Étude examen prédoctoral général

Christopher Blier-Wong, M.Sc., M.Sc.

UNIVERSITÉ LAVAL
Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières

Première partie

Mathématiques financières

1 | La mesure de l'intérêt

Voir [Kellison, 2006], chapitre 1

1.1 | Les fonctions d'accumulation et de montant

- Le montant initial investi est appelé le *capital*
- Le montant obtenu après une période de temps est appelé la *valeur accumulée*
- La différence entre le montant accumulé et le principal est le *montant d'intérêt* ou *intérêt*
- t est le temps mesuré depuis le début la date d'investissement
- L'unité de temps est la *période de mesure* ou *période*

Définition 1.1.1 : La fonction d'accumulation

La fonction d'accumulation $a(t)$ correspond à la valeur accumulée au temps $t \geq 0$ d'un investissement initial de 1.

La fonction d'accumulation possède les propriété suivantes :

1. $a(0) = 1$
2. $a(t)$ est généralement croissante
3. Si l'intérêt est accumulé en continu, $a(t)$ est continue

Définition 1.1.2 : Fonction de montant

La fonction de montant $A(t)$ correspond à la valeur accumulée au temps $t \geq 0$ d'un investissement initial de $k > 0$. On a

$$A(t) = k \times a(t) \quad \text{et} \quad A(0) = k.$$

Définition 1.1.3 : Montant d'intérêt

Le montant d'intérêt gagné pendant la $n^{\text{ième}}$ période depuis la date d'investissement est

$$I_n = A(n) - A(n-1) \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

1.2 | Le taux d'intérêt effectif

Définition 1.2.1

Le taux d'intérêt effectif i est le montant d'argent qu'une unité investie au début de la période va gagner pendant la période, où l'intérêt est obtenu à la fin de la période, c.-à-d. $i = a(1) - a(0)$ ou $a(1) = 1 + i$.

Le taux d'intérêt i est le ratio du montant d'intérêt gagné pendant la période et du montant de principal investi au début de la période.

Le mot effectif est utilisé lorsque l'intérêt est payé une fois par période.

Les taux d'intérêt peuvent être calculés sur n'importe quelle période d'investissement. Soit i_n, le taux d'intérêt effectif pour la $n^{\text{ième}}$ période depuis la date d'investissement. Alors, on a

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

1.3 | Intérêt simple

La fonction d'accumulation est linéaire

$$a(t) = a + it \quad \text{pour} \quad t \geq 0.$$

Accumuler de l'intérêt avec ce patron correspond à l'intérêt simple. On a

$$i_n = \frac{i}{1 + i(n-1)},$$

donc un intérêt simple constant implique un taux d'intérêt effectif décroissant.

1.4 | Intérêt composé

L'intérêt composé assume que le montant accumulé est automatiquement ré-investi.

$$a(t) = (1+i)^t \quad \text{pour} \quad t \geq 0.$$

On a $i_n = i$, qui est indépendant de n. Alors, un taux d'intérêt composé correspond au taux d'intérêt effectif.

1.5 | Valeur actualisée

Le terme $1+i$ est le facteur d'accumulation, car il accumule la valeur d'un investissement au début de la période à la fin de la période. On doit parfois déterminer le montant à investir pour obtenir 1 à la fin de la période. Pour ce faire, on définit un nouveau symbole

$$v = \frac{1}{1+i}$$

parfois appelé le facteur d'escompte.

— La fonction d'escompte est $a^{-1}(t) = \dfrac{1}{a(t)}$.

— Pour l'intérêt simple, on a $a^{-1}(t) = \dfrac{1}{1+it}$.

— Pour l'intérêt composé, on a $a^{-1}(t) = \dfrac{1}{(1+i)^t} = v^t$.

1.6 | Taux effectif d'escompte

Définition 1.6.1 : Le taux effectif d'escompte

Le taux effectif d'escompte d est le ratio du montant d'intérêt gagné pendant la période et du montant investi à la fin de la période.

La principale différence entre le taux d'effectif d'intérêt et le taux effectif d'escompte est

— Intérêt : payé à la fin de la période divisé par la balance au début de la période.

— Escompte : payé au début de la période divisé sur la balance à la fin de la période.

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)}, \quad \text{pour un entier} \quad n \geq 1.$$

Définition 1.6.2 : Équivalence

Deux taux d'intérêt ou d'escompte sont dit équivalant si un montant de principal investi pour la même durée à chaque taux d'intérêt produisent la même valeur accumulée.

On utilise le concept d'équivalence pour établir des liens entre les taux d'intérêt.

Si une personne emprunte 1 au taux d'escompte effectif d, le principal initial est $1-d$ et le montant d'intérêt est d. Alors,

$$i = \frac{d}{1-d} \Rightarrow d = \frac{i}{1+i} = iv.$$

Autres relations utiles :

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i} = 1 - v;$$

$$d = iv = i(1-d) = i - id \Rightarrow i - d = id.$$

1.7 | Taux d'intérêt et d'escompte nominaux

— On considère les situations où l'intérêt est payé plus fréquemment qu'une fois par période. Ces taux sont appelés nominaux.

— Le symbole pour un taux nominal d'intérêt payé m fois par période est $i^{(m)}$, où m est un entier positif.

— Par un taux nominal d'intérêt $i^{(m)}$, on veut dire que l'intérêt est $i^{(m)}/m$ pour chaque $\frac{1}{m}$ période.

— De la définition d'équivalence, on a

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \Rightarrow i^{(m)} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

— Le symbole pour un taux nominal d'escompte payé m fois par période est $d^{(m)}$, où m est un entier positif.

— De la définition d'équivalence, on a

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m \Rightarrow d^{(m)} = m\left[1 - v^{\frac{1}{m}}\right]$$

— Une autre relation est

$$\frac{i^{(m)}}{m} - \frac{d^{(m)}}{m} = \frac{i^{(m)}}{m}\frac{d^{(m)}}{m}.$$

1.8 | Force d'intérêt et d'escompte

Mesure de l'intensité dont d'intérêt opère, i.e. le taux d'intérêt instantané. La force d'intérêt au temps t est défini par

$$\delta_t = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{a'(t)}{a(t)}.$$

Par la dérivée en chaîne, on a aussi

$$\delta_t = \frac{d}{dt} \ln A(t) = \frac{d}{dt} \ln a(t).$$

Autres relations :
- $\exp\left\{\int_0^t \delta_r dr\right\} = \frac{A(t)}{A(0)} = \frac{a(t)}{a(0)} = a(t)$;
- $\int_0^n A(t)\delta_t dt = \int_0^n A'(t)dt = A(n) - A(0)$. Intuition : l'intérêt est égal à la somme du capital investi au temps t multiplié par la force d'intérêt au temps t.

La force d'escompte est

$$\delta'_t = -\frac{\frac{d}{dt}a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)}.$$

On a

$$\delta_t = \delta'_t$$

Par le principe d'équivalence, on a

$$i = e^{\delta} - 1 \Rightarrow \delta = \ln(1+i)$$

Séries de Taylor :
- $i = e^{\delta} - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots$
- $\delta = \ln(1+i) = i - \frac{i^2}{2!} + \frac{i^3}{3!} - \frac{i^4}{4!} + \dots$
- Les termes i^k et δ^k sont très petits pour $k > 2$ car i et δ sont très petits.

Liste d'équivalences :

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i = v^{-1} = (1-d)^{-1} = \left(1 - \frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p} = e^{\delta}.$$

Sous l'intérêt simple, la force d'intérêt est $\delta_t = \frac{i}{1+it}$ et la force d'escompte est $\delta'_t = \frac{d}{1-dt}$. On remarque que δ_t est une fonction croissante et δ'_t est une fonction décroissante.

