

Compléments de mathématiques

Sommations

$$\sum_{k=m}^n r^k = r^m \frac{1 - r^{n-m+1}}{1 - r} \quad \sum_{k=0}^{\infty} kv^k = \frac{v}{(1-v)^2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Mathématiques financières

Intérêt simple

$$a(t) = 1 + it \quad v(t) = \frac{1}{1 + it}$$

$$\text{Prix} = 100 \left(1 - \frac{it}{365} \right)^{-1}$$

facteurs d'actualisation et d'accumulation

$$a(t) = (1 + i)^t \quad v(t) = (1 + i)^{-t}$$

$$= (1 - d)^{-t} \quad = (1 - d)^t$$

$$= e^{\int_0^t \delta_s ds} \quad = e^{-\int_0^t \delta_s ds}$$

Conversion de taux

$$d = \frac{i}{1 + i} \quad i^R = \frac{i - r}{1 + r}$$

Taux d'intérêt effectif annuel $i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^m - 1$

Taux d'intérêt nominal annuel $i^{(m)} = m \left((1 + i)^{1/m} - 1 \right)$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i^R} = \frac{1 - \left[\frac{1+r}{1+i} \right]^n}{i - r} (1 + i) \quad \ddot{s}_{\overline{n}|i^R} = \frac{(1 + i)^n - (1 + r)^n}{i - r} (1 + i)$$

Rentes constantes

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{(i^{(m)}|d^{(m)})} \quad \ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{(1 + i)^n - 1}{(i^{(m)}|d^{(m)})}$$

$$\ddot{a}_{\infty|} = \frac{1}{(i|d)}$$

Rentes continues

$$(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}|i} = \frac{\bar{s}_{\overline{n}|i} - n}{\delta} \quad (\bar{D}\bar{s})_{\overline{n}|i} = \frac{nv^n - \bar{s}_{\overline{n}|i}}{\delta}$$

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|i} = \frac{\bar{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{\delta} \quad (\bar{D}\bar{a})_{\overline{n}|i} = \frac{n - \bar{a}_{\overline{n}|i}}{\delta}$$

Rentes (dé)croissantes annuellement

$$(I^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} - nv^n}{(i|d^{(m)})} \quad (D^{(m)}\ddot{a})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{n - a_{\overline{n}|}^{(m)}}{(i|d^{(m)})}$$

$$(I^{(m)}\ddot{s})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(m)} - n}{(i|d^{(m)})} \quad (D^{(m)}\ddot{s})_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{n(1 + i)^n - s_{\overline{n}|}^{(m)}}{(i|d^{(m)})}$$

Rentes croissantes continûment

$$(I\ddot{a})_{\infty|} = \frac{1}{d(i|d)}$$

Paieement en continu, valeurs accumulée et actualisée

$$(\bar{I}\bar{s})_{\overline{n}|\delta_s, h(t)} = \int_0^n h(t) e^{\int_t^n \delta_s ds} dt$$

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|\delta_s, h(t)} = \int_0^n h(t) e^{-\int_0^t \delta_s ds} dt$$

Rentes avec croissance géométrique

T-Bills

$$\text{Prix} = 100 \left(1 - \frac{dt}{360} \right)^t$$

Obligations

Formule de base

P Prix de l'obligation

F Valeur nominale de l'obligation (*face value*)

r Taux de coupon par période de paiement (*coupon rate*)

i Taux d'intérêt par période de paiement (*interest rate*)

Fr Montant par paiement.

C Valeur de remboursement de l'obligation (*redemption value*)

$$P = Fra_{\overline{n}|i} + Cv^n$$

$$= C + (Fr - Ci)a_{\overline{n}|i} + v^n$$

Amortissement d'obligations

Book value

$$BV_t = (Fr - C)_{n-t}a_j + C$$