

UNIVERSITÉ LAVAL  
ÉCOLE D'ACTUARIAT

ACT - 2007  
Mathématiques actuarielles vie II  
Document de révision VIE I

David Beauchemin

27 mai 2017

© 2017 David Beauchemin



Cette création est mise à disposition selon le contrat [Attribution-Partage dans les mêmes conditions 4.0 International](#) de Creative Commons. En vertu de ce contrat, vous êtes libre de :

- partager** — reproduire, distribuer et communiquer l'œuvre ;
- remixer** — adapter l'œuvre ;
- utiliser cette œuvre à des fins commerciales.

Selon les conditions suivantes :



**Attribution** — Vous devez créditer l'œuvre, intégrer un lien vers le contrat et indiquer si des modifications ont été effectuées à l'œuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens possibles, mais vous ne pouvez suggérer que l'Offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son œuvre.



**Partage dans les mêmes conditions** — Dans le cas où vous modifiez, transformez ou créez à partir du matériel composant l'œuvre originale, vous devez diffuser l'œuvre modifiée dans les même conditions, c'est à dire avec le même contrat avec lequel l'œuvre originale a été diffusée.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Formules</b>	<b>4</b>
1.1	Rappel des relations de la théorie des taux d'intérêt . . . . .	4
1.2	Loi De Moivre . . . . .	4
1.3	Notions supplémentaire sur les tables de mortalité . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Notions supplémentaires sur l'assurance vie</b>	<b>6</b>
2.1	Assurance vie continue . . . . .	6
2.1.1	Assurance vie temporaire n-années croissant annuellement . .	6
2.1.2	Assurance vie entière croissant annuellement . . . . .	6
2.1.3	Assurance vie temporaire n-années croissant m-fois par année	7
2.1.4	Assurance vie temporaire n-années croissant continûment . .	7
2.1.5	Assurance vie entière croissant pendant n-années . . . . .	7
2.1.6	Assurance vie temporaire n-années décroissant annuellement	7
2.1.7	Assurance vie temporaire n-années décroissant m-fois par année	8
2.1.8	Assurance vie temporaire n-années décroissant continûment .	8
2.1.9	Relations entre assurances croissantes et décroissantes . . . .	8
2.2	Assurance vie discret . . . . .	8
2.2.1	Assurance vie temporaire n-années croissant annuellement . .	8
2.2.2	Assurance vie entière croissant annuellement . . . . .	9
2.2.3	Assurance vie entière croissant pendant n-années . . . . .	9
2.2.4	Assurance vie temporaire n-années décroissant annuellement	9
2.2.5	Relations entre assurances croissantes et décroissantes . . . .	9
2.3	Relations entres les assurances discrètes et continues . . . . .	10
2.4	Approximation . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Notions supplémentaires sur les rentes</b>	<b>11</b>
3.1	Rentes continues . . . . .	11
3.1.1	Relations de récurrence pour les rentes continues . . . . .	11
3.1.2	Rente viagère croissant annuellement . . . . .	11
3.1.3	Rente temporaire n-années croissant annuellement . . . . .	11
3.1.4	Rente viagère croissant annuellement pendant n-années . . .	12
3.1.5	Rente temporaire n-années décroissant annuellement . . . .	12
3.1.6	Rente viagère croissant continûment . . . . .	12

3.1.7	Rente temporaire n-années croissant continûment . . . . .	12
3.1.8	Rente viagère croissant continûment pendant n-années . . . . .	13
3.1.9	Rente temporaire n-années décroissant continûment . . . . .	13
3.1.10	Relation entre les rentes croissantes et décroissantes . . . . .	13
3.2	Rentes discrètes . . . . .	13
3.2.1	Rente viagère croissant annuellement . . . . .	13
3.2.2	Rente temporaire n-années croissant annuellement . . . . .	14
3.2.3	Rente viagère croissant annuellement pendant n-années . . . . .	14
3.2.4	Rente temporaire n-années décroissant annuellement . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Approximation diverse . . . . .</b>	<b>15</b>
4.1	Distribution uniforme de décès . . . . .	15
4.2	Woolhouse . . . . .	15

# Formules

## 1.1 Rappel des relations de la théorie des taux d'intérêt

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}|} &= (1+i)a_{\overline{n}|} \\ i &= \frac{d}{1-d} \Leftrightarrow d = \frac{i}{1+i} \\ \delta &= \ln(1+i) \\ \left(1 + \frac{i^m}{m}\right)^m &= 1+i = \frac{1}{1-d} = \left(1 - \frac{d^m}{m}\right)^{-m} = e^\delta\end{aligned}$$

