

## CONTRIBUTEURS

## MAS-I : Modern Actuarial Statistics I (ACT-2000, ACT-2003, ACT-2005)

**aut., cre.** Alec James van Rassel

**Référence (manuels, YouTube, notes de cours)** En ordre alphabétique :

**src.** Coaching Actuaries, Coaching Actuaries MAS-I Manual.

**src.** Cossette, H., ACT-1002 : Analyse probabiliste des risques actuariels, Université Laval, Québec (QC).

**src.** Côté, M.-P., ACT-2000 : Analyse statistique des risques actuariels, Université Laval, Québec (QC).

**src.** Hogg, R.V. ; McKean, J.W. ; and Craig, A.T., Introduction to Mathematical Statistics, 7th Edition, Prentice Hall, 2013.

**src.** Luong, A., ACT-2000 : Analyse statistique des risques actuariels, Université Laval, Québec (QC).

**src.** Luong, A., ACT-2005 : Mathématiques actuarielles IARD I, Université Laval, Québec (QC).

**src.** Marceau, É., ACT-2001 : Introduction à l'actuariat II, Université Laval, Québec (QC).

**src.** Starmer, J. (2015). StatQuest. Retrieved from <https://statquest.org/>.

**src.** Tse, Y., Nonlife Actuarial Models, Theory Methods and Evaluation, Cambridge University Press, 2009.

**src.** Weishaus, A., CAS Exam MAS-I, Study Manual, 1st Edition, Actuarial Study Materials, 2018.

**Contributeurs**

**pfr.** Sharon van Rassel

**pfr.** Louis-Philippe Vignault

**pfr.** Philippe Morin

## Cours reliés

**ACT-2000** Analyse statistique des risques actuariels

**ACT-2003** Modèles linéaires en actuariat

**ACT-2005** Mathématiques actuarielles IARD I

**ACT-2009** Processus stochastiques

En partie : mathématiques actuarielles vie I (**ACT-2004**), séries chronologiques (**ACT-2010**), introduction à l'actuariat II (**ACT-2001**) et méthodes numériques (**ACT-2002**).

## Motivation

Inspiré par la chaîne de vidéos YouTube [StatQuest](#) et mon étude pour l'examen MAS-I, je crée ce document dans le but de simplifier tous les obstacles que j'ai encourus dans mon apprentissage des statistiques, et ainsi simplifier la vie des actuaires.

L'objectif est d'expliquer les concepts d'une façon claire, concise et visuelle! Je vous prie de me faire part de tous commentaires et de me signaler toute erreur que vous trouvez!

## Première partie

## Analyse statistique des risques actuariels

## Échantillonnage et statistiques

## Notation

- $X$  Variable aléatoire d'intérêt  $X$  avec fonction de densité  $f(x;\theta)$  ;
- $\Theta$  Ensemble des valeurs possible pour le paramètre  $\theta$  tel que  $\theta \in \Theta$  ;
- > Par exemple, pour une loi normale  $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : \sigma^2 > 0, -\infty < \mu < \infty\}$ .
- $\{X_1, \dots, X_n\}$  Échantillon de taille  $n$ .
- > On pose que les observations ont la même distribution que  $X$  ;
  - > On pose habituellement l'indépendance entre les observations ;
  - > L'indépendance et la distribution identique rend l'échantillon un **échantillon aléatoire** ;
  - > Lorsque nous avons des observations, on dénote l'échantillon par  $\{x_1, \dots, x_n\}$  pour représenter des *réalisations* de l'échantillon.

## Vraisemblance

## Notation

$\mathcal{L}(\theta; \mathbf{x})$  Fonction de vraisemblance de  $\theta$  en fonction des observations  $\mathbf{x}$  ;

$$\mathcal{L}(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \theta)$$

où  $\mathbf{x}^\top = (x_1, \dots, x_n)$ .

$\{X_1, \dots, X_n\}$  Échantillon de  $n$  observations.

- > Si les  $n$  observations sont indépendantes entres-elles et proviennent de la même distribution paramétrique (identiquement distribué) c'est un **échantillon aléatoire (iid)** ;
- > On peut le dénoter comme  $\{X_n\}$ .

Pour bien saisir ce que représente la fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}(\theta; \mathbf{x})$ , il faut songer à ce que représente  $f(x; \theta)$ .

La fonction de vraisemblance  $\mathcal{L}(\theta; \mathbf{x})$  se résume à une différente façon de voir la fonction de densité  $f(x; \theta)$ .

- > Au lieu de faire varier  $\mathbf{x}$  pour un (ou des) paramètre  $\theta$  fixe, on fait varier  $\theta$  pour un échantillon d'observations  $\mathbf{x}$  fixé ;

## Qualité de l'estimateur

La première section traite de « **estimateurs ponctuels** ». C'est-à-dire, on produit une seule valeur comme notre meilleur essai pour déterminer la valeur de la population inconnue. Intrinsèquement, on ne s'attend pas à ce que cette valeur (même si c'en est une bonne) soit la vraie valeur exacte.

Une hypothèse plus utile à des fins d'interprétation est plutôt un **estimateur par intervalle**; au lieu d'une seule valeur, il retourne un intervalle de valeurs plausibles qui peuvent toutes être la vraie valeur. Le type principal d'*estimateur par intervalle* est l'*intervalle de confiance* traité dans la deuxième sous-section.

En bref :

**Estimateur ponctuel** L'estimateur  $\hat{\theta}_n$  assigne une valeur précise à  $\theta$  selon l'échantillon.

**Estimateur par intervalle** Un *intervalle aléatoire*, construit avec l'échantillon aléatoire, ayant une certaine probabilité de contenir la vraie valeur  $\theta$ .

## Estimation ponctuelle

### Biais

#### Notation

- $\theta$  Paramètre inconnu à estimer ;
- $\Theta$  Ensemble des valeurs possibles pour  $\theta$  ;
  - › Dans le cas multivarié, on a un vecteur  $\theta$  et on définit un ensemble des valeurs possibles  $\Theta$  ;
  - › Par exemple, une loi Gamma a  $\theta = \{\alpha, \beta\}$  et, puisque ces paramètres sont strictement positifs,  $\Theta = \{\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\}$ .
- $\hat{\theta}_n$  Estimateur de  $\theta$  basé sur  $n$  observations ;
  - › Souvent, on écrit  $\hat{\theta}$  pour simplifier la notation.
- $B(\hat{\theta}_n)$  Biais de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$ .

Lorsque nous avons un estimateur  $\hat{\theta}_n$  pour un paramètre inconnu  $\theta$  on espère que, **en moyenne**, ses erreurs de prévision seront nulles. Le **biais**  $B(\hat{\theta}_n)$  d'un estimateur quantifie les erreurs de l'estimateur dans ses prévisions de la vraie valeur du paramètre  $\theta$ .

#### Biais d'un estimateur

$$B(\hat{\theta}_n) = E[\hat{\theta}_n | \theta] - \theta$$

où :

$E[\hat{\theta}_n | \theta]$  l'espérance de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  sachant que la vraie valeur du paramètre est  $\theta$ .

**Estimateur sans biais** lorsque le biais d'un estimateur est nul :

$$B(\hat{\theta}_n) = 0$$

**Estimateur asymptotiquement sans biais** lorsque le biais d'un estimateur tend vers 0 alors que le nombre d'observations sur lequel il est basé tend vers l'infini :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(\hat{\theta}_n) = 0$$

Bien que le biais quantifie les erreurs de prévisions de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$ , il n'indique pas la variabilité de ses prévisions. Imagine une personne ayant ses pieds dans de l'eau bouillante et sa tête dans un congélateur. **En moyenne**, sa température corporelle est tiède. En réalité, sa température corporelle est à la fois extrêmement élevée et faible.

Les prévisions des estimateurs non biaisés seront toujours proches de la vraie valeur  $\theta$ . Cependant, être bon **en moyenne** n'est pas suffisant et on souhaite évaluer la variabilité des prévisions d'un estimateur  $\hat{\theta}_n$  avec sa variance  $\text{Var}(\hat{\theta}_n)$ .

### Borne Cramér-Rao

#### Notation

- $S(\theta)$  Fonction de Score,  $S(\theta) = \frac{\partial \ln f(\theta; x)}{\partial \theta}$  ;
- $I_n(\theta)$  Matrice d'information de Fisher d'un échantillon aléatoire  $\{X_n\}$  ;
  - › La matrice d'information Fisher pour une seule observation sera donc dénotée  $I(\theta)$  ;
  - › On obtient une "matrice" lorsque nous estimons plusieurs paramètres et donc  $\theta$  n'est pas juste un scalaire  $\theta$ .
- $\hat{\theta}^{EMV}$  Estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ .

Lorsque l'on analyse la variance d'un estimateur sans biais, on débute par définir la **borne inférieure de Cramér-Rao** de sa variance  $\text{Var}(\hat{\theta}_n)$ . Cette borne utilise la **matrice d'information de Fisher**  $I_n(\theta)$  :

**Borne inférieure Cramér-Rao**

Sous certaines conditions de régularité,

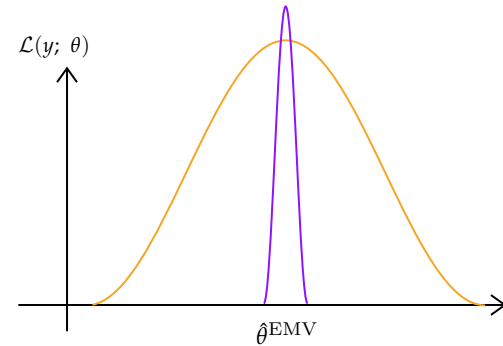
$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}$$

où

$$I(\theta) = E \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(\theta; x) \right)^2 \right] \stackrel{\text{iid}}{=} E \left[ - \frac{\partial^2 \ln f(\theta; x)}{\partial \theta^2} \right]$$

$$I_n(\theta) = E \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \mathcal{L}(\theta; x) \right)^2 \right] \stackrel{\text{iid}}{=} E \left[ - \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\theta; x)}{\partial \theta^2} \right]$$

**Note** Dans le cas d'un échantillon aléatoire (alias, les données sont iid) on obtient la deuxième équation et  $I_n(\theta) = nI(\theta)$ .



On peut donc voir que la forme de la fonction de vraisemblance est plus comprimée, alias que la concavité est plus forte, que l'autre fonction qui se maximise au même point. C'est-à-dire, la fonction de vraisemblance correspond à la fonction avec la plus forte concavité dont le maximum est à  $\hat{\theta}_n^{\text{EMV}}$ .

**Détails sur la borne Cramér-Rao**

La borne de Cramér-Rao est un concept qui échappe souvent aux étudiants. Sur la base de [ce vidéo](#) et de [ce vidéo](#), je vais tenter d'expliquer l'intuition sous-jacente au concept. Ce concept va réapparaître plus tard dans le bac et donc, s'il n'est pas clair d'ici la fin de la section, je vous conseille d'aller visionner les vidéos.

Premièrement, on définit l'utilité des deux premières dérivées :

$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}(\theta)$  : Représente le « rate of change » de la fonction ;

$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \mathcal{L}(\theta)$  : Représente la concavité de la fonction ; on peut y penser comme sa forme.

L'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV)  $\hat{\theta}^{\text{EMV}}$  du paramètre  $\theta$  d'une distribution maximise la fonction de vraisemblance en fonction d'un échantillon aléatoire. En posant la première dérivée de la fonction de vraisemblance comme étant égale à 0, on trouve le "point" auquel l'EMV est égale à  $\theta - \theta^{\text{EMV}} = \theta$ .

**Note** : L'EMV devient un "point" lorsqu'on le calcule pour un échantillon aléatoire d'observations.

La fonction de vraisemblance est **concave** et, puisque sa première dérivée est nulle à  $\hat{\theta}_n^{\text{EMV}}$ , elle va augmenter avant puis diminuer après. La première dérivée permet donc de trouver une fonction qui est maximisée à  $\hat{\theta}_n^{\text{EMV}}$ . Cependant, ceci ne permet pas d'identifier une fonction unique—plusieurs fonctions peuvent être maximisées au même **point** tout en ayant des formes différentes.

Par exemple, on trace ci-dessous la fonction de vraisemblance et une autre fonction maximisée à  $\hat{\theta}_n^{\text{EMV}}$  :

On peut observer que plus la concavité augmente, plus la variabilité de la fonction de vraisemblance se rapetisse. En effet, une faible concavité implique que la fonction de vraisemblance a un grand étendue de valeurs possibles et moins de points près de  $\hat{\theta}_n^{\text{EMV}}$ . En bref, la deuxième dérivée assure que parmi les fonctions se maximisant à  $\hat{\theta}_n^{\text{EMV}}$ , la fonction de vraisemblance est celle dont la variabilité des prévisions est minimisée.

L'information de Fisher permet de quantifier cette fonction de la deuxième dérivée. Puis, la borne de Cramér-Rao se définit comme son réciproque  $1/I(\theta)$ . L'intuition est que plus la concavité est faible, plus l'étendue est grand. Prendre le réciproque de l'information de Fisher permet donc de quantifier l'agrandissement de l'étendu.

Lorsque l'information de Fisher tend vers l'infini (alias la force de la concavité croît infiniment), on dit que la distribution de l'estimateur est "asymptotiquement normale" tel que  $\hat{\theta}^{\text{EMV}} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathcal{N}\left(\mu = \theta, \sigma^2 = \frac{1}{I(\theta)}\right)$  où a.s. veut dire asymptotiquement.

## Efficacité

## Notation

$\text{eff}(\hat{\theta}_n)$  Efficacité d'un estimateur  $\hat{\theta}_n$  ;

$\text{eff}(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n)$  Efficacité de l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  relatif à l'estimateur  $\tilde{\theta}_n$ .

Avec le concept de l'information de Fisher, on définit l'**efficacité d'un estimateur** comme le ratio de la borne Cramér-Rao sur la variance de l'estimateur :

## Efficacité d'un estimateur

$$\text{eff}(\hat{\theta}_n) = \frac{\text{Var}(\hat{\theta}_n)^{\text{Rao}}}{\text{Var}(\hat{\theta})} = \frac{1}{I(\theta)\text{Var}(\hat{\theta})}$$

**Estimateur « efficient »** Lorsque la variance de l'estimateur  $\text{Var}(\hat{\theta}_n)$  est égale à la borne de Cramér-Rao.

$$\text{eff}(\hat{\theta}_n) = 1$$

➤ Étant égal à la borne, il *doit* être l'estimateur avec la plus petite de tous les estimateurs sans biais.

On dit qu'il est le « **Minimum Variance Unbiased Estimator (MVUE)** ».

De plus, on peut généraliser cette formulation pour obtenir l'efficacité relative d'un estimateur à un autre :

## Efficacité relative

$$\text{eff}(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) = \frac{\text{Var}(\tilde{\theta}_n)}{\text{Var}(\hat{\theta}_n)}$$

où les estimateurs  $\hat{\theta}_n$  et  $\tilde{\theta}_n$  sont sans biais.

Lorsque :

$\text{eff}(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) < 1$  : L'estimateur  $\hat{\theta}_n$  est plus efficace que l'estimateur  $\tilde{\theta}_n$ ,  
et vice-versa si  $\text{eff}(\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n) > 1$ .

## Convergence

Nous pouvons également évaluer si un estimateur converge avec des très grands échantillons ; ceci évalue si un estimateur est cohérent. Un estimateur  $\hat{\theta}_n$  est dit d'être « **consistent** » si la probabilité que sa prévision  $\hat{\theta}$  du paramètre  $\theta$  diffère de la vraie valeur par une erreur, près de 0,  $\epsilon$  tend vers 0 alors que la taille de l'échantillon  $n$  tend vers l'infini :

## Convergence (consistency) d'un estimateur

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) = 0, \quad \epsilon > 0$$

Ce critère pour qu'un estimateur  $\hat{\theta}_n$  soit « **consistent** » peut être satisfait lorsque :

1. l'estimateur est **asymptotiquement sans biais** ;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(\hat{\theta}_n) = 0$$

2. la **variance de l'estimateur tend vers 0**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}_n) = 0$$

D'ailleurs, nous avons déjà raisonné ceci avec la borne inférieure Cramér-Rao.

Cependant, l'inverse n'est pas vrai—qu'un estimateur soit « **consistent** » n'implique pas que sa variance ni que son biais tendent vers 0.

Malgré la nature plaisante de la convergence d'un estimateur, beaucoup d'estimateurs ont cette propriété. Nous voulons alors une mesure qui n'indique pas seulement qu'un estimateur arrive près de la bonne valeur souvent (*alias, une très petite variance*), mais qu'il est mieux que d'autres estimateurs. De plus, dû à la sélection arbitraire de l'erreur  $\epsilon$  pour la *consistency* d'un estimateur, il est possible de la choisir malicieusement afin de faire parler les données comme on le souhaite.

## Détails sur la convergence

On reprend les résultats de la section précédente en expliquant plus en détail la mathématique sous-jacente.

## Convergence en probabilité

## Notation

$\{Y_n\}$  Séquence de variables aléatoires ;

$Y$  Variable aléatoire comprise dans  $\{Y_n\}$ .

On dit que  $Y_n$  converge en probabilité à  $Y$  si  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[|Y_n - Y| \geq \varepsilon] = 0$$

ou de façon équivalente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[|Y_n - Y| < \varepsilon] = 1$$

On dénote la convergence en probabilité par :  $Y_n \xrightarrow{P} Y$ .

**Note :** La convergence en probabilité est d'ailleurs le théorème sous-jacent à la loi faible des grands nombres vue en prob.

### Loi faible des grands nombres

#### Notation

$\{Y_n\}$  Séquence de variables aléatoires iid avec moyenne  $\mu$  et variance  $\sigma^2$  où  $\sigma^2 < \infty$  ;

$\bar{X}_n$  Moyenne empirique.

On pose que  $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ .

### Théorèmes résultant de la convergence en probabilité

Soit  $X_n \xrightarrow{P} X$  et  $Y_n \xrightarrow{P} Y$ . Alors  $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$ .

Soit  $X_n \xrightarrow{P} X$  et une constante  $a$ . Alors  $aX_n \xrightarrow{P} aX$ .

Soit  $X_n \xrightarrow{P} a$  et la fonction  $g(\cdot)$  continue à  $a$ . Alors  $g(X_n) \xrightarrow{P} g(a)$ .

Soit  $X_n \xrightarrow{P} X$  et la fonction continue  $g(\cdot)$ . Alors  $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$ .

Soit  $X_n \xrightarrow{P} X$  et  $Y_n \xrightarrow{P} Y$ . Alors  $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$ .

### « Consistency »

#### Notation

$Y$  Variable aléatoire avec une distribution paramétrique de paramètre  $\theta$  ;

$\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$  Échantillon de la distribution de  $Y$  ;

$\hat{\theta}_n$  Estimateur de  $\theta$ .

On dit que  $\hat{\theta}_n$  est un estimateur « *consistent* » si  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$ .

### Erreur quadratique moyenne

#### Notation

$\text{MSE}_{\hat{\theta}_n}(\theta)$  Erreur quadratique moyenne d'un estimateur  $\hat{\theta}_n$

On définit alors l'**Erreur Quadratique Moyenne** (EQM), ou **Mean Squared Error (MSE)**, permettant de comparer les différents estimateurs ayant tous une bonne *consistency* en assurant une cohérence d'interprétation. Cette mesure permet de quantifier l'écart entre un estimateur  $\hat{\theta}_n$  et le vrai paramètre  $\theta$ .

### Erreur Quadratique Moyenne (Mean Squared Error)

$$\text{MSE}_{\hat{\theta}}(\theta) = E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] \Leftrightarrow \text{Var}(\hat{\theta}_n) + [B(\hat{\theta}_n)]^2$$

En combinant tous ces critères, le meilleur estimateur est alors l'estimateur **sans biais** ayant la **plus petite variance** possible parmi tous les estimateurs *sans biais*. C'est-à-dire, le **Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator (UMVUE)**.

## Estimation par intervalles

## Statistiques

## Notation

$\hat{\theta}_L$  et  $\hat{\theta}_U$  Fonctions de l'échantillon aléatoire  $\{X_1, \dots, X_n\}$  où  $\hat{\theta}_L < \hat{\theta}_U$  ;  
 $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$  Intervalle de confiance de  $100(1 - \alpha)\%$  de  $\theta$  si  
 $\Pr(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha$  ;  
 > Avec les réalisations, on a un intervalle de nombres réels  $(\hat{\theta}_l, \hat{\theta}_u)$ .  
 $(1 - \alpha)$  Niveau de confiance de l'intervalle où  $\alpha \in (0, 1)$ .

Le type principal d'estimateur par intervalle est l'**intervalle de confiance** :

## Intervalle de confiance

Nous sommes confiants à un niveau de  $100(1 - \alpha)\%$  que le paramètre inconnu  $\theta$  est entre  $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$ .  
 De façon équivalente, nous sommes confiants à un seuil de  $\alpha\%$  que  $\theta$  est entre  $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$ .

Donc,  $\theta \in (\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$  et nous pouvons dire que  $\Pr(\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U) \geq (1 - \alpha)$   
 pour tout  $\theta$ .

Ce qu'il faut bien saisir avec les intervalles de confiance, c'est que soit  $\theta$  est contenu dans l'intervalle  $(\hat{\theta}_l, \hat{\theta}_u)$  ou il ne l'est pas.

On peut conceptualiser les intervalles comme une distribution binomiale avec probabilité de succès de  $(1 - \alpha)$ . Si l'on effectue  $M$  essais indépendants, on s'attend à ce que  $(1 - \alpha)M$  intervalles de confiance contiennent  $\theta$ . Donc on se sent confiant à  $(1 - \alpha)\%$  que la vraie valeur de  $\theta$  est contenue dans l'intervalle observé  $(\hat{\theta}_l, \hat{\theta}_u)$ .

**Efficacité des intervalles de confiance** Typiquement, la largeur de l'intervalle  $(\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U)$  augmente si on augmente le niveau de confiance  $(1 - \alpha)$ . Par exemple, pour être certain à 100% que l'intervalle va contenir la valeur, on a qu'à faire un intervalle  $(-\infty, \infty)$ .

Donc, un intervalle plus petit nous donne plus d'information si le niveau est adéquat. On dit que pour un même niveau  $(1 - \alpha)$ , l'intervalle avec la plus petite largeur est *plus efficace* que l'autre.

**Rappel : Loi du khi-carré**

Soit un échantillon aléatoire  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  de variables aléatoires normales de moyenne  $\mu$  et variance  $\sigma^2$ .

Soit  $Q = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ .

Alors,  $Q/\sigma^2 \sim \chi_{(n)}^2$ .

**Rappel : Loi de Student**

Soit les variables aléatoires indépendantes :

>  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

>  $W \sim \chi_{(n)}^2$ .

Alors,  $T = \frac{Z}{\sqrt{W/n}} \sim t_{(n)}$ .

La loi de Student tend vers la normale lorsque  $n$  est très grand.

**Rappel : Loi de Fisher-Snedecor ( $F$ )**

Soit les variables aléatoires indépendantes :

>  $W_1 \sim \chi_{(v_1)}^2$ .

>  $W_2 \sim \chi_{(v_2)}^2$ .

Alors,  $F = \frac{W_1/v_1}{W_2/v_2} \sim \mathcal{F}_{(v_1, v_2)}$ .

On peut relier la loi de Student et la loi  $F$  :  $T^2 = \frac{Z^2}{W/n} \sim \mathcal{F}_{(1, n)}$  puisque

$Z^2 \sim \chi_{(1)}^2$  où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Statistique de test  $T_n$** 

$T_n$  est une statistique de test basée sur un échantillon aléatoire de  $n$  observations.

> C'est donc une **fonction** d'un échantillon aléatoire ;

> Sa distribution est la **distribution d'échantillonnage** qui dépend de :

1. La statistique.
2. La taille de l'échantillon.
3. La distribution sous-jacente des données.

**Moyenne échantillonnale  $\bar{X}$** 

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}.$$

- > Estime sans biais la moyenne  $\mu$  ;
- > Si on pose que l'échantillon aléatoire est normalement distribué,  $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  ;
- > On centre et réduit pour trouver que  $T_n = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$  ;
- > Si  $\sigma^2$  est inconnue, on l'estime avec  $s_n^2$  pour obtenir une distribution student —  $T_n = \frac{\bar{X} - \mu}{s_n/\sqrt{n}} = \frac{Z}{\sqrt{W/(n-1)}} \sim t_{(n-1)}$  où  $W \sim \chi_{(n-1)}^2$ .

**Variance échantillonnale  $S_n^2$** 

$$S_n^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n-1}.$$

- > Estime sans biais la vraie variance  $\sigma^2$  ;
- >  $S_n^2$  n'est pas normalement distribuée, cependant la statistique  $T_n = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$ .

**Variance empirique  $\hat{\sigma}^2$** 

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}.$$

- > Estime avec biais la vraie variance  $\sigma^2$ .

**Statistique  $F$** 

$$F = \frac{S_n^2/\sigma_1^2}{S_m^2/\sigma_2^2}.$$

- > Si on pose que les deux échantillons aléatoires indépendants  $(X_1, \dots, X_n)$



et  $(Y_1, \dots, Y_m)$  sont normalement distribués,  $F \sim \mathcal{F}_{(n-1, m-1)}$ .

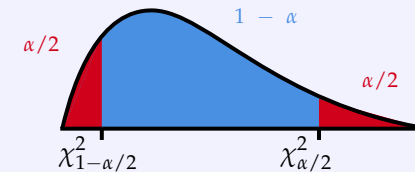
**Note sur majuscule vs minuscule** On écrit les statistiques avec des majuscules lorsqu'elles sont aléatoires et avec des minuscules lorsque ce sont des réalisations. Par exemple, dans une probabilité on utilise une majuscule puisque la statistique est aléatoire. Pour un seuil  $\alpha$  fixé d'un intervalle de confiance, le quantile n'est pas aléatoire et jusqu'à ce que l'on calcule l'intervalle avec l'échantillon observé, les statistiques sont également aléatoires.

## Intervalles de confiance

### Intervalles de confiance sur la variance

Pour l'échantillon aléatoire  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  issu d'une distribution normale avec  $\sigma^2$  inconnue,  $\Pr\left(\chi_{1-\alpha/2}^2 \leq \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\alpha/2}^2\right) = (1-\alpha)$ .

Graphiquement :



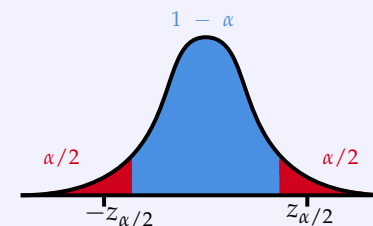
Nous sommes donc confiants à un niveau de  $100(1-\alpha)\%$  que :

$$\sigma^2 \in \left[ \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{\alpha/2}^2}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2} \right]$$

### Intervalles de confiance sur la moyenne ( $\sigma^2$ connue)

Pour l'échantillon aléatoire  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  issu d'une distribution normale avec  $\mu$  inconnu et  $\sigma^2$  connue,  $\Pr\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = (1-\alpha)$ .

Graphiquement :



Nous sommes donc confiants à un niveau de  $100(1-\alpha)\%$  que :

$$\mu \in \left[ \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

### Intervalle de confiance sur la moyenne ( $\sigma^2$ inconnue)

Pour l'échantillon aléatoire  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  issu d'une distribution normale avec  $\sigma^2$  inconnue,  $\Pr\left(-t_{\alpha/2, n-1} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S_n/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2, n-1}\right) = (1 - \alpha)$ .

Graphiquement :



Nous sommes donc confiants à un niveau de  $100(1 - \alpha)\%$  que :

$$\mu \in \left[ \bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \right].$$

### Intervalle de confiance *approximatif* sur la moyenne

Pour l'échantillon aléatoire  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  issu d'une distribution avec moyenne  $\mu$  et une variance inconnue.

