Rappel relations importantes

$$\frac{i}{1+i} = d \rightarrow \frac{d}{1-d} = i$$

$$v^n = (1+i)^{-n}$$

$$1 + i_{eff} = \left[1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right]^m$$

$$1 - d_{eff} = \left[1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right]^m$$

→ Annuité début de période:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i) = \frac{1-v^n}{d}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}(1+i) = \frac{(1+i)^n-1}{d}$$

→ Annuité fin de période:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1-v^n}{i}$$

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n-1}{i}$$

$$\frac{1+i}{1+r} = 1+R$$

→ taux rendement: $\text{Prêt} = PMT\, a_{\overline{n}|j}$

- Annuel rendement (moyen) =
  $\text{Prêt}(1+\text{rend})^n = \sum^n PMT$
- Si investi PMT à i
  $\text{Prêt}(1+\text{rend})^n = PMT + PMT(1+i) + PMT(1+i)^2 + \dots$
- Si i = taux effectif du prêt (j), alors rend $= i$.

Annuité avec PMT en progression arithmétique

A) Progression arithmétique croissante

→ Début de période:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{d} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{i}(1+i)$$

$$(I\ddot{s})_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n}{d} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n}{i}(1+i)$$

→ Fin de période:

$$(Ia)_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{a}_{\overline{n}|i} - nv^n}{i}$$

$$(Is)_{\overline{n}|i} = \frac{\ddot{s}_{\overline{n}|i} - n}{i}$$

→ Perpetuité:

$$(I\ddot{a})_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{d^2} = \left[1 + \frac{1}{i}\right]^2$$

$$(Ia)_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{id} = \frac{1}{i}\left[1 + \frac{1}{i}\right]$$

B) Progression arithmétique décroissante

→ Début période:

$$(D\ddot{a})_{\overline{n}|i} = \frac{n - a_{\overline{n}|i}}{d} = \frac{n - a_{\overline{n}|i}}{i}(1+i)$$

$$(D\ddot{s})_{\overline{n}|i} = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n}|i}}{d} = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n}|i}}{i}(1+i)$$

→ Fin de période:

$$(Da)_{\overline{n}|i} = \frac{n - a_{\overline{n}|i}}{i} \qquad (Ds)_{\overline{n}|i} = \frac{n(1+i)^n - s_{\overline{n}|i}}{i}$$

Annuité avec PMTS en progression géométrique (exp)

A) Si période croissance = période de PMTS

→ Début de période:

PMT × Periode différée × $\ddot{a}_{\overline{n}|R} = \left[\frac{1-v_R^n}{R}(1+R)\right] = \frac{1-v^n}{d_R}$

où $\frac{1+i}{1+r} = 1+R$

→ Fin de période:

" " × $\frac{a_{\overline{n}|R}}{(1+r)} = \left[\frac{1-v_R^n}{(1+r)R}\right]$

$\hookrightarrow$ inflation

→ Pour annuité de fin de période. Vacc du dernier PMT =

$$\frac{(1+i)^n-(1+r)^n}{i-r} = \left[\ddot{a}_{\overline{n}|R}(1+i)^{n-1}\right] = \frac{1-v_R^n}{R}(1+R)(1+i)^{n-1}$$

B) Si période croissance ≠ période de PMTS

1) on trouve $\frac{i^{(m)}}{m}$
2) on regroupe les montants identiques pour $t = 1, 2, 3 \dots$ années.

1: X
2: $X\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^1$
3: $X\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^2 \dots$

3) $s_{\overline{n}|i}$ pour 1 an $= s_{\overline{m}|\frac{i^{(m)}}{m}} = \frac{\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1}{\frac{i^{(m)}}{m}}$

4) $s_{\overline{m}|\frac{i^{(m)}}{m}} \times n \times PMT \times \ddot{a}_{\overline{n}|R}(1+i)^{n-1}$

Annuité continue avec PMTS variables

$$\int_t^{t+h} h(u)a(u,t+h)\,du = \int_t^{t+h} h(u)e^{\int_u^{t+h}\delta(x)dx}\,du$$

$$(I\bar{s})_{\overline{n|}\delta(x)} = \int_0^n h(t)\,a(t,n)\,dt = \int_0^n h(t)e^{\int_t^n \delta(x)dx}\,dt$$

$$(I\bar{a})_{\overline{n|}\delta(x)} = \int_0^n h(t)e^{-\int_0^t \delta(x)dx}\,dt$$

