UNIVERSITÉ LAVAL
École d'actuariat

ACT 2007
Notes de cours VIE II

David Beauchemin

27 mai 2017

Version 4

Table des matières

Preface

Modification à la version 3 :

Correction d'une erreur à l'exemple 7.11
Clarification de l'exemple 7.12
Correction erreur du montant de la prime exemple 7.15

Provisions

1.1 Cas particulier 1 : (diapo 8)

Remarque : $T_{x+t} = \{T_x - t | T_x > t\}$
Preuve :

$$Y = \{T_x - t | T_x > t\}$$

$$\begin{aligned} S_y(s) &= P(y > s) \\ &= P(T_x - t > s | T_x > t) \\ &= P(T_x > t + s | T_x > t) \\ &= \frac{P(T_x > t + s)}{P(T_x > t)} \\ &= \frac{{}_{t+x}P_x}{{}_tP_x} \\ &= \frac{{}_tP_x {}_sP_{(t+x)}}{{}_tP_x} \\ &= {}_sP_{x+t} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} S_y(s) &= P(y > s) \\ &= {}_sP_{x+t} \\ &= P(T_{x+t} > s) \\ &= S_{T_{x+t}}(s) \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} Y &= T_{x+t} \\ {}_tV &= E[{}_tL] \end{aligned}$$

On obtient le résultat suivant,

$$bA_{x+t} - \pi\ddot{a}_{x+t} \Longleftrightarrow {}_tL = bv^{K_{x+t}+1} - \pi\ddot{a}_{\overline{K_{x+t}+1|}} \tag{1.1}$$

Maintenant, on regarde la variance :

$$\begin{aligned} Z_t &= Mv^{K_{x+t}+1} \\ Y_t &= \pi\ddot{a}_{\overline{K_{x+t}+1|}} \end{aligned}$$

On définit donc ${}_tL$ comme suit :

$$ {}_tL = Mv^{K_{x+t}+1} - \pi\ddot{a}_{\overline{K_{x+t}+1|}} \tag{1.2}$$

On développe pour trouver la variance :

$$\begin{aligned} {}_tL &= Mv^{K_{x+t}+1} - \pi\ddot{a}_{\overline{K_{x+t}+1|}} \\ &= Mv^{K_{x+t}+1} - \pi\frac{1-v^{K_{x+t}+1}}{d} \\ &= \Big(m+\frac{\pi}{d}\Big)v^{K_{x+t}+1} - \frac{\pi}{d} \\ Var({}_tL) &= Var\left(\Big(m+\frac{\pi}{d}\Big)v^{K_{x+t}+1} - \frac{\pi}{d}\right) \\ &= \Big(m+\frac{\pi}{d}\Big)^2 var\Big(v^{K_{x+t}+1}\Big) \\ &= \Big(m+\frac{\pi}{d}\Big)^2 \Big({}^2A_{x+t} - A_{x+t}^2\Big) \end{aligned}$$

1.2 Cas particulier 2 : (diapo 9)

a) Prime équivalence

$$\begin{aligned} VP_{@0}(\text{prestation}) = VP_{@0}(\text{primes à recevoir}) &\Leftrightarrow VP_{@0}(\text{prestation}) - VP_{@0}(\text{primes}) = 0 \\ M \times A_x &= \pi\ddot{a}_{x:\overline{n|}} \\ \pi &\Rightarrow M \times \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \end{aligned}$$

Démonstration :

$$Z = M \times v^{K_n+1} \tag{1.3}$$

$$Y = \begin{cases} \pi \times \ddot{a}_{\overline{K_x+1|}} & ,\text{si } K_x \varepsilon \{0,1,...,n-1\} \\ \pi \times \ddot{a}_{\overline{n|}} & ,\text{si } K_x \varepsilon \{n,n+1,...\} \end{cases} \tag{1.4}$$

b) Calculer les réserves aux temps (t) :

t < n

À partir des équations 1.3 et 1.4, on obtient :

$$_{t}L = {}_{h}Z - {}_{h}Y = \begin{cases} M \times v^{K_{x+t}+1} - \pi \times \ddot{a}_{\overline{K_{x+t}+1}|} & ,\text{si } T_{x+t} < n-t \Leftrightarrow K_{x+t} \varepsilon \{0, 1, ..., n-t-1\} \\ M \times v^{K_{x+t}+1} - \pi \times \ddot{a}_{\overline{n-t}|} & ,\text{si } T_{x+t} > n-t \Leftrightarrow K_{x+t} \varepsilon \{n-t, n-t+1, ...\} \end{cases}$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned} {}_{t}V = E[{}_{t}L] &= M \times A_{x+t} - \pi \times \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \\ &= M \times A_{x+t} - M \times \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \times \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \end{aligned}$$

t ≥ n

$$\begin{aligned} {}_{t}V = E[{}_{t}L] &= M \times v^{K_n+1} \\ &= M \times A_{x+t} \end{aligned}$$

1.3 exemple 7.1 : (diapo 10)

Même démarche que le cas particulier à 1.2.
· M\$ à K_{x+1}
· π début d'année pour n années

a) Prime principe d'équivalence :

$$M \times A_x = \pi \ddot{a}_{x:\overline{n}|} \Rightarrow \pi = \frac{M \times A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

b) Calcul réserve au temps t :

${}_{t}V = VP_{@0}$ (prestation à payer) - $VP_{@0}$(primes à recevoir)
cas 1 : t < n

$${}_{t}V = M \times A_{x+t} - \pi \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} \Rightarrow M \times A_{x+t} - \frac{M \times A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \times \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

cas 2 : t ≤ n

$${}_{t}V = M \times A_{x+t}$$

1.4 Exemple 7.2 : (diapo 11)

· 30 000 \$
· x = (30)
· ${}_{20}\pi = P^{pe}$
· $\delta = 6$ %

a) Trouver π

$$\begin{aligned} 30\ 000 \times A_{30:\overline{30|}} &= P \times \ddot{a}_{30:\overline{20|}} \\ P &= \frac{30\ 000 \times A_{30:\overline{30|}}}{\ddot{a}_{30:\overline{20|}}} \\ &= \frac{30\ 000 \times 0.200142}{35.281344} = 170.18\$ \end{aligned}$$

b) Définir L

$${}_{10}L = {}_{10}Z - {}_{10}Y$$

$${}_{10}Z = \begin{cases} 30\ 000 \times v^{K_{40}+1} & ,\text{si } K_{40}\varepsilon\{0,1,...,19\} \\ 0 & ,\text{si } K_{40}\{20,21,...\} \end{cases} \tag{1.5}$$

$${}_{10}Y = \begin{cases} \pi \times \ddot{a}_{\overline{K_{40}+1|}} & ,\text{si } K_{40}\varepsilon\{0,1,...,9\} \\ \pi \times \ddot{a}_{\overline{10|}} & ,\text{si } K_{40}\{10,11,...\} \end{cases} \tag{1.6}$$

À partir des expressions 1.5 et 1.6 :

$${}_{10}L = \begin{cases} 30\ 000 \times v^{K_{40}+1} - \pi \times \ddot{a}_{\overline{K_{40}+1|}} & ,\text{si } K_{40}\varepsilon\{0,1,...,9\} \\ 30\ 000 \times v^{K_{40}+1} - \pi \times \ddot{a}_{\overline{10|}} & ,\text{si } K_{40}\varepsilon\{10,11,...,19\} \\ 0 - \pi\ddot{a}_{\overline{10|}} & ,\text{si } K_{40}\{20,21,...\} \end{cases} \tag{1.7}$$

De façon similaire on obtient,

$${}_{25}L = \begin{cases} 30\ 000 \times v^{K_{55}+1} & ,\text{si } K_{55}\varepsilon\{0,1,...,4\} \\ 0 & ,\text{si } K_{55}\{5,6,...\} \end{cases} \tag{1.8}$$

Trouver ${}_{25}L$ si $T_{30} = 28.2$ (sachant que le contrat est en vigueur $\Leftrightarrow$ sachant que

$T_{30} > 25)$

$$\begin{aligned}\{T_{30} - 25 | T_{30} > 25\} &= T_{55} \\ &\Rightarrow \text{si } T_{30} = 28.2 \Rightarrow T_{55} = 3.2 \\ &\Rightarrow \text{si } K_{55} = 3 \Rightarrow \{{}_{25}L | T_{30}\} = 28.2 \\ &= 30\ 000 \times v^4 \\ &= 23\ 598{,}84\$\end{aligned}$$