Pour  $n$  très grand, nous sommes *approximativement* confiants à un niveau de  $100(1 - \alpha)\%$  que :

$$\mu \in \left[ \bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right].$$

### Intervalle de confiance *approximatif* sur la proportion

Pour l'échantillon aléatoire  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  issu d'une distribution Bernoulli de paramètre  $p$ .

Pour  $n$  très grand, nous sommes *approximativement* confiants à un niveau de  $100(1 - \alpha)\%$  que :

$$p \in \left[ \hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \right].$$

On définit le « *pooled estimator* » comme la moyenne pondérée des deux variances échantillonnelles  $S_p^2 = \frac{(n-1)S_n^2 + (m-1)S_m^2}{n+m-2}$ .

### Intervalle de confiance pour une différence de moyennes

Pour les échantillons aléatoires  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  et  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$  issus de distributions normales de moyennes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et variance  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  inconnues.

Nous sommes confiants à un niveau de  $100(1 - \alpha)\%$  que :

$$(\mu_1 - \mu_2) \in \left[ \bar{x}_n - \bar{y}_m \pm t_{\alpha/2, n+m-2} S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} \right].$$

### Intervalle de confiance *approximatif* pour une différence de moyennes

Pour les échantillons aléatoires  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  et  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$  issus de distributions normales de moyennes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et variances  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  inconnues.

Pour  $n$  très grand, nous sommes *approximativement* confiants à un niveau de  $100(1 - \alpha)\%$  que :

$$(\mu_1 - \mu_2) \in \left[ \bar{X}_n - \bar{Y}_m \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_n^2}{n} + \frac{S_m^2}{m}} \right].$$

### Intervalle de confiance *approximatif* pour une différence de proportions

Pour les échantillons aléatoires  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  et  $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$  issus de distributions Bernoulli de paramètres  $p_1$  et  $p_2$ .

Pour  $n$  très grand, nous sommes *approximativement* confiants à un niveau de  $100(1 - \alpha)\%$  que :

$$(p_1 - p_2) \in \left[ \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{n} + \frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{m}} \right].$$

## Tests d'hypothèses

### Introduction

#### Contexte

Les statistiques classiques posent que tout phénomène observable est régi par un *"processus" sous-jacent*.

On ne peut jamais savoir exactement ce qu'est ce "processus"; le mieux que l'on peut faire est d'émettre des *hypothèses* vraisemblables sur ce qu'il pourrait être.

Par la suite, on analyse les observations en présumant qu'elles sont régies par le processus hypothétique et détermine la *vraisemblance des observations*. On accepte le processus hypothétique si la vraisemblance est suffisamment élevée.

#### Notation

$\Theta_0$  et  $\Theta_1$  Sous-ensembles disjoints de  $\Theta$  tel que  $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ ;

$H_0$  Hypothèse nulle ;

> Représente généralement le statu quo jusqu'à preuve contraire.

$H_1$  Hypothèse alternative.

> Représente généralement un changement du statu quo.

#### Test d'hypothèse

On spécifie une *hypothèse* nulle et par conséquent une hypothèse alternative :

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Puis, on spécifie une *expérience* et un *test* pour décider si l'on accepte ou rejette l'hypothèse nulle.

#### Terminologie

**Hypothèse simple** Spécifie **entièrement** une distribution de probabilité.

> Par exemple,  $\mathcal{H}_0 : q = 0.50$ —on connaît la valeur exacte du paramètre  $q$  pour une distribution Bernoulli.

**Hypothèse composite** Spécifie **partiellement** une distribution de probabilité.

> Par exemple,  $\mathcal{H}_1 : q \neq 0.50$ .—on ne connaît pas la valeur exacte du paramètre  $q$ , il pourrait être n'importe quel chiffre sauf 0.50.

#### Exemple du laissez-passer universitaire (LPU)

**Par exemple**, on veut savoir si les étudiants utilisent l'autobus (oui ou non) avant et après l'implantation du LPU.

On **pose** que la proportion des gens qui utilisent l'autobus est  $q = 0.44$ .

Il y a deux types de **tests** qu'on peut faire,

> Tester si l'utilisation est différente est un test **"bilatéral"**, car on teste si elle a augmenté *ou* diminuée ;

$$H_0 : q = 0.44$$

$$H_1 : q \neq 0.44$$

> Tester si l'utilisation a augmenté est un test **"unilatéral"**, car on teste uniquement si elle a augmenté.

$$H_0 : q = 0.44$$

$$H_1 : q > 0.44$$

Un test unilatéral requiert que l'on sache déjà que la proportion de gens *"doit"* être supérieure. Un test bilatéral est plus conservatif et test les deux possibilités, il devrait donc être celui qu'on applique par défaut.

L'hypothèse :

**nulle** dans les deux cas est que, en moyenne, l'utilisation de l'autobus n'a pas *changée*.

**alternative** dans le cas d'un test :

**unilatéral** est que, en moyenne, l'utilisation a *augmentée*.

**bilatéral** est que, en moyenne, l'utilisation a *changée*.

#### Région critique

##### Notation

$\mathcal{S}$  "Ensemble" de tous les résultats possible pour l'échantillon aléatoire ;

$\mathcal{C}$  **Région critique** du test qui est un sous-ensemble de  $\mathcal{S}$ .

On rejette  $H_0$  si  $\{X_1, \dots, X_n\} \in \mathcal{C}$ .

On conserve  $H_0$  si  $\{X_1, \dots, X_n\} \in \mathcal{C}^c$ .

> On peut aussi dire « **région de rejet** ».

## Exemple du laissez-passer universitaire (LPU)

On reprend l'exemple du LPU.

L'ensemble des résultats possibles est  $\mathcal{S} = [0, 1]$ .

- > Un test "**bilatéral**" a comme région critique  $\mathcal{C} = [0, 0.44) \cup (0.44, 1]$ ;
- > Un test "**unilatéral**" testant l'augmentation a comme région critique  $\mathcal{C} = (0.44, 1]$ .

On peut donc faire 2 types d'erreurs :

Décision	Vrai état	
	$H_0$	$H_1$
Rejeter $H_0$	Erreur de type I	Bonne décision
Accepter $H_0$	Bonne décision	Erreur de type II

## Certitude du test

Lorsque nous voulons quantifier le degré auquel nous sommes confiants du test, nous utilisons la valeur  $p$ .

La valeur  $p$  a trois composantes :

1. La probabilité que l'événement se produise aléatoirement.
2. La probabilité qu'un événement tout aussi rare se produise.
3. La probabilité qu'un événement encore plus rare se produise.

## Exemple de pile ou face

On souhaite tester si, en obtenant deux piles sur deux lancers, nous avons une pièce de monnaie truquée :

**Hypothèse nulle** Ma pièce de monnaie n'est pas truquée même si j'ai obtenu deux piles.

Étapes du calcul de la valeur  $p$  :

1. On calcule la probabilité d'obtenir 2 piles :  $0.5 \times 0.5 = 0.25$ .
  2. Puis, on calcule la probabilité d'obtenir 2 faces (un événement tout aussi rare) :  $0.5 \times 0.5 = 0.25$ .
  3. Finalement, il n'y a pas d'autres séquences plus rares.
- Donc, la valeur  $p$  du test est de 0.50.
- > Ceci est plutôt élevé ;
  - > Souvent, on pose que la valeur  $p$  du test doit être d'au plus 0.05 ;
  - > Ce qui veut dire que des événements tout aussi (ou plus) rares doivent arriver moins que 5% du temps pour que l'on considère la pièce de monnaie comme étant truquée ;
  - > Donc, dans notre cas, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle que notre pièce de monnaie n'est pas spéciale.

Dans le cas continu, on somme les probabilités d'être plus rare ou d'être moins rare. C'est la même idée que les intervalles de confiance avec la valeur  $p$ , ou *seuil de signifiante*  $\alpha$ , représenté en rouge.

- > Si la valeur  $p$  est petite, ceci indique que d'autres distributions pourraient potentiellement mieux s'ajuster aux données puisque l'événement est très rare ;
- > Si la valeur  $p$  est grande, ceci indique que l'événement est très courant et que la distribution semble être bien ajustée.

Il y a plusieurs termes semblables qui peuvent devenir mélangés.

## Terminologie

$p$  La **valeur  $p$**  du test.

- > On peut la définir comme la probabilité d'un événement tout aussi (ou plus) rare sous l'hypothèse nulle ;
- > On peut la définir comme la **taille** de la région critique  $\mathcal{C}$  ; c'est-à-dire, l'*aire* de la région de rejet de l'hypothèse nulle  $H_0$  alors qu'elle est vraie ;
- > On peut la définir comme le **seuil de signifiante** ; c'est-à-dire, la probabilité de rejeter  $H_0$  alors qu'elle est vraie ;
- > Elle correspond donc également à la **probabilité d'une erreur de type I**.

$\alpha$  Dénote habituellement le **seuil de signifiante** ou la **taille** du test.

- > Même idée qu'avec les intervalles de confiance ;
- > On peut parfois aussi utiliser  $\alpha$  pour dénoter la valeur de  $p$  qui détermine si on rejette ou pas un test ;
- > En anglais, « *threshold for significance* ».

Formellement, on définit  $\alpha = \max_{\theta \in \Theta_0} \Pr \{ (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}; \theta \}$ .

C'est-à-dire :

- > on **maximise** la probabilité que l'**échantillon aléatoire** soit contenu dans la région critique (alias rejeter  $H_0$ ),
- > où la distribution est tracée **en fonction du paramètre  $\theta$  de l'hypothèse nulle**.

## Puissance d'un test



## La puissance d'un test

La probabilité de *correctement* rejeter l'hypothèse nulle.

Une analyse de la puissance détermine le nombre d'observations qu'il faut afin d'avoir une probabilité élevée de correctement rejeter l'hypothèse nulle.

Plusieurs facteurs influencent la puissance d'un test. Lorsqu'on teste si deux échantillons d'observations proviennent de la même distribution,



## La forme de la distribution

Si les deux distributions sont :

- > Très **distinctes**, la puissance sera très **élevée** :



- La probabilité de **correctement** rejeter l'hypothèse nulle (que les deux échantillons proviennent d'une même distribution) est élevée ;
- On peut aussi dire qu'il y a une forte probabilité de **correctement** obtenir une faible valeur  $p$ .

- > Se **chevauchent**, la puissance sera **faible** :



- La probabilité **d'incorrectement** rejeter l'hypothèse nulle (que les deux échantillons proviennent d'une même distribution) est élevée ;
- On peut aussi dire qu'il y a une forte probabilité **d'incorrectement** obtenir une faible valeur  $p$  ;
- Cependant, la puissance peut être augmentée avec plus d'observations.

### La variabilité des données

Si la variabilité de la distribution est

- > **Faible**, alors la variabilité de l'échantillon sera probablement faible aussi menant à une puissance très **élevée** :



- > **Élevée**, alors la variabilité de l'échantillon sera probablement élevée aussi menant à une puissance **faible** :



Il existe plusieurs mesures qui permettent de considérer la variabilité des données ainsi que la forme de la distribution. Entre autres, il y a le « *effect size (d)* » où

$$d = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p^2}$$

### La taille de l'échantillon de données

Un grand échantillon de données peut compenser pour des distributions qui se chevauchent ou une variabilité élevée. Ça permet d'augmenter notre *confiance* qu'il y a bel et bien une différence entre les échantillons.

En contraste, nous n'avons pas besoin d'un grand échantillon de données pour des distributions très distinctes ou avec une faible variabilité ; nous sommes déjà confiants que les distributions sont différentes.

### Le test statistique

Certains tests ont une puissance plus élevée que les autres. Cela dit, le test *t* habituel est très puissant.

#### La fonction de puissance

La fonction de puissance est  $\gamma(\theta) = \Pr \{ (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}; \theta \}$  ; c'est-à-dire, la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle  $H_0$  si la **vraie** valeur du paramètre est  $\theta \in \Theta$ .

- > C'est une fonction de  $\theta$  ;

- > Idéalement, si l'hypothèse nulle est :

**acceptée** on souhaite que  $\gamma(\theta) = 0$  puisque  $\theta \in \Theta_0$ .

- On dénote  $\gamma(\theta_0) = \Pr \{ (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}; \theta \in \Theta_0 \} = 0$ .

**rejetée** on souhaite que  $\gamma(\theta) = 1$  puisque  $\theta \in \Theta_1$ .

- On dénote  $\gamma(\theta_1) = \Pr \{ (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}; \theta \in \Theta_1 \} = 1$ .

Si, par exemple, on rejette l'hypothèse nulle, on pourrait tracer la fonction de puissance pour toutes les valeurs possibles de l'ensemble  $\Theta_1$ .

## Tests optimaux

### Notation

$\delta$  (Procédure de) test ;

$\alpha(\delta)$  Probabilité d'une erreur de type I pour un test  $\delta$  ;

$$> \alpha(\delta) = \Pr \{ (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}; \theta \in \Theta_0 \} = \gamma(\theta_0).$$

$\beta(\delta)$  Probabilité d'une erreur de type II pour un test  $\delta$  ;

$$> \beta(\delta) = \Pr \{ (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}^c; \theta \in \Theta_1 \} = 1 - \gamma(\theta_1).$$

Pour mettre en contexte cette notation, revoici le tableau des types d'erreurs pour un test  $\delta$  :

Décision	Vrai état	
	$H_0 \Rightarrow \theta \in \Theta_0$	$H_1 \Rightarrow \theta \in \Theta_1$
Rejeter $H_0$ $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}$	$\alpha(\delta)$	$1 - \beta(\delta)$
Accepter $H_0$ $(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}^c$	$1 - \alpha(\delta)$	$\beta(\delta)$

- > En théorie, on minimise la probabilité d'une erreur de type I et de II ;
- > En réalité, il y a un compromis et on ne pourra pas avoir des très petites probabilités pour les deux ;
- > Le contexte va déterminer ce qu'on souhaite minimiser le plus ;
  - Par exemple, soit l'hypothèse nulle que quelqu'un n'a pas le cancer ;
  - Il est plus grave de dire à quelqu'un qu'il n'a pas le cancer alors qu'il l'a (erreur de type II) que de dire qu'il a le cancer alors qu'il ne l'a pas (erreur de type I) ;
  - Dans ce contexte, on souhaiterait minimiser l'erreur de type II  $\beta(\delta)$  plus que celle de type I  $\alpha(\delta)$ .

Puisqu'il est impossible de trouver un test  $\delta$  pour lequel les probabilités d'erreurs de type I et II sont très petites, on :

1. Fixe l'erreur de type I à un seuil, alias une taille de région critique,  $k$ .
2. Trouve parmi tous les sous-ensembles de taille  $k$  celui qui minimise l'erreur de type II.

### Tests optimaux

Soit un test  $\delta^*$  avec les hypothèses simples :

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta = \theta_1$$

- > Par exemple, on pourrait avoir une distribution Bernoulli et poser  $H_0 : p = 0.4$  v.s.  $H_1 : p = 0.6$ .

La procédure pour trouver la région critique  $\mathcal{C}$  optimale de taille  $\alpha$  du test  $\delta^*$  est la suivante :

1. On trouve une région critique (alias, un sous-ensemble de  $\mathcal{S}$ )  $\mathcal{C}$  tel que la probabilité  $\alpha(\delta^*)$  d'une erreur de type I est de  $\alpha$ .
  - > C'est-à-dire,  $\alpha(\delta^*) = \Pr \{ (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}; \theta = \theta_0 \} = \alpha$ .
  - > Cependant, ce critère n'identifie par un sous-ensemble unique ;
  - > Il y a une multitude de sous-ensembles  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{S}$  dont la probabilité que l'échantillon aléatoire y soit contenu (sous l'hypothèse nulle) est aussi  $\alpha$  ;
  - > C'est-à-dire,  $\Pr \{ (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}; \theta = \theta_0 \} = \alpha$ .
2. On pose que la probabilité que l'échantillon aléatoire soit dans la région critique  $\mathcal{C}$  (sous l'hypothèse alternative) est supérieure à la probabilité que l'échantillon aléatoire soit contenu dans tout autre sous-ensemble  $\mathcal{A}$ .
  - > C'est-à-dire,  $\Pr \{ (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}; \theta = \theta_1 \} \geq \Pr \{ (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{A}; \theta = \theta_1 \}$ .

Avec ces deux critères, on trouve **la** région critique  $\mathcal{C}$  de taille  $\alpha$  **optimale** pour tester les hypothèses simples.

En bref, on pose fixe à un seuil  $\alpha$  la fonction de puissance posant que le vrai paramètre  $\theta = \theta_0$  puis on trouve la région critique qui maximise la puissance posant que le vrai paramètre  $\theta = \theta_1$ .

### Exemple avec une distribution binomiale

Soit :

- > La variable aléatoire  $X \sim \text{Binom}(n = 3, p = \theta)$ .
  - Alors,  $\mathcal{S} = \{x : x = 0, 1, 2, 3\}$ .
- > Les hypothèses :

$$H_0 : \theta = 0.50$$

$$H_1 : \theta = 0.75$$

> Le seuil de signifiante  $\alpha = 0.125$ .

> Les sous-ensembles  $\mathcal{A}_1 = \{x : x = 0\}$  et  $\mathcal{A}_2 = \{x : x = 3\}$  de  $\mathcal{S}$ .

Alors,  $\Pr(X \in \mathcal{A}_1; \theta = 0.50) = \Pr(X \in \mathcal{A}_2; \theta = 0.50) = 0.125$  et il n'y a pas d'autres sous-ensembles de  $\mathcal{S}$  avec la même taille de 0.125.

Il s'ensuit que soit  $\mathcal{A}_1$  ou  $\mathcal{A}_2$  est la région critique  $\mathcal{C}$  optimale de taille  $\alpha$  pour tester  $H_0$  contre  $H_1$ .

On trouve que  $\Pr(X \in \mathcal{A}_1; \theta = 0.75) = 0.015625$  alors que  $\Pr(X \in \mathcal{A}_2; \theta = 0.75) = 0.421875$ .

> Dans le premier cas :

$$\underbrace{\Pr(X \in \mathcal{A}_1; \theta = 0.75)}_{\text{rejeter } H_0 \text{ alors que } H_0 \text{ est faux } (\theta = 0.75)} = 0.015625 < \underbrace{\Pr(X \in \mathcal{A}_1; \theta = 0.50)}_{\text{rejeter } H_0 \text{ alors que } H_0 \text{ est vraie } (\theta = 0.50)} = 0.125$$

> Dans le deuxième cas :

$$\underbrace{\Pr(X \in \mathcal{A}_2; \theta = 0.75)}_{\text{rejeter } H_0 \text{ alors que } H_0 \text{ est faux } (\theta = 0.75)} = 0.421875 > \underbrace{\Pr(X \in \mathcal{A}_2; \theta = 0.50)}_{\text{rejeter } H_0 \text{ alors que } H_0 \text{ est vraie } (\theta = 0.50)} = 0.125$$

> Le premier sous-ensemble  $\mathcal{A}_1$  n'est pas désirable, car on serait plus probable de incorrectement rejeter  $H_0$  lorsqu'elle est vraie (erreur de type I) que de correctement la rejeter lorsqu'elle est fautive !

> Alors, on choisit  $\mathcal{C} = \mathcal{A}_2 = \{x : x = 3\}$ .

D'ailleurs, la région est choisie en incluant dans  $\mathcal{C}$  les points  $x$  pour lesquels  $f(x; \theta = 0.50)$  est petite par rapport à  $f(x; \theta = 0.75)$ .

> On peut d'ailleurs observer que le ratio  $\frac{f(x; \theta = 0.50)}{f(x; \theta = 0.75)}$  évalué à  $x = 5$  est un minimum.

On peut utiliser ce ratio comme outil pour identifier la région critique  $\mathcal{C}$  optimale pour un seuil fixe de  $\alpha$ .

## Cas d'hypothèses simples

### Théorème de Neymann-Pearson

Soit un test  $\delta^*$  avec les hypothèses simple :

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta = \theta_1$$

Soit une constante  $k > 0$  et le sous-ensemble  $\mathcal{C} \in \mathcal{S}$  tel que :

$$1. \quad \frac{\mathcal{L}(\theta_0; \mathbf{x})}{\mathcal{L}(\theta_1; \mathbf{x})} \leq k \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathcal{C}.$$

$$2. \quad \frac{\mathcal{L}(\theta_0; \mathbf{x})}{\mathcal{L}(\theta_1; \mathbf{x})} \geq k \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathcal{C}^c.$$

> En récrivant les équations comme  $\mathcal{L}(\theta_1; \mathbf{x}) \leq (\geq) k \mathcal{L}(\theta_0; \mathbf{x})$  on peut l'interpréter comme qu'il doit être plus vraisemblable que  $\theta = \theta_0$  ( $\theta_1$ ) que  $\theta_1$  ( $\theta_0$ ) lorsque  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^c$  et que l'on rejette (accepte)  $H_0$ .

$$3. \quad \alpha = \Pr \{ (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}; \theta_1 \} = \alpha(\delta^*).$$

Alors  $\mathcal{C}$  est la région critique **optimale** de taille  $\alpha$ .

### Test non biaisé

Soit les mêmes hypothèses que dans la définition du théorème de Neymann-Pearson.

Un test  $\delta$  est non biaisé si sa puissance est toujours d'au moins  $\alpha$  ; c'est-à-dire,

$$\Pr \{ (X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{C}; \theta \} \geq \alpha.$$

Le meilleur test obtenu par le théorème de Neymann-Pearson est non biaisé.

### Exemple avec une distribution normale

Soit :

> L'échantillon aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  d'une distribution normale  $\mathcal{N}(\mu = \theta, \sigma^2 = 0)$ .

– Alors,  $\mathcal{S} = \{x : x \in \mathbb{R}\}$ .

> Les hypothèses :

$$H_0 : \theta = 0$$

$$H_1 : \theta = 1$$



On a :

$$\frac{\mathcal{L}(\theta_0; \mathbf{x})}{\mathcal{L}(\theta_1; \mathbf{x})} = \frac{\exp \left\{ -\sum_{i=1}^n x_i^2 / 2 \right\} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}}{\exp \left\{ -\sum_{i=1}^n (x_i - 1)^2 / 2 \right\} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}} = \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{2} \right\}$$

Alors, la région critique  $\mathcal{C}$  optimale est composée des points  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tel que :

$$e^{-\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{2}} \leq k \Rightarrow -\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n}{2} \leq \ln(k) \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \geq \frac{n}{2} - \ln(k)$$

$$\therefore \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}}_c \geq \frac{1}{2} - \frac{\ln(k)}{n}$$

Alors, la région critique optimale  $\mathcal{C} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq c \right\}$  où  $c$  est une constante choisie telle que la taille de  $\mathcal{C}$  est  $\alpha$ .

Par exemple, puisque  $\bar{X} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0, 1/n)$  on peut trouver  $c$  avec  $\Pr \{ \bar{X} \geq c; \theta = \theta_0 \} = \alpha$ .

Puis, on peut trouver la puissance du test quand  $H_1$  est vraie avec  $\Pr \{ \bar{X} \geq c; \theta = \theta_1 \}$ .

**Note sur les hypothèses** Les hypothèses doivent entièrement spécifier la distribution. Si les hypothèses sont sur les paramètres, elles doivent être des hypothèses simples, mais elles peuvent être sur autre chose.

Par exemple, si on teste  $H_0 : f_X(x) = g(x)$  v.s.  $H_1 : f_X(x) = h(x)$  alors la vraisemblance sera un ratio de deux distributions différentes.

## Cas d'hypothèses composées

Cette section n'est pas suffisamment bien expliquée pour que je la considère complète.

### Exemple avec une distribution normale

Soit :

› Un échantillon aléatoire  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  tiré d'une distribution normale  $\mathcal{N}(0, \theta)$  ;

› Les hypothèses :

$$H_0 : \theta = 1$$

$$H_1 : \theta > 1$$

Alors, on trouve le ratio :

$$\frac{\mathcal{L}(\theta_0 = 1; \mathbf{x})}{\mathcal{L}(\theta_1; \mathbf{x})} = \frac{\frac{1}{(1)^n (\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2(1)^2}}}{\frac{1}{\theta_1^n (\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}{2\theta_1^2}}} = \theta_1^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2} \left( 1 - \frac{1}{\theta_1^2} \right)}$$

On voit que le ratio décroît alors que  $\sum x_i^2$  augmente. Par conséquent, un test uniformément le plus puissance aura une région critique définie par  $\sum x_i^2 > k$  avec un  $k$  choisi selon le seuil de signification.

L'idée est donc de poser un  $\theta_1$  fixe pour évaluer la forme du ratio de la vraisemblance. Selon la croissance ou décroissance de la fonction, ainsi que l'hypothèse, on peut établir une région pour laquelle une augmentation du  $\theta_1$  maintient la relation.

La région uniformément la plus puissante n'existe pas toujours, mais dans le cas qu'elle existe le théorème de Neymann-Pearson permet de la trouver.

## Test du khi carré

### Test d'adéquation (« *goodness-of-fit test* »)

Soit  $n$  répétitions (indépendantes) d'une expérience aléatoire.

On pose :

- › L'espace d'échantillon des expériences  $\mathcal{A}$  qui représente l'union de  $k$  différents ensembles (disjoints)  $\mathcal{A} = \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k\}$  ;
- › On pose que pour  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $\Pr(A_i) = p_i$  où  $p_k = 1 - p_1 - \dots - p_{k-1}$  et  $O_k = n - O_1 - \dots - O_{k-1}$  ;
  - $p_i$  représente donc la *probabilité* que le résultat de l'expérience aléatoire fasse partie de l'ensemble  $A_i$  ;
  - $O_i$  représente le *nombre d'observations* (la *fréquence*) pour lesquelles le résultat de l'expérience aléatoire fait partie de l'ensemble  $A_i$ .
- › On pose que la distribution conjointe de  $O_1, O_2, \dots, O_{k-1} \sim \text{MultiNom}(n, p_1, \dots, p_{k-1})$ .

Soit le test d'hypothèse avec les nombres spécifiés  $p_{1,0}, p_{2,0}, p_{k-1,0}$  :

$$H_0 : p_1 = p_{1,0}, p_2 = p_{2,0}, \dots, p_{k-1} = p_{k-1,0}$$

où  $p_k = p_{k,0} = 1 - p_{1,0} - \dots - p_{k-1,0}$ .

Alors, sous l'hypothèse nulle :  $Q = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - np_{i,0})^2}{np_{i,0}} \approx \chi_{(k-1)}^2$ .

- › Il y a seulement  $k - 1$  degrés de liberté, car on estime seulement  $k - 1$  paramètres.
  - Le nombre  $n$  total d'observations est fixe et on déduit  $n_k$  par la somme ;
  - Si on avait à

### Tableau de contingence

Dans le cas de données à deux dimensions, alias un tableau de contingence, on définit :

$E_{ij}$  L'espérance du nombre d'observations dans la cellule  $i, j$  ;

$O_{ij}$  Le nombre observé d'observations dans la cellule  $i, j$ .

- › On pose qu'il y a  $c$  colonnes au tableau pour  $r$  rangées (les rangées sont les différents ensembles) ;
- › On peut donc tester si la distribution de la fréquence est identique pour les  $c$

$$\text{colonnes avec } Q = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \approx \chi_{(r-1) \cdot (c-1)}^2 ;$$

- › Cette formule est beaucoup plus intuitive visuellement que par formule ; pour la comprendre, faites un exemple.

## Test du rapport de vraisemblance

Cette section n'est pas suffisamment bien expliquée pour que je la considère complète.

En fonction des observations, calculer :

1. Le maximum de vraisemblance sous l'hypothèse nulle ;
2. Le maximum de vraisemblance sous l'hypothèse alternative

La région critique correspond à la région pour laquelle le ratio des vraisemblances est en dessous d'une constante  $k$ .

