

# Étude examen prédoctoral général

Christopher Blier-Wong, M.Sc., M.Sc.



UNIVERSITÉ  
**LAV**AL

Faculté des  
sciences et de génie  
École d'actuariat



# Table des matières

<b>I</b>	<b>Mathématiques financières</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>La mesure de l'intérêt</b>	<b>3</b>
1.1	Les fonctions d'accumulation et de montant	3
1.2	Le taux d'intérêt effectif	4
1.3	Intérêt simple	4
1.4	Intérêt composé	4
1.5	Valeur actualisée	4
1.6	Taux effectif d'escompte	5
1.7	Taux d'intérêt et d'escompte nominaux	6
1.8	Force d'intérêt et d'escompte	6
1.9	Intérêt variable	7
<b>2</b>	<b>Solutions de problèmes d'intérêt</b>	<b>9</b>
2.1	Le problème de base	9
2.2	Équations de valeur	9
<b>3</b>	<b>Rentes de base</b>	<b>11</b>
3.1	Introduction	11
3.2	Rente immédiate	11
3.3	Rente due	12
3.4	Perpetuité	12
3.5	Rentes payables à fréquences autres que l'intérêt est converti	13
3.5.1	Rente à fréquence inférieure à la période de conversion	13
3.6	Rentes à fréquence supérieure à la période de conversion	13
3.7	Rente continue	13
3.8	Rentes variables	14
<b>4</b>	<b>Analyse du flux de trésorerie</b>	<b>15</b>
4.1	Taux de rendement	15
4.2	Taux de réinvestissement	15
4.3	Mesure de l'intérêt dans un fonds	16
4.3.1	Résultats en discret	16
4.3.2	Résultats en continu	17
4.4	Taux d'intérêt pondéré par le temps	17
<b>II</b>	<b>Mathématiques actuarielles vie</b>	<b>19</b>
<b>1</b>	<b>Distributions de survie</b>	<b>21</b>
1.1	Résumé de la notation	21

1.2	Relations avec tables de mortalité	22
1.3	Groupe de survie déterministe	22
1.4	Autres caractéristiques	23
1.4.1	Relations de récursion	23
1.5	Hypothèses pour les âges fractionnaires	24
1.6	Lois analytique de survie	24
1.7	Tables de mortalité sélectes et ultimes	25
<b>2</b>	<b>Assurance vie</b>	<b>27</b>
2.1	Assurance continue	27
2.2	Assurance discrète	28
2.3	Relation entre l'assurance payable au moment du décès et la fin de l'année	29
<b>3</b>	<b>Rentes</b>	<b>31</b>
3.1	Rentes discrètes	32
3.1.1	Rente temporaire	32
3.1.2	Rentes payables en fin d'année	33
3.2	Rentes payables $m$ fois par année	33
3.2.1	Approximations	34
<b>4</b>	<b>Primes</b>	<b>35</b>
4.1	Principes de primes	35
4.2	Primes pour des contrats continus	35
<b>III</b>	<b>Distributions de sinistres</b>	<b>37</b>
<b>1</b>	<b>Quantités distributionnelles de base</b>	<b>39</b>
1.1	Queues des distributions	39
<b>2</b>	<b>Caractéristiques des modèles actuariels</b>	<b>41</b>
2.1	Distributions paramétriques et d'échelle	41
2.2	Familles de distributions paramétriques	42
2.3	Distribution de mélange fini	42
2.4	Distributions dépendantes des données	42
<b>3</b>	<b>Distributions continues</b>	<b>43</b>
3.1	Créer des nouvelles distributions	43
3.1.1	Multiplication par une constante	43
3.1.2	Création de distributions en élevant à une puissance	43
3.1.3	Création de distributions avec exponentiation	44
3.1.4	Mélange	44
3.1.5	Modèles à fragilité	44
3.1.6	Raccordement de distributions connues	45
3.2	Familles de distributions et leurs liens	45
3.2.1	Distributions limites	45
3.3	Théorie des valeurs extrêmes	45
3.3.1	Distributions à valeur extrêmes (DVE)	45
3.3.2	Distribution du maximum	47
3.3.3	Stabilité du maximum des DVE	47
3.3.4	Théorème Fisher-Tippett	47

<b>4 Distributions discrètes</b>	<b>49</b>
4.1 Notation et rappels	49
4.2 Loi Poisson	49
4.3 Loi binomiale négative	50
4.4 Loi binomiale	50
4.5 La classe $(a, b, 0)$	51
<b>5 Fréquence et sévérité avec modifications de la couverture</b>	<b>53</b>
5.1 Déductibles	53
5.2 Ratio d'élimination de perte et effet de l'inflation sur les déductibles ordinaires	54
5.3 Limites de polices	55
5.4 Coassurance, déductibles et limites	55
<b>6 Rappel des notions de mathématiques statistiques</b>	<b>57</b>
6.1 Estimation ponctuelle	57
6.1.1 Mesures de qualité	57
6.2 Intervalles de confiance	58
6.3 Tests d'hypothèse	59
6.3.1 Types d'erreur	59
<b>7 Estimation pour données complètes</b>	<b>61</b>
<b>8 Estimation pour données modifiées</b>	<b>63</b>
<b>IV Théorie de la crédibilité</b>	<b>65</b>
<b>1 Crédibilité Bayésienne</b>	<b>67</b>
<b>2 Le modèle de Buhlmann</b>	<b>69</b>
2.1 La prime de crédibilité	69
2.2 Le modèle de Buhlmann	69
<b>V Théorie du risque</b>	<b>71</b>
<b>1 Mesures de risque</b>	<b>73</b>
1.1 Quelques mesures de risque	73
1.2 Propriétés désirables et cohérence	74
1.3 Mesures de solvabilité sur une période	75
<b>2 Modélisation des risques</b>	<b>77</b>
2.1 Modèle stochastique du risque	77
2.2 Approche indemnitare et forfaitaire	78
2.3 Généralisations des principales lois de fréquence	78
2.4 Sommes aléatoires et allocation	79
2.5 Pertes financières	79
<b>3 Mutualisation des risques</b>	<b>81</b>
3.1 Aggrégation des risques	81
3.2 Méthodes d'approximation basée sur les moments	82
3.2.1 Approximation basée sur la distribution normale	82
3.2.2 Approximation basée sur la loi gamma translatée	82
3.2.3 Autres approximations	83
3.3 Mutualisation et activités d'assurance	83

<b>4</b>	<b>Principes de prime</b>	<b>85</b>
4.1	Propriétés désirables	85
4.2	Principes de prime	85
4.2.1	Principe de la valeur espérée	85
4.2.2	Principe de la variance	85
4.2.3	Principe de l'écart type	85
4.2.4	Principe de la VaR	85
4.2.5	Principe de la TVaR	86
4.2.6	Approche top-down	86
4.2.7	Principe exponentiel	86
<b>5</b>	<b>Méthodes de simulation</b>	<b>87</b>
5.1	Méthode de base	87
5.1.1	Simulations de v.a. définis par un mélange	87
5.1.2	Simulation de somme aléatoire	87
<b>6</b>	<b>Méthodes d'aggrégation</b>	<b>89</b>
<b>7</b>	<b>Comparaison des risques</b>	<b>91</b>
7.1	Ordres partiels	91
7.2	Ordre en dominance stochastique	92
7.3	Ordres convexes	94
<b>8</b>	<b>Copules</b>	<b>97</b>
8.1	Copules bivariées	97
8.2	Propriétés des copules	98
<b>9</b>	<b>Allocation du capital</b>	<b>99</b>
<b>VI</b>	<b>Processus stochastiques</b>	<b>101</b>
<b>1</b>	<b>Chaînes de Markov</b>	<b>103</b>
<b>2</b>	<b>Processus de Poisson</b>	<b>105</b>
2.1	Distribution exponentielle	105
2.2	Processus de Poisson	105
2.3	Généralisations du processus de Poisson	108
2.3.1	Processus de Poisson composé	109
2.3.2	Processus de Poisson conditionnel ou mixte	109
<b>VII</b>	<b>Finance</b>	<b>111</b>

**Première partie**

**Mathématiques financières**





# 1 | La mesure de l'intérêt

Voir [Kellison, 2006], chapitre 1

## 1.1 | Les fonctions d'accumulation et de montant

- Le montant initial investi est appelé le *capital*
- Le montant obtenu après une période de temps est appelé la *valeur accumulée*
- La différence entre le montant accumulé et le principal est le *montant d'intérêt* ou *intérêt*
- $t$  est le temps mesuré depuis le début la date d'investissement
- L'unité de temps est la *période de mesure* ou *période*

### Définition 1.1.1 : La fonction d'accumulation

La fonction d'accumulation  $a(t)$  correspond à la valeur accumulée au temps  $t \geq 0$  d'un investissement initial de 1.