En utilisant l'expansion de Taylor, on a

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta$$

et

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \delta'$$

1.9 | Intérêt variable

— Si la force d'intérêt chance, on utilise la relation $a(t) = e^{\int_0^t \delta_r dr}$

— Si le taux effectif d'intérêt change, on utilise la relation

$$a(t) = (1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)\dots(1 + i_t) = \prod_{k=1}^{t}(1 + i_k)$$

— Si le taux effectif d'escompte change, on utilise la relation

$$a^{-1}(t) = (1 - d_1)(1 - d_2)(1 - d_3)\dots(1 - d_t) = \prod_{k=1}^{t}(1 - d_k)$$

— On a aussi

$$a^{-1}(t) = (1 + i_1)^{-1}(1 + i_2)^{-1}(1 + i_3)^{-1}\dots(1 + i_t)^{-1} = \prod_{k=1}^{t}(1 + i_k)^{-1} = \prod_{k=1}^{t} v_k$$

2 | Solutions de problèmes d'intérêt

Voir [Kellison, 2006], chapitre 2.

2.1 | Le problème de base

Les problèmes d'intérêts sont composés de quatre éléments :

1. Le principal investi initialement
2. La longueur de la période d'investissement
3. Le taux d'intérêt
4. La valeur accumulée du principal à la fin de la période d'investissement.

Connaissant trois éléments, le quatrième peut être résoud.

2.2 | Équations de valeur

— Principe fondamental : la valeur temporelle de l'argent.

— Deux valeurs monétaires à différents temps ne peuvent pas être comparés.

— On doit accumuler ou escompter les valeurs à une *date de comparaison*

— L'équation qui compare deux valeurs monétaires à la même date de comparaison est l'équation de valeur.

3 | Rentes de base

Voir [Kellison, 2006], chapitres 3 et 4

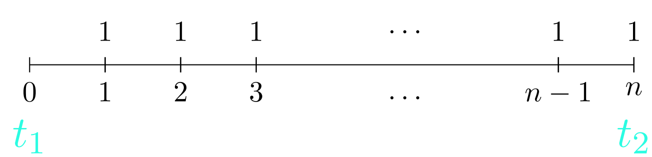
3.1 | Introduction

Définition 3.1.1 : Rente

- Une rente est une série de paiements fait à intervalles égaux.
- Une rente certaine est une rente dont les paiements sont faits pour une période de temps avec certitude.
- L'intervalle entre les paiements est la période de paiements

3.2 | Rente immédiate

Une rente immédiate paie 1 à la fin de chaque période pour n périodes.



La valeur actualisée d'une rente immédiate (au temps t_1) est notée par $a_{\overline{n}|}$. On a

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1} + v^n = \frac{1 - v^n}{i}.$$

La valeur accumulée d'une rente immédiate (au temps t_2) est notée par $s_{\overline{n}|}$

$$s_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (i+1)^{n-1} + (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Quelques relations

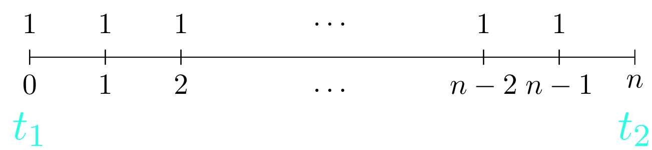
— $1 = i a_{\overline{n}|} + v^n$

— $s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n$

— $\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}} = \dfrac{1}{s_{\overline{n}|}} + i$

3.3 | Rente due

Une rente due paie 1 au début de chaque période pour n périodes.



La valeur actualisée d'une rente due (au temps t_1) est notée par $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. On a

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 \cdots + v^{n-2} + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

La valeur accumulée d'une rente due (au temps t_2) est notée par $\ddot{s}_{\overline{n}|}$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \cdots + (i+1)^{n-2} + (i+1)^{n-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.$$

Quelques relations

— $\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n$

— $\dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + d$

— $\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)$

— $\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|}(1+i)$

— $\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|}$

— $\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1$

Comparaison des rentes :

3.4 | Perpetuité

Une perpetuité est une rente de durée infinie.

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{i}; \quad \ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d}$$

3.5 | Rentes payables à fréquences autres que l'intérêt est converti

3.5.1 | Rente à fréquence inférieure à la période de conversion

S'il y a k périodes de conversion dans une période de paiement, la valeur actualisée d'une rente immédiate est

$$v^k + v^{2k} + \cdots + v^{\frac{n}{k}\times k} = \frac{v^k - v^{nk}}{1 - v^k} = \frac{1 - v^n}{(1+i)^k - 1} = \frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}.$$

La valeur actualisée d'une rente due est

$$1 + v^k + v^{2k} + \cdots + v^{\frac{n}{k}\times k - k} = \frac{1 - v^{nk}}{1 - v^k} = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}.$$

Note : la manipulation des termes $a_{\overline{n}|}$ et $s_{\overline{n}|}$ doit être intuitive.

3.6 | Rentes à fréquence supérieure à la période de conversion

Soit m, le nombre de paiements par période de conversion de l'intérêt et n, le nombre de périodes de conversion de l'intérêt. Chaque paiement est de $\frac{1}{m}$, tel que la somme de 1 est payée pendant une période de conversion. Alors, il y a mn paiements.

La valeur actualisée de cette rente immédiate est

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\left[v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v^{\frac{mn-1}{m}} + v^{\frac{mn}{m}}\right] = \frac{1 - v^n}{m\left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right)} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}}$$

et la valeur accumulée est

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}.$$

De manière équivalante, la valeur actualisée d'une rente due est

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}}$$

3.7 | Rente continue

L'expression pour la valeur actualisée d'une rente qui paie 1 par période d'intérêt est

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt = \frac{1 - v^t}{\delta}.$$

L'expression pour la valeur accumulée d'une rente qui paie 1 par période d'intérêt est

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n (1+i)^t dt = \frac{(1+i)^t - 1}{\delta}.$$

On a aussi

$$\frac{d}{dt}\bar{s}_{\overline{t}|} = 1 + \delta\bar{s}_{\overline{t}|}$$

alors, à chaque moment, la rente paie 1 et la force de l'intérêt fois la valeur accumulée de la rente depuis le début de la rente.

3.8 | Rentes variables

Progression géométrique seulement. Dans le cas de l'intérêt composé avec des paiements qui grandissent selon un patron géométrique, on peut se définir un nouveau taux d'intérêt et utiliser les résultats existants.

4 | Analyse du flux de trésorerie

Voir [Kellison, 2006], chapitre 5. Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier des positions financières où des entrées et des sorties de fonds sont faites dans le comte.

4.1 | Taux de rendement

On considère des situations où l'investisseur des entrées de fonds de montant $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ aux temps $0, 1, 2, \ldots, n$. On suppose que les temps $t, t+1$ sont espacés de manière uniforme. Note : $C_i, i = 1, \ldots, n$ peut être négatif, qui correspond à une sortie de fonds.

On note un rendement (sortie de fonds) au temps t par $R_t, t = 0, 1, 2, \ldots, n$, alors $C_t = -R_t, t = 0, 1, 2, \ldots, n$.

La valeur actualisée nette est

$$P(i) = \sum_{t=0}^{n} v^t R_t.$$

Définition 4.1.1

Le taux de rendement est le taux où la valeur actualisée nette des rendements de l'investissement est égale à la valeur actualisée des contributions dans l'investissement. Ce taux est aussi appelé le taux de rendement interne.

On peut trouver le taux de rendement i selon l'équation de valeur

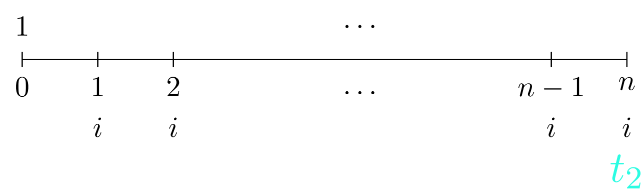
$$P(i) = 0.$$

Un taux de rendement est seulement comparable à un autre si la durée de l'investissement est identique.

