CONTRIBUTEURS

IFM : Investment and Financial Markets

aut., cre. Alec James van Rassel

Référence

src. Claire Bilodeau

src. Thomas Landry

src. Coaching Actuaries, Exam IFM Study Notes

Contributeurs

aut. Nicholas Langevin

aut. Gabriel Crépeault-Cauchon

pfr. Marc-André Devost

ccp. Louis Landry Bélanger

Cours reliés

ACT-1006 Gestion des risques financiers I

ACT-2011 Gestion des risques financiers II

Première partie

Gestion des risques financiers II (ACT-2011)

1 Introduction aux produits dérivés

Produits dérivés

Titre financier dont sa valeur est déterminée par le prix de quelque chose d'autre, soit l'**actif sous-jacent** du produit dérivé.

Tout comme un couteau n'est pas dangereux de soi, les produits dérivés ne le sont pas non plus. On peut heurter quelqu'un avec un couteau tout comme on peut couper des patates. Le risque dépend de leur utilisation.

Les produits dérivés apparaissent souvent en raison d'une augmentation du risque du sous-jacent ; ils sont en fait des **outils de gestion du risque**.

Origine

Après 1971, le président Nixon a voulu défaire le standard de l'or (qui a causé de l'hyperinflation dans plusieurs pays) pour plutôt laisser le libre-marché fixer la valeur des devises de chaque pays.

Causes de la transformation des marchés :

- Déréglementation ;
- Automatisation des traitements avec l'informatique ;
- Mondialisation.

Exemples de produits dérivés

- Contrat à terme standardisé (« *futures contract* ») ;
- Contrat à terme de gré à gré (« *forward contract* ») ;
  Gré : acceptation, ou consentement ;
- Option d'achat (« *call* ») ;
- Option de vente (« *put* ») ;
- Les « ***swaps*** ».

Exemples de sous-jacent aux produits dérivés

- Indice boursier ;
- Taux d'intérêt ;
- Taux de change ;
- Climat ;
- Prix d'une marchandise.

Utilité

- Gestion des risques (**hedging**) ;
  Par exemple, un avion peut se procurer une option d'achat pour contrer le risque d'une augmentation du prix du pétrole ;
  On dit qu'elle « *hedge* », ou protège sa position, contre le prix du pétrole.
- **Spéculation** ;
  Par exemple, un investisseur croit que le prix d'une action va augmenter et se procure une option d'achat.
- **Réduction** des **frais** de **transaction** : Faire le même profit qu'en transigeant des actions sans réellement les transiger ;
- **Arbitrage** réglementaire : Éliminer le risque de posséder un actif en retenant ses privilèges.
  Par exemple, un investisseur élimine le risque d'une action avec une option de vente tout en conservant ses droits de vote.

Parties prenantes

Utilisateur final participant au contrat du produit dérivé ;
- « *end-user* ».

Teneur de marché "crée" le marché en tant qu'intermédiaire ;
- Il cherche à faire un profit, une "cote", sur la transaction ;
- « *Market-makers* ».

Observateur économique observateurs du marché qui analysent et réglementent les activités des teneurs de marché et utilisateurs.

Ingénierie financière

Création de produits dérivés à partir de d'autres produits.

Implications

- Les teneurs de marchés peuvent **couvrir** leurs positions (« *hedging position* »);
- Les teneurs de marchés peuvent **personnaliser** les produits dérivés;
- L'arbitrage réglementaire est difficile à empêcher puisqu'il existe souvent plusieurs façons pour recréer un produit dérivé.
  - Pour comprendre le concept, $1 + 3 = 4$ tout comme $2 + 2$;
  - Si le numéro 3 est illégal, on peut arriver à 4 d'une autre façon.

Marchés financiers

Transaction gré à gré

Transaction sans intermédiaire ou à l'extérieur de la bourse sur un marché hors cote.

Raisons pour ce type de transaction

- Ce sont souvent de grosses transactions permettant d'économiser sur les frais de transaction;
- On peut combiner (sur une même transaction) plusieurs microtransactions et plusieurs types d'actifs.

Étapes d'une transaction

1. L'acheteur et le vendeur se trouvent;
2. On définit les obligations de chaque partie, on dit que la transaction est « **cleared** »;
   - C'est-à-dire, l'actif à livrer, la date d'échéance, le prix, etc.;
   - Les transactions sur les marchés financiers sont *cleared* avec un intermédiaire nommé la **chambre de compensation** (« *clearing house* »);
   - Elle met en relation les acheteurs et vendeurs *(1ère étape)*, et tient compte des obligations et paiements.
3. La transaction a lieu et les obligations sont remplies par chaque partie, on dit que la transaction est « *settled* »;
4. Les registres de propriétés sont mis à jour.

Chambre de compensation « *clearing house* »

- La chambre de compensation règle beaucoup de transactions sur les marchés organisés;
- Elle est une entité standardisée et réglementée;
- **Novation** est défini comme un processus de substitution;
- Dans le cas de produits dérivés, la chambre de compensation, *par novation*, devient le vendeur de tous les acheteurs et l'acheteur de tous les vendeurs;
- Donc, la chambre de compensation est un intermédiaire pour les acheteurs et vendeurs.

Mesures de taille et d'activité d'un marché

Volume total des transactions : Nombre total de titres transigés pendant une période de temps donnée ;

Valeur marchande : Valeur de tout ce qui pourrait être transigé ;

- nombre d'actions $\times$ prix par action ($) ;
- en anglais, le « *market value* » ;
- Dans le cas des produits dérivés, ce n'est pas intéressant

Valeur notionnelle : Valeur du sous-jacent au produit dérivé ;

Position ouverte : Nombre de contrats pour lesquels un des parties a une obligation.

- « *Open interest* ».

Les compagnies recueillent du capital en émettant des actions et obligations selon leurs objectifs.

Obligations Une obligation se compare à un emprunt bancaire et est traitée comme de la dette ;

- Souvent, elles sont émises pour des besoins de liquidité à court terme ou,
- Pour le démarrage d'une entreprise.

Actions Une action correspond à une partie de la compagnie.

- Souvent, une compagnie va faire une offre publique lorsqu'elle cherche, ou nécessite de l'argent pour soit s'élargir, développer de nouveaux produits, etc. ;
- L'avantage en comparaison à une obligation est qu'il n'y a pas de promesse de rembourser les fonds ;
- En revanche, la compagnie est forcée d'échanger une partie de son contrôle.

Il s'ensuit que le **marché des actions** est plus actif (a un volume total de **transactions** plus important) que le **marché des obligations** ; les obligations se transigent moins souvent que les actions. Cependant, la taille des deux marchés (valeur marchande) est similaire.

Rôle des marchés financiers : Partage du risque et diversification des risques. Si un risque est non diversifiable.

Écart acheteur-vendeur « *Bid-Ask Spread* »

Écart entre le prix de vente (**ask**) et d'achat (**bid**).

Ceci correspond à la **marge de profit** que le teneur de marché conserve. En l'absence d'arbitrage, on aura $Ask > Bid$.

Prix

Ask : Prix le plus *élevé* auquel un investisseur est prêt à payer pour le sous-jacent ;

- Lorsque le teneur de marché vend une action à un investisseur, il *ask* le prix plus élevé ;
- « *ask price* » se traduit au **cours vendeur** représentant l'idée de regarder les prix auxquels se transigent l'actif.

Bid : Prix le plus *faible* auquel un investisseur est prêt à vendre le sous-jacent.

- Lorsque le teneur de marché achète une action d'un investisseur, il *bid* le prix plus faible ;
- « *bid price* » se traduit au **cours acheteur**.

Terminologie des marchés

Ordre au cours du marché : On achète et vend selon les meilleurs prix bid-ask actuels ;

- « *Market order* ».

Ordre à cours limité : Ordre pour une quantité précise dans une tranche spécifiée de prix ;

- « *Limit order* » ;
- On achète le sous-jacent si $Ask < k$ ou on vend le sous-jacent si $Bid > k$ sinon aucune transaction a lieu.

Ordre de vente stop : Ordre au cours du marché déclenché par l'atteinte d'un certain prix ;

- « *Stop-loss order* » ;
- On veut limiter sa perte si un sous-jacent perd énormément de valeur et le vendre si $Bid \leq k$.

Longue On se considère en position longue **par rapport au sous-jacent** si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une hausse du sous-jacent ;

› La position peut également être déterminé selon le produit dérivé ; on se considère en position longue si l'on possède quelque-chose.

Courte On se considère en position longue **par rapport au sous-jacent** si notre stratégie nous permet de bénéficier d'une baisse du sous-jacent.

› La position peut également être déterminé selon le produit dérivé ; on se considère en position longue si l'on emprunte quelque-chose.

Vente à découvert

Vente à découvert « *(short-sell)* »

La vente d'un actif qu'on ne possède pas. On peut y penser comme l'inverse d'un achat.

Étapes d'une vente à découvert

Au début :

1. Emprunt d'un titre ;
2. Vente du titre ;

Après une certaine période de temps :

3. Achat du titre ;
4. Remboursement du titre.

Exemple de vente à découvert

› Mon ami James possède 5 actions d'Apple ayant chacune une valeur de 5$;
› Je lui emprunte ses 5 actions et lui promets d'y retourner ;
› Immédiatement, je revends ses actions sur le marché des actions ;
  – Je ne suis pas inquiété, je suis certain que le prix va baisser ;
  – Ce faisant, je suis certain que je serai capable de racheter ses actions plus tard à un prix plus faible.
› Après une certaine période de temps, j'achète 5 actions au nouveau prix et j'y retourne.

Raisons pour une vente à découvert

› **Spéculation** : Un investisseur tire profit d'une baisse de prix ;
› **Financement** : Une vente à découvert est une façon d'emprunter de l'argent ;
› **Couverture** (hedging) : Un investisseur peut éliminer le risque d'une position longue sur une action avec une vente à découvert.

Type de risques

Risque de défaut (de crédit) Risque de ne pas être payé ;

- Ce risque peut être réduit avec un dépôt initial en garantie ou une marge de sécurité ;
- « *credit risk* ».

Risque de rareté Risque qu'il soit difficile de trouver un acheteur et un vendeur pour le sous-jacent.

- C'est le risque lié à un actif peu liquide ;
- En raison du faible nombre de transactions, il peut être difficile d'établir des clauses et conditions avec peu de transactions sur lesquelles se baser ;
- Il s'ensuit qu'il y a beaucoup de négociations et de variations dans les prix.

Frais

L'**investisseur** est le *short-seller* et le **prêteur** le *détenteur des actions empruntées* par l'investisseur.

« ***short-sale proceeds*** » Les recettes de la vente sont conservées comme collatéraux au cas où que l'investisseur ne retourne pas les actions ;

- Soit le prêteur, ou un parti tiers, va conserver les revenus de la vente à découvert jusqu'au retour des actions ;
- À ce moment, elles seront retournées à l'investisseur.

« ***a haircut*** » Marge de sécurité pour couvrir le risque que le prix des actions augmente trop pour que l'investisseur ait la capacité financière des retourner, le prêteur exige un « dépôt » additionnel ;

- Comme les recettes de la vente, cette marge de sécurité sera retournée au prêteur.

« ***Interest*** » Il est naturel que le prêteur exige un retour sur la vente à découvert également ;

- Dans le marché des actions, l'intérêt accumulé sur le collatéral est le « *short rebate* » ;
- Dans le marché des obligations, c'est le **taux de mise en pension** (« *repo rebate* ») ;
- Ces taux sont habituellement *plus faibles que* ceux du *marché* et sont fondés sur l'offre et la demande.

« ***Dividends*** » Il est possible que des dividendes soient payables lors du prêt ;

- Puisque le détenteur de l'action sera celui à qui l'investisseur a vendu les actions, l'investisseur et le prêteur ne vont pas les recevoir ;
- Du point de vue du prêteur, les dividendes sont des paiements en espèce qu'il aurait reçus s'il n'avait pas prêté l'action ;
- Ce faisant, l'investisseur va payer ces dividendes au prêteur s'il y en a ;
- Pour le prêteur ils sont imposables alors que pour l'investisseur ils sont déductibles d'impôts ;
- Ce paiement se nomme le **taux de location** (« *lease rate* ») de l'actif.

Exemple de calcul

Un investisseur vend une action (sans dividendes) pour 2000$ aujourd'hui. L'année suivante, il achète l'action pour 2 600$ et ferme sa position.

On pose :

- Le « *haircut* » est de 300$;
- Le taux d'intérêt pour accumuler les revenus de la vente à découvert (« *short rebate* ») est de 2% ;
- Le taux sans risque annuel effectif est de 5%.

On cherche à trouver le profit de la vente à découvert.

1. Calculer les « *short-sale proceeds* » :
   $$2000 + 300 = 2\,300\$$$
   - Le 300$ est payé par le vendeur ;
   - Pour le vendeur, les flux monétaires net à $t = 0$ sont donc $+2\,000\$ - 300\$$.
2. Accumuler l'intérêt sur « *short-sale proceeds* » :
   $$(2300) \times (1.02) = 2\,346\$$$
   - Ce montant est donné au vendeur lorsqu'il retourne l'action.
3. Trouver le profit du vendeur à $t = 1$:
   $$+2\,346\$ - 300(1.05) - 2600 = -569\$$$

L'investisseur a donc perdu 569$.

2 Introduction aux Forwards et aux options

Terminologie

Prime : Prix payé pour un produit dérivé (à $t = 0$).

- Dans le cas d'options, la prime correspond au coût ;
- Si positif, il s'agit d'un **coût** ;
- Si négatif, il s'agît d'une **compensation**.

Valeur à l'échéance T **:** L'argent que l'on reçoit à l'échéance.

- En anglais, « *payoff* » ;
- C'est à dire, les flux de trésorier au temps $t = T$.

Profit = (valeur à l'échéance) - (valeur accumulée du coût initial)
$= VA$(flux monétaires)[a]

- Le profit soustrait les flux financiers initiaux accumulés de la valeur à l'échéance ;
- Par exemple, acheter une voiture et la revendre 10 ans plus tard :
  profit =(prix de revente dans 10 ans)−
  (valeur accumulée, au courant des 10 dernières années,
  du coût d'achat initial (à $t = 0$))
- Dans le cas d'options, on soustrait la valeur accumulée de la prime.

δ Taux de dividendes composé continûment.

r_f force (taux) d'intérêt sans risque composé continûment (effectif annuel) ;

T date d'échéance.

a. Valeur Accumulée au taux sans risque.

« *Cost of carry* »

On peut interpréter l'écart entre le taux sans risque r_f et le taux de dividende δ d'une action comme le « *cost of carry* » = $r_f - \delta$.

Contrats à terme de gré à gré

Contrat à terme (de gré à gré) « *forward contract* »

Contrat selon lequel :

- *deux* partis s'**engagent** d'**échanger**—un à *acheter* et l'autre à *vendre* ;
- une *certaine* **quantité** d'un *certain* **bien**—l'actif sous-jacent S ;
- à un *certain* **prix**—prix à terme $F_{0,T}$;
- à un *certain* **endroit** à une *certaine* **date**—date d'échéance, T ;

L'engagement est au départ à $t = 0$ mais aucune transaction y a lieu. Ce faisant, le profit sera égal à la valeur à l'échéance puisqu'il n'a pas de flux financiers à 0 à accumuler. L'achat **ferme** en revanche, implique l'*achat* et la livraison de l'actif au départ à $t = 0$. Donc :

Transaction	Valeur à l'échéance	Profit
Achat ferme	S_T	$S_T - S_0 e^{rT}$
Contrat à terme (achat)	$S_T - F_{0,T}$	$S_T - F_{0,T}$

Notation de prix

S_t **: Valeur** de l'actif sous-jacent à t ;

S_0 **: Prix au comptant** ;

- « *(spot price)* » ;
- C'est le paiement pour la livraison immédiate à $t = 0$;
- En d'autres mots, le prix de l'actif sous-jacent aujourd'hui payable dans le cas d'un achat ferme.

$F_{0,T}$ **: Prix à terme** payable à T ;

- $F_{0,T} = S_0 e^{r(T-0)}$

$F_{0,0}$ **:** est nul.

La notation $F_{0,T}$ vient de « *future* » ou « *forward* ».

Exemple de bateau

- Je veux acheter un *(quantité)* bateau *(bien)*, mais il est inconvénient pour moi de le recevoir maintenant ;
- Au lieu, puisque je veux l'acheter maintenant, je signe une entente *(engagement)* pour l'acheter ;

- La seule différence entre l'acheter aujourd'hui *(au prix au comptant S_0)* et l'acheter lorsque la neige fond *(au prix à terme $F_{0,T}$)* est l'accumulation d'intérêt ;
- Puisqu'on suppose tout les deux d'êtres fiables et sans risque, le prix est accumulé au taux sans risque (r) et le prix payable rendu à l'été (T) sera $F_{0,T} = S_0 e^{r(T-0)}$;

  Si le taux sans risque est un **taux plutôt** qu'une *force* d'intérêt, on obtient $F_{0,T} = S_0(1+r_f)^T$.

Options

Exercice (levée)

Décision d'*exercer* l'option d'achat ou de vente.

Notation

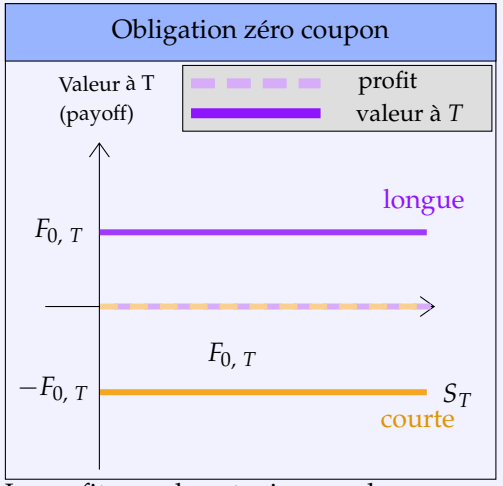
K : **Prix d'exercice** ***(strike price)*** ;

Types d'exercices

Européen : Au moment d'expiration de l'option T ;
Américain : N'importe quand (any moment) d'ici T ;
Bermudien : À quelques périodes (bounded periods) d'ici T ;

En réalité, la *majorité des options sont américaines*.

Obligation zéro coupon



Le profit sera donc toujours nul.

La position
longue Équivaut à un dépôt ;
courte Équivaut à un emprunt.

Valeur à l'échéance
$F_{0,T}$
Profit
$F_{0,T} - (F_{0,T} - e^{-rT})e^{rT}$

Option d'achat

Contrat qui :

- *permet* **(optionnel)** à son *détenteur* **d'acheter** ;
- une *certaine* **quantité** d'un *certain* **bien**—l'actif sous-jacent ;
- à un *certain* **prix**—prix d'exercice K ;
- à un *certain* **endroit** à, ou d'ici, une *certaine* **date**—date d'échéance, T ;

Notation

C_0 **Prix** pour acheter l'option d'achat ;
$C(K)$ Notation pour représenter l'option d'achat (« ***Call*** ») avec un prix d'exercice de K.

En réalité, on dénote le prix, alias prime, avec $C(K)$ mais selon la notation de Claire elle aime le faire avec C_0.

Option de vente

Contrat qui *permet* à son *détenteur* de **vendre** au lieu d'acheter.

Notation

P_0 **Prix** pour acheter l'option de vente ;

$P(K)$ Notation pour représenter l'option de vente (« ***Put*** ») avec un prix d'exercice de K.

En réalité, on dénote le prix, alias prime, avec $P(K)$ mais selon la notation de Claire elle aime le faire avec P_0.

Note L'acheteur d'une option de vente a une position **longue** par rapport à l'**option** mais une position **courte** par rapport au **sous-jacent**.

Profit (perte) extrême

Position	Minimum	Maximum
Contrat à terme (longue)	$-F_{0,T}$	$+\infty$
Contrat à terme (courte)	$-\infty$	$+F_{0,T}$
Option d'achat (longue)	$-C_0e^{rT}$	$+\infty$
Option d'achat (courte)	$-\infty$	$+C_0e^{rT}$
Option de vente (longue)	$-P_0e^{rT}$	$K-P_0e^{rT}$
Option de vente (courte)	$-(K-P_0e^{rT})$	$+P_0e^{rT}$

Types de positions :

Position capitalisée Une position est dite "capitalisée" si elle est payée en entier au début (à $t=0$) ;

› Par exemple, l'achat ferme d'un action aujourd'hui.

Position non capitalisée Une position est dite "non capitalisée" si le paiement en est différé.

› Par exemple, un contrat à terme de gré à gré dont le paiement est différé à l'échéance.

En bref, la différence fondamentale entre l'achat ferme et l'achat différé est le moment du règlement de l'achat.

Règlement en espèce et livraison

En **théorie**, avec un contrat à terme de gré à gré, l'acheteur reçoit l'actif sous-jacent *à la date de livraison* et le vendeur reçoit, à ce même moment, l'argent (*le prix à terme*) en échange.

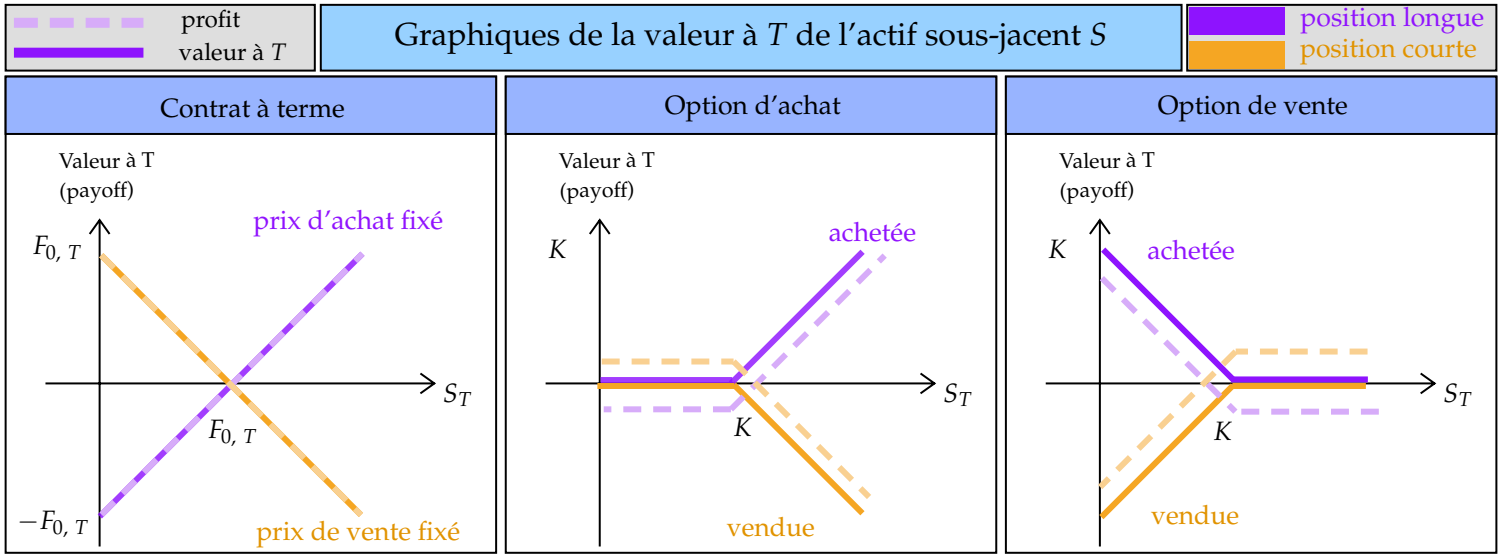
En **pratique**, il arrive que le sous-jacent ne soit jamais transigé. En lieu, le règlement se fait en espèce au parti ayant fait un profit dans la transaction.

Ceci revient à ce que l'acheteur paye $F_{0,T}$ au vendeur en échange de S_T ; puis, il va immédiatement revendre l'actif au cours du marché. Les profits sont alors de $S_T - F_{0,T}$ pour l'acheteur et de $F_{0,T} - S_T$ pour le vendeur.

Il n'y a aucun impact sur les profits et le **vendeur peut ne jamais avoir possédé l'actif** sous-jacent. Les contrats « *forward* » permettent donc aux investisseurs de spéculer ou d'atténuer des risques pris dans d'autres transactions, positions et investissements tout en **évitant des frais de transactions**.

Résumé

Autre Contrat	Position	Rôle	Stratégie	Valeur à T (payoff)	Profit
Contrat à terme	Longue	obligation d'acheter	garantie / fixer le prix d'achat du sous-jacent	$S_T - F_{0,T}$	
	Courte	obligation de vendre	garantie / fixer le prix de vente du sous-jacent	$-(S_T - F_{0,T})$	
Option d'achat (call)	Longue	droit d'acheter	achat d'assurance contre un prix sous-jacent élevé	$\max\{0, S_T - K\}$	$\max\{0, S_T - K\} - C_0 e^{rT}$
	Courte	obligation de vendre	vente d'assurance contre un prix sous-jacent élevé	$-\max\{0, S_T - K\}$	$-\max\{0, S_T - K\} + C_0 e^{rT}$
de vente (put)	Longue	droit de vendre	achat d'assurance contre un prix sous-jacent faible	$\max\{0, K - S_T\}$	$\max\{0, K - S_T\} - P_0 e^{rT}$
	Courte	obligation d'acheter	vente d'assurance contre un prix sous-jacent faible	$-\max\{0, K - S_T\}$	$-\max\{0, K - S_T\} + P_0 e^{rT}$



Degré de parité	« *Moneyness* »	Option d'achat	Option de vente
au cours	« *At-the-money* »	$S_0 = K$	$S_0 = K$
dans le cours	« *In-the-money* »	$S_0 > K$	$S_0 < K$
hors du cours	« *Out-of-the-money* »	$S_0 < K$	$S_0 > K$

3 Stratégies de couverture

Préliminaire

Hypothèses

Pour tout le chapitre, nous posons les hypothèses suivantes :

1. Taux d'intérêt i constant.
2. Aucuns frais de transaction.
3. Aucun risque de défaut.
4. Aucun versement intermédiaire.

Propriétés des maximums et minimums

$$\begin{aligned}
\max(a,b)+c &= \max(a+c,b+c)\\
\min(a,b)+c &= \min(a+c,b+c)\\
\min(a,b) &= -\max(-a,-b)\\
\max(a,b)\times c &= \max(a\times c, b\times c),\ c>0\\
\max(a,b)+\min(a,b) &= a+b
\end{aligned}$$

Une option est dite d'être :

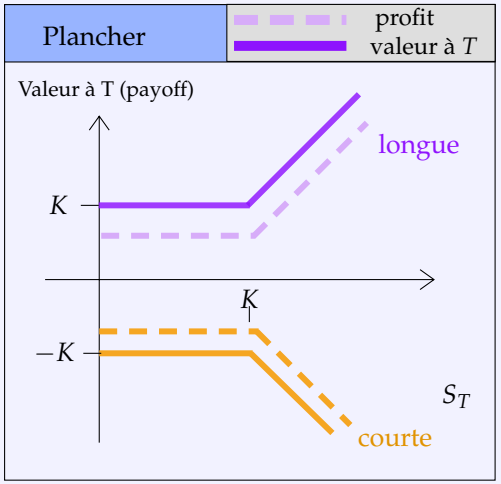
non-couverte si nous avons aucune position dans l'actif sous-jacent

couverte si nous avons une position correspondant à l'obligation de l'option

Plancher « *floor* »

On achète une option de vente pour garantir un prix minimum de vente et couvrir une position longue dans l'actif sous-jacent. On dit donc avoir une **option de vente de protection** qui sert de *plancher* minimale.

$$\begin{aligned}
\text{« } Floor \text{ »} &= +S_0 + P(K)\\
\text{Valeur à l'échéance} &= \max(0, K-S_T) + S_T = \max(S_T, K)
\end{aligned}$$

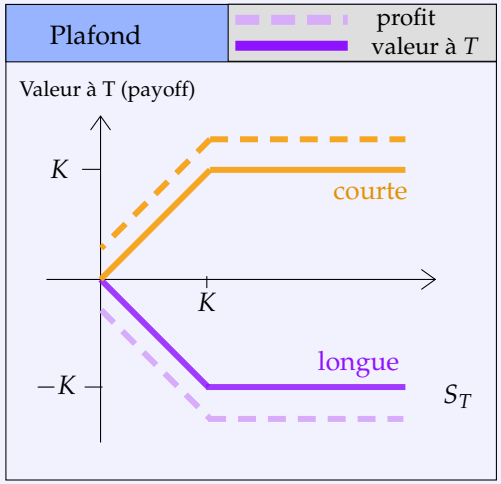


› Un plancher est donc une option de vente couverte.
« *covered put* » = « *Floor* » = $S_0 + P(K)$

Plafond « *cap* »

On achète une option d'achat pour garantir un prix maximal d'achat et couvrir une position courte dans l'actif sous-jacent. Ce faisant, on *plafonne* le prix d'achat.

$$\text{« } Cap \text{ »} = -S_0 + C(K)$$
$$\text{Valeur à l'échéance} = \max(0, S_T - K) - S_T = -\min(S_T, K)$$



› Un plafond est donc une option d'achat couverte.
« *covered call* » = « *cap* » = $-S_0 + C(K)$

Écarts et tunnels

Écart haussier « *Bull Spread* »

Crée en :

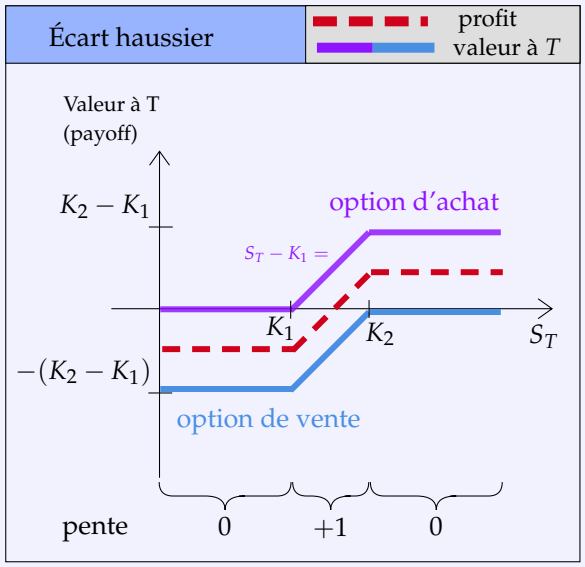
› Achetant une option d'achat $C(K_1)$ et vendant une autre option achat $C(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$;

› Achetant une option de vente $P(K_1)$ et vendant une autre option de vente $P(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$.

Contexte

› Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va augmenter, ***mais***
- Qu'il ne veut pas une perte trop importante si le prix de l'actif baisse ;
- Ni qu'il veut payer pour plus de profit qu'il s'attend à recevoir.

› « *Bull Spread* » provient de l'idée d'être « ***bull**-ish* » et prévoir une augmentation du prix de l'action à un intervalle ;
On peut également visualiser un taureau avec ses cornes pointues vers le haut prêt à attaquer.



Écart baissier « *Bear Spread* »

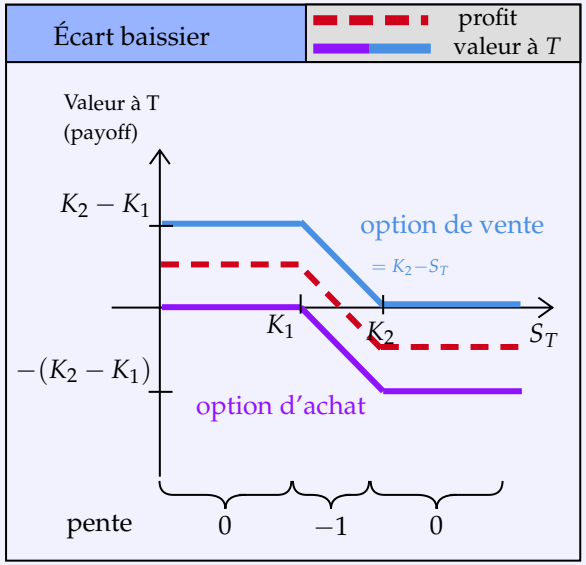
L'inverse d'un écart haussier, il est crée en :

- Vendant une option d'achat $C(K_1)$ et achetant une autre option achat $C(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$;
- Vendant une option de vente $P(K_1)$ et achetant une autre option de vente $P(K_2)$ à un prix d'exercice plus élevé $K_2 > K_1$.

Contexte

- Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va baisser, ***mais*** qu'il
  - Qu'il ne veut pas une perte trop importante si le prix de l'actif baisse ;
  - Ni qu'il veut payer pour plus de profit qu'il s'attend à recevoir.
- « *Bear Spread* » provient de l'idée d'investir avec précaution pour « ***bear****-er* » une et baisse du prix de l'action à un intervalle ;

  On peut également visualiser un ours qui va « strike down » avec ses pattes d'ours en attaque.



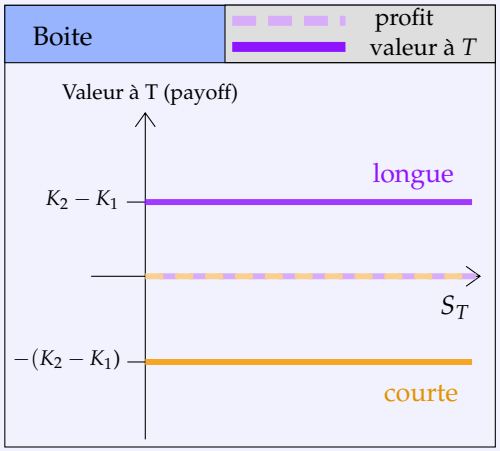
Écart sur ratio d'options « *Ratio Spread* »

Crée en :

- **achetant** m options à un prix d'exercice K_1 et
- puis **vendant** n options à un prix d'exercice K_2 différent où
- $m \neq n$ et $K_1 \neq K_2$.

