Loi discrète	Fonction de masse $Pr(X=x)$	Fonction de répartition $(F_X(x))$	Espérance $(E[X])$	Variance $(Var(X))$	Fonction de génératrice de moments $(M_X(t))$	Fonction génératrice de probabilité $(P_X(t))$
Loi uniforme $X \sim Udisc(a,b)$ *($^1/_n$ chance)*	$\begin{cases} \frac{1}{b-a+1}, x \in \{a, a+1, \dots b-1, b\} \\ 0, \quad ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x < a \\ \frac{\lfloor x \rfloor - a + 1}{b-a+1}, a \le x < b \\ 1, x \ge b \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$\frac{e^{at}-e^{(b+1)t}}{(b-a+1)(1-e^t)}$	N/A
Loi de Bernoulli $X \sim Bern(p)$ *(2 résultats probable – soit 1 succès ou 1 échec)*	$\begin{cases} 1-p, x=0 \\ p, x=1 \\ 0, \quad ailleurs \end{cases}$ *X est un v.a représentant un succès*	$= \begin{cases} 0, x<0 \\ 1-p, 0 \le x < 1 \\ 1, x \ge 1 \end{cases}$	p	$p(1-p)$	$(1-p)+pe^t$	$(1-p)+pt$
Loi binomiale $X \sim Bin(n,p)$ *(n essais d'une loi de Bernoulli)*	$\begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = \mathbf{0}, 1, 2 \dots n \\ 0, ailleurs \end{cases}$ *X est une v.a représentant le nombre de succès dans n essais*	*Il n'y a pas de forme explicite,* $= \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$((1-p)+pe^t)^n$	$((1-p)+pt)^n$
Loi poisson $X \sim pois(\lambda)$ *(évènement qui se produit λ par mesure considéré)*	$\begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x = \mathbf{0}, 1, 2, \dots \\ 0, ailleurs \end{cases}$ *X est une v.a représentant le nombre de fois où un évènement se produit*	*Il n'y a pas de forme explicite,* $\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, x \ge 0$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$	$e^{\lambda(t-1)}$
Loi géométrique $X \sim géo(p)$ *(Soit le nombre d'essais nécessaires pour obtenir un* ***premier*** *succès)*	$= \begin{cases} p(1-p)^{x-1}, x = \mathbf{1}, 2, 3 \dots \\ 0, ailleurs \end{cases}$ *X est une v.a représentant le nombre d'essais nécessaire avant un* ***premier*** *succès*	$\begin{cases} 0, x < 1 \\ 1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor}, x \ge 1 \end{cases}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$
Loi géométrique « négative » $X \sim géo(p)$ *(Nombre d'échec avant un* ***premier*** *succès)*	$\begin{cases} p(1-p)^x, x = \mathbf{0}, 1, 2, 3 \dots \\ 0, ailleurs \end{cases}$ *X est une v.a représentant le nombre d'échec avant un* ***premier*** *succès*	$1-(1-p)^{\lfloor x \rfloor + 1}$	$\frac{(1-p)}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$	Lien entre les 2 définitions : $X_1 = nbr\ d'essais\ pour\ le\ 1er\ succès$ $X_2 = nbr\ d'essais$ avant $le\ 1er\ succès$ $X_1 = X_2 + 1$ $E[X_2] = E[X_1 - 1] = E[X_1] - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$ $Var(X_2) = Var(X_1 - 1) = Var(X_1) = \frac{(1-p)}{p^2}$	

Loi binomiale négative $X \sim Binnég(n,p)$ *(Nombre d'essais nécessaire pour obtenir le rième succès)*	$\begin{cases} \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}, x = \boldsymbol{r}, r+1, \ldots \\ 0, ailleurs \end{cases}$ *X est une v.a représentant le nombre d'essais avant le rième succès* ***peut aussi se définir en termes de nombre d'échec avant le rième succès.*	N/A	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$\left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$	$\left(\frac{pt}{1-(1-p)t}\right)^r$
Loi Hypergéométrique $X \sim hyper(N,n,m)$ *(expérience sans remise)*	$\begin{cases} \frac{\binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}, x = 0,1,\ldots,\min(n,m) \\ 0, ailleurs \end{cases}$ *Où m = 1er type*	N/A	$n\frac{m}{N}$	$Var(x) = \frac{nm}{N}\left(\frac{(n-1)(m-1)}{N-1} + 1 - \frac{nm}{N}\right)$	N/A	

Note importante et remarque sur **loi discrète** :