## 1.2 Loi De Moivre

$$\begin{aligned}S_X(x) &= 1 - \frac{x}{\omega} \\ {}_t|uq_x &= \frac{u}{\omega - x} \\ \mu_x &= \frac{1}{\omega - x} \\ {}_tq_x &= \frac{t}{\omega - x}\end{aligned}$$

### 1.3 Notions supplémentaire sur les tables de mortalité

$$\begin{aligned}{}_nq_x &= \frac{{}_nd_x}{l_x} \\ {}_nP_x &= \frac{{}_nl_{x+n}}{{}_nl_x} \\ {}_nl_{x+n} &= {}_nl_x - {}_nd_x \\ {}_nd_x &= {}_nl_x - {}_nl_{x+n} \\ {}_nl_x &= \sum_{y=x}^{\infty} d_y\end{aligned}$$

Où  $d_x$  est le nombre de décès entre l'année  $x$  et  $x+1$  et  $l_x$  correspond au nombre de survivant au début de l'année  $x$ .

# Notions supplémentaires sur l'assurance vie

## 2.1 Assurance vie continue

### 2.1.1 Assurance vie temporaire n-années croissant annuellement

Versement d'une prestation de décès de 1\$ la première année, 2 \$ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à n\$.

$$\begin{aligned}(I\bar{A})_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n ([t] + 1)v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t} dt \\ {}^2(I\bar{A})_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n ([t] + 1)^2 v^{2t} \times {}_tP_x \times \mu_{x+t} dt\end{aligned}$$

### 2.1.2 Assurance vie entière croissant annuellement

Versement d'une prestation de décès de 1\$ la première année, 2 \$ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à  $\omega - x$  \$.

$$\begin{aligned}(I\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} ([t] + 1)v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t} dt \\ {}^2(I\bar{A})_x &= \int_0^{\omega-x} ([t] + 1)^2 v^{2t} \times {}_tP_x \times \mu_{x+t} dt\end{aligned}$$

### 2.1.3 Assurance vie temporaire n-années croissant m-fois par année

Versement d'une prestation de décès de  $\frac{1}{m}$  \$ la première année,  $\frac{2}{m}$  \$ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à n\$.

$$(I^{(m)}\bar{A})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \frac{1}{m}([t \times m] + 1)v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$

$${}^2(I^{(m)}\bar{A})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \frac{1}{m}([t \times m] + 1)^2 v^{2t} \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$

### 2.1.4 Assurance vie temporaire n-années croissant continûment

Versement d'une prestation de décès de t \$ la première année,  $\frac{2}{m}$  \$ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à n\$.

$$(\overline{IA})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n t \times v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$

$${}^2(\overline{IA})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n t v^{2t} \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$

### 2.1.5 Assurance vie entière croissant pendant n-années

Verse une prestation comme une vie entière mais arrête à n-années et paye n jusqu'au décès.

$$(I_{\overline{n}|}\bar{A})_x = \int_0^n ([t] + 1)v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt + \int_n^{\omega-x} n \times v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$

$$(I_{\overline{n}|}\bar{A})_x = (I\bar{A})_{x:\overline{n}|} + n \times {}_n|\bar{A}_x$$

### 2.1.6 Assurance vie temporaire n-années décroissant annuellement

Versement d'une prestation de décès de n\$ la première année, (n-1)\$ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à 1\$.

$$(D\bar{A})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n (n - [t])v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t}dt$$



### 2.1.7 Assurance vie temporaire n-années décroissant m-fois par année

Versement d'une prestation de décès de n \$ la première année,  $\frac{n-1}{m}$  \$ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à  $\frac{1}{m}$  \$.

$$(D^{(m)}\overline{A})_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \left(n - \frac{m \times t}{m}\right) v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t} dt$$

### 2.1.8 Assurance vie temporaire n-années décroissant continûment

Versement d'une prestation de décès de n \$ la première année,  $\frac{2}{m}$  \$ la deuxième année et ainsi de suite jusqu'à 0\$.

$$\begin{aligned} (\overline{DA})_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n (n-t) v^t \times {}_tP_x \times \mu_{x+t} dt \\ {}^2(\overline{IA})_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n (n-t) v^{2t} \times {}_tP_x \times \mu_{x+t} dt \end{aligned}$$

