UNIVERSITÉ LAVAL
École d'actuariat

ACT - 2007
Mathématiques actuarielles vie II
Document de révision VIE I

David Beauchemin

29 mars 2017

Table des matières

Formules

1.1 Rappel des relations de la théorie des taux d'intérêt

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)a_{\overline{n}|}$$
$$i = \frac{d}{1-d} \Leftrightarrow d = \frac{i}{1+i}$$
$$\delta = ln(1+i)$$
$$\left(1+\frac{i^m}{m}\right)^m = 1+i = \frac{1}{1-d} = \left(1-\frac{d^m}{m}\right)^{-m} = e^{\delta}$$

1.2 Loi De Moivre

$$S_X(x) = 1 - \frac{x}{\text{ﬄ}\omega}$$
$${}_{t|u}q_x = \frac{u}{\omega - x}$$
$$\mu_x = \frac{1}{\omega - x}$$
$${}_tq_x = \frac{t}{\omega - x}$$

1.3 Notions supplémentaire sur les tables de mortalité

$$
\begin{aligned}
{}_nq_x &= \frac{{}_nd_x}{l_x} \\
{}_nP_x &= \frac{{}_nl_{x+n}}{{}_nl_x} \\
{}_nl_{x+n} &= {}_nl_x - {}_nd_x \\
{}_nd_x &= {}_nl_x - {}_nl_{x+n} \\
{}_nl_x &= \sum_{y=x}^{\infty} d_y
\end{aligned}
$$

Où d_x est le nombre de décès entre l'année x et x+1 et l_x correspond au nombre de survivant au début de l'année x.

Notions supplémentaires sur l'assurance vie

2.1 Assurance vie continue

2.1.1 Assurance vie temporaire n-années croissant annuellement

Versement d'une prestation de décès de 1\$ la première année, 2 \$ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à n\$.

$$(I\overline{A})_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \int_0^n ([t]+1)v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t} dt$$
$${}^2(I\overline{A})_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \int_0^n ([t]+1)^2 v^{2t} \times {}_tP_x \times \mu_{x+t} dt$$

2.1.2 Assurance vie entière croissant annuellement

Versement d'une prestation de décès de 1\$ la première année, 2 \$ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à $\omega - x$ \$.

$$(I\overline{A})_x = \int_0^{\omega-x} ([t]+1)v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t} dt$$
$${}^2(I\overline{A})_x = \int_0^{\omega-x} ([t]+1)^2 v^{2t} \times {}_tP_x \times \mu_{x+t} dt$$

2.1.3 Assurance vie temporaire n-années croissant m-fois par année

Versement d'une prestation de décès de $\frac{1}{m}$ \$ la première année, $\frac{2}{m}$ \$ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à n\$.

$$(I^{(m)}\overline{A})_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \int_0^n \frac{1}{m}([t \times m] + 1)v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$
$$^2(I^{(m)}\overline{A})_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \int_0^n \frac{1}{m}([t \times m] + 1)^2 v^{2t} \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$

2.1.4 Assurance vie temporaire n-années croissant continûment

Versement d'une prestation de décès de t \$ la première année, $\frac{2}{m}$ \$ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à n\$.

$$(\overline{IA})_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \int_0^n t \times v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$
$$^2(\overline{IA})_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \int_0^n tv^{2t} \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$

2.1.5 Assurance vie entière croissant pendant n-années

Verse une prestation comme une vie entière mais arrête à n-années et paye n jusqu'au décès.

$$(I_{\overline{n}|}\overline{A})_x = \int_0^n ([t] + 1)v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt + \int_n^{\omega-x} n \times v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$
$$(I_{\overline{n}|}\overline{A})_x = (I\overline{A})_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + n \times {}_{n|}\overline{A}_x$$

2.1.6 Assurance vie temporaire n-années décroissant annuellement

Versement d'une prestation de décès de n$ la première année, (n-1)$ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à 1$.

$$(D\overline{A})_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|} = \int_0^n (n-[t])v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$

2.1.7 Assurance vie temporaire n-années décroissant m-fois par année

Versement d'une prestation de décès de n $ la première année, $\frac{n-1}{m}$ $ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à $\frac{1}{m}$$.

$$(D^{(m)}\overline{A})_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|} = \int_0^n \Big(n - \frac{m \times t}{m}\Big)v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$

2.1.8 Assurance vie temporaire n-années décroissant continûment

Versement d'une prestation de décès de n $ la première année, $\frac{2}{m}$ $ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à 0$.