La fonction d'accumulation possède les propriétés suivantes :

1.  $a(0) = 1$
2.  $a(t)$  est généralement croissante
3. Si l'intérêt est accumulé en continu,  $a(t)$  est continue

### Définition 1.1.2 : Fonction de montant

La fonction de montant  $A(t)$  correspond à la valeur accumulée au temps  $t \geq 0$  d'un investissement initial de  $k > 0$ . On a

$$A(t) = k \times a(t) \quad \text{et} \quad A(0) = k.$$

### Définition 1.1.3 : Montant d'intérêt

Le montant d'intérêt gagné pendant la  $n^{\text{ième}}$  période depuis la date d'investissement est

$$I_n = A(n) - A(n-1) \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

## 1.2 | Le taux d'intérêt effectif

### Définition 1.2.1

Le taux d'intérêt effectif  $i$  est le montant d'argent qu'une unité investie au début de la période va gagner pendant la période, où l'intérêt est obtenu à la fin de la période, c.-à-d.  $i = a(1) - a(0)$  ou  $a(1) = 1 + i$ .

Le taux d'intérêt  $i$  est le ratio du montant d'intérêt gagné pendant la période et du montant de principal investi au début de la période.

Le mot effectif est utilisé lorsque l'intérêt est payé une fois par période.

Les taux d'intérêt peuvent être calculés sur n'importe quelle période d'investissement. Soit  $i_n$ , le taux d'intérêt effectif pour la  $n^{\text{ième}}$  période depuis la date d'investissement. Alors, on a

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}, \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

## 1.3 | Intérêt simple

La fonction d'accumulation est linéaire

$$a(t) = a + it \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Accumuler de l'intérêt avec ce patron correspond à l'intérêt simple. On a

$$i_n = \frac{i}{1 + i(n-1)},$$

donc un intérêt simple constant implique un taux d'intérêt effectif décroissant.

## 1.4 | Intérêt composé

L'intérêt composé assume que le montant accumulé est automatiquement ré-investi.

$$a(t) = (1 + i)^t \quad \text{pour } t \geq 0.$$

On a  $i_n = i$ , qui est indépendant de  $n$ . Alors, un taux d'intérêt composé correspond au taux d'intérêt effectif.

## 1.5 | Valeur actualisée

Le terme  $1 + i$  est le facteur d'accumulation, car il accumule la valeur d'un investissement au début de la période à la fin de la période. On doit parfois déterminer le montant à investir pour obtenir 1 à la fin de

la période. Pour ce faire, on définit un nouveau symbole

$$v = \frac{1}{1+i}$$

parfois appelé le facteur d'escompte.

- La fonction d'escompte est  $a^{-1}(t) = \frac{1}{a(t)}$ .
- Pour l'intérêt simple, on a  $a^{-1}(t) = \frac{1}{1+it}$ .
- Pour l'intérêt composé, on a  $a^{-1}(t) = \frac{1}{(1+i)^t} = v^t$ .

## 1.6 | Taux effectif d'escompte

### Définition 1.6.1 : Le taux effectif d'escompte

Le taux effectif d'escompte  $d$  est le ratio du montant d'intérêt gagné pendant la période et du montant investi à la fin de la période.

La principale différence entre le taux d'effectif d'intérêt et le taux effectif d'escompte est

- Intérêt : payé à la fin de la période divisé par la balance au début de la période.
- Escompte : payé au début de la période divisé sur la balance à la fin de la période.

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)}, \quad \text{pour un entier } n \geq 1.$$

### Définition 1.6.2 : Équivalence

Deux taux d'intérêt ou d'escompte sont dit équivalant si un montant de principal investi pour la même durée à chaque taux d'intérêt produisent la même valeur accumulée.

On utilise le concept d'équivalence pour établir des liens entre les taux d'intérêt.

Si une personne emprunte 1 au taux d'escompte effectif  $d$ , le principal initial est  $1 - d$  et le montant d'intérêt est  $d$ . Alors,

$$i = \frac{d}{1-d} \Rightarrow d = \frac{i}{1+i} = iv.$$

Autres relations utiles :

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i} = 1 - v;$$

$$d = iv = i(1-d) = i - id \Rightarrow i - d = id.$$

## 1.7 | Taux d'intérêt et d'escompte nominaux

- On considère les situations où l'intérêt est payé plus fréquemment qu'une fois par période. Ces taux sont appelés nominaux.
- Le symbole pour un taux nominal d'intérêt payé  $m$  fois par période est  $i^{(m)}$ , où  $m$  est un entier positif.
- Par un taux nominal d'intérêt  $i^{(m)}$ , on veut dire que l'intérêt est  $i^{(m)}/m$  pour chaque  $\frac{1}{m}$  période.
- De la définition d'équivalence, on a

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \Rightarrow i^{(m)} = m \left[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

- Le symbole pour un taux nominal d'escompte payé  $m$  fois par période est  $d^{(m)}$ , où  $m$  est un entier positif.
- De la définition d'équivalence, on a

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m \Rightarrow d^{(m)} = m \left[1 - v^{\frac{1}{m}}\right]$$

- Une autre relation est

$$\frac{i^{(m)}}{m} - \frac{d^{(m)}}{m} = \frac{i^{(m)}}{m} \frac{d^{(m)}}{m}.$$

## 1.8 | Force d'intérêt et d'escompte

Mesure de l'intensité dont d'intérêt opère, i.e. le taux d'intérêt instantané. La force d'intérêt au temps  $t$  est défini par

$$\delta_t = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{a'(t)}{a(t)}.$$

Par la dérivée en chaîne, on a aussi

$$\delta_t = \frac{d}{dt} \ln A(t) = \frac{d}{dt} \ln a(t).$$

Autres relations :

- $\exp \left\{ \int_0^t \delta_r dr \right\} = \frac{A(t)}{A(0)} = \frac{a(t)}{a(0)} = a(t);$
- $\int_0^n A(t) \delta_t dt = \int_0^n A'(t) dt = A(n) - A(0).$  Intuition : l'intérêt est égal à la somme du capital investi au temps  $t$  multiplié par la force d'intérêt au temps  $t$ .

La force d'escompte est

$$\delta'_t = - \frac{\frac{d}{dt} a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)}.$$

On a

$$\delta_t = \delta'_t$$

Par le principe d'équivalence, on a

$$i = e^\delta - 1 \Rightarrow \delta = \ln(1 + i)$$

Séries de Taylor :

- $i = e^\delta - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots$
  - $\delta = \ln(1 + i) = i - \frac{i^2}{2!} + \frac{i^3}{3!} - \frac{i^4}{4!} + \dots$
  - Les termes  $i^k$  et  $\delta^k$  sont très petits pour  $k > 2$  car  $i$  et  $\delta$  sont très petits.
- Liste d'équivalences :

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i = v^{-1} = (1 - d)^{-1} = \left(1 - \frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p} = e^\delta.$$

Sous l'intérêt simple, la force d'intérêt est  $\delta_t = \frac{i}{1+it}$  et la force d'escompte est  $\delta'_t = \frac{d}{1-dt}$ . On remarque que  $\delta_t$  est une fonction croissante et  $\delta'_t$  est une fonction décroissante.

En utilisant l'expansion de Taylor, on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \delta$$

et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d^{(m)} = \delta'$$

## 1.9 | Intérêt variable

- Si la force d'intérêt change, on utilise la relation  $a(t) = e^{\int_0^t \delta_r dr}$
- Si le taux effectif d'intérêt change, on utilise la relation

$$a(t) = (1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \dots (1 + i_t) = \prod_{k=1}^t (1 + i_k)$$

- Si le taux effectif d'escompte change, on utilise la relation

$$a^{-1}(t) = (1 - d_1)(1 - d_2)(1 - d_3) \dots (1 - d_t) = \prod_{k=1}^t (1 - d_k)$$

- On a aussi

$$a^{-1}(t) = (1 + i_1)^{-1}(1 + i_2)^{-1}(1 + i_3)^{-1} \dots (1 + i_t)^{-1} = \prod_{k=1}^t (1 + i_k)^{-1} = \prod_{k=1}^t v_k$$



## 2 | Solutions de problèmes d'intérêt

Voir [Kellison, 2006], chapitre 2.

### 2.1 | Le problème de base

Les problèmes d'intérêts sont composés de quatre éléments :

1. Le principal investi initialement
2. La longueur de la période d'investissement
3. Le taux d'intérêt
4. La valeur accumulée du principal à la fin de la période d'investissement.

Connaissant trois éléments, le quatrième peut être résolu.

### 2.2 | Équations de valeur

- Principe fondamental : la valeur temporelle de l'argent.
- Deux valeurs monétaires à différents temps ne peuvent pas être comparés.
- On doit accumuler ou escompter les valeurs à une *date de comparaison*
- L'équation qui compare deux valeurs monétaires à la même date de comparaison est l'équation de valeur.





## 3 | Rentes de base

Voir [Kellison, 2006], chapitres 3 et 4

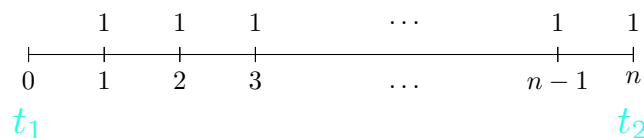
### 3.1 | Introduction

#### Définition 3.1.1 : Rente

- Une rente est une série de paiements fait à intervalles égaux.
- Une rente certaine est une rente dont les paiements sont faits pour une période de temps avec certitude.
- L'intervalle entre les paiements est la période de paiements

### 3.2 | Rente immédiate

Une rente immédiate paie 1 à la fin de chaque période pour  $n$  périodes.