4.2 | Taux de réinvestissement

Jusqu'à présent, on n'a pas considéré le taux d'intérêt sur les réinvestissements, on a supposé que ce taux était constant toute la durée de l'investissement. Par contre, un investissement à court terme rapportera probablement un taux d'intérêt inférieur à un investissement à long terme, donc le taux de réinvestissement pourrait être plus petit que le taux de rendement initial.

On considère un investissement de 1 pour n périodes au taux i et au taux de réinvestissement j. L'investissement initial retourne i à chaque période, qui est investi au taux j. Le diagramme de temps est



La valeur accumulée est $1 + is_{\overline{n}|j}$.

4.3 | Mesure de l'intérêt dans un fonds

Définitions :

— A : le montant dans le fonds au début de la période

— B : le montant dans le fonds à la fin de la période

— I : le montant d'intérêt obtenu pendant la période

— C_t : le montant net de capital contribué au temps t, pour $0 \leq t \leq 1$

— C : le montant de capital total pendant la période, $C \sum_t C_t$

— ${}_a i_b$: le montant d'intérêt obtenu pour un capital de 1 investi au temps b pendant a unités, et $a + b \leq 1$

4.3.1 | Résultats en discret

Le montant dans le fonds à la fin de la période est la somme du montant initial, les contributions et l'intérêt

$$B = A + C + I.$$

Le montant d'intérêt obtenu est la somme de l'intérêt sur le montant initial et sur les contributions.

$$I = iA + \sum_t C_t \times {}_{1-t}i_t.$$

Avec l'hypothèse d'intérêt composé, on a

$${}_{1-t}i_t = (1+i)^{1-t} - 1.$$

Une hypothèse simplificatrice est

$${}_{1-t}i_t \backsimeq (1-t)i,$$

qui nous permet d'écrire

$$i \backsimeq \frac{I}{A + \sum_t C_t(1-t)},$$

qui s'interprète comme l'investissement obtenu divisé par la somme pondérée des contributions. Cet hypothèse tient si les C_t sont petits comparés à A.

Une autre hypothèse est que les contributions sont faits uniformément sur la période, donc en moyenne au temps 0.5. L'approximation devient

$$i \backsimeq \frac{I}{A + 0.5(B-A-I)} = \frac{2I}{A+B-I}.$$

4.3.2 | Résultats en continu

Le montant du fonds au temps n est

$$B_n = B_0(1+i)^n + \int_0^n C_t(1+i)^{n-t}dt.$$

Une formule plus générale est

$$B_n = B_0 e^{\int_0^n \delta_s ds} + \int_0^n C_t e^{\int_t^n \delta_s ds} dt,$$

qui a une équation différentielle associée

$$\frac{d}{dt}B_t = \delta_t B_t + C_t,$$

donc le rendement instantanné est la somme de

— la force d'intérêt au temps t multiplié par la valeur du fonds au temps t ;

— la contribution continue.

4.4 | Taux d'intérêt pondéré par le temps

Le taux de rendement peut dépendre des contributions intermédiaires $C_t, t = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Le taux d'intérêt pondéré par le temps est une mesure de performance différente. On décompose la période d'investissement à chaque fois où une contribution est faite et on détermine le taux d'intérêt pour chaque intervalle intermédiaire.

Le taux d'intérêt de l'intervalle k est

$$j_k = \frac{B'_k}{B'_{k-1} + C'_{k-1}}.$$

Le taux de rendement est obtenu selon la relation

$$1 + i = (1 + j_1)(1 + j_2) \ldots (1 + j_m).$$

Deuxième partie

Mathématiques actuarielles vie

1 | Distributions de survie

1.0.1 | Notation

Symbole	Description
(x)	âge de x
$[x]$	âge à la sélection de x
X	v.a. de l'âge au décès
$T(x)$	v.a. de la vie de (x), aussi $X - x$
$K(x)$	v.a. de la vie entière de x, aussi $\lfloor T(x) \rfloor$
$S(x)$	v.a. de la partie fractionnaire de l'âge au décès, aussi $T(x) - K(x)$

Symbole	Description	
$s(x)$	fonction de survie d'un nouveau né	$\overline{F}_X(x)$
$\mu(x)$	force de mortalité	$\dfrac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}$
$\mu_x(t)$	force de mortalité pour une sélection à l'âge x	
${}_tq_x$	probabilité que (x) décède dans les t prochaines années	Pr$(T(x) \leq t)$
${}_tp_x$	probabilité que (x) survive les t prochaines années	Pr$(T(x) > t)$
${}_{t\vert u}q_x$	probabilité que (x) survive t mais décède avant $t + u$	Pr$(t < T(x) < t + u)$
$\mathring{e}_x$		$E[T(x)]$
e_x		$E[K(x)]$

Autres relations :

— Pr$(K(x) = k) = {}_kp_x q_{x+k} = {}_{k|}q_x$

— $F_{K(x)}(y) = \sum_{h=0}^{\lfloor y \rfloor} {}_{h|}q_x$

Outil	Relations			
	$F_X(x)$	$s(x)$	$f_X(x)$	$\mu(x)$
$F_X(x)$		$1 - F_X(s)$	$F'_X(x)$	$\dfrac{F'_X(x)}{1 - F_X(x)}$
$s(x)$	$1 - s(x)$		$-s'(x)$	$-\dfrac{s'(x)}{s(x)}$
$f_X(x)$	$\displaystyle\int_0^x f_X(t)dt$	$\displaystyle\int_x^\infty f_X(t)dt$		$\dfrac{f_X(x)}{\int_x^\infty f_X(t)dt}$
$\mu(x)$	$1 - \exp\left\{-\displaystyle\int_0^x \mu(t)dt\right\}$	$\exp\left\{-\displaystyle\int_0^x \mu(t)dt\right\}$	$\mu(x)\exp\left\{-\displaystyle\int_0^x \mu(t)dt\right\}$	

1.1 | Relations avec tables de mortalité

On peut obtenir la probabilité de décès avec la relation

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}. $$

Soit

$$ I_j = \begin{cases} 1, & \text{si l'assuré } j \text{ survie jusqu'à } x \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} $$

Symbole	Description	Formule
l_0	nombre initial de nouveaux nés dans la cohorte	
$\mathcal{L}(x)$	v.a. du nombre de survivants d'une cohorte à l'age x	$\displaystyle\sum_{j=1}^{l_0} I_j$
${}_n\mathcal{D}_x$	v.a. du nombre de décès entre les âges x et $x+n$ d'une cohorte	
l_x		$E[\mathcal{L}(x)]$
${}_nd_x$		$E[{}_n\mathcal{D}_x] = l_x - l_{x+n}$
m_x	âge centrale au décès	
ω	Oméga, l'âge limite d'une table de mortalité	

De plus, $\mathcal{L}(x) \sim Bin(l_0, s(x))$.

1.2 | Groupe de survie déterministe

Définition 1.2.1

Un groupe de survie déterministe, représenté par une table de mortalité, a les charactéristiques suivantes :

- le groupe conteint l_0 nouveaux nés initialement
- les membres sont sujets à taux de mortalité q_x pour chaque année de leur vie
- le groupe est fermé, la taille du groupe change seulement si un membre est décédé.