Trouver ${}_{10}L$ si $T_{30} = 14.6$

$$\begin{aligned}T_{40} = 4.6 &\Rightarrow K_{40} = 4 \\ &\Rightarrow {}_{10}L = 30\ 000 \times v^5 - P\ddot{a}_{\overline{5|}} \\ &= 21\ 467{,}13\$\end{aligned}$$

c) Calcul de réserve

$${}_{10}V = VP_{@10} \text{ (prestation future à payer) - } VP_{@10} \text{ (primes futures à recevoir)}$$
$$\begin{aligned}&= 30\ 000 \times A_{40:\overline{20|}} - P \times \ddot{a}_{40:\overline{10|}} \\ &= 30\ 000 \times 0.28768 - 170.18 \times 22.787631 = 9\ 646{,}47\$\end{aligned}$$

$${}_{25}V = 30\ 000 \times A_{55:\overline{5|}} - 0 = 30\ 000 \times 0.231449 = 4\ 605{,}04\$$$

1.5 Réserves pour primes non-nivelées : (diapo 12)

$${}_{h}L = b_{K_{x+h}+h+1} \times v^{K_{x+h}+1} - \sum_{i=0}^{K_{x+h}} \pi_{h+i} \times v^i$$

$${}_{h}V = \sum_{k=0}^{\infty} b_{K_{k+h}h+1} \times v^{k+1} \times {}_{k}P_{x+h} - \sum_{k=0}^{\infty} \pi_{h+k} \times v^k \times {}_{k}P_{x+h}$$

1.6 Exemple 7.3 : (diapo 14)

Notes : Je n'arrive pas au même réponse que les notes de cours. J'ai inclus mes réponses.

· x = (50)
· $\delta = 6$ %

$$M = \begin{cases} 50\ 000\$ & \text{, si } T_{50} < 15 \\ 10\ 000\$ & \text{, si } T_{50} > 15 \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\pi_k = \begin{cases} 5 \times \pi & \text{, si } T_{50} < 15 \\ \pi & \text{, si } T_{50} > 15 \end{cases} \tag{1.10}$$

a) Calculer π

$$
\begin{aligned}
\pi &\Rightarrow 50\ 000 \times A_{50:\overline{15}|} + 10\ 000 \times {}_{15}E_{50} \times A_{65} = 5\pi \ddot{a}_{50:\overline{15}|} + \pi \times {}_{15}E_{50} \times \ddot{a}_{65} \\
&\Rightarrow 50\ 000 \times A_{50} - 40\ 000 \times {}_{15}E_{50} \times A_{65} = 5\pi \ddot{a}_{50} - 4\pi \times {}_{15}E_{50} \times \ddot{a}_{65} \\
\pi &= \frac{50\ 000 \times A_{50} - 40\ 000 \times {}_{15}E_{50} \times A_{65}}{5 \times \ddot{a}_{50} - 4 \times {}_{15}E_{50} \times \ddot{a}_{65}} \\
&= 119.663\$
\end{aligned}
$$

b) Calculer la réserve à t = 10

$$
\begin{aligned}
{}_{10}V &= 50\ 000 \times A_{60} - 40\ 000 \times {}_{5}E_{60} \times A_{65} - 5 \times P \times \ddot{a}_{60} - 4 \times P \times {}_{5}E_{60} \times \ddot{a}_{65} \\
&= 2\ 949{,}573\ 76\$
\end{aligned}
$$

c) Calculer la réserve à t = 20

${}_{20}V = 10\ 000 \times A_{70} - P \times \ddot{a}_{70} = 4\ 124{,}072\$$

1.7 Relations récursives pour réserves sans frais

La réserve au temps $h + 1$ correspond à :

$$
{}_{h+1}V = \frac{({}_{h}V + \pi_h) \times (1 + i) - b_{h+1} \times q_{x+h}}{p_{x+h}} \tag{1.11}
$$

Accumulation de la réverse déjà accumuler à h + prime versé à h. Il existe deux possibilités :

1- Mourir avec prob q_{x+h} et payer la prestation au décès b_{x+h} soit : $-b_{h+1} \times q_{x+h}$

2- Survivre avec prob p_{x+h} et on a besoin d'une réserve de ${}_{h+1}V$ soit : ${}_{h+1}V \times p_{x+h}$.

1.8 Exemple 7.4 : (diapo 17)

· x = (50)
· M = 1 000$
· π_k = 13.10$ selon le principe d'équivalence
· De plus, ${}_{0}V = 0$

On cherche,

$$(_0V+\pi)\times(1+i)=b\times q_x+p_x\times {_1V}$$
$$(_1V+\pi)\times(1+i)=b\times q_{x+1}+p_{x+1}\times {_2V}$$

On résout les équations pour trouver les montants de réserve.

$$\begin{aligned}
{_1V} &= \frac{(_0V+\pi)\times(1+i)-b\times q_x}{p_x}\\
&= \frac{(0+13.1)(1.06)-(0.005\times 1\ 000)}{0.995}\\
&= 8.931\$\\
{_2V} &= \frac{(_1V+\pi)\times(1+i)-b\times q_{x+1}}{p_{x+1}}\\
&= \frac{(8.931+13.1)(1.06)-(0.010\times 1\ 000)}{0.99}\\
&= 13.488\$
\end{aligned}$$

1.9 Exemple 7.5 : (diapo 18)

· x = (50)
· M = 100 000\$
· π_k = 4 156\$ payable au plus 10 ans.
· i = 5 %
· De plus, $_9V$ = 65 075\$

On cherche A_{41}.
On commence par trouver la réserve à 10 :

$$\begin{aligned}
\Big(_9V+\pi\Big)(1+i) &= 10\ 000q_{39}+{_{10}V}p_{39}\\
(65\ 070+4\ 156)(1.05) &= 100\ 000\times 0.011+{_{10}V}(1-0.011)\\
{_{10}V} &= 72\ 383{,}52\$
\end{aligned}$$

Et pour t = 11 :

$$\begin{aligned}
\Big(_{10}V+0\Big)(1+i) &= 10\ 000q_{40}+{_{11}V}p_{40}\\
(72\ 383{,}52)(1.05) &= 100\ 000\times 0.012+{_{11}V}(1-0.012)\\
{_{10}V} &= 75\ 711{,}2\$
\end{aligned}$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
{}_{11}V &= 100\ 000 \times A_{41} \\
A_{41} &= \frac{V_{11}}{100\ 000} \\
&= 0.757112
\end{aligned}
$$

1.10 Réserve et primes par principe d'équivalence (rétrospective) : (diapo 19)

Si on utilise une prime par le principe d'équivalence ${}_0V = 0$. Alors,

$$
{}_hV = \frac{VP_{@0}(\text{primes reçues avant } h) - VP_{@0}(\text{prestation à payer avant } h)}{{}_hE_x}
$$

1.11 Cas particuliers : Contrat d'assurance vie mixte n années : (diapo 20)

· x = (50)
· M = 1$

i)

D'abord on trouve P par le principe d'équivalence, qui correspond à :

$$
P = \frac{A_{x:\overline{h|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{h|}}} \tag{1.12}
$$

Et puis pour trouver la réserve à h, avec la méthode rétrospective :

$$
\begin{aligned}
{}_hV =& \frac{VP_{@0}(\text{primes recues avant temps h}) - VP_{@0}(\text{prestations payés avant h})}{{}_hE_x} \\
=& \frac{P\ddot{a}_{x:\overline{h|}} - A_{x:\overline{h|}}}{{}_hE_x} \text{ ,où P} = 1.12
\end{aligned}
$$

ii)

$$
\begin{aligned}
{}_hV =& VP_{@0}(\text{prestations futures à payer de h à n}) - VP_{@0}(\text{primes futures à recevoir de h à n}) \\
=& A_{x+h:\overline{n-h|}} - P\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h|}}
\end{aligned}
$$

On substituant P par l'équation 1.12, pour les 2 méthodes, on obtient :

$$A_{x+h:\overline{n-h}|} - \frac{A_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|} \tag{1.13}$$

$$\frac{A_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\left(\frac{\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - A_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x}\right) \tag{1.14}$$

On prouve l'égalité entre les 2 méthodes. On débute on posant les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= \ddot{a}_{x:\overline{h}|} + {}_hE_x\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}\\
\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|} &= \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x}\\
A_{x:\overline{n}|} &= A_{x:\overline{h}|} + {}_hE_xA_{x+h:\overline{n-h}|}\\
A_{x+h:\overline{n-h}|} &= \frac{A_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x}
\end{aligned}$$