La valeur actualisée d'une rente immédiate (au temps  $t_1$ ) est notée par  $a_{\overline{n}|}$ . On a

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1} + v^n = \frac{1 - v^n}{i}.$$

La valeur accumulée d'une rente immédiate (au temps  $t_2$ ) est notée par  $s_{\overline{n}|}$

$$s_{\overline{n}|} = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^n = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

Quelques relations

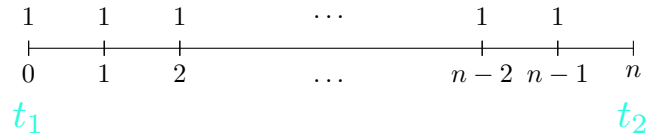
$$— 1 = ia_{\overline{n}|} + v^n$$

$$— s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n$$

$$— \frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i$$

### 3.3 | Rente due

Une rente due paie 1 au début de chaque période pour  $n$  périodes.



La valeur actualisée d'une rente due (au temps  $t_1$ ) est notée par  $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ . On a

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 \dots + v^{n-2} + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

La valeur accumulée d'une rente due (au temps  $t_2$ ) est notée par  $\ddot{s}_{\overline{n}|}$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.$$

Quelques relations

$$— \ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n$$

$$— \ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)$$

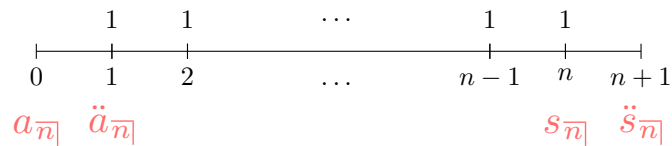
$$— \ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|}$$

$$— \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + d$$

$$— \ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|}(1+i)$$

$$— \ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1$$

Comparaison des rentes :



### 3.4 | Perpetuité

Une perpetuité est une rente de durée infinie.

$$a_{\infty|} = \frac{1}{i}; \quad \ddot{a}_{\infty|} = \frac{1}{d}$$

### 3.5 | Rentes payables à fréquences autres que l'intérêt est converti

#### 3.5.1 | Rente à fréquence inférieure à la période de conversion

S'il y a  $k$  périodes de conversion dans une période de paiement, la valeur actualisée d'une rente immédiate est

$$v^k + v^{2k} + \dots + v^{\frac{n}{k} \times k} = \frac{v^k - v^{nk}}{1 - v^k} = \frac{1 - v^n}{(1 + i)^k - 1} = \frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}.$$

La valeur actualisée d'une rente due est

$$1 + v^k + v^{2k} + \dots + v^{\frac{n}{k} \times k - k} = \frac{1 - v^{nk}}{1 - v^k} = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}.$$

Note : la manipulation des termes  $a_{\overline{n}|}$  et  $s_{\overline{n}|}$  doit être intuitive.

### 3.6 | Rentes à fréquence supérieure à la période de conversion

Soit  $m$ , le nombre de paiements par période de conversion de l'intérêt et  $n$ , le nombre de périodes de conversion de l'intérêt. Chaque paiement est de  $\frac{1}{m}$ , tel que la somme de 1 est payée pendant une période de conversion. Alors, il y a  $mn$  paiements.

La valeur actualisée de cette rente immédiate est

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \left[ v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \dots + v^{\frac{mn-1}{m}} + v^{\frac{mn}{m}} \right] = \frac{1 - v^n}{m \left( (1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right)} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}}$$

et la valeur accumulée est

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)} (1 + i)^n = \frac{(1 + i)^n - 1}{i^{(m)}}.$$

De manière équivalente, la valeur actualisée d'une rente due est

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}}$$

### 3.7 | Rente continue

L'expression pour la valeur actualisée d'une rente qui paie 1 par période d'intérêt est

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt = \frac{1 - v^n}{\delta}.$$

L'expression pour la valeur accumulée d'une rente qui paie 1 par période d'intérêt est

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n (1 + i)^t dt = \frac{(1 + i)^n - 1}{\delta}.$$

On a aussi

$$\frac{d}{dt} \bar{s}_{\overline{t}|} = 1 + \delta \bar{s}_{\overline{t}|}$$

alors, à chaque moment, la rente paie 1 et la force de l'intérêt fois la valeur accumulée de la rente depuis le début de la rente.

## 3.8 | Rentes variables

Progression géométrique seulement. Dans le cas de l'intérêt composé avec des paiements qui grandissent selon un patron géométrique, on peut se définir un nouveau taux d'intérêt et utiliser les résultats existants.

## 4 | Analyse du flux de trésorerie

Voir [Kellison, 2006], chapitre 5. Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier des positions financières où des entrées et des sorties de fonds sont faites dans le compte.

### 4.1 | Taux de rendement

On considère des situations où l'investisseur des entrées de fonds de montant  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$  aux temps  $0, 1, 2, \dots, n$ . On suppose que les temps  $t, t+1$  sont espacés de manière uniforme. Note :  $C_i, i = 1, \dots, n$  peut être négatif, qui correspond à une sortie de fonds.

On note un rendement (sortie de fonds) au temps  $t$  par  $R_t, t = 0, 1, 2, \dots, n$ , alors  $C_t = -R_t, t = 0, 1, 2, \dots, n$ .

La valeur actualisée nette est

$$P(i) = \sum_{t=0}^n v^t R_t.$$

#### Définition 4.1.1

Le taux de rendement est le taux où la valeur actualisée nette des rendements de l'investissement est égale à la valeur actualisée des contributions dans l'investissement. Ce taux est aussi appelé le taux de rendement interne.

On peut trouver le taux de rendement  $i$  selon l'équation de valeur

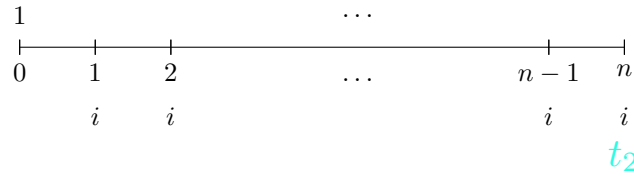
$$P(i) = 0.$$

Un taux de rendement est seulement comparable à un autre si la durée de l'investissement est identique.

### 4.2 | Taux de réinvestissement

Jusqu'à présent, on n'a pas considéré le taux d'intérêt sur les réinvestissements, on a supposé que ce taux était constant toute la durée de l'investissement. Par contre, un investissement à court terme rapportera probablement un taux d'intérêt inférieur à un investissement à long terme, donc le taux de réinvestissement pourrait être plus petit que le taux de rendement initial.

On considère un investissement de 1 pour  $n$  périodes au taux  $i$  et au taux de réinvestissement  $j$ . L'investissement initial retourne  $i$  à chaque période, qui est investi au taux  $j$ . Le diagramme de temps est



La valeur accumulée est  $1 + i s_{\overline{n}|j}$ .

### 4.3 | Mesure de l'intérêt dans un fonds

Définitions :

- $A$  : le montant dans le fonds au début de la période
- $B$  : le montant dans le fonds à la fin de la période
- $I$  : le montant d'intérêt obtenu pendant la période
- $C_t$  : le montant net de capital contribué au temps  $t$ , pour  $0 \leq t \leq 1$
- $C$  : le montant de capital total pendant la période,  $C \sum_t C_t$
- ${}_a i_b$  : le montant d'intérêt obtenu pour un capital de 1 investi au temps  $b$  pendant  $a$  unités, et  $a + b \leq 1$

#### 4.3.1 | Résultats en discret

Le montant dans le fonds à la fin de la période est la somme du montant initial, les contributions et l'intérêt

$$B = A + C + I.$$

Le montant d'intérêt obtenu est la somme de l'intérêt sur le montant initial et sur les contributions.

$$I = iA + \sum_t C_t \times {}_{1-t}i_t.$$

Avec l'hypothèse d'intérêt composé, on a

$${}_{1-t}i_t = (1 + i)^{1-t} - 1.$$

Une hypothèse simplificatrice est

$${}_{1-t}i_t \simeq (1 - t)i,$$

qui nous permet d'écrire

$$i \simeq \frac{I}{A + \sum_t C_t(1 - t)},$$

qui s'interprète comme l'investissement obtenu divisé par la somme pondérée des contributions. Cette hypothèse tient si les  $C_t$  sont petits comparés à  $A$ .

Une autre hypothèse est que les contributions sont faites uniformément sur la période, donc en moyenne au temps 0.5. L'approximation devient

$$i \simeq \frac{I}{A + 0.5(B - A - I)} = \frac{2I}{A + B - I}.$$

### 4.3.2 | Résultats en continu

Le montant du fonds au temps  $n$  est

$$B_n = B_0(1 + i)^n + \int_0^n C_t(1 + i)^{n-t} dt.$$

Une formule plus générale est

$$B_n = B_0 e^{\int_0^n \delta_s ds} + \int_0^n C_t e^{\int_t^n \delta_s ds} dt,$$

qui a une équation différentielle associée

$$\frac{d}{dt} B_t = \delta_t B_t + C_t,$$

donc le rendement instantané est la somme de

- la force d'intérêt au temps  $t$  multiplié par la valeur du fonds au temps  $t$ ;
- la contribution continue.