$$(\overline{DA})_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|} = \int_0^n (n-t)v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$
$${}^2(\overline{IA})_{\stackrel{1}{x}:\overline{n}|} = \int_0^n (n-t)v^{2t} \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$

2.1.9 Relations entre assurances croissantes et décroissantes

$$
\begin{aligned}
(D\overline{A})_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} + (I\overline{A})_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} &= (n+1)\overline{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} \\
(D^{(m)}\overline{A})_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} + (I^{(m)}\overline{A})_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} &= \left(n+\frac{1}{m}\right)\overline{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} \\
(\overline{D}\overline{A})_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} + (\overline{I}\overline{A})_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} &= n\overline{A}_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} \\
(D\overline{A})_{\overset{1}{x}:\overline{n-1|}} + (I_{\overline{n|}}\overline{A})_x &= n\overline{A}_x
\end{aligned}
$$

2.2 Assurance vie discret

2.2.1 Assurance vie temporaire n-années croissant annuellement

Prestation de t\$ payable que si le décès a lieu dans les n-premières années.

$$
(IA)_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1}(t+1)v^{t+1} \times {}_tP_x \times q_{x+t}
$$

2.2.2 Assurance vie entière croissant annuellement

Paye une prestation de t\$ pour tout décès se produisant dans la kieme année.

$$
(IA)_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1}(t+1)v^{t+1} \times {}_tP_x \times q_{x+t}
$$

2.2.3 Assurance vie entière croissant pendant n-années

Prestation croît pendant n-années et est payable peu importe quand le décès survient et la prestation est constante de n\$ à partir de la nieme année.

$$
\begin{aligned}
&(I_{\overline{n|}}A)_x = \sum_{t=0}^{n-1}(t+1)v^{t+1} \times {}_tP_x \times q_{x+t} + \sum_{t=n}^{\omega-x-1} n \times v^{t+1} \times {}_tP_x \times q_{x+t} \\
&(I_{\overline{n|}}A)_x = (IA)_{\overset{1}{x}:\overline{n|}} + n \times {}_{n|}A_x
\end{aligned}
$$

2.2.4 Assurance vie temporaire n-années décroissant annuellement

Versement d'une prestation de décès de n - t -1$ lsi le décès a lieu à la kieme année et des les n premières années.

$$(DA)_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} (n-t) v^{t+1} \times {}_tP_x \times q_{x+t}$$

$$(DA)_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} A_{\overset{1}{x}:\overline{t}|}$$

2.2.5 Relations entre assurances croissantes et décroissantes

$$(DA)_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + (IA)_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = (n+1) A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$$

$$(DA)_{\overset{1}{x}:\overline{n-1}|} + (I_{\overline{n}|}A)_x = nA_x$$

$$(DA)_{\overset{1}{x}:\overline{n-1}|} + (IA)_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = nA_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}$$

2.3 Relations entres les assurances discrètes et continues

$$
\begin{aligned}
\overline{A}_x &= \frac{i}{\delta} A_x \\
{}_{m|}\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta}\, {}_{m|}A^{\,1}_{x\overline{n}|} \\
\overline{A}_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta} A^{\,1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;\,1} \\
(I_{\overline{m}|}\overline{A})^{\,1}_{x\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta}(I_{\overline{m}|}A)^{\,1}_{x\overline{n}|} \\
(D\overline{A})^{\,1}_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta}(DA)^{\,1}_{x:\overline{n}|} \\
(I\overline{A})_x &= \frac{i}{\delta}(IA)_x \\
(\overline{IA})_x &= \frac{i}{\delta}\Big[(IA)_x - A_x\big(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\big)\Big] \\
(\overline{DA})^{\,1}_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta}\Big[(DA)^{\,1}_{x:\overline{n}|} - A^{\,1}_{x:\overline{n}|}\big(\frac{1}{d} - \frac{1}{\delta}\big)\Big]
\end{aligned}
$$

2.4 Approximation

Pour passer de $\frac{1}{m}$ à annuellement

$$A_x^{(m)} \approx (1+i)^{\frac{m-1}{2m}} A_x$$

Pour passer de continu à discret

$$\overline{A}_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A_x$$

Notions supplémentaires sur les rentes

3.1 Rentes continues

3.1.1 Relations de récurrence pour les rentes continues

$$
\begin{aligned}
\overline{a}_x &= \overline{a}_{x:\overline{1}|} + v^1 p_x \overline{a}_{x+1} \\
\overline{a}_{x:\overline{n}|} &= \overline{a}_{x:\overline{1}|} + v^1 p_x \overline{a}_{x+1:\overline{n-1}|} \\
{}_{n|}\overline{a}_x &= 0 + v^1 p_{x n-1|}\overline{a}_{x+1}
\end{aligned}
$$