On trouve par la suite :

$$\begin{aligned}
{}_hV =& A_{x+h:\overline{n-h}|} - \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\ddot{a}_{x+h:\overline{n-h}|}\\
&= \frac{A_{x:\overline{n}|} - A_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x} - \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\left(\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{h}|}}{{}_hE_x}\right)\\
&= -\frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + \frac{A_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \times {}_hE_x}\\
&= {}_hV(\text{avec la forme rétrospective})
\end{aligned}$$

iii)

On cherhce la variance de ${}_hL$. On définit L comme suit :

$${}_hL = {}_hZ - {}_hY \tag{1.15}$$

$${}_hZ = \begin{cases} 1 \times v^{K_{x+h}} & ,\text{si } K_{x+h} < n-h-1\\ 1 \times v^{K_{n+h}} & ,\text{si } K_{x+h} \geq n-h \end{cases} \tag{1.16}$$

$${}_hY = \begin{cases} \pi\ddot{a}_{K_{x+h}+1} & \\ & ,\text{si } K_{x+h} < n-h-1\\ \pi\ddot{a}_{n-h} & ,\text{si } K_{x+h} \geq n-h \end{cases} \tag{1.17}$$

On déduit que :

$$\begin{aligned}
{}_hZ &= v^{min\{K_{x+h}+1, n-h}\\
{}_hY &= \pi\ddot{a}_{\overline{min(K_{x+h}+1, n-h}|}
\end{aligned}$$

Et on obtient pour L :

$$\begin{aligned}
{}_hL &= {}_hZ - {}_hY \\
&= v^{min\{K_{x+h}+1,n-h} - \pi\ddot{a}_{\overline{min(K_{x+h}+1,n-h|}} \\
&= \left(1+\frac{\pi}{d}\right)v^{min\{K_{x+h}+1,n-h} - \frac{\pi}{d}
\end{aligned}$$

$$var({}_hL) = \left(1+\frac{\pi}{d}\right)^2\left({}^2A_{x+h:\overline{n-h|}} - A^2_{x+h:\overline{n-h|}}\right) \tag{1.18}$$

1.12 D'autres formules pour le contrat d'assurance vie entière (diapo 21) :

Remarques : Pour un contrat d'assurance vie entière et prime selon principe d'équivalence.

$${}_hV = MA_{x+h} - \pi\ddot{a}_{x+h} \text{ où, } \pi \text{ est définie selon le principe d'équivalence}$$

On obtient donc,

$$\begin{aligned}
{}_hV &= MA_{x+h} - M\frac{A_x}{\ddot{a}_x}\ddot{a}_{x+h} \\
&= MA_{x+h} - M\frac{A_x}{\ddot{a}_x}\ddot{a}_{x+h} \\
&= M\left(A_{x+h} - \frac{A_x}{\ddot{a}_x}\ddot{a}_{x+h}\right) \\
&= M\left(1 - d\ddot{a}_{x+h} - \frac{(1-d\ddot{a}_x)\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x}\right) \\
&= M\left(1 - d\ddot{a}_{x+h} - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x} + \frac{d\ddot{a}_x\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x}\right)
\end{aligned}$$

On obtient la formule suivante :

$${}_hV = M\left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+h}}{\ddot{a}_x}\right) \tag{1.19}$$

Notes :

$$\ddot{a}_x = \frac{1 - A_x}{d}$$
$$A_x = 1 - d\ddot{a}_x$$
$$A_{x+h} = 1 - d\ddot{a}_{x+h}$$

1.13 Exemple 7.6 : (diapo 22)

· x = (40)
· M = 10 000$

Avec l'équation 1.19, on obtient :

$$\begin{aligned} {}_{10}V &= M\left(1 - \frac{\ddot{a}_{x+10}}{\ddot{a}_x}\right) \\ &= 10\ 000\left(1 - \frac{17.0245}{18.4578}\right) \\ &= 776.53\$ \end{aligned}$$

1.14 Exemple 7.7 : (diapo 25)

· x = (40)
· i = 5%
· M = 10 000$
· π = principe d'équivalence
· e_0 = 50 et e_k = 20, k = 1,2,...
· ${}_0V$ = 0

D'abord on trouve la prime π :

$$\begin{aligned} 10\ 000A_{40} + 50 + 20a_{40} &= \pi\ddot{a}_{40} \\ &= 87.2125 \end{aligned}$$

Rappel : $A_x = 1 - d\ddot{a}_x$ On cherche ${}_2V$:

$$\begin{aligned} {}_1V &= \frac{({}_0V + \pi - e_0) - Mq_{40}}{p_{40}} \\ &= \frac{(0 + 87.2125 - 50)(1.05) - 10\ 000 \times (\frac{0.52722}{1\ 000})}{1 - (\frac{0.52722}{1\ 000})} \\ &= 33.819\$ \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}_2V &= \frac{({}_1V + \pi - e_1) - Mq_{41}}{p_{41}} \\
&= \frac{(33.819 + 87.2125 - 20)(1.05) - 10\ 000 \times (\frac{0.56531}{1\ 000})}{1 - (\frac{0.56531}{1\ 000})} \\
&= 100.49\$
\end{aligned}
$$

1.15 Approximation de la réserve à $h + s$: (diapo 27)

$$
{}_{h+s}V = ({}_hV + \pi_h - e_h)(1-s) + ({}_{\lfloor h+1 \rfloor}V(s) \tag{1.20}
$$

1.16 Exemple 7.8 : (diapo 28)

· x = (65)
· i = 6%
· M = 1$
· π = principe d'équivalence = 0.044444
· ${}_0V = 0$
· ${}_1V = 0.002635$ (trouver à partir des informations précédentes)

On cherche ${}_{0.25}V$, on utilise l'estimation 1.20 :

$$
\begin{aligned}
{}_{0.25}V &= ({}_0V + \pi_h)(1 - 0.25) + ({}_1V(0.25) \\
&\approx (0 + 0.044444)(0.75) + 0.002635 \times 0.25
\end{aligned}
$$

1.17 Contrats d'assurance-vie entière continus

Pour des contrats d'assurance-vie continus, on obtient les formules suivantes

$$
\begin{aligned}
{}_hL &= Mv^{T_{x+h}} - \pi \bar{a}_{\overline{T_{x+h}}|} \\
&= Mv^{T_{x+h}} - \pi \frac{1 - v^{T_{x+h}}}{\delta} \\
&= \left(M + \frac{\pi}{\delta}\right) v^{T_{x+h}} - \frac{\pi}{\delta} \\
{}_hV &= E[{}_hL] \\
&= M\overline{A}_{x+h} - \pi \times \bar{a}_{x+h} \\
\text{Var}({}_hL) &= \left(M + \frac{\pi}{\delta}\right)^2 \left[{}^2\overline{A}_{x+h} - \overline{A}_{x+h}^2\right]
\end{aligned}
$$

De plus, si les primes sont selon le principe d'équivalence, on obtient les relations suviantes

$$\begin{aligned} {}_hV &= M\left(1 - \frac{\overline{a}_{x+h}}{\overline{a}_x}\right) \\ &= M\left(\frac{\overline{A}_{x+h} - \overline{A}_x}{1 - \overline{A}_x}\right) \end{aligned}$$

1.18 Exemple 7.9 : (diapo 31)

· x = (65)
· δ = 6%
· b = 10 000$
· π payable 10 ans
· $\mu_{50+t} = 0.04$

a)

On cherche la prime π selon le principe d'équivalence :

$$\pi = \frac{10\ 000\overline{A}_{50:\overline{20|}}}{\overline{a}_{50:\overline{10|}}}$$

$$\begin{aligned} \overline{A}_{50:\overline{20|}} &= \int_{t=0}^{20} 1 \times e^{-\delta \times t} \times f_{T_{50}}(t)dt \\ &= \int_{t=0}^{20} 1 \times e^{-\delta \times t} \times {}_tP_{50} \times \mu_{50+t}dt \\ &= \int_{t=0}^{20} 1 \times e^{-0.05 \times t} \times e^{-0.04t}(0.04)dt \\ &= 0.04\left(\frac{e^{-0.09 \times 20} - 1}{0.09}\right)(-1) \\ &= 0.371 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{a}_{50:\overline{10|}} &= \int_{t=0}^{10} 1 \times e^{-\delta \times t} \times {}_tp_x dt \\ &= \int_{t=0}^{20} 1 \times e^{-0.05 \times t} \times e^{-0.04t}dt \\ &= \left(\frac{1 - e^{-0.09 \times 10}}{0.09}\right)(-1) \\ &= 6.5937 \end{aligned}$$