Boite « *Box Spread* »

- La stratégie consiste à acheter un écart haussier ainsi qu'un écart baissier où l'un utilise des options d'achat et l'autre des options de vente (ayant les mêmes caractéristiques) ;
- Il est utilisé pour emprunter ou prêter de l'argent avec une valeur à l'échéance connue en avance, peu importe la direction prise par la valeur de l'actif sous-jacent ;
- Il est donc équivalent à une obligation zéro-coupons.



Par exemple, on achète (position longue) un écart haussier d'options d'achat et un écart baisser d'options de vente :

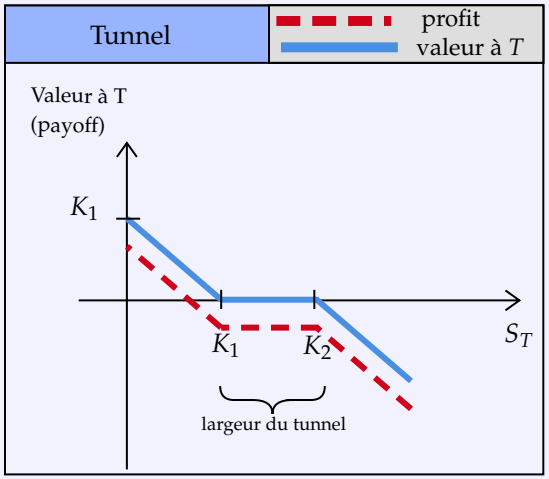
option	$0 \leq S_T < K_1$	$K_1 \leq S_T < K_2$	$K_2 \leq S_T$
$+C(K_1)$	0	$S_T - K_1$	$S_T - K_1$
$-C(K_2)$	0	0	$-(S_T - K_2)$
$-P(K_1)$	$-(K_1 - S_T)$	0	0
$+P(K_2)$	$K_2 - S_T$	$K_2 - S_T$	0
net	$K_2 - K_1$	$K_2 - K_1$	$K_2 - K_1$

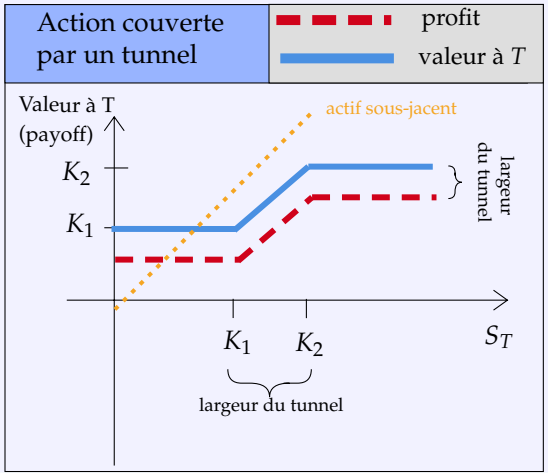
Tunnel « *Collar* » et **action couverte par un tunnel** « *Collared stock* »

Le tunnel (« *Collar* ») est crée en

- Achetant une option de vente $P(K_1)$ et
- vendant une option d'achat $C(K_2)$ où
- $K_1 < K_2$.

Lorsqu'on achète l'actif (position longue) en plus, nous obtenons une action couverte par un tunnel (« *Collared stock* »).
La largeur du tunnel est $K_2 - K_1$.





$$\text{tunnel} = P(K_1) - C(K_2)$$
$$\text{action couverte par un tunnel} = P(K_1) - C(K_2) + S_T$$

Si l'on achète deux options ayant la même prime, on obtient un tunnel à prime zéro. Par exemple, on vend une option d'achat $C(120) = 5$ et achète une option de vente $-P(120) = -5$ ayant donc un coût initial nul.

Spéculation sur la volatilité

Stellage « *straddle* »

Créé en achetant une option de vente et une option d'achat avec un prix d'exercice K.

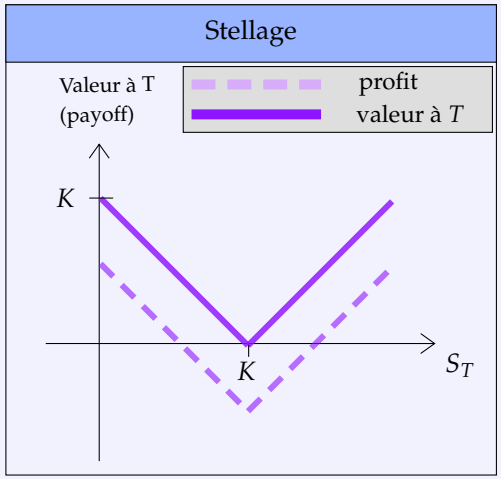
Contexte

- Souvent bâti avec un prix d'exercice au cours du marché (in-the-money) ;
- L'idée est de faire un profit si le prix de l'actif sous-jacent **monte ou descend** ;
- Son avantage est donc qu'il peut être profitable avec une baisse ou hausse du prix de l'actif sous-jacent ;
- Cependant, puisqu'il faut acheter deux options au cours du marché, le coût est plutôt élevé.

Straddle $= Put(K,T) + Call(K,T)$.

Il s'ensuit que la valeur à l'échéance est :

$$|S_T - K| = \begin{cases} (K - S_T) + 0 = K - S_T, & S_T \leq K \\ 0 + (S_T - K) = S_T - K, & S_T > K \end{cases}$$



Stellage élargi « *strangle* »

Créé en

- achetant une option de vente avec un prix d'exercice K_1 et
- achetant une option d'achat avec un prix d'exercice K_2 où
- $K_1 < K_2$.

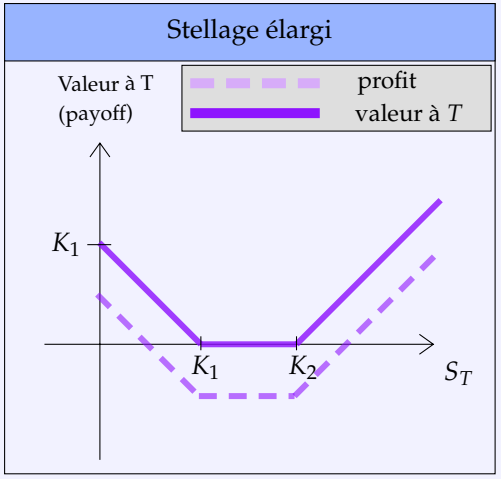
Contexte

- Pour réduire le coût des primes, les options sont à des prix d'exercice hors du cours du marché (« *out-of-the-money* ») ;
- Cela réduit la perte maximale, mais augmente la variation nécessaire pour faire un profit.

Strangle $= Put(K_1,T) + Call(K_2,T)$.

Il s'ensuit que la valeur à l'échéance est :

$$\begin{cases} (K_1 - S_T) + 0 = K_1 - S_T, & S_T \leq K_1 \\ 0 + 0 = 0, & K_1 < S_T \leq K_2 \\ 0 + (S_T - K_2) = S_T - K_2, & S_T > K_2 \end{cases}$$



Écart papillon « *Butterfly Spread (BFS)* »

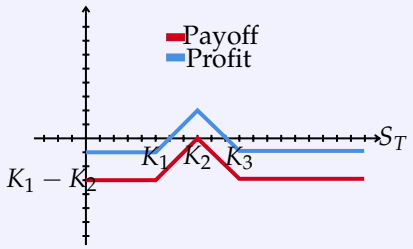
Créé en

- achetant stellage élargi avec prix d'exercices K_1 et K_3 ;
- vendant un stellage avec un prix d'exercice K_2 ;
- où $K_1 < K_2 < K_3$;
- L'écart papillon est symétrique avec $K_2 - K_1 = K_3 - K_2$.

$$\text{BFS} = Put(K_1, T) + Call(K_3, T) - Put(K_2, T) - Call(K_2, T)$$

Notes

- Il existe plusieurs façons de recréer un écart papillon ;
- Par exemple, un écart haussier aux prix d'exercice K_1 et K_2 combiné avec un écart baissier aux prix d'exercice K_2 et K_3 :
  $$\text{BFS} = Call(K_1, T) - 2Call(K_2, T) + Call(K_3, T)$$



Écart papillon asymétrique

- La distinction avec un écart papillon symétrique est qu'on achète/vend en différentes proportions des options d'achat ;
- A-BFS $= mCall(K_1, T) - (m+n)Call(K_2, T) + nCall(K_3, T)$;
- L'écart est asymétrique avec $m(K_2 - K_1) = n(K_3 - K_2)$.

Puisque la différence en prix n'est pas symétrique, on fait une "interpolation" de sorte.

Pour calcule le nombre d'options à acheter/vendre aux différents prix :

1. On calcule la différence en prix total $K_3 - K_1$;
2. On calcule séparément les différences de prix :
   $K_2 - K_1$
   $K_3 - K_2$

   Intuition La somme de ces deux différences résulte en l'écart total.
   $(K_2 - K_1) + (K_3 - K_2) = (K_3 - K_1)$
3. On :
   - vends $K_3 - K_1$ options au prix d'exercice K_2 ;
   - achète $K_2 - K_1$ options au prix K_3 ;
   - achète $K_3 - K_2$ options au prix K_1.
4. Avec des options d'achat, on obtient :
   $$+(K_3 - K_2)C(K_1) - (K_3 - K_1)C(K_2) + (K_2 - K_1)C(K_3)$$
   Intuition On peut donc pondérer par la différence totale et obtenir une "interpolation" :
   $$+\frac{(K_3 - K_2)}{(K_3 - K_1)}C(K_1) - C(K_2) + \frac{(K_2 - K_1)}{(K_3 - K_1)}C(K_3)$$

C'est d'ici que provient la notation avec λ :

$$\lambda = \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}$$

Pour chaque option avec un prix d'exercice de K_2 vendue, on achète λK_1 et $(1 - \lambda)K_3$.

5 Contrats à terme

4 façons d'acheter une action

Il y a plusieurs façons d'acheter une action et le prix va dépendre du **moment de paiement** et du **moment de la livraison**.

Contrat	Moment de paiement	Moment de la livraison	Paiement
Outright purchase	0	0	S_0
Forward contract	T	T	$S_0 e^{(r-\delta)T}$
Prepaid forward contract	0	T	$S_0 e^{-\delta T}$
Fully leveraged purchase	T	0	$S_0 e^{rT}$

Achat pleinement par emprunt « *fully leveraged purchase* » On emprunte de l'argent pour obtenir l'actif immédiatement (à $t = 0$) en différant le paiement (remboursement) au temps T ;

Contrat à terme de gré à gré prépayé « *prepaid forward contract* » On paye immédiatement (à $t = 0$) au prix $F^P_{0,T}$, mais on reçoit quand même l'actif plus tard.

Ce faisant, on s'attend à ce que $F_{0,T} = F^P_{0,T} e^{rT}$.

Notation de prix

$F^P_{0,T}$: est le **prix à terme** d'un contrat à terme de gré à gré **prépayé** ;
$F_{0,T} = F^P_{0,T} e^{rT}$.

La loi du prix unique

Stipule que deux portefeuilles avec les mêmes profits doivent avoir le même prix.
Nous tarifions des contrats à terme de gré à gré *prépayés* et utilisons ces prix pour dériver les prix des contrats à terme de gré à gré.

Tarification d'un contrat à terme de gré à gré prépayé

Sans dividendes, le prix du contrat à terme de gré à gré prépayé est le prix de l'actif sous-jacent aujourd'hui—S_0.
Si une action a des dividendes, elles seront payables au propriétaire de l'action. Puisque l'acheteur du contrat (position longue) va seulement posséder le contrat au temps T, il ne recevra pas de **dividendes**. Cela va donc faire **baisser la valeur de l'action** et le prix à terme du contrat devra le tenir en compte. Également, on présume que le **droit de vote n'a aucune valeur** pour calculer le prix à terme.

Dans le cas de **dividendes discrets**, il suffit de soustraire la valeur actualisée des dividendes : $F^P_{0,T} = S_0 - PV(div)$. Ces dividendes sont supposés d'être réinvestis dans des obligations zéro coupon.
Un modèle de **dividendes payés continûment** suppose un taux de dividendes continûment composé δ. Une part de l'action au temps initial devient $e^{\delta T}$ parts au temps T. Cependant, nous souhaitons avoir seulement une part au temps T et donc achetons $e^{-\delta T}$ parts au début. Le prix du contrat est donc $F^P_{0,T} = S_0 e^{-\delta T}$.
Dans le cas de dividendes **proportionnels**, on suppose qu'ils sont réinvestis dans le sous-jacent.

En bref :

Dividendes	Prix à terme prépayé	Prix à terme
Sans dividendes	S_0	$S_0 e^{rT}$
Dividendes payés continument	$S_0 e^{-\delta T}$	$S_0 e^{(r-\delta)T}$
Dividendes discrets	$S_0 - PV(div.)$	$S_0 e^{rT} - FV(div.)$

Prime à terme « *forward premium* »

Défini comme le ratio du prix à terme au prix courant de l'actif sous-jacent :

$$\text{Prime à terme} = \frac{F_{0,T}}{S_0}$$

La prime à terme annualisée (« *annualized forward premium* ») est $\frac{1}{T} \ln\left(\frac{F_{0,T}}{S_0}\right)$.

Est-ce de l'arbitrage ?

Flux monétaires	Oui	Non
Au temps 0, est-ce que le flux monétaire net est ≥ 0 ?	X	
Est-ce que tous les flux monétaires nets futurs sont ≥ 0 ?	X	
Est-ce qu'au moins un des flux monétaires nets futurs est > 0 ?	X	

Si la réponse à toutes les questions est oui, alors il y a une opportunité d'arbitrage.
Pour identifier les flux monétaires, on utilise l'approche à deux étapes :

1. Écrire, sous forme d'inégalité, ce qui est observé ;

2. Déplacer tout ce qui est sur le côté inférieur ($<$) au côté supérieur ou égal ($\geq$) ; Nous avons les signes appropriés pour les transactions.

Position synthétique

Une position synthétique réplique la valeur à l'échéance d'une autre position.

Achat d'action synthétique

On peut synthétiquement répliquer l'achat d'une action en prêtant de l'argent et achetant un contrat à terme de gré à gré.

Transaction	$t=0$	$t=T$
Prêt de $S_0 e^{-\delta T}$	$-S_0 e^{-\delta T}$	$+S_0 e^{(r-\delta)T} = F_{0,T}$
Achat d'un contrat à terme de gré à gré	0	$S_T - F_{0,T}$
Net	$-S_0 e^{-\delta T}$	S_T

Obligation zéro-coupon synthétique

On peut créer une obligation zéro-coupon synthétique en achetant une action et vendant un contrat à terme de gré à gré.

Transaction	$t=0$	$t=T$
Achat de $e^{-\delta T}$ actions	$-S_0 e^{-\delta T}$	$+S_T$
Vente d'un contrat à terme de gré à gré	0	$F_{0,T} - S_T$
Net	0	$F_{0,T} = S_0 e^{(r-\delta)T}$

Le rendement de cette stratégie s'appelle le **taux de mise en pension implicite** (« *implied repo rate* »). Cela signifie le taux implicite dans cette stratégie pour répliquer un rendement équivalent à une obligation zéro-coupon.

Contrat à terme synthétique « *synthetic forward* »

Un contrat à terme synthétique réplique la valeur à l'échéance d'un contrat à terme sans réellement en signer un.
Avec un **vrai** contrat à terme :

- le coût initial est nul et
- la valeur à l'échéance est l'écart entre le prix à terme et la valeur du sous-jacent ($S_T - F_{0,T}$).

Avec un contrat à terme **synthétique** :

- on prévoit l'échange du bien contre un prix quelconque K et
- la valeur à l'échéance est leur écart ($S_T - K$).
- Il s'ensuit que le coût initial ne peut être nul et
- c'est pourquoi on **emprunte de l'argent**, ou de façon équivalente, **vend une obligation zéro-coupons**.

En bref, on **achète l'actif** et **emprunte de l'argent** :

Transaction	Flux au temps 0	Flux au temps T
Acheter un actif	$-S_0$	$+S_t$
Emprunter de l'argent	$+S_0$	$-S_0 e^{rT} = -F_{0,T}$
Net des flux monétaires	0	$S_t - F_{0,T}$

Le montant du prêt n'a pas besoin d'être S_0 puisque le contrat est synthétique. Ce faisant, si le montant emprunté d'un contrat est de S_0 on qu'il est au cours du marché.

Comptant terme « *Cash-and-carry* »

Dans un comptant terme, alias l'achat au comptant - vente à terme, achète une action avec un emprunt et vend un contrat à terme de gré à gré.

La stratégie s'apparente à une obligation zéro coupon financé par une obligation zéro coupon. Il s'ensuit que, sans arbitrage, le profit sera nul.

Transaction	$t=0$	$t=T$
Achat de $e^{-\delta T}$ actions	$-S_0 e^{-\delta T}$	$+S_T$
Vente d'un contrat à terme de gré à gré	0	$F_{0,T} - S_T$
Emprunt de $S_0 e^{-\delta T}$	$+S_0 e^{-\delta T}$	$-S_0 e^{(r-\delta)T}$
Net	0	$F_{0,T} - S_0 e^{(r-\delta)T}$

Sans arbitrage, la dernière ligne s'annule.

L'inverse arrive lorsque le marché offre un contrat à terme de gré à gré sous-évalué.

Contrats de change

Notation de devises

DD Devise domestique (ou de *départ*) ;

› Un actif peut avoir un prix défini dans n'importe quelle devise ; on dit qu'il est « ***denominated*** » dans cette devise ;

› Par exemple, si $DD = \$$ on dit que l'option est « ***dollar-denominated*** ».

DÉ Devise étrangère.

r_D « *continuously compounded domestic-denominated interest rate* ».

$r_{\text{É}}$ « *continuously compounded foreign-denominated interest rate* ».

$F^P_{0,T}$: prix d'un contrat de change à terme prépayé en DD.

$$F^P_{0,T} = x_0 e^{-r_{\text{É}} T} \text{ DD}$$

$F_{0,T}$: prix d'un contrat de change à terme en DD.

$$F_{0,T} = x_0 e^{-r_{\text{É}} T} e^{r_D T} \text{ DD}$$

x_T taux de change au temps T en DD/DÉ.

› Par exemple, $x_0 = \frac{2\$}{1€} = \left(2\frac{\$}{€}\right) \equiv \frac{2\text{DD}}{1\text{DÉ}}$

La logique des formules des contrats à terme de gré à gré est :

$$F^P_{0,T}(1\text{DÉ}) = \left(1\text{DÉ} \cdot e^{-r_{\text{É}} T}\right) \cdot \left(x_0 \frac{\text{DD}}{\text{DÉ}}\right) = x_0 \cdot e^{-r_{\text{É}} T} \text{ DD}$$

Contrat de change synthétique

1. Emprunt de $x_0 e^{-r_{\text{É}} T}$ DD au taux r_D.
2. Convertir les DD en DÉ.
3. Dépôt de $e^{-r_{\text{É}} T}$ DÉ (au taux $r_{\text{É}}$) de 0 à T.

La valeur à l'échéance sera $x_T - x_0 e^{-r_{\text{É}} T} e^{r_D T}$.

Contrat à terme standardisé

Les contrats à terme standardisés sont transigés à la bourse. Ces transactions peuvent avoir lieu soit sur le plancher ou électroniquement.

Contrat à terme standardisé « *future contract* »

Différences des contrats à terme standardisés aux contrats à terme de gré à gré :

1. **Personnalisable** ;
   - › Les contrats « *forwards* » peuvent être **faits de gré à gré** sur n'importe quel actif avec n'importe quelle clause et/ou condition ;
     L'acheteur et le vendeur peuvent choisir n'importe quel prix, montant, date d'échéance ou actif sous-jacent ;
   - › Les contrats « *futures* » sont **surveillés et contrôlés** par des instances officielles au même titre que la bourse ;
     On dit donc qu'ils sont **standardisés**.
2. **Valorisation au prix du marché** « *Marked-to-Market* » ;
   - › Pour un « *forward* », toutes les échanges d'argent se produisent à l'échéance (le contrat est réglé à l'échéance) ;
   - › Pour un « *future* », les pertes et profits sont réglés tous les jours (processus de valorisation au prix du marché) en espèces.
3. **Risque de défaut** ;
   - › Pour un « *forward* », le contrat est pleinement exposé au risque de défaut ;
   - › Pour un « *future* », avec le règlement quotidien des pertes et profits, le risque de défaut est minimisé.
4. **Liquidité** : fait référence à l'aise d'acheter ou de vendre un actif ou, de façon équivalente, de sortir ou entrer de leur position ;
   - › Pour un « *forward* », il est impossible de sortir d'un contrat et donc ils ne sont pas liquides ;
   - › Pour un « *future* », puisqu'ils sont transigés sur les marchés boursiers, ils sont liquides.
5. **Limite de prix** ;
   - › Pour un « *forward* », il n'y a aucune limite de prix sur l'actif sous-jacent et il peut varier sans limites ;
   - › Pour un « *future* », il y a des limites incluses dans le contrat sur la variation du prix du sous-jacent ;

› Par exemple, s'il y a une baisse de 13% au S & P 500, il y a un « *circuit breaker* » qui arrête temporairement l'échange.

Puisque le règlement des contrats à terme standardisé est quotidien alors que le règlement des contrats à terme de gré à gré s'effectue à l'échéance, le prix à terme est différent.

Marges initiales et de maintien « *initial and maintenance margins* »

Compte Afin de contrer le risque de défaut, l'acheteur et le vendeur doivent déposer de l'argent dans un compte (« a *margin account* ») accumulant de l'intérêt ;

Marge initiale Le dépôt initial est nommé la marge initiale (« *inital margin* ») ;

Marge de maintien Les pertes et profits sont soustraits du compte et donc un niveau minimal est requis—la marge de maintien (« *maintenance margin* ») ;

Appel de marge Si le montant dans le compte descend en dessous de la marge de maintien, nous recevons un appel de marge (« *margin call* ») qu'il faut y ajouter des fonds pour ramener la balance à la **marge initiale**.

Exemple de contrat à terme standardisé (« *futures contract* »)

On suppose l'achat d'une action se transigeant au prix de 950$ aujourd'hui (S_0) ayant 250 parts sous-jacentes. La force d'intérêt (δ) est de 6%, la marge initiale égale à 80% de la valeur notionnelle et la marge de maintien 10% de la marge initiale.

Au début, on doit établir la marge et sa balance initiale.

1 Premièrement, on trouve la **valeur notionnelle** :

$$\underbrace{250}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{sous-jacent}}} \times \underbrace{10}_{\text{nombre acheté}} \times \underbrace{950\$}_{\text{prix inital}} = 2\,375\,000\$$$

2 Puis, la **marge initiale** est 10% de la valeur notionnelle :

$$\underbrace{2\,375\,000\$}_{\text{valeur notionnelle}} \times \underbrace{0.10}_{\substack{\text{taux de}\\ \text{marge initale}}} = 237\,500\$$$

3 Finalement, la **marge de maintien** est 80% de la marge initiale :

$$\underbrace{237\,500\$}_{\text{marge initiale}} \times 0.80 = 190\,000\$$$

Si nous désirons rebalancer le portefeuille dans une semaine avec $F_{1/52,T} = 930\$$:

1 On accumule la **balance de la marge** :

$$\underbrace{237\,500\$}_{\text{balance de la marge}} \times \underbrace{e^{0.06(1/52)}}_{\substack{\text{intérêt accumulé sur}\\ \text{une semaine}}} = 237\,774.1966\$$$

2 Puis, on calcule le **profit** (ou la perte) :

$$\underbrace{250}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{sous-jacent}}} \times \underbrace{10}_{\text{nombre acheté}} \times \underbrace{(930-950)}_{\substack{\text{profit par action}\\ \text{dans une semaine}}} = -50\,000\$$$

› **Note** : Si on vendait les actions au lieu de les acheter, le profit est $950 - 930$.

En combinant la valeur accumulé de balance de la marge et le profit sur l'action, la **balance de la marge** dans une semaine est : $(237\,774.20\$) + (-50\,000\$) = 187\,774.1966\$$.

Cependant, la balance est inférieure à la marge de maintien de 190 000$! Il y aura donc un **appel de marge** afin de remonter la balance de la marge à **la marge initiale** de 237 500$.

Donc, l'investisseur débourse $237\,500\$ - 187\,774.1966\$ = 49\,725.8034\$$ pour remonter la balance de la marge à 237 500$.

Le profit de l'investisseur à la fin est $237\,500\$ - 49\,725.8034\$ - 237\,500\$e^{0.06(1/52)}$.

Note Le S & P 500 a 250 parts sous-jacentes.

9 Parité et autres liens entre les options

Équation de parité des options vente-achat

$$C_{\text{Eur}}(K,T) - P_{\text{Eur}}(K,T) = F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT}$$

- Puisque les options américaines peuvent être exercées à n'importe quel moment, cette équation est seulement valide pour les options européennes ;
- En anglais c'est le « ***Put-Call Parity Equation*** ».

Positions synthétiques

Avec l'équation de parité, on peut créer des options, actions ou obligations zéro-coupon **synthétiques**.

Option d'achat

$$-C(S,K) = \underbrace{-P(S,K)}_{\substack{\text{achat d'une option}\\ \text{de vente équivalente}}} \quad \underbrace{-F^P_{0,T}(S)}_{\substack{\text{achat d'une part}\\ \text{de l'action}}} \quad \underbrace{+Ke^{-rT}}_{\substack{\text{emprunt de } Ke^{-rT}\\ \text{au taux sans risque}}}$$

Option de vente

$$-P(S,K) = \underbrace{-C(S,K)}_{\substack{\text{achat d'une option}\\ \text{d'achat équivalente}}} \quad \underbrace{+F^P_{0,T}(S)}_{\substack{\text{vente d'une part}\\ \text{de l'action}}} \quad \underbrace{-Ke^{-rT}}_{\substack{\text{prêt de } Ke^{-rT}\\ \text{au taux sans risque}}}$$

Action

$$-S_0 = \underbrace{+e^{\delta T}P(S.K)}_{\substack{\text{vente de } e^{\delta T}\\ \text{options de vente}}} \quad \underbrace{-e^{\delta T}C(S,K)}_{\substack{\text{achat de } e^{\delta T}\\ \text{options d'achat}}} \quad \underbrace{-Ke^{-(r-\delta)T}}_{\substack{\text{prêt de } Ke^{-(r-\delta)T}\\ \text{au taux sans risque}}}$$

Bon du Trésor (« *Treasury Bill (T-Bill)* »)

$$-Ke^{-rT} = \underbrace{+C(S;K)}_{\substack{\text{vente d'une}\\ \text{option d'achat}}} \quad \underbrace{-P(S;K)}_{\substack{\text{achat d'une}\\ \text{option de vente}}} \quad \underbrace{-S_0e^{-\delta T}}_{\substack{\text{achat de } e^{-\delta T}\\ \text{parts de l'action}}}$$

Parité des options

Parité des options sur devises

Notation

$C(x_0,K,T)$ Option d'achat qui permet d'acheter une unité de DÉ pour K unités de DD à l'échéance T.

$P(x_0,K,T)$ Option de vente qui permet d'acheter une unité de DÉ pour K unités de DD à l'échéance T.

$$C(x_0,K,T) - P(x_0,K,T) = x_0(1+i_{\text{É}})^{-T} - K(1+i_D)^{-T}$$

Si le prix d'exercice est dans la même devise que le prix de l'option, on peut écrire :

$$C^{DD}(x_0,K,T) = K \cdot P^{DD}\left(\frac{1}{x_0};\frac{1}{K};T\right) = x_0K \cdot P^{\text{DÉ}}\left(\frac{1}{x_0};\frac{1}{K};T\right)$$

Parité des options sur obligation

Notation

B_0 Prix aujourd'hui ($t=0$) d'une obligation avec coupons.

$F^P_{0,T}(B)$ Prix d'un contrat à terme standardisé prépayé sur une obligation avec coupons.

$F^P_{0,T}(B) = B_t - PV(\text{coupons})$

Alors, on peut réécrire l'équation de parité :

$$C(B_0,K,T) - P(B_0,K,T) = F^P_{0,T}(B) - F^P_{0,T}(K)$$

Parité généralisée et option d'échange

On peut généraliser toute option comme étant l'option d'échanger des actifs—l'*actif sous-jacent* et l'*actif d'exercice*—que l'on nomme des **options d'échange**. Voir la sous-section **Options d'échange** du chapitre 14 sur les options exotiques pour plus de détails.

Les options d'achat et de vente sont donc des options d'échange avec de l'argent comme actif d'exercice. On généralise d'abord la notation au-delà du concept d'achat et de vente pour un certain prix :

Notation

$C(S,K)$: Permet au détenteur de l'option d'achat de recevoir S en échange de K.

$P(S,K)$: Permet au détenteur de l'option de vente de recevoir K en échange de S.

On peut penser à cette notation comme $C(\text{Receive}, \text{Give up})$ et $P(\text{Receive}, \text{Give up})$. Dans les deux cas, la valeur à l'échéance est $\max(0; \text{Receive} - \text{Give up})$.

Notation Claire

S_t : Prix à t de l'actif sous-jacent—le titre A.

Q_t : Prix à t du prix d'exercice—le titre B.

$C_{\textbf{euro}}(S_t, Q_t, T-t)$: Permet, à T, d'achat le titre A au prix du titre B.

$P_{\textbf{euro}}(S_t, Q_t, T-t)$: Permet, à T, de vendre le titre A au prix du titre B.

Équation de parité des options d'échange

$$C_{\text{euro}}(S_t, Q_t, T-t) - P_{\text{euro}}(S_t, Q_t, T-t) = F^P_{t,T}(S) - F^P_{t,T}(Q)$$

Comparaison de différentes options

Considérations différents types d'options

La première considération est que la valeur à l'échéance d'une option ne sera jamais négative puisqu'un investisseur « rationnel » n'exercerait simplement pas l'option. L'émetteur de l'option va donc toujours demander une **prime positive** pour accepter ce risque de perte.

Donc les options américaines et européennes vont toujours avoir une **valeur d'au moins** 0$:

$$C(S,K,T) \geq 0 \qquad P(S,K,T) \geq 0$$

Bornes inférieures

Option européenne

$$\begin{aligned} C_{\text{euro}}(S,K,T) &= F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT} + P_{\text{euro}}(S,K,T) \\ &\geq \max\{F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT}; 0\} \\ P_{\text{euro}}(S,K,T) &= Ke^{-rT} - F^P_{0,T}(S) + C_{\text{euro}}(S,K,T) \\ &\geq \max\{Ke^{-rT} - F^P_{0,T}(S); 0\} \end{aligned}$$

Option américaine L'avantage des options américaines aux options européennes est leur flexibilité additionnelle.

Il s'ensuit que la valeur d'une option américaine est d'**au moins la valeur d'une option européenne équivalente** :

$$C_{\text{amer}}(S,K,T) \geq C_{\text{euro}}(S,K,T) \qquad P_{\text{amer}}(S,K,T) \geq P_{\text{euro}}(S,K,T)$$

Également, la flexibilité des options américaines permettent un **exercice immédiat**. Il s'ensuit que leurs valeur est d'**au moins la valeur d'un exercice immédiat** :

$$C_{\text{amer}}(S,K,T) \geq S - K \qquad P_{\text{amer}}(S,K,T) \geq K - S$$

Bornes supérieures

Option européenne

Option d'achat

$$\begin{aligned} \text{Payoff}(C_{\text{euro}}(S,K,T)) &= \max\{S_T - K; 0\} \\ &\leq \max\{S_T - 0; 0\} \\ &= S_T = \text{Payoff}(F^P_{0,T}(S)) \end{aligned}$$

Donc, $C_{\text{euro}}(S,K,T) \leq F^P_{0,T}(S)$.

Option de vente

$$\begin{aligned}\text{Payoff}(P_{\text{euro}}(S,K,T)\} &= \max(K - S_T; 0\}\\ &\leq \max(K-0;0\}\\ &= K = \text{Payoff de l'emprunt de } Ke^{-rT}\end{aligned}$$

Donc, $P_{\text{euro}}(S,K,T) \leq Ke^{-rT}$.

Option américaine

Option d'achat À son exercice, l'option permet d'obtenir l'actif sous-jacent. Si cette option coûtait plus que le prix du sous-jacent, on a simplement à l'acheter au lieu d'une option.

Ce faisant, la borne supérieure d'une option d'achat américaine est le prix au comptant (« *spot price* ») :

$$S \geq C_{\text{amer}}(S,K,T) \geq C_{\text{euro}}(S,K,T) \geq \max\left(F^P_{0,T}(S) - Ke^{-rT}; 0\right)$$

Option de vente La valeur à l'échéance maximale d'une option de vente est le prix d'exercice K ; lorsque la valeur de l'action est nulle on a $\max(K-0;0) = K$. Si le prix était supérieur à K, le vendeur n'aurait qu'à vendre son action directement sur le marché.

Ce faisant, la borne supérieure d'une option de vente américaine est le prix d'exercice :

$$K \geq P_{\text{amer}}(S,K,T) \geq P_{\text{euro}}(S,K,T) \geq \max\left(Ke^{-rT} - F^P_{0,T}(S); 0\right)$$

Exercice hâtif des options américaines

Notions d'intérêt et d'escompte

La valeur actualisée de l'intérêt accumulé sur le prix d'exercice K est $PV(\text{intérêt sur le prix d'exercice}) = K(1 - e^{-rT})$.

La valeur actualisée des dividendes correspond à l'écart entre le prix de l'action aujourd'hui S_0 et le prix à terme prépayé $F^P_{0,T}$; $PV_{0,T}(\text{divs}) = S_0 - F^P_{0,T}(S)$.