Récursion avec probabilités de décès :

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0(1-q_0) \\ l_2 &= l_1(1-q_1) \\ l_3 &= l_2(1-q_2) \\ &\vdots \\ l_x &= l_{x-1}(1-q_{x-1}) = l_0(1-{}_xq_0). \end{aligned}$$

Récursions avec probabilités de survie :

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0p_0 \\ l_2 &= l_1p_1 = l_0p_0p_1 \\ l_3 &= l_2p_2 = l_0p_0p_1p_2 \\ &\vdots \\ l_x &= l_{x-1}p_{x-1} = l_0\prod_{y=0}^{x-1}p_y. \end{aligned}$$

1.3 | Autres characéristiques

$$\begin{aligned} \mathring{e}_x = E[T(x)] &= \int_0^\infty t\,{}_tp_x\mu(x+t)dt \\ &= \int_0^\infty {}_tp_x dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_x = E[K(x)] &= \sum_{k=0}^\infty k\,{}_kp_xq_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^\infty {}_kp_x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[T(x)^2] &= \int_0^\infty t^2\,{}_tp_x\mu(x+t)dt \\ &= \int_0^\infty 2t\,{}_tp_x dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[K(x)^2] &= \sum_{k=0}^\infty k\,{}_kp_xq_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^\infty (2k-1)\,{}_kp_x. \end{aligned}$$

1.3.1 | Relations de récursion

Définition 1.3.1

La formule de récursion arrière est sous la forme

$$u(x) = c(x) + d(x)u(x+1)$$

La formule de récursion avant est sous la forme

$$u(x+1) = -\frac{c(x)}{d(x)} + \frac{1}{d(x)}u(x)$$

Exemple 1.3.1 : Trouver la relation de récursion arrière pour e_x.

On a

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x.$$

On sort le premier terme de la relation et on obtient

$$e_x = p_x + \sum_{k=2}^{\infty} {}_kp_x.$$

On applique un glissement d'indices et on obtient

$$e_x = p_x + \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_{x+1} = p_x + p_x e_{x+1}.$$

On conclut que $u(x) = e_x, c(x) = p_x$ et $d(x) = p_x$. Le point de départ est $u(\omega) = 0$.

1.4 | Hypothèses pour les âges fractionnaires

On utilise l'interpolation linéaire pour les âges fractionnaires, c.-à-d.

$$s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1).$$

Cette méthode est appelée distribution uniforme des décès (DUD).

Fonction	Hypothèse
${}_tq_x$	tq_x
$\mu(x+t)$	$\dfrac{q_x}{1-tq_x}$
${}_{1-t}q_{x+t}$	$\dfrac{(1-t)q_x}{1-tq_x}$
${}_yq_{x+t}$	$\dfrac{yq_x}{1-tq_x}$
${}_tp_x$	$1-tq_x$
${}_tp_x\mu(x+t)$	q_x

1.5 | Lois analytique de survie

Nom	$\mu(x)$	$s(x)$
De Moivre	$(\omega-x)^{-1}$	$1-\dfrac{x}{\omega}$
Gompertz	Bc^x	$\exp\left\{-\dfrac{B}{\log c}(c^x-1)\right\}$
Makeham	$A+Bc^x$	$\exp\left\{-Ax-\dfrac{B}{\log c}(c^x-1)\right\}$
Weibull	kx^n	$\exp\left\{-\dfrac{k}{n+1}x^{n+1}\right\}$

1.6 | Tables de mortalité sélectes et ultimes

Pour un assuré observé à (x), on pourrait penser avoir plus d'information qu'un assuré observé plus tôt mais qui a survécu jusqu'à x. Alors, on se définit une table de mortalité sélecte pour les assurés observés à (x). On note cette sélection dans la notation comme $[x]$.

— Pendant r années (la période de sélection), on a $q_{[x]+1} \neq q_{x+1}$.

— Après r années, on a $q_{[x]+r+1} = q_{x+r+1}$.

2 | Assurance vie

2.1 | Assurance continue

La variable aléatoire qui représente l'assurance vie est notée $Z = b_T v_T$, où b_t est une fonction de prestation et v_t est une fonction d'escompte. La variable aléatoire T représente la durée de vie de l'assuré, comme présenté dans le chapitre sur les distributions de survie.

Définition 2.1.1 : Assurance vie temporaire n-années

Cette assurance paie 1 si l'assuré décède pendant les n premières années et 0 sinon. La variable aléatoire est

$$Z = \begin{cases} v^T, & T \leq n \\ 0, & T > n \end{cases}$$

L'espérance de cette variable aléatoire est

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E[Z] = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_x(t) dt.$$

Le $j^{\text{ème}}$ moment est

$${}^j\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E\left[Z^j\right] = \int_0^n \left(v^t\right)^j {}_tp_x \mu_x(t) dt,$$

donc est égal au premier moment mais où la force d'intérêt est multipliée par j. De plus, on a

$$F_Z(x) = \begin{cases} \overline{F}_{T_x}(n), & x = 0 \\ \overline{F}_{T_x}(n), & 0 < x < bv^n \\ \overline{F}_{T_x}\left(-\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{x}{b}\right)\right), & bv^n < x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

On déduit que

$$VaR_\kappa(Z) = \begin{cases} 0, & 0 < \kappa < \overline{F}_{T_x}(n) \\ bv^{VaR_{1-\kappa}(T_x)}, & \overline{F}_{T_x}(n) < \kappa < 1 \end{cases}$$

et

$$TVaR_\kappa(Z) = \begin{cases} \frac{1}{1-\kappa} b\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}, & 0 < \kappa < {}_np_x \\ \frac{1}{1-\kappa} b\bar{A}^1_{x:\overline{VaR_{1-\kappa}(T_x)}|}, & {}_np_x < \kappa < 1 \end{cases}$$

Définition 2.1.2 : Assurance vie complète

La variable aléatoire pour une assurance vie complète est

$$Z = v^T, t \geq 0.$$

C'est un cas particulier de l'assurance vie temporaire avec $n \to \infty$. On a

$$^j\bar{A}_x = \int_0^\infty v^{jt}{}_tp_x\mu_x(t)dt.$$

Définition 2.1.3 : Capital différé

Un capital différé verse une prestation après n années si l'assuré a survécu les n années. La v.a. est

$$Z = \begin{cases} 0 & , T \neq n \\ v^n & , T > n \end{cases}$$

La notation est

$$\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = {}_nE_x = v^n{}_np_x.$$

Définition 2.1.4 : Assurance capital différé (assurance mixte)

Une assurance capital différé verse une prestation au décès ou après n années. La v.a. est

$$Z = \begin{cases} 0 & , T \neq n \\ v^n & , T > n \end{cases}$$

La notation est

$$\bar{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = {}_nE_x = v^n{}_np_x.$$

Troisième partie

Distributions de sinistres

1 | Quantités distributionnelles de base

Voir [Klugman et al., 2012], section 3.4

1.1 | Queues des distributions

- Classification basée sur les moments
  - Une manière de classifier des distributions est basé sur le nombre de moments qui existent. Une distribution dont tous les moments existent (la FGM existe) est à queue légère.
- Comparaisons basée sur le comportement de queue limite
  - Pour deux distributions avec la même moyenne, une distribution a une queue plus lourde que l'autre si le ratio des fonctions de survie diverge à l'infini.
- Classification basée sur la fonction de hazard
  - Les distributions avec une fonction de hazard décroissante a une queue lourde
  - Les distributions avec une fonction de hazard croissante a une queue légère
  - Une distribution a une queue plus légère que l'autre si sa fonction de hazard augmente à plus rapidement que l'autre.
  - Rappel :
$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}, \quad S(x) = \exp\left\{-\int_0^x h(y)dy\right\}$$
- Classification basée sur la fonction d'excès moyen
  - Si la fonction d'excès moyen est croissante en d, la distribution a une queue lourde.
  - Si la fonction d'excès moyen est décroissante en d, la distribution a une queue légère.
  - On peut comparer deux distributions basé sur le taux de croissance ou décroissance de la fonction d'excès moyen.
  - Rappel :
$$e_X(d) = E[X - d|X > d] = \frac{\int_d^\infty S(x)dx}{S(d)}$$
- Distributions d'équilibre et comportement de queue

- Distribution d'équilibre
  - $f_e(x) = \dfrac{S(x)}{E[X]}, \quad x \geq 0$
  - $S_e(x) = \dfrac{\int_x^\infty S(t)dt}{E[X]}, \quad x \geq 0$
  - $h_e(x) = \dfrac{f_e(x)}{S_e(x)} = \dfrac{S(x)}{\int_x^\infty S(t)dt} = \dfrac{1}{e(x)}$
- Lire le texte pour le lien entre la fonction de hazard, la fonction d'excès moyen et la lourdeur de la queue

2 | Caractéristiques des modèles actuariels

Voir [Klugman et al., 2012],

Dans ce chapitre, les modèles sont caractérisés par combien d'information est nécessaire pour spécifier le modèle. Le nombre de paramètre donne une indication de la complexité du modèle.