On obtient donc la prime suivante :

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{1\ 000 \times 0.371}{6.5937} \\ &= 562.66\$\end{aligned}$$

b)

$$_5L = \begin{cases} 10\ 000 v^{T_{55}} - \pi \overline{a}_{T_{55}} & , \text{si } T_{55} < 5 \\ 10\ 000 v^{T_{55}} - \pi \overline{a}_5 & , \text{si } 5 < T_{55} \leq 15 \\ 0 - \pi \overline{a}_5 & , \text{si } T_{55} > 15 \end{cases}$$

On obtient les valeurs suivantes,

$$\begin{aligned} &10\ 000 v^{T_{55}} - \pi \overline{a}_5 \\ &10\ 000 e^{-0.05\times 5} - 562.66 \times \frac{1 - e^{-0.05\times 5}}{0.05} \\ &= 5\ 298{,}80\$ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &10\ 000 v^{15} - \pi \overline{a}_5 \\ &10\ 000 e^{-0.05\times 15} - 562.66 \times \frac{1 - e^{-0.05\times 5}}{0.05} \\ &= 2\ 234{,}47\$ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &0 - \pi \overline{a}_5 \\ &0 - 562.66 \times \frac{1 - e^{-0.05\times 5}}{0.05} \\ &= -2\ 489{,}20\$ \end{aligned}$$

c)

i)

On cherche $_5L$ si $T_{50} = 14.1$, soit :

$$\begin{aligned} &\{T_{50} | T_{50} > 5\} = T_{55} \\ &\text{soit, } T_{55} = 9.1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}_5L &= 10\ 000 v^{9.1} - \pi \overline{a}_5 \\
&= 10\ 000 e^{-0.05\times 9.1} - 562.66 \times \frac{1-e^{-0.05\times 5}}{0.05} \\
&= 3\ 855{,}28
\end{aligned}
$$

ii)

On cherche ${}_5L$ si $T_{55} = 3.2$,

$$
\begin{aligned}
{}_5L &= 10\ 000 v^{3.2} - \pi \overline{a}_{3.2} \\
&= 10\ 000 e^{-0.05\times 3.2} - 562.66 \times \frac{1-e^{-0.05\times 3.2}}{0.05} \\
&= 6\ 857{,}58
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
{}_5L &= 10\ 000 \overline{A}_{55:\overline{15}|} - \pi \overline{a}_{55:\overline{5}|} \\
&= 10\ 000 \int_{t=0}^{15} e^{-\delta\times t} {}_tp_{55}\mu_{55+t} dt - 562.66 \int_{t=0}^{5} e^{-\delta\times t} {}_tp_{55} dt \\
&= 10\ 000 \int_{t=0}^{15} e^{-0.05\times t} e^{-0.04\times t}(0.04) dt - 562.66 \int_{t=0}^{5} e^{-0.05\times t} e^{-0.04\times t} dt \\
&= 1\ 026{,}80\$
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{15}L &= 10\ 000 \overline{A}_{65:\overline{5}|} - 0 \\
&= 10\ 000 \int_{t=0}^{15} e^{-\delta\times t} {}_tp_{55}\mu_{55+t} dt \\
&= 10\ 000 \int_{t=0}^{15} e^{-0.05\times t} e^{-0.04\times t}(0.04) dt \\
&= 1\ 610{,}54\$
\end{aligned}
$$

e)

On sait que ${}_5L$ est une fonction monotone décroissante.

$$
P(L_5 < 3\ 000) = P(T_{55} > t^*)
$$

,où t^* est la solution de l'expression $10\ 000 v^{t^*} - \pi \bar{a}_5 = 3\ 000$

$$\begin{aligned}
-\delta \times t^* =& ln\left(\frac{3\ 000 + \pi\bar{a}_5}{10\ 000}\right) \\
=& \frac{-1}{\delta} ln\left(\frac{3\ 000 + \pi\bar{a}_5}{10\ 000}\right) \\
t^* =& 11.996
\end{aligned}$$

Alors,

$$P(L_5 < 3\ 000) = {}_{11.996}P_{55} = e^{-0.05\times 11.996} = 0.619$$

1.19 Exemple 7.10 : (diapo 32)

- x = (65)
- $\delta = 4\%$
- $b_t = 1\ 000e^{0.04t}$
- $\mu_{50+t} = 0.04$
- $\mu_{65+t} = 0.02$

On débute en trouvant la prime π, soit $VP_{@0}(primesrecevoir) = VP_{@0}(prestationspayer)$:

$$\pi\bar{a}_{65} = \int_{t=0}^{\infty} b_t e^{-\delta\times t}{}_t p_{65}\mu_{65+t} dt$$

$$\begin{aligned}
\pi\bar{a}_{65} =& \int_{t=0}^{\infty} b_t e^{-\delta\times t}{}_t p_{65} dt \\
=& \frac{1}{\mu+\sigma} \ \mu \text{ est constant} \\
=& \frac{1}{0.06}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t=0}^{\infty} b_t e^{-\delta\times t}{}_t p_{65}\mu_{65+t} dt =& \int_{t=0}^{\infty} 1\ 000e^{0.04t} e^{-0.04\times t}{}_t p_{65} e^{-0.02t}(0.02) dt \\
=& \frac{20}{0.02} = 1000
\end{aligned}$$

On obtient,

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{0.06} =& 1000 \\
\pi =& 60\$
\end{aligned}$$

On résout maintenant,

$$\begin{aligned}
{}_2V =& \int_{t=0}^{\infty} b_t e^{-\delta\times t}{}_tp_{67}\mu_{67+t}dt - \pi\overline{a}_{67}\\
=& \int_{t=0}^{\infty} 1000e^{0.04(t+2)}e^{-0.04\times t}e^{-0.02\times t}(0.02)dt - \frac{60}{0.06}\\
=& 83.29\$
\end{aligned}$$

1.20 Exemple 7.11 : (diapo 34)

- x = ([40]) [1]
- i = 5%
- b = 100$
- On utilise la table *Standars Select Survival Model*
- On utilise l'hypothèse DUD, $\overline{A}_x = \frac{i}{\delta}A_x$

Notes sur les tables de mortalités sélect :

$$\begin{aligned}
{}_1p_{[25]} =& \frac{l_{[25]+1}}{l_{[25]}} = \frac{99\ 842{,}38}{99\ 865{,}69} = 0.9999766587\\
{}_1p_{[24]+1} =& \frac{l_{[24]+2} = l_{26}}{l_{[24]+1}} = \frac{99\ 843{,}80}{99\ 869{,}70} = 0.999740662\\
{}_1p_{25} =& \frac{l_{26}}{l_{24}} = \frac{99\ 843{,}80}{99\ 871{,}08} = 0.999726848
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_2p_{[25]} =& \frac{l_{[25]+2} = l_{27}}{l_{[25]}}\\
{}_3p_{[25]+1} =& \frac{l_{28}}{l_{[25]}}\\
{}_3p_{[24]+1} =& \frac{l_{[24]+1+3}}{l_{[24]+1}}
\end{aligned}$$

On cherche ${}_5V$.

$$ {}_5V = 100\overline{A}_{45} - \pi\ddot{a}_{45} \tag{1.21}$$

On sait que $\overline{A}_x = \frac{i}{\delta}A_x$, on possède seulement une table de rente. Alors, on utilise

1. Les [] signifie que l'assuré à fait un examen médical (table sélect)

la relation suviante :

$$\begin{aligned}\overline{A}_{45} &= \frac{i}{\delta}A_{45} = \frac{i}{\delta}(1 - d\ddot{a}_{45}) \\ &= \frac{0.05}{\ln(1.05)}\left(1 - \frac{0.05}{1.05}(17.81621)\right)\end{aligned}$$

On peut donc trouver π,

$$\begin{aligned}\pi &= \frac{100\overline{A}_{[40]}}{\ddot{a}_{[40]}} \\ &= \frac{100\frac{1.05}{\ln(1.05)}\left(1 - \frac{0.05}{1.05}(18.45956)\right)}{18.45956} \\ &= 0.671593\end{aligned}$$

On peut résoudre l'équation 1.21 :

$$\begin{aligned}{}_5V &= 100\frac{0.05}{\ln(1.05)}\left(1 - \frac{0.05}{1.05}(17.81621)\right) - 0.671593 \times 17.81621 \\ &= 3.5716\$\end{aligned}$$