Dans le cas continu, $PV(\text{dividendes}) = S_0(1 - e^{-\delta T})$ et le cas discret $PV(\text{dividendes}) = \sum_{i=1}^{n} \text{div}_i e^{-rt_i}$.

Options d'achat américaines

L'avantage d'exercer l'option d'achat immédiatement est la **réception des dividendes**.

Cependant, l'avantage de repousser l'exercice est **l'intérêt accumulé sur le prix d'exercice** K et la protection, ou *assurance*, **contre le risque d'une baisse du prix de l'action**. Une protection contre ce risque de baisse correspond donc à une **option de vente**.

Il est donc important de retenir :

1. Il est rationnel d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{dividendes}) > PV(\text{intérêt sur } K) - PV(\text{assurance})$;
   $PV(\text{assurance})$ sera donc égal au coût de l'option de vente implicite.
2. Il n'est **jamais rationnel** d'effectuer un **exercice hâtif** sur une option d'achat américaine **sans dividendes** ;
   Il s'ensuit qu'avec $\delta = 0$, $C_{\text{amer}} = C_{\text{euro}}$.
3. Il est ***possiblement*** **rationnel** d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{dividendes}) > PV(\text{intérêt sur } K)$.

Options de vente américaines

L'avantage d'exercer l'option d'achat immédiatement est la réception de prix d'exercice K et **l'intérêt qu'on peut accumuler avec**.

Cependant, l'avantage de repousser l'exercice est de **continuer à recevoir des dividendes**. Également, la protection contre le risque de **ne *pas* vendre l'action à un**

prix plus élevé. Une protection contre ce risque d'une hausse de prix correspond donc à une **option d'achat**.

Il est donc important de retenir :

1. Il est rationnel d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{intérêt sur } K) > PV(\text{dividendes}) + PV(\text{assurance})$;
   $PV(\text{assurance})$ sera donc égal au coût de l'option d'achat équivalente.
2. Il est ***possiblement*** **rationnel** d'effectuer un exercice hâtif si $PV(\text{intérêt sur } K) > PV(\text{dividendes})$;
3. Il s'ensuit qu'il est ***possiblement*** **rationnel** d'effectuer un **exercice hâtif** sur une **option de vente** américaine **sans dividendes**.

Effet du prix d'exercice

Effet du prix d'exercice pour des options d'achat

Pour $K_1 < K_2 < K_3$:

1. $\uparrow K \Rightarrow \downarrow$valeur à l'échéance et $\downarrow C(K)$:
   $$C(K_1) \geq C(K_2) \geq C(K_3)$$
2. $$C_{\text{amer}}(K_1) - C_{\text{amer}}(K_2) \leq K_2 - K_1$$
   $$C_{\text{euro}}(K_1) - C_{\text{euro}}(K_2) \leq (K_2 - K_1)\mathrm{e}^{-rT}$$
3. Le prix d'une option d'achat décroît plus lentement lorsque le prix d'exercice augmente :
   $$\frac{C(K_1) - C(K_2)}{K_2 - K_1} \geq \frac{C(K_2) - C(K_3)}{K_3 - K_2}$$

Effet du prix d'exercice pour des options de vente

Pour $K_1 < K_2 < K_3$:

1. $\uparrow K \Rightarrow \uparrow$valeur à l'échéance et $\uparrow P(K)$:
   $$P(K_1) \leq P(K_2) \leq P(K_3)$$
2. $$P_{\text{amer}}(K_2) - P_{\text{amer}}(K_1) \leq K_2 - K_1$$
   $$P_{\text{euro}}(K_2) - P_{\text{euro}}(K_1) \leq (K_2 - K_1)\mathrm{e}^{-rT}$$
3. Le prix d'une option de vente croît plus rapidement lorsque le prix d'exercice augmente :
   $$\frac{P(K_2) - P(K_1)}{K_2 - K_1} \leq \frac{P(K_3) - P(K_2)}{K_3 - K_2}$$

Note Si la différence entre les deux prix d'option serait supérieure à la différence entre les deux prix d'exercice, il y aurait arbitrage. Il serait possible d'avoir aucun risque de perte.

› Comme visualisation, voir le graphique de la valeur à l'échéance d'un écart-baissier ;

› Si le profit est strictement positif, la ligne pointillée rouge est uniquement au-dessus de l'axe des x.

Effet du temps avant expiration

Pour $T_1 < T_2$:

$$C_{\text{amer}}(S, K, T_1) \leq C_{\text{amer}}(S, K, T_2)$$
$$P_{\text{amer}}(S, K, T_1) \leq P_{\text{amer}}(S, K, T_2)$$

Pour $T_1 < T_2$ et une action **sans dividendes** ($\delta = 0$) :

$$C_{\text{euro}}(S, K, T_1) \leq C_{\text{euro}}(S, K, T_2)$$
$$P_{\text{euro}}(S, K, T_1) \leq P_{\text{euro}}(S, K, T_2)$$

sauf si :

1. une action va payer un **boni de liquidation**.
   - C'est-à-dire que l'entreprise vend tous ses actifs et ferme ses portes.
   - Donc, une action ayant une échéance plus élevée pourrait n'avoir aucune valeur à l'échéance.
2. une entreprise fait faillite.
   - Donc, la valeur à l'échéance d'une option de vente sera le prix d'exercice.
   - Alors, le moins qu'il faut actualiser K, le plus élevé il sera.

10 Introduction au modèle binomial d'évaluation des options

Modèle binomial d'évaluation des options le prix de l'actif sous-jacent au début d'une période devient un de deux prix possibles à la fin de la période.

› En anglais, « *Binomial Option Pricing Model* ».

Notation de prix

u facteur de hausse « *"up" factor* » ;

d facteur de baisse « *"down" factor* » ;

S_u prix de l'action s'il y a une hausse ;
$S_u = S_0 u$

S_d prix de l'action s'il y a une baisse ;
$S_d = S_0 d$

h durée de chaque période ;

Δ nombre de parts d'actions à acheter ;

B montant à prêter au taux sans risque ;

V_u valeur à la node supérieure « *value at upper node* » ;

V_d valeur à la node inférieur « *value at lower node* » ;

V_0 valeur du portefeuille au temps 0.

› Alias, **le prix**.

Il y a deux façons de calculer le prix :

1. Le portefeuille réplicatif.
2. L'évaluation neutre au risque.

Dans les deux cas, **le prix obtenu est identique**.

Portefeuille réplicatif « *Replicating Portfolio* »

Créer un portefeuille réplicatif

1. Acheter $\Delta = \mathrm{e}^{-\delta h}\left(\frac{V_u - V_d}{S_0(u-d)}\right)$ parts de l'action.
2. Prêter $B = \mathrm{e}^{-rh}\left[V_d\left(\frac{u}{u-d}\right) - V_u\left(\frac{d}{u-d}\right)\right]$ au taux sans risque.

La coût du portefeuille réplicatif est donc $V_0 = \Delta S_0 + B$.

› Dans le contexte d'options, ce coût représente le prix $C(K)$ / $P(K)$.

Pour répliquer des options, on obtient les signes suivants pour Δ et B :

	option	
	d'achat	de vente
Δ	$+$	$-$
B	$-$	$+$

Les actions correspondantes à ces signes sont :

	$+$	$-$
Δ	achète	vend
B	prête	emprunte

On obtient les relations suivantes :

$$\Delta_C - \Delta_P = \mathrm{e}^{-\delta T}$$

$$B_C - B_P = K\mathrm{e}^{-rT}$$

Évaluation neutre au risque

L'évaluation neutre au risque présume que le rendement espéré est égale au taux sans risque r_f.

Contexte

L'évaluation neutre au risque technique pondère les possibilités de valeur à l'échéance des options avec des probabilités neutre au risque, puis elle actualise au taux sans risque.

En raison de la simplicité des calculs, les options sont souvent tarifiées avec l'évaluation neutre au risque.

Notation

p^* la probabilité, neutre au risque, d'une hausse de l'actif.

$$p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d}$$

Le prix est donc $V_0 = e^{-rh}\left[p^* V_u + (1-p^*)V_d\right]$.

On déduit que $0 < p^* < 1$ ce qui implique que $d < e^{(r-\delta)h} < u$. Sinon, il y a arbitrage.

Construction d'un arbre binomial

Méthode générale Arbitrairement sélectionner des valeurs de u et d pour l'arbre binomial crée ;

Arbre binomial standard Sélectionner des valeurs de u et d selon des prix à terme résultant en un arbre binomial standard.

Arbre binomial standard

L'intuition est de multiplier le prix à terme de l'action par un facteur variant selon la volatilité.

Notation

σ la volatilité annuelle du rendement de l'action composée continûment ;

L'écart type de la volatilité sur une période de durée h est donc $\sigma\sqrt{h}$.

Le prix à terme est donc multiplié par $e^{\sigma\sqrt{h}}$ pour le prix avec une hausse $S_u = F_{t,t+h}e^{\sigma\sqrt{h}}$ et $e^{-\sigma\sqrt{h}}$ pour le prix $S_d = F_{t,t+h}e^{-\sigma\sqrt{h}}$ avec une baisse.

On isole :

$$u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} \qquad d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}}$$

Également, pour ce cas spécial, p^* se simplifie à $p^* = \frac{1}{1+e^{\sigma\sqrt{h}}}$

Arbres binomiaux à plusieurs périodes

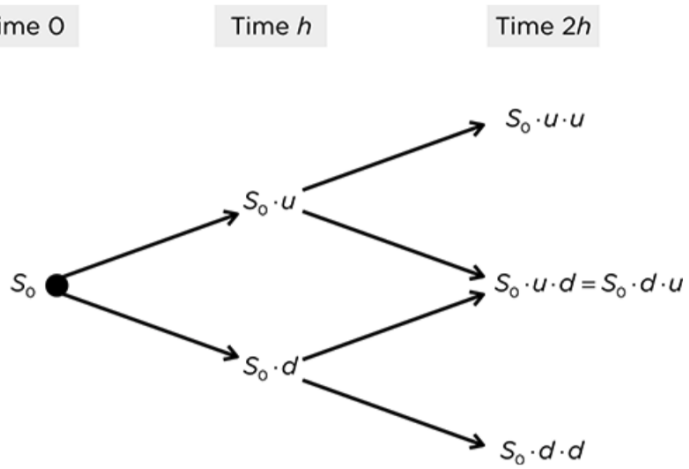
Notation

n nombre de périodes ;

h durée de chacune des périodes ;

$$h = \frac{T}{n}$$

La généralisation des méthodes précédente pour les arbres binomiaux à plusieurs périodes se résume à multiplier les facteurs u et d.
Par example :



Lorsque les facteurs u et d sont fixes, l'arbre se recombine et $S_0 \cdot u \cdot d = S_0 \cdot d \cdot u$.

Évaluation neutre au risque

Il y a 2 approches :

Nœud par nœud On calcule la valeur de l'option à chaque nœud récursivement avec l'évaluation neutre au risque jusqu'à arriver au prix ;

Approche directe Pour les **options européennes** dont l'**exercice hâtif n'est pas possible**.

Approche directe

1. Calculer la valeur à l'échéance ;
2. La pondérer par la probabilité neutre au risque de l'atteindre ;
3. L'actualiser au taux sans risque.

- La probabilité d'atteindre un nœud terminal est calculée avec une distribution binomiale ;
- Pour n périodes, k est le nombre de hausses u pour atteindre le nœud ;
- La probabilité est :

$$\Pr(\text{atteindre un nœud ayant } k \text{ hausses}) = \binom{n}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{n-k}$$

pour $k = 0, 1, \ldots, n$.

Pour un nœud u

$$V_u = \mathrm{e}^{-rh} \left[p^* V_{uu} + (1-p^*) V_{ud} \right]$$

Portefeuille réplicatif

Δ et B ne restent pas constants et donc il faut prendre l'approche nœud par nœud. Ce faisant, il est ***beaucoup*** plus compliqué et long de trouver le prix avec cette approche.

Pour un nœud u

$$\Delta_u = \mathrm{e}^{-\delta h} \left(\frac{V_{uu} - V_{ud}}{S_u (u-d)} \right)$$

$$B_u = \mathrm{e}^{-rh} \left[V_{ud} \left(\frac{u}{u-d} \right) - V_{uu} \left(\frac{d}{u-d} \right) \right]$$

$$V_u = \Delta_u S_u + B_u$$

Tarification d'options américaines

La distinction avec les options américaines est la possibilité d'un exercice hâtif.

Valeur espérée actualisée (VEA) valeur (« *payoff* ») pour un maintien de l'option ;

› « *Pull-back value* » car on se retire (« *pull-back* ») d'exercer l'option immédiatement.

Valeur si levée (VSL) valeur (« *payoff* ») pour un exercice hâtif.

› « *Immediate exercice value* ».

Pour un nœud u

$$VSL = \begin{cases} \max(0, S_u - K), & \text{option d'achat} \\ \max(0, K - S_u), & \text{option de vente} \end{cases}$$
$$VEA = e^{-rh}\left[p^* V_{uu} + (1-p^*)V_{ud}\right]$$
$$V_u = \max(VEA, VSL)$$

Processus de tarification

1. À partir du nœud le plus à droite de l'arbre décider à chaque nœud de l'arbre si l'exercice hâtif est optimal ;
   - › Si $VSL > VEA$ alors il y a un exercice hâtif sinon on maintient l'option au moins une période de plus ;
   - › Donc valeur au nœud $= \max\left(\begin{smallmatrix}\text{valeur pour un}\\ \text{maintien de l'option}\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}\text{valeur pour un}\\ \text{exercice immédiat}\end{smallmatrix}\right)$.
2. Répéter jusqu'au nœud initial.

Tarification d'options sur un contrat à terme standardisé

Pas sur l'examen partiel hiver 2020.

Notation

T_F temps d'expiration du contrat à terme standardisé ;

T temps d'expiration d'une option ;
$T \leq T_F$

F_{t,T_F} Prix à terme au temps t pour un contrat à terme standardisé expirant au temps T_F.
$F_{t,T_F} = S_t e^{(r-\delta)(T_F - t)}$

u_F **et** d_F Facteurs de hausse et de baisse pour un arbre de contrats à terme standardisés ;
$u_F = u e^{-(r-\delta)h} = e^{\sigma\sqrt{h}}$
$d_F = d e^{-(r-\delta)h} = e^{-\sigma\sqrt{h}}$

L'équation pour un arbre de contrats à terme standardisés suffit de remplacer δ par r en ignorant le vrai δ s'il est donné :

$$p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d} \quad \Rightarrow \quad p^* = \frac{e^{(r-r)h} - d_F}{u_F - d_F} = \frac{1 - d_F}{u_F - d_F}$$
$$u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} \quad \Rightarrow \quad u = e^{(r-r)h+\sigma\sqrt{h}} = e^{\sigma\sqrt{h}}$$
$$d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}} \quad \Rightarrow \quad d = e^{(r-r)h-\sigma\sqrt{h}} = e^{-\sigma\sqrt{h}}$$
$$\Delta = e^{-\delta h}\left(\frac{V_u - V_d}{S(u-d)}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{V_u - V_d}{F(u_F - d_F)}$$
$$B = e^{-rh}\left[V_d \frac{u}{u-d} - V_u \frac{d}{u-d}\right] \quad \Rightarrow \quad B = e^{-rh}[p^* V_u + (1-p^*)V_d]$$
$$V_u = \Delta(Fu_F - F) + Be^{rh} \qquad V_d = \Delta(Fd_F - F) + Be^{rh}$$

Tarification d'options sur devises

Notation

r_{DD} taux (force) d'intérêt sans risque sur le marché domestique ;

$r_{\text{DÉ}}$ taux (force) d'intérêt sans risque sur le marché étranger.

L'équation pour un arbre standard suffit de remplacer les paramètres :

$$p^* = \frac{e^{(r-\delta)h} - d}{u - d} \quad \Rightarrow \quad p^* = \frac{e^{(r_{\text{DD}} - r_{\text{DÉ}})h} - d}{u - d}$$
$$u = e^{(r-\delta)h+\sigma\sqrt{h}} \quad \Rightarrow \quad u = e^{(r_{\text{DD}} - r_{\text{DÉ}})h+\sigma\sqrt{h}}$$
$$d = e^{(r-\delta)h-\sigma\sqrt{h}} \quad \Rightarrow \quad d = e^{(r_{\text{DD}} - r_{\text{DÉ}})h-\sigma\sqrt{h}}$$

Exemple de calcul de prix d'une option sur devise

Nous devons construire un arbre binomial standard pour trouver le prix d'une option d'achat au cours du marché libellée en yen pour un dollar. Nous avons les informations suivantes :

› Chaque période est d'une longueur de 4 mois— $h = \frac{4}{12}$;

- Le taux de change est de 110 yen par dollar— $x_0 = \frac{110¥}{1\$}$;
- La volatilité du taux de change est de 10%— $\sigma = 10\%$;
- Le rendement composé continûment sur le yen est de 1%— $r_¥ = 1\%$;
- Le rendement composé continûment sur le dollar est de 6%— $r_\$ = 6\%$.

1 On défini quelle devise est domestique et étrangère.
- Puisque l'option en **libellée en yen** (« *yen-denominated* »), DD $= ¥$ et DÉ $= \$$.
- Il s'ensuit que $r_D = r_¥ = 1\%$ et que $r_É = r_\$ = 6\%$.

2 On trouve u, d et p^* pour construire l'arbre binomiale.

a) On pose que $r_f = r_D = 1\%$ et $\delta = r_É = 6\%$.

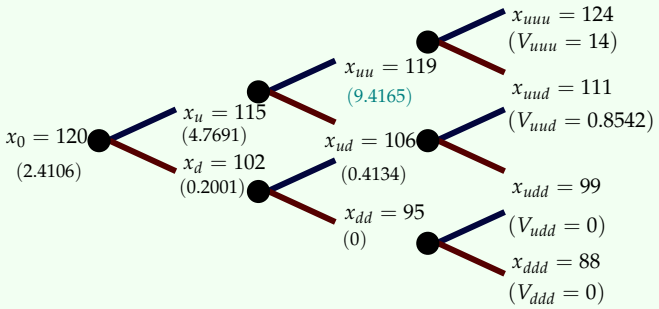
b) On trouve :

$$u = e^{(r_D - r_É)(h) + \sigma\sqrt{h}} = e^{(0.01-0.06)(4/12)+\sigma\sqrt{4/12}} = 1.04192$$

$$d = e^{(r_D - r_É)(h) - \sigma\sqrt{h}} = e^{(0.01-0.06)(4/12)-\sigma\sqrt{4/12}} = 0.92830$$

$$p^* = \frac{e^{(r_D - r_É)(h)} - d}{u - d} = \frac{e^{(0.01-0.06)(4/12)} - 0.92830}{1.04192 - 0.92830} = 0.48557$$

3 On trace l'arbre binomiale :



- Le maximum entre la valeur à l'échéance actualisée et la valeur si levée est entre parenthèses ;
- On observe qu'il est optimal d'exercer l'option d'achat américaine au nœud *uu*.

Rendements composés continûment

- La fonction **logarithmique** calcule des rendements composés continûment à partir des prix.

$$r_{t,t+h} = \log\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right)$$

- La fonction **exponentielle** calcul des prix à partir des rendements composés continûment.

$$S_{t+h} = S_t e^{r_{t,t+h}}$$

- Les rendements composés continûment sont **additifs**.

$$r_{t,t+nh} = \sum_{i=1}^{n} r_{t+(i-1)h,t+ih}$$

Volatilité

Notation

R variable aléatoire de la force du rendement (sous base annuelle) ;

Hypothèse Les rendements composés continûment sur des périodes disjointes, mais de même longueur h, sont i.i.d. ;

$r_{t,t+h}$ le **rendement composé continûment entre** t **et** $t+h$.

$$r_{t,t+h} = \ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right)$$

Note Le chapitre 18 couvre en détail la distribution lognormale du rendement composé continûment.
On suppose n rendements, sur une période de h années, composés continûment $r_{t,t+h}, r_{t+h,t+2h}, \ldots, r_{t+(n-1)h,t+nh}$.

On peut estimer la volatilité historique des rendements avec :

$$s_h = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (r_{t+(i-1)h,t+ih} - \bar{r})^2}{n-1}}, \quad \text{où} \quad \bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_{t+(i-1)h,t+ih}}{n}$$

Donc s_h estime σ_h et $\bar{r}_h$ estime μ_h où :

$$\sigma_h = \sqrt{\text{Var}\left(\ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right)\right)} = \sqrt{\text{Var}(R_{t,t+h})}$$

$$\mu_h = \text{E}[R_{t,t+h}]$$

Pour changer d'une base annuelle avec $h = 1$ à une base quelconque, on divise par la fraction de l'année h qui correspond à la période.

Par exemple, sous base mensuelle $h = \frac{1}{12}$ on a $\sigma = s_{1/12}\sqrt{12}$ ou sous base hebdomadaire $h = \frac{1}{52}$ on a $\sigma = s_{1/52}\sqrt{52}$.

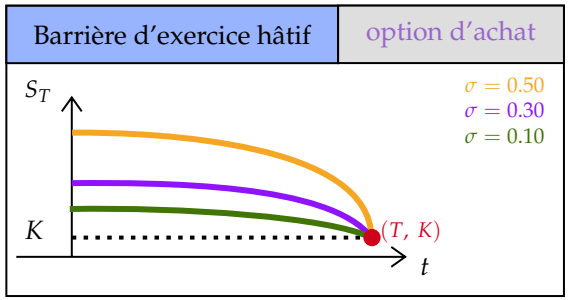
11 Modèle binomial d'évaluation des options : sujets sélectionnés

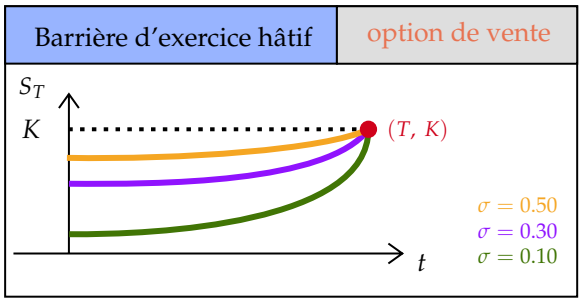
Compréhension de l'exercice hâtif

Avec un exercice hâtif, le détenteur d'une option d'achat :

1. Reçoit l'action et donc les dividendes futurs.
   - › Donc, on souhaite que δ augmente.
2. Paie le prix d'exercice avant expiration et donc subit des coûts d'intérêt.
   - › Donc, on ne souhaite pas que r augmente.
3. Perd l'assurance implicite à l'option.
   - › Donc, on ne souhaite pas que σ augmente.

Le plus la volatilité σ est élevée, le plus élevé (faible) le prix de l'action auquel on va exercer l'option d'achat (de vente) :





Si la valeur de l'assurance est nulle ($\sigma = 0$) et que $T \to \infty$, on lève l'option d'achat si $\delta S_T > rK$; c'est-à-dire, si la valeur des dividendes est supérieure à l'intérêt accumulé sur le prix d'exercice.

Pour une option de vente, c'est l'inverse.

Compréhension de l'évaluation neutre au risque

Notation

- r force d'intérêt sans risque ;
- δ force de dividendes ;
- α force d'intérêt (rendement) sur le sous-jacent ;
- p la vraie probabilité d'une hausse de l'actif sous-jacent ;

$$p = \frac{e^{(\alpha-\delta)h} - d}{u - d}$$

  - on ne peut pas actualiser la valeur espérée de l'option avec α ni avec r ;
  - L'option est risquée ce qui élimine r ;
  - Le niveau de risque de l'option diffère de celui du sous-jacent.
- γ Force d'intérêt auquel on actualise la valeur espérée de l'option.

Le prix est donc $V_0 = e^{-\gamma h}(pV_u + (1-p)V_d)$.

Pour un portefeuille réplicatif, $e^{\gamma h} = \left(\frac{\Delta S}{\Delta S + B}\right) e^{\alpha h} + \left(\frac{B}{\Delta S + B}\right) e^{rh}$

Types de comportement envers le risque

Aversion au risque Souhaite maximiser le rendement espéré $E[R]$ tout en *minimisant* le risque σ_R^2.

Indifférence au risque Souhaite maximiser le rendement espéré $E[R]$ et est *indifférent* au risque σ_R^2.

- › On dit que l'investisseur est ***neutre* au risque**.

Exemple Soit 2 investissements : 1 000$ assuré ou 2 000$ avec une probabilité de 50% et 0$ avec une probabilité de 50%.
Un investisseur avec une *aversion* au risque préfère la première option, car elle est moins risquée.
Un investisseur avec une *indifférence* au risque est indifférent à la première ou la deuxième option, car le rendement espéré des deux options est égal.

Donc une évaluation neutre au risque suppose que les investisseurs sont indifférents au risque *même s'ils ne le sont pas en réalité*.

L'arbre binomial et la lognormalité

Modèle de marche aléatoire

Notation

Y_i Variable aléatoire du i^{e} résultat ;

- Si on lançait une pièce de monnaie, on aurait que $Y = -1$ si la pièce tombe sur pile et $Y = 1$ si elle tombe sur face ;
- Également, $\Pr(Y = 1) = \Pr(Y = -1) = \frac{1}{2}$;
- $\mathrm{E}[Y_n^2] = 1$ et $\mathrm{E}[Y_n] = 0$;

Z_n Total cumulatif après n lancers.

- $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$;
- La magnitude $|Z_n|$ augmente avec n ;
- $\mathrm{E}[Z_n^2] = n$ et $\mathrm{E}[Z_n] = 0$.

Interprétation :

- Dans un marché efficient, le prix devrait refléter toute l'information disponible.
- Ainsi, par définition la nouvelle information est une surprise.
- Le modèle de marche aléatoire pose que cette nouvelle information devrait résulter équiprobablement en une hausse ou une baisse du prix ;
- Après un certain temps, le prix d'une action dépend de l'effet cumulé de toutes les surprises.

Problèmes avec la modélisation du prix de l'action

Plusieurs problèmes nous empêchent d'utiliser une marche aléatoire :

1. Le prix de l'action **peut devenir négatif** s'il y a suffisamment de mouvements vers le bas.
   - Ceci est impossible à cause de la responsabilité limitée des actionnaires *(concept de GRF 1)*.
2. La magnitude d'un mouvement ($|Y_i|$) est fixé à 1 mais devrait dépendre de :
   i) la **longueur** de la période h (alias, la *fréquence* des mouvements), et
   ii) le **prix actuel** S_t de l'action sous-jacent.
   - Il n'est pas réaliste d'avoir le prix d'une action monter ou baisser de 60$ en une journée.
3. Le **rendement** sur l'action devrait, en moyenne, **être positif**.

Le modèle binomial est une variante du modèle de marche aléatoire qui résout ces problèmes ; il suppose que les rendements composés continûment sont une **marche aléatoire avec dérive**.

Modèle binomial

Selon le modèle binomial, $S_{t+h} \in S_t \mathrm{e}^{(r-\delta)h \pm \sigma\sqrt{h}}$.

Le rendement $r_{t,t+h} = \ln\left(\frac{S_{t+h}}{S_t}\right) \in (r-\delta)h \pm \sigma\sqrt{h}$ a donc 2 composantes :

1. Une partie ***certaine*** $(r-\delta)h$,
   - Cette partie constitue *la dérive*.
2. Une partie ***incertaine*** $\pm\sigma\sqrt{h}$.

On peut récrire le modèle binomiale comme :

$$r_{t+(i-1)h,t+ih} = (r-\delta)h + Y_i\sigma\sqrt{h}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$r_{0,nh} = r_{0,T} = (r-\delta)T + Z_n\sigma\sqrt{h}$$

Cette formulation du modèle règle donc les problèmes :

Problèmes

1. Le **prix** de l'action **ne peut pas être négatif**.
2. La magnitude de la variation du prix dépend de la longueur de la période de temps h.
   - Des **mouvements** du prix de l'action **plus fréquents** diminuent h et par conséquence la partie certaine du rendement $(r-\delta)h$.
3. Le nouveau prix dépend du (est *proportionnel* au) prix initial.
4. On peut garantir un **prix positif**.
   - Ceci, car il y a une composante certaine et que l'on choisit la probabilité d'une augmentation du prix.

Lognormalité

L'arbre binomial est une approximation de la distribution lognormale.

- La somme de variables aléatoires binomiales est approximativement normalement distribuée ;
- Lorsque l'on traverse un arbre binomial, on somme implicitement les composantes du rendement ;

› Alors, lorsque le nombre de périodes $n \to \infty$, $r_{t,t+h} \approx \mathcal{N}\big((r-\delta)h, \sigma^2 h\big)$;

› Il s'ensuit que le prix $S_{t+T} = S_{t+nh} \approx \text{LN}$ lorsque $n \to \infty$.

On trouve alors que la probabilité d'atteindre le $(i+1)^{\text{e}}$ nœud (à partir du haut) est :

$$\Pr(S_T = S_0 u^{n-i} d^i) = \binom{n}{i} (p^*)^{n-i} (1-p^*)^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

w

Note Voir le chapitre 18 : La loi lognormale pour plus de détails sur l'application de la loi lognormale pour le prix d'actions.

Arbres binomiaux alternatifs

Il y existe d'autres façons de construire un arbre binomial qui mènent à des mouvements de u et d différents :

Méthode	Mouvement (u et d)	Notes
Arbre à terme	$\text{e}^{(r-\delta)h \pm \sigma\sqrt{h}}$	$u > \text{e}^{(r-\delta)h} > d$
Arbre de Cox-Ross-Rubenstein	$\text{e}^{\pm\sigma\sqrt{h}}$	$ud = 1$
Arbre lognormal	$\text{e}^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)h \pm \sigma\sqrt{h}}$	$p^* \approx \frac{1}{2}$

Note Il est possible qu'avec un arbre de Cox-Ross-Rubenstein $\text{e}^{(r-\delta)h} > u$ si h est gros et σ petit.

› Malgré que toutes les différentes méthodes mènent à des prix différents lorsque n est fini, elles tendent vers le même prix lorsque $n \to \infty$;

› De plus, malgré que les mouvements u et d sont différents, le ratio des facteurs $\frac{u}{d}$ est le même :

$$\frac{u}{d} = \text{e}^{2\sigma\sqrt{h}}$$

› Alors, peu importe la méthode utilisée pour construire l'arbre, la distance proportionnelle entre u et d mesure la volatilité.

Est-ce un modèle réaliste ?

Un modèle basé sur la distribution lognormale implique quelques hypothèses douteuses sur les prix qui, en pratique, ne sont pas vérifiées.

Hypothèses douteuses d'une distribution normale

a) Volatilité σ constante.
   › En réalité, la volatilité change dans le temps.

b) Pas de grandes variations spontanées.
   › En réalité, il y a parfois des chocs soudains des prix de titres boursiers.

c) Indépendance entre les rendements composés continûment.
   › En réalité, les rendements sont positivement corrélés à court et moyen terme mais négativement corrélés à long terme.

Le modèle n'est donc pas parfait, mais sert plutôt de bon point de départ.

12 La formule de Black-Scholes

Formule de Black-Scholes généralisée

Hypothèses de la formule de Black-Scholes

Sur la distribution de l'action sous-jacente

a) Les rendements (composés continûment) sur l'action ont une distribution normale et sont indépendants à travers le temps.
b) La volatilité σ des rendements (composés continûment) est connue et constante.
c) Les dividendes δ futurs sont connus.

Sur l'environnement économique

a) Le taux (force r) sans risque est connu et constant.
b) Il n'y a pas d'impôt ni de frais de transactions.
c) Il n'y a pas de frais de vente à découvert.
d) Les investisseurs peuvent emprunter au taux sans risque.

Lorsque le nombre de périodes n d'un arbre binomial augmente, le prix de l'option tend vers la valeur donnée par la formule de Black-Scholes.

Formule de Black-Scholes généralisée

Équations généralisées :

$$d_1 = \left(\frac{\ln \frac{F^P(S)}{F^P(K)} + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \qquad d_2 = \left(\frac{\ln \frac{F^P(S)}{F^P(K)} - \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right) = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Prix d'options **européennes** selon la formule de Black-Scholes :

$$C(S_0, K, \sigma, r, T, \delta) = F^P_{0,T}(S)N(d_1) - F^P_{0,T}(K)N(d_2)$$
$$P(S_0, K, \sigma, r, T, \delta) = F^P_{0,T}(K)N(-d_2) - F^P_{0,T}(S)N(-d_1)$$

Notes

$$\sigma = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(\ln F^P_{t,T}(S))}{t}} = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(\ln F_{t,T}(S))}{t}} = \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(\ln S_t)}{t}}, \forall 0 < t \leq T$$

$\ln S_t$ **Volatilité de l'action** ou, de façon équivalente, volatilité du rendement sur l'action composé continûment.

Options sur d'autres sous-jacents

Avec la formule généralisée, on peut appliquer la formule de Black-Scholes à d'autres sous-jacents.
Dans un tel cas, il y a quelques considérations à prendre pour une option sur :

Actions avec dividendes discrets proportionnels On trouve le nombre n de fois que le dividende sera versé entre 0 et l'échéance de T de l'option.

$$F^P_{0,T}(S) = S_0(1 - txdiv)^n$$

Contrat à terme standardisé Il peut arriver que la date d'échéance—T—de l'option ne soit pas la même que la date d'échéance—T'—du contrat à terme standardisé sur un actif quelconque Q.
Dans un tel cas, il faut que $T' \geq T$ et qu'on actualise le prix à terme $F_{0,T'}(Q)$ à partir de T (et non T').

$$F^P_{0,T}(F) = F_{0,T'}(Q)\mathrm{e}^{-rT} \qquad F^P_{0,T}(K) = K\mathrm{e}^{-rT}$$

Devises Les prix à terme prépayés doivent être dans la même devise que l'option.

$$C(S_0 = x_0, K, \sigma, r = r_{\text{DD}}, T, \delta = r_{\text{DÉ}}) = x_0\mathrm{e}^{-r_{\text{DÉ}}T}N(d_1) - K\mathrm{e}^{r_{\text{DD}}T}N(d_2)$$

Diagrammes du profit avant échéance

Nous avons précédemment tracé des diagrammes de profit de valeur à l'échéance pour les options **à l'expiration**. Nous allons maintenant étendre ceci pour tracer les diagrammes **avant expiration**.

