Calcolo dell’esponente di Lyapunov più grande da una serie temporale

Seminario del corso di Dinamica non lineare

Alessandro Batignani

21 novembre 2023

Sommario

- Introduzione
- Algoritmo di Rosenstein et al.
- Applicazione al Sistema di Lorenz
- Conclusioni
- Bibliografia

Introduzione

Definizione: **attrattore strano**

Sia A un attrattore, ovvero attracting set e topologicamente transitivo rispetto a φ (G). Diciamo che A è un attrattore strano se è sensibile alle condizioni iniziali.

Domanda

Perchè un attrattore caotico viene chiamato **strano**?

Insiemi frattali

Gli attrattori caotici sono chiamati strani poichè spesso sono riconducibili a degli insiemi frattali.

- Gli **insiemi frattali** sono complesse forme geometriche con una struttura fine ad una scala arbitrariamente piccolo. Solitamente presentano un qualche grado di self-similarity;

Osservazione

Per quantificare la dimensione di un insieme frattale non vengono usate le considerazioni fatte per gli insiemi più basilari:
le curve hanno un grado di libertà ⇒ sono unidimensionali…

  - Vengono utilizzate delle nozioni di dimensione più generali.

Correlation dimension

Supponendo di avere un numero infinito di punti dello spazio delle fasi $\{\overrightarrow{X_i}\}_{i=1}^{+\infty}$

Definizione **Correlation dimension**

Dato l'integrale di correlazione $C(r) \equiv \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^{N} \theta\left(r - \left|\vec{X}_i - \vec{X}_j\right|\right)$,

nel limite $r \to 0$ si assume che $\mathrm{C}(r) \propto r^v$, dove v è chiamata correlation dimension.

Negli anni '90 l'algoritmo di Grassberger e Procaccia (GPA) per il calcolo di v era il metodo più popolare per quantificare il caos, in particolare veniva considerate una stima della complessità del sistema.

Criticità del GPA [1]

Tuttavia il GPA è *altamente sensibile* alle variazione di diversi parametri come:

- Numero di punti
- *Dimensione di embedding*
- *Ritardo ricostruito o lag*
- Rapporto tra segnale e rumore

Rosenstein et al. suggeriscono che gli esponenti di Lyapunov possano fornire una caratterizzazione più utile del caos un sistema caotico.

Gli esponenti di Lyapunov

Considerando dei sistemi dinamici regolari e assumendo le ipotesi del Multiplicative Ergodic Theorem:

Definizione **Esponente di Lyapunov**

Presi due punti nello spazio delle fasi separati da una distanza iniziale $||\delta\vec{x}(0)||$ infinitesimale, allora il seguente limite esiste ed è finito e definisce l'esponente di Lyapunov nella direzione $\delta\vec{x}(0)$:

$$\lambda(\delta\vec{x}(0)) = \lim_{t\to+\infty} \lim_{\delta\vec{x}(0)\to 0} \frac{1}{t} \ln \frac{||\delta\vec{x}(t)||}{||\delta\vec{x}(0)||}$$

In generale se il sistema dinamico è definito su $\mathbb{R}^n$ si avranno n esponenti di Lyapunov che compongono il cosiddetto spettro di Lyapunov $\{\lambda_1, ..., \lambda_\mathrm{n}\}$.

Inoltre tali quantità sono invarianti sotto una trasformazione liscia e non singolare dello spazio delle fasi.

Osservazione 1

Per $||\delta\vec{x}(0)||$ *sufficientemente piccola* e t *sufficientemente elevato* si avrà $\delta x(t) \sim e^{\lambda t} | \delta\vec{x}(0) |$, *se* $\lambda > 0$ allora traiettorie inizialmente vicine tendono ad allontarsi tra loro esponenzialmente;

Osservazione 2

Per il Multiplicative Ergodic Theorem il limite della slide precedente, per un $\delta\vec{x}(0)$ scelto randomicamente, fornisce l’esponente di Lyapunov maggiore (λ_1) con probabilità 1 [1];

⇒ se l’esponente di Lyapunov maggiore è positivo si avrà sensibilità alle condizioni iniziali;

Complicazioni nel contesto sperimentale

Esitono efficienti algoritmi che permettono di calcolare tutto lo spettro di Lyapunov a partire dalle equazioni che descrivono il sistema dinamico.

Problematiche

- Nelle situazioni sperimentali le leggi della dinamica non sono note;
- non sappiamo quali e quante siano le variabili che governano la dinamica;
  - spesso i dati sperimentali consistono in una serie temporale di una singola osservabile.

Metodo dei ritardi (pt. 1)

Il metodo dei ritardi è una procedura per la *ricostruzione* di un'orbita del sistema dinamico a partire da una serie temporale di N punti $\{s_1, \ldots, s_N\}$.

Per il nostro fine è sufficiente costruire un'orbita che possa essere mappata in quella vera, con una trasformazione liscia e non singolare.

La traiettoria ricostruita **X** può essere espressa con la seguente matrice
$\mathbf{X} = (\boldsymbol{X_1}\ \boldsymbol{X_2}\ \ldots \boldsymbol{X_M})^T$,
dove ogni riga $\boldsymbol{X_i}$ rappresenta lo stato del sistema all' i-esimo tempo di campionamento. Ogni $\boldsymbol{X_i}$ è dato dall'espressione
$\boldsymbol{X_i} = (\ s_i\ \ s_{i+J}\ \ldots\ s_{i+(m-1)J}\ )$,
dove *J* è il lag (un numero naturale) e *m* è la dimensione di embedding.
Quindi la matrice **X** ha dimensioni $M \times m$, e le costanti *m*, *M*, *J* e *N* sono legate dalla relazione
$M = N - (m-1)J$.

Metodo dei ritardi (pt. 2)

Il successo di tale procedura è supportato da una serie di teoremi (Takens, Saur,..) validi per serie temporali di lunghezza e precisione infinita:

se D la dimensione frattale dell'attrattore, allora una dimensione di embedding m > 2D è sufficiente per garantire un'*oppurtuna* orbita ricostruita (condizione di Takens [7]).

Considerazioni:

- Nella pratica è possibile *ricostruire l'attrattore* al di sotto della condizione di Takens.

- La scelta di J è una questione di natura sperimentale e influenza la ricostruzione dell'attrattore.

Algoritmo di Rosenstein et al.

Consente di calcolare l'esponente di Lyapunov maggiore di un sistema dinamico a partire da una serie temporale s(t) utilizzando il metodo dei ritardi.