- › Si les deux hypothèses sont simples, ceci équivaut à utiliser le théorème de Neymann-Pearson.

Cependant, il peut s'avérer difficile d'isoler une distribution dans le ratio. Pour des grands échantillons, on peut plutôt utiliser la distribution asymptotique.

Soit une hypothèse nulle qui spécifie  $k$  paramètre et une hypothèse alternative qui en spécifie seulement  $l$  ( $l < k$ ). Alors, la statistique du rapport de vraisemblance

$$Q = -2 (\ln(\theta_0) - \ln(\theta_1)) \sim \chi_{k-l}^2.$$

Cette statistique est vue dans les modèles linéaires généralisés aussi.

## Statistiques exhaustives

Cette section n'est pas suffisamment bien expliquée pour que je la considère complète.

### Statistique exhaustive

Soit l'échantillon aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$  d'une distribution avec paramètre  $\theta$  inconnu.

Alors, la statistique  $T_n$  est "**exhaustive pour  $\theta$** " si la distribution conditionnelle  $(X_1, \dots, X_n | T_n)$  ne **dépend pas** de  $\theta$ .

#### Exemple Bernoulli

Soit l'échantillon aléatoire d'une distribution Bernoulli de paramètre  $p$ .

Alors  $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$  est exhaustive pour  $p$ , car :

$$\begin{aligned} \Pr(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | T_n = x_1 + \dots + x_n) \\ = p^{x_1 + \dots + x_n} (1-p)^{n-(x_1 + \dots + x_n)} \\ = p^t (1-p)^{n-t} \end{aligned}$$

Dépend seulement de l'échantillon par la valeur  $t$  de la statistique  $T_n$ .

### Théorème de factorisation de Fisher-Neymann

Soit l'échantillon aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$  d'une distribution avec paramètre  $\theta$  inconnu.

Alors, la statistique  $T_n$  est "**exhaustive pour  $\theta$** " si pour tout  $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta) = g(t; \theta) \times h(x_1, \dots, x_n)$$

où :

>  $g(t; \theta)$  dépend de  $(x_1, \dots, x_n)$  seulement par  $T_n$ ;

>  $h(x_1, \dots, x_n)$  ne **dépend pas** de  $\theta$ .

Pour **plusieurs paramètres**, on généralise avec le vecteur de paramètres inconnus  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ .

Alors, les statistiques  $T_n^1, \dots, T_n^k$  sont **conjointement exhaustives pour  $\theta$**  si pour tout  $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta) = g(t_1, \dots, t_k; \theta) \times h(x_1, \dots, x_n)$$

où :

>  $g(t^1, \dots, t^k; \theta)$  dépend de  $(x_1, \dots, x_n)$  seulement par  $T_n^1, \dots, T_n^k$ ;

>  $h(x_1, \dots, x_n)$  ne **dépend pas** de  $\theta$ .

Le théorème de factorisation permet d'identifier des statistiques exhaustives. Cependant, il peut y avoir plusieurs statistiques exhaustives ! Certaines offrent une plus grande réduction des données ; par exemple,  $\bar{X}_n$  réduit les données plus que  $(X_1, \dots, X_n)$ .

On cherche donc la statistique exhaustive qui offre la **réduction maximale** tout en retenant toute l'information sur le paramètre visé.

### Statistique exhaustive minimale

Une statistique exhaustive  $T_n = T(X_1, \dots, X_n)$  est "**minimale**" si pour toute autre statistique exhaustive  $U_n = U(X_1, \dots, X_n)$ , il existe une fonction  $g$  telle que  $T = g\{U(X_1, \dots, X_n)\}$ .

#### ✓ Critère de Lehmann-Scheffé

Soit l'échantillon aléatoire  $(X_1, \dots, X_n)$  d'une distribution avec paramètre  $\theta$  inconnu.

Alors, la statistique  $T_n$  est "**exhaustive minimale pour  $\theta$** " si pour tout  $x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\frac{f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta)}{f(y_1; \theta) \times \dots \times f(y_n; \theta)} \text{ ne dépend pas de } \theta \text{ ssi } T(x_1, \dots, x_n) = T(y_1, \dots, y_n)$$

#### Exemple Bernoulli

Soit l'échantillon aléatoire d'une distribution Bernoulli de paramètre  $p$ .

$$\frac{f(x_1; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta)}{f(y_1; \theta) \times \dots \times f(y_n; \theta)} = \left( \frac{p}{1-p} \right)^{(x_1 + \dots + x_n) - (y_1 + \dots + y_n)}$$

Le ratio est seulement indépendant de  $p$  si  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$  et donc  $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$  est **exhaustive minimale** pour  $p$ .

### Théorème de Rao-Blackwell

Soit l'estimateur  $\hat{\theta}_n$  sans biais pour  $\theta$  avec  $\text{Var}(\hat{\theta}_n) < \infty$ .

Si la statistique  $T_n$  est exhaustive pour  $\theta$ , la statistique  $\theta_n^* = E[\hat{\theta}_n | T_n]$  est un **estimateur sans biais** de  $\theta$  avec  $\text{Var}(\theta_n^*) \leq \text{Var}(\hat{\theta}_n)$ .

### Famille exponentielle

Une loi de probabilité fait partie de la famille exponentielle linéaire si :

1. Sa fonction de densité (*ou de masse*) de probabilité peut être exprimée comme :

#### Densité de la famille exponentielle

$$f(y; \theta, \phi) = \exp \left( \frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y; \phi) \right)$$

où

$\theta$  paramètre canonique

$\phi$  paramètre de dispersion

2. La fonction  $c$  ne dépend pas du paramètre  $\theta$ .
3. Le support de  $Y$  ne dépend pas de  $\theta$  puisqu'il ne peut pas varier.

## Statistiques d'ordre

Soit un échantillon aléatoire de taille  $n$ . Nous définissons la  $k^{\text{e}}$  **statistique d'ordre**  $X_{(k)}$  comme étant la  $k^{\text{e}}$  plus petite valeur d'un échantillon.

- > Les crochets sont utilisés pour distinguer la  $k^{\text{e}}$  statistique d'ordre  $X_{(k)}$  de la  $k^{\text{e}}$  observation  $X_k$ .
- > La  $k^{\text{e}}$  statistique d'ordre correspond au  $\frac{k}{n+1}$  quantile.

Nous sommes habituellement intéressés au minimum  $X_{(1)}$  et le maximum  $X_{(n)}$  :

#### Minimum

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= \min(X_1, \dots, X_n) \\ f_{X_{(1)}}(x) &= n f_X(x) (S_X(x))^{n-1} \\ S_{X_{(1)}}(x) &= \prod_{i=1}^n \Pr(X_i > x) \end{aligned}$$

#### Maximum

$$\begin{aligned} X_{(n)} &= \max(X_1, \dots, X_n) \\ f_{X_{(n)}}(x) &= n f_X(x) (F_X(x))^{n-1} \\ F_{X_{(n)}}(x) &= \prod_{i=1}^n \Pr(X_i \leq x) \end{aligned}$$

De façon plus générale, on définit :

#### $k^{\text{e}}$ statistique d'ordre

$$\begin{aligned} f_{X_{(k)}}(x) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \underbrace{[F_X(x)]^{k-1}}_{\text{observations} < k} \underbrace{f_X(x)}_{\text{observation} = k} \underbrace{[S_X(x)]^{n-k}}_{\text{observations} > k} \\ F_{X_{(k)}}(x) &= \sum_{i=r}^n \underbrace{\binom{n}{i} [F_X(x)]^i [1 - F_X(x)]^{n-i}}_{\text{Probabilité qu'au moins } k \text{ des } n \text{ observations } X_k \text{ sont } \leq x} \end{aligned}$$

- > On peut observer que  $X_{(k)} \sim \text{Beta}(\alpha = k, \beta = n - k + 1)$

Nous pouvons également définir quelques autres statistiques d'intérêt :

#### ≡ L'étendue (« range »)

**L'étendue** (range) est la différence entre le minimum et le maximum d'un échantillon :  $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ .

- > L'utilité de l'étendue est limitée puisqu'elle est très sensible aux données

extrêmes.

- › Par exemple, supposons que l'on a des données historiques sur la température pour le 1er septembre.
  - En moyenne, la température est de  $16^{\circ}\text{C}$ .
  - Il y a un cas extrême de  $-60^{\circ}\text{C}$  en 1745.
  - L'étendue sera de  $86^{\circ}\text{C}$  ce qui n'est pas très représentatif des données.
  - Donc, dans ce contexte, l'étendue n'est pas une mesure très utile.

### ≡ La mi-étendue (« *midrange* »)

La moyenne entre du minimum et du maximum d'un échantillon :

$$M = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}.$$

Pour comprendre ce que représente la mi-étendue, on la compare à la moyenne arithmétique.

- › La moyenne arithmétique considère les données observées et calcule leur moyenne.
  - Il s'ensuit qu'elle ne considère pas les chiffres qui ne sont pas observés.
- › La mi-étendue considère **tous** les chiffres—observés ou non—entre la plus grande et la plus petite valeur d'un échantillon, puis en prend la moyenne.

### ≡ L'écart interquartile (« *interquartile range (IQR)* »)

Écart entre le troisième quartile et le premier quartile :  $IQR = Q_3 - Q_1$ .

- › L'IQR mesure la distribution du 50% des données qui sont situées au milieu de l'ensemble de données.
- › L'IQR est connu comme le « *midsread* ».

### Exemple sur les statistiques d'ordre

Soit un échantillon de données météorologiques  $\{-30^{\circ}, -24^{\circ}, -7^{\circ}, -23^{\circ}, +5^{\circ}\}$  (Celsius). Je suppose que ce sont des températures du 4 février observées lors des dernières années.

- › La moyenne arithmétique ( $-22.25^{\circ}\text{C}$ ) m'intéresse, car je peux savoir, en moyenne, ce qu'est la température le 4 février.

- › La mi-étendue ( $-12.5^{\circ}\text{C}$ ), tout comme l'étendue ( $-35^{\circ}\text{C}$ ), ne m'intéresse pas puisqu'elle ne prend pas en considération la vraisemblance des différentes températures.

Maintenant, je suppose que ces données sont des températures observées tout au long de l'hiver passé.

- › La moyenne arithmétique ne m'intéresse pas puisqu'elle est beaucoup trop biaisée par les températures de cette même journée.
- › Cependant, la mi-étendue et l'étendue me donnent maintenant une meilleure idée de la température de l'hiver.

L'important à retenir est que l'utilité des mesures dépend de la situation. Également, ceci est un exemple **très** simpliste et dans tous les cas on ne peut pas tirer de conclusions sur les températures de l'hiver à partir d'une seule journée.

Nous pouvons définir la **médiane** en termes de statistiques d'ordre :

### ≡ Médiane

$$\text{Med} = \begin{cases} X_{((n+1)/2)}, & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)}}{2}, & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

- › La moitié des données sont supérieures et inférieures à la médiane.
- › L'utilité de la médiane est qu'elle n'est pas aussi sensible aux données aberrantes que la moyenne.

Finalement, on définit la distribution conjointe du minimum et du maximum  $\forall x < y$  :

### Distribution conjointe du maximum et du minimum

$$f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y) = n(n-1)[F_X(y) - F_X(x)]^{n-2} f_X(x) f_X(y)$$

## Graphiques

### Le diagramme en boîte (« *boxplot* »)

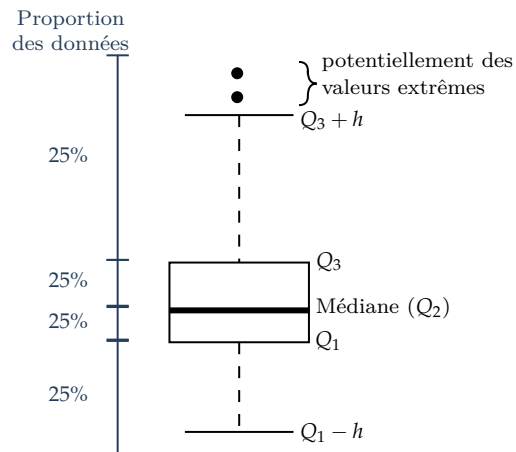
Le diagramme du « *sommaire à cinq chiffres* ».

#### Sommaire à cinq chiffres

Les cinq statistiques suivantes :

1. Le minimum.
2. Le premier quartile  $Q_1$ .
3. La médiane (deuxième quartile)  $Q_2$ .
4. Le troisième quartile  $Q_3$ .
5. Le maximum.

Visuellement :

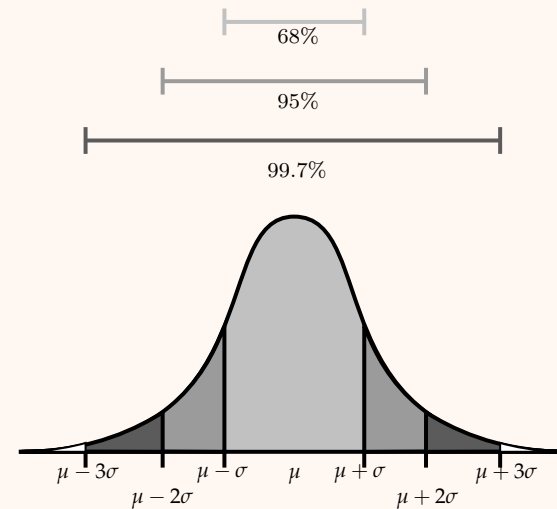


- › La médiane est la ligne contenue dans la boîte.
  - La moitié des données sont au-dessus, et l'autre moitié en dessous, de la ligne.
- › La boîte est délimitée par le premier et le troisième quartile.
  - Il s'ensuit que la boîte contient la moitié des données.
  - De plus, 25% des données sont contenues entre la borne *supérieure* de la boîte et la médiane avec l'autre 25% qui est contenu entre la borne *inférieure* et la médiane.
- › Les « moustaches » de la boîte sont tracées à un pas  $h$  des quartiles où  $h = 1.5 \cdot (Q_3 - Q_1)$ .

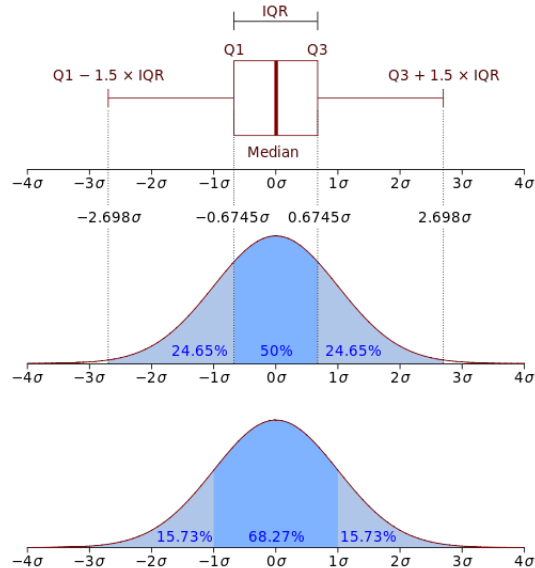
- Les points qui sont à l'extérieur de ces bornes sont les données potentiellement aberrantes.
- $Q_3 - Q_1$  correspond à l'écart interquartile.
- Plus l'écart est élevé, plus la boîte sera large et, par conséquent, plus les moustaches seront situées loin de la médiane.
- Le 1.5 est basé sur la règle du 68-95-99.7 avec moins de 1% des données à l'extérieur de la borne supérieure.

#### ✓ Règle du 68-95-99.7

Pour une distribution normale, environ 68% des données sont en dedans d'un écart-type de la moyenne, 95% en dedans de 2 et 99.7% en dedans de 3.



En bref, le diagramme en boîte permet d'évaluer comment les données sont distribuées. Cette image de [wikipedia](#) résume bien :



### Diagramme quantile-quantile (« Q-Q plot »)

En pratique, on pose souvent que les données suivent une distribution. Un diagramme quantile-quantile permet de comparer les quantiles théoriques de la distribution aux quantiles empiriques des données.

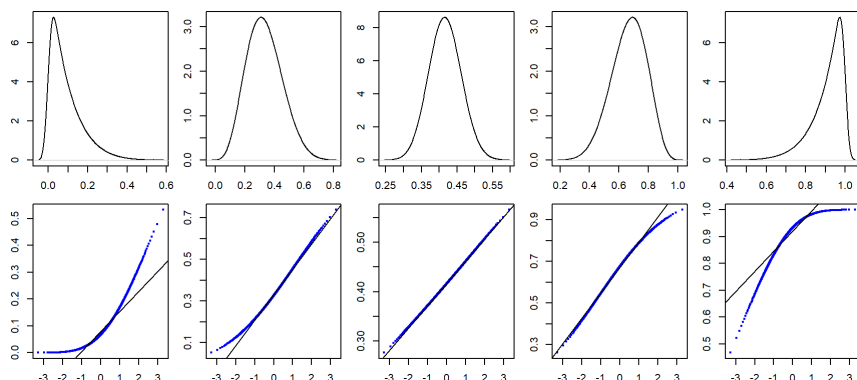
Dans un tel cas, on connaît la distribution, mais pas les paramètres.

- > Si les données sont normalement distribuées, on peut centrer et réduire pour obtenir la loi normale standard  $Z$  ;
  - Ceci correspond à un diagramme quantile-quantile **normale** ;
- > Autrement, le diagramme quantile-quantile est tracé en estimant les paramètres de la distribution avec l'échantillon de données.

Par exemple :



Le diagramme quantile-quantile évalue si la distribution empirique est semblable à la distribution théorique. On peut, entre autres, évaluer la queue de la distribution. Selon la distribution, les quantiles « normaux » varient. Ci-dessous est une image de [ce site](#) qui montre quantiles selon la distribution avec une droite pour la normale :



## Construction d'estimateurs

Précédemment, nous avons décrit les méthodes utilisées pour évaluer la **qualité** de l'estimateur. Cependant, comment obtenons-nous des estimateurs à évaluer ? Plusieurs méthodes existent pour établir des estimateurs, de plus plusieurs méthodes existent pour estimer des paramètres. La méthode vue dans le cadre du cours de statistique est la **méthode fréquentiste**, le cours de mathématiques IARD 1 (ACT-2005) présente l'**estimation bayésienne**.

Avant de le faire, nous présentons quelques concepts :

### Terminologie

$\mu'_k(\hat{\theta})$   $k^{\text{e}}$  moment centré à 0,  $\mu'_k = E[X^k]$  ;

$\pi_g(\theta)$  100 $g^{\text{e}}$  centile,  $\pi_g(\theta) = F_{\theta}^{-1}(g)$ ,  $g \in [0, 1]$  ;

$F_e(x)$  Fonction de répartition empirique ;

$\triangleq$  Notation pour poser une égalité.

Les deux premiers estimateurs ci-dessous sont les plus faciles à obtenir, mais sont aussi les moins performants puisqu'ils n'utilisent que quelques traits des données au lieu de l'entièreté des données comme la troisième méthode.

Cette distinction devient particulièrement importante dans le cas d'une distribution avec une queue lourde à la droite (Pareto, Weibull, etc.) où il devient plus essentiel de connaître les valeurs extrêmes pour bien estimer le paramètre de forme ( $\alpha$  pour une Pareto).

Un autre désavantage est que les deux premières méthodes nécessitent que les données proviennent toutes de la même distribution. Sinon, les moments et quantiles ne seraient pas clairs.

Finalement, sous les deux premières méthodes la décision de quels moments et centiles à utiliser est arbitraire.

## Méthode des moments (MoM)

### Estimation de $\theta$ par la méthode des moments

Pour ajuster une distribution de  $p$  paramètres, on pose égale les  $p$  premiers moments empiriques  $\hat{\mu}'_k$  au  $p$  premiers moments de la distribution  $\mu'_k$ . L'estimation de  $\theta$  est alors toute solution des  $p$  équations :

$$\hat{\mu}'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k \triangleq E[X^k] = \mu'_k(\theta), \quad k = 1, 2, \dots, p$$



La raison pour cet estimateur est que la distribution empirique aura les mêmes  $p$  premiers moments centrés à 0 que la distribution paramétrique.

## Méthode du «Percentile Matching »

### Estimation de $\theta$ par la méthode du « *Percentile Matching* »

Pour ajuster une distribution de  $p$  paramètres, on pose égale  $p$  centiles  $\hat{\pi}_g(\hat{\theta})$  de l'échantillon à ceux de la distribution  $\pi_g(\theta)$ .

L'estimation de  $\theta$  est alors toute solution des  $p$  équations :

$$F_e(\hat{\pi}_{g_k}|\theta) = g_k, \quad k = 1, 2, \dots, p$$

La raison pour cet estimateur est que le modèle produit aura  $p$  centiles qui vont « *matcher* » les données.

Il peut arriver que les centiles de distributions ne soient pas uniques, par exemple dans le cas de données discrètes lorsque le quantile recherché peut tomber entre 2 *marches* de la fonction empirique, ou mal-définis. Il est alors utile de définir une méthode d'interpolation des quantiles (bien qu'il n'en existe pas une d'officielle).

Soit le « *smoothed empirical estimate* » d'un centile :

### Smoothed empirical estimate

On utilise les statistiques d'ordre de l'échantillon  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  pour l'**interpolation** suivant :

$$\hat{\pi}_g = (1 - h)x_{(j)} + hx_{(j+1)}, \quad \text{où}$$

$$j = \lfloor (n+1)g \rfloor \quad \text{et} \quad h = (n+1)g - j$$

## Méthode du maximum de vraisemblance

Nous cherchons à maximiser la probabilité d'observer les données. Ceci est fait par la vraisemblance  $\mathcal{L}(\theta; \mathbf{x})$  ou, puisque le logarithme ne change pas le maximum, la log-vraisemblance  $\ell(\theta; \mathbf{x})$  où :

### Maximum de vraisemblance

$$\mathcal{L}(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad \text{et} \quad \ell(\theta; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta)$$

et l'**estimateur du maximum de vraisemblance** de  $\theta$  est celui qui maximise la fonction de vraisemblance.

De façon formelle, on dit que  $\hat{\theta}^{\text{EMV}} = \max_{\theta} \{\mathcal{L}(\theta; \mathbf{x})\} = \max_{\theta} \{\ln \mathcal{L}(\theta; \mathbf{x})\}$ .

### Raccourcis

Si la fonction de vraisemblance est de la forme :

$$> \mathcal{L}(\gamma) = \gamma^{-a} e^{-b/\gamma} \quad \text{alors} \quad \hat{\gamma}^{\text{MLE}} = \frac{b}{a}.$$

$$> \mathcal{L}(\lambda) = \lambda^a e^{-\lambda b} \quad \text{alors} \quad \hat{\lambda}^{\text{MLE}} = \frac{a}{b}.$$

$$> \mathcal{L}(\theta) = \theta^a (1 - \theta)^b \quad \text{then} \quad \hat{\theta}^{\text{MLE}} = \frac{a}{a+b}.$$

### Propriétés

#### Propriété d'invariance

Soit une fonction bijective  $g(\cdot)$  et l'estimateur du maximum de vraisemblance (EMV)  $\hat{\theta}^{\text{EMV}}$  de  $\theta$ .

Alors, selon la propriété d'invariance  $g(\hat{\theta}^{\text{EMV}})$  est l'EMV de  $g(\theta)$ .

L'EMV satisfait cette propriété.

#### Convergence en distribution de l'EMV

**Théorème :**  $\hat{\theta}^{\text{EMV}} \approx \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{I_n(\theta)}\right)$ .

Sous certaines conditions de régularité, la distribution de  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$  converge en distribution vers une distribution normale avec une moyenne nulle et une

variance égale à la [borne de Cramér-Rao](#).

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{I_n(\theta)}\right)$$

Ce qui implique :

1.  $\hat{\theta}$  est [asymptotiquement sans biais](#).
2.  $\hat{\theta}$  est [« consistant »](#).
3.  $\hat{\theta}$  est [approximativement normalement distribué avec moyenne  \$\theta\$  et variance  \$1/I\_n\(\theta\)\$  pour des grands échantillons](#).
4.  $\hat{\theta}$  est [asymptotiquement efficace](#) puisque sa variance tend vers la borne Cramér-Rao.

Souvent les professeurs ne montrent pas ces conditions puisqu'elles sont compliquées. Alors, ne vous en faites pas si vous ne les comprenez pas complètement.

### Conditions de régularité

**R0** Les variables  $X_i$  sont iid avec densité  $f(x_i; \theta)$  pour  $i = 1, 2, \dots$

**R1** Les fonctions de densité ont toutes le même support pour tout  $\theta$ .

- > C'est-à-dire que le support de  $X_i$  ne dépend pas de  $\theta$ ;
- > C'est une condition restrictive que certains modèles ne respectent pas.

**R2** La "vraie valeur" de  $\theta$  est contenue dans l'ensemble des valeurs possibles  $\Theta$ .

**R3** La fonction de densité  $f(x; \theta)$  est différentiable deux fois comme fonction de  $\theta$ .

- > Cette condition additionnelle assure que les deux premières dérivées existent pour [la borne de Cramér-Rao](#).

**R4** L'intégrale  $\int f(x; \theta) dx$  est différentiable deux fois sous l'intégrale comme fonction de  $\theta$ .

- > Cette condition additionnelle assure que l'on peut utiliser la deuxième dérivée pour [la borne de Cramér-Rao](#).

### Cas multivarié

On généralise du cas où  $\theta$  est un scalaire (un seul paramètre) au cas multivarié avec  $k$  paramètres et le vecteur  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)^\top$ .

### Notation

En notation matricielle, on multiplie le vecteur  $\theta$  par la transposée  $\theta^\top$  au lieu de mettre  $\theta$  au carré.

- > La matrice d'information Fisher [d'une observation](#) est donc une matrice  $k \times k$  :

$$I(\theta) = E \left[ \frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \ln f(X; \theta)}{\partial \theta^\top} \right] \stackrel{iid}{=} E \left[ \frac{\partial^2 \ln f(X; \theta)}{\partial \theta \partial \theta^\top} \right]$$

- > Pour la matrice d'information Fisher d'un échantillon aléatoire de  $n$  observation, on utilise la relation  $I_n(\theta) = nI(\theta)$ .

$I_n^{-1}(\theta)$  Inverse de la matrice d'information Fisher  $I_n(\theta)$ .

Soit  $\tilde{\theta}$  un estimateur sans biais de  $\theta$ .

### Notation

**Var**( $\tilde{\theta}$ ) Matrice de variance de  $\tilde{\theta}$ .

- > Le  $(i, j)^e$  élément est donc  $\text{Cov}(\tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_j)$ .

La version multivariée de l'inégalité Cramér-Rao stipule que  $\text{Var}(\tilde{\theta}) - I_n^{-1}(\theta)$  est une [matrice « nonnegative definite »](#).

- > Puisque les éléments de la diagonale doivent être positifs, la borne inférieure de  $\text{Var}(\tilde{\theta}_i)$  est le  $i^e$  élément de la diagonale de  $I_n^{-1}(\theta)$ .

En bref, on trouve que sous [certaines conditions de régularité](#), la distribution de  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$  converge en distribution vers une distribution normale multivariée (de  $k$  dimensions) avec une moyenne nulle et une variance égale à la borne de Cramér-Rao.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}_k\left(0, I_n^{-1}(\theta)\right)$$

## Deuxième partie

# Modèles linéaires en actuariat

## Apprentissage statistique

### Apprentissage statistique

L'apprentissage statistique est l'utilisation de statistiques pour estimer les relations entre des variables « *explicatives* » et un résultat (une variable « *réponse* »).

### Variable réponse

Variable pour laquelle nous voulons effectuer des prévisions.

### Variables explicatives

Variables utilisées pour les prévisions de la variable réponse.