1.21 Le profit annuel :(diapo 36)

Rappel : e_k représente les frais associés au prime au temps k et E_k représente les frais associés à la prestation à payer à la fin de l'année de décès[2]. On considère la réserve *espected(E)* entre la période k et k+*1* soit

$$_{k+1}V^E = N_k\Big({}_kV + G + e_k\Big)(1+i) - \Big(b_{k+1} + E_{k+1} - {}_{k+1}V\Big)N_k q_{x+k}$$

Preuve :

$$\begin{aligned}N_k\Big({}_kV + G + e_k\Big)(1+i) &= \Big(b_{k+1} + E_{k+1}\Big)q_{x+k} + -{}_{k+1}Vp_{x+k} \\ &= \Big(b_{k+1} + E_{k+1}\Big)q_{x+k} + {}_{k+1}V(1 - q_{x+k}) \\ &= \Big(b_{k+1} + E_{k+1}\Big) - {}_{k+1}V)q_{x+k} + {}_{k+1}Vq_{x+k} \\ {}_{k+1}V &= \Big({}_kV + G + e_k\Big)(1+i) - \Big(b_{k+1} + E_{k+1} - {}_{k+1}V\Big)q_{x+k} \\ N_{k\,k+1}V &= N_k\Big({}_kV + G + e_k\Big)(1+i) - \Big(b_{k+1} + E_{k+1} - {}_{k+1}V\Big)N_k q_{x+k}\end{aligned}$$

2. Voir notes powerpoint diapo 23

Si on modifie les hypotèse de taux d'intérêt, des frais et/ou du taux de mortalité on se retrouvre avec la réserve *actual(A)*

$$N_{k\,k+1}V^{A} = N_k\Big({}_kV + G + e_k^{'}\Big)(1+i^{'}) - \Big(b_{k+1} + E_{k+1}^{'} - {}_{k+1}V\Big)N_k q_{x+k}^{'}$$

Si on soustrait la réserve *actual* à la réserve *expected*, on obtient le profit de l'assureur pour l'année *k+1* sur l'intérêt, les frais et le taux de mortalité

$$\begin{aligned}
{}_{k+1}V^{A} - {}_{k+1}V^{E} = &\\
& N_k\Big({}_kV + G - e_k^{'}\Big)(1+i^{'}) - \\
& \Big(b_{k+1} + E_{k+1}^{'} - {}_{k+1}V\Big)N_k q_{x+k}^{'} - \\
& N_k\Big({}_kV + G - e_k\Big)(1+i) - \\
& \Big(b_{k+1} + E_{k+1} - {}_{k+1}V\Big)N_k q_{x+k}
\end{aligned}$$

Si on s'intéresse au profit(Υ) par *section*, on obtient...
Si seulement l'intérêt change,

$$\Upsilon_k = N_k\Big({}_kV + G - e_k^{'}\Big)(i^{'} - i)$$

Si seulement les frais e_k ou E_k change,

$$\Upsilon_k = N_k\Big(e_k - e_k^{'}\Big)(1+i) + N_k q_{x+k}\Big(E_{k+1} - E_{k+1}^{'}\Big)$$

Si seulement la force de mortalité change,

$$\Upsilon_k = \Big(b_{k+1} + E_{k+1} - {}_{k+1}V\Big)\Big(N_k q_{x+k} - N_k q_{x+k}^{'}\Big)$$

1.22 Exemple 7.12 : (diapo 38)

L'énoncé est une traduction du livre. Il ne s'agit pas de l'exemple 7.3 des notes de coours.

- Assurance vie mixte 20 ans
- G = 5 200$
- b = 100 000$
- i = 5%
- *Standard Select Survival Model*
- $e_0 = 0.1 \times G$, $e_1 = e_2 = ... = 0.05\times\ G$
- E_{k+1} =200$

À l'aide de l'exemple 7.3 du livre de référence, on obtient les informations suivantes

- ${}_5V$ = 29 068$

- ${}_6V = 35\ 324\$$

À l'aide de l'énoncé et de la table de mortalité, on obtient les informations suivantes

- $q_{65} = 1 - \frac{l_{66}}{l_{65}} = 0.005915$
- $N_5 = 100 \Rightarrow$ le portefeuille comprend 100 assurés
- $e_5^{'} = 0.1 \times G = e_5$
- $i^{'} = 0.065$
- $N_5 q_{65} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{100} = 0.01 \times 100\right) \Rightarrow q_{65}^{'} = 0.01$
- $E_6^{'} = 250\$$

a)

$$
\begin{aligned}
{}_6V^A - {}_6V^E = \\
&100\Big(29068 + 5200 - 0.06 \times 5\ 200\Big)(1.065) - \\
&\Big(100\ 000 + 250 - 35\ 324\Big)(1) - \\
&\Big[100\big(29068 + 5200 - 0.05 \times 5\ 200\big)(1.05) - \\
&\Big(100\ 000 + 200 - 35\ 324\Big)100(0.005915)\Big] \\
&= 18\ 922{,}15\$
\end{aligned}
$$

b1)

Le profit/perte perte sur la mortalité correspond à

$$
\begin{aligned}
&= (b_6 + E_6 - {}_6V) - (N_5 q_{65} - N_5 q_{65}^{'}) \\
&= (100\ 000 + 200 - 35324)(0.05915 - 1) \\
&= -26\ 501{,}85\$
\end{aligned}
$$

b2)

Le profit/perte sur l'intérêt (mortalité déjà changée)

$$
\begin{aligned}
&= N_5({}_5V + G - e_5)(i^{'} - i) \\
&= 100(29\ 068 + 5\ 200 - 0.05 \times 5\ 200)(0.065 - 0.05) \\
&= 51\ 012\$
\end{aligned}
$$

b3)

Le profit sur les frais(mortalité et intérêt déjà changés) correspond à

$$
\begin{aligned}
&= N_5(e_5 - e_5^{'})(1+i^{'}) + (E_6 - E_6^{'})N_5 q_{65}^{'} \\
&= 100(0.05 \times 5\ 200 - 0.06 \times 5\ 200)(1.065) + (200 - 250)(1) \\
&= -5\ 588\$
\end{aligned}
$$

Remarque : - 26 501,85$ + 51 012$ - 5 588$ = 18 922,15$

1.23 Exemple 7.14 : (diapo 42)

- G = 100$
- b = 1 000$
- P = 80$
- i = 10%
- $e_0 = 0.4 \times G = 40\$$
- ${}_1V^* = 40\$$ (pour un contrat sans frais)
- ${}_0AS = 0\$$

On définit le quote-part de l'actif comme suit

$$AS_{k+1} = \frac{(AS_k + G - e_k)(1+i) - (b + E_k)q_{x+k}}{p_{x+k}} \tag{1.22}$$

$$
\begin{aligned}
AS_1 &= \frac{(AS_0 + G - e_0)(1+i) - (b + E_0)q_x}{p_x} \\
&= \frac{(0 + 100 - 40)(1.10) - 1\ 000 q_x}{p_x} \\
&= \frac{(60)(1.10) - 1\ 000 \times 0.05}{0.95} \\
&= 16.8\$
\end{aligned}
$$

Où q_x est trouver ainsi, (Pour un contrat sans frais)

$$
\begin{aligned}
{}_1V^* &= \frac{({}_0V^* + P)(1+i) - bq_x}{p_x} \\
40 &= \frac{(0 + 80)(1.1) - 1000 q_x}{1 - q_x} \\
q_x &= 0.05
\end{aligned}
$$

1.24 Exemple 7.15 : (diapo 43)

- G = 100$

- b = 10 000$
- P = 80$
- i = 5%
- $e_0 = 0.1\times G + 20$
- $e_1 = e_2 = ... = 0.02\times\ G + 5$
- ${}_0AS = 0\$$
- ${}_1AS = 400\$$
- $q_x = 0.02$
- $q_{x+1} = 0.025$

$$\begin{aligned}
AS_1 &= \frac{(AS_0 + G - e_0)(1+i) - bq_x}{p_x} \\
400 &= \frac{(0 + G - 0.10G - 20)(1.05) - 10\ 000 \times 0.02}{0.98} \\
G &= 648.68\$ \\
AS_2 &= \frac{(AS_1 + G - e_1)(1+i) - bq_{x+1}}{p_{x+1}} \\
&= \frac{(AS_1 + G - 0.02G - 5)(1.05) - 10\ 000 \times 0.025}{0.975} \\
&= \frac{(400 + (0.98)648.68 - 5)(1.05) - 250}{0.975} \\
&= 853.58\$
\end{aligned}$$

1.25 Équations différentielles de Thiele pour les réserves en temps continu

$$\frac{d}{dt}({}_tV) = \delta_t({}_tV) + G_t - e_t + {}_tV\mu_{[x]+t} - (b_t + E_t)\mu_{[x]+t} \tag{1.23}$$

Où

1) $\frac{d}{dt}({}_tV)$ = au taux instantené d'accroissement de ${}_tV$ en fonction de t.
2) $\delta_t({}_tV)$ = au rendement instantné d'intérêt sur la réserve
3) $G_t - e_t$ = au taux de la prime moins les frais.
4) ${}_tV\mu_{[x]+t}$ = au taux instantané de la libération de la réserve suite à un décès d'assuré.
5) $(b_t + E_t)\mu_{[x]+t}$ = au taux de versement de la prestation (avec les frais) de décès.