- L'idée est la même qu'auparavant mais on remplace la valeur à l'échéance par la valeur de revente de l'option
- Pour tracer les diagrammes, on fait varier les prix en maintenant fixe les dates.

Nous illustrons ceci avec 2 stratégies :

Achat et revente d'une option d'achat

Crée en :

- Achetant l'option d'achat au temps t_1 ;
- Vendant l'option d'achat au temps t_2 avant l'échéance ($t_2 < T$).

Valeur à t_2

$$= \text{Prix de revente}$$
$$= C(S_{t_2}, K, \sigma, r, T, \delta)$$

Profit à t_2

$$= \text{Prix de revente} - \text{Prix d'achat à } t_1 \text{ accumulé à } t_2$$
$$= C(S_{t_2}, K, \sigma, r, T, \delta) - C(S_{t_1}, K, \sigma, r, T, \delta)\mathrm{e}^{r(t_2 - t_1)}$$

Écart horizontal

Crée en :

- Vendant une option venant à échéance à t_1 ;
- Achetant une option identique sauf pour la date d'échéance de t_2.

Coût initial Pour des options d'achat on obtient :

$$= C(S, K, \sigma, r, T_2, \delta) - C(S, K, \sigma, r, T_1, \delta)$$

Notes

- Permet de spéculer sur la volatilité de l'action ;
- Typiquement utilisé lorsqu'un investisseur croit que, entre deux prix d'exercice, le prix va rester fixe ;
- L'écart est d'ailleurs bâtit afin d'avoir un thêta positif et implique la dissolution du portefeuille avant ou à la première des deux échéances ;
- en anglais « *calendar spread* ».

Volatilité implicite

Volatilité implicite La valeur σ tel que la formule de Black-Scholes reproduit le prix de l'option observé sur le marché.

- La volatilité tel quel n'est pas observable et son estimation est problématique ;
- La volatilité *historique* (vue au chapitre 10) n'est pas adéquate car elle ne prévoit pas le futur ;
- On peut en lieu isoler la volatilité *implicite* $\hat{\sigma}$ avec le prix observé de l'action et la formule de Black-Scholes.
  Elle représente donc l'appréciation de la volatilité faite par le marché ;
- Malgré que la volatilité est supposée constante dans la formule, en réalité elle varie selon le prix d'exercice K et la date d'échéance T ;
- On peut l'utiliser pour évaluer une option qui n'existe pas encore ;
- Également, on peut valider ou invalider le modèle de Black-Scholes ;
- Finalement, on peut comparer des options par leur volatilité implicite au lieu de leurs prix.

Les Grecs de l'option

Les grecs servent à mesurer l'exposition au risque en considérant un paramètre de la formule de Black-Scholes à la fois.

› Par défaut, on calcule les grecs en supposant l'achat (et non la vente) d'une option.

Grec	Définition	Mesure le changement de la valeur (V)
Δ	$\frac{\partial V}{\partial S_0}$	de l'option par une augmentation (de 1\$) du prix de l'action.
Γ	$\frac{\partial \Delta}{\partial S_0} = \frac{\partial^2 V}{\partial S_0^2}$	du Delta par une augmentation (de 1\$) du prix de l'action.
$\theta/365$	$\frac{\partial V}{\partial t}$	de l'option par une baisse (d'un jour) de la date d'échéance.
Vega	$\frac{\partial V}{\partial \sigma}$	de l'option par une augmentation (de 1%) de la volatilité.
$\rho/100$	$\frac{\partial V}{\partial r}$	de l'option par une augmentation (de 1%) du taux sans risque.
$\psi/100$	$\frac{\partial V}{\partial \delta}$	de l'option par une augmentation (de 1%) de la force de dividende.

Termes financiers

point de pourcentage 1%.

point de base 0.01%.

Grecs

Delta $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_0}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à une augmentation du prix de l'action.

Expressions du Delta pour les options	Domaine
$\Delta_C = e^{-\delta T} N(d_1)$	$0 \leq \Delta_C \leq 1$
$\Delta_P = -e^{-\delta T} N(-d_1)$	$-1 \leq \Delta_P \leq 0$

Lien entre le delta pour une options de vente et d'achat :

$$\Delta_C - \Delta_P = e^{-\delta T}$$

Notes

› Le Delta Δ_C (Δ_P) peut être interprété comme le nombre d'actions à acheter (vendre) pour répliquer une option d'achat (de vente) ;

› Une option d'achat devient de plus en plus profitable lorsque le prix de l'action sous-jacente augmente.
Alors, Δ_C se rapproche de 0 lorsque l'option est hors du cours ($S_T < K$) et de 1 lorsqu'elle est dans le cours ($S_T > K$).
Cependant, le Δ_C ne sera jamais négatif, car l'option d'achat a un seuil minimal de 0 pour sa valeur à l'échéance.
De même, Δ_P ne sera jamais positif ;

› Dans les deux cas, le Δ augmente avec le prix de l'action ;

› Mathématiquement, le domaine est restreint puisque $0 \leq N(x) \leq 1, \forall x$ et $0 \leq e^{-\delta T} \leq 1$.

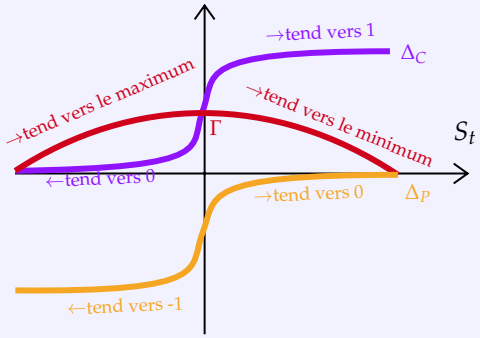
Gamma $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S_0} = \frac{\partial^2 V}{\partial S_0^2}$

Mesure la variation du Delta de l'option correspondante à une augmentation du prix de l'action.

Expressions du Gamma pour les options	**Domaine**
$\Gamma_C = \Gamma_P = \dfrac{e^{-\delta T} N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$	$\Gamma_P = \Gamma_C > 0$

Notes

- Le Γ mesure le *taux* de variation du Δ.
  Puisque le Δ augmente toujours, le Γ est toujours positif ;
- Le Γ est maximisé au cours du marché, car c'est où le Δ connaît le plus de variation.



Theta $\theta = \frac{\partial V}{\partial t}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à l'écoulement du temps.

Note Selon si on dérive par rapport au point de départ t ou à l'échéance T on a que $\theta = \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial T}$ car augmenter t diminue $T - t$.

Lien entre le delta pour une options de vente et d'achat :

$$\theta_C - \theta_P = \delta S e^{-\delta(T-t)} - rKe^{-r(T-t)}$$

Expressions du Theta pour les options

$$\theta_C = \left(S_0 \delta e^{-\delta(T-t)} N(d_1) - Kre^{-r(T-t)} N(d_2)\right) - \frac{Ke^{-r(T-t)} N'(d_2)\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

$$\theta_P = \left(Kre^{-r(T-t)} N(-d_2) - S_0 \delta e^{-\delta(T-t)} N(-d_1)\right) - \frac{Ke^{-r(T-t)} N'(d_2)\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

Notes

- Pour obtenir la variation en valeur par jour—**la notation de Claire**—il suffit de diviser par 365 : $\frac{\theta}{365}$;
- La valeur d'une option décroît avec le temps.
  θ estime de combien, ceteris paribus, la valeur décroît par jour ;
- Ce faisant, θ est habituellement **négatif**.
  Il est *possible* qu'il soit positif pour une option profondément dans le cours du marché ayant un taux de dividende très élevé ;
- **T**heta pour **t**emps.

Vega alias Lambda $\Lambda = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à une augmentation de la volatilité de l'action.

Expression du Vega pour les options	**Domaine**
$\Lambda_C = \Lambda_P = S_0 e^{-\delta T} N'(d_1)\sqrt{T}$	$\Lambda_P = \Lambda_C > 0$

Notes

- Pour obtenir la variation en pourcentage—**la notation de Claire**—il suffit de diviser par 100 : $\frac{\Lambda}{100}$;
- Une augmentation de la volatilité mène toujours à une augmentation des prix d'options.
  Il s'ensuit que le Vega sera toujours positif et augmente avec la volatilité ;
- **V**ega pour **v**olatilité.

Rho $\rho = \frac{\partial V}{\partial r}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à une augmentation du taux sans risque.

Expression du Rho pour les options	**Domaine**
$\rho_C = TKe^{-rT} N(d_2)$	$\rho_C > 0$
$\rho_P = -TKe^{-rT} N(-d_2)$	$\rho_P < 0$

Notes

- Pour obtenir la variation en pourcentage—**la notation de Claire**—il suffit de diviser par 100 : $\frac{\rho}{100}$;
- Une augmentation du taux sans risque r fait baisser la valeur actualisée du prix d'exercice Ke^{-rT}.
  Selon la formule de Black-Scholes, baisser Ke^{-rT} fait **augmenter** la valeur d'une option d'achat mais **baisser** celle d'une option de vente.
  Donc, $\rho_C > 0$ et $\rho_P < 0$;
- **R**ho pour taux sans **r**isque.

Psi $\psi = \frac{\partial V}{\partial \delta}$

Mesure la variation du prix de l'option correspondante à une augmentation du taux de dividendes.

Expression du Psi pour les options	Domaine
$\psi_C = -TSe^{-\delta T}N(d_1)$	$\psi_C < 0$
$\psi_P = TSe^{-\delta T}N(-d_1)$	$\psi_P > 0$

Notes

- Pour obtenir la variation en pourcentage—**la notation de Claire**—il suffit de diviser par 100 : $\boxed{\frac{\psi}{100}}$;
- Une augmentation du taux de dividendes δ fait baisser la valeur actualisée du prix de l'action $Se^{-\delta T}$.
  Selon la formule de Black-Scholes, baisser $Se^{-\delta T}$ fait **baisser** la valeur d'une option d'achat mais **augmenter** celle d'une option de vente.
  Donc, $\psi_C < 0$ et $\psi_P > 0$.

Portefeuille

Le grec d'un portefeuille composé de N options sur une même action, avec n_i options de chaque type, est simplement la somme arithmétique des grecques :

$$\text{Grec}_{\text{ptf.}} = \sum_{i=1}^{N} n_i \text{Grec}_i$$

Élasticité

Élasticité $\Omega = \frac{\Delta S_0}{V}$

Mesure le pourcentage de variation du prix de l'option correspondante au pourcentage d'augmentation du prix de l'action.

Élasticité

$$\Omega_{\text{option}} = \frac{\%\text{ variation du prix de l'option}}{\%\text{ variation du prix de l'action}} = \frac{(V_t - V_0)/V_0}{(S_t - S_0)/S_0}$$
$$= \Delta \cdot \frac{S_0}{V_0} = \frac{\Delta S_0}{V}$$

Bornes

$$\Omega_C \geq 1 \qquad \Omega_P \leq 0$$

Notes

- Pour obtenir la variation par augmentation de 1% du prix de l'action—**la notation de Claire**—il suffit de diviser par 100 : $\boxed{\frac{\Omega}{100}}$;
- Le Δ peut être vu comme le risque *absolu* d'une action :
  $$\Delta = \frac{\text{variation du prix de l'option}}{\text{variation du prix de l'action}}$$
  L'élasticité évalue plutôt le risque *relatif* au montant.

Volatilité

Puisqu'un actif sans risque n'a aucune volatilité, la volatilité de l'option (σ_{option}) va seulement dépendre de celle de l'action (σ_{action}).
On ne fait que pondérer par la valeur absolue de l'élasticité de l'option (Ω_{option}) :
$\boxed{\sigma_{\text{option}} = |\Omega_{\text{option}}| \, \sigma_{\text{action}}}$.

- La valeur absolue assure une volatilité positive.

Rendement sur l'option γ

Pour un portefeuille réplicatif on a que $V = \Delta S + B$.
Avec ceci on trouve :

% investit dans l'action sous-jacente $\%\text{ action} = \frac{\Delta S}{V} = \Omega$.

% investit dans l'actif sans risque $\%\text{ actif} = \frac{B}{V} = 1 - \Omega$.

γ Rendement espéré instantané sur l'option.

› On pondère les rendements sur l'action et l'actif :

$$\begin{aligned}\gamma &= (\%\text{ action})\alpha + (\%\text{ actif})r \\ &= \Omega\alpha + (1-\Omega)r\end{aligned}$$

› Ceci est l'équivalent continu de $e^{\gamma h} = \frac{\delta S}{\delta S+B}e^{\alpha h} + \frac{B}{\delta S+B}e^{rh}$.

Prime de risque

Une **prime de risque** est l'excès du rendement espéré d'un actif au taux sans risque.

Prime de risque sur l'action $\alpha - r$

Prime de risque sur l'option $\gamma - r$

› Avec la définition du rendement γ espéré instantané sur l'option on trouve : $\gamma - r = \Omega(\alpha - r)$;

› Dans le modèle d'évaluation des actifs financiers, $\alpha - r = \beta_{\text{action}}(\mathrm{E}[R_M] - r)$ où $\mathrm{E}[R_M]$ est l'espérance du rendement du marché ;

› Si $\alpha > r$ alors $\gamma_C \geq \alpha$ et $\gamma_P \leq r$.

Ratio de Sharpe ø

Le **ratio de Sharpe** d'un actif est le ratio de sa prime de risque à sa volatilité.

Ratio de Sharpe de l'action

$$ø_{\text{action}} = \frac{\alpha - r}{\sigma_{\text{action}}}$$

Ratio de Sharpe de l'option

$$ø_{\text{option}} = \frac{\gamma - r}{\sigma_{\text{option}}} = \frac{\Omega(\alpha - r)}{|\Omega|\sigma_{\text{action}}}$$

Puisque Ω est positif pour les options d'achat et négatif pour les options de vente :

$$ø_C = ø_{\text{action}} \qquad ø_P = -ø_{\text{action}}$$

Portefeuille

L'élasticité d'un portefeuille composé de N options avec n_i de chaque type est la moyenne pondérée de l'élasticité de chaque type d'option.
Donc, avec $\omega_i\%$ du portefeuille investi dans l'option i, on a :

$$\Omega_{\text{ptf.}} = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \Omega_i, \text{ où } \omega_i = n_i \times \frac{V_i}{V_{\text{ptf.}}}$$

On peut également le calculer avec les paramètres du portefeuille $\Omega_{\text{ptf.}} = \frac{\Delta_{\text{ptf.}} S}{V_{\text{ptf.}}}$.

Approximation

› On peut approximer la variation du prix de l'option avec les grecques ;

› Le Delta *varie avec le prix* :

– Le Delta *sous-estime* l'*augmentation* du prix de l'option d'achat quand le prix de l'action augmente et *surestime* la *diminution* ;

– Alors, le Delta est seulement valide comme approximation du prix pour des très petites variations

› En considérant le Gamma, l'approximation devient valide pour des plus grandes variations ;

› Cependant, la meilleure approximation se fait en incluant Theta pour considérer *l'effet du temps*.

Approximation Delta-Gamma-Theta

$$C(S_t + \varepsilon) \approx C(S_t) + \Delta_t \varepsilon + \frac{1}{2}\Gamma_t \varepsilon^2 + \theta_t h$$

Notes

› ε est la variation du prix.

› h et θ doivent être dans la même unité de temps.

› θ diminue l'approximation, car il est habituellement négatif.

Note Avec $C(S_t + \varepsilon) - C(S_t)$ on peut voir que les deux premières composantes correspondent au développement de Taylor de la fonction C de S_t avec $\Delta = \frac{\partial S_t}{\partial C}$ et $\Gamma = \frac{\partial^2 S_t}{\partial C^2}$ puis $\varepsilon_t = (S_t + \varepsilon - S_t)$.

Actuarial specific risk management

Variable annuity

It is not an "annuity" with garanteed payments, it is a variable savings product with the option to convert a variable accumulation amount to an annuity.

Given the accumulation amount is variable and not known in advance, payment amounts are not known in advance.

However, in practice companies typically ***guarantee*** some ***minimum*** rate of return.

There's four types of guarantees to know :

Guaranteed minimum death benefit (GMDB)

Guarantees a minimum amount will be paid to the policyholder when they die.

Guaranteed minimum accumulation benefit (GMAB)

Guarantees a minimum value for the underlying account after some period of time, even if the account vaue is less.

› Also known as the **guaranteed minimum maturity benefit (GMMB)**.

Guaranteed minimum withdrawal benefit (GMWB)

Guarantees that, upon the policyholder reaching a certain age, a minimum withdrawal amount over a specified period of time will be provided.

Guaranteed minimum income benefit (GMIB)

Guarantees the purchase price of a traditionnal annuity at a future time. Thus, a policyholder can guarantee the minimum amount of income they will have.

We define :

return of premium guarantee Guarantee which returns the greater of the account value and the original amount invested.

Guaranteed Minimum Death Benefit with a Return of Premium Guarantee

$$\max(S_T; K) = S_T + \max(K - S_T; 0)$$

› Embedded **put** option.

Use of exotic options :

Forward start For hedging guarantees that will come into effect during the payout period of a GMWB while the variable annuity is still in the accumulation period.

Chooser For hedging variable annuities with two-sided guarantees. (e.g. GMDB with a return-of-premium guarantee and an earnings-enhanced death benefit)

Lookback For hedging variable annuity guarantees where the guarantee value is periodically recalculated as the greater of the account value and the existing guarantee value.

Shout For hedging variable annuity guarantees in situations where the guarantee value is recalculated at the discretion of the policyholder.

Rainbow For hedging when policyholders can hold multiple assets in their accounts and the guarantee applies to the account as a whole rather than individual assets in the account.

13 Tenue de marché et couverture en delta neutre

Opérations pour compte propre

Opérations effectuées par une institution financière pour son propre compte afin de suivre une stratégie d'investissement.

- En anglais « *proprietary trading* » ;
- On distingue les opérations pour compte propre de la tenue de marché :
  - Les clients et opérateurs pour compte propre profitent des mouvements des marchés ;
  - Les teneurs de marché profitent des frais de transactions ;
  - Ils offrent l'immédiateté et se tiennent prêt à acheter et à vendre des produits dérivés selon les ordres des clients ou investisseurs.

Couverture en delta neutre

Une position couverte en delta neutre a un $\Delta = 0$ et permet aux teneurs de marché de se protéger contre le risque d'une chute du prix de l'action.

Contexte

- Les teneurs de marchés ne souhaitent pas profiter du marché mais plutôt des transactions ;
- La couverture en delta neutre est une donc façon de minimiser le risque de leurs positions ;
- Cette couverture est couramment utilisée en pratique.

Pour avoir une couverture en delta neutre, les teneurs de marché calculent le Δ de l'option puis prennent la position inverse dans le sous-jacent pour compenser.

- Le delta d'une action est de 1 car $\Delta_{\text{action}} = \frac{\partial S}{\partial S} = 1$.
- La couverture comporte des coûts et requiert du capital ;
- De plus, l'idée importante à retenir est qu'une position couverte **devrait avoir un rendement égal au taux sans risque**.

Exemple Un teneur de marché vend 100 options d'achat à un $\Delta_C = 0.55$ et souhaite avoir une couverture en delta neutre. Alors, il achète $100 \times \Delta_C = 55$ actions. L'investissement net est de $+100 \times C(K) - 55 \times S_0$. S'il souhaite avoir un flux monétaire initial de zéro, il va emprunter (ou prêter si c'est positif) ce montant au taux sans risque.

Profit sur 2 jours d'un portefeuille couvert en delta neutre

Composantes du portefeuille

1. Achat ou vente d'options.
2. Achat ou vente d'actions.
3. Emprunt ou prêt d'argent.

Composantes du profit

1. Profit sur les options.
2. Profit sur les actions.
3. Profit sur l'obligation.

- Par exemple, le profit sur les options le lendemain serait $100 \times (C_0 e^{r(\frac{1}{365})} - C_{1/365})$;
- Si le teneur de marché veut recouvrir sa position le lendemain, il achète (ou vend) $100 \times (C_{1/365} - C_0)$.

Selon la structure de Black-Scholes, le teneur de marché demeure rentable après un période de temps h pour $S \pm S\sigma\sqrt{h}$.

Pour un teneur de marché qui vend une option et couvre sa position en delta neutre, il a :

1. Une position courte sur l'option ;
2. Une position longue sur Δ_t actions ;
3. Une position sur une obligation zéro-coupon sans risque.

Son profit de t à $t+h$ est la somme des variations des composantes : $\Delta_t (S_{t+h} - S_t) - (V_{t+h} - V_t) - (e^{rh} - 1)(\Delta_t S_t - V_t)$.

- Pour $\varepsilon = S_{t+h} - S_t$, le profit est $\approx -\frac{1}{2}\varepsilon^2 \Gamma_t - h\theta_t - (e^{rh} - 1)(\Delta_t S_t - V_t)$.
- Si h est petit, $(e^{rh} - 1) \approx rh$ par l'expansion de Taylor.

Note sur les autres grecs Si un teneur de marché souhaite couvrir avec de multiples grecs, il suffit de poser les grecs du portefeuille égaux à 0. Cependant, puisque tous les grecques autre que le Δ d'une action sont 0, on nécessite une deuxième option. Par exemple pour l'achat de 100 options d'achat de type 1, on achète y options d'achat de type 2 et x actions pour obtenir un portefeuille couvert en delta et

gamma neutre :

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{ptf.}} &= -100\Delta_{C^I} + (x)\Delta_{\text{action}} + (y)\Delta_{C^{II}} \\ &= -100\Delta_{C^I} + (x)(1) + (y)\Delta_{C^{II}} \\ \Gamma_{\text{ptf.}} &= -100\Gamma_{C^I} + (x)(0) + (y)\Gamma_{C^{II}}\end{aligned}$$

Note sur θ Thêta mesure la *variation du prix* à l'écoulement *du temps* et n'a pas lié au risque de l'action. Il en résulte que le delta et le gamma d'un dépôt sans risque sont nuls, mais pas le thêta. Pour un dépôt de 1$, la valeur accumulée t années plus tard est e^{rt}. Le thêta de ce dépôt est $\theta_{\text{sans risque}} = \frac{\partial re^{rt}}{\partial t} = re^{rt}$.

Portefeuille autofinançant

Portefeuille dont on emprunte le montant nécessaire pour établir le portefeuille au taux sans risque.

Analyse de Black-Scholes

Équation de Black-Scholes :

$$r\Delta S_t + \frac{\Gamma}{2}\sigma^2 S_t^2 + \theta = rC$$

- Valide pour les options d'achat et de vente ;
- L'équation suppose aucun dividendes et que les paramètres r et σ sont constants ;
- Elle est valide pour les options d'achat et de vente américaines à tout instant où il n'est pas optimal d'exercer l'option avant l'échéance ;
- En théorie, le rééquilibrage devrait se faire en continu ;
- En pratique, les frais de transactions sont trop élevés et c'est plutôt lorsque le delta change ;
- Augmenter la fréquence du rééquilibrage (pour ramener le delta à zéro) :
  - Réduit la variabilité du rendement ;
  - Permet de tirer avantage de la diversification temporelle ;
  - N'affecte pas la moyenne du rendement sur une période donnée.

$R_{h,i}$ Le rendement de la période i avec une durée h entre les ajustements, en supposant que la position d'une option d'achat achetée est delta-neutre au départ ;

$$R_{h,i} = \frac{1}{2}S^2\sigma^2\Gamma(x_i^2 - 1)h$$

x_i Nombre d'écarts-types dont le prix de l'action se déplace dans la période.

$$\text{Var}(R_{h,i}) = \frac{1}{2}(S^2\sigma^2\Gamma h)^2$$

14 Options exotiques : I

Options asiatiques

Options asiatiques

La valeur à l'échéance dépend du prix moyen du sous-jacent sur une certaine période de temps.

- On les surnomme aussi des *options sur moyenne* ;
- Contrairement aux options classiques, les options asiatiques dépendent de la trajectoire que le prix a suivi.

Options sur la moyenne

Il y a huit versions de base des options sur moyenne :

- Option d'achat ou de vente ;
- Moyenne arithmétique $A(S)$ ou géométrique $G(S)$ où $G(S) \leq A(S)$;

$$A(S) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} S_t \qquad G(S) = \left(\prod_{t=1}^{N} S_t\right)^{1/n}$$

- Moyenne du sous-jacent ou du prix d'exercice.

Option asiatique sur le prix moyen

On remplace S_t par le prix moyen $\bar{S}$ pour la valeur à l'échéance des options :

$$\begin{aligned}\text{valeur à l'échéance}\\ \text{d'une option d'achat} &= \max[0, \bar{S} - K]\\ \text{valeur à l'échéance}\\ \text{d'une option de vente} &= \max[0, K - \bar{S}]\end{aligned}$$

Option asiatique sur le prix d'exercice moyen

On remplace K par le prix moyen $\bar{S}$ pour la valeur à l'échéance des options :

$$\begin{aligned}\text{valeur à l'échéance}\\ \text{d'une option d'achat} &= \max[0, S_T - \bar{S}]\\ \text{valeur à l'échéance}\\ \text{d'une option de vente} &= \max[0, \bar{S} - S_T]\end{aligned}$$

Note : Deux erreurs courantes sont :

1. Inclure le prix initiale dans la moyenne (il ne faut pas),
2. Oublier de calculer V_{ud} *et* V_{du} séparément lorsqu'on utilise la moyenne géométrique.

Points importants

1. La valeur d'une **option asiatique sur le prix moyen est inférieure ou égale** à la valeur d'une **option européenne équivalente**.
   - Le plus faible la volatilité d'une action, le moins il est probable qu'elle ait une valeur à l'échéance positive ;
   - Le prix moyen d'une action $\bar{S}$ **est moins volatile que** S_T le prix final de l'action ;
   - Il s'ensuit que l'option asiatique a une valeur à l'échéance plus faible.
2. La valeur d'une option asiatique sur le prix moyen baisse lorsque la fréquence d'échantillonnage N augmente.
   - De façon semblable, augmenter N diminue la moyenne et donc la valeur à l'échéance de l'option asiatique.
3. La **valeur** d'une **option asiatique sur le prix d'exercice moyen** ***augmente*** lorsque la fréquence d'échantillonnage N ***augmente***.
   - Puisque l'on soustrait le prix moyen de l'action $\bar{S}$, il s'ensuit que l'écart avec le prix à l'échéance S_t augmente.

Options à barrière

Options à barrière

Une option qui peut **désactiver ou activer** si le prix de l'actif sous-jacent atteint une **barrière** précise alors que l'option est en vigueur.

› Les options à barrière dépendent de la trajectoire que le prix a suivi.

Types d'options à barrière

Il y a trois types d'options à barrière :

Options à barrière activante

S'active si la barrière est atteinte.

Si la barrière est :

Dessous le prix initial de l'action, c'est une option dite « ***down-and-in*** » : le prix doit baisser pour atteindre la barrière ;

Dessus le prix initial de l'action, c'est une option dite « ***up-and-in*** » : le prix doit augmenter pour atteindre la barrière.

› En anglais, « ***Knock-in option*** » car l'option est « *knocked-in* si la barrière est atteinte » ;

› Si l'option est activée alors la valeur à l'échéance est identique à une option européenne ordinaire sinon elle est nulle.

Options à barrière désactivante

Se désactive si la barrière est atteinte.

Si la barrière est :

Dessous le prix initial de l'action, c'est une option dite « ***down-and-out*** » ;

Dessus le prix initial de l'action, c'est une option dite « ***up-and-out*** ».

› En anglais, « ***Knock-out option*** » car l'option est « *knocked-out* si la barrière est atteinte » ;

› Si l'option est désactivée alors la valeur à l'échéance est nulle sinon il est identique à une option européenne ordinaire.

Options à barrière avec remise

Paye un montant fixe si la barrière est atteinte.

Si la barrière est :

Dessous le prix initial de l'action, on l'appelle un « ***down rebate*** » ;

Dessus le prix initial de l'action, on l'appelle un « ***up rebate*** ».

› En anglais, « ***Rebate option*** » ;

› Si le paiement se fait uniquement à l'échéance, c'est une remise différée (« *deferred rebate* »).

Parité

Pour des options à barrière désactivante et activante, autrement équivalentes, on a :

$$\underset{\textit{activante}}{\text{option à barrière}} + \underset{\textit{désactivante}}{\text{option à barrière}} = \text{option régulière}$$

$$\Rightarrow \text{option à barrière} \leq \text{option régulière}$$

› Donc l'option régulière **ne dépend pas de la barrière**.

– Certaines questions peuvent demander de trouver des prix d'options en donnant de l'information pour différentes barrières.

– On peut utiliser la relation pour trouver le prix.

Cas particuliers

Dans le cas où $S_0 \leq$ barrière $\leq K$, l'option d'achat « *up-and-in* » est équivalente à l'option d'achat ordinaire.

› Dans les deux cas, le prix doit monter passé la barrière pour obtenir une valeur à l'échéance positive ;

› Par l'équation de parité, on déduit que l'option d'achat « *up-and-out* » a une valeur nulle.

Le même cas se produit où $K \leq$ barrière $\leq S_0$ pour une option de vente « *down-and-in* ».

Options sur option

Options sur option

Option qui permet à son détenteur **d'acheter ou de vendre une autre option** au prix d'exercice précisé.

- On les surnomme aussi des *options composées* ;
- En anglais, « *compound option* » ;
- Ils ont deux prix d'exercice et deux dates d'échéance (pour l'option composée et l'option sous-jacente).

Types d'options sur options

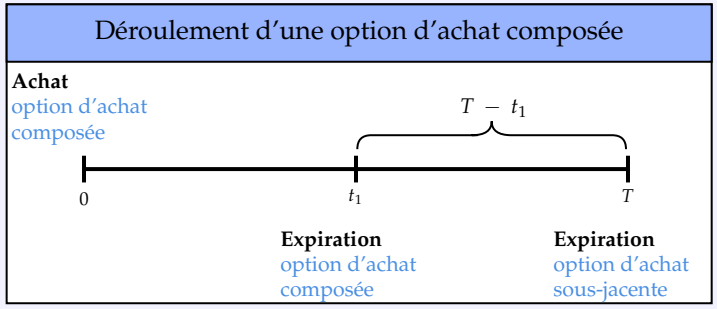
Dans les deux cas, pour calculer la valeur à l'échéance, on compare le prix d'exercice x à la valeur de l'option sous-jacente à t_1.

- Il s'ensuit que l'option expire dans $T - t_1$ temps.
- Ceci permet de voir s'il est profitable d'acheter l'*option* sous-jacente une fois rendu à t_1.

Option d'achat composée

Permet au détenteur d'acheter une autre option au prix d'exercice.
L'option peut être soit un « *call on call* » ou un « *call on put* ».

On achète une option d'achat composée au temps 0 à un prix d'exercice de x expirant à t_1.
L'option sous-jacente a un prix d'exercice de K et expire à T.



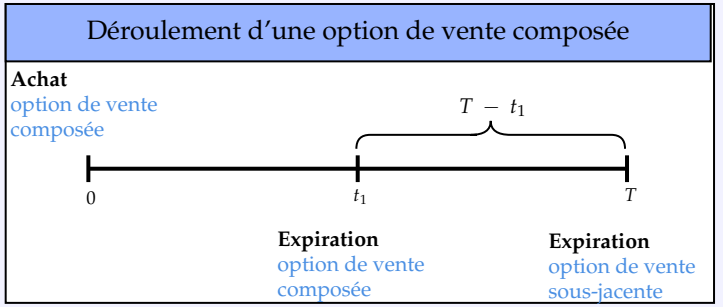
La valeur à l'échéance de l'option *sous-jacente* à t_1 est dénotée $V[S_{t_1}, K, \underbrace{T - t_1}_{\text{temps restant avant échéance}}]$.

La valeur à l'échéance de l'option d'achat *composée* à t_1 est $\max(0, \underbrace{V[S_{t_1}, K, T - t_1]}_{S_T \text{ pour des options classiques}} - x)$.

Option de vente composée

Permet au détenteur de vendre une autre option au prix d'exercice.
L'option peut être soit un « *put on call* » ou un « *put on put* ».

On achète une option de vente composée au temps 0 à un prix d'exercice de x expirant à t_1.
L'option sous-jacente a un prix d'exercice de K et expire à T.



La valeur à l'échéance de l'option de vente *composée* à t_1 est $\max(0, x - V[S_{t_1}, K, T - t_1])$.

Parité

On généralise l'équation de parité des options vente-achat :

$$\text{CallonStock} - \text{PutonStock} = F^P(S) - Ke^{-rT}$$
$$\Rightarrow \text{CallonCall} - \text{PutonCall} = C_{\text{eur}} - xe^{-rt_1}$$
$$\text{CallonPut} - \text{PutonPut} = P_{\text{eur}} - xe^{-rt_1}$$

Note Les prix d'options sont calculées pour T et non $T - t_1$.

Options avec écart

Options avec écart

Contrairement au options classiques qui ont un seul prix pour déterminer le moment d'exercice et la valeur à l'échéance, les options avec écart ont un prix pour chacune des fonctions ; fixer un prix pour chacune des fonctions créé alors un *écart*.

Notation

K_1 Prix *d'exercice* utilisé pour calculer la valeur à l'échéance ;
K_2 Prix *déclencheur* utilisé pour décider s'il y a exercice ou pas.