2.1 | Distributions paramétriques et d'échelle

Définition 2.1.1 : Distributiob paramétrique

Ensemble de distributions déterminée par une ou plus valeurs appelé(s) paramètre. Le nombre de paramètre est fixe et connu

Définition 2.1.2 : Distribution d'échelle

Si une variable aléatoire est multipliée par une constante positive, et que la nouvelle variable aléatoire est dans le même ensemble de distirbutions, elle est dite une distribution d'échelle.

Définition 2.1.3 : Paramètre d'échelle

Un paramètre d'échelle satisfait deux conditions :

1. Lorsqu'une distribution d'échelle est multipliée par une constante, ce paramètre d'échelle est multiplié par la même constante.
2. Tous les autres paramètres de la distribution restent inchangés (le paramètre d'échelle *absorbe* tout le changement d'échelle).

2.2 | Familles de distributions paramétriques

Définition 2.2.1 : Familles de distributions paramétriques

Ensemble de distributions qui sont reliées de manière significative. Exemple : la loi exponentielle est un cas particulier de la loi gamma avec $\alpha = 1$. Alors, la loi exponentielle est reliée de manière significative avec la loi gamma.

2.3 | Distribution de mélange fini

Définition 2.3.1 : Mélange k-point

Une distribution est un mélange k-point si

$$F_Y(y) = a_1 F_{X_1}(y) + a_2 F_{X_2}(y) + \cdots + a_k F_{X_k}(y)$$

avec $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1$.

Définition 2.3.2 : Mélange à composante variable

Une distribution mélange k-point où K n'est pas fixé.

— $F(x) = \sum_{j=1}^{K} a_j F_j(x)$

— $\sum_{j=1}^{K} a_j = 1, \quad a_j > 0, j = 1, \ldots, K, \quad K = 1, 2, \ldots$

— Le nombre de paramètres est la somme des paramètres de chaque distribution plus (K-1) car le dernier paramètre a_k peut être calculé avec $1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{K-1}$.

Ce modèle est appelé semi-paramétrique car sa complexité est entre un modèle paramétrique et non-paramétrique

2.4 | Distributions dépendantes des données

— Une distribution dépendante des données est au moins aussi compliqué que les données ou l'information produites par ces données.

— Le nombre de paramètres augmente lorsque le nombre de données augmente

- Exemple : un modèle empirique est une distribution discrète basée sur la taille échantillonnale n qui assigne une probabilité $\frac{1}{n}$ à chaque point
- Exemple : modèle de lissage à noyau

3 | Distributions continues

3.1 | Créer des nouvelles distributions

3.1.1 | Multiplication par une constante

Théorème 3.1.1

Soit X, une variable aléatoire continue. Soit $Y = \theta X$ avec $\theta > 0$. Alors,

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{y}{\theta}\right)$$

Le paramètre θ est un paramètre d'échelle pour la variable aléatoire Y.

3.1.2 | Création de distributions en élevant à une puissance

Théorème 3.1.2

Soit X, une variable aléatoire continue et $F_X(0) = 0$. Soit $Y = X^{1/\tau}$. Alors,

- *si $\tau > 0$, on a*

$$F_Y(y) = F_X(y^\tau) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau), \quad y > 0;$$

- *si $\tau < 0$, on a*

$$F_Y(y) = 1 - F_X(y^\tau) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = -\tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau), \quad y > 0.$$

- Lorsqu'on prend une distribution avec puissance $\tau > 0$, elle est appelée transformée.
- Lorsqu'on prend une distribution avec puissance $\tau = -1$, elle est appelée inverse.

— Lorsqu'on prend une distribution avec puissance $\tau < 0, \tau \neq -1$, elle est appelée inverse-transformée.

3.1.3 | Création de distributions avec exponentiation

Théorème 3.1.3

Soit X, une variable aléatoire continue et $f_X(x) > 0$ sur le domaine de x. Soit $Y = e^X$. Alors, pour $y > 0$, on a

$$F_Y(y) = F_X(\ln y) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln y).$$

3.1.4 | Mélange

Théorème 3.1.4

Soit X, une variable aléatoire avec fonction de densité $f_{X|\Lambda}(x|\lambda)$ et fonction de répartition $F_{X|\Lambda}(x|\lambda)$, où λ est un paramètre de X. La fonction de densité inconditionnelle de X est

$$f_X(x) = \int f_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

et la fonction de répartition est

$$F_X(x) = \int F_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda.$$

Autres résultats :

— $E\left[X^k\right] = E_\Lambda\left[E\left(X^k|\Lambda\right)\right]$

— $Var(X) = E\left[Var(X|\Lambda)\right] + Var\left(E\left[X|\Lambda\right]\right)$

Les modèles de mélange tendent à créer des distributions à queue lourde. En particulier, si la fonction de hasard de $f_{X|\Lambda}$ est décroissante pour tout λ, la fonction de hasard sera aussi décroissante.

3.1.5 | Modèles à fragilité

Mise en place :

— Soit une variable aléatoire de fragilité $\Lambda > 0$

— Soit une fonction de hasard conditionnelle $h_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \lambda a(x)$, où $a(x)$ est une fonction connue.
— La fragilité quantifie l'incertitude de la fonction de hasard.

La fonction de survie conditionnelle de $X|\Lambda$ est

$$S_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \text{exp}\left\{-\int_0^x h_{X|\Lambda}(t|\lambda)dt\right\} = e^{-\lambda A(x)},$$

où $A(x) = \int_0^x a(t)dt$. Alors, la fonction de survie inconditionnelle est donnée par

$$S_X(x) = E\left[e^{-\Lambda A(x)}\right] = M_\Lambda(-A(x))$$

3.1.6 | Raccordement de distributions connues

Si plusieurs processus séparés sont responsables pour générer les pertes

Définition 3.1.5

Une distribution de raccordement à k composantes a une fonction de densité qui peut être exprimé sous la forme

$$f_X(x) = \begin{cases} a_1 f_1(x), & c_0 \leq x \leq c_1 \\ a_2 f_2(x), & c_1 \leq x \leq c_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_k f_k(x), & c_{k-1} \leq x \leq c_k \end{cases}$$

Pour $j = 1, 2, \ldots, k$, chaque a_j soit être positif, f_j doit être une fonction de densité avec toute sa masse sur (c_{j-1}, c_j) et $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1$.

3.2 | Familles de distributions et leurs liens

Connaître les familles de distribution beta transformée et gamma inverse/transformée.

3.2.1 | Distributions limites

On peut parfois comparer les familles des distributions basé sur des cas particuliers des familles. Dans d'autres situations, on doit étudier les distributions quand des paramètres tendent vers 0 ou l'infini.

Exemples :

— La distribution gamma est un cas limite de la distribution beta transformée avec $\theta \to \infty, \alpha \to \infty$ et $\frac{\theta}{\alpha^{1/\gamma}} \to \xi$, une constante.