Vantaggi di tale algoritmo [1]:

- affidabile per brevi serie temporali (condizione di Eckmann-Ruelle [2]);
- *semplice* da implementare;
- computazionalmente *veloce*;
- *robusto* alle variazioni dei suoi parametri caratteristici (es. J e m) ;

Condizioni di Eckmann-Ruelle*

Dato un generico punto P dello spazio ricostruito, si richiede che P abbia un numero considerevole di punti a *piccola* distanza da esso. In formule:

$$\Gamma(r) >> 1, \quad \rho \equiv \frac{r}{d} << 1$$

dove $\Gamma(r)$ è il numero di punti all'interno di una palla con raggio r e centrata in P, e d è il diametro dell'attrattore ricostruito. Considerando le condizioni su r e le assunzioni fatte in [5] possiamo scrivere $\Gamma(r) \approx \text{const.} \times r^{\nu}$;
supponendo che $\Gamma(d) \approx N$, si arriva all'espressione

$$\Gamma(r) \approx N \left(\frac{r}{d}\right)^{\nu}$$

Mettendo assieme il precedente risultato con le richieste iniziali si ha:

$$\log N \gg \nu \log \left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Ad esempio supponendo $\rho = 0.1$ si ottiene $N \gg 10^{\nu}$.

Scelta dei parametri m e J

- I teoremi di embedding non possono essere usati per la scelta di m

  ⇒ è necessario ripetere il metodo dei ritardi per differenti valori di *m*.

- La scelta del lag è una questione delicata e influenza la traiettoria ricostruita:

  - se J è *troppo piccolo* ⇒ i punti ricostruiti si dispongono lungo la bisettrice dello spazio di embedding;

  - se J è *troppo grande* ⇒ l'orbita ricostruita si ripiega nello spazio di embedding;

  ⇒ come compromesso viene scelto il valore di J per cui la funzione di autocorrelazione di s(t) decade a $1-\frac{1}{e}$.

Calcolo di λ_1 (pt. 1)

Non resta che calcolare l'esponente di Lyapunov maggiore per l'orbita ricostruita:

per ogni $\boldsymbol{X_j}$ viene trovato il proprio primo vicino $\boldsymbol{X}_k$ posto ad una distanza $d_j(0) = \min_{k\prime} \left\| \boldsymbol{X}_{k\prime} - \boldsymbol{X}_j \right\|$. Si richiede che il primo vicino soddisfi il seguente vincolo temporale:

$$|\mathrm{k} - j|\Delta t \geq T \ ,$$

dove Δt è l'intervallo di tempo tra campionamenti consecutivi s(t) e T è il *periodo medio dell'orbita.

Tale condizione consente di considerare $\boldsymbol{X}_j, \boldsymbol{X}_k$ come condizioni iniziali vicine di traiettorie differenti, evitando di trovare un esponente di Lyapunov nullo [3].

**Nota*

Il periodo medio dell'orbita è stato stimato come il reciproco della frequenza media dello spettro in potenza di s(t).

Calcolo di λ_1 (pt. 2)

Per iterazioni sufficientemente lunghe si assume che $d_j(\mathrm{i}) \sim C_j \mathrm{e}^{\lambda_1(\mathrm{i}\Delta t)}$, dove $d_j(\mathrm{i})$ è la distanza tra $\boldsymbol{X_j}$ e il suo primo vicino dopo un tempo $\mathrm{i}\Delta t$.
Facendo il logaritmo naturale della precedente espressione e considerando ciascun j, si ottiene un set di M rette parallele con pendenza proporzionale a λ_1:

$$\ln d_j(\mathrm{i}) \sim \ln C_j + \lambda_1(i\Delta t) \quad \forall j = 1, .., M;$$

Mediando le precedenti espressioni su j e poi eseguendo un fit lineare si ottiene il valore di λ_1.

Applicazione al Sistema di Lorenz

Il sistema dinamico preso in considerazione è il **sistema di Lorenz.** Per i seguenti valori dei parametri è presente un attrattore caotico:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x(R - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - bz$$

Valori dei parametri:

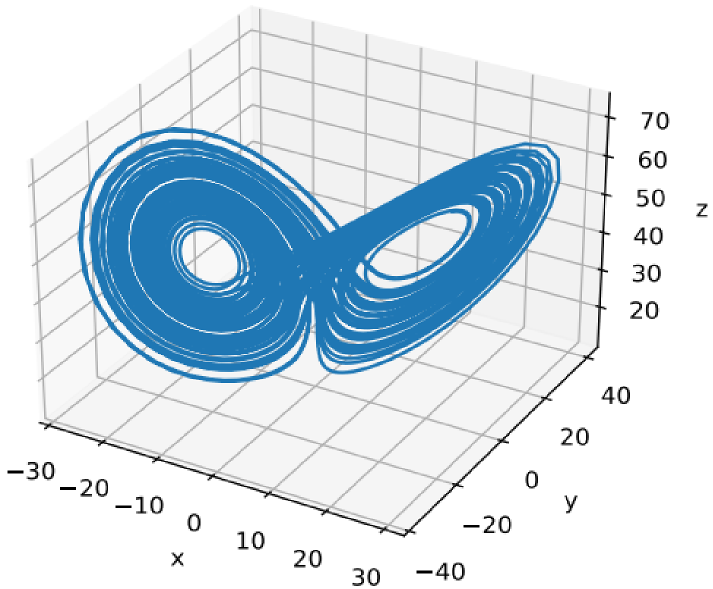
σ = *16.0*

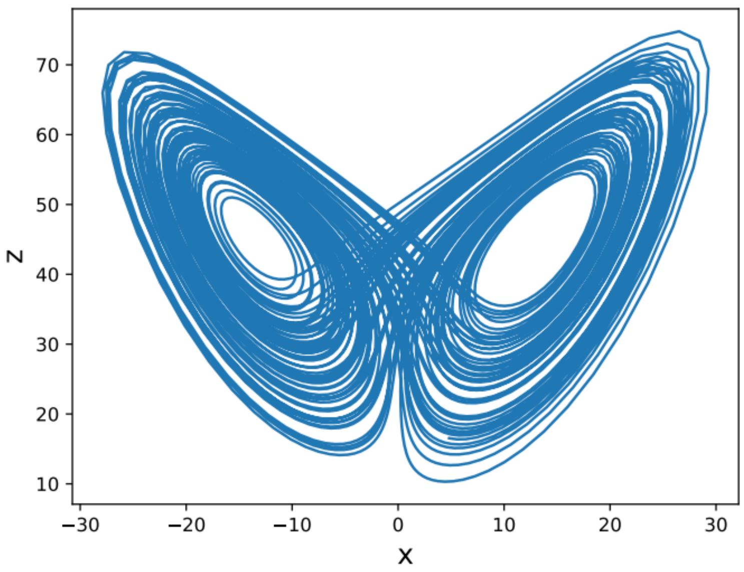
R = *45.92*

b = *4.0*

Esponente di Lyapunov maggiore *aspettato*:

λ_1= 1.5





Simulazioni

Metodologia

- Le simulazioni sono state effettuate utilizzando il linguaggio di programmazione Python (https://github.com/alebati3/nonlinear-dynamics-seminar);

- le equazioni differenziali sono state risolte numericamente utilizzando l'integrazione Runge-Kutta del 4° ordine con passo di integrazione Δt fisso (Δt =0.01 s);

  - la condizione iniziale è stata selezionata generando un punto casualmente con distribuzione uniforme nella regione [-30, 30] ×[-40, 40] ×[10, 70], che comprende l'attrattore;

  - i punti che fanno parte del transiente sono stati esclusi dall'analisi;

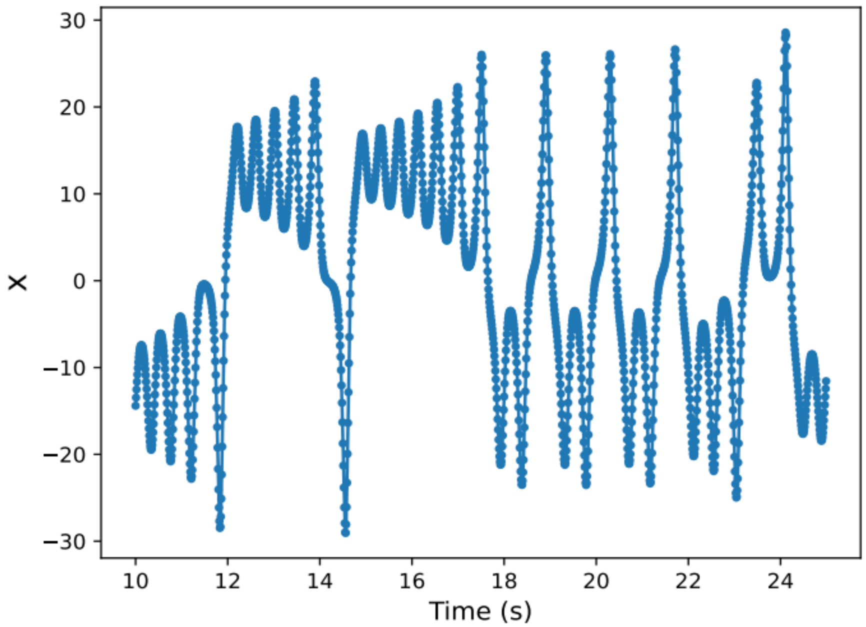
Convenzione

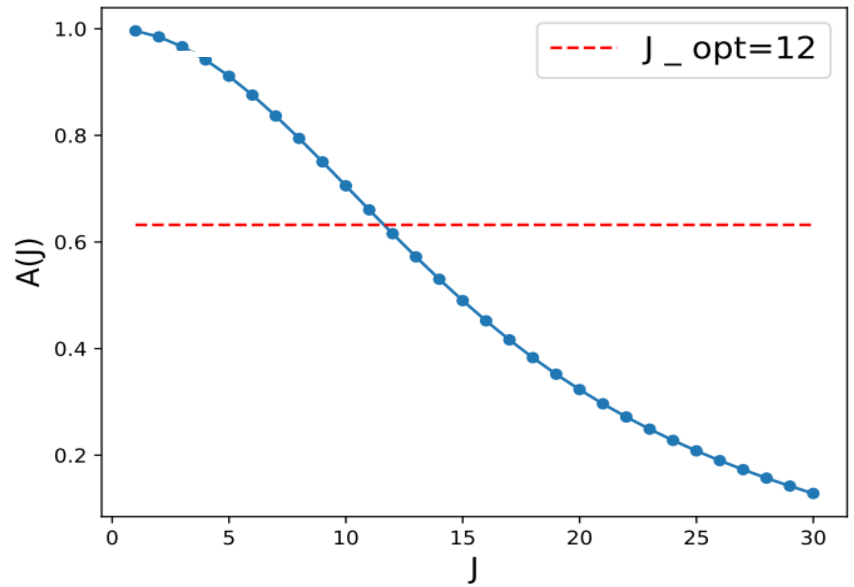
Ho scelto come serie temporale la coordinate x della traiettoria generata $\{x_1, . . ., x_N\}$.