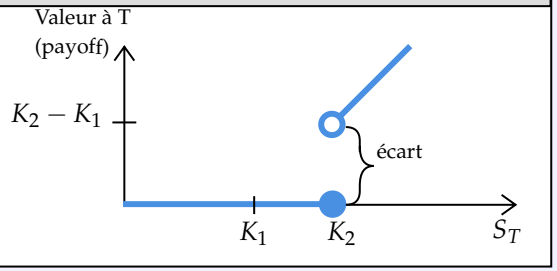
› En anglais, « *gap option* ».

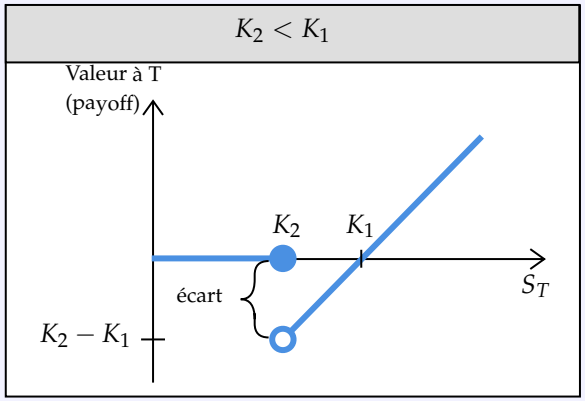
Option d'achat avec écart

$$\text{Valeur à l'échéance} = \begin{cases} 0, & S_T \leq K_2 \\ S_T - K_1, & S_T > K_2 \end{cases}$$

Option d'achat avec écart

$K_2 > K_1$



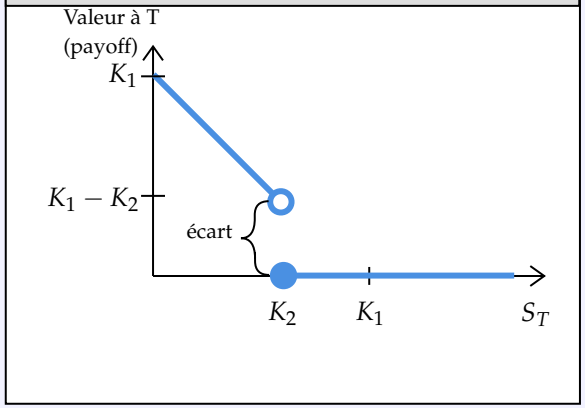


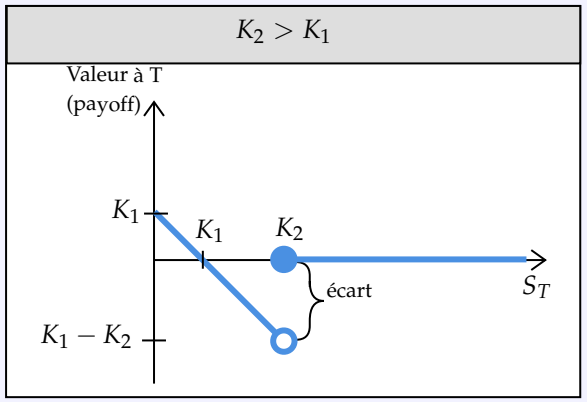
Option de vente avec écart

$$\text{Valeur à l'échéance} = \begin{cases} K_1 - S_T, & S_T < K_2 \\ 0, & S_T \geq K_2 \end{cases}$$

Option de vente avec écart

$K_2 < K_1$





Il est possible d'avoir une valeur à l'échéance *négative* si le prix déclencheur K_2 est inférieur au prix d'exercice K_1 pour une option d'achat (ou si $K_1 < K_2$ pour une option de vente).

› Cela dit, même si la valeur à l'échéance est négative, **l'exercice est obligatoire** lorsque le **prix déclencheur** est **atteint** ;

› En raison de cette possibilité, on peut avoir une **prime négative**.

Formule de Black-Scholes

Dans la formule de Black-Scholes, on remplace le K de :

l'équation principale par le prix d'exercice K_1 ;

› Le prix d'exercice K_1 détermine le montant de la valeur à l'échéance et est donc associé au montant à actualiser Ke^{-rT} dans l'équation principale.

d_1 par le prix déclencheur K_2.

› Le prix déclencheur K_2 détermine si l'exercice a lieu et est donc associé avec le calcul d'une probabilité $N(d_2) = \Pr^*(S_T > K_2)$ (voir le chapitre 18 sur la loi lognormale).

$$\text{GapCall} = S_0 e^{-\delta T} N(d_1) - K_1 e^{-rT} N(d_2)$$
$$\text{GapPut} = K_1 e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-\delta T} N(-d_1)$$

où $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_2}\right) + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Relation avec les options classiques

$$\text{GapCall} \pm K_2 e^{-rT} N(d_2) = C_{\text{eur}}(K_2) + (K_2 - K_1) e^{-rT} N(d_2)$$
$$\text{GapPut} \pm K_2 e^{-rT} N(-d_2) = P_{\text{eur}}(K_2) + (K_1 - K_2) e^{-rT} N(-d_2)$$

Parité

$$\text{GapCall} - \text{GapPut} = S_0 e^{-\delta T} - K_1 e^{-rT}$$

Options d'échange

Options d'échange

Permet au détenteur d'échanger un actif pour un autre.

› En anglais, « *exchange option* ».

Note Voir la sous-section **Parité généralisée et option d'échange** du chapitre 9 sur la parité des options.

Formule de Black-Scholes

Formule en format simple et selon la notation de Claire où l'on achète k du titre Q par unité du titre S

$$\begin{aligned} C(A,B) &= F^P(A)N(d_1) - F^P(A)N(d_2) \\ &= S_0 e^{-\delta_S T} N(d_1) - kQ_0 e^{-\delta_Q T} N(d_2) \\ P(A,B) &= F^P(B)N(-d_2) - F^P(A)N(-d_1) \\ &= kQ_0 e^{-\delta_Q T} N(d_1) - S_0 e^{-\delta_S T} N(d_2) \end{aligned}$$

où $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F^P(A)}{F^P(B)}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ et $\sigma = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho\sigma_A\sigma_B}$.

› On note que **l'on soustrait** la corrélation puisque le portefeuille est $A - B$:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \mathrm{Var}\left(\frac{\ln A}{\ln B}\right) \\ &= \mathrm{Var}\left(\ln A - \ln B\right) \\ &= \mathrm{Var}(\ln A) + \mathrm{Var}(\ln B) - 2\mathrm{Cov}(\ln A, \ln B) \\ &= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{A,B}\sigma_A\sigma_B \end{aligned}$$

18 La loi lognormale

Notation

$N(d)$ Représente $Pr(Z \leq d)$.

La distribution normale

› Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$;

› La loi normale est symétrique donc $N(-d) = 1 - N(d)$, $\forall d \in \mathbb{R}$ et $\Pr(-d \leq Z \leq d) = 2N(d) - 1$, $\forall d \in \mathbb{R}_+$;

› $aX_1 + bX_2 \sim \mathcal{N}(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$;

› La FGM est $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

La distribution lognormale

Lorsque $Y = e^X$ alors $Y \sim LN(\mu, \sigma^2)$.

› Les deux premiers moments sont obtenus de la FGM de la distribution normale et ne sont ***pas*** les paramètres :

$$\mathrm{E}[Y] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} \qquad \mathrm{Var}(Y) = (\mathrm{E}[Y])^2 \left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

› $F_Y(y) = N\left(\frac{\ln(y)-\mu}{\sigma}\right)$, $\forall y \in \mathbb{R}_+$.

La distribution lognormale a 2 propriétés intéressantes :

1. Elle est asymétrique à droite et donc ***non-négative*** puisque $e^X \geq 0$:
$$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[e^X] \geq e^{\mathrm{E}[X]} = e^{\mathrm{E}[\ln(Y)]}$$
   › Alors supposer que le prix d'une action suit une distribution lognormale suppose qu'il ne peut pas être négatif (une hypothèse réaliste).
2. Le ***produit*** (et non la somme) de deux variables aléatoires lognormales est une variable aléatoire.
   › $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}$
   › $e^{X_1} \times e^{X_2} \sim LN$

Un modèle lognormale des prix de l'action

Introduction

Notation

$R(0,T)$ Rendement composé continûment entre 0 et T sur un titre donné ;

› Par définition, $R(0,T) = \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$;

› On suppose que $R_{0,T}$ suit une loi normale et donc il s'ensuit que S_T suit une loi lognormale.

› Avec les propriétés des exposants, on trouve que $S_{t_2} = S_{t_1} e^{R(t_1,t_2)} = S_{t_0} e^{R(t_0,t_1)+R(t_1,t_2)}$;

La sous-section Volatilité du chapitre 10 qui introduit le modèle binomial d'évaluation sépare une année en périodes de h. Par exemple, pour $h = \frac{1}{2}$, on trouve le prix de l'action après 6 mois $S_{1/2}$ et le prix après 1 an S_1.

La notation pour représenter ceci est de séparer une périodes de T d'années en n périodes de longueur h— $h = \frac{T}{n}$. Dans le cas ci-dessus, $h = \frac{1}{2}$.

Avec les propriétés des exposants, on trouve que $S_{t_2} = S_{t_1} e^{R(t_1,t_2)} = S_{t_0} e^{R(t_0,t_1)+R(t_1,t_2)}$. Il s'ensuit que les rendements sont additifs et $R(0,T) = \sum_{i=1}^{n} R\left((i-1)h, ih\right)$.

› Avec $R\left((i-1)h, ih\right) \sim \mathcal{N}(\mu_h, \sigma_h^2)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, $R(0,T) \sim \mathcal{N}(n\mu_h, n\sigma_h^2)$. C'est-à-dire que la moyenne et la variance des rendements sont *proportionnels au temps* ;

› Sous base annuelle, $\mu = \frac{\mu_h}{h}$ et $\sigma = \frac{\sigma_h}{\sqrt{h}}$ donc $R(0,T) \sim \mathcal{N}(\mu_h T, \sigma_h^2 T)$.

De façon générale, on suppose que le temps t est mesuré en années, que la moyenne α et la volatilité (variance) σ^2 sont sous base annuelle puis que le taux de dividendes sur l'action δ est sous base annuelle.

Modèle

On cherche $\mathrm{E}[S_t] = S_0 \mathrm{e}^{(\alpha-\delta)t}$

Distribution

On pose que le gain en capital composé continûment de 0 à t $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ est normalement distribué :

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(\left(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$$

On écrit donc :

$$S_t = S_0 \mathrm{e}^{(\alpha-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma\sqrt{t}Z}$$

Moyenne variance et covariance

Avec cette distribution, on obtient :

$$\mathrm{E}[S_t] = S_0 \mathrm{e}^{(\alpha-\delta)t}$$

$$\Rightarrow \ln \mathrm{E}\left[\frac{S_t}{S_0}\right] = (\alpha - \delta)t$$

- Il est désirable que l'espérance ne dépend pas de la volatilité σ ;
- En fait, on soustrait $\frac{1}{2}\sigma^2$ dans le paramètre μ afin qu'il s'annule dans le calcul de l'espérance de la loi lognormale ;
- La quantité $\alpha - \delta$ est le taux d'appréciation de l'action composé continûment.

$$\mathrm{Var}(S_t) = (\mathrm{E}[S_t])^2 \left(\mathrm{e}^{\sigma^2 t} - 1\right)$$

$$Cov(S_t, S_t) = \mathrm{E}\left[\frac{S_t}{S_t}\right] \cdot \mathrm{Var}(S_t) = \mathrm{e}^{(\alpha-\delta)(T-t)}\mathrm{Var}(S_t)$$

Trouver le p-ème percentile de S_t

1. Trouver le percentile correspondant z_α de la loi normale standard Z.
2. Insérer le percentile correspondant de Z dans l'équation pour S_t.

La médiane :

- La médiane $\mathrm{E}[S_t]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t}$ est inférieure à la moyenne ;
- Alors, une action distribuée selon la loi lognormale aura des rendements inférieurs à la moyenne plus que la moité du temps ;
- Il s'ensuit qu'augmenter σ ne va pas impacter la moyenne mais va faire *baisser la médiane*.

Calculs de probabilités lognormales

On pose :

$$\hat{d}_1 = \left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + (\alpha - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \qquad \hat{d}_2 = \left(\frac{\ln\frac{S_0}{K} + (\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Trouver une probabilité pour S_T

$$\Pr(S_T \le K) = N(-\hat{d}_2) \qquad \Pr(S_T > K) = N(\hat{d}_2)$$
$$\Pr^*(S_T \le K) = N(-d_2) \qquad \Pr^*(S_T > K) = N(d_2)$$

Comment trouver une probabilité pour S_T

$$\begin{aligned}
\Pr(S_T \le K) &= \Pr\left(\frac{S_T}{S_0} \le \frac{K}{S_0}\right) \\
&= \Pr\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \le \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right) = \Pr\left(R_{0,T} \le \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right) \\
&= \Pr\left(\frac{R_{0,T} - \mathrm{E}[R_{0,T}]}{\sqrt{\mathrm{Var}(R_{0,T})}} \le \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \mathrm{E}[R_{0,T}]}{\sqrt{\mathrm{Var}(R_{0,T})}}\right) \\
&= \Pr\left(Z \le \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \mathrm{E}[R_{0,T}]}{\sqrt{\mathrm{Var}(R_{0,T})}}\right) \\
&= \Pr\left(Z \le \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= N(-\hat{d}_2)
\end{aligned}$$

Trouver un intervalle de prévision de S_T de niveau $1-\alpha$

1. Trouver le percentile correspondant de la loi normale standard Z $z_{\alpha/2} = N^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.
2. Insérer le percentile correspondant dans l'équation pour $S_T \in S_0 e^{(\alpha-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)T \pm z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{T}}$.

Espérance conditionnelle du prix de l'action

$$\mathrm{E}[S_T | S_T \le K] = \frac{\mathrm{E}\left[S_T \times \mathbf{1}_{\{S_T \le K\}}\right]}{\Pr(S_T \le K)} = S_0 e^{(\alpha-\delta)T}\frac{N(-\hat{d}_1)}{N(-\hat{d}_2)}$$

$$\mathrm{E}[S_T | S_T > K] = \frac{\mathrm{E}\left[S_T \times \mathbf{1}_{\{S_T > K\}}\right]}{\Pr(S_T > K)} = S_0 e^{(\alpha-\delta)T}\frac{N(\hat{d}_1)}{N(\hat{d}_2)}$$

$$\mathrm{E}^*[S_T | S_T \le K] = S_0 e^{(r-\delta)T}\frac{N(-d_1)}{N(-d_2)} \qquad \mathrm{E}^*[S_T | S_T > K] = S_0 e^{(r-\delta)T}\frac{N(d_1)}{N(d_2)}$$

Formule de Black-Scholes pour le prix d'options européennes

Avec ces espérances, on trouve maintenant :

$$\begin{aligned}
C(K) &= e^{-rT}\mathrm{E}^*[\text{valeur à l'échéance de l'option d'achat}] \\
&= S_0 e^{-\delta T}N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \\
P(K) &= e^{-rT}\mathrm{E}^*[\text{valeur à l'échéance de l'option de vente}] \\
&= Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0 e^{-\delta T}N(-d_1)
\end{aligned}$$

Énoncés équivalents

- Le modèle de Black-Scholes s'applique.
- Le prix de l'action suit un modèle lognormale.
- $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left(m = \left(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, v^2 = \sigma^2 T\right)$.
- $S_T = S_0 e^{(\alpha-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z}$.

Estimation des paramètres (le rendement et la volatilité) de la loi lognormale

Soit $n+1$ prix observés $S_0, S_1, \ldots, S_n$ à un intervalle régulier de longueur h.

› Typiquement, $h = 1$.

› Si les données étaient mensuelles, $h = \frac{1}{12}$.

Note La sous-section Volatilité du chapitre 10 mets en contexte pourquoi nous avons h rendements par année dans le cas d'un arbre binomiale.

Estimation des paramètres de la distribution lognormale

1. Calculer le rendement composé continûment, non annualisé, pour chacune des i périodes :
$$r_i = \ln\left(\frac{S_{ih}}{S_{(i-1)}}\right), \forall i = 1, 2, \ldots, n$$
2. Calculer la moyenne de l'échantillon des rendements.
$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i}{n} \underset{\substack{\text{propriété} \\ \text{des log.}}}{=} \frac{\ln\left(\frac{S_n}{S_0}\right)}{n}$$
3. Estimer l'écart-type des rendements.
$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2}{n-1}}$$
4. Mettre l'estimation de la volatilité sous base annuelle.
$$\hat{\sigma} = \frac{s_r}{\sqrt{h}}$$
5. Mettre l'estimation du rendement espéré sous base annuelle.
$$\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_{T+h}}{S_T}\right)\right] = \left(\hat{\alpha} - \delta - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right) h = \bar{r}$$
$$\therefore \hat{\alpha} = \frac{\bar{r}}{h} + \delta + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2$$

Exemple de calcul du rendement espéré sur une action

Soit une action sans dividendes avec les rendements mensuels suivants :

Mois	Prix
1	54
2	56
3	48
4	55
5	60

On désire trouver le rendement (composé continûment) espéré sur l'action.

1. Trouver les rendements à l'aide de la calculatrice TI-30XS :
   a) Appuyer sur data.
   b) Dans la colonne L1, entrer les prix des mois 1 à 4.
   c) Dans la colonne L2, entrer les prix des mois 2 à 5.
   d) Dans la colonne L3, faites 2nd, delete (insert), data puis dans l'onglet "FORMULA" choisir "Add/Edit Frmla".
   e) Par la suite, entrer ln de data -> "2 : L2" divisé par data -> "1 : L1".
   f) Pour confirmer la formule, appuyer sur le bouton enter .
2. Trouver la moyenne et l'écart-type des rendements :
   a) Faites 2nd, data (stat).
   b) Choisir "1 : 1-Var Stats".
   c) Choisir "L3" pour "DATA :" et "ONE" pour "FRQ :" puis calculer.
   d) Choisir "2 : $\bar{x}$" pour $\bar{r}$ et "3 : S_x" pour s_r.
3. Convertir la volatilité sous base annuelle $\hat{\sigma}$:
$$\hat{\sigma} = \frac{s_r}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = \sqrt{12} s_r$$
4. Isoler le rendement espéré sur l'action $\hat{\alpha}$:
$$\hat{\alpha} = 12\bar{r} + \frac{12 s_r^2}{2}$$

19 Évaluation par la méthode de Monte Carlo

Lorsque la valeur à l'échéance dépend de la trajectoire du prix, le modèle binomiale devient trop compliqué et nous utilisons plutôt la méthode de Monte Carlo ; on simule des prix pour estimer le prix (alias la valeur espérée actualisée) de l'option. La méthode de Monte Carlo utilise la distribution neutre au risque et le taux sans risque.

Calcul du prix de l'option comme une valeur espérée actualisée

Notation

$\mathbf{E}_0^*$ Espérance calculée à $t = 0$ en utilisant la distribution neutre au risque ;

$V(S_T, T)$ Valeur à l'échéance d'une option dont la valeur du sous-jacent à T est S_T ;

$V(S_0, 0)$ Prix de l'option ;

› On calcul le prix de l'option avec une évaluation neutre au risque et donc on pose que le rendement est égale au taux sans risque.

$$V(S_0, 0) = \mathrm{e}^{-rT}\mathrm{E}_0^*[V(S_T, T)]$$

Évaluation avec des probabilités neutres au risque

Pour évaluer une option avec la méthode binomiale, on calcule la valeur à l'échéance à chacun des nœuds sur n périodes puis on pondère par la probabilité d'y arriver et actualise :

$$C = \mathrm{e}^{-rT}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(p^*)^{n-i}(1-p^*)^i \max(0; S_0u^{n-i}d^i - K)$$

$$P = \mathrm{e}^{-rT}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(p^*)^{n-i}(1-p^*)^i \max(0; K - S_0u^{n-i}d^i)$$

Évaluation des vraies probabilités

On remplace p^* par p cependant, au lieu d'appliquer e^{-rT} à tous, il faut utiliser un différent rendement pour chaque trajectoire.

Génération de nombres aléatoires

On simule des chiffres u provenant d'une distribution uniforme $U(a, b)$. Lorsque la distribution est $U(0, 1)$, on peut interpréter les chiffres u comme des quantiles et obtenir des valeurs $F^{-1}(u)$ pour une distribution (Méthode de l'inverse).

Simulation de prix lognormaux

On rappel que $S_T = S_0\exp\left\{(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z\right\}$. Pour simuler des prix lognormaux S_T on insère des valeurs aléatoire de $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ dans la formule.

Simulation d'une séquence de prix d'action

Si la valeur à l'échéance d'une option dépend de celle du sous-jacent à différents moments dans le temps, il faut simuler des trajectoires pour trouver le prix.

Soit une option venant à échéance à T dont la valeur dépend de celle du sous-jacent à n moments (également espacés entre 0 et T).

$$S_h = S_0\exp\left\{(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z_1\right\}$$

$$S_{jh} = S_{(j-1)h}\exp\left\{(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z_j\right\}, \quad j = 2, 3, \ldots, n$$

Donc, $S_{nh} = S_T = S_0\exp\left\{(\alpha - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sqrt{T}\sigma\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}Z_j\right\}$ où $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}Z_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Évaluation par la méthode de Monte Carlo

Notation

$S_T(i)$ Prix du sous-jacent à T généré aléatoirement avec la distribution neutre au risque ;

› On pose que le prix du sous-jacent suit une distribution neutre au risque en posant $\alpha = r$.

$V(S_T(i), T)$ Valeur à l'échéance de l'option selon la simulation i, $V(S_T(i), T) = \max(0; S_T(i) - K)$.

On trouve que selon la méthode de Monte Carlo, $V(S_0, 0) = \mathrm{e}^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} V(S_T(i), T)$.

Évaluation par la méthode de Monte Carlo d'une option d'achat européenne

L'estimation du prix de l'option est donc :

$$\overline{C} = \mathrm{e}^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \max(0; S_T(i) - K)$$

Notation

σ_C Écart-type de C basé sur une seule simulation ;

› On peut l'estimer par $s_c = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \{C(S_T(i)) - \overline{C}\}^2}$.

$\sigma_{\overline{C}}$ Écart-type de C basé sur N simulations, $\sigma_{\overline{C}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma_C$.

Option sur moyenne (« *asian* ») arithmétique

On estime le prix tel que illustré à la section 19.3 puis on trouve que l'estimé du prix de l'option est $\overline{AC} = \mathrm{e}^{-rT} \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \max\left(0; \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} S_{jh}(i) - K\right)$.

Évaluation par la méthode efficace de Monte Carlo

La méthode décrite jusqu'ici est la méthode simple (alias, naïve) de Monte Carlo. Il existe des méthodes pour améliorer la précision, et donc réduire la variance de l'estimé.

Variable de contrôle

L'idée de la variable de contrôle est d'estimer l'erreur à chaque itération avec le prix d'une option reliée dont le prix peut être calculé par la formule. On peut ensuite appliquer cette erreur pour améliorer la précision du prix Monte Carlo.

Notation

$A(i)$ **et** $G(i)$ Prix de l'option avec moyenne arithmétique et géométrique calculé avec la i^{e} trajectoire simulée ;

$\overline{A}$ **et** $\overline{G}$ Estimé du prix de l'option ;

A **et** G Vrai prix de l'option avec moyenne arithmétique et géométrique selon la formule connue ;

› A est inconnu mais G l'est.

A^* Estimé ajusté du prix de l'option utilisant la moyenne arithmétique.

Pour approximer le prix A^* :

1. On pose que A et G sont corrélés et les relient par le coefficient β.
   › Le coefficient β est la pente d'une régression linéaire ;
   › On trouve donc que $\hat{\beta} = \frac{\mathrm{Cov}(\overline{A}, \overline{G})}{\mathrm{Var}(\overline{G})}$.
2. On utilise β pour ajouter à la moyenne $\overline{A}$ la différence entre le vrai prix G et sa moyenne $\overline{G}$.

Donc, $A^* = \overline{A} + \beta(G - \overline{G})$.

De plus, $\mathrm{Var}(A^*) = \mathrm{Var}(A)(1 - \rho^2)$ où $\rho = \mathrm{Corr}(\overline{A}, \overline{G})$

Autres méthodes

Variable antithétique

L'idée est que pour chaque simulation, il y a une simulation opposée qui est tout aussi probable.

Une série de nombre aléatoires suivant une loi normale est tout aussi probable que la même série avec des signes contraires.

- Si on prend U, on peut aussi prendre $1 - U$;
- Si on prend Z, on peut aussi prendre $-Z$.

Par exemple, on génère 50 valeurs de U puis 50 valeurs de $1 - U$ pour faire 100 simulations.

Théoriquement, il y a un gain possible vu que les deux simulations sont négativement corrélées. En pratique, le gain est modeste.

Échantillonnage stratifié

Au lieu de simuler des nombres $u \sim U(0,1)$, on simule des nombres u sur des sous-intervalles de $[0,1]$.

Par exemple, pour faire 100 simulations on simule un nombre uniforme par centile. On simule un nombre uniforme $u \sim U(0, 0.01)$, puis un nombre $u \sim U(0.01, 0.02)$, etc jusqu'à $u \sim U(0.99, 1)$.

- On peut faire plus ou moins de sous-intervalles égaux et répéter la procédure ;
- L'idée est d'éviter la sous-représentation ou la sur-représentation de certaines portions.

Échantillonnage préférentiel

C'est un raffinement de l'échantillonnage stratifié qui concentre la génération de nombres dans le sous-intervalle le plus critique. Donc, on ne génère plus la même quantité de nombres aléatoires pour tous les sous-intervalles.

Suites à discrépance faible

Elles sont obtenues de façon déterministe et visent à bien couvrir l'ensemble d'une distribution. Elles ont un intérêt particulier pour des problèmes de grande dimension.

23 Options exotiques : II

Options tout ou rien

Options tout ou rien

Paient un montant (1$ par défaut) ou une action (1 unité par défaut) si une condition est remplie mais rien sinon.

Si la condition de paiement est :

$S_T > K$ c'est une option **d'achat** tout ou rien.

$S_T < K$ c'est une option **de vente** tout ou rien.

- Le cours se limite aux options tout ou rien dont la condition de paiement ne dépend que de la valeur de l'action à l'échéance ;
- En réalité, on peut avoir des *options tout ou rien à barrière* dont le paiement dépend de l'atteinte ou non d'un certain prix pendant que l'option est en vigueur ;
- Alias, options binaires.

Types d'options tout ou rien

Options comptant ou rien

La valeur à l'échéance est de 1$ si la condition est satisfaite.

$$\begin{aligned} CC(S_0,K,\sigma,r,T,\delta) &= \mathrm{E}^*[\mathrm{e}^{-rT} \times 1 \times \boldsymbol{I}_{\{S_t>K\}}] = \mathrm{e}^{-rT}\Pr(S_T > K) \\ &= \mathrm{e}^{-rT}N(d_2) \\ CP(S_0,K,\sigma,r,T,\delta) &= \mathrm{E}^*[\mathrm{e}^{-rT} \times 1 \times \boldsymbol{I}_{\{S_t<K\}}] = \mathrm{e}^{-rT}\Pr(S_T < K) \\ &= \mathrm{e}^{-rT}N(-d_2) \end{aligned}$$

Options actif ou rien

La valeur à l'échéance est de S_T si la condition est satisfaite.

$$\begin{aligned} AC(S_0,K,\sigma,r,T,\delta) &= \mathrm{E}^*[\mathrm{e}^{-rT} \times S_T \times \boldsymbol{I}_{\{S_t>K\}}] = \mathrm{e}^{-rT}\mathrm{E}^*[S_T \times \boldsymbol{I}_{\{S_t>K\}}] \\ &= \mathrm{e}^{-rT}S_0\mathrm{e}^{(r-\delta)T}N(d_1) \\ &= S_0\mathrm{e}^{-\delta T}N(d_1) \\ AP(S_0,K,\sigma,r,T,\delta) &= \mathrm{E}^*[\mathrm{e}^{-rT} \times S_T \times \boldsymbol{I}_{\{S_t<K\}}] = \mathrm{e}^{-rT}\mathrm{E}^*[S_T \times \boldsymbol{I}_{\{S_t<K\}}] \\ &= \mathrm{e}^{-rT}S_0\mathrm{e}^{(r-\delta)T}N(-d_1) \\ &= S_0\mathrm{e}^{-\delta T}N(-d_1) \end{aligned}$$

- Une option d'achat classique correspond donc à acheter une option d'achat actif ou rien et vendre K options comptant ou rien ;
- Une option d'achat avec écart équivaut à acheter une option d'achat actif ou rien et vendre K_1 options d'achat comptant ou rien.

Option rétroviseur

Option rétroviseur

La valeur à l'échéance dépend du prix de l'action maximal ou minimal atteint lorsque l'option était en vigueur.

Il y a 4 version de l'option rétroviseur :

Type	Valeur à l'échéance
Standard Lookback Call	$S_T - \min(S)$
Standard Lookback Put	$\max(S) - S_T$
Extrema Lookback Call	$\max(\max(S) - K, 0)$
Extrema Lookback Put	$\max(K - \min(S), 0) - S_T$

Notes :

- La valeur à l'échéance d'une option rétroviseur standard est non-négative puisque $\min(S) \leq S_T$ et $\max(S) \geq S_T$;
- Une option rétroviseur standard n'a pas de "prix d'exercice", plutôt on le défini comme la valeur de l'action sous-jacente qui maximise la valeur à l'échéance.
  Pour une option d'achat, c'est le minimum $\min(S)$ et une option de vente le maximum $\max(S)$;
- Puisque ces derniers sont inconnus jusqu'à l'échéance de l'option, on surnomme aussi une option rétroviseur standard une option rétroviseur avec un prix d'exercice **flottant** ;
- De façon semblable, une option rétroviseur extrême se surnomme une option rétroviseur avec un prix d'exercice **fixe**.

- En anglais, « *lookback option* » ;
- La tarification des options rétroviseurs avec la formule de Black-Scholes est compliquée, on peut plutôt utiliser soit les principes actuariels de base ou le modèle binomial selon le contexte.

Options qui ne sont pas dans le cadre du cours, mais qui font partie de l'examen IFM

Options « *forward start* »

Fourni au détenteur une option à un temps futur déterminé. À l'échéance de l'option « *forward start* », le détenteur reçoit une option dont le prix d'exercice dépend du prix de l'action à ce moment.

Options « *chooser* »

Permet au détenteur de choisir à un moment futur déterminé si l'option sera une option d'achat ou de vente européenne.

Deuxième partie

Gestion des risques financiers I (ACT-1006)

37 Théorie de l'analyse de portefeuille moyenne-variance

Risque et rendement d'un actif

Rendement effectif

Rendement réellement observé sur une période de temps. Mathématiquement, c'est le pourcentage d'augmentation de la valeur d'un titre proportionnellement au montant initialement investi.

Notation

$R_{t,t+1}$ Rendement sur le titre entre t et $t+1$;
P_t Prix du titre au temps t ;
D_{t+1} Dividende payable à t.

Le rendement effectif de t à $t+1$ est donc :

$$R_{t,t+1} = \frac{D_{t+1}+P_{t+1}-P_t}{P_t}$$

On peut séparer le rendement effectif en 2 composantes :

« ***Dividend yield*** » $\frac{D_{t+1}}{P_t}$.

« ***Capital gain rate*** » $\frac{P_{t+1}-P_t}{P_t}$.

› En anglais, « *realized return* ».

Rendement effectif annuel

Pour calculer le taux de rendement effectif annuel lorsqu'il y a des dividendes, on multiplie le rendement par période de paiement pour l'obtenir sous base annuelle.

Par exemple, pour des dividendes semestriels : $1 + R_{\text{annuel}} = (1 + R_{t,t+6/12}) \times (1 + R_{t+6/12,t+1})$.

› En anglais, « *annual realized returns* ».

Rendement annuel moyen

Le rendement annuel moyen sur une période de temps est la moyenne des rendements annuels.

Notation

$\bar{R}$ Rendement annuel moyen.

$$\bar{R} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_t$$

Rendement espéré

Lorsqu'il y a plusieurs rendements possible pour un investissement, on calcule la moyenne pondérée des possibilités de rendements :

$$\mathrm{E}[R] = \sum_{i=1}^{n} p_i R_i$$

› Pareillement, la variance espérée est $\mathrm{Var}(R) = \sum_{i=1}^{n} p_i (R_i - \mathrm{E}[R])^2$.

Mesures de la variabilité des rendements :

Variance Mesure la dispersion des rendements.

$$\mathrm{Var}(R) = \mathrm{E}[(R_i - \mathrm{E}[R])^2]$$

› La racine de la variance (l'écart type) est souvent appelé **la volatilité** ;
› On peut la considérer la variance soit comme la volatilité *des rendements* ou la volatilité *du titre* ;
› Si le rendement est sans risque, la variance sera nulle ;
› En théorie on connaît la moyenne, mais en réalité on doit l'estimer avec le rendement annuel moyen $\bar{R}$:

$$\widehat{\mathrm{Var}(R)} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_t - \bar{R})^2$$

Erreur type Mesure l'erreur d'estimation du vrai rendement espéré par le rendement moyen.

› L'erreur type correspond à l'écart type du rendement moyen : $\text{Erreur type} = \frac{SD(\text{risque individuel})}{\sqrt{\text{nombre d'observations } T}}$;

› On peut calculer un intervalle de confiance **approximatif** de 95% approximatif avec $\bar{R} \pm 2 \cdot \frac{SD(R)}{\sqrt{T}}$.