3.3 | Théorie des valeurs extrêmes

3.3.1 | Distributions à valeur extrêmes (DVE)

Définition 3.3.1 : La distribution Gumbel

La distribution Gumbel standard a la fonction de répartition

$$F(x) = G_0(x) = \exp\left[-\exp(-x)\right], \quad -\infty < x < \infty.$$

Avec les paramètres de location et d'échelle, on a

$$F(x) = G_{0,\mu,\theta}(x) = \exp\left[-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\theta}\right)\right], \quad -\infty < x < \infty, \theta > 0.$$

Définition 3.3.2 : La distribution de Fréchet

La distribution de Fréchet standard a la fonction de répartition

$$F(x) = G_{1,\alpha}(x) = \exp\left(-x^{-\alpha}\right), \quad x \geq 0, \alpha > 0,$$

où α est un paramètre de forme.

Avec les paramètres de location et d'échelle, on a

$$F(x) = G_{1,\alpha,\mu,\theta}(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)^{-\alpha}\right], x \geq \mu, \alpha, \theta > 0.$$

On note que le support de la distribution de Fréchet est pour x supérieur au paramètre de location.

Définition 3.3.3 : La distribution Weibull

La distribution de Weibull standard a la fonction de répartition

$$F(x) = G_{2,\alpha}(x) = \exp\left[-(-x)^{-\alpha}\right], \quad x \leq 0, \alpha < 0.$$

Avec les paramètres de location et d'échelle, on a

$$F(x) = G_{2,\alpha,\mu,\theta}(x) = \text{exp}\left[-\left(-\frac{x-\mu}{\theta}\right)^{-\alpha}\right], \quad x \leq \mu, \alpha < 0.$$

On note :

— Cette distribution n'est pas la même que la distribution Weibull couramment utilisée en actuariat

— Cette distribution a un support pour x inférieur au paramètre de location μ

  — Pour cette raison, cette distribution n'est pas utilisée en actuariat.

Définition 3.3.4 : La distribution de valeurs extrêmes généralisée

La distribution de valeurs extrêmes généralisée incorpore les trois distributions à valeur extrême comme cas particuliers. L'expression de la fonction de répartition est

$$F(x) = \text{exp}\left[-\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{-\alpha}\right]$$

ou (notation équivalente)

$$F(x) = \text{exp}\left[-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\right]$$

— Pour $\gamma \to 0$, on obtient la distribution Gumbel

— Pour $\gamma > 0$, on obtient la distribution Fréchet

— Pour $\gamma < 0$, on obtient la distribution Weibull

3.3.2 | Distribution du maximum

Soit M_n, la variable aléatoire qui correspond à la valeur maximale de n observations d'une variable aléatoire. Si on a n observations d'une variable aléatoire iid, la fonction de répartition du maximum est

$$F_n(x) = \text{Pr}(M_n \leq x) = \text{Pr}(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \ldots, X_n \leq x) \overset{\text{ind}}{=} \prod_{i=1}^{n} \text{Pr}(X_i \leq x) = [F_X(x)]^n .$$

Les deux premiers moments sont

$$E\left[M_n\right] = \int_0^\infty [1 - F_X^n]dx;$$

$$E\left[M_n^2\right] = 2\int_0^\infty x[1 - F_X^n]dx.$$

Si le nombre n est inconnu, N est une variable aléatoire. On a

$$\begin{aligned} F_{M_N}(x) &= \mathsf{Pr}(M_N \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{Pr}(M_N \leq x | N = n) \, \mathsf{Pr}(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_X(x)^n \, \mathsf{Pr}(N = n) \\ &= P_N \left[F_X(x) \right]. \end{aligned}$$

3.3.3 | Stabilité du maximum des DVE

On peut montrer que la distribution du maximum des DVE, après normalisation du paramètre de location ou d'échelle, est la même DVE.

3.3.4 | Théorème Fisher-Tippett

4 | Distributions discrètes

4.1 | Notation et rappels

— $p_k = \mathrm{Pr}(N = k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

— $P(z) = P_N(z) = E\left[z^N\right] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$

— $p_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dz^m} P(z)\Big|_{z=0}$

4.2 | Loi Poisson

— $p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$

— $P(z) = e^{\lambda(z-1)}, \quad \lambda > 0.$

— $E[N] = \lambda$

— $Var(N) = \lambda$

— Équidispersion (moyenne = variance)

Théorème 4.2.1

Soit $N_1, N_2, \ldots, N_n$, des v.a. Poisson avec paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Alors, $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_n$ est Poisson avec paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

Preuve : produit des fgp.

Théorème 4.2.2

Supposons que le nombre d'évènements N est Poisson avec moyenne λ. De plus, supposons que chaque évènement peut être classifié en m types avec probabilité $p_1, p_2, \ldots, p_m$ indépendant des autres évènements. Alors, le nombre d'évènements $N_1, N_2, \ldots, N_m$ correspondent au types d'évènements $1, 2, \ldots, m$ respectivement sont des distributions Poisson mutuellement indépendants avec moyennes $\lambda p_1, \lambda p_2, \ldots, \lambda p_m$.

- Idée de la preuve :
  - Pour N fixé, la distribution conjointe de $(N_1, N_2, \ldots, N_m)$ est multinomiale. La fonction de densité multivariée correspond au produit de Poissons.
  - La marginale de N_j est Poisson.
  - Le cas 1 égal le produit des cas 2, donc ils sont mutuellement indépendants.
- Utile pour ajouter ou retirer une couverture d'assurance (λ ne change pas)
- Utile pour déductibles ou franchises : les risques en haut de la franchise sont Poisson.

4.3 | Loi binomiale négative

- $p_k = \binom{k+r-1}{k}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, r > 0, \beta > 0.$
- $P(z) = [1 - \beta(z-1)]^{-r}$
- $E[N] = r\beta$
- $Var(n) = r\beta(1+\beta)$
- Surdispersion (variance > moyenne)
- On peut retrouver la binomiale négative avec une loi mélange (Poisson + gamma)
- La loi Poisson est un cas limite de la binomiale négative ($r \to \infty, \beta \to 0, r\beta$ demeure constant).

Un cas particulier est la géométrique ($r = 1$)

- Sans mémoire
- Cas exponentiel : *Given that a claim exceeds a certain level d, the expected amount of the claim in excess of d is constant and so does not depend on d.*
- Cas géométrique : *Given that there are at least m claims, the probability distribution of the number of claims in excess of m does not depend on m.*
- Si $r > 1$, on considère que la distribution a une queue légère.
- Si $r < 1$, on considère que la distribution a une queue lourde.

4.4 | Loi binomiale

- $P(z) = [1 + q(z-1)]^m, \quad 0 < q < 1$
- $p_k = \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m.$
- $E[N] = mq$
- $Var(N) = mq(1-q)$
- Sousdispersion (moyenne > variance)

4.5 | La classe $(a, b, 0)$

Définition 4.5.1 : La classe $(a, b, 0)$

Une v.a. est membre de la classe $(a, b, 0)$ s'il existe des constantes a et b tels que

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots'$$

Distribution	a	b	p_0
Poisson	0	λ	$e^{-\lambda}$
Binomiale	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$(1-q)^m$
Binomiale négative	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1+\beta)^{-r}$
Géométrique	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1+\beta)^{-1}$

Outil diagnostique pour déterminer la loi à utiliser : en utilisant la relation

$$k\frac{p_k}{p_{k-1}} = ak + b,$$

faire un graphique de

$$k\frac{\hat{p}_k}{\hat{p}_{k-1}} = k\frac{n_k}{n_{k-1}}.$$

- Si la droite est plate, on a $a = 0 \Rightarrow$ Poisson
- Si la droite est négative, on a $a < 0 \Rightarrow$ Binomiale
- Si la droite est positive, on a $a > 0 \Rightarrow$ Binomiale négative.

5 | Fréquence et sévérité avec modifications de la couverture

— Par perte (Per-loss) : Y^L
— Par paiement (Per-payment) : Y^P
— $Y^P = Y^L | Y^L > 0$.