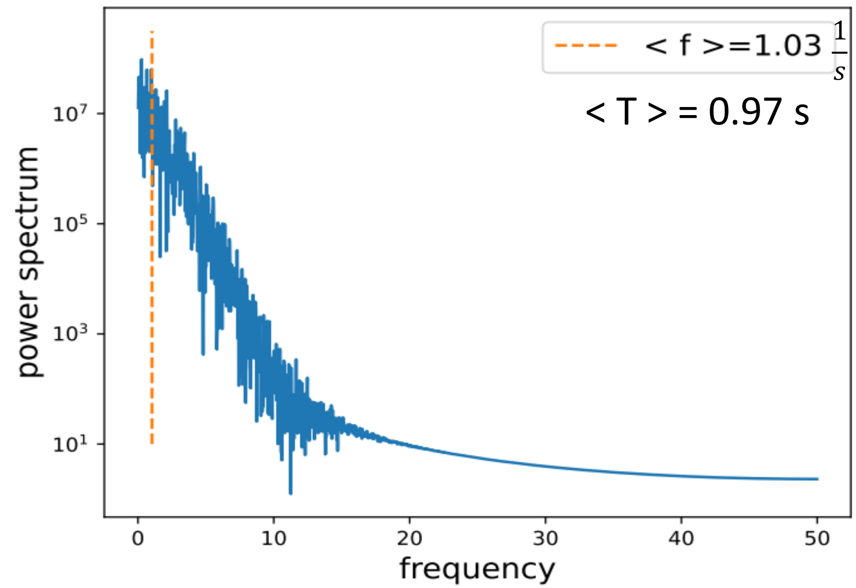
Serie temporale e grandezze associate

N=5000

Δt = 0.01 s

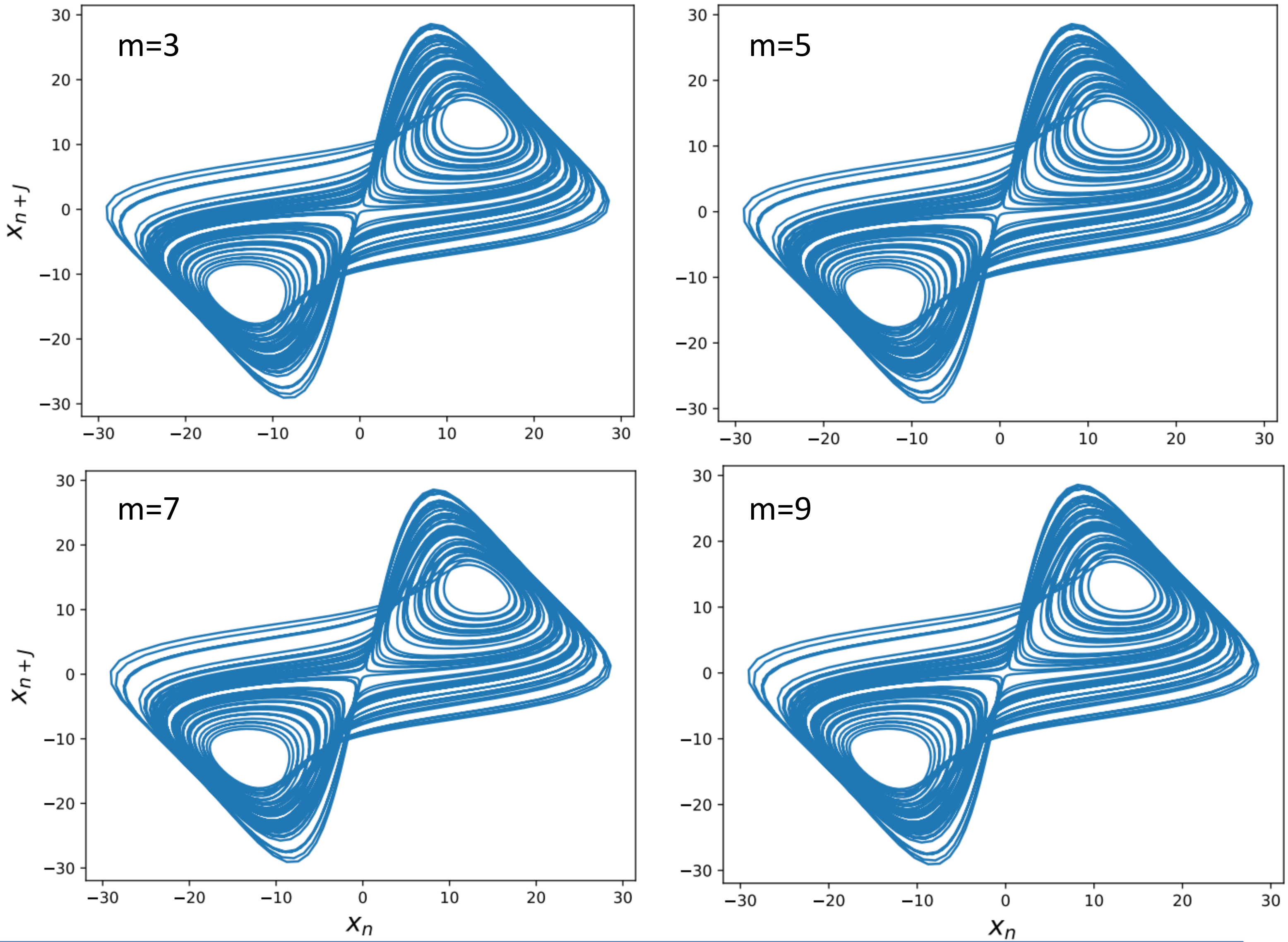






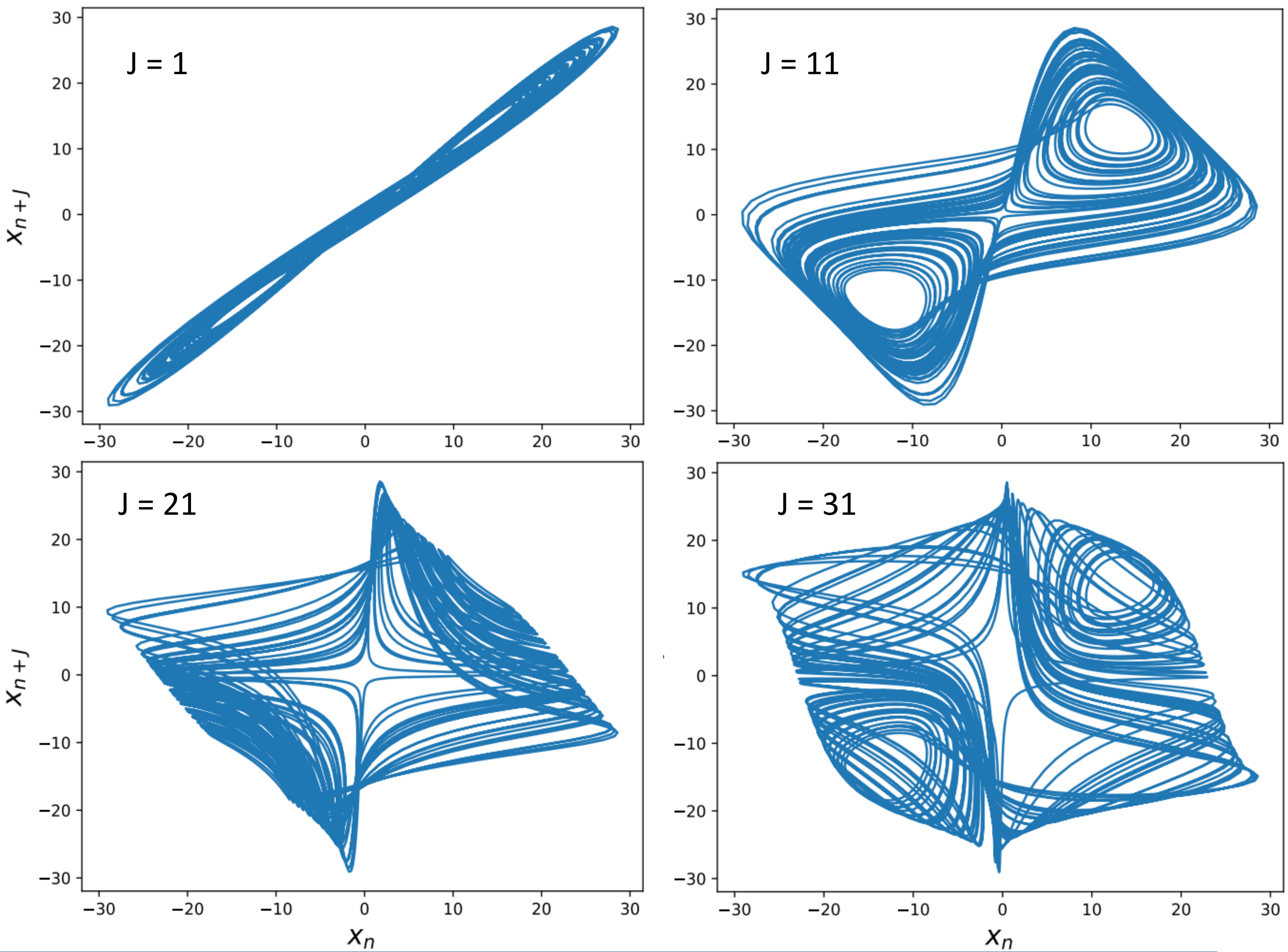
Ricostruzione dell’attrattore al variare di m