FGM $(M_X(t))$

$(E[X]) = \sum_i (e^{tx_i})\, Pr(X = x_i) \;\; \rightarrow 1 + tE[X] + \frac{t^2}{2!}E[X^2] + \cdots$ $(Série\ de\ Taylor\ où\ a = 0)$

Loi binomiale :

- Pour vérifier que la v.a binomiale X est bien définie on peut la tester par théorème du binôme : $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \left(p + (1-p)\right)^n = 1$
- $Var(X) = p(1-p) < E[X] = np\ , donc, p(1-p) < np$

Loi de Poisson :

- $Var(X) = \lambda = E[X]\ , donc, Var(X) = E[X]$
- Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson :
  Soit X une v.a $\sim binom(n,p)$, si n est grand et p est petit, avec $\lim_{n\to\infty} np \rightarrow \lambda$, alors X $\sim Poisson(\lambda = np)$

Loi géométrique : *(Cas particulier de la loi binomiale négative où r= 1)*

La loi géométrique est sans mémoire.

$P(X > n + m \mid X > n) = P(X > m)$

Loi binomiale négative :

- $Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2} > E[X] = \frac{r}{p}\ , donc, \frac{r(1-p)}{p^2} > \frac{r}{p}$

Loi continue **Pas de FGP*	*Fonction de densité de probabilité* $f_X(x)$	*Fonction de répartition* $(F_X(x))$	Fonction quantile $(F_X^{-1}(u))$	*Espérance* $(E[X])$	*Variance* $(Var(X))$	*Fonction de génératrice de moments* $(M_X(t))$
Loi uniforme $X \sim Uconti(a,b)$	$\begin{cases} \frac{1}{b-a}, a \le x \le b \\ 0, ailleurs \end{cases}$	$\begin{cases} 0, x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, a < x < b \\ 1, x \ge b \end{cases}$	$u(b-a)+a$ *Dans les notes de cours de JP	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}$
Loi normale $X \sim \mathrm{N}(\mu, \alpha)$ **Savoir que* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$	$\begin{cases} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \\ 0, ailleurs \end{cases}$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, où $\Phi \sim \mathrm{N}(\mu = 0 \; et \; \sigma = 1)$	$\mu + \sigma\Phi^{-1}(u)$	μ	σ^2	$e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$
Loi lognormale $X \sim LN(\mu, \sigma)$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2}$	$\Phi\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)$, où	$e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(u)}$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$	N/A
Loi exponentielle $X \sim Exp(\lambda)$ **Cas spécifique de la loi gamma où* $(\alpha,\lambda) = (1,\lambda)$	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0, \lambda > 0 \\ 0, ailleurs \end{cases}$	$1 - e^{-\lambda x}, x > 0$	$-\frac{\ln(1-u)}{\lambda}, 0 < u \le 1$ *Dans les notes de cours de JP	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda$
Loi gamma $X \sim Gamma(\alpha, \lambda)$	$\begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \\ 0, ailleurs \end{cases}$ Où $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx$ *(fonction gamma)*	$\frac{\Gamma(\alpha; \lambda x)}{\Gamma(\alpha)}$, $x > 0, \alpha > 0, \lambda > 0$ *Où* $\Gamma(\alpha; \lambda x) = \int_0^x y^{\alpha-1} e^{-y} \, dy$ *(fonction gamma incomplète)* *Pour α entier utiliser :* $1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$		$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha, t < \lambda$
Loi khi-carré $X \sim \chi^2(n)$ **Cas spécifique de la loi gamma où* $(\alpha,\lambda) = \left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\begin{cases} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{-x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, x > 0, n \in N^+ \\ o, ailleurs \end{cases}$	$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, x > 0, n \in N^+$		n	2n	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}, t < \frac{1}{2}$
Loi Bêta $X \sim Bêta(\alpha, \beta)$	$\begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, 0 < x < 1, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0, ailleurs \end{cases}$ Où $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \, dx$ $= \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ *(fonction bêta)*	$\frac{B(x;\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)}$ *Où* $B(x;\alpha,\beta) = \int_0^x y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1} \, dy$ *(fonction bêta incomplète)*		$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	***voir note plus bas (ça rentre pas cette affaire-là!!)

Note importante et remarque sur **loi continue** :

Distribution d'une fonction d'une variable aléatoire continue :

- $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right|$

Loi exponentielle :

- Propriété multiplicative :$P(X > s + t) = P(X > s)P(X > t)$
- Propriété sans mémoire :$P(X > s + t | P > t) = P(X > s)$

Loi Gamma :

- $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$
- $\Gamma(n) = (n - 1)!$

Loi Bêta :

- $M_x(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha+j}{\alpha+\beta+j}$