Les modèles d'apprentissage statistique ont deux utilités principales :

- 1 Faire des **prévisions** de la valeur de la variable réponse pour des valeurs spécifiques des variables réponse.
- 2 Faire de l'**inférence** afin de comprendre quelles variables explicatives sont liées à la variable réponse, et à quel degré.

Il y a une multitude de modèles d'apprentissage statistique différents. Entre autres, ces modèles varient en **flexibilité** ; c'est-à-dire, certains modèles s'*ajustent* mieux aux données.

Par exemple, une régression linéaire correspond à une ligne droite (peu flexible). En réalité, il est peu probable que les données soient situées sur une droite. En contraste, une « *spline* » va passer à travers tous les points (très flexible).

### Flexibilité du modèle

Il y a un compromis à faire entre la flexibilité d'un modèle et sa facilité d'interprétation :

- > Les modèles *moins flexibles* sont plus facilement interprétables au coût de moins bonnes prévisions.
  - Ils sont généralement mieux pour l'inférence.

- > Les modèles *plus flexibles* sont plus difficilement interprétables, mais ont l'avantage d'offrir de meilleures prévisions.

- Ils sont généralement mieux pour faire des prévisions.

En revanche, si un modèle est **sur ajusté** aux données alors il pourrait être biaisé envers les données avec lesquelles il est entraîné et offrir des mauvaises prévisions pour des **nouvelles** données.

De façon générale, on sépare l'apprentissage statistique en deux types :

**apprentissage supervisé** comporte une variable réponse.

**apprentissage non supervisé** ne comporte pas de variable réponse.

## Types de variables explicatives

Les variables explicatives prennent plusieurs formes :

### Variable continue

Définie sur les nombres réels.

Par exemple :

- › Les montants de perte d'accidents d'automobile.
- › Le temps avant qu'une réclamation d'assurance soit réglée.

### Variable catégorielle

Définie sur un petit nombre de valeurs catégorielles. On dit aussi *variable qualitative*.

Par exemple :

- › Une **variable binaire** (seulement deux niveaux).
  - P. ex., une variable "*Maison a un système d'alarme*" prenant comme valeur "*oui*" ou "*non*".
  - P. ex., le *sexe* d'un individu prenant comme valeur "*homme*" ou "*femme*".
- › Une variable avec plusieurs niveaux.
  - P. ex., la *marque d'une voiture* assurée prenant comme valeurs "*Toyota*", "*Honda*", etc.

Une variable catégorielle peut être :

#### 1 Nominale

Il n'y a pas d'ordre aux catégories.

Par exemple :

- › Le *programme d'étude* d'un étudiant prenant comme valeur "*actua-riat*", "*comptabilité*", etc.

#### 2 Ordinale

Il y a une d'ordre aux catégories.

Par exemple :

- › La *sévérité d'un incendie* allant de 1 à 5.

### Variable de comptage

Définie sur les entiers positifs.

Par exemple :

- › Le nombre de réclamations.

## Régression

### Famille exponentielle

La famille exponentielle est de la forme :  $f(y; \theta) = e^{a(y)b(\theta) + c(\theta) + d(y)}$ .

- Le GLM requiert que  $a(y) = y$  que l'on nomme la **forme canonique**.
- Sous cette paramétrisation,  $b(\theta)$  est le paramètre canonique (« *natural parameter* »).

Sous cette forme, on déduit que  $E[a(Y)] = -\frac{c'(\theta)}{b'(\theta)}$  et  $\text{Var}(a(Y)) = \frac{b''(\theta)c'(\theta) - c''(\theta)b'(\theta)}{(b'(\theta))^3}$ .

## Classification

On fait de la **classification** lorsque nous voulons prédire une variable *catégorielle*. Il y a 3 types de variables : nominal, ordinal et binomial. Les deux premières ont été définies plus haut, une variable réponse binomiale est simplement une variable ayant 2 catégories.

### Binomial

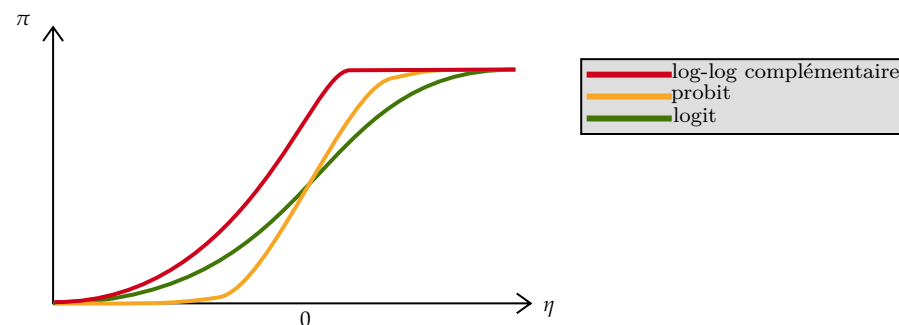
Soit  $\eta = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j x_j$ . Soit la probabilité  $\pi$  que  $Y = 1$ .

- Alors, on veut une fonction de lien  $g(\pi) = \eta$  tel que  $g(\pi) : [0, 1] \mapsto (-\infty, \infty)$ .
- Par exemple, la fonction quantile d'une distribution X.
  - On appelle cette distribution la « *tolerance distribution* ».
  - Ce nom provient de l'utilité du modèle pour évaluer si un médicament a un effet ou pas.
  - Une valeur élevée de  $\eta$  est plus probable de mener à une probabilité  $\pi$  élevée de oui ( $Y = 1$ ).

Les 3 fonctions de lien les plus utilisées pour  $\pi \in [0, 1]$  sont les suivantes :

Nom	$\mu = \pi$	$\eta$
Logit	$\frac{e^\eta}{1+e^\eta}$	$\ln\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)$
Probit	$\Phi(\eta)$	$\Phi^{-1}(\mu)$
Log-log complémentaire	$1 - e^{-e^\eta}$	$\ln(-\ln(1 - \pi))$

Comme on peut observer ci-dessous, les fonctions de lien logit et probit sont **symétriques** à 0, mais pas la fonction de lien log-log complémentaire.



**Note** La cote, alias le « *odds ratio* », est  $\frac{\pi}{1-\pi}$ .

## Nominal

On suppose qu'il y a  $J$  catégories possibles pour la variable réponse. Pour modéliser avec la régression logistique, on :

- 1 Choisit une catégorie comme catégorie de base 1.
- 2 Pour chacune des autres catégories, on trouve les cotes relatives (« *relative odds* »).

Le logarithme de la cote de la catégorie  $j$  relatif à la catégorie de base 1 est :

$$\ln \frac{\pi_j}{\pi_1} = \sum_{i=1}^p \beta_{ij} X_i = \eta_j, \quad j = 2, 3, \dots, J$$

Alors,  $\pi_j = \pi_1 e^{\eta_j}$  et puisque les probabilités doivent sommer jusqu'à 1 :

$$\pi_1 = \frac{1}{1 + \sum_{k=2}^J e^{\eta_k}}$$

$$\pi_j = \frac{e^{\eta_j}}{1 + \sum_{k=2}^J e^{\eta_k}}, \quad j = 2, 3, \dots, J$$

## Ordinal

### Modèle logit cumulatif

$$\frac{\Pr(Y \leq j)}{1 - \Pr(Y \leq j)} = \frac{\sum_{k=1}^j \pi_k}{1 - \sum_{k=1}^j \pi_k} = \frac{\pi_1 + \dots + \pi_j}{\pi_{j+1} + \dots + \pi_J}$$

Alors, avec les paramètres  $\beta$  qui varient par catégorie  $j$  :

$$\ln \left( \frac{\pi_1 + \dots + \pi_j}{\pi_{j+1} + \dots + \pi_J} \right) = \sum_{i=1}^p \beta_{ij} X_i$$

### Modèle de cotes proportionnelles

Excepté l'intercepte, les paramètres  $\beta$  ne varient pas par catégorie  $j$  :

$$\ln \left( \frac{\pi_1 + \dots + \pi_j}{\pi_{j+1} + \dots + \pi_J} \right) = \beta_{1j} + \sum_{i=2}^p \beta_i X_i$$

### Modèle logit de catégories adjacentes

$$\ln \left( \frac{\pi_j}{\pi_{j+1}} \right) = \sum_{i=1}^p \beta_{ij} X_i$$

### Modèle logit de ratio continu

$$\frac{\Pr(Y = j)}{\Pr(Y > j)} = \frac{\pi_j}{\pi_{j+1} + \dots + \pi_J}$$

## Autres

Régression	Type de variable réponse
Linéaire	Continue
Logistique	Binaire
Poisson	Données de comptage
Analyse de survie	Temps jusqu'à un événement

- Logistique prédit la probabilité qu'un événement ait lieu.
- Poisson prédit le « *rate* » auquel des événements aient lieu.
  - C'est-à-dire, le nombre de fois, ou la fréquence, d'un événement sur une période de temps.
  - Donc, le temps est fixé et on observe le nombre d'événements.
  - On ne peut pas simplement appliquer un modèle linéaire, car les données suivent une distribution de Poisson, pas une distribution normale!
  - Également, nous pouvons modéliser un « *offset* » pour considérer le temps d'exposition.
- Avec l'analyse de survie, on prédit le temps avant qu'un événement ait lieu.
  - Donc, le nombre d'événements est fixé à un et on veut savoir le temps avant qu'il ait lieu.

## Poisson

Il y a plusieurs façons de modéliser un même modèle de Poisson :

1. Modéliser le taux comme une fonction log-linéaire des  $x$  :  $\lambda = e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p}$ .
  - Ceci puisque le taux  $\lambda$  a une forme exponentielle.
2. Modéliser le log du taux comme une fonction linéaire des  $x$  :  $\ln(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$ .
  - Ceci permet de traiter le taux  $\lambda$  avec un modèle linéaire.
  - L'avantage est la simplicité d'une ligne pour résumer le modèle.
  - Mathématiquement, les deux premières équations sont équivalentes.
3. Modéliser le log de la fréquence espérée avec un « *offset* » :  $\ln(E[Y]) = \ln(E[\lambda t]) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p + \ln(t)$ .
  - La deuxième équation représente ce que l'on fait en théorie alors que la troisième représente ce que l'on fait en pratique.

Hypothèses du modèle :

1. Les observations sont indépendantes.
  - Si, par exemple, avoir une récurrence augmente la probabilité d'une deuxième récurrence, alors le modèle n'est pas adéquat.

2. Le taux auquel les événements se produisent est une fonction log-linéaire de  $x$ .
  - C'est-à-dire, le log du taux est une fonction linéaire des  $x$ .
3. Les variations dans les  $x$ 's ont des effets multiplicatifs sur le nombre d'événements.
  - Par exemple, si on modélise la fréquence d'accidents auto alors on s'attend à ce que le nombre d'accidents sur deux ans soit le double du nombre d'accidents sur un an.
4. La moyenne = variance =  $\lambda$ .
5. Le taux est constant.
  - Donc, on pose que le taux est fixe.
  - Par exemple, la probabilité d'une récurrence pourrait diminuer dans le temps.

Le modèle à deux gros problèmes, premièrement la **sur-dispersion** où la variance est supérieure à la moyenne.

- C'est-à-dire que les données sont plus variables que ce qui est attendu.
- Contrairement à la régression linéaire où l'estimation de la moyenne et du SSE est séparée, l'estimation est la même pour le modèle de Poisson.
- Il y a des multiples raisons pour lesquelles ceci peut arriver :
  1. Nous n'avons pas inclus toutes les variables explicatives significatives dans le modèle.
  2. La forme fonctionnelle du modèle est inadéquate (p. ex., les données ne sont pas log linéaires).
  3. Une variable est supposée d'être homogène alors qu'elle ne l'est pas.
    - P. ex., modéliser un groupe de fumeurs alors qu'il y a des sous-groupes (ceux qui fument de l'exercice vs ceux qui n'en fument pas, etc.)
  4. etc.

On peut calculer la **dispersion** et on désire qu'elle soit environ de 1.

Pour résoudre la sur-dispersion, on peut :

1. On peut pondérer l'erreur type de tous les coefficients par la racine du paramètre de dispersion.
  - Ceci ne change pas les prévisions, plutôt ça augmente l'erreur type pour tenir compte du fait que la variabilité des données observées est plus élevée que ce à quoi on s'attendait.
2. On peut ajuster un modèle avec une distribution binomiale négative.
  - Ceci permet d'estimer la fréquence et la variance séparément.
  - La variance sera plus grande, mais proportionnelle à la moyenne.

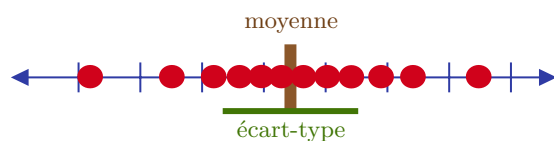
Deuxièmement, **Données gonflées à zéro**.

- L'idée est de modéliser la probabilité que l'événement ait lieu ou pas séparément de la fréquence.
- On peut modéliser la probabilité avec un modèle logistique et la fréquence avec un modèle de Poisson.

**Matrice de confusion :****Erreur**

**Écart-type** Mesure la variation entre les observations d'un ensemble de données.

> « *standard deviation* ».



**Erreur type** Mesure la variation entre les moyennes de **plusieurs** ensembles de données.

> « *standard error* ».





## Troisième partie

## Mathématiques actuarielles IARD I

## Probabilité

## Fonctions de variables aléatoires

## Fonction de masse de probabilité (PMF)

Pour une variable aléatoire discrète  $X$ , on dénote sa fonction de masse de probabilité  $p_X(x) = \Pr(X = x)$  tel que  $0 \leq p(x) \leq 1$  et  $\sum_x p(x) = 1$ .

## Fonction de densité (PDF)

Pour une variable aléatoire continue  $X$ , on dénote sa fonction de densité par  $f_X(x)$  où  $f_X(x) \neq \Pr(X = x)$ .

- La fonction de densité est évaluée sur des **intervalles de valeurs** pour obtenir la probabilité d'y être contenu, mais ne **représente pas une probabilité explicitement**.

De façon semblable à la PMF,  $f(x) \geq 0$  et  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ .

- La différence entre les conditions pour la PMF et la PDF est que la fonction de densité peut être supérieure à 1.
- Puisqu'elle ne représente pas une probabilité, elle ne doit pas être inférieure (ou égale) à 1.

## Fonction de répartition (CDF)

La fonction de répartition  $F_X(x) = \Pr(X \leq x)$  tel que  $F(-\infty) = 0$  et  $F(\infty) = 1$ .

- En anglais, « *cumulative distribution function* ».

## Fonction de survie

La fonction de survie  $S_X(x) = \Pr(X > x)$  tel que  $S(-\infty) = 1$  et  $S(\infty) = 0$ .

## Fonction de hasard

La fonction de hasard  $h_X(x) = \frac{f(x)}{S(x)}$  tel que  $h(x) \geq 0$ .

- Par la définition, on déduit qu'elle est **seulement applicable pour les v.a. continues**.
- La fonction de hasard mesure la **vraisemblance** que la v.a. soit égale à  $x$  en gonflant la PDF moins il devient vraisemblable qu'elle soit supérieure à  $x$ .
- En anglais, « *hazard function* », « *hazard rate* », « *failure rate function* » ou même « *force of mortality* ».

## Fonction de hasard cumulative

La fonction de hasard cumulative  $H_X(x) = \int_{-\infty}^x h(t)dt$ .

- Également,  $H(x) = -\ln S(x)$  ou  $S(x) = e^{-H(x)}$ .

**Note** Voir la sous-section *Divers* de la section sur la *Théorie de la fiabilité* du chapitre *Sujets divers* pour l'interprétation de la distribution en fonction de la fonction de hasard et de la fonction de hasard cumulative.

## Moments

Pour une v.a.  $X$  **non-négative** et une fonction  $g(x)$  tel que  **$g(0) = 0$** ,

$$E[g(X)] = \int_0^\infty g'(x)S(x)dx.$$

### Fonction génératrice des moments (MGF)

La fonction génératrice des moments (MGF) d'une v.a.  $X$  est dénoté comme

$$M_X(t) = E[e^{tX}].$$

Entre autres, la MGF sert à générer les moments d'une distribution avec

$$E[X^n] = \frac{\partial^n M_X(t)}{\partial t^n} \Big|_{t=0}.$$

### Fonction génératrice des probabilités (PGF)

La fonction génératrice des moments (PGF) d'une v.a.  $X$  est dénoté comme

$$P_X(t) = E[t^X].$$

Entre autres, la PGF sert à :

1. Générer les masses de probabilité d'une distribution discrète avec

$$p(n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n P_X(t)}{\partial t^n} \Big|_{t=0}.$$

2. Générer des espérances avec  $\frac{\partial^n P_X(t)}{\partial t^n} \Big|_{t=1} = E[X(X-1)\dots(X-(n-1))].$

## Centiles, mode et statistiques

### Centile

#### Contexte

Les centiles aident à quantifier la *vraisemblance* de pertes extrêmes. Bien que les actuaires se servent des centiles pour évaluer la **fréquence** des pertes extrêmes, ils ne sont **pas** utiles pour évaluer la *sévérité* de ces pertes.

Le  $100q^e$  **centile** d'une v.a.  $X$  est la valeur  $\pi_q$  tel que  **$\Pr(X < \pi_q) \leq q$**  et

$$\Pr(X \leq \pi_q) \geq q.$$

> Dans le cas continu,  $F_X(\pi_q) = q$  et  $\pi_q = F_X^{-1}(q)$ .

### « Conditionnal Tail Expectation (CTE) »

#### Contexte

La CTE sert à évaluer la *sévérité* des pertes extrêmes.

Par exemple, si la  $CTE_{0.95}(X) = 5000$  cela veut dire que la moyenne des pertes dans le top 5% est de 5 000\$.

$$\begin{aligned} CTE_q(X) &= E[X|X > \pi_q] \\ &= \pi_q + E[X - \pi_q|X > \pi_q] \\ &= \pi_q + \frac{E[X] - E[X \wedge \pi_q]}{1 - q} \end{aligned}$$

> On surnomme  $1 - q$  la « *tolerance probability* ».

> La CTE est le cas continu de la « *Tail-Value-at-Risk (TVaR)* ».

## Mode

## Contexte

Le mode est la réalisation qui a lieu le plus souvent.  
Par exemple, en anglais la lettre E est la lettre la plus utilisée dans le dictionnaire. Elle représente donc le *mode* de la langue anglaise.

En termes mathématiques, le mode est le point qui maximise la PMF/PDF.

Dans le cas continu, si la distribution : on peut simplement dériver la PDF et trouver le point qui la rend égale à zéro.

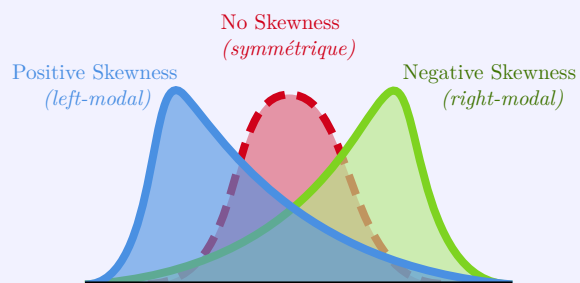
> est unimodal, c'est-à-dire qu'elle a une « bosse », alors  
mode =  $x$  tel que  $f'(x) = 0$ .

> est strictement croissant ou décroissant, le mode sera une des deux extrémités.

- Par exemple, la loi exponentielle est strictement décroissante et a toujours un mode à 0 peu importe les paramètres.

## Skewness

$$\text{Skewness} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3' - 3\mu_2'\mu + 2\mu^3}{\sigma^3}.$$



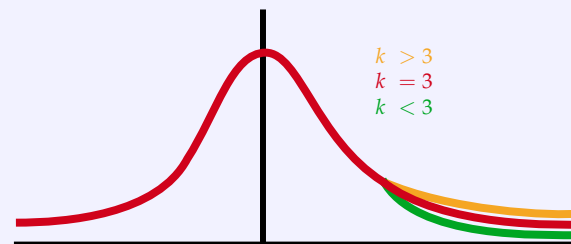
## Kurtosis

$$\text{Kurtosis} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4' - 4\mu_3'\mu + 6\mu_2'\mu^2 - 3\mu^4}{\sigma^4}.$$

Le kurtosis mesure l'aplatissement d'une distribution et peut aider à juger la vraisemblance qu'une distribution produise des valeurs extrêmes (ou

« outliers »).

Le kurtosis de la distribution normale est de 3. On pose qu'il est plus vraisemblable pour une distribution dont le kurtosis supérieur à 3 de produire des valeurs extrêmes.



## Distributions

## Loi Pareto

## Contexte

La distribution Pareto est un mélange de deux distributions exponentielles originellement conçue pour étudier des distributions de revenus.

Notation	Paramètres	Domaine
$X \sim \text{Pareto}(\alpha, \theta)$	$\alpha, \theta > 0$	$x \geq 0$

$f(x)$	$= \frac{\alpha \theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha+1}}$
$F(x)$	$= 1 - \left( \frac{\theta}{x + \theta} \right)^\alpha$

> Si  $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \theta)$  alors  $Y = (X - d | X > d) \sim \text{Pareto}(\alpha, \theta + d)$ .

## Loi Beta

Notation	Paramètres	Domaine
$X \sim \text{Beta}(a, b, \theta)$	$a, b > 0$ et $\theta \geq 0$	$x \in [0, \theta]$

$$f(x) = \frac{\theta}{B(a, b)} \left( \frac{x}{\theta} \right)^{a-1} \left( 1 - \frac{x}{\theta} \right)^{b-1}$$

>  $X \sim \text{Beta}(a = 1, b = 1, \theta) \sim \text{Unif}(0, \theta)$ .

> Si  $X \sim \text{Unif}(a, b)$  alors  $(X | X > d) \sim \text{Unif}(d, b)$  et  $(X - d | X > d) \sim \text{Unif}(0, b - d)$ .

## Loi Gamma

Notation	Paramètres	Domaine
$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \theta)$	$\alpha, \theta > 0$	$x \geq 0$

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(\alpha) \theta^\alpha}$$

> On appelle  $\theta$  la moyenne et  $\lambda = \frac{1}{\theta}$  le paramètre de fréquence (« rate »).

> Soit  $n$  v.a. indépendantes  $X_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \theta)$  alors  $\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \theta)$ .

> Soit  $n$  v.a. indépendantes  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$  alors  $Y = \min(X_1, \dots, X_n) \sim \text{Exp}(\frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i})$ .

> Si  $X \sim \text{Exp}(\theta)$  alors  $(X - d | X > d) \sim \text{Exp}(\theta)$ .

## Loi de Weibull

Notation	Paramètres	Domaine
$X \sim \text{Weibull}(\tau, \beta)$	$\tau, \beta > 0$	$x \geq 0$

$$f(x) = \frac{\tau (x/\theta)^\tau e^{-(x/\theta)^\tau}}{x}$$

> La loi de Weibull est une transformation de la loi exponentielle; pour  $Y \sim \text{Exp}(\mu)$ , alors  $X = Y^{1/\tau} \sim \text{Weibull}(\theta = \mu^{1/\tau}, \tau)$ .

**Note** Voir la sous-section *Divers* de la section sur la *Théorie de la fiabilité* du chapitre *Sujets divers* pour l'interprétation de la fonction de hasard dans le contexte de la loi gamma, la loi exponentielle et la loi de Weibull.

## Loi Erlang

## Contexte

La loi Erlang est un cas spécial de la loi Gamma avec un paramètre de forme  $\alpha$  entier. Elle est utile dans le contexte de **Processus de Poisson**, car nous pouvons trouver une forme explicite de la fonction de répartition (survie).

Notation	Paramètres	Domaine
$X \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$	$\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}^+$	$x \geq 0$

$f(x)$	$= \frac{x^{n-1} \lambda^n e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)}$
$S(x)$	$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k e^{-\lambda x}}{k!}$

## Loi de Poisson

Notation	Paramètres	Domaine
$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$	$\lambda > 0$	$x = 0, 1, 2, \dots$

$\Pr(X = x)$	$= \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$
--------------	---------------------------------------

## Transformation

## Changement d'échelle pour des v.a. continues

Toutes les distributions continues (sauf pour la lognormale, l'inverse gaussienne et la log-t) ont  $\theta$  comme paramètre d'échelle. Alors, multiplier la v.a. par une constante  $c$  change uniquement le paramètre  $\theta^* = c\theta$ .

## Trouver la PDF d'une v.a. transformée

Soit  $n$  v.a.  $X_1, \dots, X_n$  que l'on veut transformer en  $n$  autres variables aléatoires  $W_1 = g_1(X_1, \dots, X_n), \dots, W_n = g_n(X_1, \dots, X_n)$ .

- 1 Trouver les inverses des équations de la transformation :

$$x_1 = g_1^{-1}(w_1, \dots, w_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = g_n^{-1}(w_1, \dots, w_n)$$

- 2 Calculer le déterminant de la matrice Jacobienne  $J$  :

$$J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial w_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial w_n} \end{bmatrix}$$

- 3 Trouver la fonction de densité conjointe avec

$$f_{W_1, \dots, W_n}(w_1, \dots, w_n) = f_{X_1, \dots, X_n}(g_1^{-1}(w_1, \dots, w_n), \dots, g_n^{-1}(w_1, \dots, w_n)) |J|.$$

**Note** Dans le cas univarié,  $f_W(w) = f_X(g^{-1}(w)) \left| \frac{\partial g^{-1}(w)}{\partial w} \right|$ .

## Queues de distributions

### Contexte

Si une distribution a une queue de droite qui est lourde, « *thick* » ou « *fat* », alors elle a des probabilités élevées de pertes extrêmes.

En situation d'examen nous ne pouvons pas visuellement évaluer la queue et donc nous utilisons un des 4 tests suivants :

#### 1 Nombre de moments (positifs) qui existent

Plus la queue est **lourde**, *moins* il y a de moments qui existent.

- › Il devient de moins en moins probable que l'intégrale de  $x^k f(x)$  va converger.

#### 2 Ratio des fonctions de survie (ou PDF)

Plus la queue est **lourde**, *plus* la fonction de survie va tendre vers 0 **lentement**.

- › Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = 0$  alors  $X_1$  a une queue plus légère que  $X_2$ , et vice-versa si la limite tend vers  $\infty$ .
- › Par la règle de l'hôpital, ceci est équivalent pour le ratio des PDF.

#### 3 Fonctions de hasard

Si la fonction de hasard est **décroissante**, il y a une probabilité plus élevée de pertes extrêmes et donc une queue **lourde**.

#### 4 CTEs (ou quantiles)

**Plus** le CTE (ou les quantiles) est large, plus les montants de pertes extrêmes sont larges et donc *plus* la queue est **lourde**.

## Estimations et types de données

### Distributions empiriques

#### Notation

$X$  Variable aléatoire de perte ;

$\theta$  Paramètre de la distribution de  $X$  ;

› Le paramètre peut être un scalaire  $\theta$  ou un vecteur  $\boldsymbol{\theta}$  ;

› Par exemple, pour une loi Gamma  $\boldsymbol{\theta} = \{\alpha, \beta\}$  ;

› Pour simplifier la notation, on le traite comme un scalaire  $\theta$ .

$F_X(x; \theta)$  Fonction de répartition de  $X$  avec paramètre  $\theta$  ;

› Pour simplifier la notation, on écrit  $F(x; \theta)$  sauf s'il faut être plus spécifique.

$f_X(x; \theta)$  Fonction de densité de  $X$  avec paramètre  $\theta$  ;

› Pour simplifier la notation, on écrit  $f(x; \theta)$  sauf s'il faut être plus spécifique.