→ Si la force d'intérêt est constante ($\delta(x)=\delta$)

$$(I\bar{s})_{\overline{n|}\delta} = e^{\delta n}\int_0^n h(t)e^{-\delta t}dt$$

$$(I\bar{a})_{\overline{n|}\delta} = \int_0^n h(t)e^{-\delta t}dt$$

Ammortissement

$$P_0 - \sum_{k=1}^{n} D_k = P_n$$

A) Méthode d'escompte composé (géo, expo)

- $P_t = P_0(1-d)^t$
- $D_t = dP_{t-1}$

B) Méthode ligne droite :

- $D_t = \frac{1}{n}(P_0 - P_t)$
- $P_t = \frac{n-t}{n}(P_0) + \frac{t}{n}(P_n)$

C) Méthode de la somme des rangs :

- $D_t = \frac{n-t+1}{S_n}[P_0 - P_n]$ avec $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $P_t = P_n + \frac{S_{n-t}}{S_n}[P_0 - P_n]$ avec $S_{n-t} = \frac{(n-t)(n-t+1)}{2}$

Méthode Ammortissement remboursement d'un prêt :

$$L = \sum_{j=1}^{n} K_j v^j$$

→ I_j = Interêts pour la j periode ⇒ $I_t = OB_{t-1}\cdot i$

PR_j = montant du principal à rembourser dans la j periode. ⇒ $PR_t = K_t - I_t$

OB_j = balance après interet du principal. ⇒ $OB_t = OB_{t-1} + I_t - K_t$
$= OB_{t-1} - PR_t$

• PMT DE MAKEHAM:

$A_t = K_t + \frac{i}{j}[L - K_t]$

Prix d'achat

où $K_t = LV_j^{\,n-t}$

valeur presente du capital

valeur presente au temps t des interets $[L-K_t]$

Pour PMT INEGAUX

tableau Ammortissement

t	PMT	Intérêts (I_t)	Principal (PR)	Balance (OB) (montant du prêt)	Balance $\cdot i$
0				OB_0	$OB_0\cdot i = I_1$
1	$(K_1$ −	$I_1)$ =	PR_1	OB_1	⋮
t	K_t	I_t	PR_t	OB_t	⋮
n	K_n	I_n	PR_n	$OB_n = 0$	0
Total	$K_T = \sum_{j=1}^{n} K_j$	$I_T = \sum_{j=1}^{n} I_j$	$OB_0 = \sum_{j=1}^{n} PR_j$		$= \sum I_j$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} K_j - \sum_{j=1}^{n} I_j = \sum_{j=1}^{n} PR_j = OB_0$$

AMORTISSEMENT :

RETROSPECTIVE: $OB_t = OB_0(1+i)^t - \sum_{j=1}^{t} K(1+i)^{t-j}$

$PR_t = OB_{t-1} - OB_t$

$I_t = iOB_{t-1}$

$K_t - I_t = PR_t$

PROSPECTIVE: $OB_t = \sum_{j=1}^{n-t} K_{t+j}V^j$

OB

PMT EGAUX :

$OB_0 = K\,a_{\overline{n|}i}$

R → $OB_t = OB_0(1+i)^t - K s_{\overline{t|}i}$

P → $OB_t = K a_{\overline{n-t|}i}$

$I_t = iOB_{t-1} = Ki\,a_{\overline{n-t+1|}i}$

$PR_t = Kv^{n-t+1}$

$PR_t = PR_i(1+i)^{t-i}$

FOND AMORTISSEMENT

i = taux pret

j = taux marché

Li = PMT fait à la fin de chaque periode sauf la dernière.

$\frac{L}{s_{\overline{n|}j}}$ = Montant depôt dans FA à la fin de p.

SOMME Totale deboursée à l'emprunteur à chaque periode $= Li + \frac{L}{s_{\overline{n|}j}}$

$OB_t = L - \left(\frac{L}{s_{\overline{n|}j}} s_{\overline{t|}j}\right) = L\left(1 - s_{\overline{t|}j}/s_{\overline{n|}j}\right)$

Rappel (suite) :

- taux consenti pour le prêt (j) = PMT $a_{\overline{n|}j}$
- taux de réinvestissement (i) sur PMT
- taux de rendement (sur l'ensemble des PMTS)