5.1 | Déductibles

Définition 5.1.1 : Déductible ordinaire

Un déductible ordinaire transforme la variable en excès-moyen ou en variable translatée. On a

$$Y^P = \begin{cases} \text{indéfini}, & X \leq d, \\ X - d, & X > d \end{cases}$$

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X - d, & X > d \end{cases}$$

Relations :

	Y^P	Y^L
densité	$\frac{f_X(y+d)}{S_X(d)}$	$f_X(y+d)$
survie	$\frac{S_X(y+d)}{S_X(d)}$	$S_X(y+d)$
répartition	$\frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{S_X(d)}$	$F_X(y+d) - F_X(d)$
hasard	$\frac{f_X(y+d)}{S_X(y+d)} = h_{X(y+d)}$	indéfinie à 0, donc indéfinie
moyenne	$\frac{E[X] - E[X \wedge d]}{S(d)}$	$E[X] - E[X \wedge d]$

Définition 5.1.2 : Déductible franchise

Un déductible franchise paie le montant au complet si la franchise est atteinte. On a

$$Y^P = \begin{cases} \text{indéfini}, & X \leq d, \\ X, & X > d \end{cases}$$

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X, & X > d \end{cases}$$

	Y^P	Y^L
densité	$\frac{f_X(y)}{S_X(d)}, y > d$	$\begin{cases} F_X(d), & y = 0 \\ f_X(y), & y > d \end{cases}$
survie	$\begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq d \\ \frac{S_X(y)}{S_X(d)}, & y > d \end{cases}$	$\begin{cases} S_X(d), & 0 \leq y \leq d \\ S_X(y), & y > d \end{cases}$
répartition	$\begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq d \\ \frac{F_X(y) - F_X(d)}{S_X(d)}, & y > d \end{cases}$	$\begin{cases} F_X(d), & 0 \leq y \leq d \\ F_X(y), & y > d \end{cases}$
hasard	$\begin{cases} 0, & 0 < y < d \\ h_X(y), & y > d \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & 0 < y < d \\ h_X(y), & y > d \end{cases}$
moyenne	$\frac{E[X] - E[X \wedge d]}{S(d)} + d$	$E[X] - E[X \wedge d] + d\,[S(d)]$

5.2 | Ratio d'élimination de perte et effet de l'inflation sur les déductibles ordinaires

Définition 5.2.1 : Ratio d'élimination de pertes

Le ratio d'élimination de pertes est le ratio de la décroissance en paiement espéré avec un déductible ordinaire versus un paiement espéré sans déductible :

$$\frac{E[X \wedge d]}{E[X]}$$

Théorème 5.2.2

Pour un déductible ordinaire d après inflation uniforme de $1+r$, l'espérance du coût par perte est

$$(1+r)\left\{E[X] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right\}$$

Si $F\left(\frac{d}{1+r}\right) < 1$, l'espérance du coût par paiement est

$$\frac{(1+r)\left\{E[X] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right\}}{S\left(\frac{d}{1+r}\right)}.$$

Savoir le prouver.

5.3 | Limites de polices

Définition 5.3.1

Une police avec limite u paie la perte complète si la perte est inférieure à u, et u si la perte est supérieure à u. On a

$$Y = \begin{cases} Y, & y < u \\ u, & y \geq u. \end{cases}$$

Quelques résultats :

— $F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y < u \\ 1, & y \geq u. \end{cases}$

— $F_Y(y) = \begin{cases} f_X(y), & y < u \\ 1 - F_X(u), & y = u. \end{cases}$

— Pour une limite de police u, après inflation uniforme $1+r$, le coût espéré est

$$(1+r)E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right]$$

5.4 | Coassurance, déductibles et limites

Dans le cas où la compagnie paie une portion α de la perte, la variable aléatoire est $Y = \alpha X$. La variable aléatoire qui incorpore les quatre modifications du chapitre est

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X < \frac{d}{1+r} \\ \alpha\left[(1+r)X - d\right], & \frac{d}{1+r} \leq X < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u-d), & X \geq \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

On note que les quantités sont appliqués dans un ordre particulier : la coassurance est appliquée en dernier.

Théorème 5.4.1 : Quelques moments pour les modifications

Le premier moment par perte est

$$E\left[Y^L\right] = \alpha(1+r)\left\{E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right]\right\}$$

et le premier moment par paiement est

$$E\left[Y^P\right] = \frac{E\left[Y^L\right]}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}.$$

Le deuxième moment par perte est

$$E\left[\left(Y^L\right)^2\right] = \alpha^2(1+r)^2\left\{E\left[(X \wedge u^*)^2\right] - E\left[(X \wedge d^*)^2\right] - 2d^*E\left[X \wedge u^*\right] + 2d^*E\left[X \wedge d^*\right]\right\},$$

où

$$u^* = \frac{u}{1+r} \quad \text{et} \quad d^* = \frac{d}{1+r}.$$

Pour par-paiement, on a

$$E\left[\left(Y^L\right)^2\right] = \frac{E\left[\left(Y^L\right)^2\right]}{1 - F_X\left(d^*\right)}.$$

Preuve : facile, manipuler les mins et max et prendre l'espérance. À connaître.

6 | Rappel des notions de mathématiques statistiques

6.1 | Estimation ponctuelle

Dans cette section, on s'intéresse à produire une seule valeur pour déterminer la la valeur d'une quantité pour une population inconnue.

6.1.1 | Mesures de qualité

Définition 6.1.1 : Biais

Un estimateur $\hat{\theta}$ est sans biais si $E[\hat{\theta}|\theta] = \theta, \; \forall\, \theta$. Le biais est

$$\text{bias}_{\hat{\theta}}(\theta) = E[\hat{\theta}|\theta] - \theta.$$

Définition 6.1.2 : Biais asymptotique

Soit $\hat{\theta}_n$, un estimateur de θ basé sur un échantillon de taille n. L'estimateur est asymptotiquement sans biais si

$$\lim_{n\to\infty} E[\hat{\theta}_n|\theta] = \theta, \; \forall\theta.`$$

Définition 6.1.3 : Convergence

Un estimateur est convergent si, pour tout $\delta > 0$ et pout tout θ,

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(|\hat{\theta}_n - \theta| > \delta\right) = 0.$$

— Une condition suffisante (mais pas nécessaire) est que l'estimateur soit asymptotiquement sans biais et $Var\left(\hat{\theta}_n\right) \to 0$.

— Critique : le choix de δ est parfois arbitraire.

Définition 6.1.4 : Erreur quadratique moyenne

L'erreur quadratique moyen d'un estimateur est

$$MSE_{\hat{\theta}}(\theta) = E\left[\left(\hat{\theta} - \theta\right)^2 |\theta\right].$$

On peut décomposer cet estimateur comme

$$MSE_{\hat{\theta}}(\theta) = E\left[\left(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}|\theta] + E[\hat{\theta}|\theta] - \theta\right)^2 \middle| \theta\right] = Var\left(\hat{\theta}|\theta\right) + \left[\text{bias}_{\hat{\theta}}(\theta)\right]^2$$

Définition 6.1.5 : Estimateur sans biais à variance minimale

Un estimateur $\hat{\theta}$ est appelé estimateur sans biais à variance minimale si il est sans biais et pour la vraie valeur de θ il n'existe pas d'estimateur avec une plus faible variance.

6.2 | Intervalles de confiance

Dans cette section, on s'intéresse à produire un intervalle de valeurs possibles d'une quantité pour une population inconnue.