## 4.4 | Taux d'intérêt pondéré par le temps

Le taux de rendement peut dépendre des contributions intermédiaires  $C_t, t = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Le taux d'intérêt pondéré par le temps est une mesure de performance différente. On décompose la période d'investissement à chaque fois où une contribution est faite et on détermine le taux d'intérêt pour chaque intervalle intermédiaire.

Le taux d'intérêt de l'intervalle  $k$  est

$$j_k = \frac{B'_k}{B'_{k-1} + C'_{k-1}}.$$

Le taux de rendement est obtenu selon la relation

$$1 + i = (1 + j_1)(1 + j_2) \dots (1 + j_m).$$





## **Deuxième partie**

# **Mathématiques actuarielles vie**



# 1 | Distributions de survie

## 1.1 | Résumé de la notation

Symbole	Description
$(x)$	âge de $x$
$[x]$	âge à la sélection de $x$
$X$	v.a. de l'âge au décès
$T(x)$	v.a. de la vie de $(x)$ , aussi $X - x$
$K(x)$	v.a. de la vie entière de $x$ , aussi $\lfloor T(x) \rfloor$
$S(x)$	v.a. de la partie fractionnaire de l'âge au décès, aussi $T(x) - K(x)$

Symbole	Description	
$s(x)$	fonction de survie d'un nouveau né	$\bar{F}_X(x)$
$\mu(x)$	force de mortalité	$\frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}$
$\mu_x(t)$	force de mortalité pour une sélection à l'âge $x$	
${}_tq_x$	probabilité que $(x)$ décède dans les $t$ prochaines années	$\Pr(T(x) \leq t)$
${}_tp_x$	probabilité que $(x)$ survive les $t$ prochaines années	$\Pr(T(x) > t)$
${}_t uq_x$	probabilité que $(x)$ survive $t$ mais décède avant $t + u$	$\Pr(t < T(x) < t + u)$
$\dot{e}_x$		$E[T(x)]$
$e_x$		$E[K(x)]$

Autres relations :

$$\text{— } \Pr(K(x) = k) = {}_kp_xq_{x+k} = {}_k|q_x$$

$$\text{— } F_{K(x)}(y) = \sum_{h=0}^{\lfloor y \rfloor} {}_h|q_x$$

Outil	Relations			
	$F_X(x)$	$s(x)$	$f_X(x)$	$\mu(x)$
$F_X(x)$		$1 - F_X(x)$	$F'_X(x)$	$\frac{F'_X(x)}{1 - F_X(x)}$
$s(x)$	$1 - s(x)$		$-s'(x)$	$-\frac{s'(x)}{s(x)}$
$f_X(x)$	$\int_0^x f_X(t)dt$	$\int_x^\infty f_X(t)dt$		$\frac{f_X(x)}{\int_x^\infty f_X(t)dt}$
$\mu(x)$	$1 - \exp\left\{-\int_0^x \mu(t)dt\right\}$	$\exp\left\{-\int_0^x \mu(t)dt\right\}$	$\mu(x) \exp\left\{-\int_0^x \mu(t)dt\right\}$	

## 1.2 | Relations avec tables de mortalité

On peut obtenir la probabilité de décès avec la relation

$${}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}.$$

Soit

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{si l'assuré } j \text{ survie jusqu'à } x \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Symbole	Description	Formule
$l_0$	nombre initial de nouveaux nés dans la cohorte	
$\mathcal{L}(x)$	v.a. du nombre de survivants d'une cohorte à l'âge $x$	$\sum_{j=1}^{l_0} I_j$
${}_n\mathcal{D}_x$	v.a. du nombre de décès entre les âges $x$ et $x+n$ d'une cohorte	$E[\mathcal{L}(x)]$
$l_x$		$E[{}_n\mathcal{D}_x] = l_x - l_{x+n}$
${}_nd_x$		
$m_x$	âge centrale au décès	
$\omega$	Oméga, l'âge limite d'une table de mortalité	

De plus,  $\mathcal{L}(x) \sim \text{Bin}(l_0, s(x))$ .

## 1.3 | Groupe de survie déterministe

### Définition 1.3.1

Un groupe de survie déterministe, représenté par une table de mortalité, a les caractéristiques suivantes :

- le groupe contient  $l_0$  nouveaux nés initialement
- les membres sont sujets à taux de mortalité  $q_x$  pour chaque année de leur vie

— le groupe est fermé, la taille du groupe change seulement si un membre est décédé.

Récursion avec probabilités de décès :

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0(1 - q_0) \\ l_2 &= l_1(1 - q_1) \\ l_3 &= l_2(1 - q_2) \\ &\vdots \\ l_x &= l_{x-1}(1 - q_{x-1}) = l_0(1 - q_0) \dots (1 - q_{x-1}). \end{aligned}$$

Récursions avec probabilités de survie :

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0 p_0 \\ l_2 &= l_1 p_1 = l_0 p_0 p_1 \\ l_3 &= l_2 p_2 = l_0 p_0 p_1 p_2 \\ &\vdots \\ l_x &= l_{x-1} p_{x-1} = l_0 \prod_{y=0}^{x-1} p_y. \end{aligned}$$

## 1.4 | Autres caractéristiques

$$\begin{aligned} \bar{e}_x &= E[T(x)] = \int_0^\infty {}_t p_x \mu(x+t) dt \\ &= \int_0^\infty {}_t p_x dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[T(x)^2] &= \int_0^\infty t^2 {}_t p_x \mu(x+t) dt \\ &= \int_0^\infty 2t {}_t p_x dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_x &= E[K(x)] = \sum_{k=0}^\infty k {}_k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^\infty {}_k p_x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[K(x)^2] &= \sum_{k=0}^\infty k^2 {}_k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^\infty (2k-1) {}_k p_x. \end{aligned}$$

### 1.4.1 | Relations de récursion

#### Définition 1.4.1

La formule de récursion arrière est sous la forme

$$u(x) = c(x) + d(x)u(x+1)$$

La formule de récursion avant est sous la forme

$$u(x+1) = -\frac{c(x)}{d(x)} + \frac{1}{d(x)}u(x)$$

**Exemple 1.4.1 : Trouver la relation de récursion arrière pour  $e_x$ .**

On a

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x.$$

On sort le premier terme de la relation et on obtient

$$e_x = p_x + \sum_{k=2}^{\infty} {}_k p_x.$$

On applique un glissement d'indices et on obtient

$$e_x = p_x + \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{x+1} = p_x + p_x e_{x+1}.$$

On conclut que  $u(x) = e_x$ ,  $c(x) = p_x$  et  $d(x) = p_x$ . Le point de départ est  $u(\omega) = 0$ .

## 1.5 | Hypothèses pour les âges fractionnaires

On utilise l'interpolation linéaire pour les âges fractionnaires, c.-à-d.

$$s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1).$$

Cette méthode est appelée distribution uniforme des décès (DUD).

Fonction	Hypothèse
${}_t q_x$	$\frac{{}_t q_x}{q_x}$
$\mu(x+t)$	$\frac{1 - {}_t q_x}{(1-t)q_x}$
${}_{1-t} q_{x+t}$	$\frac{1 - {}_t q_x}{{}_y q_x}$
${}_y q_{x+t}$	$\frac{1 - {}_t q_x}{1 - {}_t q_x}$
${}_t p_x$	$1 - {}_t q_x$
${}_t p_x \mu(x+t)$	$q_x$

## 1.6 | Lois analytique de survie

Nom	$\mu(x)$	$s(x)$
De Moivre	$(\omega - x)^{-1}$	$1 - \frac{x}{\omega}$
Gompertz	$Bc^x$	$\exp \left\{ -\frac{B}{\log c} (c^x - 1) \right\}$
Makeham	$A + Bc^x$	$\exp \left\{ -Ax - \frac{B}{\log c} (c^x - 1) \right\}$
Weibull	$kx^n$	$\exp \left\{ -\frac{k}{n+1} x^{n+1} \right\}$

## 1.7 | Tables de mortalité sélectes et ultimes

Pour un assuré observé à  $(x)$ , on pourrait penser avoir plus d'information qu'un assuré observé plus tôt mais qui a survécu jusqu'à  $x$ . Alors, on se définit une table de mortalité sélecte pour les assurés observés à  $(x)$ . On note cette sélection dans la notation comme  $[x]$ .

- Pendant  $r$  années (la période de sélection), on a  $q_{[x]+1} \neq q_{x+1}$ .
- Après  $r$  années, on a  $q_{[x]+r+1} = q_{x+r+1}$ .





## 2 | Assurance vie

### 2.1 | Assurance continue

La variable aléatoire qui représente l'assurance vie est notée  $Z = b_T v_T$ , où  $b_t$  est une fonction de prestation et  $v_t$  est une fonction d'escompte. La variable aléatoire  $T$  représente la durée de vie de l'assuré, comme présenté dans le chapitre sur les distributions de survie.