N=5000
Δt = 0.01 s
J=11



Ricostruzione dell'attrattore al variare di J

N=5000
$\Delta t = 0.01$ s
m=3



Andamento delle distanze d_j nel tempo

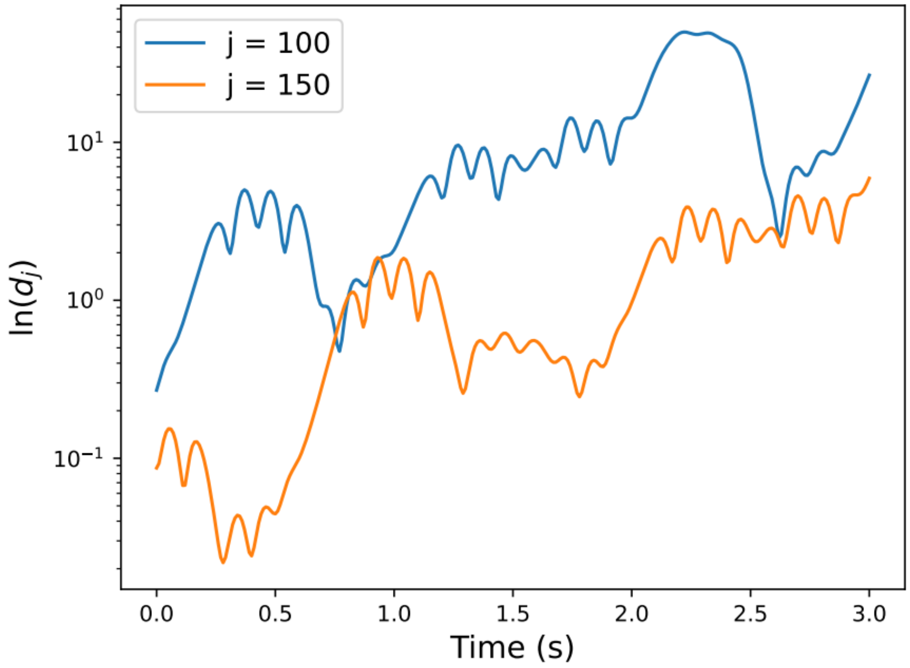
Facendo evolvere nel tempo $\boldsymbol{X_j}$ e il suo primo vicino, come varia nel tempo la distanza d_j?

Aspettativa :

per tempi *sufficientemente grandi* $d_j(\mathrm{i}) \sim C_j \mathrm{e}^{\lambda_1(\mathrm{i}\Delta t)} \Rightarrow \ln d_j(\mathrm{i}) \sim \ln C_j + \lambda_1(i\Delta t)$

Simulazione:

N=5000
Δt = 0.01 s
m=3
J=11



d_j ha un andamento rumoroso e irregolare

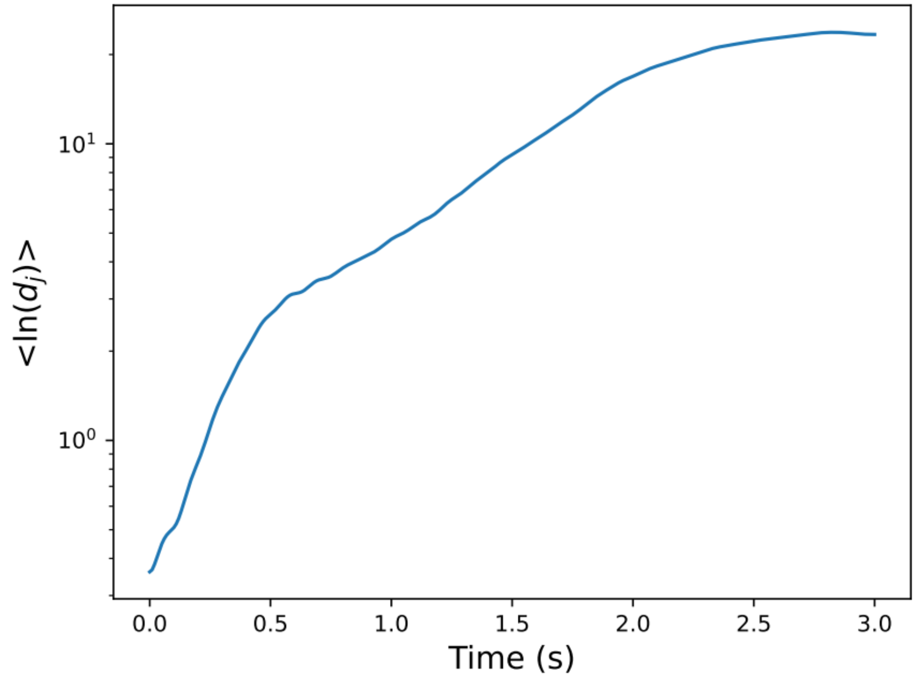
Andamento di $< d_j >$ nel tempo

Cosa succede facendo la media su *tutti* gli M punti?