Définition 6.2.1

Un intervalle de confiance à $100(1-\alpha)\%$ pour un paramètre θ est une paire de valeurs aléatoires, L et U, calculé d'un échantillon aléatoire tel que

$$\Pr(L \leq \theta \leq U) \geq 1 - \alpha, \ \forall \theta.$$

Si la population est normale avec moyenne et variance inconnue, on a

$$L = \overline{X} - t_{\alpha/2, n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}, \quad U = \overline{X} + t_{\alpha/2, n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$$

et

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \overline{X}\right)^2}{n-1}}.$$

Sinon, l'approximation normale peut être utilisée. Si $\hat{\theta}$ est approximativement normal, on a (approximtivement)

$$1-\alpha = \text{Pr}\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{v(\theta)}} \leq z_{\alpha/2}\right).$$

On remarque que θ apparaît à deux endroits. Alors, si isoler θ est trop compliqué, on peut utiliser l'approximation $v(\theta) \approx v(\hat{\theta})$ et l'intervalle de confiance devient

$$1-\theta = \text{Pr}\left(\theta - z_{\alpha/2}\sqrt{v(\hat{\theta})} \leq \theta \leq \theta + z_{\alpha/2}\sqrt{v(\hat{\theta})}\right).$$

6.3 | Tests d'hypothèse

Un test d'hypothèse est composé de deux hypothèses :

— l'hypothèse nulle (notée H_0), et

— l'hypothèse alternative (notée H_1).

Les deux hypothèses ne sont pas symmétriques : les alterner peut changer les résultats.

— Déterminer l'hypothèse est faite avec une statistique de test. C'est une fonction des observations et est une variable aléatoire.

— La spécification d'un test est complétée en construisant une région de rejet.

— Les bornes de la région (autre que $\pm\infty$) sont appelées les valeurs critiques.

6.3.1 | Types d'erreur.

Lorsqu'on construit un test, on peut avoir deux types d'erreurs. Le premier se produit si on rejette l'hypothèse nulle mais que l'hypothèse nulle était vraie. On appelle cet erreur *type I*.

Définition 6.3.1 : Niveau d'importance

Le niveau d'importance (exceptionnel) d'un test d'hypothèse est la probabilité de faire un erreur de type I sachant que l'hypothèse nulle est vraie. On note ce niveau α. Le niveau d'importance est habituellement déterminé d'avance, entre 0.01 et 0.1.

Le deuxième type d'erreur est de ne pas rejetter l'hypothèse nulle alors que l'hypothèse alternative est vraie. La puissance du test est 1 - la probabilité de faire un erreur de type II.

Définition 6.3.2

Un test d'hypothèse est uniformément plus puissant s'il n'existe aucun autre test qui a le même ou plus bas niveau d'importance et, pour une valeur particulière dans l'hypothèse alternative, a une plus petite probabilité de faire un erreur de type II.

Généralement, diminuer un type d'erreur cause l'autre à augmenter.

Définition 6.3.3

Pour un test d'hypothèse, la valeur-p est la probabilité que la statistique de test prend une valeur moins d'accord avec l'hypothèse nulle que la valeur obtenue dans l'échantillon. Les tests effectués à un niveau de confiance supérieur à la valeur-p mènent à rejeter l'hypothèse nulle, et les test effectués à un niveau de confiance infétieur à la valeur-p mènent à l'échec de rejeter l'hypothèse nulle.

7 | Estimation for complete data

Lorsque les observations sont collectées d'une distribution de probabilité, la situation idéale est d'avoir les réalisations de chaque observation. Ce cas est référé aux données complètes individuelles.

Les données exactes peuvent être impossibles à avoir car

1. les données peuvent être groupées ;
2. les données peuvent être censurées ou tronquées.

On considère premièrement l'estimation pour les données complètes et individuelles.

Définition 7.0.1

La fonction de distribution empirique est

$$F_n(x) = \frac{\text{Nombre d'observations } \leq x}{n},$$

où n est le nombre total d'observations.

Définition 7.0.2

La fonction de hasard cumulative est définie selon

$$H(x) = -\ln S(x).$$

Source de la fonction :

$$H'(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{f(x)}{S(x)} = h(x) \Rightarrow H(x) = \int_{-\infty}^{x} h(y)dy.$$

Autre notation :

— Soit n, la taille échantillonnalle

— Soit $y_1 < y_2 < \cdots < y_k$ être les k valeurs uniques

— Soit s_j, le nombre de gois dont y_j apparraît dans l'échantillon.
— Soit le nombre d'observations plus grande qu'une valeur. L'ensemble des risques r_j est définie par $r_j = \sum_{i=j}^{k} s_j$, le nombre d'observations plus grand ou égal à y_j.

En utilisant cette notation, on obtient

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < y_1 \\ 1 - \frac{r_j}{n}, & y_{j-1} \leq x < y_j, \quad j = 2, 3, \ldots, k \\ 1, & x \geq y_k \end{cases}$$

Définition 7.0.3 : L'estimateur Nelson-Åalen

L'estimateur Nelson-Åalen de la fonction de hasard cumulative est

$$\hat{H}(x) = \begin{cases} 0, & x < y_1 \\ \sum_{i=1}^{j-1} \frac{s_i}{r_i}, & y_{j-1} \leq x < y_j, \quad j = 2, 3, \ldots, k \\ \sum_{i=1}^{k} \frac{s_i}{r_i}, & x \geq y_k \end{cases}$$

8 | Estimation pour données modifiées

Définition 8.0.1 : Définitions de modifications

— Une observation est tronquée du haut (tronquée à gauche) à d si lorsque la valeur est inférieure à d, elle n'est pas enregistrée mais qu'elle est enregistrée si sa valeur est supérieure à d.

— Une observations est tronquée du bas (tronquée à droite) à u si lorsque la valeur est supérieure à u, elle n'est pas enregistrée mais qu'elle est enregistrée si sa valeur est inférieure à u.

— Une observation est censurée du bas (censurée à gauche) à d si lorsque la valeur est inférieure à d, elle est enregistrée comme d, mais qu'elle est enregistrée à sa valeur si elle est supérieure à d.

— Une observation est censurée du haut (censurée à droite) à u si lorsque sa valeur est supérieure à u, elle est enregistrée comme u, mais qu'elle est enregistrée à sa valeur si elle est inférieure à u.

En actuariat, on a des données tronquées à gauche et des données censurées à droite.

INCOMPLET

Quatrième partie

Théorie de la crédibilité

1 | Crédibilité Bayesienne

2 | Le modèle de Buhlmann

2.1 | La prime de crédibilité

Objectif : minimiser l'erreur quadratique moyenne de la prime de crédibilité avec un estimateur linéaire de la forme

$$\mu(\theta) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j.$$

On souhaite minimiser

$$Q = E\left[\left(\mu_{n+1}(\theta) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j\right)^2\right],$$

par rapport à $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. L'espérance est prise par sur la distribution conjointe de $\Theta, \underline{X}$.

En dérivant et en jouant avec les espérances, on a

$$E[X_{n+1}] = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j X_j$$

et

$$Cov(X_i, X_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j Cov(X_i, X_j).$$

2.2 | Le modèle de Buhlmann

Notation :

— $\mu(\theta) = E[X_j|\Theta = \theta]$

— $v(\theta) = Var(X_j|\Theta = \theta)$

— $\mu = E[\mu(\Theta)]$

— $v = E[v(\Theta)]$

— $a = Var(\mu(\Theta))$

Résultats intermédiaires (obtenus en conditionnant) :

- $E[X_j] = \mu$
- $Var(X_j) = v + a$
- $Cov(X_j, X_i) = a$.

La prime de crédibilité devient

$$\tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j X_j = Z\overline{X} + (1 - Z)\mu,$$

avec

$$Z = \frac{n}{n + k}$$

et

$$k = \frac{v}{a} = \frac{E[Var(X_j|\Theta)]}{Var(E[X_j|\Theta])}.$$

Cinquième partie

Théorie du risque

Sixième partie

Processus stochastiques

Septième partie

Finance

Bibliographie

[Kellison, 2006] Kellison, S. G. (2006). *The theory of interest*.

[Klugman et al., 2012] Klugman, S. A., Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (2012). *Loss models : from data to decisions*, volume 715. John Wiley & Sons.