Notes : Les points 2, 3 et 4 sont des sources d'augmentation de la réserve et le point 4 est une source de dépense de la réserve. En utilisant le théorème d'Euler on obtient l'équation suivante

$$({}_tV) = \frac{({}_{t+h}V) - h\Big[G_t - e_t - (b_t + E_t)\mu_{[x]+t}\Big]}{1 + h \times \delta_t + h \times \mu_{[x]+t}} \tag{1.24}$$

1.26 Exemple 7.17 : (diapo 48)

- Une assurance vie mixte 20 années pour x = (30)
- $G_t = 2\ 500\$$
- b = 10 000$
- P = 80$
- $\delta = 4\%$
- $e_t = E_t = 0$
- *Standard Select Survival Model*

a)

** Notes : je n'arrive pas à la même chose que le prof, mais en comparant avec d'autres j'ai les mêmes réponsent. On cherche ${}_{10}V$, soit $VP_{@0}$(prestation future à payer)$-$ $VP_{@0}$(primes à recevoir).

$$\begin{aligned}
{}_{10}V &= 100\ 000\overline{A}_{40:\overline{10}|} - 2\ 500\overline{a}_{40:\overline{10}|} \\
&= 100\ 000\Big(1 - \delta\overline{A}_{40:\overline{10}|}\Big) - 2\ 500\overline{a}_{40:\overline{10}|} \\
&= 100\ 000 - \Big(100\ 000\delta + 2\ 500\Big)\overline{a}_{40:\overline{10}|} \\
&= 100\ 000 - \Big(100\ 000 \times 0.04 + 2\ 500\Big)8.2167 \\
&= 46\ 591\$
\end{aligned}$$

En utilisant l'approximation de Woolhouse[3] et une table de mortalité pour $\overline{a}_{40:\overline{10}|}$, on obtient le développement suivant

$$\overline{a}_{40:\overline{10}|} \approx \ddot{a}_{40:\overline{10}|} - \frac{1}{2}(1 - {}_{10}E_{40}) - \frac{1}{12}\Big(\delta + \mu_{40} + {}_{10}E_{40}(\delta + \mu_{40+10}\Big) \qquad (1.25)$$

3. voir notes supplémentaires plus loin.

où

$$\begin{aligned}
{}_{10}E_{40} &= v^{10}\,{}_{10}p_{40} \\
&= v^{10}\frac{l_{40+10}}{l_{40}} \\
&= v^{10}\frac{98576.37}{99338.26} \\
&= 0.665178924 \\
\mu_{40} &= A + B \times c^{x} \\
&= 0.00022 + 2.7 \times 10^{-6} \times 1.12440 \\
&= 0.00050975 \\
\mu_{50} &= 0.00022 + 2.7 \times 10^{-6} \times 1.12450 \\
&= 0.001152565 \\
\ddot{a}_{40:\overline{10}|} &= \ddot{a}_{40} - {}_{10}E_{40} \times \ddot{a}_{50} \\
&= 18.45776 - 0.665178924 \times 17.02453 \\
&= 7.133401455
\end{aligned}$$

À partir de l'équation 1.25, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{a}_{40:\overline{10}|} &\approx \ddot{a}_{40:\overline{10}|} - \frac{1}{2}(1 - {}_{10}E_{40}) - \frac{1}{12}\Big(\delta + \mu_{40} + {}_{10}E_{40}(\delta + \mu_{40+10}\Big) \\
&= 7.133401455 - \frac{1}{2}(1 - 0.665178924) - \\
&\frac{1}{12}(0.04 + 0.00050975 - 0.665178924(0.04 - 0.001152565)) \\
&= 7.133401455 - 0.167410538 - 0.001222438 \\
&= 6.964768479
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{cases} \mu_{[x]+s} = 0.9^{2-s}\mu_{x+s} & \text{, si } 0 \leq s \leq 2 \\ \mu_{[x]+s} = \mu_{x+s} & \text{, si } s > 2 \end{cases}$$

où $\mu_{x+s} = A + Bc^{x}$, avec A = 0.00022, B = $(2.7) * 10^{-6}$ et c = 1.124
Si n = 20 et h = 0.05, alors n - h = 19.95.
Selon l'équation de Thiele pour t = n - h,

$$\begin{aligned}
{}_{n-h}V &= \frac{{}_{n}V - h\big[G - 0 - b\mu_{[30]+n-h}\big]}{1 + h\delta_{n-h} + h\mu_{[30]+n-h}} \\
{}_{19.95}V &= \frac{{}_{20}V - 0.05\big[2\ 500 - 100\ 000\mu_{[30]+19.95}\big]}{1 + 0.05 \times 0.04 + 0.05\mu_{[30]+19.95}}
\end{aligned}$$

On sait que :

${}_{20}V = b = 100\ 000$ car il s'agit d'une assurance mixte
$\mu_{[30]+19.95} = \mu_{49.95} = 0.00022 + [2.7 \times 10^{-6}](1.124)^{49.95} = 0.001147131$

$$\begin{aligned} {}_{19.95}V &= \frac{100\ 000 - 0.05\big[2\ 500 - 100\ 000(0.001147131)\big]}{1 + 0.05 \times 0.04 + 0.05(0.001147131)} \\ &= 99.676 \end{aligned}$$

et on continue jusqu'à ${}_{10}V$...

Approximation de Woolhouse

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \alpha(m)\ddot{a}_x - \beta(m) \\ &= \frac{id}{i^{(m)}d^{(m)}}\ddot{a}_x - \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)}d^{(m)}} \end{aligned}$$

On peut aussi *approximer* l'approximation de Woolhouse ainsi :

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} - \frac{m^2-1}{12m^2}(\delta + \mu_x)$$

Et pour $\overline{a}_{x:\overline{n}|}$

$$\overline{a}_{x:\overline{n}|} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{1}{2}(1 - {}_nE_x) - \frac{1}{12}\Big(\delta + \mu_x + {}_nE_x(\delta + \mu_{x+n}\Big)$$

1.27 Notions sur les rachats d'assurances

1) Annulation du contrat avant son terme. L'assureur verse la valeur de rachat CV_t au client.
2) Assurance libérée : Montant réduit d'assurance sans prime à payer
3) Prolongation d'assurance : Prolongation de la protection d'assurance avec la même valeur de prestation de décès sans prime à payer.

$$CV_t = VP_{@t}(\text{Prestations à payer}) - VP_{@t}(\text{Primes ajustées à recevoir}) \qquad (1.26)$$

1.28 Exemple 7.18 : (diapo 54)

- Une assurance vie entière pour x = (40)
- b = 10 000$
- i = 6%
- table ILT

On définit la valeur de rachat CV_t comme suit

$$CV_t = \begin{cases} 0 & ,\text{si } t < 2 \\ (0.9)({}_tV) - 10 & ,\text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