$\{X_1, \dots, X_n\}$  Échantillon aléatoire de  $n$  observations de  $X$  ;

$\hat{\theta}$  Estimateur de  $\theta$  établi avec l'échantillon aléatoire  $\{X_1, \dots, X_n\}$  ;

$F(x; \hat{\theta})$  Estimation *paramétrique* de la fonction de répartition de  $X$  ;

$f(x; \hat{\theta})$  Estimation *paramétrique* de la fonction de densité de  $X$  ;

- › Si  $\theta$  est connu, la distribution de  $X$  est complètement spécifiée ;  
En pratique,  $\theta$  est inconnu et doit être estimé avec les données observées.
- › On peut estimer  $F_X(x)$  et  $f_X(x)$  directement pour toute valeur  $x$  sans présumer une forme paramétrique ;  
Par exemple, un histogramme est une estimation *non paramétrique*.

### Données complètes

#### Notation

$X$  Variable d'intérêt (p. ex., la durée de vie ou la perte) ;

$\{X_1, \dots, X_n\}$  Valeurs de  $X$  pour  $n$  individus ;

$\{x_1, \dots, x_n\}$   $n$  valeurs observées de l'échantillon ;

› Il peut y avoir des valeurs dupliquées dans les valeurs observées.

$0 < y_1 < \dots < y_m$   $m$  valeurs distinctes où  $m \leq n$  ;

$w_j$  Nombre de fois que la valeur  $y_j$  apparaît dans l'échantillon pour  $j = 1, \dots, m$  ;

› Il s'ensuit que  $\sum_{j=1}^m w_j = n$  ;

› Pour des données de mortalité,  $w_j$  individus décèdent à l'âge  $y_j$  ;

› Si tous les individus sont observés de la naissance jusqu'à la mort c'est un « *complete individual data set* ».

$r_j$  « *risk set* » au temps  $y_j$  ;

› Le nombre d'individus exposés à la possibilité de mourir au temps  $y_j$  ;

› Par exemple,  $r_1 = n$ , car tous les individus sont exposés au risque de décéder juste avant le temps  $y_1$  ;

› On déduit que  $r_j = \sum_{i=j}^m w_i$ , alias le nombre d'individus qui survivent juste avant le temps  $y_j$ .

## Données incomplètes

## Exemple

Soit une étude sur le nombre d'années nécessaire pour obtenir un diplôme universitaire. L'étude commence cette année et tient compte de tous les étudiants présentement inscrits, ainsi que ceux qui vont s'inscrire au courant de l'étude. Tous les étudiants sont observés jusqu'à la fin de l'étude et on note le nombre d'années nécessaire pour ceux qui complètent leurs diplômes.

Si un étudiant a commencé son cursus scolaire avant l'étude et suit présentement des cours, le chercheur a de l'information sur le nombre d'années qu'il a déjà investi. Cependant, d'autres étudiants qui se sont inscrits en même temps, mais ont cessé leurs études ne seront pas observés dans cet échantillon. Alors, l'individu est observé d'une population **tronquée à la gauche** puisque l'information sur les étudiants qui ont quitté l'université avant le début de l'étude n'est *pas disponible*.

Si un étudiant n'est pas encore diplômé lorsque l'étude prend fin, le chercheur ne peut pas savoir combien d'années supplémentaires seront nécessaires. Cet individu fait donc partie d'une population **censurée à la droite** puisque le chercheur a de l'information *partielle* (le nombre d'années minimal) sans savoir le nombre exact.

## Notation

$d_i$  État de troncature de l'individu  $i$  de l'échantillon ;

- >  $d_i = 0$  s'il n'y a pas de troncature ;
- > Par exemple, un étudiant a commencé son programme universitaire  $d_i$  années avant le début de l'étude.

$x_i$  Temps de "survie" de l'individu  $i$  ;

- > Par exemple, le nombre d'années avant d'obtenir son diplôme ;
- > Si l'étude prend fin avant que  $x_i$  soit observé, on dénote le temps de survie jusqu'à ce moment  $u_i$  ;
- > Donc chaque individu a *soit* une valeur  $x_i$  ou  $u_i$ , mais *pas les deux*.

## Données groupées

## Notation

$(c_0, c_1], (c_1, c_2], \dots, (c_{k-1}, c_k]$   $k$  intervalles regroupant les observations ;

$0 \leq c_0 < c_1 < \dots < c_k$  Extrémités des  $k$  intervalles ;

$n$  Nombre d'observations de  $x_i$  dans l'échantillon ;

$n_j$  Nombre d'observations de  $x_i$  dans l'intervalle  $(c_{j-1}, c_j]$  ;

> Il s'ensuit que  $\sum_{j=1}^k n_j = n$  .

$r_j$  « risk set » de l'intervalle  $(c_{j-1}, c_j]$  lorsque les données sont complètes ;

> Il s'ensuit que  $r_j = \sum_{i=j}^k n_i$  .



## Applications en assurance

### Notation

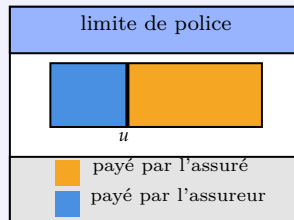
$X$  Variable aléatoire du montant de perte.

### Limite de police

#### Limite de police

Une **limite de police**  $u$  est le montant maximal qu'un assureur va payer pour une perte.

Visuellement :



### L'espérance limitée du montant de perte

L'espérance limitée du montant de perte  $E[X \wedge u]$  correspond à l'espérance du paiement de l'assureur pour une police d'assurance ayant une limite de  $u$  :

$$E[X \wedge u] = \int_0^u x f(x) dx + u S(u)$$

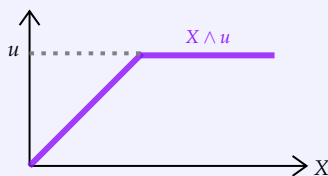
### Montant de perte limité

La variable aléatoire du **montant de perte limité**  $X \wedge u$  correspond au montant du paiement de l'assureur pour une police d'assurance ayant une limite de  $u$  :

$$X \wedge u = \begin{cases} X, & X < u \\ u, & X \geq u \end{cases}$$

Il s'ensuit que  $X \wedge d = \min(X; d)$ .

Visuellement :



## Déductibles

### Déductible

Le **déductible d'une police** est le montant que l'assuré doit payer de sa poche avant que l'assureur débourse pour une perte.

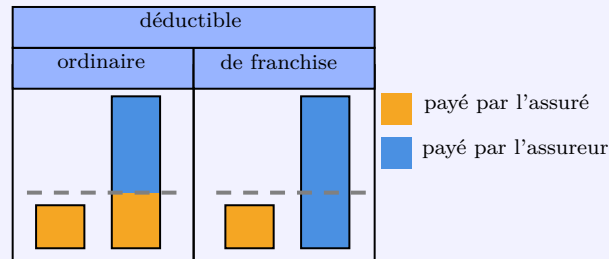
Il y a 2 types de déductibles :

**déductible ordinaire** Une fois que le montant de perte dépasse le déductible, l'assureur va payer le montant de la perte **en excès du déductible**.

**déductible de franchise** Une fois que le montant de perte dépasse le déductible, l'assureur va payer le montant **total** de la perte.

Par défaut, on suppose le déductible ordinaire.

Visuellement :



### Déductible ordinaire

#### Montant de perte avec un déductible ordinaire

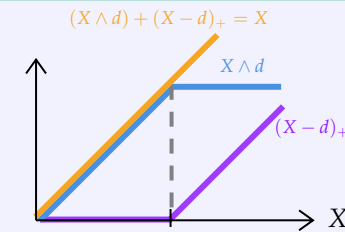
La variable aléatoire du montant de perte pour une police ayant un **déductible ordinaire** de  $d$ .

$$(X - d)_+ = \begin{cases} 0, & X \leq d \\ X - d, & X > d \end{cases} \quad X \wedge d = \begin{cases} X, & X < d \\ d, & X \geq d \end{cases}$$

> Il s'ensuit que  $(X - d)_+ = \max(X - d; 0)$ .

> On observe que le montant de perte est la somme des contributions  $X = X \wedge d + (X - d)_+$ .

Visuellement :



#### L'espérance du montant de perte avec un déductible ordinaire

**L'espérance du montant de perte**, pour l'assureur, avec un **déductible ordinaire**  $E[(X - d)_+]$  correspond à :

$$E[(X - d)_+] = \int_d^\infty (x - d)f(x)dx$$

#### « Loss Elimination Ratio (LER) »

Le « *Loss Elimination Ratio (LER)* » évalue combien qu'épargne l'assureur en imposant un déductible *ordinaire* de  $d$ ,  $LER = \frac{E[X \wedge d]}{E[X]}$ .

#### « payment per loss » et « payment per payment »

##### Notation

$Y^L$  Montant de perte.

> « *payment per loss* »

$Y^P$  Montant de paiement.

> « *payment per payment* »

$E[Y^L]$  Montant espéré de paiement **par perte subie**.

$E[Y^P]$  Montant espéré de paiement **par paiement effectué**.

> Par exemple, lorsqu'une police a un déductible, les pertes dont le coût est inférieur au déductible ne seront pas reportées à l'assureur.

> Le montant de paiement est donc le montant que l'assureur va payer conditionnel à ce qu'il y ait un paiement.

> Il s'ensuit que  $E[Y^L] \geq E[Y^P]$ .

Pour un déductible ordinaire de  $d$ ,

$$E[Y^L] = E[(X - d)_+] \quad E[Y^P] = E[X - d | X > d]$$

➤ On trouve que  $E[Y^P] = \frac{E[Y^L]}{S(d)}$ .

➤ Également, le montant espéré de paiement par paiement effectué est la fonction d'excès moyen  $E[Y^P] = e(d)$ .

➤ Si la police d'assurance comporte uniquement une limite,  $Y^P = Y^L$ .

**Relations pour quelques distributions :**

$X$	$(X - d   X > d)$
$\text{Exp}(\theta)$	$\text{Exp}(\theta)$
$\text{Unif}(a, b)$	$\text{Unif}(0, b - d)$
$\text{Pareto}(\alpha, \theta)$	$\text{Pareto}(\alpha, \theta + d)$
$\text{Beta}(1, b, \theta)$	$\text{Beta}(1, b, \theta - d)$

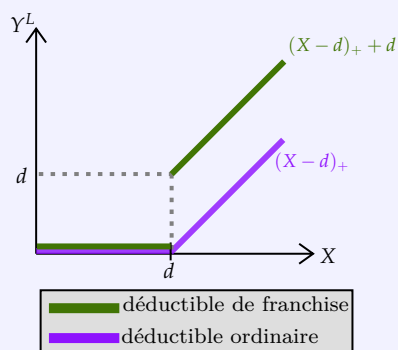
## Déductible de franchise

### Montant de perte avec un déductible de franchise

La variable aléatoire du montant de perte pour une police ayant un **déductible de franchise** de  $d$ .

$$(X | X > d) = \begin{cases} 0, & X \leq d \\ X, & X > d \end{cases}$$

Visuellement :



### L'espérance du montant de perte avec un déductible de franchise

**L'espérance du montant de perte**, pour l'assureur, avec un **déductible de franchise**  $E[X | X > d]$  correspond à :

$$\begin{aligned} E[X | X > d] &= \int_d^\infty x f(x) dx = \int_d^\infty (x - d) f(x) dx + d \int_d^\infty f(x) dx \\ &= E[(X - d)_+] + d S(d) \end{aligned}$$

## Impacts du déductible sur la fréquence

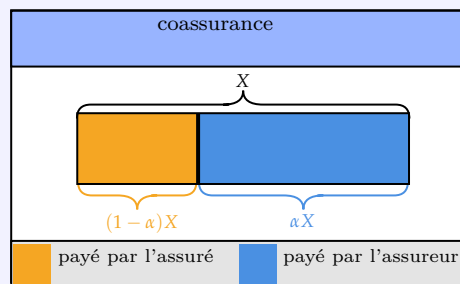
Pour la classe  $(a, b, 0)$  de distributions, on trouve les relations suivantes :

Nombre de pertes ( $N$ )	Nombre de paiements ( $N'$ )
$\text{Pois}(\lambda)$	$\text{Pois}(S(d)\lambda)$
$\text{Binom}(n, p)$	$\text{Binom}(n, S(d)p)$
$\text{BinNeg}(r, \beta)$	$\text{BinNeg}(r, S(d)\beta)$

## Coassurance

### Coassurance $\alpha$

Le pourcentage de coassurance  $\alpha$  correspond à la portion de la perte payée par l'assureur. Pour une perte de  $X$ , l'assureur paye  $\alpha X$  et l'assuré paye  $(1 - \alpha)X$ .



### L'espérance du montant de perte avec coassurance

L'espérance du montant de perte, pour l'assureur, avec une coassurance de  $\alpha$  est  $E[\alpha X] = \alpha E[X]$ .

## Combinaison des facteurs

### Cas d'un déductible et de coassurance

› Habituellement, la coassurance est appliquée **après** le déductible et la perte pour l'assureur est :

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \leq d \\ \alpha(X - d), & X > d \end{cases}$$

$$E[Y^L] = \alpha (E[X] - E[X \wedge d])$$

› Si une question spécifie que la coassurance s'applique **avant** le déductible, il suffit de remplacer  $d$  par  $\frac{d}{\alpha}$  et mettre le  $\alpha$  en évidence comme avant :

$$Y^L = \begin{cases} 0, & \alpha X \leq d \\ \alpha X - d, & \alpha X > d \end{cases} = \begin{cases} 0, & X \leq \frac{d}{\alpha} \\ \alpha \left( X - \frac{d}{\alpha} \right), & X > \frac{d}{\alpha} \end{cases}$$

$$E[Y^L] = \alpha \left( E[X] - E \left[ X \wedge \frac{d}{\alpha} \right] \right)$$

Soit une police ayant :

1. une coassurance de  $\alpha$ ,

2. une limite de police de  $u$ ,

3. un déductible **ordinaire** de  $d$ .

Alors,  $E[Y^L] = \alpha \{ E[X \wedge m] - E[X \wedge d] \}$  et

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \leq d \\ \alpha(X - d), & d < X < m \\ u, & X \geq m \end{cases}$$

où  $m$  est la **perte maximale admissible**.

### Perte maximale admissible $m$

Soit la perte maximale admissible  $m = \frac{u}{\alpha} + d$  représentant la plus petite perte pour laquelle l'assureur paye la limite  $u$ .

› En anglais, « *maximum covered loss* ».

Visuellement :



## Inflation

### Inflation $r$

L'inflation de  $r$  augmente les coûts, mais, de façon générale, ils sont couverts par la compagnie d'assurance et ne causent pas de changements à la police.

### L'espérance du montant de perte avec inflation

**L'espérance du montant de perte**, pour l'assureur, **avec de l'inflation de  $r$**  est  $E[(1+r)X] = (1+r)E[X]$ .

Combiné avec les autres facteurs :

$$E[Y^L] = \alpha(1+r) \left( E \left[ X \wedge \frac{m}{1+r} \right] - E \left[ X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right)$$

$$E[Y^P] = \frac{E[Y^L]}{S_X \left( \frac{d}{1+r} \right)}$$

**Note** Si la distribution de  $X$  comporte un paramètre d'échelle  $\theta$ , on peut simplifier les équations en posant  $\theta' = (1+r)\theta$ .

## Estimation de modèles non paramétriques

### Données complètes

Section à compléter avec mes notes d IARD et 11.2 de Nonlife Actuariel Models (tse).

### Distribution empirique

#### Distribution empirique

Distribution discrète prenant comme valeurs  $y_1, \dots, y_m$  avec probabilités  $\frac{w_1}{n}, \dots, \frac{w_m}{n}$  ;

› On peut également la définir comme la distribution discrète équiprobable des valeurs  $x_1, \dots, x_n$ .

#### Notation

$\hat{f}()$  Fonction de densité empirique.

$\hat{F}()$  Fonction de répartition empirique.

$\tilde{F}()$  Fonction de répartition lissée ;

› En anglais, « *smoothed empirical distribution function* ».

› On appelle parfois la fonction de répartition *la fonction distribution* (« *distribution function* »).

$$\hat{f}(y) = \begin{cases} \frac{w_j}{n}, & \text{si } y = y_j \forall j \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\hat{F}(y) = \begin{cases} 0, & y < y_1, \\ \frac{1}{n} \sum_{h=1}^j w_h, & y_j \leq y < y_{j+1}, j = 1, \dots, m-1 \\ 1, & y_m \leq y \end{cases}$$

On peut estimer la valeur de  $\hat{F}()$  pour une valeur de  $y$  pas dans l'ensemble  $y_1, \dots, y_m$  avec la fonction de répartition lissée  $\tilde{F}()$ . Pour  $y_j \leq y < y_{j+1}$  et  $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ ,  $\tilde{F}(y)$  est une interpolation linéaire de  $\hat{F}(y_{j+1})$  et  $\hat{F}(y_j)$  :

$$\tilde{F}(y) = \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \hat{F}(y_{j+1}) + \frac{y_{j+1} - y}{y_{j+1} - y_j} \hat{F}(y_j)$$

#### ✓ Distribution binomiale de la fonction de répartition empirique

On peut écrire la fonction de répartition empirique comme  $\hat{F}(y) = \frac{Y}{n}$  où  $Y$  est le nombre d'observations qui sont inférieures ou égales à  $y$  tel que  $Y \sim \text{Bin}(n, p = F(y))$ .

On trouve :

$$E[Y] = \frac{E[\hat{F}(y)]}{n} = F(y)$$

$$\text{Var}(Y) = \frac{\text{Var}(\hat{F}(y))}{n^2} = \frac{F(y)(1 - F(y))}{n}$$

### Estimation par noyaux

La fonction de répartition empirique résume les données d'une distribution discrète. Cependant, lorsque la variable d'intérêt  $X$  est continue on souhaite estimer une fonction de densité.

Pour une observation  $x_i$  de l'échantillon, la fonction de répartition empirique assigne une masse de probabilité de  $1/n$  au point  $x_i$ . Puisque  $X$  est continue, il est normal que l'on souhaite *distribuer* cette masse *autour* de  $x_i$ .

Si l'on souhaite distribuer cette masse de façon égale, on le fait sur l'intervalle

$[x_i - b, x_i + b]$  avec la fonction de  $x_i$   $f_i(x)$  :

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{0.5}{b}, & x_i - b \leq x \leq x_i + b, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

› Cette fonction est rectangulaire avec une base de longueur  $2b$  et une hauteur de  $0.5/b$  pour avoir une aire de 1.

› On peut l'interpréter comme la fonction de densité contributive par l'observation  $x_i$  ;

› On note que ceci correspond à la fonction de densité d'une distribution uniforme  $U(x_i - b, x_i + b)$  ;

› Alors, seulement les valeurs de  $x$  contenues dans l'intervalle  $(x_i - b, x_i + b)$  reçoivent une "contribution" de  $x_i$  ;

› La fonction de densité de  $X$  est donc la somme des masses de probabilité contributives  $\tilde{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x)$ .

On définit  $\phi_i = \frac{x - x_i}{b}$  et  $K_R(\phi)$  :

$$K_R(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \leq \phi \leq 1, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

› On trouve donc que  $f_i(x) = \frac{1}{b}K_R(\phi_i)$  et  $\tilde{f}(x) = \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^n K_R(\phi_i)$ .

### Notation

$b$  « *bandwidth* » où  $b > 0$  ;

$K_R(\phi)$  « *rectangular (box, uniform) kernel function* » ;

$\tilde{f}(x)$  Estimation de la fonction de densité selon le noyau rectangulaire ;

$K_T(\phi)$  « *triangular kernel* » ;

$$K_R(\phi) = \begin{cases} 1 - |\phi|, & -1 \leq \phi \leq 1, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$K_G(\phi)$  « *Gaussian kernel* » ;

$$K_G(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\phi^2}{2}}, -\infty < \phi < \infty$$

## Données incomplètes

Section à compléter avec mes notes d IARD et 11.2 de Nonlife Actuariel Models (tse).

### Estimateur de Kaplan-Meier

Soit :

$$S(y_j) = \Pr(X > y_1) \Pr(X > y_2 | X > y_1) \dots \Pr(X > y_j | X > y_{j-1}) = \Pr(X > y_1) \prod_{h=2}^j \Pr(X > y_h | X > y_{h-1})$$

Où on peut estimer  $\hat{\Pr}(X > y_1) = 1 - \frac{w_1}{r_1}$  et  $\hat{\Pr}(X > y_h | X > y_{h-1}) = 1 - \frac{w_h}{r_h}$  pour

$h = 2, \dots, m$ .

Il s'ensuit qu'on peut estimer  $S(y_j)$  par :

$$\hat{S}(y_j) = \prod_{h=1}^j \left( 1 - \frac{w_h}{r_h} \right)$$

Variance de l'estimateur Kaplan-Meier :  $\text{Var}(\hat{S}_K(y_j) | \mathcal{C}) \approx (S(y_j))^2 \left( \sum_{h=1}^j \frac{1 - S_h}{S_h r_h} \right)$

Approximation de Greenwood de la variance de l'estimateur Kaplan-Meier :

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{S}_K(y_j) | \mathcal{C}) \approx (\hat{S}_K(y_j))^2 \left( \sum_{h=1}^j \frac{w_h}{r_h(r_h - w_h)} \right)$$

### Estimateur de Nelson-Aalen

#### Notation

$h(y)$  Fonction de hasard.

$H(y)$  Fonction de hasard cumulative.

$$H(y) = \int_0^y h(y) dy$$

Il s'ensuit que  $S(y) = e^{-H(y)}$  et  $H(y) = -\ln(S(y))$ .

Avec l'approximation  $-\ln\left(1 - \frac{w_h}{r_h}\right) \approx \frac{w_h}{r_h}$  on trouve que  $H(y) = \sum_{h=1}^j \frac{w_h}{r_h}$  qui correspond à l'estimateur Nelson-Aalen de la fonction de hasard cumulative.

## Données groupées

Section à compléter avec mes notes d IARD et 11.3 de Nonlife Actuariel Models (tse).



## Estimation de modèles paramétriques

### Estimation par maximum de vraisemblance pour des données incomplètes et groupées

Lorsque les données sont groupées et/ou incomplètes, les observations ne sont plus iid, mais on peut quand même formuler la fonction de vraisemblance et trouver l'EMV.

La première étape est d'écrire la fonction de (log) vraisemblance adéquate pour la méthode d'échantillonnage des données.

Par exemple, soit des données groupées en  $k$  intervalles :

- › On trouve avec la fonction de répartition  $F(\cdot; \theta)$  que la probabilité d'être dans l'intervalle  $(c_{j-1}, c_j]$  est  $F(c_j; \theta) - F(c_{j-1}; \theta)$  ;
- › On pose que les observations individuelles sont iid ;
- › Donc, la vraisemblance d'avoir  $n_j$  observations dans l'intervalle  $(c_{j-1}, c_j]$ , pour  $j = 1, \dots, k$  et  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_k)$  est :

$$\mathcal{L}(\theta; \mathbf{n}) = \prod_{j=1}^k [F(c_j; \theta) - F(c_{j-1}; \theta)]^{n_j}$$

### Fonction de vraisemblance

#### Données censurées vers la droite

On pose que  $n_1$  observations sont complètes et que  $n_2$  observations sont censurées à la limite de  $u$  :

$$\mathcal{L}(\theta; \mathbf{x}) = \underbrace{\left[ \prod_{i=1}^{n_1} f(x_i; \theta) \right]}_{\text{probabilité de chaque observation à la valeur observée}} \underbrace{[1 - F(u; \theta)]^{n_2}}_{\text{probabilité qu'une observation soit supérieure, ou égale, à } u}$$

#### tronquées vers la gauche

On pose un déductible de  $d$  :

$$\mathcal{L}(\theta; \mathbf{x}) = \underbrace{\frac{1}{[1 - F(d; \theta)]^n}}_{\text{pondère la vraisemblance par la probabilité d'être supérieur au déductible}} \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

#### Données complètes

$$\mathcal{L}(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{j=1}^k \underbrace{f(x_j; \theta)}_{\text{probabilité que chaque observation soit égale à la valeur observée}}$$

#### Données groupées en $k$ intervalles

$$\mathcal{L}(\theta; \mathbf{x}) = \prod_{j=1}^k \underbrace{[F(c_j; \theta) - F(c_{j-1}; \theta)]^{n_j}}_{\text{probabilité qu'une observation soit contenue dans l'intervalle}}$$

## Évaluation et sélection de modèles

Cette section n'est pas suffisamment bien expliquée pour que je la considère complète.

### Contexte

Évaluer les modèles avec des méthodes non paramétriques a l'avantage d'avoir très peu d'hypothèses. Cependant, il est plus difficile d'évaluer le modèle d'un point de vue théorique.

Évaluer les modèles avec des méthodes paramétriques a l'avantage de résumer le modèle à un petit nombre de paramètres. Cependant, ces méthodes sont une simplification et risquent d'imposer la mauvaise structure.

### Graphiquement

Avec les méthodes d'évaluation visuelles, on peut détecter si les données diffèrent anormalement du modèle paramétrique.

- On peut évaluer la fonction de répartition empirique et la fonction de répartition théorique sur un même graphique pour évaluer l'ajustement.
- On peut évaluer le tracé des probabilités (« *P-P plot* ») qui trace la répartition empirique et la répartition théorique.
- On peut tracer l'histogramme des données et superposer la densité théorique pour évaluer l'ajustement.

Le désavantage de ces méthodes est qu'elles ne fournissent pas des mesures quantitatives sur l'ajustement du modèle.

### Tests pour la qualité de l'ajustement

#### Tests de spécification (« *misspecification tests* »)

Test de signifiante dont l'objectif est d'évaluer les hypothèses de distribution d'un modèle.

### Notation

$F^*$ () Fonction de répartition d'une v.a. continue (hypothèse nulle).

$\hat{F}$ () Fonction de répartition empirique.

Les tests de Kolmogorov-Smirnov (K.-S.) et de Anderson-Darling sont idéaux lorsque l'on désire comparer les fonctions de répartition.

Le test de K.-S. compare la fonction de distribution (répartition) empirique à celle d'une distribution théorique. L'idée du test est donc de quantifier l'évaluation visuelle que l'on peut faire de l'ajustement.

### Test de Kolmogorov-Smirnov

On teste si les données semblent suivre une distribution (« supportent l'hypothèse nulle ») avec la statistique de Kolmogorov-Smirnov :

$$D = \max_{x_{(1)} \leq x \leq x_{(n)}} |\hat{F}(x) - F^*(x)|.$$

- Ceci équivaut donc à calculer la différence maximale entre la fonction de répartition empirique et celle de la distribution.
- Puisque  $\hat{F}()$  est une fonction à escalier, il faut seulement évaluer la fonction aux points observés  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ .
- De plus, le maximum peut seulement arriver soit au point de saut  $x_{(i)}$  ou immédiatement avant  $x_{(i-1)}$ .

On peut donc récrire

$$D = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \left\{ \max \left\{ \left| \hat{F}(x_{(i-1)}) - F^*(x_{(i)}) \right|, \left| \hat{F}(x_{(i)}) - F^*(x_{(i)}) \right| \right\} \right\}.$$

- Si les données sont bien ajustées, on s'attend à ce que  $D$  soit très petit.
- Lorsque la distribution est entièrement spécifiée (aucun paramètre n'est estimé), une table avec les valeurs critiques est donnée.
- S'il faut estimer des paramètres, la simulation Monte-Carlo est utilisée pour trouver des nouvelles valeurs critiques.

### Test de K.-S. pour des données incomplètes

Pour des données tronquées à  $d$  et censurée (vers la droite) à  $u$ ,

$$D = \max_{d \leq x \leq u} |\hat{F}(x) - F^*(x)|$$

Visuellement, le test de K.-S. ressemble à :



Lorsque les paramètres sont connus, le test de K.-S. n'est pas spécifique à aucune distribution avec des valeurs critiques générales. Le test de Anderson-Darling (A.-D.) considère toutes les différences  $(\hat{F}(x) - F^*(x))$  et non seulement la différence maximale. Également, elle attribue plus de poids aux queues de la distribution en pondérant par la fonction de répartition et de survie :

$$A^2 = n \int \frac{(\hat{F}(x) - F^*(x))^2}{F^*(x)S^*(x)} f^*(x) dx$$

Donc, lorsque  $F^*(x)$  ou  $S^*(x)$  est petit, la différence est attribuée plus de poids.

