

ANÁLISE DA DIFUSÃO DE UM POLUENTE EM UM RIO COM CORRENTEZA

Alessandra Blücher · Eric Fernando Otofui Abrantes · Jose Fernando de Melo Cruz

Insper Instituto de Ensino e Pesquisa

OBJETIVO

O objetivo deste documento é simular a difusão de um poluente em um rio usando diferenças finitas para solução numérica da Equação de Burgers por meio do desenvolvimento de um software em Python.

INTRODUÇÃO

A mecânica dos fluidos é uma área da engenharia dedicada a compreender, inferir e projetar a dinâmica de uma substância líquida, viscosa ou não, em determinado contexto. Isto engloba desde trivialidades como encanamentos até complexidades como a extração de petróleo. Navier-Stokes descreve por meio de complexas equações o escoamento de um fluido e a uma derivação para o caso de escoamento incompressível, plano e de viscosidade constante chamamos de Equação de Burgers (Rodrigues & Paiva, 2019). Com o objetivo de compreender melhor a mecânica dos fluidos para poder partir para aplicações como as dos exemplos, este estudo fará análise da difusão de um poluente em um rio com correnteza para estudo e compreensão das leis que regem esses fenômenos.

METODOLOGIA

Neste estudo, consideraremos as especificações dadas por Rodrigues & Paiva: considerando que um rio tem um campo de velocidades $u(x, y)$ e $v(x, y)$, definidos pelas equações 1 e 2:

$$u(x, y) = \alpha; \quad (\text{eq. 1})$$

$$v(x, y) = \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5}x\right), \quad (\text{eq. 2})$$

e a Equação de Burgers, definida pela equação 3:

$$\frac{\partial C(x, y, t)}{\partial t} + u(x, y) \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y} - k \frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial y^2} = \dot{q}_c, \quad (\text{eq. 3})$$

onde k é o coeficiente de difusão e \dot{q}_c é o termo de geração tal como apresentado pela equação 4:

$$\dot{q}_c = \frac{\dot{Q}}{\Delta x \cdot \Delta y}, \quad (\text{eq. 4})$$

com as condições de contorno definidos nas equações de 5 a 8:

$$C(x_0, y, t_k) = C(x_1, y, t_k) \quad (\text{eq. 5})$$

$$C(x_{final}, y, t_k) = C(x_{final-1}, t_k) \quad (\text{eq. 6})$$

$$C(x, y_0, t_k) = C(x, y_1, t_k) \quad (\text{eq. 7})$$

$$C(x, y_{final}, t_k) = C(x, y_{final-1}, t_k) \quad (\text{eq. 8})$$

Para cada iteração, caso ocorra de alguma concentração ter valor negativo, esta deve ser atualizada para zero. O primeiro tomado foi uma aproximação analítica antes da implementação do software. Para isso, as derivadas da equação de Burgers (eq. 3) foram substituídas por meio de aproximações de diferenças finitas. Isto foi feito usando a diferença central para as derivadas em x e y e diferença avançada para a derivada no tempo, de acordo com a demonstração abaixo na equação 9:

$$\frac{C_{i,j}^{l+1} - C_{i,j}^l}{\Delta t} = \dot{q} - u(x, y) \left(\frac{C_{i+1,j}^l - C_{i-1,j}^l}{2\Delta x} \right) - v(x, y) \left(\frac{C_{i,j+1}^l - C_{i,j-1}^l}{2\Delta y} \right) + k \left(\frac{C_{i+1,j}^l - 2C_{i,j}^l + C_{i-1,j}^l}{\Delta x^2} \right) + k \left(\frac{C_{i,j+1}^l - 2C_{i,j}^l + C_{i,j-1}^l}{\Delta y^2} \right) \quad (\text{eq. 9})$$

A partir da equação 9, é possível manipulá-la algebricamente para encontrar a expressão da concentração em um ponto genérico (x, y) no instante futuro $t + 1$ em função das concentrações no instante atual t , de acordo com a equação 10, demonstrada a seguir:

$$C_{i,j}^{l+1} = C_{i,j}^l + \Delta t \left(\dot{q} - u \left(\frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) - v \left(\frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2\Delta y} \right) + k \left(\frac{C_{i+1,j} - 2C_{i,j} + C_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right) + k \left(\frac{C_{i,j+1} - 2C_{i,j} + C_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \right) \quad (\text{eq. 10})$$

Esta dedução permitiu a implementação do software para análise da difusão de um poluente em um rio com correnteza com as especificações de Rodrigues & Paiva.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considerando $k = 1 \frac{m^2}{s}$, $a = 1 \frac{m}{s}$, $t = 3s$, $\dot{q} = 100 \frac{kg}{ms}$, $l_x = 30m$, $l_y = 20m$, $a = \frac{10}{1.4}$ e $b = \frac{60}{15}$, foi feita simulação na implementação, que tem por saída uma animação em GIF que representa a variação da concentração, difusão e movimento ao longo de um plano cartesiano em relação ao tempo. Devido à natureza dinâmica do resultado, não é possível inclui-la neste resumo expandido devido à limitação deste formato de documento. A animação e o arquivo-fonte do software são anexos a este documento. Alternativamente, é possível visualizá-lo no Giphy através do seguinte link: <https://gph.is/g/ZdxARn3>. É importante ressaltar que o GIF está com períodos saltados devido a limitações da plataforma Giphy, mas a animação gerada pelo software é com passos menores do que no GIF.

Por meio da variação do coeficiente de difusão k na implementação, foi possível compreender a sensibilidade deste coeficiente no transporte do poluente no rio. Por meio do incremento do referido coeficiente, a consequência observada é o aumento em sua difusão, ou seja, maior espalhamento do poluente no rio para maior valor de k . Isto pode ser observado pela figura 1, onde, à esquerda, temos um valor $k = 0,5$ (<https://gph.is/g/4V6eYkR>) e, à direita, temos um valor de $k = 2$ (<https://gph.is/g/ajmrzzx>). No meio, o valor $k = 1$ usado na resposta anexa a este documento, apresentado no link do parágrafo anterior.

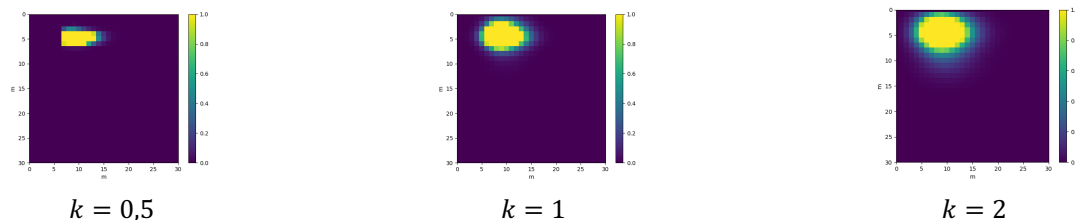


Figura 1. Demonstração da influência do coeficiente k de difusão na sensibilidade no transporte do poluente no rio.

CONCLUSÕES

A partir deste estudo e da implementação do software, foi possível desenvolver compreensão a respeito da temática de mecânica dos fluidos, por meio da Equação de Burgers. Também foi possível entender a influência do coeficiente k de difusão na sensibilidade no transporte do poluente no rio. Estas duas realizações fazem cumprir o objetivo primário deste estudo de simular a difusão de um poluente em um rio usando diferenças finitas para solução numérica da Equação de Burgers por meio do desenvolvimento de um software em Python.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

RODRIGUES, C. F.; PAIVA, V. A. S. M. APS 5: análise da difusão em um rio com correnteza. Insper, 2019.