#### Définition 2.1.1 : Assurance vie temporaire $n$ -années

Cette assurance paie 1 si l'assuré décède pendant les  $n$  premières années et 0 sinon. La variable aléatoire est

$$Z = \begin{cases} v^T, & T \leq n \\ 0, & T > n \end{cases}$$

L'espérance de cette variable aléatoire est

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = E[Z] = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_x(t) dt.$$

Le  $j^{\text{ème}}$  moment est

$${}^j \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = E[Z^j] = \int_0^n (v^t)^j {}_t p_x \mu_x(t) dt,$$

donc est égal au premier moment mais où la force d'intérêt est multipliée par  $j$ . De plus, on a

$$F_Z(x) = \begin{cases} \bar{F}_{T_x}(n), & x = 0 \\ \bar{F}_{T_x}(n), & 0 < x < bv^n \\ \bar{F}_{T_x}\left(-\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{x}{b}\right)\right), & bv^n < x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

On déduit que

$$VaR_{\kappa}(Z) = \begin{cases} 0, & 0 < \kappa < \bar{F}_{T_x}(n) \\ bv^{VaR_{1-\kappa}(T_x)}, & \bar{F}_{T_x}(n) < \kappa < 1 \end{cases}$$

et

$$TVaR_{\kappa}(Z) = \begin{cases} \frac{1}{1-\kappa} b \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1, & 0 < \kappa < {}_n p_x \\ \frac{1}{1-\kappa} b \bar{A}_{x:VaR_{1-\kappa}(T_x)}^1, & {}_n p_x < \kappa < 1 \end{cases}$$

**Définition 2.1.2 : Assurance vie complète**

La variable aléatoire pour une assurance vie complète est

$$Z = v^T, t \geq 0.$$

C'est un cas particulier de l'assurance vie temporaire avec  $n \rightarrow \infty$ . On a

$${}^j\bar{A}_x = \int_0^\infty v^{jt} {}_t p_x \mu_x(t) dt.$$

**Définition 2.1.3 : Capital différé**

Un capital différé verse une prestation après  $n$  années si l'assuré a survécu les  $n$  années. La v.a. est

$$Z = \begin{cases} 0 & , T \neq n \\ v^n & , T > n \end{cases}$$

La notation est

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = {}_n E_x = v^n {}_n p_x.$$

**Définition 2.1.4 : Assurance capital différé (assurance mixte)**

Une assurance capital différé verse une prestation au décès ou après  $n$  années. La v.a. est

$$Z = \begin{cases} 0 & , T \neq n \\ v^n & , T > n \end{cases}$$

La notation est

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = {}_n E_x = v^n {}_n p_x.$$

## 2.2 | Assurance discrète

Une assurance discrète est une assurance payable à la fin de l'année de décès.

**Définition 2.2.1**

La variable aléatoire pour une assurance temporaire  $n$  années est

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

L'espérance de la valeur actualisée de cette variable aléatoire est

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

Avec la règle des moments, on a

$$Var(Z) = {}^2A_{x:\overline{n}|} - (A_{x:\overline{n}|})^2,$$

où

$${}^2A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2k+2} {}_k p_x q_{x+k}$$

Des relations de récursion existent aussi pour une assurance discrète :

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = vq_x + vp_x A_{x+1:\overline{n-1}|}^1$$

Intuition : une assurance temporaire  $n$  années est égale à une assurance temporaire un an plus une assurance temporaire  $n - 1$  ans à un assuré d'âge  $x + 1$  dans un an.

### Définition 2.2.2

La variable aléatoire pour une assurance capital différé payable à la fin de l'année est

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ v^n, & K = n, n+1, \dots \end{cases}$$

La valeur actuarielle actualisée est

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + v^n {}_n p_x$$

## 2.3 | Relation entre l'assurance payable au moment du décès et la fin de l'année

Avec l'hypothèse DUD, on a

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x.$$

De manière similaire, on a

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x.$$



## 3 | Rentes

### Définition 3.0.1

Une rente vie-entière paie des prestations jusqu'à la mort de l'individu. La variable aléatoire correspondant à la valeur actualisée de cette rente est

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|}.$$

La fonction de répartition est

$$F_Y(y) = F_T\left(\frac{-\log(1 - \delta y)}{\delta}\right), \quad 0 < y < \frac{1}{\delta}$$

et la fonction de densité est

$$\frac{1}{1 - \delta y} f_T\left(\frac{-\log(1 - \delta y)}{\delta}\right), \quad 0 < y < \frac{1}{\delta}.$$

La valeur actualisée est

$$\bar{a}_x = E[Y] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{x}|t} p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty v^t {}_t p_x dt = \int_0^\infty {}_t E_x dt.$$

On peut définir des relations de récursion comme

$$\bar{a}_x = a_{x:\overline{1}|} + v p_x \bar{a}_{x+1}.$$

Savoir interpréter ces relations (Une rente vie entière est une rente temporaire un an plus une rente vie entière dans un an, si l'assuré survit un an).

De la définition de la rente continue, on avait

$$\bar{a}_{\overline{t}|} = \frac{1 - v^t}{\delta}.$$

En prenant l'espérance des deux côtés de l'équation, on obtient la relation

$$\bar{a}_x = \frac{1 - A_x}{\delta}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} Var(\bar{a}_{\overline{T}|}) &= Var\left(\frac{1 - v^T}{\delta}\right) \\ &= \frac{Var(v^T)}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} \end{aligned}$$

### 3.1 | Rentes discrètes

#### Définition 3.1.1 : Rente-due vie entière

On considère une rente qui paie 1 au début de chaque période chaque année où  $(x)$  survit. La variable aléatoire de la valeur actualisée est

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}.$$

La valeur actuarielle actualisée est

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1}|k} p_x q_{x+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k {}_k p_x.$$

La relation avec une rente discrète est

$$\frac{1 - A_x}{d}.$$

#### 3.1.1 | Rente temporaire

##### Définition 3.1.2 : Rente temporaire $n$ années

La variable aléatoire de la valeur actualisée pour une rente temporaire est

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & 0 \leq K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases}$$

L'espérance de cette variable aléatoire est

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|k} p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|n} p_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x.$$

On a la relation

$$\frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}.$$

##### Définition 3.1.3 : Rente différée $n$ années

Une rente différée  $n$  années paie 1 au début de chaque année lorsque  $(x)$  survit, à partir de l'âge  $x + n$ . La variable aléatoire est

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \leq K < n \\ {}_n| \ddot{a}_{\overline{K+1-n}|}, & K \geq n \end{cases}$$

L'espérance de la variable aléatoire est

$${}_n|a_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_k p_x = {}_n E_x \ddot{a}_{x+n} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}.$$

#### Définition 3.1.4 : Rente viagère garantie $n$ années

Une rente viagère garantie  $n$  années paie une rente certaine pour  $n$  ans (peu importe si l'assuré survit ou non) et continue les paiements jusqu'au décès. La variable aléatoire de la valeur actualisée des paiements est

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}, & 0 \leq K < n \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & K \geq n \end{cases}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} q_x + \sum_{k=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} {}_k p_x q_{x+k} = \ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

### 3.1.2 | Rentes payables en fin d'année

Des versions fin de période sont disponibles pour les rentes. La variable aléatoire qui représente la valeur actualisée des paiements de ces rentes de type

$$Y = a_{\overline{T}|}$$

et l'espérance de cette variable aléatoire est

$$a_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x q_{x+k} a_{\overline{k}|} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x.$$

Le lien entre cette variable aléatoire et une assurance est

$$a_x = \frac{1 - (1+i)A_x}{i}.$$

## 3.2 | Rentes payables $m$ fois par année

#### Définition 3.2.1

Une rente qui paie  $m$  fois par année le montant  $\frac{1}{m}$  chaque période où l'assuré survit est noté  $\ddot{a}_x^{(m)}$ . La variable aléatoire de la valeur actualisée est

$$Y = \sum_{j=0}^{mK+J} \frac{1}{m} v^{j/m} = \ddot{a}_{\overline{K+(J+1)/m}|}^{(m)} = \frac{1 - v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}},$$

où  $K$  est le nombre d'années complètes et  $J + 1$  est le nombre de paiements faits dans l'année de décès. L'espérance de cette variable aléatoire est

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{\infty} v^{h/m} {}_{h/m}p_x = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}.$$

### 3.2.1 | Approximations

On peut utiliser des approximations sur la mortalité pour obtenir des approximations des rentes payables  $m$  fois par année à partir des rentes payables une fois par année.

#### Proposition 3.2.2

Sous DUD, on a

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m) \times \ddot{a}_x^{(m)} - \beta(m),$$

où

$$\alpha(m) = s_{\overline{1}|}^{(m)} \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}$$

et

$$\beta(m) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}}$$

#### Proposition 3.2.3

Sous l'hypothèse que  $v^{k+j/m} {}_{k+j/m}p_x$  est linéaire, on a

$$\alpha(m) = 1$$

et

$$\beta(m) = \frac{m - 1}{2m}$$

Connaître la preuve des propositions 3.2.2 et 3.2.3.



## 4 | Primes

Ce chapitre s'intéresse aux primes d'assurance ou de rentes.

### 4.1 | Principes de primes

Les primes sont souvent basés sur le principe d'équivalence.