Aspettativa:

per t sufficientemente grandi $< \ln d_j(\mathrm{i}) > \sim C + \lambda_1 (i\Delta t)$

Simulazione:



Osserviamo la presenza di 3 comportamenti differenti:

- un transiente
- una regione qualitativamente lineare
- una saturazione

Precisazione sull'evoluzione temporale

Per osservare l'andamento di d_j per un tempo $L = i \cdot \Delta t$ è necessario far evolvere $\boldsymbol{X_j}$ e il suo primo vicino per un tempo L.

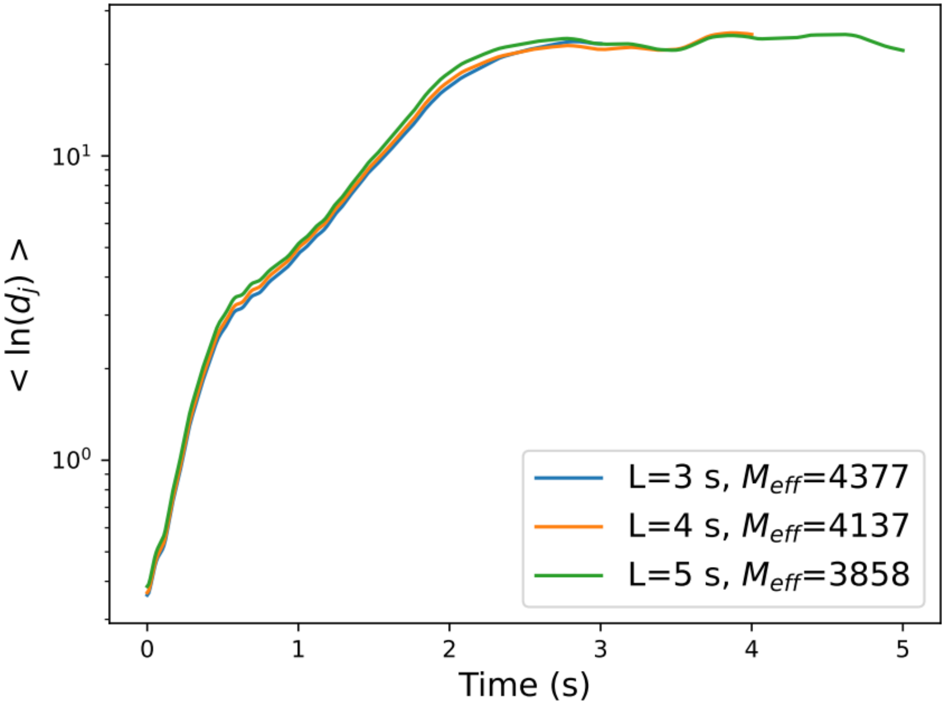
$\Rightarrow$ non possono prendere parte all'analisi i punti con indice $> M - i$

$\Rightarrow$ le distenze d_j che possiamo studiare sono $M_{eff} \leq M - i$

- Ho scelto L in modo da osservare l'inizio del plateau

Osservazione

- scegliere L più lunghi non incrementa la regione di interessa e diminuisce il numero di distanze a disposizione.



Criticità dell'approccio attuale

- La stima di λ_1 dipende dalla scelta dell'intervallo su cui eseguiamo il fit lineare.

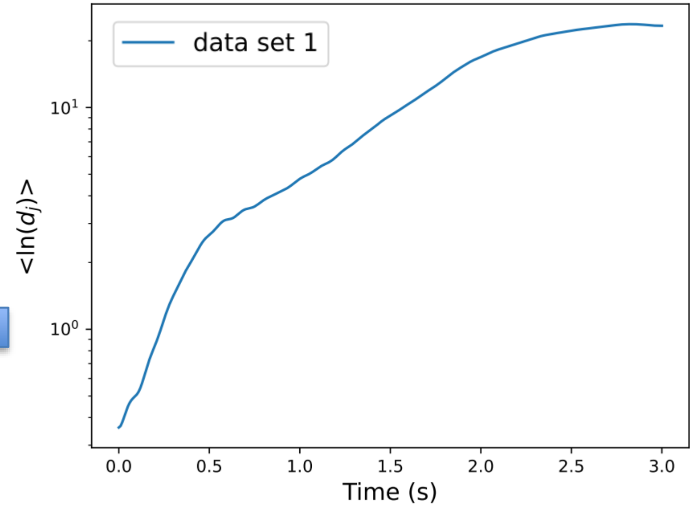
- La procedura adottata non tiene minimamente conto della *variabilità dei dati*
  - se avessi preso un'orbita differente?

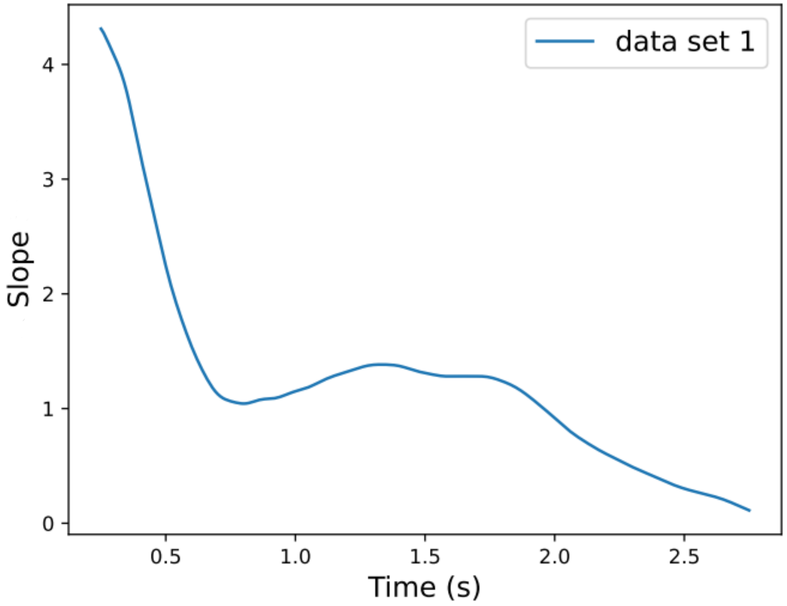
- Mancanza di un'incertezza associate alla stima di λ_1.

$\Rightarrow$ Vogliamo un approccio più consistente e che cerchi di limitare queste criticità.