Il s'ensuit que le test de A.-D. est « spécifique par distribution » dans le sens que les valeurs critiques sont différentes selon la distribution sous-jacente—il y a une table de valeurs critiques pour une distribution normale, Weibull, exponentielle, etc.

### Test de Anderson-Darling

L'intégrale ci-dessus se simplifie à :

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \left[ \sum_{j=1}^n (2j-1) \log \left( F^*(x_{(j)}) [1 - F^*(x_{(n+1-j)})] \right) \right]$$

Le test du khi carré sert à tester les hypothèses d'une distribution en comparant les fréquences observées aux fréquences théoriques.

### Test d'adéquation du khi-carré

Le test du rapport de vraisemblance teste la validité des restrictions d'un modèle et peut décider si un modèle peut être simplifié.

### Test du rapport de vraisemblance

## Critères d'information pour la sélection de modèles

Lorsque l'on compare deux modèles, on dit qu'un modèle est « emboîté » si l'autre comporte tous ses paramètres. Par exemple, un modèle basé sur une distribution exponentielle est emboîté par un modèle basé sur une distribution gamma ayant le même paramètre de fréquence  $\beta$ .

Il s'ensuit que le modèle comportant le plus de paramètres aura l'avantage de mieux s'ajuster aux données avec une fonction plus flexible et, possiblement, une log-vraisemblance plus élevée. Afin de comparer les modèles sur une même base, on utilise la **log-vraisemblance pénalisée**.

### Critère d'information d'Akaike (AIC)

L'AIC pénalise les modèles ayant plus de paramètres en soustrayant le nombre de paramètres estimés  $p$  du modèle de la log-vraisemblance :

$$AIC = \log \mathcal{L}(\hat{\theta}_n^{\text{EMV}}; \mathbf{x}) - p.$$

- > On choisit le modèle qui maximise l'AIC.
- > En anglais, « *Akaike Information Criterion (AIC)* ».

Le désavantage de l'AIC est que, pour deux modèles emboîtés, la probabilité de choisir le modèle plus simple (p. ex., un modèle basé sur la distribution exponentielle au lieu de la distribution gamma) *alors qu'il est vrai* (erreur de type I) ne tends pas vers 1 lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini. On dit donc que c'est une mesure « *inconsistent* ».

### Critère d'information bayésien (BIC)

Le BIC pénalise plus sévèrement les modèles ayant plus de paramètres :

$$BIC = \log \mathcal{L}(\hat{\theta}_n^{\text{EMV}}; \mathbf{x}) - \frac{p}{2} \log(n).$$

- > En anglais, « *Bayesian Information Criterion (BIC)* ».

Le BIC est « *consistent* » et règle le désavantage de l'AIC avec une probabilité de 1 d'éviter une erreur de type I lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

Dans les deux cas, la probabilité de rejeter le modèle plus simple lorsque le vrai modèle est entre les deux tend vers 1.

## Quatrième partie

# Sujets divers

### Optimisation numérique

#### ≡ Algorithmes « *Greedy* »

Méthode de résolution de problèmes qui prend la décision optimale à **chaque étape** d'obtenir la solution optimale d'un problème.

On dit que ces algorithmes sont « *greedy* », car, à chaque étape, ils prennent la meilleure décision sans tenir compte des choix futurs qui pourraient être plus optimaux. Donc, la solution trouvée n'est pas nécessairement la solution optimale.

Ces algorithmes ont l'avantage d'être **plus rapides** au coût d'être **moins précis**.

## Théorie de la fiabilité

### Théorie de la fiabilité

**Contexte :** Un *système* ayant plusieurs *composantes*.

**Idée :** Le fonctionnement du système dépend du fonctionnement des composantes.

La **théorie de la fiabilité** sert à quantifier la probabilité qu'un *système* fonctionne selon la fiabilité de ses composantes, et selon le rôle qu'elles ont dans le système.

## Introduction aux systèmes

### Notation

$x_i$  **État** de la composante  $i$ .

$\phi(x)$  « **Structure function** » d'un système représentant son **état**.

### L'état d'une composante

Chacune des composantes du système a sa propre durée de vie (« *life-time* »). Cette durée de vie est dénotée par la variable aléatoire binaire  $x_i$  représentant son état.

Soit la composante **fonctionne**, ou elle **ne fonctionne pas** :

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{si la composante fonctionne} \\ 0, & \text{si la composante ne fonctionne pas} \end{cases}$$

### Vecteur des états d'un système (« *path vector* »)

Le vecteur des états d'un système (« *state vector* ») regroupe les états de toutes les composantes d'un système. Il indique donc quelles composantes fonctionnent ou ne fonctionnent pas. Il est représentée sous la forme

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

**Note** Un système ayant  $n$  composantes et le vecteur des états peut être un de  $2^n$  différentes combinaisons.

> Puisque les composantes du système sont binaires, chacune a deux valeurs

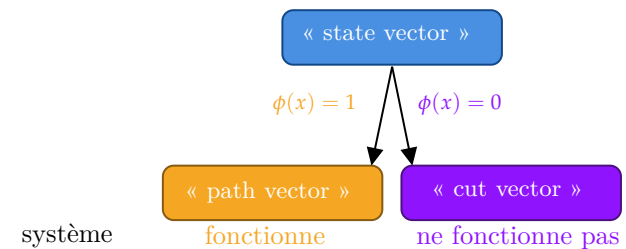
possibles. Ceci résulte en  $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$  différentes combinaisons possibles.

### L'état d'un système

L'état d'un système dépend des états de ses composantes. L'état du système est représentée sous la forme d'une fonction  $\phi(x)$  binaire :

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si le système fonctionne} \\ 0, & \text{si le système ne fonctionne pas} \end{cases}$$

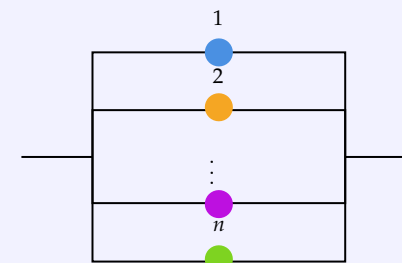
Nous verrons le type de vecteur d'état selon l'état de fonctionnement du système :



## Systèmes communs

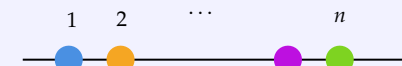
### Système parallèle

Fonctionne tant qu'au moins une des composantes du système fonctionne.



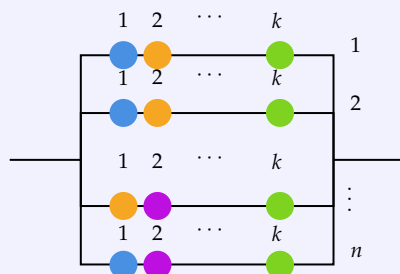
### Système de série

Fonctionne seulement si toutes les composantes du système fonctionnent.



### Système de $k$ parmi $n$

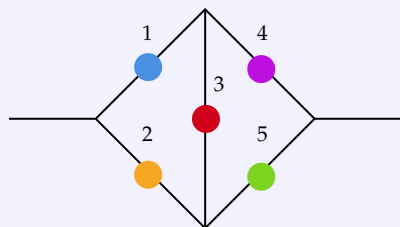
Fonction si au moins  $k$  des  $n$  composantes du système fonctionnent.



> Un système parallèle est donc un système de 1 parmi  $n$  et un système de série un système de  $n$  parmi  $n$ .

### Système de pont

Il y a deux branches connectées par un pont dans le milieu.



### Autres systèmes

En bref, il y a une infinité de systèmes qui peuvent être construits comme des combinaisons des systèmes précédents.

## Minimal path and minimal cut sets

### « Path vector »

Vecteur d'états pour lequel le système fonctionne ( $\phi(x) = 1$ ).

### « Minimal path vectors »

« Path vectors » ayant le *minimum* de composantes pour **fonctionner**. Donc, le système cesse de fonctionner dès qu'une des composantes qui fonctionne échoue.

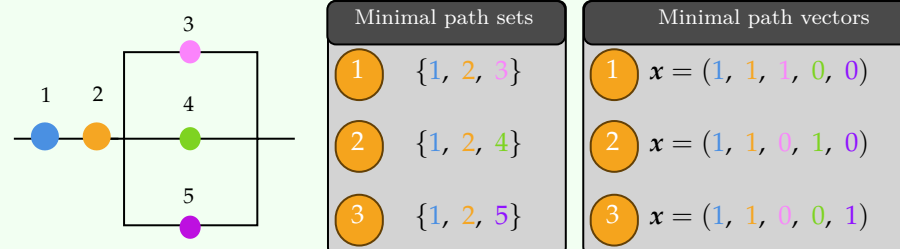
En termes mathématiques,  $x$  est un « minimal path vector » si  $\phi(y) = 0 \forall y < x$ .

>  $y < x$  implique que tous les éléments  $y_i$  du vecteur  $y$  sont inférieurs ou égaux aux éléments  $x_i$  du vecteur  $x$  ( $y_i \leq x_i \forall i$ ) avec au moins un élément qui est strictement inférieur ( $y_i < x_i$  pour au moins un  $i$ ).

### « Minimal path sets »

Ensembles minimaux des composantes dont le fonctionnement garanti le fonctionnement du système. Donc, le système fonctionne uniquement si toutes les composantes d'au moins un des « minimal path sets » fonctionnent.

### Exemple de système



Pour bien comprendre la condition pour qu'un « minimal path vector », on observe les vecteurs  $y$  du premier « minimal path vector »  $x$  :

## Minimal path sets

$$1 \quad x = (1, 1, 1, 0, 0)$$

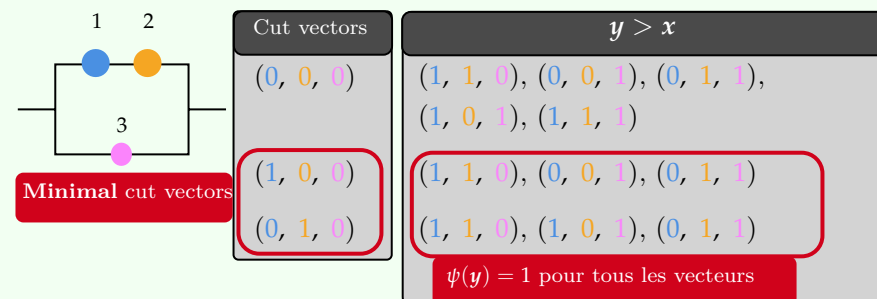
 $y < x$ 

$$1 \quad (0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), \\ (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0), \\ (1, 0, 1, 0, 0)$$

On note que  $\phi(y) = 0$  pour tous les vecteurs ce qui fait de  $x$  un « *minimal path vector* ».

Exemple « *minimal cut sets* »

On peut visualiser ci-dessous que les « *minimal cut vectors* » sont les « *cut vectors* » pour lesquels tous les vecteurs  $y$  fonctionnent ( $\psi(y) = 1$ ).

« *Cut vector* »

Vecteur d'états pour lequel le système ne fonctionne **pas** ( $\phi(x) = 0$ ).

> C'est donc l'inverse du « *path vector* ».

« *Minimal cut vectors* »

« *Cut vectors* » ayant le *maximum* de composantes pour ne **pas fonctionner**. Donc, le système fonctionne dès qu'une des composantes qui ne fonctionne pas est réparée.

En termes mathématiques,  $x$  est un « *minimal cut vector* » si  $\phi(y) = 1 \forall y > x$ .

>  $y > x$  implique que tous les éléments  $y_i$  du vecteur  $y$  sont supérieurs ou égaux aux éléments  $x_i$  du vecteur  $x$  ( $y_i \geq x_i \forall i$ ) avec au moins un élément qui est strictement supérieur ( $y_i > x_i$  pour au moins un  $i$ ).

« *Minimal cut sets* »

Ensembles minimaux des composantes  $\mathcal{C}$  dont l'échec garanti l'échec du système. Donc, le système cesse de fonctionner uniquement si toutes les composantes d'au moins un des « *minimal cut sets* » cessent de fonctionner.

En termes mathématiques, un « *minimal cut set* »  $C$  étant donné un « *minimal cut vector*  $x$  » est  $\{i : x_i = 0\}$ .

Système	Nombre de	
	« <i>miminal path sets</i> »	« <i>miminal cut sets</i> »
Parallèle	$n$	1
Série	1	$n$
$k$ parmi $n$	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{n-k+1}$
Pont	4	4

Pour un système composé de plusieurs systèmes, le nombre de vecteurs dépend de comment qu'il est organisé.

Nombre de	Organisation du système	Action
« <i>minimal path sets</i> »	parallèle	somme
	série	produit
« <i>minimal cut sets</i> »	parallèle	produit
	série	somme

## Structure Functions

### Notation

$A_1, \dots, A_s$  « Minimal path sets ».

$C_1, \dots, C_m$  « Minimal cut sets ».

La « structure function » d'un système peut être déduite par deux approches :

- ① Approche par les « minimal path sets ».
- ② Approche par les « minimal cut sets ».

Cela dit, la fonction de base est fonction de la méthode d'organisation du système :

### ① Système en parallèle

Un système en parallèle fonctionne tant qu'au moins une des composantes fonctionne. Alors, tant qu'au moins une des composantes  $i$  a un état de  $x_i = 1$ , l'état du système est de  $\phi(x) = 1$ .

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \max\{x_1, \dots, x_n\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i)\end{aligned}$$

› La deuxième formulation découle du fait que les états sont des variables binaires.

### ② Système en série

Un système en série fonctionne ssi toutes les composantes fonctionnent. Alors, dès qu'une composante  $i$  a un état de  $x_i = 0$ , l'état du système est de  $\phi(x) = 0$ .

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \min\{x_1, \dots, x_n\} \\ &= \prod_{i=1}^n x_i\end{aligned}$$

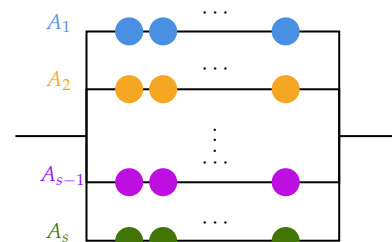
› La deuxième formulation découle du fait que les états sont des variables binaires.

### Approche par les « minimal path sets »

Soit ces deux constats :

- ① Un système fonctionne ssi toutes les composantes d'au moins un des « minimal path sets » fonctionnent.
- ② Un système en parallèle fonctionne ssi au moins une des composantes fonctionnent.

Alors, tout système peut être traité comme le système en parallèle de ses « minimal path sets » :



Il s'ensuit qu'on peut réécrire le système comme :

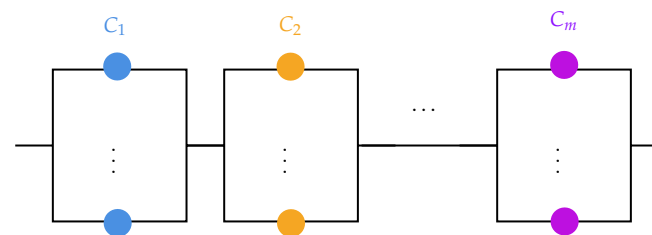
$$\phi(x) = \max \left\{ \min_{i \in A_1} x_i, \min_{i \in A_2} x_i, \dots, \min_{i \in A_s} x_i \right\} = \min_j \prod_{i \in A_j} x_i$$

### Approche par les « minimal cut sets »

Soit ces deux constats :

- ① Un système cesse de fonctionner ssi toutes les composantes d'au moins un des « minimal cut sets » cessent de fonctionner.
- ② Un système en série cesse de fonctionner ssi au moins une des composantes cesse de fonctionner.

Alors, tout système peut être traité comme le système en série de ses « minimal cut sets » :



Il s'ensuit qu'on peut réécrire le système comme :

$$\phi(x) = \min \left\{ \max_{i \in C_1} x_i, \max_{i \in C_2} x_i, \dots, \max_{i \in C_m} x_i \right\} = \prod_{j=1}^m \max_{i \in C_j} x_i$$

**Note** Puisque l'état est une variable binaire,  $x_i^k = x_i$ .



## Fiabilité des systèmes

### Notation

$X_i$  Variable aléatoire suivant une distribution Bernoulli :

$$X_i \sim \text{Bernoulli}(p_i).$$

$$X_i = \begin{cases} 1, & p_i \\ 0, & 1 - p_i \end{cases}$$

>  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  vecteur des v.a. Bernoulli.

$p_i$  Fiabilité de la composante  $i$ .

>  $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  vecteur des fiabilités.

$r(\mathbf{p})$  Fonction de fiabilité du système.

### Fiabilité

La fiabilité d'une composante est la **probabilité que la composante fonctionne**.

La fiabilité d'un système est la **probabilité que le système fonctionne**.

### Fonction de fiabilité

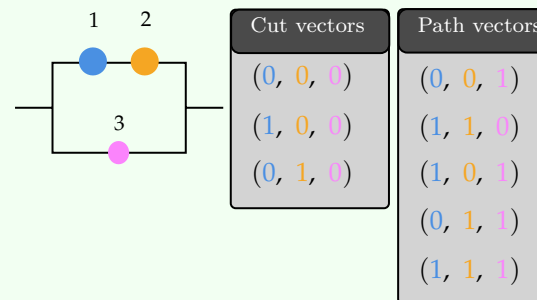
Fonction de la fiabilité des composantes  $r(\mathbf{p})$  qui quantifie la probabilité que le système fonctionne.

$$\begin{aligned} r(\mathbf{p}) &= \underbrace{\Pr(\phi(\mathbf{X}) = 1)}_{\text{somme des probabilités des « path vectors »}} = 1 - \underbrace{\Pr(\phi(\mathbf{X}) = 0)}_{\text{somme des probabilités des « cut vectors »}} \\ &= 0 \times \Pr(\phi(\mathbf{X}) = 0) + 1 \times \Pr(\phi(\mathbf{X}) = 1) = E[\phi(\mathbf{X})] \end{aligned}$$

> Puisque  $\phi$  est fonction du vecteur de v.a. Bernoulli  $\mathbf{X}$ ,  $\phi$  est également une v.a. Bernoulli.

> Il s'ensuit que  $r(\mathbf{p}) = 0 \times \Pr(\phi(\mathbf{X}) = 0) + 1 \times \Pr(\phi(\mathbf{X}) = 1) = E[\phi(\mathbf{X})]$ .

### Exemple de calcul de la fonction de fiabilité



On pose que les composantes sont indépendantes, puis :

$$\begin{aligned} r(\mathbf{p}) &= \Pr(\phi(\mathbf{X}) = 1) \\ &= \Pr(\mathbf{X} = (0, 0, 1)) + \Pr(\mathbf{X} = (1, 1, 0)) + \Pr(\mathbf{X} = (1, 0, 1)) + \\ &\quad \Pr(\mathbf{X} = (0, 1, 1)) + \Pr(\mathbf{X} = (1, 1, 1)) \\ &= (1 - p_1)(1 - p_2)p_3 + p_1p_2(1 - p_3) + p_1(1 - p_2)p_3 + \\ &\quad (1 - p_1)p_2p_3 + p_1p_2p_3 \\ &= p_3 - p_2p_3 - p_1p_3 + p_1p_2p_3 + p_1p_2 - p_1p_2p_3 + p_1p_3 - p_1p_2p_3 + \\ &\quad p_2p_3 - p_1p_2p_3 + p_1p_2p_3 \\ &= p_3 + p_1p_2 - p_1p_2p_3 \end{aligned}$$

## Bornes des fonctions de fiabilité

### Contexte

Parfois, il n'est pas pratique ni nécessaire de trouver la fonction de fiabilité exacte. En lieu, on peut l'approximer en trouvant les bornes supérieures et inférieures de la fonction avec une des deux méthodes suivantes.

### Méthode d'inclusion et d'exclusion

#### Rappel : Probabilités conjointes

$$\Pr(E_1 \cup E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2) - \Pr(E_1 \cap E_2)$$

$$\Pr\left(\bigcup_{j=1}^n E_j\right) = \sum_{j=1}^n \Pr(E_j) - \sum_{j=1}^n \sum_{k>j} \Pr(E_j \cap E_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k>j} \sum_{l>k} \Pr(E_j \cap E_k \cap E_l) - \dots + (-1)^{n+1} \Pr(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n)$$

Si on utilisait seulement la première somme de l'équation, on *sur*-estime la probabilité.

Si on utilise seulement les deux premières sommes, alors on *sous*-estime.

Ce qu'on en déduit est que la probabilité est **contenue entre ces deux estimations** et donc on peut établir des inégalités.

On peut établir les inégalités soit pour la probabilité que le système fonctionne ( $r(\mathbf{p})$ ) ou pour la probabilité que le système ne fonctionne pas ( $1 - r(\mathbf{p})$ ).

**Minimal path sets** On a que  $\sum_{j=1}^n \Pr(E_j) = \sum_{j=1}^s \left( \prod_{i \in A_j} p_i \right)$ .

Pour les « *minimal path sets* »  $A_1, \dots, A_s$ , on établit :

$$r(\mathbf{p}) \leq \sum_{j=1}^s \left( \prod_{i \in A_j} p_i \right)$$

$$r(\mathbf{p}) \geq \sum_{j=1}^s \left( \prod_{i \in A_j} p_i \right) - \sum_{j=1}^s \sum_{k>j} \left( \prod_{i \in A_j \cup A_k} p_i \right)$$

⋮

### Exemple bornes avec minimal path sets

On reprend l'exemple de la sous-section sur les fonctions de fiabilité avec le système en parallèle ayant 3 composantes.

Ici, on pose que toutes les composantes ont une fiabilité de  $p$ , puis avec  $A_1 = (0, 0, 1)$  et  $A_2 = (1, 1, 0)$  :

$$\sum_{j=1}^s \left( \prod_{i \in A_j} p_i \right) = \prod_{i \in A_1} p_i + \prod_{i \in A_2} p_i = p + p^2$$

$$\sum_{j=1}^s \sum_{k>j} \left( \prod_{i \in A_j \cup A_k} p_i \right) = \prod_{i \in A_1 \cup A_2} p_i = p^3$$

$$\text{Donc } p + p^2 - p^3 \leq r(\mathbf{p}) \leq p + p^2.$$

Si  $p = 0.2$ ,  $r(\mathbf{p}) \in [0.232, 0.24]$  mais si  $p = 0.6$  alors  $r(\mathbf{p}) \in [0.744, 0.96]$ . On voit donc que plus  $p$  est petit, mieux l'intervalle approxime la fiabilité.

**Minimal cut sets** Pour les « *minimal cut sets* »  $C_1, \dots, C_m$ , on établit :

$$1 - r(\mathbf{p}) \leq \sum_{j=1}^m \left( \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right)$$

$$1 - r(\mathbf{p}) \geq \sum_{j=1}^m \left( \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right) - \sum_{j=1}^m \sum_{k>j} \left( \prod_{i \in C_j \cup C_k} (1 - p_i) \right)$$

⋮

### Exemple bornes avec minimal cut sets

On reprend l'exemple de la sous-section sur les fonctions de fiabilité avec le système en parallèle ayant 3 composantes.

Ici, on pose que toutes les composantes ont une fiabilité de  $p$ , puis avec  $C_1 = (1, 0, 0)$  et  $C_2 = (0, 1, 0)$  :

$$\sum_{j=1}^m \left( \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right) = \prod_{i \in C_1} (1 - p_i) + \prod_{i \in C_2} (1 - p_i) = (1 - p)^2 + (1 - p)^2 = 2(1 - p)^2$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k>j} \left( \prod_{i \in C_j \cup C_k} (1 - p_i) \right) = \prod_{i \in C_1 \cup C_2} (1 - p_i) = (1 - p)^3$$

$$\text{Donc } 2(1 - p)^2 - (1 - p)^3 \leq r(\mathbf{p}) \leq 2(1 - p)^2.$$

Si  $p = 0.2$ ,  $1 - r(\mathbf{p}) \in [0.768, 1.28]$  mais si  $p = 0.6$  alors  $1 - r(\mathbf{p}) \in [0.256, 0.32]$ . On voit donc que plus  $p$  est large, mieux l'intervalle approxime la fiabilité.

C'est donc l'inverse que l'approche par « *minimal path sets* ».

## Méthode d'intersection

### Contexte

Au lieu d'utiliser les probabilités d'union des événements, on utilise les probabilités d'intersection des événements.

Sous la méthode d'intersection,

$$\underbrace{\prod_{j=1}^m \left[ 1 - \underbrace{\prod_{i \in C_j} (1 - p_i)}_{\substack{\text{probabilité que toutes} \\ \text{les composantes du } C_j \\ \text{échouent}}} \right]}_{\substack{\text{probabilité qu'au moins une composante} \\ \text{de chacun des « } \textit{minimal cut sets} \textit{ »} \\ \text{fonctionne}}} \leq r(\mathbf{p}) \leq \underbrace{1 - \prod_{j=1}^s \left[ 1 - \underbrace{\prod_{i \in A_j} p_i}_{\substack{\text{probabilité que toutes} \\ \text{les composantes du } A_j \\ \text{fonctionnent}}} \right]}_{\substack{\text{probabilité qu'au moins une} \\ \text{des composantes du } A_j \\ \text{échoue}}} \leq \underbrace{1 - \prod_{j=1}^s \left[ 1 - \underbrace{\prod_{i \in A_j} p_i}_{\substack{\text{probabilité que toutes} \\ \text{les composantes du } A_j \\ \text{fonctionnent}}} \right]}_{\substack{\text{probabilité que toutes les composantes} \\ \text{d'au moins un des « } \textit{minimal path sets} \textit{ »} \\ \text{fonctionnent}}}$$

### Exemple bornes avec la méthode d'intersection

On reprend l'exemple de la sous-section sur les fonctions de fiabilité avec le système en parallèle ayant 3 composantes.

Ici, on pose que toutes les composantes ont une fiabilité de  $p$ , puis avec  $C_1 = (1, 0, 0)$  et  $C_2 = (0, 1, 0)$  :

$$\prod_{j=1}^m \left[ 1 - \prod_{i \in C_j} (1 - p_i) \right] = (1 - (1 - p)^2) (1 - (1 - p)^2) = (1 - (1 - p)^2)^2$$

Avec  $A_1 = (0, 0, 1)$  et  $A_2 = (1, 1, 0)$ ,

$$1 - \prod_{j=1}^s \left[ 1 - \prod_{i \in A_j} p_i \right] = 1 - (1 - p) (1 - p^2)$$

$$\text{Donc } (1 - (1 - p)^2)^2 \leq r(\mathbf{p}) \leq 1 - (1 - p) (1 - p^2).$$

Si  $p = 0.2$ ,  $r(\mathbf{p}) \in [0.1296, 0.232]$  et si  $p = 0.6$  alors  $1 - r(\mathbf{p}) \in [0.7056, 0.744]$ . On voit donc que peu importe la valeur de  $p$ , l'intervalle approxime bien la fiabilité.

En bref :

Approche	avec un petit $p$	avec un gros $p$
	Intervalle	
« <i>minimal path sets</i> »	large	étroit
« <i>minimal cut sets</i> »	étroit	large
intersection	étroit	étroit

## Graphiques aléatoires

### Graphique

Ensemble de nœuds connectés par des arcs.

#### Composantes des graphiques

$N$  Ensemble des nœuds.

$A$  Ensemble des arcs connectant les nœuds.

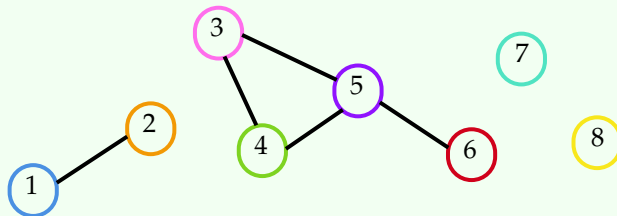
- > Le nombre d'arcs est au plus  $\binom{n}{2}$ .
- > C'est-à-dire, le nombre possibles de groupes de deux nœuds.