#### Définition 4.1.1

Le principe d'équivalence requiert que l'espérance de la perte  $L$  soit nulle, c'est-à-dire

$$E[L] = 0.$$

Les primes qui satisfont le principe d'équivalence sont appelés des primes nettes.

On a

$$E[\text{valeur actualisée de la prestation}] = E[\text{valeur actualisée des primes}]$$

Un autre principe de prime est la prime percentile, où la prime est déterminée de telle sorte que la probabilité d'avoir une perte positive est plus petite qu'un seuil  $\alpha$ .

### 4.2 | Primes pour des contrats continus

La valeur actualisée de la perte de l'assureur est



## **Troisième partie**

# **Distributions de sinistres**



# 1 | Quantités distributionnelles de base

Voir [Klugman et al., 2012], section 3.4

## 1.1 | Queues des distributions

- Classification basée sur les moments
  - Une manière de classer des distributions est basé sur le nombre de moments qui existent. Une distribution dont tous les moments existent (la FGM existe) est à queue légère.
- Comparaisons basée sur le comportement de queue limite
  - Pour deux distributions avec la même moyenne, une distribution a une queue plus lourde que l'autre si le ratio des fonctions de survie diverge à l'infini.
- Classification basée sur la fonction de hazard
  - Les distributions avec une fonction de hazard décroissante a une queue lourde
  - Les distributions avec une fonction de hazard croissante a une queue légère
  - Une distribution a une queue plus légère que l'autre si sa fonction de hazard augmente à plus rapidement que l'autre.
  - Rappel :

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}, \quad S(x) = \exp \left\{ - \int_0^x h(y) dy \right\}$$

- Classification basée sur la fonction d'excès moyen
  - Si la fonction d'excès moyen est croissante en  $d$ , la distribution a une queue lourde.
  - Si la fonction d'excès moyen est décroissante en  $d$ , la distribution a une queue légère.
  - On peut comparer deux distributions basé sur le taux de croissance ou décroissance de la fonction d'excès moyen.
  - Rappel :

$$e_X(d) = E[X - d | X > d] = \frac{\int_d^\infty S(x) dx}{S(d)}$$

- Distributions d'équilibre et comportement de queue
  - Distribution d'équilibre
    - $f_e(x) = \frac{S(x)}{E[X]}, \quad x \geq 0$
    - $S_e(x) = \frac{\int_x^\infty S(t) dt}{E[X]}, \quad x \geq 0$

$$— h_e(x) = \frac{f_e(x)}{S_e(x)} = \frac{S(x)}{\int_x^\infty S(t)dt} = \frac{1}{e(x)}$$

- Lire le texte pour le lien entre la fonction de hazard, la fonction d'excès moyen et la lourdeur de la queue

## 2 | Caractéristiques des modèles actuariels

Voir [Klugman et al., 2012],

Dans ce chapitre, les modèles sont caractérisés par combien d'information est nécessaire pour spécifier le modèle. Le nombre de paramètre donne une indication de la complexité du modèle.

### 2.1 | Distributions paramétriques et d'échelle

#### Définition 2.1.1 : Distribution paramétrique

Ensemble de distributions déterminée par une ou plus valeurs appelé(s) paramètre. Le nombre de paramètre est fixe et connu

#### Définition 2.1.2 : Distribution d'échelle

Si une variable aléatoire est multipliée par une constante positive, et que la nouvelle variable aléatoire est dans le même ensemble de distributions, elle est dite une distribution d'échelle.

#### Définition 2.1.3 : Paramètre d'échelle

Un paramètre d'échelle satisfait deux conditions :

1. Lorsqu'une distribution d'échelle est multipliée par une constante, ce paramètre d'échelle est multiplié par la même constante.
2. Tous les autres paramètres de la distribution restent inchangés (le paramètre d'échelle absorbe tout le changement d'échelle).

## 2.2 | Familles de distributions paramétriques

### Définition 2.2.1 : Familles de distributions paramétriques

Ensemble de distributions qui sont reliées de manière significative. Exemple : la loi exponentielle est un cas particulier de la loi gamma avec  $\alpha = 1$ . Alors, la loi exponentielle est reliée de manière significative avec la loi gamma.

## 2.3 | Distribution de mélange fini

### Définition 2.3.1 : Mélange $k$ -point

Une distribution est un mélange  $k$ -point si

$$F_Y(y) = a_1 F_{X_1}(y) + a_2 F_{X_2}(y) + \cdots + a_k F_{X_k}(y)$$

avec  $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1$ .

### Définition 2.3.2 : Mélange à composante variable

Une distribution mélange  $k$ -point où  $K$  n'est pas fixé.

$$— F(x) = \sum_{j=1}^K a_j F_j(x)$$

$$— \sum_{j=1}^K a_j = 1, \quad a_j > 0, j = 1, \dots, K, \quad K = 1, 2, \dots$$

— Le nombre de paramètres est la somme des paramètres de chaque distribution plus  $(K-1)$  car le dernier paramètre  $a_k$  peut être calculé avec  $1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{K-1}$ .

Ce modèle est appelé semi-paramétrique car sa complexité est entre un modèle paramétrique et non-paramétrique

## 2.4 | Distributions dépendantes des données

- Une distribution dépendante des données est au moins aussi compliqué que les données ou l'information produites par ces données.
- Le nombre de paramètres augmente lorsque le nombre de données augmente
- Exemple : un modèle empirique est une distribution discrète basée sur la taille échantillonnale  $n$  qui assigne une probabilité  $\frac{1}{n}$  à chaque point
- Exemple : modèle de lissage à noyau



## 3 | Distributions continues

### 3.1 | Créer des nouvelles distributions

#### 3.1.1 | Multiplication par une constante

##### Théorème 3.1.1

Soit  $X$ , une variable aléatoire continue. Soit  $Y = \theta X$  avec  $\theta > 0$ . Alors,

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{y}{\theta}\right)$$

Le paramètre  $\theta$  est un paramètre d'échelle pour la variable aléatoire  $Y$ .

#### 3.1.2 | Création de distributions en élevant à une puissance

##### Théorème 3.1.2

Soit  $X$ , une variable aléatoire continue et  $F_X(0) = 0$ . Soit  $Y = X^{1/\tau}$ . Alors,

— si  $\tau > 0$ , on a

$$F_Y(y) = F_X(y^\tau) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau), \quad y > 0;$$

— si  $\tau < 0$ , on a

$$F_Y(y) = 1 - F_X(y^\tau) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = -\tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau), \quad y > 0.$$

- Lorsqu'on prend une distribution avec puissance  $\tau > 0$ , elle est appelée transformée.
- Lorsqu'on prend une distribution avec puissance  $\tau = -1$ , elle est appelée inverse.
- Lorsqu'on prend une distribution avec puissance  $\tau < 0$ ,  $\tau \neq -1$ , elle est appelée inverse-transformée.

### 3.1.3 | Création de distributions avec exponentiation

#### Théorème 3.1.3

Soit  $X$ , une variable aléatoire continue et  $f_X(x) > 0$  sur le domaine de  $x$ . Soit  $Y = e^X$ . Alors, pour  $y > 0$ , on a

$$F_Y(y) = F_X(\ln y) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln y).$$

### 3.1.4 | Mélange

#### Théorème 3.1.4

Soit  $X$ , une variable aléatoire avec fonction de densité  $f_{X|\Lambda}(x|\lambda)$  et fonction de répartition  $F_{X|\Lambda}(x|\lambda)$ , où  $\lambda$  est un paramètre de  $X$ . La fonction de densité inconditionnelle de  $X$  est

$$f_X(x) = \int f_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

et la fonction de répartition est

$$F_X(x) = \int F_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda.$$

Autres résultats :

- $E[X^k] = E_\Lambda[E(X^k|\Lambda)]$
- $Var(X) = E[Var(X|\Lambda)] + Var(E[X|\Lambda])$

Les modèles de mélange tendent à créer des distributions à queue lourde. En particulier, si la fonction de hasard de  $f_{X|\Lambda}$  est décroissante pour tout  $\lambda$ , la fonction de hasard sera aussi décroissante.

### 3.1.5 | Modèles à fragilité

Mise en place :

- Soit une variable aléatoire de fragilité  $\Lambda > 0$
- Soit une fonction de hasard conditionnelle  $h_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \lambda a(x)$ , où  $a(x)$  est une fonction connue.
- La fragilité quantifie l'incertitude de la fonction de hasard.

La fonction de survie conditionnelle de  $X|\Lambda$  est

$$S_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \exp \left\{ - \int_0^x h_{X|\Lambda}(t|\lambda) dt \right\} = e^{-\lambda A(x)},$$

où  $A(x) = \int_0^x a(t) dt$ . Alors, la fonction de survie inconditionnelle est donnée par

$$S_X(x) = E[e^{-\Lambda A(x)}] = M_\Lambda(-A(x))$$

### 3.1.6 | Raccordement de distributions connues

Si plusieurs processus séparés sont responsables pour générer les pertes

#### Définition 3.1.5

Une distribution de raccordement à  $k$  composantes a une fonction de densité qui peut être exprimé sous la forme

$$f_X(x) = \begin{cases} a_1 f_1(x), & c_0 \leq x \leq c_1 \\ a_2 f_2(x), & c_1 \leq x \leq c_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_k f_k(x), & c_{k-1} \leq x \leq c_k \end{cases}$$

Pour  $j = 1, 2, \dots, k$ , chaque  $a_j$  doit être positif,  $f_j$  doit être une fonction de densité avec toute sa masse sur  $(c_{j-1}, c_j)$  et  $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$ .