### 2.1.9 Relations entre assurances croissantes et décroissantes

$$\begin{aligned} (\overline{DA})_{x:\overline{n}|} + (\overline{IA})_{x:\overline{n}|} &= (n+1)\overline{A}_{x:\overline{n}|} \\ (D^{(m)}\overline{A})_{x:\overline{n}|} + (I^{(m)}\overline{A})_{x:\overline{n}|} &= \left(n + \frac{1}{m}\right)\overline{A}_{x:\overline{n}|} \\ (\overline{DA})_{x:\overline{n}|} + (\overline{IA})_{x:\overline{n}|} &= n\overline{A}_{x:\overline{n}|} \\ (\overline{DA})_{x:\overline{n-1}|} + (\overline{IA})_{x:\overline{n-1}|} &= n\overline{A}_x \end{aligned}$$

## 2.2 Assurance vie discret

### 2.2.1 Assurance vie temporaire n-années croissant annuellement

Prestation de t\$ payable que si le décès a lieu dans les n-premières années.

$$(IA)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) v^{t+1} \times {}_tP_x \times q_{x+t}$$

### 2.2.2 Assurance vie entière croissant annuellement

Paye une prestation de  $t\$$  pour tout décès se produisant dans la  $k$ ème année.

$$(IA)_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} (t+1)v^{t+1} \times {}_tP_x \times q_{x+t}$$

### 2.2.3 Assurance vie entière croissant pendant $n$ -années

Prestation croît pendant  $n$ -années et est payable peu importe quand le décès survient et la prestation est constante de  $n\$$  à partir de la  $n$ ème année.

$$(I_{\overline{n}|}A)_x = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1)v^{t+1} \times {}_tP_x \times q_{x+t} + \sum_{t=n}^{\omega-x-1} n \times v^{t+1} \times {}_tP_x \times q_{x+t}$$

$$(I_{\overline{n}|}A)_x = (IA)_{x:\overline{n}|} + n \times {}_n|A_x$$

### 2.2.4 Assurance vie temporaire $n$ -années décroissant annuellement

Versement d'une prestation de décès de  $n - t - 1\$$  lsi le décès a lieu à la  $k$ ème année et des les  $n$  premières années.

$$(DA)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} (n-t)v^{t+1} \times {}_tP_x \times q_{x+t}$$

$$(DA)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n A_{x:\overline{t}|}$$

### 2.2.5 Relations entre assurances croissantes et décroissantes

$$(DA)_{x:\overline{n}|} + (IA)_{x:\overline{n}|} = (n+1)A_{x:\overline{n}|}$$

$$(DA)_{x:\overline{n-1}|} + (I_{\overline{n}|}A)_x = nA_x$$

$$(DA)_{x:\overline{n-1}|} + (IA)_{x:\overline{n}|} = nA_{x:\overline{n}|}$$

## 2.3 Relations entre les assurances discrètes et continues

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \frac{i}{\delta} A_x \\
{}_m|\bar{A}_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta} {}_m|A_{x:\overline{n}|} \\
\bar{A}_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta} A_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|} \\
(I\bar{A})_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta} (I\overline{A})_{x:\overline{n}|} \\
(D\bar{A})_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta} (DA)_{x:\overline{n}|} \\
(I\bar{A})_x &= \frac{i}{\delta} (IA)_x \\
(\overline{IA})_x &= \frac{i}{\delta} \left[ (IA)_x - A_x \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{\delta} \right) \right] \\
(\overline{DA})_{x:\overline{n}|} &= \frac{i}{\delta} \left[ (DA)_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{n}|} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{\delta} \right) \right]
\end{aligned}$$

## 2.4 Approximation

Pour passer de  $\frac{1}{m}$  à annuellement

$$A_x^{(m)} \approx (1+i)^{\frac{m-1}{2m}} A_x$$

Pour passer de continu à discret

$$\bar{A}_x \approx (1+i)^{\frac{1}{2}} A_x$$

# Notions supplémentaires sur les rentes

## 3.1 Rentes continues

### 3.1.1 Relations de récurrence pour les rentes continues

$$\begin{aligned}\bar{a}_x &= \bar{a}_{x:\overline{1}|} + v^1 p_x \bar{a}_{x+1} \\ \bar{a}_{x:\overline{n}|} &= \bar{a}_{x:\overline{1}|} + v^1 p_x \bar{a}_{x+1:\overline{n-1}|} \\ {}_n|\bar{a}_x &= 0 + v^1 p_{x:n-1|} \bar{a}_{x+1}\end{aligned}$$