Également, un graphique peut être décomposé en sous-graphiques qu'on nomme les **composantes**.

- > Les composantes ne se chevauchent pas.
- > Les composantes sont composées de nœuds connectés.
- > Un graphique est **connecté** s'il a une seule composante.
- > En autres mots, on peut aller d'un nœud à tout autre nœud du graphique via les arcs.

### Exemple de graphique

Soit le graphique suivant :



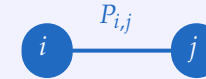
On trouve que :

- > 8 nœuds :  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .
- > 5 arcs :  $A = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$ .
- > 4 composantes :  $\{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{7\}, \{8\}\}$ .

Également, puisqu'il y a plusieurs composantes, le graphique n'est pas connecté.

### Graphique aléatoire

Graphique avec  $n$  nœuds pour lequel deux composantes  $i$  et  $j$  ne sont pas reliées avec certitude, mais plutôt avec probabilité  $P_{i,j}$  :



Soit la v.a.  $X_{i,j}$  représentant l'existence d'un arc entre les nœuds  $i$  et  $j$  avec probabilité  $\Pr(X_{i,j} = 1) = P_{i,j}$  alors :

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } \{i, j\} \text{ est un arc} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

### Connectivité des graphiques aléatoires

#### Contexte

La connectivité des graphiques aléatoires est semblable à la fiabilité des systèmes.

Pour un système, il n'est pas nécessaire que toutes les composantes fonctionnent pour que le système fonctionne. De façon semblable, il n'est pas nécessaire que tous les nœuds d'un graphique aléatoire soient reliés pour qu'il soit connecté.

Alors, on peut appliquer les mêmes concepts de « *minimal path sets* » et de « *minimal cut sets* » des systèmes aux graphiques aléatoires.

Un graphique *aléatoire* est connecté tant que tous les arcs d'au moins un « *minimal path sets* » existent.

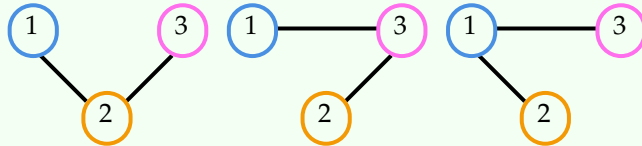
Un graphique aléatoire de  $n$  nœuds a :

- >  $n^{n-2}$  « *minimal path sets* », et
- >  $2^{n-1} - 1$  « *minimal cut sets* »,
- >  $2^{\binom{n}{2}}$  graphiques possibles.

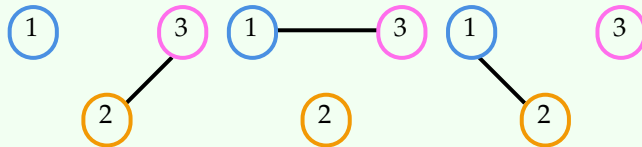
## Exemple de connectivité

Soit un graphique aléatoire avec 3 nœuds.

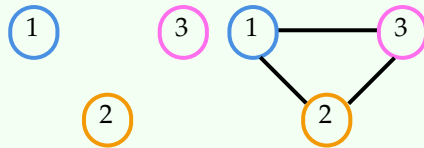
Les  $3^{3-2} = 3$  « *minimal path sets* » sont les suivants :



Les  $2^{3-1} - 1 = 3$  « *minimal cut sets* » sont les suivants :



Les deux autres graphiques possibles qui ne sont pas optimaux sont :



Finalement, on peut **approximer** la probabilité avec  $P_n \approx 1 - n(1 - p)^{n-1}$ .

### ✓ Probabilités de connectivité des graphiques

On pose que chaque v.a. est iid avec  $P_{i,j} = p$ .

Alors, on trouve la probabilité  $P_n$  qu'un graphique aléatoire de  $n$  nœuds soit connecté avec la formule récursive :

$$P_n = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} (1-p)^{k(n-k)} P_k, \quad n = 2, 3, \dots$$

où  $P_1 = 1, P_2 = p$ .

On peut également trouver les **bornes** pour la probabilité pour simplifier la tâche :

$$n(1-p)^{n-1} - \binom{n}{2} (1-p)^{2n-3} \leq 1 - P_n \leq (n+1)(1-p)^{n-1}$$

## Durée de vie des systèmes

## Contexte

Nous avons évalué la **fiabilité** d'un système et comment qu'elle est impactée par la fiabilité de ses composantes.

Nous évaluons maintenant la **durée de vie** d'un système et comment qu'elle est impactée par la durée de vie de ses composantes.

## Notation

$T_i$  Durée de vie de la composante  $i$ .

$S_i(t)$  Fonction de survie de la durée de vie de la composante  $i$ .

›  $\mathbf{S}(t) = (S_1(t), \dots, S_n(t))$  est le vecteur des fonctions de survie des  $n$  composantes.

$T$  Durée de vie du système.

## Calcul de probabilités de durée de vie

La probabilité que le système fonctionne passé  $t$  équivaut à la fonction de fiabilité évaluée au vecteur des fonctions de survie :  $\Pr(T > t) = r[\mathbf{S}(t)]$ .

Donc, on pose  $p_i = S_i(t)$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

## Espérance de durée de vie

La durée de vie espérée équivaut à  $E[T] = \int_0^\infty r[\mathbf{S}(t)] dt$ .

## Exemple du calcul de la durée de vie espérée

On reprend l'exemple de la sous-section sur les fonctions de fiabilité avec le système en parallèle ayant 3 composantes.

On pose que les 3 composantes sont indépendantes et que la durée de vie est uniformément distribuée sur  $(0, 2)$ .

1 Trouver la fonction de survie de la composante  $i$  :

$$S_i(t) = \frac{2-t}{2-0} = \frac{2-t}{2}$$

2 Trouver la fonction de fiabilité.

› Précédemment, nous avons trouvé que  $r(\mathbf{p}) = p_3 + p_1 p_2 - p_1 p_2 p_3$ .

3 Remplacer  $\mathbf{p}$  par  $\mathbf{S}(t)$  :

$$\begin{aligned} r(\mathbf{p}) &= S_3(t) + S_1(t)S_2(t) - S_1(t)S_2(t)S_3(t) \\ &= \left(\frac{2-t}{2}\right) + \left(\frac{2-t}{2}\right)^2 - \left(\frac{2-t}{2}\right)^3 \\ &= \frac{t^3 - 4t^2 + 8}{8} \end{aligned}$$

4 Trouver  $E[T]$  :

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_0^2 \frac{t^3 - 4t^2 + 8}{8} dt \\ &= 1.1667 \end{aligned}$$

## Étapes du calcul de probabilités, ou de l'espérance, de la durée de vie

- 1 Déterminer la fonction de la structure du système  $\phi(\mathbf{X})$ .  
› Soit avec les « *minimal path sets* » ou les « *minimal cut sets* ».
- 2 Dédire la fonction de fiabilité.  
› Soit en trouvant  $r(\mathbf{p}) = E[\phi(\mathbf{X})]$ , ou avec  $r(\mathbf{p}) = \Pr(\phi(\mathbf{X}) = 1)$ .
- 3 Développer la fonction de survie  $\Pr(T > t)$  de la fonction de fiabilité  $r(\mathbf{S}(t))$ .
- 4 Trouver la probabilité désirée ou l'espérance.

**Raccourci** Pour un système de  $k$  parmi  $n$  avec des durées de vie iid suivant une loi exponentielle de moyenne  $\mu$ ,  $E[T] = \mu \sum_{i=k}^n \frac{1}{i}$ . Cette formule découle du coût espéré total pour les algorithmes « *greedy* » A et B.

Divers

Rappel : fonction de hasard

Dans le chapitre de *Mathématiques actuarielles IARD I* à la sous-section *Fonctions de variables aléatoires* on a :

> La fonction de hasard

$$h_X(x) = \frac{f(x)}{S(x)}$$

> La fonction de hasard cumulative

$$H_X(x) = \int_{-\infty}^x h(t)dt$$

Système monotone

La fiabilité du système augmente lorsque la fiabilité de toute composante augmente.

Terminologie

**IFR** « *Increasing failure rate distribution* ».

**DFR** « *Decreasing failure rate distribution* ».

**IFRA** « *Increasing failure rate on the average distribution* ».

> La distribution IFRA est une généralisation de la distribution IFR.

> Il s'ensuit que si une distribution est IFR elle est également IFRA.

Distribution	$h(x)$ est une fonction _____ de $x$
IFR	croissante
DFR	décroissante
IFR et DFR	constante

Une distribution est IFRA si  $\frac{H(x)}{x}$  est une fonction *croissante* de  $x$ , pour tout  $x \geq 0$ .

**Note** Si les distribution de durées de vies de toutes les composantes (*indépendantes*) d'un *système monotone* sont IFRA, alors la distribution de la durée de vie du système le sera aussi.

Distributions particulières

Puisque la fonction de hasard de la distribution exponentielle est fixe, elle est à la fois IFR et DFR.

Cependant, lorsque la fonction de hasard varie, le type de distribution peut varier aussi. Par exemple, pour la loi gamma et la loi de Weibull :

Distribution	Weibull( $\tau, \theta$ )	Gamma( $\alpha, \beta$ )
	Condition	
IFR	$\tau \geq 1$	$\alpha \geq 1$
DFR	$0 < \tau \leq 1$	$0 < \alpha \leq 1$
IFR et DFR	$\tau = 1$	$\alpha = 1$

**Note** Une loi gamma avec  $\alpha = 1$ , tout comme une loi de Weibull avec  $\tau = 1$ , revient à une distribution exponentielle.

**Note** Voir la sous-section *Distributions* du chapitre de *Mathématiques actuarielles IARD* pour une description de la loi gamma et de la loi de Weibull.

## Cinquième partie

## Processus stochastiques

## Introduction

## Notation

$X_n$  État du processus au temps  $n$ .

> Par exemple, si  $X_n = i$  alors le processus est dit d'être dans l'état  $i$  au temps  $n$ .

## Processus stochastique

Soit le processus stochastique  $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ .

## Processus de Poisson

## Notation

$\lambda(t)$  Fonction d'intensité d'un processus de Poisson.

> En anglais, « *rate function* ».

## Processus stochastique

Une collection de variables aléatoires.

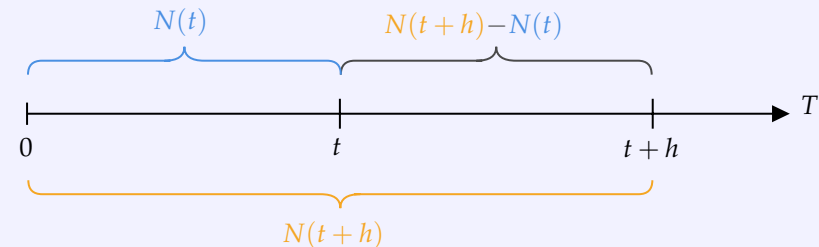
## Processus de comptage

On dénote le processus de comptage par  $\underline{N} = \{N(t), t \geq 0\}$ . Le processus **compte le nombre d'événements** qui se produisent dans l'intervalle de temps  $(0, t]$  où  $t > 0$ .

En termes mathématiques, c'est un processus stochastique dont les variables aléatoires prennent des valeurs non décroissantes et non négatives sous les conditions suivantes :

1.  $N(0) = 0$ ;
2.  $N(t) \geq 0$  (*valeurs non négatives*);
3.  $N(t)$  est entier;
4.  $N(t+h) \geq N(t)$  pour  $h > 0$  (*valeurs non décroissantes*).

Visuellement, on voit que l'**accroissement**  $N(t+h) - N(t)$  représente le nombre d'événements produits sur l'intervalle  $(t, t+h]$  :



> Alias, processus de dénombrement.



## Processus de Poisson

Processus de comptage dont :

1. chaque accroissement est une variable aléatoire de Poisson,
2. les accroissements qui ne se **chevauchent pas** sont indépendants.

Pour un processus de Poisson avec **fonction d'intensité**  $\lambda(t)$ , l'accroissement  $N(t+h) - N(t) \sim \text{Poisson} \left( \lambda = \int_t^{t+h} \lambda(u) du \right)$ .

- > On pose donc que le paramètre de la fréquence des accroissements  $\lambda$  est la *moyenne* de la fonction d'intensité des accroissements  $\lambda(t)$  sur l'intervalle de temps  $(t, t+h]$ .

### Processus de Poisson homogène

Si la fonction d'intensité est constante,  $\lambda(t) = \lambda$ , le processus  $\underline{N}$  est un **processus de Poisson homogène** et  $N(t+h) - N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ .

### Processus de Poisson non homogène

Si la fonction d'intensité varie avec le temps  $t$ , le processus  $\underline{N}$  est un **processus de Poisson non homogène**.

## Temps d'occurrence

### Notation

$T_k$  Temps d'occurrence du  $k^e$  événement.

>  $T_k = V_1 + V_2 + \dots + V_k$ .

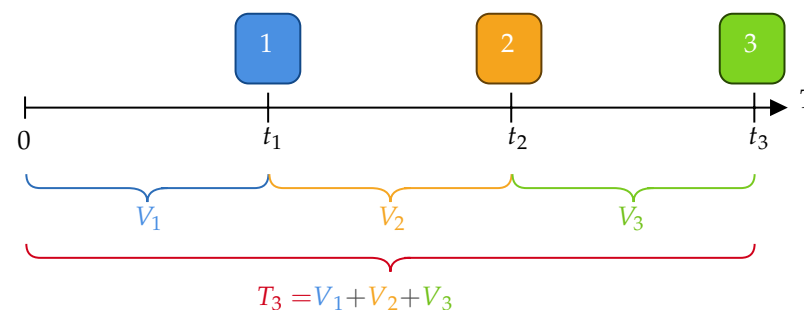
$V_k$  Intervalle de temps entre la réalisation du  $(k-1)^e$  et du  $k^e$  événement.

> Alias, le temps inter arrivé.

>  $V_k = T_k - T_{k-1}$ .

> On pose que  $T_0 = 0$ ,  $V_0 = 0$  et que  $V_1 = T_1$ .

Visuellement :



### Temps d'occurrence

On peut définir le processus de comptage en fonction du temps d'occurrence des événements au lieu nombre de sinistres :  $N(t) = \sup \{k \geq 1 : T_k \leq t\}$ ,  $\forall t \geq 0$ .

On trouve que  $\Pr(T_k > s) = \Pr(N(s) < k)$ . C'est-à-dire,

$\Pr \left( \begin{smallmatrix} \text{le } k^e \text{ événement se produise} \\ \text{après le temps } s \end{smallmatrix} \right) = \Pr \left( \begin{smallmatrix} \text{moins de } k \text{ événements se} \\ \text{produisent d'ici le temps } s \end{smallmatrix} \right)$ .

### Temps d'occurrence pour des processus de Poisson homogènes

Si  $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  alors  $V_k \sim \text{Exp} \left( \theta = \frac{1}{\lambda} \right)$  et

$T_k \sim \text{Gamma} \left( \alpha = k, \theta = \frac{1}{\lambda} \right) \sim \text{Erlang} (n = k, \lambda)$ .

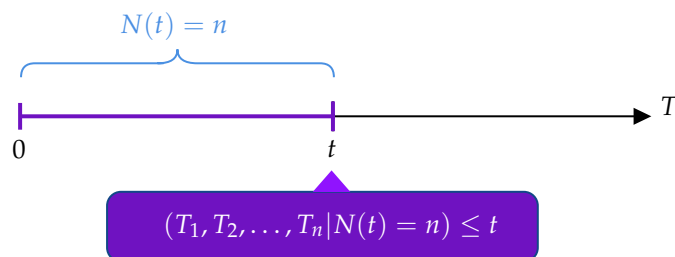
**Note** La loi Gamma avec un paramètre de forme  $\alpha$  entier correspond à la loi Erlang. L'avantage de la loi Erlang est qu'elle a une fonction de répartition explicite qui découle de la relation entre les processus de Poisson et les temps d'occurrences. Voir la sous-section sur les **Distributions** du chapitre de Mathématiques actuarielles IARD I.

### Temps d'occurrence conditionnels

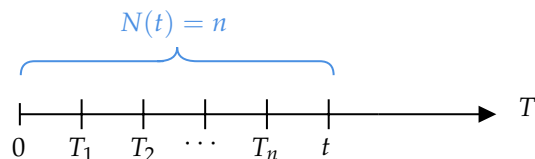
**Note** Voir la sous-section des **Statistiques d'ordre** du chapitre de Analyse statistique des risques actuariels.

Lorsque nous savons qu'un certain nombre d'événements se produit d'ici un temps  $t$ , les temps d'occurrences  $T_1, T_2, \dots, T_n$  ne **suivent plus une distribution Gamma**. Ceci est puisque **leurs domaines sont bornés à  $t$**  au lieu d'être *infinis*.

Par exemple,  $N(t) = n$  implique que  $T_1, T_2, \dots, T_n \leq t$  :



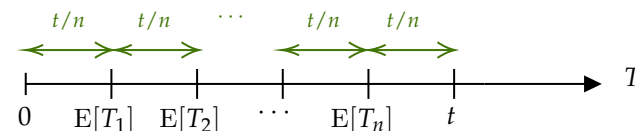
On en déduit que les temps d'occurrences sont en fait des **Statistiques d'ordre** avec  $0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n \leq t$  :



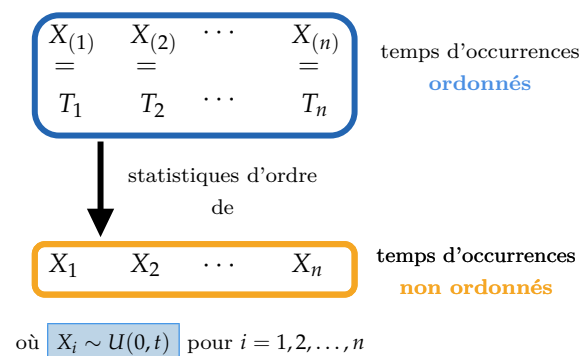
Pour déterminer la distribution de  $T_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , on rappelle ces deux propriétés des processus de Poisson homogènes :

- ① Les intervalles qui ne se chevauchent pas sont indépendants.
- ② Le paramètre de fréquence  $\lambda$  est proportionnel à la longueur d'un intervalle, ce qui implique qu'il est identique pour des intervalles de la même longueur.

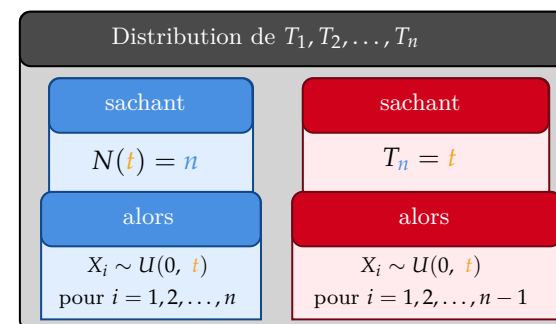
On en déduit que les temps d'occurrences des événements devraient être **uniformément distribués** en  $n+1$  sous-intervalles :



Donc,  $T_1, T_2, \dots, T_n$  sont les statistiques d'ordre d'une distribution  $U(0, t)$  :



En bref :



Également, lorsque  $X_k \sim U(a, b)$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$ , on trouve que

$$E[X_{(k)}] = E[T_k] = a + \frac{k(b-a)}{n+1}.$$

### Exemple

Des autobus arrivent à un arrêt d'autobus selon une distribution de Poisson avec un paramètre de fréquence de  $\lambda = 4$  par heure. Les autobus commencent

à arriver dès 8h du matin.

On sait qu'aujourd'hui, trois autobus sont passés entre 8h et 9h du matin.

Calculer :

1. L'espérance du temps d'arrivée du 5<sup>e</sup> bus,
2. L'espérance du temps d'arrivée du 2<sup>e</sup> bus,
3. La probabilité que seulement un bus soit passé entre 8h et 8h30 du matin.

Premièrement, l'espérance du temps d'arrivée du 5<sup>e</sup> bus :

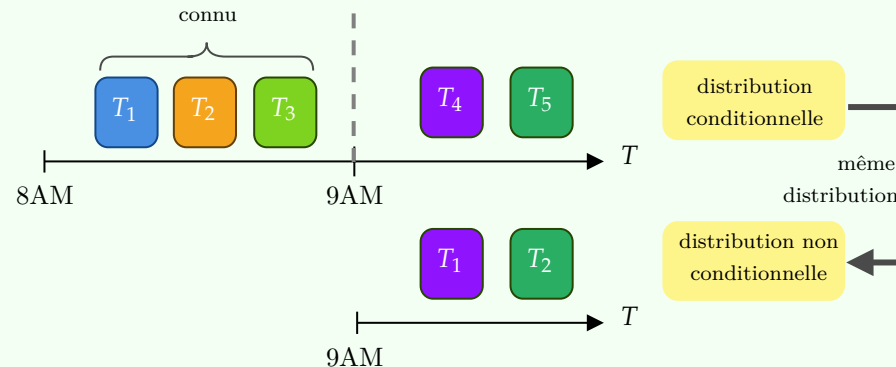
- 1 On connaît l'intervalle de temps durant laquelle les 3 premiers autobus arrivent.

Ceci implique que le 5<sup>e</sup> autobus peut arriver à tout moment passé 9AM—alias,  $T_5$  est n'a **pas encore eu lieu** et n'est **pas borné**.

- 2 On peut donc récrire l'espérance conditionnelle :

$$E[T_5 | N(8, 9) = 3] = E[T_2]$$

Visuellement, on peut voir pourquoi ces deux écritures sont équivalentes :



- 2 Puisque  $T_5$  n'est pas borné, il suit une distribution  $\text{Gamma}(2, 1/4)$ . Donc,  $E[T_2] = \frac{2}{4} = 0.50$  ce qui équivaut à 9h30AM.

Deuxièmement, l'espérance du temps d'arrivée du 2<sup>e</sup> bus :

- 1 On connaît l'intervalle de temps durant laquelle les 3 premiers autobus arrivent.

Ceci implique que le temps d'arrivée du 2<sup>e</sup> doit être à, ou avant, 9AM—alias,  $T_2$  a **eu lieu** et **est borné**.

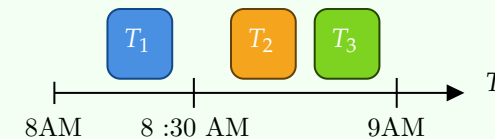
- 2 Il s'ensuit que  $T_2$  ne suit pas une distribution Gamma et que l'espérance conditionnelle de son temps d'arrivée,  $T_2$ , équivaut à l'espérance de la 2<sup>e</sup> statistique d'ordre,  $X_{(2)}$ , des temps d'arrivés non ordonnés  $X_k$  distribués **uniformément** entre 8AM et 9AM ( $U(8, 9)$ ) pour  $k = 1, 2, 3$  :

$$E[T_2 | N(8, 9) = 3] = E[X_{(2)}] = 8 + \frac{2 \times (9 - 8)}{3 + 1} = 8.5$$

qui équivaut à 8h30AM.

Dernièrement, la probabilité que seulement un bus soit passé entre 8h et 8h30 du matin.

- 1 On observe la probabilité qu'on désire calculer :



- 2 Le « twist » pour calculer la probabilité est de la voir comme une binomiale.
- 3 D'abord, puisque  $X_k \sim U(8, 9)$  alors la probabilité que n'importe lequel des autobus arrive dans la première demi-heure est  $\Pr(X_k \leq 0.5) = \frac{1}{9-8+1} = 0.50$  pour  $k = 1, 2, 3$ .
- 4 Puis, on définit un « succès » comme « un autobus qui arrive dans la première demi-heure » ce qui implique que  $\Pr(\text{succès}) = \Pr(X_k \leq 0.50) = 0.50$ .
- 5 Finalement,  $\Pr(N(8, 8.5]) = 1 | N(8, 9) = 3) = \Pr(\text{un autobus arrive entre 8h00 et 8h30} \cap \text{2 autobus arrivent entre 8h30 et 9h00}) = \Pr(1 \text{ succès}) = \binom{3}{1} 0.5^1 (1 - 0.5)^2 = 0.375$

## Propriétés des processus de Poisson

### Décomposition de processus de Poisson

#### 📖 Décomposition de processus de Poisson (« *Thinning* »)

Si un processus de Poisson peut être décomposé en plusieurs sous-processus distincts, alors ces sous-processus distincts sont également des processus de Poisson avec une fonction d'intensité proportionnelle. Ce processus de décomposition s'appelle le « *thinning* ».

Soit :

- > le processus de Poisson  $N$  avec fonction d'intensité  $\lambda(t)$ ,
- > les sous-processus distincts  $N_1, N_2, \dots, N_n$  de  $N$  dont les proportions sont  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ .

Alors,  $N_1, N_2, \dots, N_n$  sont des processus de Poisson indépendants avec paramètre de fréquence  $\pi_1\lambda(t), \pi_2\lambda(t), \dots, \pi_n\lambda(t)$ .

Si le processus  $N$  est homogène et que les **proportions**  $\pi_i$  sont **constantes**, pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , alors les sous-processus sont **homogènes**. Cependant, si les **proportions** ne sont **pas constantes** alors les sous-processus ne sont **pas homogènes**.

### Superposition

#### 📖 Somme de processus de Poisson (« *Superposition* »)

La somme de plusieurs processus de Poisson s'appelle la « *superposition* ». Si les processus de Poisson sont indépendants, leur somme est également un processus de Poisson.

Soit :

- > les processus de Poisson indépendants  $N_1, N_2, \dots, N_n$  avec paramètres de fréquence  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ .

Alors,  $N_1 + N_2 + \dots + N_n$  est un processus de Poisson avec paramètre de fréquence  $\lambda = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \dots + \lambda_n(t)$ .

## Probabilités conjointes

### Notation

$N_1, N_2$  Processus de Poisson indépendants avec paramètres de fréquence  $\lambda_1, \lambda_2$ .

$T_{1,n}$  Le temps jusqu'au  $n^e$  événement de  $N_1$ .

$T_{2,m}$  Le temps jusqu'au  $m^e$  événement de  $N_2$ .

$$\Pr \left( \begin{array}{c} \text{d'observer 1 événement de } N_1 \text{ avant} \\ \text{d'observer 1 événement de } N_2 \end{array} \right) = \Pr(T_{1,1} < T_{2,1}) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

On peut généraliser ceci pour trouver une distribution **binomiale négative** ou **binomiale** :

$$\begin{aligned} \Pr \left( \begin{array}{c} \text{d'observer } n \text{ événements de } N_1 \text{ avant} \\ \text{d'observer } m \text{ événement de } N_2 \end{array} \right) &= \Pr(T_{1,n} < T_{2,m}) \\ &= \Pr \left( \begin{array}{c} \text{d'observer au plus } m-1 \text{ événements de } N_2 \text{ avant} \\ \text{d'observer le } n^e \text{ événement de } N_1 \end{array} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+k-1}{n-1} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^n \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \\ &= \Pr \left( \begin{array}{c} \text{parmi les } n+m-1 \text{ premiers événements} \\ \text{au moins } n \text{ proviennent de } N_1 \text{ et} \\ \text{au plus } m-1 \text{ proviennent de } N_2 \end{array} \right) = \Pr \left( \begin{array}{c} n^e \text{ événement de } N_1 \text{ se produise avant} \\ \text{le } m^e \text{ événement de } N_2 \end{array} \right) \\ &= \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{n+m-1}{k} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{(n+m-1)-k} \end{aligned}$$

Notes sur la représentation sous la forme **binomiale négative** :

- > Dans l'équation, on traite une réalisation de  $N_1$  comme un « **succès** » et une réalisation de  $N_2$  comme un « **échec** ».
- > « *Au plus  $m-1$*  », implique tout nombre d'événements du 2<sup>e</sup> processus allant de 0 à  $m-1$ .
- > L'approche est donc de fixer  $n$  réalisations de  $N_1$ , puis de traiter tous les autres cas possibles en faisant varier le nombre de réalisations  $N_2$  de 0 à  $m-1$ .
- > Au total, il y aura au moins  $n$  événements ( $N_2 = 0$ ) et au plus  $n+m-1$  événements ( $N_2 = m-1$ ) qui vont se réaliser.
- > Ceci résulte en  $m$  différents scénarios possibles.