## 3.2 | Familles de distributions et leurs liens

Connaître les familles de distribution beta transformée et gamma inverse/transformée.

### 3.2.1 | Distributions limites

On peut parfois comparer les familles des distributions basé sur des cas particuliers des familles. Dans d'autres situations, on doit étudier les distributions quand des paramètres tendent vers 0 ou l'infini.

Exemples :

- La distribution gamma est un cas limite de la distribution beta transformée avec  $\theta \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow \infty$  et  $\frac{\theta}{\alpha^{1/\gamma}} \rightarrow \xi$ , une constante.

## 3.3 | Théorie des valeurs extrêmes

### 3.3.1 | Distributions à valeur extrêmes (DVE)

#### Définition 3.3.1 : La distribution Gumbel

La distribution Gumbel standard a la fonction de répartition

$$F(x) = G_0(x) = \exp[-\exp(-x)], \quad -\infty < x < \infty.$$

Avec les paramètres de location et d'échelle, on a

$$F(x) = G_{0,\mu,\theta}(x) = \exp \left[ -\exp \left( -\frac{x-\mu}{\theta} \right) \right], \quad -\infty < x < \infty, \theta > 0.$$

### Définition 3.3.2 : La distribution de Fréchet

La distribution de Fréchet standard a la fonction de répartition

$$F(x) = G_{1,\alpha}(x) = \exp(-x^{-\alpha}), \quad x \geq 0, \alpha > 0,$$

où  $\alpha$  est un paramètre de forme.

Avec les paramètres de location et d'échelle, on a

$$F(x) = G_{1,\alpha,\mu,\theta}(x) = \exp \left[ -\left( \frac{x-\mu}{\theta} \right)^{-\alpha} \right], \quad x \geq \mu, \alpha > 0.$$

On note que le support de la distribution de Fréchet est pour  $x$  supérieur au paramètre de location.

### Définition 3.3.3 : La distribution Weibull

La distribution de Weibull standard a la fonction de répartition

$$F(x) = G_{2,\alpha}(x) = \exp \left[ -(-x)^{-\alpha} \right], \quad x \leq 0, \alpha < 0.$$

Avec les paramètres de location et d'échelle, on a

$$F(x) = G_{2,\alpha,\mu,\theta}(x) = \exp \left[ -\left( -\frac{x-\mu}{\theta} \right)^{-\alpha} \right], \quad x \leq \mu, \alpha < 0.$$

On note :

- Cette distribution n'est pas la même que la distribution Weibull couramment utilisée en actuariat
- Cette distribution a un support pour  $x$  inférieur au paramètre de location  $\mu$ 
  - Pour cette raison, cette distribution n'est pas utilisée en actuariat.

### Définition 3.3.4 : La distribution de valeurs extrêmes généralisée

La distribution de valeurs extrêmes généralisée incorpore les trois distributions à valeur extrême comme cas particuliers. L'expression de la fonction de répartition est

$$F(x) = \exp \left[ -\left( 1 + \frac{x}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right]$$

ou (notation équivalente)

$$F(x) = \exp \left[ - (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}} \right]$$

- Pour  $\gamma \rightarrow 0$ , on obtient la distribution Gumbel
- Pour  $\gamma > 0$ , on obtient la distribution Fréchet
- Pour  $\gamma < 0$ , on obtient la distribution Weibull

### 3.3.2 | Distribution du maximum

Soit  $M_n$ , la variable aléatoire qui correspond à la valeur maximale de  $n$  observations d'une variable aléatoire. Si on a  $n$  observations d'une variable aléatoire iid, la fonction de répartition du maximum est

$$F_n(x) = \Pr(M_n \leq x) = \Pr(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \stackrel{\text{ind}}{=} \prod_{i=1}^n \Pr(X_i \leq x) = [F_X(x)]^n.$$

Les deux premiers moments sont

$$\begin{aligned} E[M_n] &= \int_0^\infty [1 - F_X^n] dx; \\ E[M_n^2] &= 2 \int_0^\infty x[1 - F_X^n] dx. \end{aligned}$$

Si le nombre  $n$  est inconnu,  $N$  est une variable aléatoire. On a

$$\begin{aligned} F_{M_N}(x) &= \Pr(M_N \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(M_N \leq x | N = n) \Pr(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_X(x)^n \Pr(N = n) \\ &= P_N[F_X(x)]. \end{aligned}$$

### 3.3.3 | Stabilité du maximum des DVE

On peut montrer que la distribution du maximum des DVE, après normalisation du paramètre de location ou d'échelle, est la même DVE.

### 3.3.4 | Théorème Fisher-Tippett



## 4 | Distributions discrètes

### 4.1 | Notation et rappels

- $p_k = \Pr(N = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$
- $P(z) = P_N(z) = E[z^N] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$
- $p_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dz^m} P(z) \Big|_{z=0}$

### 4.2 | Loi Poisson

- $p_k = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$
- $P(z) = e^{\lambda(z-1)}, \quad \lambda > 0.$
- $E[N] = \lambda$
- $Var(N) = \lambda$
- Équidispersion (moyenne = variance)

#### Théorème 4.2.1

Soit  $N_1, N_2, \dots, N_n$ , des v.a. Poisson avec paramètres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Alors,  $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$  est Poisson avec paramètre  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ .

Preuve : produit des fgp.

#### Théorème 4.2.2

Supposons que le nombre d'évènements  $N$  est Poisson avec moyenne  $\lambda$ . De plus, supposons que chaque évènement peut être classifié en  $m$  types avec probabilité  $p_1, p_2, \dots, p_m$  indépendant des autres évènements. Alors, le nombre d'évènements  $N_1, N_2, \dots, N_m$  correspondent au types d'évènements  $1, 2, \dots, m$  respectivement sont des distributions Poisson mutuellement indépendants avec moyennes  $\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_m$ .

- Idée de la preuve :
  - Pour  $N$  fixé, la distribution conjointe de  $(N_1, N_2, \dots, N_m)$  est multinomiale. La fonction de densité multivariée correspond au produit de Poissons.
  - La marginale de  $N_j$  est Poisson.
  - Le cas 1 égal le produit des cas 2, donc ils sont mutuellement indépendants.
- Utile pour ajouter ou retirer une couverture d'assurance ( $\lambda$  ne change pas)
- Utile pour déductibles ou franchises : les risques en haut de la franchise sont Poisson.

### 4.3 | Loi binomiale négative

- $p_k = \binom{k+r-1}{k} \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r \left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, r > 0, \beta > 0.$
- $P(z) = [1 - \beta(z-1)]^{-r}$
- $E[N] = r\beta$
- $Var(n) = r\beta(1 + \beta)$
- Surdispersion (variance > moyenne)
- On peut retrouver la binomiale négative avec une loi mélange (Poisson + gamma)
- La loi Poisson est un cas limite de la binomiale négative ( $r \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0, r\beta$  demeure constant).

Un cas particulier est la géométrique ( $r = 1$ )

- Sans mémoire
- Cas exponentiel : *Given that a claim exceeds a certain level  $d$ , the expected amount of the claim in excess of  $d$  is constant and so does not depend on  $d$ .*
- Cas géométrique : *Given that there are at least  $m$  claims, the probability distribution of the number of claims in excess of  $m$  does not depend on  $m$ .*
- Si  $r > 1$ , on considère que la distribution a une queue légère.
- Si  $r < 1$ , on considère que la distribution a une queue lourde.

### 4.4 | Loi binomiale

- $P(z) = [1 + q(z-1)]^m, \quad 0 < q < 1$
- $p_k = \binom{m}{k} q^k (1-q)^{m-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m.$
- $E[N] = mq$
- $Var(N) = mq(1-q)$
- Sousdispersion (moyenne > variance)



## 4.5 | La classe $(a, b, 0)$

### Définition 4.5.1 : La classe $(a, b, 0)$

Une v.a. est membre de la classe  $(a, b, 0)$  s'il existe des constantes  $a$  et  $b$  tels que

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots'$$

Distribution	$a$	$b$	$p_0$
Poisson	0	$\lambda$	$e^{-\lambda}$
Binomiale	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$(1-q)^m$
Binomiale négative	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1+\beta)^{-r}$
Géométrique	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1+\beta)^{-1}$

Outil diagnostique pour déterminer la loi à utiliser : en utilisant la relation

$$k \frac{p_k}{p_{k-1}} = ak + b,$$

faire un graphique de

$$k \frac{\hat{p}_k}{\hat{p}_{k-1}} = k \frac{n_k}{n_{k-1}}.$$

- Si la droite est plate, on a  $a = 0 \Rightarrow$  Poisson
- Si la droite est négative, on a  $a < 0 \Rightarrow$  Binomiale
- Si la droite est positive, on a  $a > 0 \Rightarrow$  Binomiale négative.