La prime correspond à

$$\begin{aligned} P &= 10\ 000 \frac{A_{40}}{\ddot{a}_{40}} \\ &= 10\ 000 \times (0.010888) \\ &= 108.88\$ \\ {}_{10}V &= 10\ 000 A_{50} - P\ddot{a}_{50} \\ &= 10\ 000 \times 0.24905 - 108.88 \times 13.2668 \\ &= 1\ 046{,}04\$ \\ CV_{10} &= 0.9 \times {}_{10}V - 10 \\ &= 0.9 \times 1\ 046{,}04 - 10 \\ &= 931.435\$ \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} CV_{10} &= R \times A_{50} \\ R &= \frac{CV_{10}}{A_{50}} \\ &= \frac{931.435}{0.24905} \\ &= 3739.95\$ \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} CV_{10} &= 10\ 000 A^{\ 1}_{50:\overline{k|}} \\ 931.44 &= 10\ 000 A^{\ 1}_{50:\overline{k|}} \\ A^{\ 1}_{50:\overline{k|}} &= 0.093144 \\ A^{\ 1}_{50:\overline{k|}} &= A_{50} - {}_kE_{50} A_{50+k} = 0.093144 \\ A^{\ 1}_{50:\overline{20|}} &= A_{50} - {}_{20}E_{50} A_{50+20} = 0.130369 > 0.093144 \Rightarrow k < 20 \\ A^{\ 1}_{50:\overline{10|}} &= A_{50} - {}_{10}E_{50} A_{50+10} = 0.0604947 < 0.093144 \Rightarrow k > 10 \\ A^{\ 1}_{50:\overline{15|}} &= A_{50} - {}_{15}E_{50} A_{50+15} = 00.0945867 > 0.093144 \Rightarrow k > 10 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_{\overset{1}{50:\overline{15|}}} &= \sum_{0}^{14} v^{k+1} {}_{k}p_{50} q_{50+k} \\
&= \sum_{0}^{13} v^{k+1} {}_{k}p_{50} q_{50+k} + v^{15} {}_{14}p_{50} q_{50+14} \\
0.0945867 &= A_{\overset{1}{50:\overline{14|}}} + v^{15} {}_{14}p_{50} q_{50+14} \\
A_{\overset{1}{50:\overline{14|}}} &= 0.08759
\end{aligned}
$$

Alors, k ε(14,15) soit un contrat temporaire 14 années avec prestation de 10 000.

1.29 Exemple 7.19 : (diapo 55)

- b = 1 000$
- $AS_4 = 396.63\$$
- $AS_5 = 694.50\$$
- G = 281.77$
- $CV_5 = 572.12\$$
- $(\text{frais})_4 = c_4 \times G + e_4 = 0.05G + 7$
- $q^{(1)}_{x+4} = 0.09$ (probabilité de décès)
- $q^{(2)}_{x+4} = 0.26$ (probabilité d'annuler le contrat)

On cherche le taux i, on utilise l'équation 1.22 qui représente le quote-part de l'actif en ajoutant le coût de la valeur de rachat.

$$
\left(AS_4 + G_4 - (\text{frais})_4\right)(1+i) = 1\ 000 q^{(1)}_{x+4} + (CV_5) q^{(2)}_{x+4} + (AS_5)(1 - q^{(1)}_{x+4} - q^{(2)}_{x+4})
$$

$$
\left(396.63 + 281.77(0.95) - 7\right)(1+i) = 1\ 000 \times 0.09 + (572.12)(0.26) + 694.50(1 - 0.09 - 0.26)
$$

$$
i = 0.05
$$

1.30 Exemple 7.20 : (diapo 56)

- Contrat temporaire 10 ans pour x = [50]
- b = 500 000$ à la fin du mois du décès
- P = 460$ en début de chaque 3 mois pour une durée de 5 ans
- *SSSM*
- i = 5%
- frais sur la prime : $e = 0.10 \times P$
-

a)

$$
\begin{aligned}
{}_{2.75}V &= 500\ 000 A^{(12)}_{\overset{1}{52.75:\overline{7.25}|}} - 4(P-e)\ddot{a}^{(4)}_{52.75:\overline{2.25}|} \\
&= 500\ 000 \times 0.01327 - 4 \times (460 - 0.1 \times 460)2.14052 \\
&= 3\ 091{,}02
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
{}_3V &= VP_{@3}(\text{prestation au décès}) + VP_{@3}(frais) - VP_{@3}(\text{primes à recevoir}) \\
&= VP_{@3}(\text{prestation futures au décès}) - VP_{@3}(\text{primes à recevoir - frais futures}) \\
&= 500\ 000 A^{(12)}_{\overset{1}{53:\overline{7}|}} - 4(P-e)\ddot{a}^{(4)}_{53:\overline{2}|} \\
&= 500\ 000 \times 0.013057 - 4 \times (460 - 0.1 \times 460)1.91446 \\
&= 3\ 357{,}94
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
{}_{6.5}V &= 500\ 000 A^{(12)}_{\overset{1}{56.5:\overline{3.5}|}} - 0 \\
&= 500\ 000 \times 0.008532 \\
&= 4\ 265{,}63
\end{aligned}
$$

Remarques :

Pour trouver les valeurs de $A^{(12)}_{x:\overline{n}|}$ et $\ddot{a}^{(4)}_{x:\overline{n}|}$:

1) Pour trouver/estimer $\ddot{a}^{(4)}_{53:\overline{2}|}$ on peut utiliser deux méthodes :

a) En utilisant la définition suivante

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}^{(4)}_{53:\overline{2}|} &= \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{4} v^{\frac{k}{4}}\ {}_{\frac{k}{4}}p_{53} \\
&= \frac{1}{4}\left(v^{\frac{1}{4}}\ {}_{\frac{1}{4}}p_{53} + ... + v^{\frac{7}{4}}\ {}_{\frac{7}{4}}p_{53} \right)
\end{aligned}
$$

Où

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{53} &= e^{\int_{s=0}^{t} \mu_{x+s} ds} \\
&= e^{\int_{s=0}^{t} (A+Bc^{x+s}) ds} \\
&= e^{At - Bc^x(c^t-1)/ln(c)}
\end{aligned}
$$

Avec $A = 0.00022$, $B = 2.7 \times 10^{-6}$, $c = 1.124$

b) Ou par l'approximation suivante
   - Trouver $\ddot{a}_{53:\overline{2}|}$
   - Puis en utilisant une méthode d'approximation tel que Woolhouse (1.26), classique... on peut trouver $\ddot{a}^{(4)}_{53:\overline{2}|}$

2) Pour trouver/estimer $\ddot{a}^{(4)}_{52.75:\overline{2.25}|}$ on peut utiliser deux méthodes :

a) En utilisant la définition suivante

$$\ddot{a}^{(4)}_{52.75:\overline{2.25}|} = \sum_{k=0}^{8} \frac{1}{4} v^{\frac{k}{4}} {}_{\frac{k}{4}}p_{52.75}$$

b) Ou par l'approximation suivante
   - Trouver $\ddot{a}_{53:\overline{2}|}$
   - $\ddot{a}_{52.75:\overline{2.25}|} = \frac{1}{4} + \ddot{a}_{53:\overline{2}|} \times v^{\frac{1}{4}} {}_{\frac{1}{4}}p_{52.75}$

3) Pour trouver/estimer $A^{(12)}_{\overset{1}{53}:\overline{7}|}$ on peut utiliser les méthodes suivantes :

a) Utiliser la définition suivante

$$A^{(12)}_{\overset{1}{53}:\overline{7}|} = \sum_{k=0}^{83} v^{\frac{k+1}{12}} {}_{\frac{k}{12}}p_{53} q_{53+\frac{k}{12}}$$

b) À l'aide de la relation suivante
   - Trouver $\ddot{a}_{53:\overline{7}|}$
   - Trouver $A^{(12)}_{53:\overline{7}|}$ à l'aide de la relation suivante

$$A^{(12)}_{53:\overline{7}|} = 1 - d \times \ddot{a}_{53:\overline{7}|}$$

   Et ainsi

$$A^{(12)}_{\overset{1}{53}:\overline{7}|} = A^{(12)}_{53:\overline{7}|} - {}_7E_{53}$$

4) Sachant $A^{(12)}_{\overset{1}{53}:\overline{7}|}$, on peut trouver $A^{(12)}_{\overset{1}{52.75}:\overline{7.25}|}$

$$
\begin{aligned}
A^{(12)}_{\overset{1}{52.75}:\overline{7.25}|} =& v^{\frac{1}{12}} \times {}_{\frac{1}{12}}q_{52.75} + \\
& {}_{\frac{1}{12}}p_{52.75} \times {}_{\frac{1}{12}}q_{52+\frac{10}{12}} \times v^{\frac{2}{12}} + \\
& {}_{\frac{2}{12}}p_{52.75} \times {}_{\frac{1}{12}}q_{52.75+\frac{11}{12}} \times v^{\frac{3}{12}} + \\
& {}_{\frac{3}{12}}p_{52.75} \times v^{\frac{3}{12}} \times A^{(12)}_{\overset{1}{53}:\overline{7}|}
\end{aligned}
$$