3.1.2 Rente viagère croissant annuellement

$$
(I\overline{a})_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} {}_{k|}\overline{a}_x
$$

3.1.3 Rente temporaire n-années croissant annuellement

$$
\begin{aligned}
(I\overline{a})_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}\overline{a}_{x:\overline{n-k}|} \\
&= \int_0^n [t+1] v^t {}_t p_x dt
\end{aligned}
$$

3.1.4 Rente viagère croissant annuellement pendant n-années

$$(I_{\overline{n}|}\overline{a})_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{k|}\overline{a}_x$$

3.1.5 Rente temporaire n-années décroissant annuellement

$$\begin{aligned}(D\overline{a})_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a}_{x:\overline{k}|} \\ &= \int_0^n (n-[t])v^t {}_tp_x dt\end{aligned}$$

3.1.6 Rente viagère croissant continûment

$$\begin{aligned}(\overline{Ia})_x &= \int_0^{\omega-x} (\overline{Ia})_t \times {}_tp_x \times \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} tv^t \times {}_tp_x dt\end{aligned}$$

3.1.7 Rente temporaire n-années croissant continûment

$$\begin{aligned}(\overline{Ia})_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n (\overline{Ia})_t \times {}_tp_x \times \mu_{x+t} dt + (\overline{Ia})_{\overline{n}|} {}_np_x \\ &= \int_0^n tv^t \times {}_tp_x dt\end{aligned}$$

3.1.8 Rente viagère croissant continûment pendant n-années

$$\begin{aligned}(\bar{I}_{\overline{n}|}\bar{a})_x &= \int_0^n (\overline{Ia})_{\overline{t}|} \times {}_tp_x \times \mu_{x+t}dt + \int_n^{\omega-x} \left((\overline{Ia})_{\overline{n}|} + nv^n\bar{a}_{\overline{t-n}|}\right) \times {}_tp_x \times \mu_{x+t}dt \\ &= (\overline{Ia})_{x:\overline{n}|} + n \times {}_{n|}\bar{a}_x \\ &= \int_0^n tv^t \times {}_tp_x dt + n\int_n^{\omega-x} v^t \times {}_tp_x dt\end{aligned}$$

3.1.9 Rente temporaire n-années décroissant continûment

$$\begin{aligned}(\overline{Da})_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n \left(n\bar{a}_{\overline{t}|} - (\overline{Ia})_{\overline{t}|}\right) \times {}_tp_x \times \mu_{x+t}dt + (\overline{Da})_{x:\overline{n}|\,n}px \\ &= \int_0^n (n-t)v^t \times {}_tp_x dt\end{aligned}$$

3.1.10 Relation entre les rentes croissantes et décroissantes

$$\begin{aligned}(I\bar{a})_{x:\overline{n}|} + (D\bar{a})_{x:\overline{n}|} &= (n+1)\bar{a}_{x:\overline{n}|} \\ (\overline{Ia})_{x:\overline{n}|} + (\overline{Da})_{x:\overline{n}|} &= n\bar{a}_{x:\overline{n}|} \\ (I_{\overline{n}|}\bar{a})_x + (D\bar{a})_{x:\overline{n-1}|} &= n\bar{a}_x \\ (\bar{I}_{\overline{n}|}\bar{a})_x + (\overline{Da})_{x:\overline{n}|} &= n\bar{a}_x\end{aligned}$$

3.2 Rentes discrètes

3.2.1 Rente viagère croissant annuellement

$$(I\ddot{a})_x = 1 + v \times p_x((I\ddot{a})_{x+1} + \ddot{a}_{x+1})$$

3.2.2 Rente temporaire n-années croissant annuellement

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v^k \times {}_kp_x$$

3.2.3 Rente viagère croissant annuellement pendant n-années

$$(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v^k \times {}_kp_x + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} nv^k \times {}_kp_x$$

3.2.4 Rente temporaire n-années décroissant annuellement

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = n + v \times p_x (D\ddot{a})_{x+1:\overline{n-1}|}$$

Approximation diverse

4.1 Distribution uniforme de décès

$$\ddot{a}^{(m)} = \alpha(m) \times \ddot{a}_x + \beta(m)$$
$$\alpha(m) = \frac{i \times d}{i^{(m)} \times d^{(m)}}$$
$$\beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)} \times d^{(m)}}$$

4.2 Woolhouse

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2} \times (\sigma + \mu_x)$$