Approccio di Abraham et al. (pt. 1) [6]

- Generiamo una singola serie temporale da 15000 per poi partizionarla in 3 data set disgiunti;
- Con ciascuna delle 3 serie temporali ottenute troviamo il grafico < ln(d_j(t))>
- Vogliamo calcolare una *derivata* di < ln(d_j(t))>



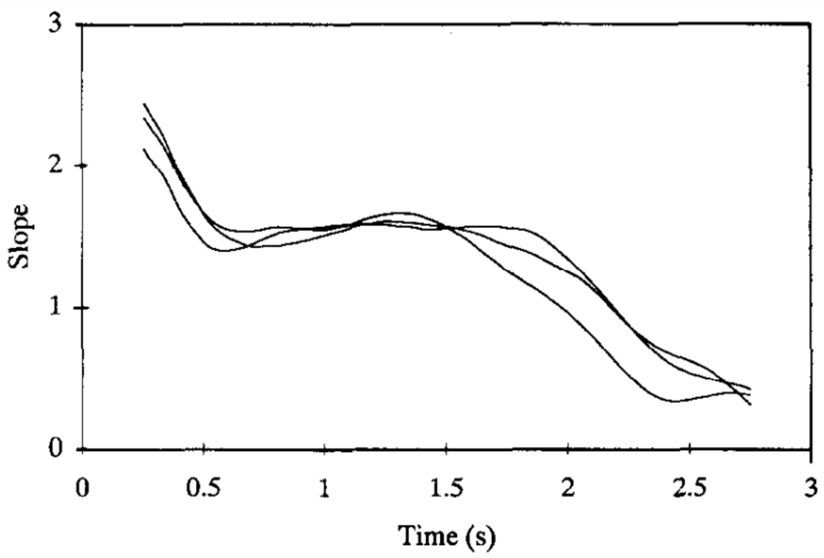


Δp=25 punti

Slope(i $\cdot \Delta t$) $\equiv$ coefficiente angolare ottenuto dal fit lineare eseguito nell'intervallo $[(\mathrm{i} - \Delta p) \cdot \Delta t\,, (\mathrm{i} + \Delta p) \cdot \Delta t]$

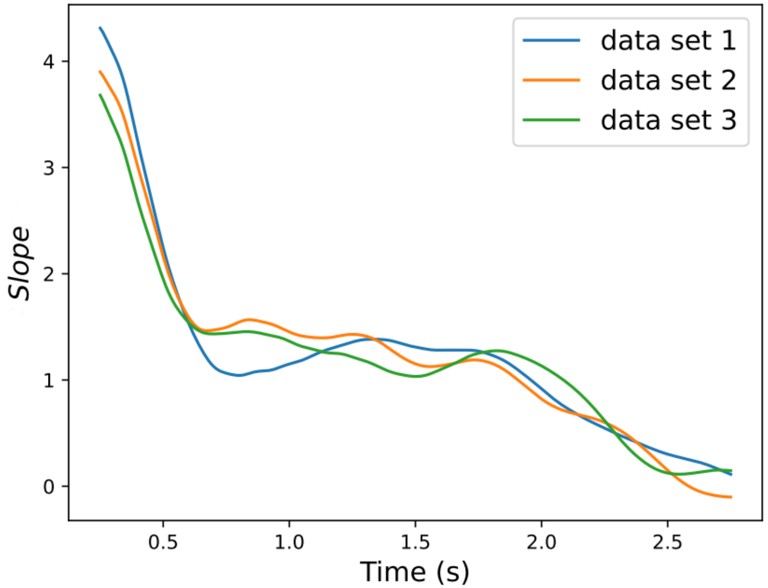
$2 \cdot \Delta p + 1$ è il numero di punti su cui viene eseguito il fit lineare.

Approccio di Abraham et al. (pt. 2)



Nel range [0.6 s, 1.6 s] le 3 curve presentano un plateau chiaro

⇒ è consistente estrarre il valore di λ_1 da questo intervallo!

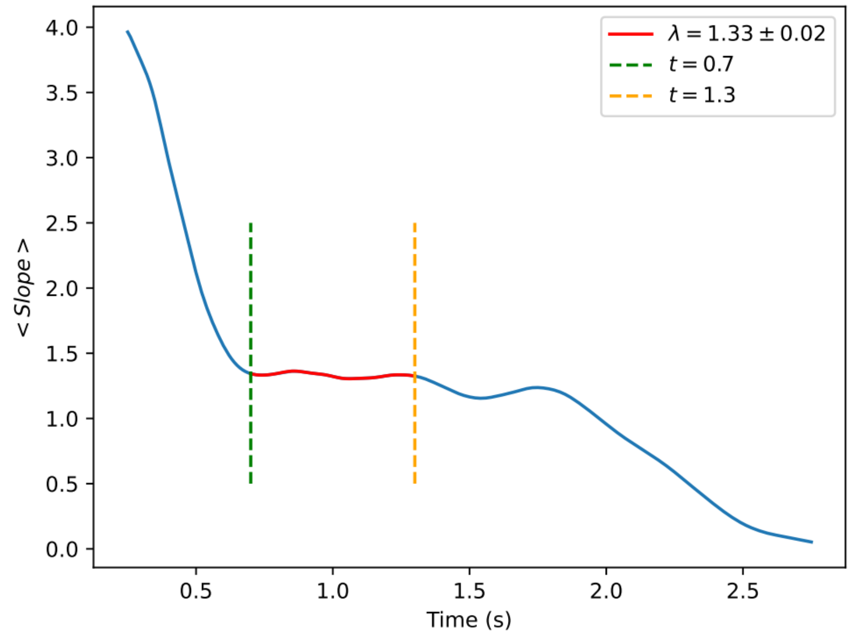


Nel mio caso non osservo alcun intervallo in cui è presente un plateau comune alle tre curve!

Domanda

Mediando le 3 curve cosa succede?