1.31 Exemple 7.21 (diapo 57)

On reprend l'exemple 7.20 (1.30). Trouver les réserves :

a)

$$
\begin{aligned}
{}_{\text{2 ans et 10 mois}}V &\Rightarrow {}_{52.833}V \\
{}_{52.833}V &= 500\ 000 \times A^{(12)}_{\overset{1}{52.833}:\overline{7.167}|} - 4(P-e)\,{}_{\frac{2}{12}}p_{52.833}v^{\frac{2}{12}}\ddot{a}^{(4)}_{53:\overline{2}|} \\
&= 500\ 000 \times 0.0132012 - 3143.86 \\
&= 3\ 456{,}72\$
\end{aligned}
$$

Notes :

$$
VP_{@2.833}(\text{primes moins les frais à recevoir}) \neq 4(P-e)\ddot{a}_{52.833:\overline{2.167}|}
$$

Parce qu'il n'y a pas de prime au temps 2.833, les primes sont payées chaque 3 mois.

b)

$$
{}_{\text{2 ans et 9.5 mois}}V \Rightarrow {}_{52.792}V
$$

Ni prime ni prestation au décès au temps 2.792. On peut utiliser 2 méthodes pour trouver le montant de réserve
1)

$$
\begin{aligned}
({}_{2.792}V + 0)(1+i)^{0.5/12} &= 500\ 000 \times {}_{\frac{0.5}{12}}q_{52.792} + {}_{\frac{0.5}{12}}p_{52.792} \times {}_{2.833}V \\
&= 3\ 480{,}99\$
\end{aligned}
$$

2)

$$
\begin{aligned}
{}_{\text{2 ans et 9.5 mois}}V &\approx \left(1-\frac{0.5}{3}\right)\left({}_{\text{2 ans et 9 mois}}V + P - e\right) + \left(\frac{0.5}{3}\right){}_3V \\
&= 3\ 480{,}51\$
\end{aligned}
$$

Remarque

On peut utiliser une relation récursive pour trouver ${}_3V$ en sachant ${}_{2.75}V$

$$
\begin{aligned}
({}_{2.75}V + P - e)(1+i)^{1/12} &= 500\ 000 \times {}_{\frac{1}{12}}q_{52.75} + {}_{2.75+\frac{1}{12}}V \times {}_{\frac{1}{12}}p_{52.75} \\
({}_{2.833}V + 0)(1+i)^{1/12} &= 500\ 000 \times {}_{\frac{1}{12}}q_{52.833} + {}_{2.917}V \times {}_{\frac{1}{12}}p_{52.833} \\
({}_{2.917}V + 0)(1+i)^{1/12} &= 500\ 000 \times {}_{\frac{1}{12}}q_{52.917} + {}_{3}V \times {}_{\frac{1}{12}}p_{52.917} \\
\Rightarrow ({}_{2.75}V + P - e)(1+i)^{0.25} &= 500\ 000 \times \Big[{}_{\frac{1}{12}}q_{52.75} \times (1+i)^{2/12} + \\
& \quad {}_{\frac{1}{12}}p_{52.75} \times {}_{\frac{1}{12}}q_{52.75+\frac{1}{12}} \times (1+i)^{1/12} + \\
& \quad {}_{\frac{2}{12}}p_{52.75} \times {}_{\frac{1}{12}}q_{52.75+\frac{2}{12}} \Big] + \\
& \quad {}_3V \times {}_{\frac{2}{12}}p_{52.75}
\end{aligned}
$$

1.32 Frais d'acquisition reportés (DAC)

$$
\mathrm{DAC}_t = {}_tV^g - {}_tV^n = {}_tV^e \tag{1.27}
$$

Où

${}_tV^g$ est la réserve pour un contrat avec des primes brutes (avec frais),
${}_tV^n$ est la réserve avec primes pires (sans frais) et
${}_tV^e$ est la réserve des frais répartit sur le contrat

Remarque :

Si $e_0 = e_1 = e_2 = ... \Rightarrow {}_tV^g = {}_tV^n \Rightarrow \mathrm{DAC}_t = 0$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DAC}_t({}_tV^e) &= {}_tV^g - {}_tV^n \\
&= \Big[VP_{@t}(\text{prestation + frais}) - VP_{@t}(\text{primes brutes})\Big] - \\
&\quad \Big[VP_{@t}(\text{prestation}) - VP_{@t}(\text{primes brutes})\Big] \\
&= VP_{@t}(\text{frais}) - VP_{@t}(\text{chargements pour les frais}) \\
&= VP_{@t}(\text{frais}) - P^e \\
&= VP_{@t}(\text{frais}) - (P^g - P^n)
\end{aligned}
$$

Remarque :

$\text{DAC}_t = 0$ si $e_0 = e_k$, k = 1,2,...
$\text{DAC}_t < 0$ si $e_0 > e_k$, k = 1,2,...
$\text{DAC}_t > 0$ si $e_0 < e_k$, k = 1,2,...

1.33 Exemple 7.22 : (diapo 60)

- Contrat vie entière discret pour x = [50]
- b = 100 000$
- LA prime nivelée $P^g(P^n)$
- *SSSM*
- i = 4%
- frais sur la prime : $e_0 = 0.50P^g + 250$ et $e_0 = 0.03P^g + 25$

a) Trouver P^n et P^g
b) Trouver ${}_{10}V^e$;${}_{10}V^n$;${}_{10}V^g$

a)

$$
\begin{aligned}
P^g \ddot{a}_{[50]} &= 100\ 000 A_{[50]} + 25\ddot{a}_{[50]} + 225 + 0.03P^g\ddot{a}_{[50]} + 0.47P^g \\
P^g &= \frac{100\ 000A_{[50]} + 25\ddot{a}_{[50]} + 225}{0.97\ddot{a}_{[50]} - 0.47} \\
&= 1435.89 \\
P^n &= \frac{100\ 000A_{[50]}}{\ddot{a}_{[50]}} \\
&= 1321.31 \\
P^e &= p^g - p^n = 114.58
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
{}_{10}V^e &= 25\ddot{a}_{60} + 0.03P^g\ddot{a}_{60} - P^e\ddot{a}_{60} \\
&= -46.50\ddot{a}_{60} \\
&= -770.14 \\
{}_{10}V^n &= 100\ 000A_{60}P^n\ddot{a}_{60} \\
&= 14\ 416{,}12 \\
{}_{10}V^g &= 100\ 000A_{60} + 25\ddot{a}_{60} - 0.97P^g\ddot{a}_{60} \\
&= 13\ 645{,}98
\end{aligned}
$$

1.34 Exemple 7.23 : (diapo 63)

On utilise les mêmes informations que l'exemple 7.22 à la section 1.33. On cherche les primes FTP et les réserves à différents moments.

a)

$$\begin{aligned}
\pi_0^{FTP} &= 100\ 000 \times v \times q_{[50]} \\
&= 99.36 \\
\pi := \pi_1^{FTP} &= \pi_2^{FTP} = ... \\
&= \frac{100\ 000 A_{[50]+1}}{\ddot{a}_{[50]+1}} \\
&= 1\ 387{,}89
\end{aligned}$$

b)

Au temps t =0

$$\begin{aligned}
{}_0V^n &= {}_0V^g = 0 \text{ (Prime principe d'équivalence)} \\
{}_0V^{FTP} &= 100\ 000 A_{[50]} - \pi_0^{FTP} - (\pi^{FTP} \times v \times p_{[50]})\ddot{a}_{[50]+1} \\
&= 100\ 000(vq_{[50]} + v \times p_{[50]} A_{[50]+1} - 100\ 000 \times v \times q_{[50]} - \frac{100\ 000 A_{[50]+1}}{\ddot{a}_{[50]+1}} \times v \times p_{[50]} \ddot{a}_{[50]+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Au temps t =1

$$\begin{aligned}
{}_1V^n &= 100\ 000 A_{[50]+1} - \pi_0^{FTP} - (\pi^{FTP} \times v \times p_{[50]})\ddot{a}_{[50]+1} \\
{}_0V^{FTP} &= 100\ 000 A_{[50]} - \pi_0^{FTP} - (\pi^{FTP} \times v \times p_{[50]})\ddot{a}_{[50]+1} \\
&= 100\ 000(vq_{[50]} + v \times p_{[50]} A_{[50]+1} - 100\ 000 \times v \times q_{[50]} - \frac{100\ 000 A_{[50]+1}}{\ddot{a}_{[50]+1}} \times v \times p_{[50]} \ddot{a}_{[50]+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$