Exemple

Soit les rendements annuels effectifs (de fin d'année) suivants :

Année	Rendement annuel effectif
2010	15.1%
2011	2.1%
2012	16.0%
2013	32.4%
2014	13.7%

Alors, le rendement annuel moyen entre 2010 et 2014 est :

$$\bar{R} = \frac{0.151 + 0.021 + 0.16 + 0.324 + 0.137}{5} = 0.1586$$

La variance est :

$$\text{Var}(R) = \frac{1}{5-1}\Big((0.151 - 0.1586)^2 + (0.021 - 0.1586)^2 + (0.16 - 0.1586)^2 + (0.324 - 0.1586)^2 + (0.137 - 0.1586)^2\Big) = 0.0117$$

Puis, la volatilité est $SD(R) = \sqrt{\text{Var}(R)} = 0.1082$.

Également, l'erreur type de l'estimation du rendement espéré est $\frac{SD(R)}{\sqrt{T}} = \frac{0.1082}{\sqrt{5}}$

Note sur les distributions symétriques

Pour une distribution symétrique :

› La moyenne est égale à la médiane ;

› La semi-variance équivaut à la moitié de la variance.

Risque et rendement d'un portefeuille

Notation

R_p Rendement du portefeuille.

w_i Pourcentage du portefeuille investi dans l'actif i.

$$w_i = \frac{\text{valeur de l'actif } i}{\text{valeur totale du ptf.}}$$

Le rendement du portefeuille est donc la moyenne pondérée des rendements sur chacun des actifs :

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$$

› Le rendement espéré du portefeuille $\text{E}[R_p]$ est simplement la moyenne pondérée des rendements espérés $\text{E}[R_i]$.

Covariance

Mesure le degré auquel la variabilité des deux titres bougent ensemble.

$$\text{Cov}(R_i, R_j) = \text{E}[(R_i - \text{E}[R_i])(R_j - \text{E}[R_j])]$$

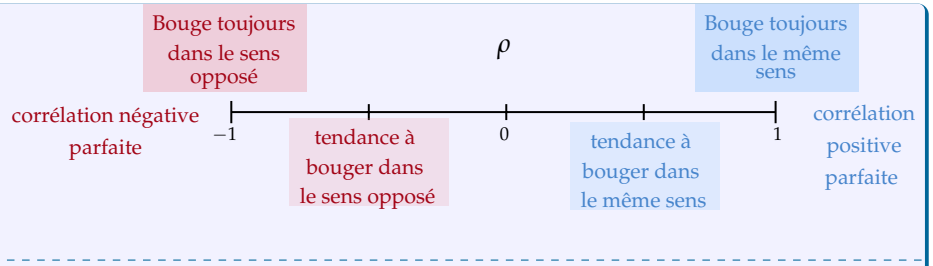
$$\widehat{\text{Cov}}(R_i, R_j) = \frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j)$$

› Le désavantage de la covariance est qu'elle varie selon l'échelle des variables mesurées ce qui complique son interprétation.

Corrélation

Mesure la puissance et de la direction de la relation linéaire entre les deux variables.

$$\rho_{i,j} = \frac{\text{Cov}(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}$$



› L'avantage de la corrélation est qu'elle n'est pas sur l'échelle des variables mesurées.

Pour un portefeuille composé de 2 actifs, $\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_{R_1}^2 + w_2^2\sigma_{R_2}^2 + 2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_{R_1}\sigma_{R_2}$.

Dans le cas plus général :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(R_p) &= \mathrm{Cov}(R_p, R_p) = \mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} R_i, \sum_{j=1}^{n} R_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \mathrm{Cov}(R_i, R_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \rho_{R_i,R_j}\sigma_{R_i}\sigma_{R_j}\end{aligned}$$

Ce qu'il faut retenir est que la **volatilité du portefeuille est pondéré par la corrélation**.

› Il s'ensuit qu'un actif avec une *volatilité faible* peut contribuer **plus** au risque d'un portefeuille qu'un actif avec une *volatilité élevée* s'il est **fortement corrélé** avec le portefeuille.

Diversification

Types de risque

Risque systématique Risque inhérent au marché.

› Alias, risque du marché ou « *undiversifiable risk* » en anglais ;

› Par exemple, les fluctuations due aux cycles économiques.

Risque non-systématique Risque inhérent à une compagnie, ou industrie, particulière.

› Alias, risque indépendant ou « *diversifiable risk* » en anglais ;

› Par exemple, la fluctuation de la valeur d'un titre découlant de nouvelles qui y sont spécifiques (p. ex., le prix de l'action d'Apple baisse de 3$ après qu'ils annoncent une mise à pied d'employés).

Diversification Réduis le risque relié au portefeuille d'une compagnie en agrégeant les fluctuations non systématiques.

Raccourci Bernoulli

Soit la probabilité p de a et la probabilité $1-p$ de b.
Alors, la variance est $(b-a)^2p(1-p)$.

Soit :

› un portefeuille de n actions ;

› le poids de chaque action $x_i = \frac{1}{n}$.

La matrice de covariance du portefeuille est :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{1,2} & \dots & \sigma_{1,n} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n,1} & \sigma_{n,2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

› Il s'ensuit qu'elle a n^2 termes dont n de variance et $n^2 - n$ de covariance dont la moitié ($\frac{n^2-n}{2}$) sont uniques.

On peut exprimer :

$$\mathrm{Var}(R_p) = \frac{1}{n} \times \underbrace{(\text{variance moyenne})}_{\substack{\text{risque systémique}\\ \text{diversifiable}}} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \underbrace{(\text{covariance moyenne})}_{\substack{\text{risque } \textit{non} \text{ systémique}\\ \textit{non} \text{ diversifiable}}}$$

› On déduit que $\mathrm{Var}(R_p) \xrightarrow[n\to\infty]{}$ covariance moyenne (entre les actions).

Analyse de portefeuille moyenne-variance

Portefeuilles efficients

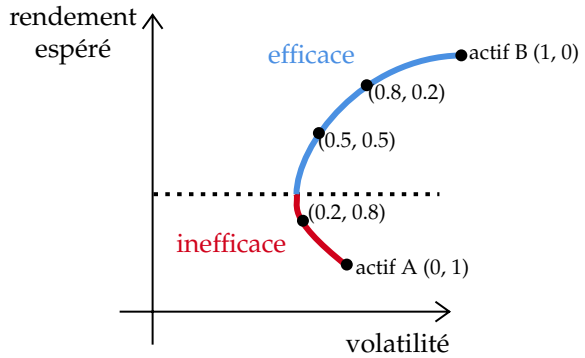
Analyse de portefeuille moyenne-variance

L'analyse de portefeuille moyenne-variance pose que les investisseurs peuvent évaluer les caractéristiques du risque-rendement d'un investissement avec les rendements espérés, les variances et les corrélations des actifs.

Hypothèses sous-jacentes à l'analyse de portefeuille moyenne-variance

1. Tous les investisseurs ont une aversion au risque.
2. Les rendements espérés, les variances et les covariances des actifs sont supposés connus.
3. Pour déterminer un portefeuille optimal, les investisseurs n'ont qu'à connaitre les rendements espérés, les variances et les covariances des rendements.
4. Il n'y a aucun frais de transactions, ni de taxes.

Pour trouver des portefeuilles efficients, on utilise le diagramme de moyenne-variance. Ce diagramme fait varier les proportions x_A et x_B investis dans deux actifs A et B :



Un portefeuille est :

efficient Si pour un niveau donné de volatilité, il offre le meilleur rendement espéré.

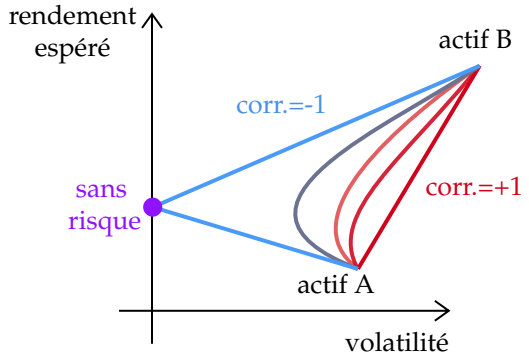
inefficient Si pour un niveau donné de volatilité, il est possible de trouver un meilleur rendement espéré.

Frontière efficiente

Courbe des portefeuilles maximisant le rendement espéré pour un niveau de volatilité donné.

Selon son niveau de risque, un investisseur choisit des proportions parmi ceux qui sont sur la frontière efficiente. Par exemple, un investisseur avec une tolérance au risque élevée pourrait choisir un portefeuille avec une plus grande volatilité pour avoir un rendement espéré plus élevé.

La corrélation entre actifs peut impacter la frontière, par exemple si l'on investi dans 2 actifs :



Pour un portefeuille composé des actifs A et B, lorsque :

$\rho_{B,W} = 1$ la volatilité du portefeuille est maximisée ;

- Dans ce cas-ci, la volatilité du portefeuille équivaut à la moyenne pondérée de la volatilité des actifs.
- Par exemple, pour un portefeuille composé de deux actifs A et B :

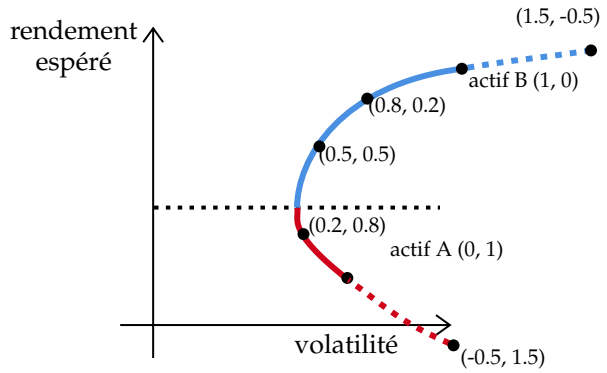
$$\begin{aligned}\sigma_P &= \sqrt{w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_Aw_B(1)\sigma_A\sigma_B} \\ &= \sqrt{(w_A\sigma_A + w_B\sigma_B)^2} \\ &= w_A\sigma_A + w_B\sigma_B\end{aligned}$$

$\rho_{B,W} < 1$ la volatilité du portefeuille est inférieure à la volatilité pondérée pondérée ;

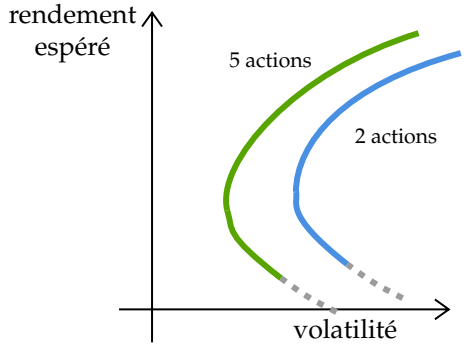
- Il s'ensuit que plus la corrélation est faible, plus il est avantageux de diversifier le portefeuille car cela réduit davantage la volatilité ;
- Si deux actifs sont parfaitement corrélés, diversifier ne change pas la volatilité et il n'y a aucun avantage à le faire.

$\rho_{B,W} = -1$ On peut construire un portefeuille sans risque.

Investir un montant négatif dans une action équivaut à un « *short-sell* » (vente à découvert) et la frontière est rallongée :



Diversifier avec plus d'actions (qui ne sont pas parfaitement corrélées) permet une meilleur frontière efficiente :



Voir la dernière sous-section pour des détails sur quand qu'il est optimal d'ajouter un nouvel investissement.

Combinaisons d'actifs risqués et avec aucun risque

On peut combiner un portefeuille risqué à un actif sans risque ayant un rendement espéré égale au taux sans risque et une volatilité nulle.

Soit un portefeuille composé à x% d'un portefeuille risqué et à $(1-x)$% d'un actif sans risque.

Notation

σ_P volatilité du portefeuille risqué.

› La volatilité de l'actif sans risque est nulle.

r_f taux sans risque (alias le rendement espéré) de l'actif sans risque.

$\mathbf{E}[R_P]$ rendement espéré du portefeuille risqué.

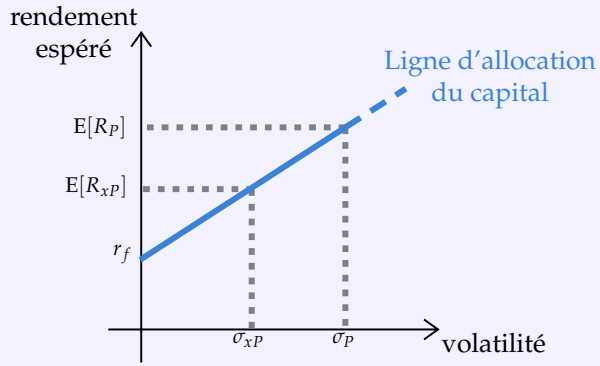
$\mathbf{E}[R_{xP}]$ rendement espéré d'un portefeuille composé à x% du portefeuille risqué.

σ_{xP} volatilité du portefeuille composé à x% d'un actif risqué

On trouve que le rendement espéré du portefeuille est $\mathrm{E}[R_{xP}] = r_f + x(\mathrm{E}[R_P] - r_f)$ et que la volatilité est $\sigma_{xP} = x\sigma_P$.

Droite d'allocation du capital

La droite d'allocation du capital (AC) illustre le risque (**volatilité**) et le **rendement** des combinaisons de n'importe quel portefeuille risqué et de l'actif sans risque :



On trouve $x = \frac{\sigma_{xP}}{\sigma_P}$ avec l'équation pour la volatilité du portefeuille puis on le substitue dans l'équation du rendement pour trouver :

$\mathrm{E}[R_{xP}] = r_f + \sigma_{xP}\frac{\mathrm{E}[R_P]-r_f}{\sigma_P}$.

- En anglais, « *capital allocation line (CAL)* » ;
- La pente de la droite d'AC représente le rendement additionnel disponible par incrément d'une unité de risque et équivaut au ***ratio de Sharpe***.

Note Le ratio de sharpe est maximisé pour le portefeuille du marché car tout autre portefeuille est en une *combinaison*.

Achat d'actions sur marge

Emprunter au taux sans risque puis acheter des actions risqués.

- En anglais, « *buying stocks on margin* » ;
- On peut aussi dire qu'on achète les actions avec un **effet de levier**.

Portefeuille avec levier

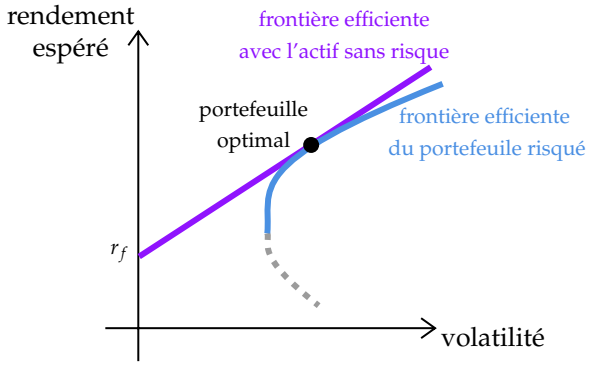
Portefeuille qui consiste d'une position courte sur l'actif sans risque.

- En anglais, « *levered portfolio* » ;
- Visuellement, ceci équivaut au pointillé de la droite d'AC ;
- Il s'ensuit qu'une vente à découvert implique un rendement *et* une volatilité plus élevée.

Exemple de vente à découvert

Par exemple, je souhaite investir dans un portefeuille de 30$ avec 10$.
Alors, $x = 300\% = 3$ puisque la portion risquée du portefeuille équivaut à 300% de mon investissement initial.

Avec la droite de l'AC et la frontière efficiente, on peut trouver le **portefeuille risqué optimal** P :



- On l'appelle aussi *le portefeuille efficient* et *le portefeuille tangent* ;
- Ce point correspond au maximum de la pente et donc maximise le ratio de Sharpe.

Droite du marché des capitaux

Contexte

Si chaque investisseur a des attentes de rendement espéré, volatilité et corrélation différentes, alors chaque investisseur aura une droite d'AC et un portefeuille risqué optimal différent.

Cependant, afin de simplifier l'analyse moyenne-variance on pose habituellement que les investisseurs ont des espérances homogènes et donc qu'ils ont tous la même estimation de la volatilité, de la corrélation et du rendement espéré de titres financiers.

L'hypothèse que les attentes des investisseurs sont homogènes implique également une même droite d'AC et un même portefeuille optimal pour le marché.

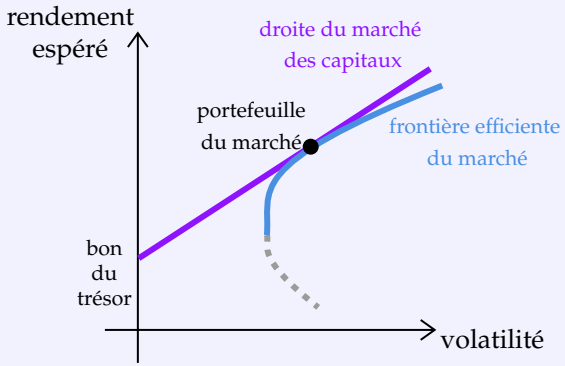
Portefeuille du marché (PM)

Portefeuille optimal du marché (PM).

- En théorie, il est composé de toutes les actions et tous les titres financiers risqués du marché ;
- En pratique, ceci est impossible et l'on utilise un indice tel que le S&P 500 ;
- En anglais, « *market portfolio* ».

Droite du marché des capitaux

La droite du marché des capitaux illustre le risque (**volatilité**) et le **rendement** des combinaisons du portefeuille du *marché* et d'un actif sans risque :



- En anglais, « *Capital Market line (CML)* » ;
- Ceci correspond à la droite d'AC avec le portefeuille du marché.

Ajout d'un nouvel investissement

Il y a 3 considérations à prendre pour l'ajout d'un nouveau investissement à un portefeuille :

1. Le ratio de Sharpe du nouveau investissement.
2. Le ratio de Sharpe du portefeuille existant.
3. La corrélation entre les rendements du nouveau investissement et du portefeuille existant.

La règle générale est donc d'ajouter un investissement au portefeuille si $\frac{\mathrm{E}[R_{\text{new}}]-r_f}{\sigma_{\text{new}}} > \rho_{\text{new},P}\frac{\mathrm{E}[R_P]-r_f}{\sigma_P}$.

38 Modèles d'évaluation des actifs

Modèle d'évaluation des actifs financiers

Notation

r_i Coût du capital pour l'investissement i.

$\mathbf{E}[R_i]$ Rendement espéré pour l'investissement i.

β_i Beta de l'investissement i.

$\mathbf{E}[R_M]$ Rendement espéré du marché.

α Rendement qui n'est pas expliqué par le risque systémique (beta).

- Ceci correspond à la différence entre le vrai rendement de l'investissement i et le rendement prédit par le MÉDAF r_i ;
- En régression, c'est **l'erreur irréductible** ε.

Coût du capital

Le rendement requis sur un actif (portefeuille, projet, etc.) pour qu'un individu investisse ses *actifs* dans une entreprise.
C'est à dire, le "coût" pour qu'une compagnie obtienne des *capitaux propres*.

- En anglais, « *cost of capital* ».

Beta β d'un actif

Mesure du risque systémique d'un actif calculé en mesurant la sensibilité du rendement d'un actif relative au rendement du marché.

- En moyenne, **le beta d'une action est d'environ 1**.
- Les industries plus sensibles aux chocs économiques ont tendance à avoir des betas plus élevés.
  - Par exemple, le secteur de luxe.
- Les industries moins sensibles aux fluctuations du marché ont tendance à avoir des betas plus faibles.
  - Par exemple, le secteur pharmaceutique qui est stable et très réglementé.
- Le Beta d'un portefeuille P est simplement la moyenne pondérée $\sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i$.

Le beta de l'actif i au portefeuille du marché est calculé par $\beta_{i,M} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} = \rho_{i,M}\frac{\sigma_i}{\sigma_M}$.

La règle générale est donc :

$\beta > 1$ l'actif a un risque systémique plus important que le marché.

$\beta = 1$ l'actif a le même risque systémique que le marché.

$\beta < 1$ l'actif a un risque systémique moins important que le marché.

$\beta = 0$ le rendement de l'actif n'est pas corrélé à celui du marché.

Note On peut avoir le beta d'un portefeuille P par rapport à un actif i qui correspond à $\beta_{P,i} = \frac{\sigma_{P,i}}{\sigma_P^2}$.

- Il est donc important de voir le beta comme une mesure de risque entre un actif et un portefeuille le contenant ;
- Dans le MÉDAF, on l'utilise comme une mesure du risque systémique entre l'actif i et le marché ;
- Plusieurs questions d'examens font appel à cette nuance.

Mesures du risque d'un actif

Pour un actif i, son :

risque total Correspond à sa volatilité σ_i.

risque systémique Par $\rho_{i,M}\sigma_i$.

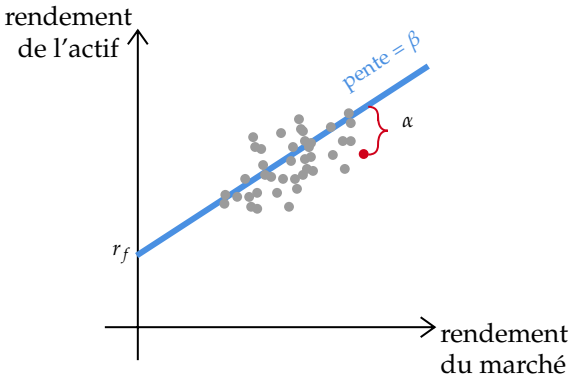
- Alias, risque du marché, risque non-diversifiable, etc.
- Le beta est donc une **mesure** du risque systémique et non *le* risque systémique.
- De façon semblable, la volatilité est une **mesure** de dispersion et non *la* dispersion.

risque non systémique Par $\sigma_i - \rho_{i,M}\sigma_i$.

- Alias, risque spécifique à une entreprise, risque diversifiable, etc.

On considère comme son **risque total**.

Avec une régression, on peut estimer le beta de l'actif en le considérant comme la pente et en considérant le rendement en excès du taux sans risque de l'actif α comme l'erreur irréductible :



Le modèle d'évaluation des actifs financiers (MÉDAF)

Le MÉDAF nous permet de trouver le coût du capital r_i (alias, le rendement espéré $\mathrm{E}[R_i]$) d'un actif en posant que le niveau de risque systématique de base correspond au niveau de risque du portefeuille du marché.

L'équation du MÉDAF est $r_i = \mathrm{E}[R_i] = r_f + \beta_i(\mathrm{E}[R_M] - r_f)$.

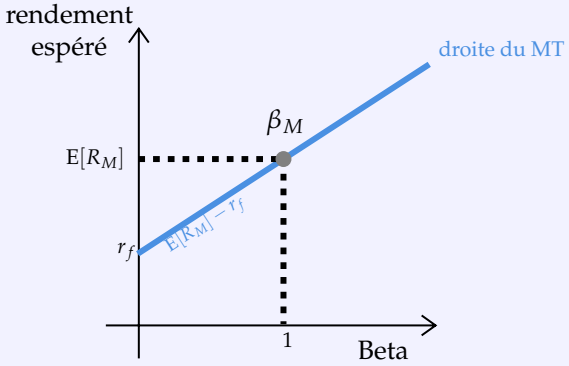
- En anglais, « *Capital Asset Pricing Model (CAPM)* » ;
- En régression, ceci correspond à l'équation pour la prévision $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$;
- Alors, le vrai rendement de l'investissement i est $r_f + \beta_i(r_M - r_f) + \alpha_i$.

Hypothèses du MÉDAF

1. Les investisseurs sont des preneurs de prix.
   - C'est à dire qu'ils transiger les titres aux prix compétitifs du marché sans pouvoir les influencer (concept de macro.) ;
   - Il n'y a pas de taxes ni de frais de transactions ;
   - Les investisseurs peuvent emprunter et prêter de l'argent au taux sans risque.
2. Les investisseurs détiennent uniquement des portefeuilles efficients.
   - Ceci implique que les investisseurs sont rationnels, qu'ils ont une aversion au risque et qu'ils cherchent à maximiser leurs investissements ;
   - C'est à dire que pour un niveau de risque (volatilité) donné, il n'y a pas de portefeuilles avec un rendement supérieur ;
   - Il s'ensuit, dans un portefeuille efficient, le **rendement espéré** de chacun des actifs est **égale** au **rendement requis** pour cet actif.
3. Les investisseurs ont des attentes homogènes pour les volatilités, les corrélations et les rendements espérés de titres financiers.
   - Des chercheurs ont trouvé que si les investisseurs n'ont pas des attentes *homogènes*, le MÉDAF n'est pas nécessairement invalide tant qu'ils ont des attentes ***rationnelles***.

Droite du marché des titres

Représentation graphique du MÉDAF.



- En anglais, « *security market line (SML)* ».

Distinction entre la droite du MC et la droite du MT

L'abscisse de la droite du marché des capitaux (MC) utilise la volatilité (alias le **risque total**).

- Seulement les portefeuilles efficients composés d'une combinaison de l'actif sans risque et du portefeuille du marché seront tracés.

L'abscisse de la droite du marché des titres (MT) utilise le beta (alias le **risque systémique**).

- Le risque non systémique est sans importance au MÉDAF ;
- Alors, la relation sous-jacente à la droite du MT ne se limite pas aux portefeuilles efficients.

Prime de risque du marché

Prime de risque du marché

la prime de risque du marché correspond à l'écart entre le rendement espéré du marché et le taux sans risque : $\mathrm{E}[R_M] - r_f$.

Elle peut être approximée de deux façons :

1. La prime de risque historique.
2. L'approche fondamentale.

› En anglais, « *Market Risk Premium* ».

Prime de risque historique

La prime de risque est calculé comme étant la moyenne historique de l'excédant du rendement du marché sur le taux sans risque.

Limitations :

› L'erreur type des prévisions est large.

› Le passé n'est pas nécessairement garant de l'avenir.

Approche fondamentale

Notation

Div_1 Dividende payable au temps 1.

P_0 Prix courant de l'action.

› Le ratio $\frac{Div_1}{P_0}$ est le **rendement de l'action** (« *dividend yield* »).

g Taux de croissance fixe des dividendes.

On pose un taux de croissance fixe des dividendes g avec $P_0 = \frac{Div_1}{\mathrm{E}[R_M]-g}$.

En réécrivant l'équation, on trouve que $\mathrm{E}[R_M] = \frac{Div_1}{P_0} + g$.

Limitation :

› L'approche est adéquate seulement pour l'ensemble de marchés et non pour des actions individuelles.

Coût des capitaux d'emprunt

Lorsque l'on cherche à estimer le coût de capitaux d'emprunt au lieu du coût de capitaux propres, il y a 2 méthodes :

1. Ajustement du rendement de la dette.
2. MÉDAF avec les betas de dette.

Notation

r_d Coût des capitaux d'emprunt.

› « *Debt cost of capital* ».

β_d Beta de la dette.

Soit une obligation zéro-coupon avec :

y Taux de rendement à l'échéance de l'obligation.

› En anglais, « *yield to maturity (YTM) of the bond* ».

p Probabilité de défaut de l'obligation.

L Espérance du montant de perte, par dollar de dette, s'il y a défaut

› On représente L par dollar de dette afin de l'inclure comme pourcentage dans l'équation de r_d plus bas.

Ajustement du rendement de la dette

Pour un investissement de 1$ dans une obligation zéro-coupon

› sans risque de défaut, on obtient $(1+y)$$ dans un an.

› avec risque de défaut, on obtient :

- $(1+y-L)$$ dans un an avec probabilité p
- $(1+y)$$ dans un an avec probabilité $(1-p)$

Donc, on trouve avec une moyenne pondérée des rendements $r_d = y - pL$.

MÉDAF avec les betas de dette

Avec le MÉDAF, on réécrit $r_d = r_f + \beta_d \left(\begin{smallmatrix}\text{prime de risque}\\ \text{du marché}\end{smallmatrix}\right)$.

Rendement requis pour un projet pleinement financé par des actions

On peut généraliser le MÉDAF afin d'estimer le rendement nécessaire pour un projet en remplaçant le beta de l'investissement par le beta du projet.

- Typiquement, on ne peut pas estimer le beta d'un projet directement puisque le projet n'est pas coté en bourse ;
- En lieu, on utilise le beta *d'entreprises semblables* ;
  - C'est à dire, des entreprises dont le secteur d'opération ou le risque est semblable à celui du projet.

Si on compare le projet à une entreprise :

- Sans effet de levier, on applique l'équation du MÉDAF directement.
- Avec effet de levier, on doit calculer le **coût du capital sans effet de levier**.

Coût du capital et beta sans effet de levier

Notation

E Valeur au marché de l'équité de l'entreprise.

D Valeur au marché de la dette de l'entreprise.

- S'il y a des capitaux propres, on calcule $D - E$.

β_U Beta des capitaux propres sans effet de levier.

- Alias, « *asset beta* ».

r_U Coût des capitaux propres sans effet de levier.

r_E Coût des capitaux propres avec levier.

r_D Coût des capitaux d'emprunt (avec levier).

w_E Proportion de l'entreprise financée par des capitaux propres.

- $w_E = \frac{E}{E+D}$.

w_D Proportion de l'entreprise financée par de la dette.

- $w_D = \frac{D}{E+D}$.

Donc, on trouve :

- le coût des capitaux propres sans effet de levier $r_U = w_E \cdot r_E + w_D \cdot r_D$, et
- le beta sans effet de levier $\beta_U = w_E \cdot \beta_E + w_D \cdot \beta_D$;
- En anglais, « *unlevered cost of capital* » ou « *asset cost of capital* ».

MÉDAF d'un projet pour une comparaison à une entreprise avec effet de levier

Avec le MÉDAF, on réécrit $r_U = r_f + \beta_U \left(\text{prime de risque du marché}\right)$.

Note Le beta de l'actif sans risque est nul puisqu'il n'y a aucun risque.

Rendement requis pour un projet avec effet de levier

Notation

τ_C Taux d'imposition sur la dette.

Dans le cas où le projet doit être financé par des capitaux propre ***et*** de la dette, on trouve le coût moyen pondéré du capital (CMPC) $r_{\text{CMPC}} = w_E r_E + w_D r_D (1 - \tau_C)$.

- Souvent, l'intérêt payable sur la dette est déductible d'impôts et donc on veut le coût de la dette après imposition ;
- En anglais, « *weighted-average cost of capital (WACC)* ».

Le CMPC se base sur le coût des capitaux d'emprunt après imposition alors que le coût des capitaux propres sans effet de levier se base sur le coût des capitaux d'emprunt avant imposition. En bref :

Coût des capitaux propres sans effet de levier	CMPC
Utilisé pour évaluer un projet financé sans emprunt ayant le même risque que l'entreprise	Utilisé pour évaluer un projet ayant le même financement et le même risque que l'entreprise

Modèles multi-factoriels

Contexte

Le MÉDAF pose que la volatilité des rendements du marché sont expliqué par ***un seul facteur***—le rendement sur le portefeuille du marché.

Le MÉDAF multi-factoriel prend plusieurs facteurs en considération pour estimer le rendement espéré. Ce modèle muti-factoriel est aussi connu comme la théorie de l'arbitrage de prix (« *arbitrage pricing theory (APT)* »).

Donc, pour le MÉDAF le portefeuille du marché est ***le*** portefeuille efficient. Pour les modèles multi-factoriels, on pose que l'on peut construire un portefeuille efficient **à partir de portefeuilles qui sont bien diversifiés**.

Notation

N Nombre de facteurs.

β_i^{Fn} Beta de l'actif i au facteur n en tenant les autres facteurs constants.

On trouve que l'équation de l'APT est $\mathrm{E}[R_i] = r_f + \sum_{n=1}^{N} \beta_i^{Fn} \left(\mathrm{E}[R_{Fn}] - r_f\right)$.

L'APT est semblable au CAPM mais comporte des hypothèses moins restrictives :

Hypothèses de l'APT

1. Un modèle multi-factoriel décrit les rendements d'un actif sans toutefois indiquer le nombre de facteurs.
2. Le risque non systémique peut être éliminé avec de la diversification et n'est pas tarifé.
3. Il n'y a pas d'arbitrage.

Portefeuilles multi-factoriels autofinançants

Si les tous les portefeuilles multi-factoriels sont autofinançants, on peut récrire : $\mathrm{E}[R_i] = \sum_{n=1}^{N} \beta_i^{Fn} \mathrm{E}[R_{Fn}]$.

› Les betas vont sommer à 0 au lieu de 1.

Fama-French-Carhart (FFC)

Contexte

L'idée de construire un modèle avec la spécification de facteurs FFC est de tirer profit du fait que, empiriquement, ces portefeuilles semblent avoir des alpha positifs.
C'est-à-dire, ils offrent des rendements qui semblent aller à l'encontre de l'hypothèse d'EM.

La spécification de facteurs FFC est **la plus courante** avec les facteurs suivants :

1 La capitalisation boursière

La capitalisation boursière sert à quantifier la taille d'entreprise.

› Les petites entreprises, c'est-à-dire les entreprise avec une faible capitalisation boursière, ont tendance à avoir des alphas positifs ;

› Malgré le fait qu'ils sont plus risqués que des grandes entreprises, ils offrent des rendements plus élevés que ceux suggérés par le MÉDAF.

2 Le ratio cours / valeur comptable

› Les entreprise dont la proportion des capitaux propres par rapport à la valeur marchande est **élevée** ont tendance à avoir des alphas positifs ;

› Ont surnomme les actions avec un ratio élevé des **actions de valeur** (« *value stocks* ») ;

› Ont surnomme les actions avec un ratio faible des **actions de croissance**.

3 L'élan

› Tire profit de l'anomalie d'un élan—des actions qui ont récemment eu des rendements anormalement élevés ont tendance a avoir des alphas positifs.

Facteurs

Portefeuille du marché (M)

Prend en considération le risque des capitaux propres.

Portefeuille gros-moins-petit (*GMP*)

Prends en considération la taille des entreprises en fonction de leurs capitalisation boursière.