Possibile soluzione (pt. 1)



Osservazione

Se vogliamo ricavare una procedura per stimare λ_1 a partire della regione *piuttosto piatta* risulta comodo richiedere una condizione quantitativa:

dato un intervallo *I* e definita Δ<*Slope*> come

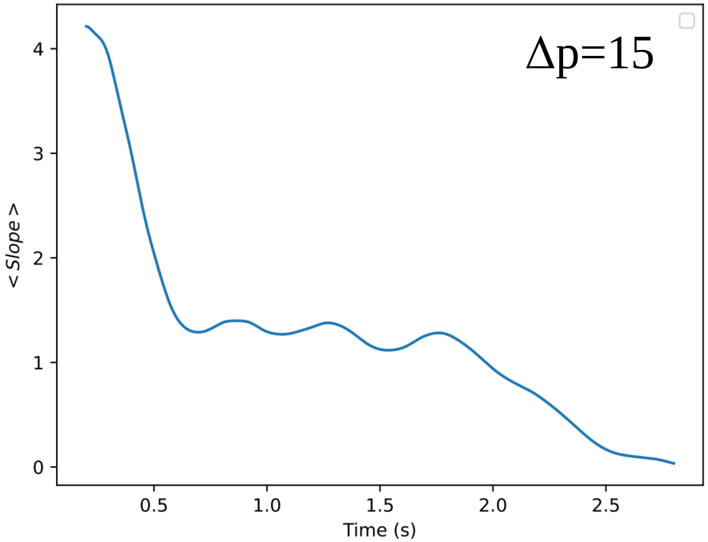
$$\Delta\langle Slope\rangle \equiv \max_I \langle Slope\rangle - \min_I \langle Slope\rangle,$$

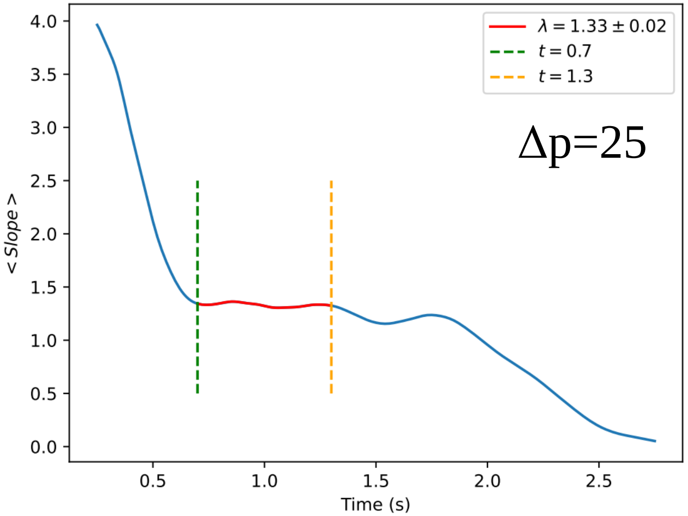
Si richiede che $\dfrac{\Delta\langle Slope\rangle}{\mathrm{media}_I\langle Slope\rangle}\% < 5\%.$

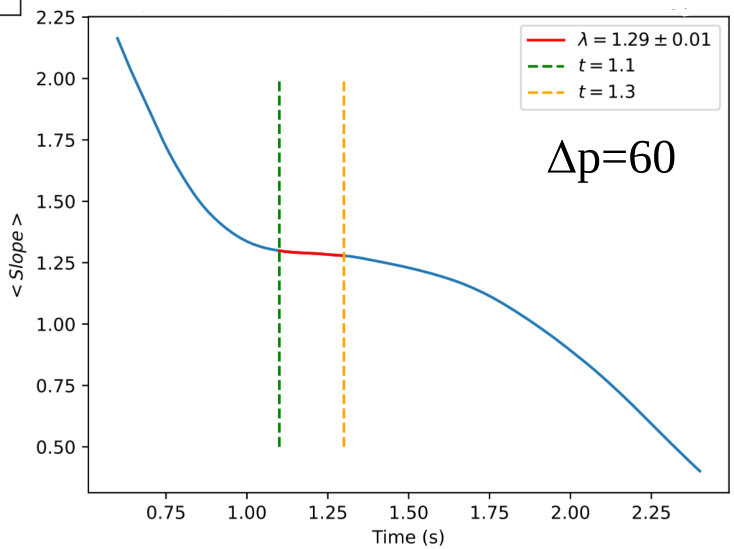
Una volta selezionato un opportuno intervallo I_C, λ_1 e l'incertezza associata $\Delta\lambda_1$ vengono stabilite facendo la media campione e deviazione standard di <*Slope*> su I_C.

Possibile soluzione (pt. 2)

La presenza di un I_C dipende dal valore di Δp.







Se Δp troppo grande tendiamo a sottostimare λ_1 e si reduce I_C.

Stima di λ_1 al variare di m

N=5000; Δt = 0.01 s; J=11; L = 3 s;

m	$\lambda_1 \pm \Delta\lambda_1$	$len(I_c)$
3	1.33 ± 0.02	0.5 s
5	1.30 ± 0.02	0.6 s
7	1.31 ± 0.02	0.35 s
9	$\times$	$\times$

Stima di λ_1 al variare di J

N=5000; Δt = 0.01 s; m=3; L = 3 s;

J	$\lambda_1 \pm \Delta\lambda_1$	$len(I_c)$
1	$\times$	$\times$
11	1.33 ± 0.02	0.5 s
21	1.21 ± 0.01	0.5 s
31	1.18 ± 0.01	0.35 s
41	$\times$	$\times$

Conclusioni

Commenti sull'approccio alternativo:

- consente di tener conto della variabilità dei dati.
- Fornisce una stima di λ_1 con un'*incertezza associata*.

- Le condizioni su I_C e la scelta di Δp sono opinabili.
- Richiede più tempo.
- Non sempre riesce a fornire una stima di λ_1.

Bibliografia (pt. 1)

- [1] A practical method for calculating largest Lyapunov exponent from small data sets.
  Michael T. Rosenstein, James J. Collins and Carlo J. De Luca, 1993

- [2] Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems.
  J.-P. Eckmann and D. Ruelle, 1992

- [3] At least one Lyapunov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point
  H. Haken, 1983

- [4] Ergodic theory of chaos and strange attractors.
  J.-P. Eckmann and D. Ruelle, 1985

Bibliografia (pt. 2)

- [5] Characterization of Strange Attractors.
  P. Grassberger and I. Procaccia, 1982

- [6] Calculating the dimension of attractor from small data sets.
  N.B. Abraham, A.M. Albano, B. Das, G. De Guzman, S. Yong, R.S. Gioggia, G.P. Puccioni and J.R. Tredicce , 1986

- [7] Nonlinear Time Series Analysis, 2nd edition.
  H. Kantz and T. Schreiber, 2004

- [8] Nonlinear Dynamics and Chaos, 2nd edition.
  S. Strogatz, 2014