### 3.1.2 Rente viagère croissant annuellement

$$(I\bar{a})_x = \sum_{k=0}^{\omega-x-1} k|\bar{a}_x$$

### 3.1.3 Rente temporaire n-années croissant annuellement

$$\begin{aligned}(I\bar{a})_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} k|\bar{a}_{x:\overline{n-k}|} \\ &= \int_0^n [t+1]v^t {}_t p_x dt\end{aligned}$$

### 3.1.4 Rente viagère croissant annuellement pendant n-années

$$(I_{\overline{n}}\overline{a})_x = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k|\overline{a}_x$$

### 3.1.5 Rente temporaire n-années décroissant annuellement

$$\begin{aligned} (D\overline{a})_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a}_{x:\overline{k}|} \\ &= \int_0^n (n - [t]) v^t {}_t p_x dt \end{aligned}$$

### 3.1.6 Rente viagère croissant continûment

$$\begin{aligned} (\overline{Ia})_x &= \int_0^{\omega-x} (\overline{Ia})_t \times {}_t p_x \times \mu_{x+t} dt \\ &= \int_0^{\omega-x} t v^t \times {}_t p_x dt \end{aligned}$$

### 3.1.7 Rente temporaire n-années croissant continûment

$$\begin{aligned} (\overline{Ia})_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n (\overline{Ia})_t \times {}_t p_x \times \mu_{x+t} dt + (\overline{Ia})_{\overline{n}|n} p_x \\ &= \int_0^n t v^t \times {}_t p_x dt \end{aligned}$$

### 3.1.8 Rente viagère croissant continûment pendant n-années

$$\begin{aligned}
(\bar{I}\bar{a})_x &= \int_0^n (\bar{Ia})_{\bar{t}} \times {}_t p_x \times \mu_{x+t} dt + \int_n^{\omega-x} \left( (\bar{Ia})_{\bar{n}} + n v^n \bar{a}_{\bar{t}-\bar{n}} \right) \times {}_t p_x \times \mu_{x+t} dt \\
&= (\bar{Ia})_{x:\bar{n}} + n \times {}_n | \bar{a}_x \\
&= \int_0^n t v^t \times {}_t p_x dt + n \int_n^{\omega-x} v^t \times {}_t p_x dt
\end{aligned}$$

### 3.1.9 Rente temporaire n-années décroissant continûment

$$\begin{aligned}
(\bar{Da})_{x:\bar{n}} &= \int_0^n \left( n \bar{a}_{\bar{t}} - (\bar{Ia})_{\bar{t}} \right) \times {}_t p_x \times \mu_{x+t} dt + (\bar{Da})_{x:\bar{n}} p_x \\
&= \int_0^n (n-t) v^t \times {}_t p_x dt
\end{aligned}$$

### 3.1.10 Relation entre les rentes croissantes et décroissantes

$$\begin{aligned}
(I\bar{a})_{x:\bar{n}} + (D\bar{a})_{x:\bar{n}} &= (n+1) \bar{a}_{x:\bar{n}} \\
(\bar{Ia})_{x:\bar{n}} + (\bar{Da})_{x:\bar{n}} &= n \bar{a}_{x:\bar{n}} \\
(I\bar{a})_x + (D\bar{a})_{x:\bar{n}-1} &= n \bar{a}_x \\
(\bar{I}\bar{a})_x + (\bar{Da})_{x:\bar{n}} &= n \bar{a}_x
\end{aligned}$$

## 3.2 Rentes discrètes

### 3.2.1 Rente viagère croissant annuellement

$$(I\ddot{a})_x = 1 + v \times p_x ((I\ddot{a})_{x+1} + \ddot{a}_{x+1})$$

### 3.2.2 Rente temporaire n-années croissant annuellement

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v^k \times {}_k p_x$$

### 3.2.3 Rente viagère croissant annuellement pendant n-années

$$(I_{\overline{n}}\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)v^k \times {}_k p_x + \sum_{k=n}^{\omega-x-1} nv^k \times {}_k p_x$$

### 3.2.4 Rente temporaire n-années décroissant annuellement

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = n + v \times p_x (D\ddot{a})_{x+1:\overline{n-1}|}$$

# Approximation diverse

## 4.1 Distribution uniforme de décès

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{(m)} &= \alpha(m) \times \ddot{a}_x + \beta(m) \\ \alpha(m) &= \frac{i \times d}{i^{(m)} \times d^{(m)}} \\ \beta(m) &= \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)} \times d^{(m)}}\end{aligned}$$

## 4.2 Woolhouse

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2} \times (\sigma + \mu_x)$$