- On l'estime comme la différence entre le rendement d'entreprises avec une capitalisation boursière élevée et faible $\mathrm{E}[R_{GMP}] = \mathrm{E}[R_G] - \mathrm{E}[R_P]$;
- En anglais, « *small-minus-big (SMB)* ».

Portefeuille élevé moins faible (*EMF*)

Prends en considération la diversité des rendements sur des actions de valeur et des actions de croissance.

- On l'estime comme la différence entre le rendement d'entreprises avec un ratio élevé et faible $\mathrm{E}[R_{EMF}] = \mathrm{E}[R_E] - \mathrm{E}[R_F]$;
- En anglais, « *high-minus-low (HML)* ».

Portefeuille de l'année avant l'élan d'une entreprise. (*AVE*)

Prends en considération l'élan d'une compagnie.

- On l'estime comme la différence entre le rendements des gagnants et des perdants de l'année passée $\mathrm{E}[R_{AVE}] = \mathrm{E}[R_{GAVE}] - \mathrm{E}[R_{PAVE}]$;
- En anglais, « *prior 1-year momentum (PR1YR)* » ;
- Construit en achetant le top 30% des actions et en faisant une vente en découvert du bas 30% des actions.

On trouve que $\mathrm{E}[R_i] = r_f + \beta_i^M \left(\mathrm{E}[R_M] - r_f\right) + \beta_i^{GMP}\mathrm{E}[R_{GMP}] + \beta_i^{EMF}\mathrm{E}[R_{EMF}] + \beta_i^{AVE}\mathrm{E}[R_{AVE}]$.

39 Efficience du marché et finance comportementale

Marché efficient

Marché dont les prix des titres financiers s'ajustent rapidement à toutes nouvelles informations ; les prix reflètent toute l'information disponible.
Si un marché :

est efficient le prix de l'action reflètent toute l'information disponible.

› Les stratégies passives sont optimales.

n'est pas efficient le prix de l'action peut ne pas être représentatif de sa vraie valeur.

› Des stratégies actives peuvent être supérieures à une stratégie passive.

› En anglais, « *efficient market hypothesis (EMH)* ».

Formes d'efficience de marché (EM)

En bref :

Forme d'EM	Données historiques	Informatique publique	Information privée
« *Weak* »	✓		
« *Semi-strong* »	✓	✓	
« *Strong* »	✓	✓	✓

Hypothèse d'EM « *weak form* »

Pose que les prix de titres financiers reflètent **toute l'information historique du marché**.

› Cette théorie pose donc que le prix d'un titre prend déjà en compte ses rendements, ou tendances de rendements, antérieurs et donc que ses rendements *futurs* sont indépendants du passé.

› Cette théorie implique que l'on ne peut pas obtenir des rendements supérieurs **de façon régulière** en analysant les rendements historiques.

Hypothèse d'EM « *semi-strong form* »

Pose que les prix de titres financiers reflètent **toute l'information disponible publiquement**, y compris les données historiques du marché.

› Cette théorie pose que les prix de titres financiers s'ajustent au moment que de nouvelles informations sont rendues disponibles.

- P. ex. : diffusion publique de gains inférieurs aux attentes ou une mise à pied où le prix de l'action décroît.
- P. ex., l'annonce d'une fusion où le prix de l'action augmente puisqu'elles seront rachetées à un prix supérieur à celui du marché.

› Cette théorie implique que l'on ne peut pas obtenir des rendements supérieurs **de façon régulière** en analysant des rapports annuels puisque l'information est déjà prises en considération dans le prix du titre.

Hypothèse d'EM « *strong form* »

Pose que les prix de titres financiers reflètent **toute l'information publique *et* privée**. Y compris l'information connue par des gestionnaires, mais pas le public.

› Cette théorie pose qu'il y a des investisseurs chanceux et malchanceux mais que **personne** (y compris les gestionnaires d'une compagnie) **peut obtenir des rendements supérieurs de façon régulière**.

Pourquoi un marché ne serais-t'il pas efficient ?

1. L'erreur de procuration (« *proxy error* »).
   - › Il est impossible pour un indice (« *proxy* ») de considérer *tous* les actions du marché.
   - › En lieu, il doit en choisir une fraction.
   - › P. ex., les S & P 500.
2. Biais comportementaux systémiques.
3. Préférence de risque des investisseurs.
   - › Certains investisseurs peuvent choisir de minimiser autre chose que la volatilité des rendements et détenir des portefeuilles « inefficaces ».
4. « *Non-tradable wealth* ».

- Les investisseurs sont exposés à des risques importants au-delà de leurs portefeuilles.
- Par exemple, un informaticien est exposé au risque du secteur de la technologie.
- Il pourrait donc choisir d'investir moins dans des compagnies de son domaine afin de compenser son **risque inhérent**.
- Ceci mène à une divergence du portefeuille du marché et va à l'encontre de l'hypothèse d'EM.

Preuves empiriques supportant l'hypothèse d'EM

Hypothèse d'EM « *weak* »

Plusieurs études ont été effectuées sur l'effet du passé sur le prix d'actions :

- En 1953, Kendall a effectué une étude en espérant de trouver des cycles réguliers dans les prix d'actions. En lieu, il a trouvé que les prix suivent un modèle de marche aléatoire.
- En 2017, 3 chercheurs ont trouvé que les coefficients d'autocorrélation des prix d'actions étaient presque nuls n'impliquant aucun lien entre journées consécutives.
- En 1988, 2 chercheurs ont investigué si le modèle est avec dérive :
  - Ils ont trouvé un « *short-term momentum* » dans les prix d'actions sur de courtes périodes de temps.
  - Ils ont trouvé que les prix d'actions ont tendance à s'inverser pour de longues périodes de temps.

En bref, le passé n'est pas garant du futur.

Hypothèse d'EM « *semi-strong* »

Selon la théorie, il ne devrait pas avoir de tendances dans le prix de l'action d'une entreprise **suite** à la sortie de nouvelles informations par rapport à celle-ci.

- En théorie, il ne devrait pas avoir de tendances dans le prix de l'action ***avant*** la sortie non plus.
- En pratique, il y a habituellement des différences dans le niveau d'information qui est publique ou des fuites d'informations avant l'annonce officielle.

Des chercheurs ont investigué le prix d'actions en réponse à des annonces de résultats, fusions, changements de conditions macroéconomiques, etc.

- Pour ce faire, les chercheurs ont évalué le rendement anormal d'une action comme étant le α du MÉDAF.
  - C'est à dire, la différence entre le rendement observé et l'espérance du rendement d'une action.
- 2 chercheurs ont effectué une étude sur des entreprises qui étaient l'objet d'une prise de contrôle.
  - Puisque l'entreprise qui effectue l'acquisition doit payer plus que le prix de l'action au marché boursier, une annonce d'une prise de contrôle mène à une augmentation importante du prix de l'action.
  - Ils ont trouvés que les rendements anormaux de l'action augmentent graduellement 3 mois avant l'annonce d'une prise de contrôle puis qu'au moment de l'annonce il y a un saut.
  - Par la suite, il n'y a aucune tendance.

Hypothèse d'EM « *strong* »

Pour tester le « *strong form* », il faut évaluer toute l'information d'une compagnie qui peut être obtenue par une analyse minutieuse.

- Plusieurs études ont démontré que des analystes "experts" n'obtiennent pas des rendements supérieurs au marché.
- En 2017, 3 chercheurs ont trouvés que de 1971 à 2013 seulement 40% des fonds avec une gestion active évalués ont obtenu des rendements supérieurs à l'indice Wilshire 5000.
- En 1995, Malkiel a trouvé qu'à chaque année, les gestionnaires des fonds les plus performants ont une chance sur deux de battre leur rendement de l'année précédente.
- Si les frais de gestion sont pris en compte, ces fonds deviennent encore moins intéressants.

Preuves empiriques allant à l'encontre de l'hypothèse d'EM : Anomalies du marché

Historiquement, l'hypothèse de marchés efficients était supposée adéquate. Cependant, des anomalies du marché **impactant les rendements du marché** ont fourni des preuves allant à l'encontre de l'hypothèse d'EM. Si une anomalie existe, alors un investisseur peut en tirer profit.

Cela dit, plusieurs arguments peuvent être faits à l'encontre d'anomalies :

- Les anomalies qui ont eu lieu dans le passé ne sont pas garanties de se perpétuer.
- L'exploration de données peut mener à de faux positifs—il est inévitable qu'avec suffisamment de recherche, on peut trouver des tendances anormales.
- La majorité du temps, un investisseur ne peut pas tirer profit d'anomalies à moins qu'il utilise un algorithme sur un ordinateur.

Effets de calendrier

Certaines anomalies semblent indiquer qu'un investisseur peut obtenir de meilleurs rendements à un certain moment de l'année, de la semaine ou du jour.

Effet du mois de janvier

Les rendements en janvier on tendance à être supérieurs aux autres mois alors que ceux en décembre ont tendance à être plus faibles.

- L'hypothèse courante est que les investisseurs vendent des parties de leurs portefeuilles en effectuant leurs impôts de fin d'année ce qui réduit les prix ;
- En janvier, les investisseurs achètent davantage d'actions en raison des prix faibles.

Effet du lundi

Les rendements sont plus faible le lundi (et plus élevés le vendredi) que les autres jours de la semaine.

- L'hypothèse est que de mauvaises nouvelles sortent au cours de la fin de semaine et que les investisseurs sont pessimistes le lundi en retournant au travail.

Effet du moment de la journée

Les rendements sont plus volatiles près de la fermeture et de l'ouverture des marchés. Également, le volume transigé est plus élevé.

Réactions excessives du marché

- En théorie selon l'hypothèse de marchés « *semi-strong* », toute l'information publique est calculée dans le prix courant d'une action.
- En pratique, il est arrivé que les investisseurs réagissent de façon exagérée à de nouvelles informations.

Énigme des nouvelles émissions

La réaction démesurée à une nouvelle émission fait augmenter le prix initial.

- Les investisseurs sont emportés par l'espoir d'obtenir de gros rendements.
- Cependant, dans l'espace de quelques années les rendements deviennent inférieurs à ceux de portefeuilles comparables.

Énigme de la divulgation des profits

Les annonces de profits (ou pertes) mettent du temps à se refléter dans le prix de l'action.

- Un investisseur pourrait donc acheter l'action immédiatement après l'annonce d'un profit supérieur aux attentes et obtenir un meilleur rendement.

Effet d'un élan v.s. effet d'un revirement

La forme « *weak* » de l'hypothèse d'EM utilise la marche aléatoire. Cependant, plusieurs études ont trouvés des effets résultant de l'élan ou le revirement du prix de l'action.

- L'effet d'un élan implique qu'une action dont le prix est en croissance continue d'accroître (et vice-versa pour une action dont le prix est en *dé*croissance).
- L'effet d'un revirement implique un retour à la moyenne.

Autres anomalies

Entreprises à double cotation

Deux actions découlant d'une même entreprise sont exposées aux mêmes risques. Intuitivement, ils devraient avoir des prix semblables. En pratique, ce n'est pas le cas.

Effet du cycle politique

Pour un gouvernement donné, sa première et dernière année ont des rendements supérieurs aux années intermédiaires.

› Ceci est peut-être puisque le marché anticipe de nouvelles politiques.

Effet du fractionnement d'actions

Lorsqu'une compagnie effectue un fractionnement d'actions, elle divise son action en multiples afin de diminuer le prix.

› En théorie, on s'attend à aucun effet sur le rendement d'une action puisque ceci n'a aucun impact sur sa valeur marchande.

› En pratique, les rendements sont supérieurs avant et après le fractionnement.

Effet de petites entreprises

Des petites entreprises ont tendance à obtenir des rendements anormalement élevés.

› Ces petites entreprises sont moins évaluées par les analystes financiers.

Effet du « *Super Bowl* »

Historiquement, le marché boursier a tendance à offrir des meilleurs rendements si le vainqueur est une équipe du NFC que le AFC.

› Cet effet est plus probablement le résultat de sur-exploration de données que réel.

Effet de la taille d'une compagnie

Les entreprises à faible capitalisation boursière ont tendance à obtenir de meilleurs rendements que les entreprises à grande capitalisation.

Effet du ratio cours-bénéfice

Les actions à faible ratio cours-bénéfice (ou cours-valeur comptable) ont de meilleurs rendement de façon régulière.

› Le ratio cours-bénéfice divise le prix de l'action par le rendement par action.

› Le ratio de cours-valeur comptable divise le prix de l'action par la valeur comptable par action.

Bulles et exubérance irrationnelle

Bien qu'elles ne sont pas des anomalies de marché, les bulles vont à l'encontre de l'EM.

Par exemple :

› La bulle immobilière américaine de 1996 à 2007.

› La bulle internet à la fin des années 90s où la valeur de l'indice NASDAQ a augmentée d'environ 580%.

Finance comportementale

La finance comportementale évalue l'effet du comportement humain sur les marchés financiers.

Biais non systémique

Ces comportements n'ont pas d'impact sur l'hypothèse d'efficience des marchés.

Manque de diversification

Plusieurs investisseurs individuels ne diversifient pas suffisamment leurs portefeuilles.

Notamment, en raison de :

Biais de familiarité

Les investisseurs vont avoir tendance à investir dans des entreprises avec lesquelles ils sont familiers.

Préoccupations relatives à la richesse

Les investisseurs se préoccupent principalement de la performance de leur portefeuille relatif aux portefeuilles de leurs paires. Ceci les mène à choisir des portefeuilles qui ne sont pas diversifiés dans l'espoir d'obtenir des rendements au moins égaux à celui de leurs paires.

Transactions excessives

En raison des frais de transactions, transiger des titres trop souvent diminue les rendements.

Notamment, en raison de :

- La confiance exagérée des investisseurs dans leurs connaissances et expertise financière.
- La recherche de sensations fortes.

Plus généralement, si **un** investisseur *individuel* se construit un portefeuille en **se souciant de d'autres facteurs que le rendement espéré et la volatilité**, alors l'hypothèse d'EM n'est pas affectée même si son portefeuille n'est pas efficient.

Ce qui va affecter l'hypothèse est une tendance générale qui va influencer plusieurs investisseurs comme explique cette prochaine sous-section.

Biais systémique

Ces comportements *ont* un impact sur l'hypothèse d'efficience des marchés.

Sophisme des coûts irrécupérables (l'effet de disposition)

Les investisseurs ont tendance à conserver des investissements dont la valeur a diminuée et à vendre des investissements dont la valeur a augmentée.

Émotions des investisseurs

Les investisseurs ont tendance d'être influencés par les médias où les événements qui capturent l'attention.

- Il a été démontré que les investisseurs ont tendance à acheter des actions récemment dans les nouvelles.
- Il a été démontré que les rendements d'actions ont tendance à être plus élevés les journées ensoleillées.
- Certains investisseurs ont tendance à surévaluer leur expérience financière.
  - Ceci est aussi lié au fait qu'un investisseur ayant vécu lors d'une récession a tendance à être plus conservatif.

Comportement moutonnier

Les investisseurs agissent en groupe.

Notamment, en raison que :

1. L'investisseur croit que les autres ont plus d'information et suit les tendances du marché (« *information cascade effect* »).
2. Les gestionnaires de fonds souhaitent éviter d'endommager leurs réputations s'ils détiennent des actions trop différentes de celles de leurs paires (« *relative wealth concerns* »).
3. L'investisseur peut suivre le marché afin d'avoir un rendement au moins égal au marché.

40 Risque d'investissement et analyse de projets

Risque d'investissement

Mesures du risque d'investissement

Variance

Mesure de risque symétrique qui prend en compte les rendements au-dessus et en dessous de la moyenne.

Semi-variance

Écart-type moyen des rendements **en dessous** de la moyenne.

- Utile si un investisseur se soucie seulement du risque à la baisse ;
- $\sigma_{SV}^2 = \mathrm{E}\left[\min(0, R - \mathrm{E}[R])^2\right]$;
- Le « *downside standard deviation* » est la racine σ_{SV} de la semi-variance.

Value-at-Risk (VaR_κ)

La VaR_κ est le $100\kappa^{\text{e}}$ pourcentile.

- Si X représente les **gains** (hypothèse de base pour IFM) alors une valeur négative représente une perte.
- Si X représente les **pertes** (hypothèse de base en intro 2) alors **une valeur négative représente un gain**.

Tail Value-at-Risk ($TVaR_\kappa$)

Mesure de risque qui prend en considération les valeurs au dessus (en dessous) de la VaR_κ.

- Alias, « *expected shortfall (ES)* » ou « *conditional tail expectation (CTE)* » ;
- Si X représente les pertes, on s'intéresse à l'extrémité supérieure de la distribution et $TVaR_\kappa(X) = \mathrm{E}\left[X|X > VaR_\kappa\right] = \frac{1}{1-\kappa}\int_{VaR_\kappa}^{\infty} x f_X(x)dx$;
- Si X représente les gains, on s'intéresse à l'extrémité inférieure de la distribution et $TVaR_\kappa(X) = \mathrm{E}\left[X|X \leq VaR_\kappa\right] = \frac{1}{\kappa}\int_{-\infty}^{VaR_\kappa} x f_X(x)dx$.

Mesure de risque cohérente

Une mesure de risque ρ est dite "**cohérente**" si elle rencontre ces 4 caractéristiques :

Homogénéité

Soit une v.a. X et un scalaire $a > 0$, la mesure de risque ρ est dite homogène si $\rho(aX) = a\rho(X)$.

Interprétation

Par exemple, on peut poser que $a = 1.75$ est le taux de change entre le dollar canadien et le dollar américain.
Il est alors *cohérent* que calculer $\rho(1.75X)$ soit équivalent à calculer $1.75\rho(X)$.

Invariance à la translation

Soit une v.a. X et un scalaire $a \in \mathbb{R}$, la mesure de risque ρ satisfait la propriété d'invariance à la translation si $\rho(X + a) = \rho(X) + a$.

Interprétation

Par exemple, on peut poser que $a = -500\$$ est la franchise d'un contrat d'assurance auto ; c'est-à-dire, un assuré va payer de sa poche le premier 500$ d'un accident auto.

Il est alors *cohérent* que calculer $\rho(X - 500)$ soit équivalent à calculer $\rho(X) - 500$. Par exemple, si on utilise l'espérance comme mesure de risque ($\rho(X) = \mathrm{E}[X]$) alors il devrait nous être familier que $\mathrm{E}[X - 500] = \mathrm{E}[X] - 500$.

Monotonicité

Soit les v.a. X_1 et X_2 tel que $\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$, la mesure de risque ρ satisfait la propriété de monotonicité si $\rho(X_1) \leq \rho(X_2)$ ou si pour un $\kappa \in (0, 1)$ fixé, $F_{X_1}^{-1}(\kappa) \leq F_{X_2}^{-1}(\kappa)$.

Interprétation

Par exemple, si X_1 est un assuré plus dangereux que X_2 il est *cohérent* que la mesure de risque lui charge plus cher.

Sous-additivité

Soit les v.a. X_1 et X_2, la mesure de risque ρ satisfait la propriété de sous-additivité si $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$.

Interprétation

On peut raisonner qu'il est cohérent que ce soit moins cher pour une compagnie d'assurance d'assurer deux personnes que pour deux compagnies d'assurance d'assurer chacune une personne.

Analyse du risque d'un projet

On souhaite toujours maximiser la valeur actualisée nette (VAN) d'un projet avec $VAN = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+i_t)^t}$.

Pour ce faire, on doit estimer les flux monétaires futurs ainsi que le coût des capitaux. Cependant ces estimations ont une certaine incertitude et donc nous voyons 4 façons d'évaluer l'impact de cette incertitude et d'identifier les principaux facteurs sous-jacents à la VAN d'un projet.

Analyse de rentabilité (« *break-even analysis* »)

Lorsque la valeur actualisée nette (VAN) est nulle, un projet devient rentable.
Une analyse de rentabilité calcule la valeur de chaque paramètre tel que la VAN du projet est nulle.

Notamment, on isole le « *internal rate of return (IRR)* » :

$$VAN = \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1 + IRR)^t} = 0$$

« *internal rate of return (IRR)* »

Le coût des capitaux auquel la VAN est nulle. C'est à dire, le taux auquel la valeur actualisée des rentrées de fonds équivaut la valeur actualisée des sorties de fonds permettant d'équilibrer les comptes.

On peut aussi isoler la *seuil de rentabilité* pour le nombre d'unités à vendre, le prix par unité, le coût par unité de marchandise, etc.

Analyse de sensibilité (« *sensitivity analysis* »)

Une analyse de sensibilité évalue la sensibilité de la VAN à chacune des variables en les faisant varier une à la fois. Ceci permet d'identifier les variables les plus importantes selon leurs effets sur la VAN.

On débute par calculer la VAN d'un scénario de base. Puis, on calcule la VAN en variant une des variables par un pourcentage (ou montant) fixe au dessus et en dessus du scénario de base.

› Par exemple, faire varier le nombre d'unités vendues et le prix par unité puis évaluer l'étendu (différence entre le maximum et le minimum).

Analyse de scénarios (« *scenario analysis* »)

L'analyse de scénarios est semblable à l'analyse de sensibilité sauf que l'on fait varier plusieurs variables à la fois. Le plus la VAN varie selon les différents scénarios, plus le risque du projet est élevé.

Simulation Monte-Carlo

On estime la distribution de probabilité d'une quantité d'intérêt (e.g., la VAN).
Les étapes générales sont :

1. Construire le modèle d'intérêt ;
   - C'est à dire, une fonction de plusieurs variables entrantes.
2. Simuler des nombres aléatoires d'une distribution **posée** pour chacune des variables ;
3. Déterminer la valeur de la quantité d'intérêt avec les valeurs calculées précédemment ;
4. Répéter les 2 étapes précédentes un grand nombre de fois (e.g. 10 000 itérations) ;
5. Calculer des mesures d'intérêt (moyenne, variance, etc.) puis tracer les valeurs simulées comme une distribution de probabilité.

Note Si il y a un taux d'imposition, il est appliqué aux flux monétaires nets futurs.

Options réelles

L'idée des options dites « réelles » est de prendre les concepts d'options financières et les appliquer aux décisions d'investissement d'une entreprise.

- Donc on applique les techniques d'options financières pour décider si l'on devrait investir dans un nouveau projet, l'élargir, le réduire, etc.

Options réelles

Options de décisions d'investissement qui donnent aux gestionnaires le *droit* (pas l'obligation) de faire une décision dans le futur lorsque de nouvelles informations seront rendues disponibles.

- En anglais, « *real options* » qui sont des « *capital budgeting options* ».

Arbres de décision

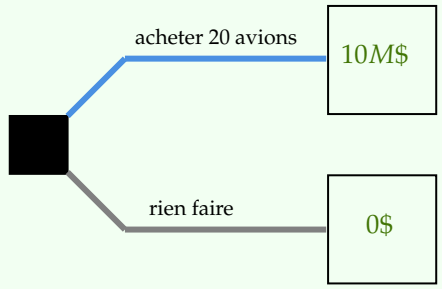
L'arbre de décision est une approche graphique qui illustre les différentes décisions possibles et le résultat de chaque décision l'économie.

- Dans un arbre binomial, les branches représentent une incertitude qui ne peut pas être contrôlée.
- Dans un arbre de décisions, les branches représentent les différents choix qui s'offrent à un gestionnaire.

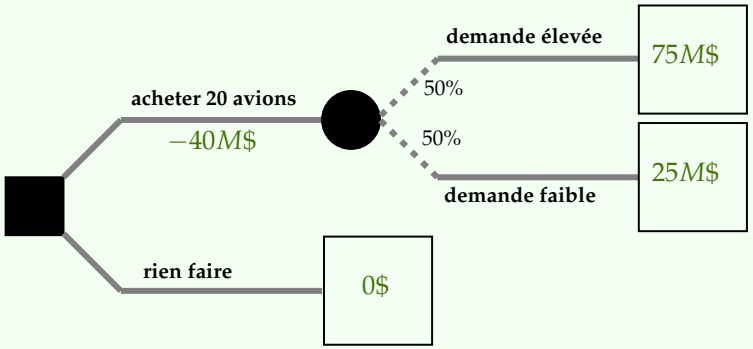
Exemple d'arbre de décision

Soit une compagnie aérienne qui pense acheter 20 avions commerciales au coût de 2M$ chaque. L'ajout des avions permet des revenus additionnels de 50M$. On souhaite savoir l'espérance de la valeur accumulée de l'investissement.

1 On trace l'arbre de décision initial :



2 Si on pose qu'il y a une chance sur deux d'avoir une forte demande, on agrandit l'arbre :



› Les carrés sont des **nœuds de décisions** et les cercles des **nœuds d'information**.

› Les flux financiers sont indiqués au **moment qu'ils sont réalisés**.

3 On trouve l'espérance de la valeur accumulée comme la moyenne pondérée des scénarios :

$$\text{E[valeur à l'échéance]} = 0.5 \times (75 - 40) + 0.5 \times (25 - 40) = 10$$

On peut continuer d'ajouter des possibilités et de complexifier l'arbre.

› Par exemple : acheter 5 avions puis, si la demande est élevée, acheter 15 avions additionnels à un prix plus élevé de 2.2M$ par avion.

Option de calendrier (« *timing option* »)

Contexte

Les options de calendrier donnent un délai à une entreprise avant d'avoir à prendre une décision.

L'avantage est, qu'en attendant avoir de faire une décision, l'entreprise pourrait avoir plus d'information et réduire l'incertitude de la décision.

Le calcul de la valeur d'une option de calendrier peut se faire selon la structure de Black-Scholes.

Il y a 3 facteurs qui ont une influence sur le calendrier de l'investissement :

1 La VAN de l'investissement

On investit seulement si

$$VAN(\text{invest. aujourd'hui}) > VAN(\text{avec une option réelle})$$

ou

$$> \text{valeur de prendre l'option d'attendre}$$

› Parfois prendre on considération l'option réelle cause une VAN négative à devenir positive.

2 La volatilité

La valeur d'une option d'achat augmente avec la volatilité. Donc, attendre est la meilleur option s'il y a beaucoup d'incertitude vis-à-vis un investissement.

3 Les dividendes

L'équivalent des dividendes pour une option réelle sont les flux monétaires qui auxquels on renonce en attendant. À moins qu'il y ait un coût associé, il est souvent mieux d'attendre.

Exemple d'option de calendrier

Soit l'entreprise ABC qui songe à acheter 15 avions. ABC peut acheter une option réelle du fabricant d'avions qui permet d'acheter les avions dans un an au même prix qu'aujourd'hui, soit 2M.

ABC s'attend à ce que les avions génèrent 3.5M$ de dollar dans la première année, puis que ce montant croit de 5% par année. Également, on pose :

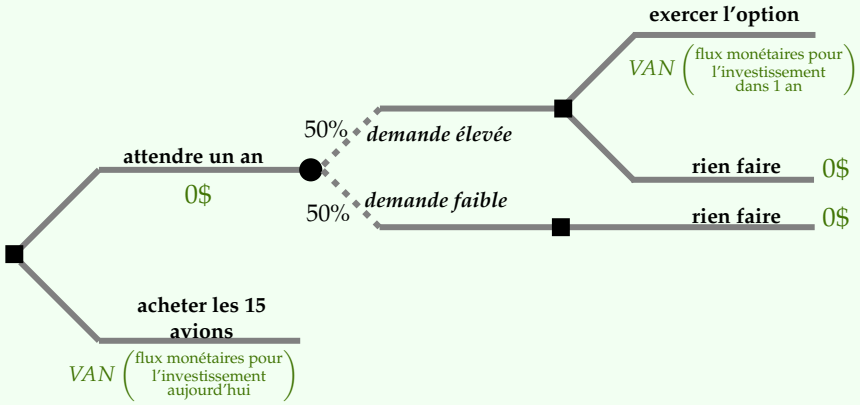
› Le coût du capital requis est de 15%.

› Le taux sans risque effectif est 5%.

› La volatilité est de 45%.

ABC souhaite donc savoir si elle devrait acheter les avions aujourd'hui ou attendre un an ?

1 On trace l'arbre de décision :



› On voit qu'au temps 0, ABC doit choisir si elle va acheter les avions ou attendre un an.

On débute par trouver la valeur de l'investissement en achetant les avions aujourd'hui (à $t = 0$) :

1 Calculer la VAN des en supposant qu'ils vont croître de 5% à chaque année, pour toujours (perpétuité) :

$$VAN(\text{rendements}) = \frac{3.5M\%}{0.15 - 0.05} = 35M\$$$

2 Calculer la VAN des coûts :

$$VAN(\text{coûts}) = 2M\$ \times 15 = 30M\$$$

3 La VAN nette est donc :

$$VAN(\text{rendements}) - VAN(\text{coûts}) = 35M\$ - 30M\$ = 5M\$$$

On continue par trouver la valeur de l'investissement en achetant les avions dans un an.

1 On pose la structure de Black-Scholes en traitant l'option d'attendre comme une option d'achat tel que $C = F^P(S)N(d_1) - F^P(K)N(d_2)$ où :

S_T Valeur au marché de l'investissement au temps T.

K Coût pour acheter les avions dans 1 an.

› On peut le voir comme un analogue au prix d'exercice.

2 Trouver $F^P(S)$:

$VAN(\text{revenus sur l'investissement}) - VAN(\text{revenus de la première année})$

$= 35M\$ - 3.5M\$(1.15)^{-1} = 31\,956\,522\$$

› Lorsque nous avons des actions, nous recevons l'action dans un an et donc devons soustraire les dividendes payées avant que l'on reçoit l'action ;

› De façon semblable, on soustrait les revenus de la première année sur l'investissement que nous ne recevons pas.

3 Trouver $F^P(K)$:

$$30M\$(1.15)^{-1} = 28\,571\,429\$$$

4 Calculer $N(d_1) = N(0.4738) = 0.6822$ et $N(d_2) = N(0.0238) = 0.5095$.

5 Trouver la valeur de l'option :

$$\begin{aligned} C &= F^P(S)N(d_1) - F^P(K)N(d_2) \\ &= 31\,956\,522\$ \times 0.6822 - 28\,571\,429\$ \times 0.5095 \\ &= 7\,243\,090\$ \end{aligned}$$

Puisque la valeur de l'investissement avec l'option d'attendre est supérieur à la valeur de l'investissement en achetant les avions aujourd'hui, il est optimal d'attendre avant d'investir.

Sizing options

Ajouter plus de détails et pratiquer comment établir les équations.

Options de croissance

Lorsqu'une entreprise est optimiste pour le futur, une option de croissance lui donne l'option d'augmenter ses investissements.

› Par exemple, acheter 5 avions puis garder l'option d'en acheter 15 dans le futur si les choses vont bien.

Options d'abandon

Lorsqu'une entreprise est pessimiste pour le futur, une option d'abandon lui donne l'option d'abandonner un projet.

› La $\text{valeur de l'option d'abandon} = VAN(\text{projet avec l'option}) - VAN(\text{projet sans l'option})$;

› Habituellement, elle est exercée si la VAN des flux monétaires reliés à l'abandon d'un projet sont plus élevée que ceux reliés au maintient du projet.

41 Structure du capital

Structure du capital

Regroupe la dette et les capitaux propres qu'une entreprise utilise pour financer ses activités.

Financement par actions

Financement par actions pour des compagnies privées

Sources de capital

Contexte

Typiquement, lorsqu'un entrepreneur débute il obtiendra du financement à partir de sa famille et ses amis. Puis, lorsque l'entreprise commence à croître, des sources de financement externes sont nécessaires.

« *Angel Investors* »

Typiquement des individus riches qui sont eux-mêmes des entrepreneurs. Ils investissent dans des compagnies et reçoivent en échange une partie des actions.

- Puisqu'il est difficile d'évaluer une entreprise à son début, les investisseurs détiennent habituellement des « *convertible notes* » en lieu d'actions.
- Ces notes sont une dette à court terme qui se transforment en actions (à un rabais) lorsque la compagnie sera financée par des capitaux propres.

« *Venture Capital Firms* »

Lorsqu'une entreprise nécessite plus de capitaux que peuvent offrir des « *angel investors* », elle fait appel à une « *venture capital firm* ».

- Ces « *venture capital firms* » forment des « *limited partnerships* » avec des entreprises en démarrage.
- Les « *venture capital firms* requièrent habituellement beaucoup de contrôle en échange pour les fonds prêtés.
- Souvent, les commanditaires sont activement impliqués dans l'entreprise et font partie du conseil d'administration.

« *Private Equity Firms* »

Ces entreprises sont semblables aux « *venture capital firms* » sauf qu'ils investissent dans les capitaux propres de compagnies privées.

- Souvent, ces entreprises achètent des compagnies publiques afin de les "privatiser" dans un « *leveraged buyout (LBO)* ».

« *Institutional Investors* »

Par exemple, des fonds de pension, des compagnies d'assurance, des fondations, etc.

- Ils ont des gros montants d'argent à investir.

« *Corporate Investors* »

Des compagnies qui investissent dans d'autres compagnies privées.

- Soit pour des rendements additionnels ou pour suivre une stratégie.

Investissement « *Venture capital* »

- Typiquement, lorsqu'une compagnie vend des participatifs pour la première fois, elle émet des **actions privilégiées** et non des **actions ordinaires**.
- Les actions privilégiées se comportent de façon différente selon l'âge de la compagnie.
  - Des **compagnies adultes** (« *mature* ») offrent des dividendes préférentiels, une valeur en cas de liquidation ou des droits de vote avec les actions privilégiées.
  - Des **jeunes compagnies** offrent un droit de réclamation prioritaire aux actifs d'une compagnie dans le cas de liquidation avec les actions privilégiées.
- Une collecte de fonds pour une compagnie s'appelle une série de financement.
  - En ordre, on appelle les séries : « *Angel* », « *seed round* », . . . , « *IPO* ».
  - En anglais, « *funding round* ».