Notes sur la représentation sous la forme **binomiale** :

- > Dans l'équation, on traite une réalisation de  $N_1$  comme un « **succès** ».
- > L'approche est donc de fixer le nombre de réalisations total à  $n+m-1$  puis, d'attribuer le nombre d'événements aux deux processus en assurant *au moins  $n$*  réalisations de  $N_1$ .

## Mélanges de processus de Poisson

Lorsque la fonction d'intensité *est* une variable aléatoire, nous obtenons un mélange de processus de Poisson. Ce **mélange** est un nouveau processus qui **n'est pas un processus de Poisson**.

### Identité Poisson-Gamma

Si la v.a. conditionnelle  $(N|\Lambda) \sim \text{Poisson}(\Lambda)$  et que  $\Lambda \sim \text{Gamma}(n, \theta)$  alors la v.a. inconditionnelle  $N \sim \text{Binomiale Négative}(r = n, \theta)$ .

## Processus de Poisson composés

### Processus de Poisson composé

#### Contexte

Les distributions composées permettent aux compagnies d'assurance de conjointement modéliser la fréquence et la sévérité de sinistres.

Si la fréquence d'accidents est distribuée selon une loi de Poisson et que les montants sont iid, la somme des montants des sinistres est un **processus de Poisson composé**.

Soit :

- > le processus de Poisson  $N$ ,
- > la suite de v.a. iid  $X_1, X_2, \dots, X_{N(t)}$ .

Alors  $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$  est un **processus de Poisson composé** où  $S(0) = 0$  et si  $N(t) = 0$  alors  $S(t) = 0$ .

### Fonctions du processus de Poisson composé

$$E[S(t)] = E[N(t)]E[X] \quad \text{Var}(S(t)) = E[N(t)]E[X^2]$$

### Approximation de la distribution

Puisque la distribution de  $S(t)$  est difficile à déterminer, elle peut être approximée avec le **théorème limite centrale** où  $S(t) \approx \mathcal{N}(E[S(t)], \text{Var}(S(t)))$ .

Il s'ensuit que :

$$\Pr(S(t) < s) = \Phi\left(\frac{s - E[S(t)]}{\sqrt{\text{Var}(S(t))}}\right)$$

Cependant, dans le cas où nous utilisons une distribution continue (normale) pour approximer une distribution **de sévérité** discrète, il faut appliquer une correction de continuité.

### Correction de continuité

La correction de continuité s'applique lorsqu'une distribution continue approxime une distribution discrète.

Une distribution discrète est seulement définie sur les nombres entiers alors qu'une distribution continue est définie sur tous les nombres réels. La correction améliore donc l'estimation en remplaçant  $s$  par le point milieu entre  $s$  et la plus proche valeur de  $S(t)$  qui est inférieure à  $s$ .

Sommer des processus de Poisson résulte en un processus de Poisson dont la v.a. de sévérité est la moyenne des v.a. de sévérités de chacun des processus. C'est-à-dire que  $f_X(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} f_{X_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} f_{X_2}(x)$ .

## Chaînes de Markov

### Introduction

#### Contexte

Une chaîne de Markov est utilisée lorsqu'il y a un processus prenant une valeur précise dans chaque intervalle de temps.

Les **états** du processus sont les valeurs possibles qu'il peut prendre.

- › Typiquement, les états sont dénotés par des nombres entiers.
  - › Le processus peut seulement être dans un seul état par intervalle de temps.
- Par exemple, un pourrait avoir une chaîne de Markov dont les états correspondent au nombre de vélos qu'une boutique de sport a en stock à chaque jour au moment de la fermeture du magasin.

Souvent, nous sommes intéressés aux **probabilités de transition** d'un état à un autre.

#### Notation

$X_m$  État du processus au temps  $m$ .

$P_{i,j}$  Probabilité de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$  (en une période).

#### Chaîne de Markov

Une chaîne de Markov est un type de processus stochastique dénoté comme  $\{X_m, m = 0, 1, 2, \dots\}$ . Le processus prend un ensemble (fini ou infini) de valeurs **dénombrable** représentant l'état du processus à différents moments dans le temps.

- ›  $X_m = i$  signifie que le processus est dans l'état  $i$  au temps  $m$ .

#### Homogénéité de la chaîne de Markov

Si les probabilités de transition sont :

**fixes** le processus est une chaîne de Markov **homogène**, ou **stationnaire**.

**variables** le processus est une chaîne de Markov **non-homogène**.

#### Propriété sans-mémoire des chaînes de Markov

Une chaîne de Markov est un processus stochastique dont la distribution conditionnelle de l'état futur  $X_{m+1}$  dépend seulement du dernier état  $X_m$  et non de ceux avant.

En autres mots, le prochain état est indépendant des états passés et  $P_{i,j} = \Pr(X_{m+1} = j | X_m = i)$ .

On représente la **matrice des probabilités de transition**  $P$  :

$$P = \begin{bmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \dots & P_{1,j} & \dots \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \dots & P_{2,j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ P_{i,1} & P_{i,2} & \dots & P_{i,j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

- › Chaque rangée somme à 1, mais pas nécessairement les colonnes.

## Probabilités de transitions en plusieurs étapes

### Contexte

Lorsque nous désirons savoir l'état plus qu'une étape dans le futur, nous devons généraliser les chaînes de Markov.

Par exemple, s'il pleut aujourd'hui, quel est la probabilité qu'il va pleuvoir dans 2 jours ?

### Notation

$P_{i,j}^n$  Probabilité de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$  en  $n$  périodes.

### Équation de Chapman-Kolmogorov

L'équation de Chapman-Kolmogorov trouve la probabilité  $P_{i,j}^{n+m}$  d'être dans l'état  $j$  au temps  $n+m$  sachant qu'au temps 0 on était à l'état  $i$ .

Pour trouver cette probabilité, on considère tous les chemins possibles pour se rendre de  $i$  à  $j$  en  $n+m$  étapes, puis on somme leurs probabilités :

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^n P_{kj}^m.$$

> Cette équation équivaut à la **multiplication matricielle** de la matrice des transitions de probabilité.

> En forme matricielle,  $P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$ .

### Rappel : Multiplication matricielle

Soit  $A_{m \times n}$  et  $B_{p \times q}$ . Si  $n = p$  alors  $A_{m \times n} B_{p \times q} = AB_{m \times q}$ .

Par exemple, pour :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}$$

Alors :

$$AB = \begin{bmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{bmatrix}$$

**Raccourci** On peut éviter deux multiplications de matrices en multipliant uniquement la rangée  $i$  et la colonne  $j$  :  $P_{i,j}^n = P_{i,\cdot} \cdot P^{\cdot n-2} \cdot P_{\cdot j}$ .

## États absorbants

### État absorbant

État dont on ne peut pas sortir un fois rentrée. Il s'ensuit que pour un état absorbant  $i$ ,  $P_{i,i} = 1$ .

> Par exemple, un état pour décédé sera absorbant.

Soit la probabilité qu'une chaîne de Markov débute à l'état  $i$  et se rend à l'état  $j$  au temps  $m$  sans avoir été dans les états d'un ensemble  $\mathcal{A}$ .

Pour calculer la probabilité, on définit une nouvelle chaîne de Markov qui contient tous les états ne faisant **pas** parti de l'ensemble  $\mathcal{A}$  en plus d'un état absorbant représentant tous les états de  $\mathcal{A}$ .

### Notation

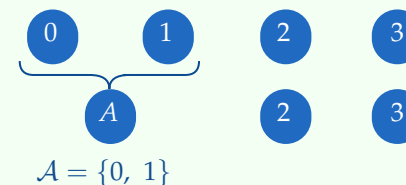
$\mathcal{A}$  L'ensemble des états à éviter.

$A$  L'état absorbant qui combine tous les états de l'ensemble  $\mathcal{A}$ .

$Q_{i,j}$  Probabilité de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$  (en une période) sans avoir accédé aux états de l'ensemble  $\mathcal{A}$ .

### Exemple de regroupement

Par exemple, pour 4 états où on souhaite regrouper les états 0 et 1 :



### Construction de la matrice $Q$

On construit  $Q$  de  $P$  selon les conditions suivantes :

- 1 Pour la transition entre des états qui ne font pas partie de l'ensemble  $\mathcal{A}$ , la probabilité de transition demeure inchangée :  $Q_{i,j} = P_{i,j}$  pour

$$i, j \notin \mathcal{A}.$$

- ② Pour la transition **de l'état non-absorbant  $i$  vers l'état absorbant  $A$** , on somme les probabilités de transition de l'état  $i$  vers tous les états de l'ensemble  $\mathcal{A}$  :  $Q_{i,A} = \sum_{k \in \mathcal{A}} P_{i,k}$  pour  $i \notin \mathcal{A}$ .

- ③ Par définition,  $\Pr(\text{transition d'un état absorbant vers tout autre état}) = 0$  :  $Q_{A,i} = 0$  pour  $i \notin \mathcal{A}$ .

- ④ Par définition,  $\Pr(\text{demeurer dans un état absorbant}) = 1$  :  $Q_{A,A} = 1$ .

Finalement, on vérifie que chaque rangée de  $Q$  somme à 1.

### Exemple de matrice de transition avec état absorbant

Soit la matrice des probabilités de transition suivante avec 4 états (1, 2, 3, 4) :

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

On sait qu'au temps 0, la chaîne de Markov est dans l'état 1. On souhaite trouver la probabilité d'atteindre l'état 2 au temps 4 sans jamais avoir été dans l'état 3 ni 4.

- ① On définit l'ensemble  $\mathcal{A} = \{3, 4\}$ .
- ② On définit la nouvelle chaîne de Markov  $Q$  :
  - > De la première condition, le carré 2x2 en haut à gauche de la matrice des transitions demeure inchangée.
  - > La troisième colonne découle de la 2<sup>e</sup> condition qui somme les probabilités de transitions vers les états faisant partie de  $\mathcal{A}$ .
  - > La troisième ligne découle des 4<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> conditions que l'état  $A$  est absorbant.

$$Q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ③ On trouve la matrice de transitions en 2 étapes :

$$Q = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.36 & 0.39 \\ 0 & 0.49 & 0.51 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ④ Finalement, on trouve  $Q_{1,2}^4 = Q_1 Q^{(2)} Q_2$  :

$$Q_{1,2}^4 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & 0.36 & 0.39 \\ 0 & 0.49 & 0.51 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.2664$$

### Transitions de (ou vers) un état absorbant

#### Notation

$Q_{i,j}^m$  Probabilité de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$  en  $m$  périodes sans avoir accédé aux états de l'ensemble  $\mathcal{A}$ .

Nous pouvons généraliser l'approche pour les cas où l'état de départ  $i$  ou l'état d'arrivée  $j$  peuvent faire partie de l'ensemble d'états  $\mathcal{A}$ .

- > Dans ces cas-ci la transition **de (vers)** l'état  $\mathcal{A}$  doit être la **première (dernière)** transition.
- > On utilise donc la matrice des probabilités de transition  $P$  pour la **première (dernière)** transition où l'on **sort de (entre dans)** un état de l'ensemble  $\mathcal{A}$ , puis la matrice  $Q$  pour le restant des transitions.

État $i$	État $j$	Probabilité
$i \notin \mathcal{A}$	$j \notin \mathcal{A}$	$Q_{i,j}^m$
$i \notin \mathcal{A}$	$j \in \mathcal{A}$	$\sum_{r \notin \mathcal{A}} Q_{i,r}^{m-1} P_{r,j}$
$i \in \mathcal{A}$	$j \notin \mathcal{A}$	$\sum_{r \notin \mathcal{A}} P_{i,r} Q_{r,j}^{m-1}$
$i \in \mathcal{A}$	$j \in \mathcal{A}$	$\sum_{r \notin \mathcal{A}} \sum_{k \notin \mathcal{A}} P_{i,r} Q_{r,k}^{m-2} P_{k,j}$

### Probabilités inconditionnelles

#### Notation

$\alpha_i$  Probabilité d'être à l'état  $i$  au temps 0.

- >  $\alpha_i = \Pr(X_0 = i)$ .

$\Pr(X_n = j)$  Probabilité "inconditionnelle" d'être dans l'état  $j$  au temps  $n$ . C'est-à-dire, la probabilité d'être dans l'état  $j$  au temps  $n$  peu importe l'état initial.

- >  $\Pr(X_n = j) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P_{i,j}^n$ .



**Rappel : Loi des probabilités totales**

$$\Pr(X = x) = \sum_y \Pr(X = x|Y = y) \Pr(Y = y).$$

**Classification des états****Accessibilité d'états**

Un état  $j$  est **accessible** de l'état  $i$  si  $P_{i,j}^n > 0$  pour  $n \geq 0$  :  $i \rightarrow j$ .

C'est-à-dire qu'il est possible de faire la transition vers l'état  $j$  au moins une fois dans le futur ayant commencé dans l'état  $i$ .

**Communication d'états**

L'état  $i$  et l'état  $j$  se **communiquent** si l'état  $j$  est accessible de l'état  $i$  et que l'état  $i$  est accessible de l'état  $j$  :  $i \leftrightarrow j$  si  $i \rightarrow j$  et  $j \rightarrow i$ .

**Note** Un état absorbant communique seulement avec lui-même.

**Propriétés des états qui se communiquent**

- 1  $i \leftrightarrow i$   
 > L'état  $i$  communique avec lui-même.
- 2  $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$   
 > Si l'état  $i$  communique avec l'état  $j$ , alors l'état  $j$  communique avec l'état  $i$ .
- 3  $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k \Rightarrow i \leftrightarrow k$   
 > Si l'état  $i$  communique avec l'état  $j$  et que l'état  $j$  communique avec l'état  $k$ , alors l'état  $i$  communique avec l'état  $k$ .

**Classe d'états**

Des états qui se communiquent entre-eux font partie de la même classe.

**Propriétés de classe**

Propriétés s'appliquant à tous les états de la classe.

### 📖 Chaîne de Markov irréductible

Chaîne de Markov dont tous les états se communiquent entre-eux ayant donc **une seule classe**.

### ✓ Nombre d'états d'une chaîne de Markov

Une chaîne de Markov ayant un nombre **fini** (**infini**) d'états est dite d'être **fini** (**infini**).

### Notation

$f_i$  Probabilité de retourner dans l'état  $i$  à tout point dans le futur sachant que le processus débute dans l'état  $i$ .

### ✓ Récurrence d'états

Un état est **récurrent** s'il est toujours possible d'y retourner un jour :  $f_i = 1$ .

Il s'ensuit que si un état  $i$  est récurrent, alors le nombre de fois que nous y retournons est **infini**. De cette interprétation, on déduit qu'un état est récurrent si  $\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,i}^n = \infty$ .

> Il s'ensuit qu'il est toujours possible de retourner dans l'état  $i$  à partir de tout autre état dans le futur.

### ✓ Transitivité d'états

Un état est **transitoire** s'il est possible de ne pas y retourner un jour :  $f_i < 1$ .

Il s'ensuit que si un état  $i$  est transitoire, alors le nombre de fois que nous y retournons est **fini**. De cette interprétation, on déduit qu'un état est transitoire si  $\sum_{n=1}^{\infty} P_{i,i}^n < \infty$ .

> On déduit que si un état  $i$  est transitoire, alors il existe au moins un état duquel on ne peut pas retourner à l'état  $i$ .

### 📖 Distribution géométrique

Si un processus débute dans un état transitoire  $i$ , il y a une probabilité de  $1 - f_i$  de ne jamais y retourner. Il s'ensuit que la probabilité d'être dans l'état  $i$   $n$  fois, sachant que nous y sommes initialement, est  $f_i^{n-1}(1 - f_i)$  pour  $n \geq 1$ .

Donc, pour un processus qui débute dans l'état transitoire  $i$ , le nombre de fois que le processus est dans l'état  $i$  suit une **distribution géométrique** de paramètre  $p = 1 - f_i$ .

> Il s'ensuit que l'espérance du nombre de visites est  $\frac{1}{1-f_i}$ .

> On voit donc que pour  $n \geq 1$ , la probabilité désirée correspond à la fonction de masse des probabilités

$$p_n = p(1-p)^{n-1} = f_i^{n-1}(1-f_i).$$

### Exemple de transitivité et de récurrence

Soit la chaîne de Markov ayant la matrice des probabilités de transition suivante :

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

On trouve :

> Aucun état est absorbant.

> L'état 1 est *transitoire* et seulement l'état 2 est accessible de l'état 1 ( $1 \rightarrow 2$ ).

> L'état 2 et l'état 3 se *communiquent* ( $2 \leftrightarrow 3$ ).

Les propriétés de *récurrence* et de *transitivité* sont des **propriétés de classes**.

> Puisque tous les états d'une classe se communiquent, dès qu'un état est récurrent tous les états sont récurrents.

> Pareillement, dès qu'un état est transitoire tous les états sont transitoires.

Donc, tous les états d'une classe sont soit transitoires ou récurrents.

Dans une chaîne de Markov finie, il doit y avoir au moins un état récurrent. Puis, puisqu'une chaîne de Markov irréductible n'a qu'une seule classe, **tous les états**

d'une chaîne de Markov finie irréductible sont récurrents.

## Probabilités stationnaires et limites

### Notation

$m_j$  Espérance du nombre de transitions pour qu'une chaîne de Markov ayant commencé dans l'état  $j$  y retourne.

$\pi_j$  **Proportion de temps à long-terme** qu'une chaîne de Markov irréductible est dans l'état  $j$ .

> En anglais, « *long-run proportion* ».

> Alias, **probabilité stationnaire** d'être dans l'état  $j$ .

### Types de récurrence

Soit l'état récurrent  $j$ ,

1. si  $m_j < \infty$ , alors l'état  $j$  est **récurrent positif**.

2. si  $m_j = \infty$ , alors l'état  $j$  est **récurrent nul**.

> La récurrence nulle peut seulement arriver dans une chaîne de Markov infinie ce qui implique que **les états d'une chaîne de Markov finie doivent être récurrent positifs**.

> Puisque la récurrence est une propriété de classe, une classe est soit récurrente positive ou nulle.

### Probabilités stationnaires

La probabilité stationnaire  $\pi_j$  de l'état  $j$  correspond au réciproque de l'espérance du nombre transitions pour qu'une chaîne de Markov ayant débuté dans l'état  $j$  y retourne :  $\pi_j = \frac{1}{m_j}$ .

Cependant, on isole habituellement les probabilités stationnaires à partir du système d'équations suivant :

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P_{i,j}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$$

> Pour une chaîne de Markov composé de  $n$  états, il y aura  $n + 1$  équations.

> Si aucune solution unique existe, la chaîne de Markov **n'est pas récurrente positive** (donc soit transitive ou récurrente nulle) et  $\pi_i = 0$  pour tout  $i$ .

**Note** Tous les états d'une chaîne de Markov irréductible finie sont récurrent positifs.

### Chaînes de Markov avec bénéfices

#### Notation

$r(j)$  Montant de bénéfice dans l'état  $j$ .

#### Contexte

On cherche à généraliser les chaînes de Markov pour le cas où un montant est transigé selon la classe dans laquelle le processus se situe.

Par exemple, pour une chaîne de Markov représentant le risque d'un assuré  $r(j)$  pourrait représenter le montant de prime payable en fonction de classe dont l'assuré fait partie. Par exemple, il pourrait avoir une plus grosse prime payable pour une classe de risque risquée que standard.

En moyenne, le bénéfice sera  $\sum_{j=1}^{\infty} r(j)\pi_j$ .

### Probabilités limites

#### ✓ Périodicité des chaînes de Markov

La matrice des probabilités de transition tend vers des **probabilités limites** lorsque le nombre de périodes tend vers l'infini. Ces probabilités limites correspondent aux probabilités stationnaires.

Si une chaîne de Markov **a des (n'a pas de)** probabilités limites, elle est **apériodique (périodique)**.

**Note** Une chaîne de Markov peut avoir des probabilités stationnaires sans avoir de probabilités limites.

### Exemple de chaîne de Markov périodique

Soit la chaîne de Markov suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette chaîne de Markov ne converge pas vers des probabilités limites, à chaque période elle va inverser :

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La chaîne de Markov est donc **périodique**.

#### ≡ Chaîne de Markov ergodique

Une chaîne de Markov **irréductible, récurrente positive** et **apériodique** est **ergodique**.

## Time Spent in Transient States

## Notation

$P_T$  Matrice des probabilités de transition contenant uniquement les états transitoires.

> Les rangées ne somment donc pas nécessairement à 1.

$s_{i,j}$  Espérance du nombre de périodes que le processus est dans l'état transitoire  $j$  sachant que le processus a débuté dans l'état transitoire  $i$ .

$S$  Matrice des valeurs de  $s_{i,j}$ .

>  $S = (I - P_T)^{-1}$ .

> **Note** : Les indices de la matrice représentent les états et non la position dans la matrice.

> Par exemple, si on retire la deuxième colonne alors les indices seront  $s_{i,1}, s_{i,3}, s_{i,4}, \dots$ .

$f_{i,j}$  Probabilité d'aller dans l'état  $j$  à tout point dans le futur sachant que le processus débute dans l'état  $i$ .

>  $f_{i,j} = \frac{s_{i,j} - \delta_{i,j}}{s_{j,j}}$ .

## Rappel : Matrice d'identité

La matrice d'identité  $I$  est la suivante :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

On exprime les valeurs de  $I$  avec la variable binaire  $\delta_{i,j}$  :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

## Rappel : Inverse d'une matrice

## Notation

$A^{-1}$  Inverse de la matrice  $A$  tel que  $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ .

Soit la matrice  $2 \times 2$   $A$  où :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Alors son inverse  $A^{-1}$  est :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

> Pour plus de 3 dimensions, c'est long et peu probable d'être dans l'examen.

## Exemple du calcul du temps espéré

Soit la chaîne de Markov à trois états (1, 2, 3) avec la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On souhaite trouver l'espérance du nombre de périodes passées dans l'état 2 sachant qu'on débute dans l'état 1.

1 Trouver la matrice de transitions pour les états transitoires :

$$P_T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

2 Trouver  $I - P_T$  :

$$I - P_T = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

3 Trouver l'inverse  $(I - P_T)^{-1}$  :

$$(I - P_T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{0.10 - 0} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

4 Trouver l'élément  $s_{1,2}$  de la matrice  $S = (I - P_T)^{-1}$  et donc  $s_{1,2} = 5$ .

## Time Reversibility

### Notation

$R_{i,j}$  Probabilité de transition de l'état  $i$  à l'état  $j$  (en une période) pour la chaîne de Markov inverse.

➤ On dénote la matrice des probabilités de transition de la chaîne de Markov inverse par  $\mathbf{R}$ .

### Contexte

Lorsque l'on désire trouver la séquence des états à partir du dernier, on veut le processus inverse de la chaîne de Markov.

### Chaîne de Markov inverse

Soit la chaîne de Markov **stationnaire** et **ergodique**  $\{X_m, m \geq 0\}$ . Alors, le processus inverse  $(X_m, X_{m-1}, \dots)$  est lui-même une chaîne de Markov avec probabilités de transition  $R_{i,j} = P_{j,i} \times \frac{\pi_j}{\pi_i}$ .

**Note** On pose que la chaîne de Markov est *stationnaire* afin qu'elle soit "homogène" et que les probabilités de transition ne changent pas dans le temps.

### Chaîne de Markov « time reversible »

Si  $R_{i,j} = P_{i,j}$  pour tout  $i$  et  $j$ , la chaîne de Markov est « time reversible » et  $\pi_i P_{i,j} = \pi_j P_{j,i}$ .

Il s'ensuit que la probabilité que le processus fasse la transition d'un état  $i$  vers un état  $j$  est la même que pour la probabilité de la transition d'un état  $j$  vers un état  $i$ , et cela peu importe le chemin. C'est à dire,  $P_{i,j}P_{j,k}P_{k,i} = P_{i,k}P_{k,j}P_{j,i}$ .

**Note** Un truc pour déterminer si une chaîne de Markov est réversible est de vérifier si pour un  $i$  et  $j$  que  $P_{i,j} = 0$  alors  $P_{j,i} = 0$ .

### Exemple de chaîne de Markov inverse

Soit la chaîne de Markov à 2 états (1, 2) avec la matrice des probabilités de transition suivante :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

1 Trouver les probabilités limites :

$$\pi_1 = 0.3\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.2\pi_3 \Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{7}\pi_2 + \frac{2}{7}\pi_3$$

$$\pi_2 = 0.2\pi_1 + 0.6\pi_2 + 0.1\pi_3 \Rightarrow \pi_2 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3$$

$$\therefore \pi_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{7}\pi_2 + \frac{2}{7}\pi_3 \right) + \frac{1}{4}\pi_3 = \frac{\frac{1}{7}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_3}{13/14}$$

$$= \frac{2}{13}\pi_3 + \frac{7}{26}\pi_3 = \frac{11}{26}\pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \Rightarrow \frac{1}{7} \left( \frac{11}{26}\pi_3 \right) + \frac{11}{26}\pi_3 + \pi_3 = 1 \Rightarrow \pi_3 = \frac{182}{270}$$

$$\pi_2 = \frac{11}{26} \times \frac{182}{270} = \frac{77}{270}$$

$$\pi_1 = \frac{1}{7} \frac{77}{270} + \frac{2}{7} \frac{182}{270} = \frac{7}{30}$$

2 Trouver probabilités de transition de la chaîne de Markov inverse  $\mathbf{R}$  :

$$(a) \mathbf{R}_{11} = \mathbf{P}_{11} \frac{\pi_1}{\pi_1} = 0.3$$

$$(b) \mathbf{R}_{22} = \mathbf{P}_{22} \frac{\pi_2}{\pi_2} = 0.6$$

$$(c) \mathbf{R}_{33} = \mathbf{P}_{33} \frac{\pi_3}{\pi_3} = 0.7$$

$$(d) \mathbf{R}_{12} = \mathbf{P}_{21} \frac{\pi_2}{\pi_1} = 0.1 \times \frac{77/270}{7/30} = 0.12$$

$$(e) \mathbf{R}_{13} = \mathbf{P}_{31} \frac{\pi_3}{\pi_1} = 0.2 \times \frac{182/270}{7/30} = 0.58$$

$$(f) \mathbf{R}_{21} = \mathbf{P}_{12} \frac{\pi_1}{\pi_2} = 0.2 \times \frac{7/30}{77/270} = 0.16$$

$$(g) \mathbf{R}_{23} = \mathbf{P}_{32} \frac{\pi_3}{\pi_2} = 0.1 \times \frac{182/270}{77/270} = 0.24$$

$$(h) \mathbf{R}_{31} = \mathbf{P}_{13} \frac{\pi_1}{\pi_3} = 0.5 \times \frac{7/30}{182/270} = 0.17$$

$$(i) \mathbf{R}_{32} = \mathbf{P}_{23} \frac{\pi_2}{\pi_3} = 0.3 \times \frac{77/270}{182/270} = 0.13$$

3 Construire la matrice des probabilités de transition inverse :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.12 & 0.58 \\ 0.16 & 0.60 & 0.24 \\ 0.17 & 0.13 & 0.70 \end{bmatrix}$$

## Applications of Markov Chains

## Branching Process

## Sixième partie

# Séries chronologiques