi(0)$.

Pour calculer $\pi(n) := \pi(0)P^n$ pour de grandes valeurs de l'entier n , on utilise la fonction `eig` de `linalg` dans la bibliothèque `numpy` qui retourne

- la matrice *diagonale* $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Les nombres complexes $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont appelés les *valeurs propres* de P .
- les colonnes de la matrice V sont les *vecteurs propres* de P . Rappelons que v est un vecteur propre de la matrice P associé à la valeur propre λ si et seulement si $P = \lambda v$.

Q 6 – Vérifier que la matrice V est invertible et que $P = V.D.V^{-1}$. En déduire que $P^n = V.D^n.V^{-1}$ avec $D^n := \text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n, \lambda_3^n)$.

Q 7 – Vérifier que $\lambda = 1$ est une valeur propre et que les autres valeurs propres sont des nombres dont le module $0 \leq |\lambda| < 1$. Que devient la matrice diagonale D^n lorsque l'entier $n \rightarrow \infty$? Calculer la matrice $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$.

Q 8 – On suppose que le premier janvier M. Shadock est en bonne santé. Quel vecteur π_0 correspond à cette loi initiale ? Prendre un vecteur π_0 de votre choix pour la loi initiale (la somme des probabilités doit quand même faire 1 !) Calculer le vecteur $\pi(n)$ au $n^{\text{ème}}$ jour pour $n = 5 ; 10 ; 50 ; 100$. Que peut-on déduire sur limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n)$?

Q 9 – Recommencer avec une loi π_0 différente et montrer que le vecteur $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(n)$ ne dépend pas de $\pi(0)$.

Q 10 – Pour étudier la rapidité de la convergence, il suffit d'ordonner les modules des valeurs propres par ordre décroissant et d'observer la 2ème valeur propre. Plus le module de la 2ème valeur propre est petit, plus la convergence est rapide. Pour observer ce phénomène, choisir différentes matrices P (voir les exercices du TD et les exemples fournis dans la fonction `exemple`) et afficher, pour chaque exemple, l'évolution dans le temps t du vecteur $\pi(t)$ et le module de la 2ème plus grande valeur propre en module (après la valeur propre 1).