Évaluation avant et après une série de financement Évaluation :

préfinancement Valeur d'une entreprise *avant* une série de financement.

- En anglais, « *pre-money valuation* ».

après financement Valeur d'une entreprise *après* une série de financement.

- En anglais, « *post-money valuation* ».

› Correspond à l'évaluation préfinancement + montant investit.

› De façon alternative, le nombre de parts *après* la série $\times$ le prix par action *avant* la série.

On peut trouver le **pourcentage de participation** d'un investisseur comme $\frac{\text{montant investit}}{\text{évaluation après financement}}$.

› De façon alternative, $\frac{\text{nombres d'actions détenues par l'investisseur}}{\text{nombre total d'actions}}$.

Conditions de financement « *Venture Capital* » Les distinctions principales des actions privilégiées que détiennent habituellement les « venture capitalists » aux actions ordinaires se résument à ces caractéristiques :

Préférences de liquidité

Dans le cas de liquidation d'une entreprise, un montant minimal doit être payé aux détenteurs d'actions privilégiées avant que tout paiement soit effectué aux détenteurs d'actions ordinaires.

› La préférence est trouvée par : multiplicateur $\times$ investissement initial

Ancienneté

Ceux qui investissent plus tard peuvent demander une ancienneté plus élevée que les investisseurs des séries antérieures.

› S'ils sont donnés une ancienneté égale, ils sont *pari passu* (latin pour "de rang égal").

Droits de participation

Octroie les paiements payables aux détenteurs d'actions ordinaires comme si les actions auraient été converties en actions ordinaires.

Protection anti-dilution

Si une série de financement a lieu à un prix inférieur à une ronde précédente, la protection permet aux investisseurs de convertir leurs actions privilégiées en actions ordinaires à un prix inférieur.

› Ceci permet d'augmenter le pourcentage de participation des investisseurs dans l'entreprise.

Participation au conseil d'administration

Un investisseur peut tenter d'arranger la désignation d'un ou plusieurs membres au conseil d'administration.

Sortie d'un investissement dans une compagnie privée Un investisseur a deux approches possibles :

Acquisition D'autres investisseurs achètent les parts de l'entreprise.

Émission publique Avec un appel public à l'épargne (APE).

› En anglais, « *(initial) public offering (IPO)* » pour le premier puis « *additional public offering (APO)* » pour les suivants.

Financement par actions pour des compagnies publiques

Le premier APE (financement par action pour une compagnie publique) est la première fois qu'une entreprise vend ses actions au public. Il y a plusieurs avantages et désavantages pour une entreprise à devenir publique.

Les avantages principaux :

- Plus de liquidité.
  - Les investisseurs qui détiennent déjà des actions de la compagnie peuvent diversifier leurs portefeuilles en vendant des actions.
- Meilleur accès à du financement.
  - Une entreprise a habituellement accès à des prêts plus importants après qu'elle devient publique.

Les désavantages principaux :

- Détenteurs d'actions dispersés.
  - Les investisseurs ont moins de poids sur les actions de la compagnie.
- La conformité longue et coûteuse.
  - Les compagnies publiques sont sujettes à beaucoup de règlements.

Types d'offres

- Un souscripteur (« *underwriter* ») est une entreprise de services d'investissement qui gère l'appel public à l'épargne.
- Il y a 2 types (principales) d'offres :
  1. L'offre **primaire** offre des nouvelles actions.
  2. L'offre **secondaire** offre des actions des détenteurs actuels.

Il y a plusieurs mécanismes de vente :

Meilleurs efforts

Le souscripteur n'offre aucune garantie de vente des actions qui sont vendues au meilleur prix possible.

- Souvent ces ententes ont une clause tout ou rien comme quoi que l'entente est annulée s'il reste des actions qui ne sont pas vendues.
- Habituellement, ce mécanisme est utilisé pour de petits APE.

Vente garantie

Le souscripteur garantit que toutes les actions seront vendues au cours vendeur.

- Approche la plus courante.
- Les souscripteurs achètent les actions avec un rabais puis tentent de les revendre au cours vendeur.
- Le souscripteur assume le risque qu'elles se vendent pour moins cher.
- Pour cette raison, ils vont souvent sous-évaluer le prix d'une action pour une vente garantie.

Vente aux enchères

Les actions se vendent à un même prix aux investisseurs les plus offrants afin qu'elles soient toutes vendues.

Mécanisme de l'APE

1 Un groupe de souscripteurs gère l'APE

C'est l'approche typique et ils sont importants car ils :

- font la promotion de l'APE.
- aident l'entreprise avec le coté législatif de l'APE.
- maximisent la probabilité de succès de l'action en ajustant le prix à la demande (« *book building* »).

2 L'entreprise dépose une *déclaration d'enregistrement*

La déclaration (« *registration statement* ») contient, entre autre, de l'information fiscale et a 2 composantes principales :

Prospectus provisoire contient l'information nécessaire aux investisseurs potentiels.

- Ce prospectus est distribué *avant* l'APE et est utilisé avec le « *road show* ».
- Il contient des informations sur les opérations de l'entreprise, son état fiscal, les risques potentiels, etc.
- En anglais, on le surnomme aussi le « *red herring* ».

Prospectus définitif contient les détails sur l'APE (nombre d'actions disponibles, cours vendeur, etc.)

3 Le souscripteur évalue la valeur de l'entreprise

La valeur est établie selon une de ces méthodes :

1. En fonction de la VAN des flux monétaires futurs.
2. En fonction de compagnies semblables.
   - Le souscripteur se base sur des multiples de ratios ;
   - Par example, un multiple basé sur le ratio cours-bénéfices.

Également, une fois qu'une échelle de prix potentiels est établie, le souscripteur :

- organise une conférence avec ses clients les plus importants pour vendre l'entreprise (« *road show* »).
- ajuste le prix de l'action selon la demande perçue pour maximiser la probabilité de succès (« *book building* »).

4a L'entreprise paye le souscripteur

L'entreprise paye l'écart de souscription (« *underwriting spread* »).

- Ceci est un pourcentage du prix d'émission.
- P. ex., 5% sur un prix de 10$ engendre des frais de 0.5$ par action permettant le souscripteur d'acheter l'action pour 9.50$ puis de la vendre pour 10$.

4b Le souscripteur gère son risque

Suite à l'APE, les souscripteurs peuvent se protéger davantage contre le risque de pertes, ils peuvent :

- se procurer une option d'attribution excédentaire (« *over-allotmentt* »)
- se procurer une option de couverture (« *greenshoe provision* »).

Ces options permettent au souscripteur d'émettre un nombre limité d'options additionnelles au cours vendeur.

Note Il peut avoir plusieurs souscripteurs qui gèrent l'APE dont un qui sera le souscripteur principal.

- Les plus petits souscripteurs (« *syndicates* ») reçoivent des conseils du souscripteur principal.

Exemple de profit sur un APE

Je suis un investisseur qui cherche à acheter 2000 actions pour un APE.

- Il y a 80% de chance de sur-souscription à un ratio de 16 :1, dans ce cas-ci le prix de l'action grimpe de 20%.
- Sinon, le prix de l'action descend de 5%.
- Le cours vendeur (« *offer price* ») est de 15$.

Mon profit sera :

$$2000 \times \frac{1}{16} \times (1.2 * 15 - 15) \times 0.8 + 2000 \times (0.95 * 15 - 15) \times 0.2 = 0$$

- Donc, dans le cas de sur-souscription il faut pondérer le nombre d'actions qu'on désire acheter par ce que l'on va réellement obtenir.

Énigmes d'APE Quatre aspects de l'APE sont un mystère aux économistes financiers :

Sous-évaluation

En moyenne, le prix d'émission d'un APE est trop faible.

- En partie, ceci est puisque les souscripteurs souhaitent minimiser leur risque.
- Ceci cause les rendements d'un APE à être anormalement positifs.
- La sous-évaluation est avantageuse pour les souscripteurs et les investisseurs qui achètent directement des souscripteurs, mais mauvaise pour l'entreprise et les investisseurs qui détiennent des actions avant l'émission.

Cycles

Les nouvelles émissions semblent cycliques.

- Le nombre d'APE n'est pas seulement influencé par le besoin de capitaux propres (alias, en temps de crise).

Coût d'un APE

Les coûts de transaction d'un APE sont élevés.

- Les frais ne semblent pas d'être variables selon la taille de l'émission.
- Les souscripteurs avec légèrement moins de frais ont tendance à avoir

une plus grande portion du marché que les souscripteurs avec beaucoup moins de frais.

Performance à long terme

En moyenne, la performance à long terme suite à un APE n'est pas bonne.

Financement par emprunt

Dette corporative

Une entreprise finance ses activités avec des capitaux propres et de la dette. Des obligations émises par des entreprises sont nommées des ***obligations corporatives*** dont il y a deux types : publique et privée.

Dette publique Dette transigée en bourse.

Fiducie

Entente légale entre l'émetteur de la dette et une société fiduciaire.

- La société défend les intérêts des détenteurs de l'obligation.
- Elle s'assure que l'entreprise reste conforme aux conditions de la fiducie.

Il y a 4 types de dettes corporatives courants : des billets, des débentures, des obligations hypothécaires et des titres adossés d'actifs. Ces types tombent dans l'une des deux catégories suivantes :

Dette non garantie

Dans le cas d'une faillite, les détenteurs de la dette ont seulement recours aux actifs qui ne sont pas réclamés comme garantie à d'autres dettes.

- Par exemple, des billets et débentures.
- En anglais, « *unsecured debt* ».

Dette garantie

Dans le cas d'une faillite, les détenteurs ont le droit à des actifs spécifiques qui ont été désignés comme garantie.

- Par exemple, des obligations hypothécaires et des titres adossés d'actifs.
- En anglais, « *secured debt* ».

Le niveau d'ancienneté d'une obligation corporative indique la priorité d'un détenteur dans la réclamation d'actifs.

- Typiquement, les détenteurs de débentures imposent une clause empêchant l'entreprise d'émettre des dettes avec une priorité plus élevée.

› Ces dettes qui sont moins prioritaires sont nommées des débentures subordonnées.

Les obligations internationales ont 4 catégories générales :

Obligations intérieures

Obligations émises par une **entité interne** dans la **devise interne** qui sont **achetées par des investisseurs étrangers**. Par exemple, une obligation avec une valeur de rachat de 100 CAD$ émise par le gouvernement canadien achetée par un américain.

› En anglais, « *domestic bonds* ».

Obligations étrangères

Obligations émises dans un marché interne par une **entité étrangère** dans la **devise interne** qui sont **achetées par des investisseurs locaux**. Par exemple, une obligation avec une valeur de rachat de 100 CAD$ émise par une entreprise américaine achetée par un Canadien.

› En anglais, « *foreign bonds* » ;

› Plusieurs pays attribuent des noms particuliers aux obligations étrangères ;

› Par exemple, aux États-Unis on les surnomme des « *yankee bonds* », au Japon les « *samurai bonds* » et au Canada les « *maple bonds* »,

Euro-obligations

Obligations émise par une **entité interne ou étrangère** dans une **devise étrangère** pouvant être **transigé n'importe où**.

› En anglais, « *eurobonds* » ;

› Le **risque additionnel** est la **dépréciation de la devise étrangère** relatif à la devise domestique, ainsi réduisant la valeur de l'obligation.

Obligations multimarchés

Obligations transigées sur plusieurs marchés en même temps.

› En anglais, « *global bonds* ».

Dette privée Dette négociée directement avec une banque ou un petit groupe d'investisseurs.

Contexte

L'*avantage* de la dette privée est l'**émission moins coûteuse** car il n'y a pas de frais. Le *désavantage* est que le marché **n'est pas liquide**.

Le marché privé est *plus grand* que le marché publique.

Il y a 2 types principaux de dette privée :

Prêt à terme (« *term loans* »)

Emprunt d'une banque pour une période de temps fixée.

› Si plusieurs banques financent un même prêt, c'est un « *syndicated bank loan* » ;

› Si on emprunte jusqu'à un certain montant, c'est une **marge de crédit** (« *revolving line of credit* »).

Émission privée (« *private placement* »)

Émission d'obligations à un petit groupe d'investisseurs directement.

› Cette émission est moins restrictive qu'un prêt à terme.

Autres

Obligations émises par des gouvernements Les gouvernement émettent de la dette pour financer leurs projets.

Dette souveraine

Dette émise par le gouvernement national nommées des "titres du trésor".

Il y a 4 types de titres du trésor :

Type	Coupons	Échéance
Bon du trésor	zéro	< 1 ans
Certificat du trésor	semestriels	1 à 10 ans
Obligation du trésor	semestriels	> 10 ans

Titre du trésor protégé contre l'inflation Obligation avec des coupons semestriels dont **le capital et le paiement sont *ajustés pour l'inflation***.

- En anglais, « *Treasury inflation-protected securities (TIPS)* » ;
- Les « *TIPS* » sont émises avec des échéances de 5, 10 et 30 ans.

Le processus de revendre la dette souveraine sans les coupons s'appelle le « *Separate Trading of Registered Interest and Principal of Securities (STRIPS)* ».

- Puisque les bons du trésor n'ont déjà pas de coupons, ceci s'applique seulement pour des échéances d'au moins 1 an.

Obligations municipales

Dette émise par des gouvernements provinciales (de l'état aux É.-U.) ou municipales.

- Habituellement, les rendements sont **libres d'impôts** fédérales.
- Le taux peut être fixe ou variable.
  - Si l'obligation a un taux de coupon variable (« *floating rate* ») il est ajusté périodiquement (p. ex., à chaque jour, semaine, mois, etc.) selon les conditions du marché.
- Le taux de défaillance des ses obligations est plus élevée que les obligations fédérales à environ 4% depuis 1970 aux É.-U.

Les obligations peuvent être :

À caractère général Les rendements sont adossés par la ville.

- En anglais, « *general obligation bonds* ».

Spécifiques Les rendements proviennent d'un projet en particulier de la ville pour lequel il faut lever des fonds.

- En anglais, « *revenue bonds* ».
- Si les rendements provenant du projet spécifique sont *en plus* des revenus généraux de la ville, c'est un « *double-barreled bond* ».

Note Il est important de savoir que les sécurités financières (e.g., « *t-bills* ») ont des coupons semi-annuels et de le considérer dans des questions relatives aux coupons.

Titres adossés à des actifs

Titre adossé à des actifs

Titre dont les rendements proviennent d'actifs sous-jacent.

- Par exemple, les titres adossés à des créances hypothécaires (« *mortgage-backed securities (MBS)* »).
- Également, des MBS peuvent être adossés à d'autres MBS (« *collateralized debt obligation (CDO)* »).
- En anglais, « *asset-backed security (ABS)* ».

Propositions de Modigliani-Miller

Notation

U Valeur au marché de l'équité d'une entreprise **sans** levier.

E Valeur au marché de l'équité d'une entreprise **avec** levier.

D Valeur au marché de la dette d'une entreprise (avec levier).

V_L Valeur au marché d'une entreprise **avec** levier.

› $V_L = E + D$.

V_U Valeur au marché d'une entreprise **sans** levier.

› $V_U = E + 0 = U$.

Proposition I (sans impôts)

La structure du capital n'a aucun impact sur la valeur d'une entreprise et $V_L = V_U$ sous les conditions suivantes :

Conditions pour la proposition 1 de M.-M.

1. Tous les investisseurs ont les mêmes attentes de rendements.
2. Les marchés financiers sont parfaitement concurrentiels.
   - › Il n'y a pas de taxes, de frais de transaction, de coûts de faillite ;
   - › En anglais, « *perfect competition* ».
3. Les investisseurs peuvent emprunter et prêter au taux sans risque.
4. Il n'y a pas de conflits d'intérêts entre les gestionnaires et les actionnaires (aucun coût d'agence).
   - › Les gestionnaires agissent dans le meilleur intérêt des actionnaires.
5. Les décisions d'investissement et de financement d'une entreprise sont indépendantes.
   - › C'est-à-dire que les décisions de financement n'ont aucune influence sur les revenus que génèrent les investissements.

Par exemple, selon M.-M. I, une compagnie composée à $w_E = 75\%$ de capitaux propres et $w_D = 25\%$ de dette est équivalente à une entreprise composée à $w_D = 75\%$ de dette et à $w_E = 25\%$ de capitaux propres. La structure d'une entreprise n'a donc aucun impact sur la décision d'investissement d'un investisseur—il peut augmenter ou diminuer le levier de son portefeuille au taux sans risque (condition 3) et donc obtenir une structure de capital à son goût sans égard. En anglais, ceci s'appelle du « *homemade leverage* ».

Si un investisseur ajoute $x\$$ de dette à son portefeuille, il doit diminuer ses capitaux propres de $x\$$ afin que la valeur de son portefeuille demeure inchangée. Pour trouver le montant $x\$$ à emprunter, on pose :

$$\frac{D+x}{E-x} = \left(\frac{D}{E}\right)_{\text{souhaité}}$$

Proposition II de M.-M. (sans impôts)

Rappels :

1. Sous la proposition I de M.-M., $V_U = V_L$.
   - Il s'ensuit que $U = E + D$.
2. Sans impôts, $r_{CMPC} = \frac{E}{E+D} r_E + \frac{D}{E+D} r_D$.
   - Il s'ensuit que $r_U = r_{CMPC}$.

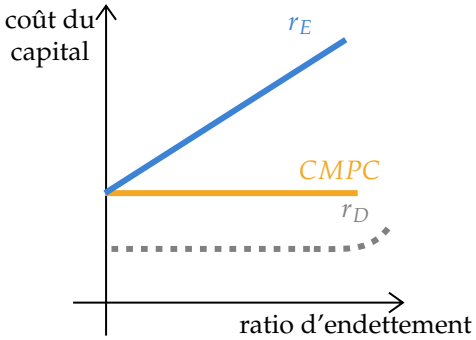
En réécrivant l'équation du r_{CMPC}, on trouve que $r_E = r_U + \frac{D}{E}(r_U - r_D)$.

La préposition 2 de M.-M. stipule que **le coût des capitaux propres avec levier augmente avec le ratio d'endettement d'une entreprise**.

- On peut voir que l'effet d'une augmentation de la dette D est d'augmenter le rendement sur les capitaux propres avec effet de levier r_E.

- Initialement, le coût de la dette est plus faible que celui des capitaux propres puisque les rendements sont plus faibles et moins risqués.
- Cependant, plus une entreprise a de la dette, plus le risque que les actionnaires ne se fassent pas payer augmente.
- Alors, le coût croissant des capitaux propres contrebalance l'avantage d'utiliser davantage de dette ce qui mène à un CMPC constant.

Visuellement :



Exemple de calcul du CMPC et du coût des capitaux propres sans effet de levier

Soit la compagnie LMN qui veut changer sa structure de capital pour avoir un ratio d'endettement (D/E) de 0.75.

- Le ratio d'endettement (D/E) d'LMN est présentement de 0.50.
- Le coût des capitaux d'emprunt (r_D) est présentement de 7%.
- Le coût des capitaux propres (r_E) est présentement de 11.5%.
- Augmenter le ratio ratio d'endettement (D/E) d'LMN à 0.75 augmente le coût des capitaux d'emprunt à 9%.

On trouve le CMPC, et donc le coût des capitaux propres sans effet de levier r_U, avec $r_{CMPC} = r_U = \frac{0.5E}{1.5E} r_E + \frac{1E}{1.5E} r_D = \frac{1}{3} \times 0.115 + \frac{2}{3} \times 0.07 = 0.10$.

Avec $r_U = 10\%$, on trouve que le coût des capitaux propres avec effet de levier est $r_E^* = r_U + \frac{D}{E}(r_U - r_D^*) = 0.10 + 0.75(0.10 - 0.09) = 0.1075$.

CMPC avec plusieurs titres Les deux types de titres qui forment typiquement la structure du capital d'une entreprise sont les capitaux propres et la dette. Cependant, Si une compagnie a plus de titres, il suffit de faire une moyenne pondérée des rendements.
Pour n types de rendements $r_U = \sum_{i=1}^{n} w_i r_i$.

- Par exemple, elle pourrait avoir des actions ordinaires et des actions privilégiées.

Betas avec et sans effet de levier On peut appliquer la formule du coût des capitaux propres sans effet de levier aux betas avec $\beta_E = \beta_U + \frac{D}{E}(\beta_U - \beta_D)$ qui découle de l'équation $\beta_U = \frac{E}{E+D}\beta_E + \frac{D}{E+D}\beta_D$.

Exemple de calcul du CMPC pour un projet

Soit :

- un projet avec un coût initial de 800$ et une chance équiprobable (50/50) de générer des revenus de 1400$ ou de 900$.
- un taux sans risque de 5%.
- un coût du capital de 15%.

On souhaite trouver la différence entre les coûts des capitaux avec et sans emprunt du montant d'investissement initial.

1 On trouve le rendement espéré sur les capitaux propres sans effet de levier.

› Puisque l'on pose aucun emprunt, l'espérance du rendement sur les capitaux est égale au rendement de l'entreprise :

$$r_U = r_E = 0.15$$

2 On trouve la valeur des capitaux propres sans effet de levier V_U.

(a) On calcule l'espérance des rendements dans 1 an :

$$\mathrm{E}[\mathit{rendements}] = 50\% \times 1400\$ + 50\% \times 900\$ = 1150\$$$

(b) Puisqu'il n'y a pas de dette, la valeur de l'entreprise sans effet de levier E_U équivaut à la valeur des capitaux propres sans effet de levier.

$$E_U = V_U = VAN(\mathrm{E}[\mathit{rendements}]) = 1150(1.15)^{-1} = 1000\$$$

3 On trouve la valeur des capitaux propres avec effet de levier V_L.

› Selon la proposition I de M.-M., la valeur d'une entreprise n'est pas liée à sa structure financière et donc :

$$\begin{aligned} V_L = V_U &= 1000\$ \\ \Rightarrow E_L + D &= 1000\$ \\ \Rightarrow E_L + 800\$ &= 1000\$ \\ \Rightarrow E_L &= 200\$ \end{aligned}$$

4 On trouve le rendement espéré sur les capitaux propres avec effet de levier.

$$r_{E*} = r_U + \frac{D}{E_L}(r_U - r_D) = 0.15 + \frac{800}{200}(0.15 - 0.05) = 0.55$$

5 On trouve la différence entre les coûts des capitaux avec et sans emprunt du montant d'investissement initial.

$$r_{E*} - r_U = 0.55 - 0.15 = 0.40$$

Propositions avec impôts

Proposition I de M.-M. Avec impôts, la structure du capital **a un impact** sur la valeur d'une entreprise. Puisque les paiements d'intérêt sont habituellement déductibles d'impôts, emprunter offre des épargnes d'argent qui augmentent la valeur d'une entreprise.

› On trouve que $V_L = V_U +$ bouclier fiscal sur l'intérêt où bouclier fiscal sur l'intérêt $= \tau_C \times$ paiements d'intérêt.

– Cette formule pour le bouclier fiscal avec un taux d'imposition de τ_C sur un emprunt de D au taux sans risque suit de l'hypothèse que les paiements sont infinis.

– Ceci implique que la VAN correspond à la perpétuité suivante :

$$\frac{\tau_C \times r_f \times D}{r_f} = \tau_C \times D$$

› Si les dettes ne sont pas fixes, il faut isoler le bouclier avec $V_L - V_U$.

Exemple de la valeur d'une entreprise avec effet de levier

Soit :

› un emprunt de $2M\$$ avec intérêt de 10% par année.

› un taux d'imposition $\tau_C = 45\%$.

› un taux sans risque $r_f = 5\%$.

La compagnie décide de payer l'intérêt a chaque année puis de payer le principal à la fin de 10 ans.

1 On trouve le bouclier fiscal annuel :

$$\underbrace{0.45}_{\tau_C} \times \underbrace{2M \times 0.10}_{\text{paiements d'intérêt}} = 900k\$$$

2 On trouve le bouclier fiscal comme la VAN des épargnes annuelles :

$$900a_{\overline{10}|5\%} = \underbrace{6.9M\$}_{\text{bouclier fiscal}}$$

3 On trouve que la valeur de l'entreprise avec levier $V_L = V_U + 6.9M\$$

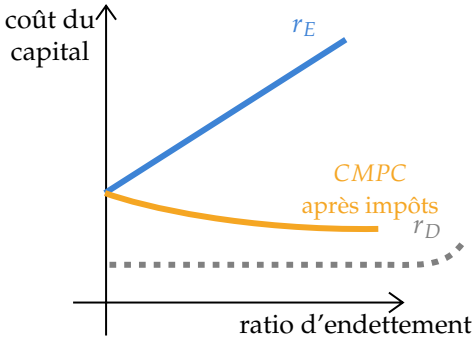
Proposition II de M.-M. Le CMPC après impôts prend en considération l'avantage du bouclier fiscal pour calculer le coût des capitaux propres.

On trouve donc :

$$\begin{aligned} r_{CMPC} &= w_E r_E + w_D r_D (1 - \tau_C) \\ &= \underbrace{w_E r_E + w_D r_D}_{\text{CMPC avant impôts}} - \underbrace{\tau_C w_D r_D}_{\text{bouclier fiscal}} \end{aligned}$$

Également, le coût des capitaux propres avec effet de levier est $r_E = r_U + \frac{D}{E}(r_U - r_D)(1 - \tau_C)$.

Visuellement :



Coûts de détresse financière

Le désavantage d'utiliser un levier financier est le risque de pertes importantes en temps de crises.

La valeur actualisée des coûts de détresse financière a 3 composantes :

1 Les coûts d'une détresse financière et de faillite

› Ceux-ci peuvent être des coûts :

directs Des dépenses encourues en lien avec la faillite (p. ex., des frais judiciaires et administratifs).

indirects Inclus les opportunités de placement perdues, perte d'affaires, etc.

– Ces coûts sont plus difficiles à quantifier et sont habituellement plus importants que les coûts directs.

› Les compagnies avec des biens majoritairement :

intangibles ont des coûts de détresse plus élevés en raison du potentiel de perte de clients, le besoin de garder leurs employés et un manque d'actifs facilement liquidables.

tangibles ont des coûts de détresse moins élevés puisqu'une plus grande proportion de leur valeur provient des biens (p. ex. des avions, des machines, etc.) qui sont plus facilement liquidables.

2 La probabilité d'une détresse financière et d'une faillite

› Plus une compagnie est endettée, plus sa probabilité de détresse financière augmente.

› Également, plus les rendements sont volatiles, plus la probabilité de détresse financière augmente.

3 Le taux d'actualisation des coûts de détresse financière

› Ce taux varie selon le risque de marché de l'entreprise.

› Le beta des coûts de détresse financière a le signe opposé du beta de l'entreprise.

– Plus le beta d'une entreprise est *élevé*, plus la probabilité qu'elle soit en détresse financière est *élevée* et plus son beta des coûts de détresse décroît.

– Plus un beta est *faible* (négatif), plus le coût du capital *décroît* et par

conséquent la valeur actualisée des coûts de détresse *augmente*.

Coûts et avantages de « *agency costs* »

La structure du capital peut influencer les décisions d'investissement des gestionnaires.

« *agency costs* »

Coûts liés aux conflits d'intérêt parmi les parties prenantes de l'entreprise (gestionnaires, actionnaires et créanciers).

› C'est le problème qui survient en raison du partage inégale des coûts et des avantages des actions de l'entreprise.

Coûts comme levier L'utilisation d'un levier financier par une entreprise implique un conflit d'intérêts si les décisions d'investissement ont des conséquences différentes pour les actionnaires et les créanciers.

Les revenus des créanciers sont fixes alors que ceux des actionnaires sont liés à la performance de l'entreprise. Un problème découlant de ceci est :

Prise de risque excessive et remplacement d'actifs

Le **problème de remplacement d'actifs** se produit lorsqu'une entreprise remplace ses actifs de faible risque par des actifs risqués.

En raison de leurs **revenus fixes**, les créanciers préfèrent des investissements *moins risqués*. En revanche, les actionnaires préfèrent des investissements *risqués* ayant un **rendement potentiel élevé**.

En cas de faillite, les actionnaires sont payés après les créanciers. Ceci peut mener à plusieurs problèmes dont :

Excédent de dette ou sous-investissement

Les actionnaires pourraient ne pas financer des projets majoritairement avantageux pour les créanciers même si la VAN est positive.

› En anglais, « *debt overhang* » ;

› De façon générale, un nouvel investissement de I est bénéfique pour les actionnaires si : $\frac{VAN}{I} > \frac{\beta_D D}{\beta_E E}$.

Retrait d'investissement

Les actionnaires ont un incitatif à vendre les actifs de l'entreprise pour des prix inférieurs à leurs vraies valeurs afin de distribuer les revenus sous forme de dividendes.

Avantages comme levier Les gestionnaires peuvent avoir des motivations qui diffèrent des actionnaires et des créanciers.

Exemples de différences de motivation :

« *empire building* »

Les gestionnaires peuvent choisir d'investir dans des projets qui font grossir la taille de l'entreprise plutôt que sa rentabilité. Ils peuvent donc choisir des projets avec une VAN négative.

› Sans de participation au rendement sur les capitaux propres, ils préfèrent être gestionnaires de grosses compagnies.

« *managerial entrenchment* »

Puisqu'il est peu probable que les gestionnaires soient remplacés, ils peuvent décider de faire comme ils souhaitent.

› Il s'ensuit qu'ils peuvent prendre des décisions avantageuses pour eux et *dés*avantageuses pour les actionnaires.

L'utilisation d'un levier peut motiver les gestionnaires à diriger l'entreprise d'une façon plus efficace en raison de :

› La **concentration accrue des actionnaires**.
  – Les gestionnaires ayant une plus grosse participation dans l'entreprise ont plus d'incitatifs à prendre les meilleurs décisions pour l'entreprise.
› La **diminution** des **dépenses inutiles**.
  – Moins de levier implique moins d'argent à dépenser et donc moins de dépends inutiles (« *free cash flow hypothesis* »).
› **Augmentation de la probabilité d'une détresse financière** et diminution du « *managerial entrenchment* ».
  – Il est plus probable qu'un gestionnaire soit renvoyé en détresse financière menant à un **engagement accru** à diminuer le levier et, par conséquent, leur probabilité d'être renvoyé.

Pour mitiger les « *agency costs* », l'entreprise peut :

1 Émettre de la dette à court-terme

Ceci réduit la chance qu'une entreprise prenne des décisions non optimales allant à l'encontre des intérêts des créanciers. Cependant, le risque de détresse financière peut augmenter.

2 Utiliser des « *debt covenants* »

Inclure des « *debt covenants* » dans les obligations limite les décision que peut prendre l'entreprise.

› P. ex., empêcher l'entreprise de verser des grosses dividendes en temps de crise, limiter les investissements qu'elle peut faire, etc.
› Cependant, ceci peut limiter la flexibilité de l'entreprise à poursuivre des investissements ayant une VAN positive.

Coûts d'information asymétrique

Information asymétrique

Il y a de l'information asymétrique lorsque les gestionnaires ont plus d'information sur l'entreprise que les actionnaires.

« *lemons principle* »

Lorsque les gestionnaires ont de l'information privée sur la valeur de l'entreprise, les investisseurs vont accepter d'émettre des nouvelles actions pour moins cher en raison de l'antisélection.

Lorsqu'un gestionnaire choisit la méthode de financement d'un projet, il doit prendre en compte les signales que cela peut envoyer. De façon générale,

- émettre des actions est typiquement vu comme un signe négatif.
  - Typiquement, les actionnaires émettent des nouvelles actions lorsqu'ils croient que l'entreprise est surévaluée.
- émettre davantage d'obligations de l'argent est typiquement vu comme un signe positif
  - Emprunter de l'argent implique un engagement à faire des paiements d'intérêt.

« *pecking order hypothesis* »

Les gestionnaires préfèrent faire des décisions d'investissement qui envoient des signes positifs aux investisseurs externes.

En ordre (« *pecking order* »), les décisions ayant la meilleur à la pire perception sont :

$$\underset{\text{internes}}{\text{capitaux propres}} > \text{dette} > \underset{\text{externes}}{\text{capitaux propres}} > \underset{\text{nouvelles actions}}{\text{l'émission de}}$$

Théorie de l'arbitrage

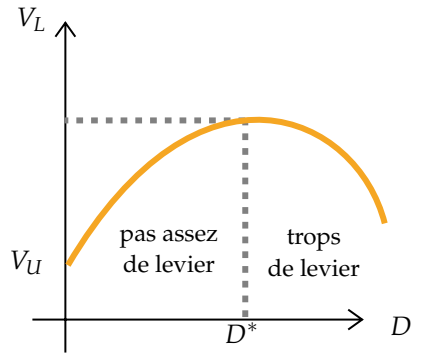
Cherche à **balancer** les effets de la dette qui augmentent la valeur de l'entreprise (bouclier fiscal, « *agency benefits* », etc.) avec ceux qui diminuent la valeur (coûts de détresse financière, « *agency costs* », etc.).

- En anglais, « *trade-off theory* ».

Selon la théorie :

$$\begin{aligned} V_L = V_U &+ VAN(\text{bouclier fiscal sur l'intérêt}) \\ &- VAN(\text{coûts de détresse financière}) \\ &- VAN(\text{« \textit{agency costs} » de la dette}) \\ &+ VAN(\text{« \textit{agency benefits} » de la dette}) \end{aligned}$$

Visuellement :



- Le niveau de dette optimal D^* est trouvé en posant $\frac{\partial V_L}{\partial D} = 0$;
- Ce point **maximise la valeur de l'entreprise**.

Le niveau de dette optimal dépend de l'entreprise et de ses particularités. Par exemple :

- Des entreprise de R. & D. ont typiquement des niveaux de dette faibles en raison de leur risque élevé.
- Des entreprises établies et à faible croissance avec des rendements stables peuvent plus facilement profiter d'une dette élevée.