## 5 | Fréquence et sévérité avec modifications de la couverture

- Par perte (Per-loss) :  $Y^L$
- Par paiement (Per-payment) :  $Y^P$
- $Y^P = Y^L | Y^L > 0$ .

### 5.1 | Déductibles

#### Définition 5.1.1 : Déductible ordinaire

Un déductible ordinaire transforme la variable en excès-moyen ou en variable translatée. On a

$$Y^P = \begin{cases} \text{indéfini,} & X \leq d, \\ X - d, & X > d \end{cases}$$

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X - d, & X > d \end{cases}$$

Relations :

	$Y^P$	$Y^L$
densité	$\frac{f_X(y+d)}{S_X(d)}$	$f_X(y+d)$
survie	$\frac{S_X(y+d)}{S_X(d)}$	$S_X(y+d)$
répartition	$\frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{S_X(d)}$	$F_X(y+d) - F_X(d)$
hasard	$\frac{f_X(y+d)}{S_X(y+d)} = h_{X(y+d)}$	indéfinie à 0, donc indéfinie
moyenne	$\frac{E[X] - E[X \wedge d]}{S(d)}$	$E[X] - E[X \wedge d]$

### Définition 5.1.2 : Déductible franchise

Un déductible franchise paie le montant au complet si la franchise est atteinte. On a

$$Y^P = \begin{cases} \text{indéfini}, & X \leq d, \\ X, & X > d \end{cases}$$

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X, & X > d \end{cases}$$

	$Y^P$	$Y^L$
densité	$\frac{f_X(y)}{S_X(d)}, y > d$	$\begin{cases} F_X(d), & y = 0 \\ f_X(y), & y > d \end{cases}$
survie	$\begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq d \\ \frac{S_X(y)}{S_X(d)}, & y > d \end{cases}$	$\begin{cases} S_X(d), & 0 \leq y \leq d \\ S_X(y), & y > d \end{cases}$
répartition	$\begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq d \\ \frac{F_X(y) - F_X(d)}{S_X(d)}, & y > d \end{cases}$	$\begin{cases} F_X(d), & 0 \leq y \leq d \\ F_X(y), & y > d \end{cases}$
hasard	$\begin{cases} 0, & 0 < y < d \\ h_X(y), & y > d \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & 0 < y < d \\ h_X(y), & y > d \end{cases}$
moyenne	$\frac{E[X] - E[X \wedge d]}{S(d)} + d$	$E[X] - E[X \wedge d] + d[S(d)]$

## 5.2 | Ratio d'élimination de perte et effet de l'inflation sur les déductibles ordinaires

### Définition 5.2.1 : Ratio d'élimination de pertes

Le ratio d'élimination de pertes est le ratio de la décroissance en paiement espéré avec un déductible ordinaire versus un paiement espéré sans déductible :

$$\frac{E[X \wedge d]}{E[X]}$$

### Théorème 5.2.2

Pour un déductible ordinaire  $d$  après inflation uniforme de  $1 + r$ , l'espérance du coût par perte est

$$(1 + r) \left\{ E[X] - E \left[ X \wedge \frac{d}{1 + r} \right] \right\}$$

Si  $F\left(\frac{d}{1+r}\right) < 1$ , l'espérance du coût par paiement est

$$\frac{(1+r) \left\{ E[X] - E\left[X \wedge \frac{d}{1+r}\right] \right\}}{S\left(\frac{d}{1+r}\right)}.$$

Savoir le prouver.

### 5.3 | Limites de polices

#### Définition 5.3.1

Une police avec limite  $u$  paie la perte complète si la perte est inférieure à  $u$ , et  $u$  si la perte est supérieure à  $u$ . On a

$$Y = \begin{cases} Y, & y < u \\ u, & y \geq u. \end{cases}$$

Quelques résultats :

$$— F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y < u \\ 1, & y \geq u. \end{cases}$$

$$— f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y), & y < u \\ 1 - F_X(u), & y = u. \end{cases}$$

— Pour une limite de police  $u$ , après inflation uniforme  $1+r$ , le coût espéré est

$$(1+r)E\left[X \wedge \frac{u}{1+r}\right]$$

### 5.4 | Coassurance, déductibles et limites

Dans le cas où la compagnie paie une portion  $\alpha$  de la perte, la variable aléatoire est  $Y = \alpha X$ . La variable aléatoire qui incorpore les quatre modifications du chapitre est

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X < \frac{d}{1+r} \\ \alpha[(1+r)X - d], & \frac{d}{1+r} \leq X < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u - d), & X \geq \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

On note que les quantités sont appliquées dans un ordre particulier : la coassurance est appliquée en dernier.

**Théorème 5.4.1 : Quelques moments pour les modifications**

Le premier moment par perte est

$$E[Y^L] = \alpha(1+r) \left\{ E \left[ X \wedge \frac{u}{1+r} \right] - E \left[ X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right\}$$

et le premier moment par paiement est

$$E[Y^P] = \frac{E[Y^L]}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}.$$

Le deuxième moment par perte est

$$E[(Y^L)^2] = \alpha^2(1+r)^2 \{ E[(X \wedge u^*)^2] - E[(X \wedge d^*)^2] - 2d^* E[X \wedge u^*] + 2d^* E[X \wedge d^*] \},$$

où

$$u^* = \frac{u}{1+r} \quad \text{et} \quad d^* = \frac{d}{1+r}.$$

Pour par-paiement, on a

$$E[(Y^L)^2] = \frac{E[(Y^L)^2]}{1 - F_X(d^*)}.$$

Preuve : facile, manipuler les mins et max et prendre l'espérance. À connaître.

## 6 | Rappel des notions de mathématiques statistiques

### 6.1 | Estimation ponctuelle

Dans cette section, on s'intéresse à produire une seule valeur pour déterminer la la valeur d'une quantité pour une population inconnue.

#### 6.1.1 | Mesures de qualité

##### Définition 6.1.1 : Biais

Un estimateur  $\hat{\theta}$  est sans biais si  $E[\hat{\theta}|\theta] = \theta, \forall \theta$ . Le biais est

$$\text{bias}_{\hat{\theta}}(\theta) = E[\hat{\theta}|\theta] - \theta.$$

##### Définition 6.1.2 : Biais asymptotique

Soit  $\hat{\theta}_n$ , un estimateur de  $\theta$  basé sur un échantillon de taille  $n$ . L'estimateur est asymptotiquement sans biais si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}_n|\theta] = \theta, \forall \theta.$$

##### Définition 6.1.3 : Convergence

Un estimateur est convergent si, pour tout  $\delta > 0$  et pour tout  $\theta$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(|\hat{\theta}_n - \theta| > \delta) = 0.$$

- Une condition suffisante (mais pas nécessaire) est que l'estimateur soit asymptotiquement sans biais et  $\text{Var}(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$ .
- Critique : le choix de  $\delta$  est parfois arbitraire.

**Définition 6.1.4 : Erreur quadratique moyenne**

L'erreur quadratique moyen d'un estimateur est

$$MSE_{\hat{\theta}}(\theta) = E \left[ \left( \hat{\theta} - \theta \right)^2 \middle| \theta \right].$$

On peut décomposer cet estimateur comme

$$MSE_{\hat{\theta}}(\theta) = E \left[ \left( \hat{\theta} - E[\hat{\theta}|\theta] + E[\hat{\theta}|\theta] - \theta \right)^2 \middle| \theta \right] = Var \left( \hat{\theta} | \theta \right) + [\text{bias}_{\hat{\theta}}(\theta)]^2$$

**Définition 6.1.5 : Estimateur sans biais à variance minimale**

Un estimateur  $\hat{\theta}$  est appelé estimateur sans biais à variance minimale si il est sans biais et pour la vraie valeur de  $\theta$  il n'existe pas d'estimateur avec une plus faible variance.

## 6.2 | Intervalles de confiance

Dans cette section, on s'intéresse à produire un intervalle de valeurs possibles d'une quantité pour une population inconnue.

**Définition 6.2.1**

Un intervalle de confiance à  $100(1 - \alpha)\%$  pour un paramètre  $\theta$  est une paire de valeurs aléatoires,  $L$  et  $U$ , calculé d'un échantillon aléatoire tel que

$$\Pr(L \leq \theta \leq U) \geq 1 - \alpha, \forall \theta.$$

Si la population est normale avec moyenne et variance inconnue, on a

$$L = \bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad U = \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

et

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{n-1}}.$$

Sinon, l'approximation normale peut être utilisée. Si  $\hat{\theta}$  est approximativement normal, on a (approximativement)

$$1 - \alpha = \Pr \left( -z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{v(\hat{\theta})}} \leq z_{\alpha/2} \right).$$

On remarque que  $\theta$  apparaît à deux endroits. Alors, si isoler  $\theta$  est trop compliqué, on peut utiliser l'approximation  $v(\theta) \approx v(\hat{\theta})$  et l'intervalle de confiance devient

$$1 - \theta = \Pr \left( \theta - z_{\alpha/2} \sqrt{v(\hat{\theta})} \leq \theta \leq \theta + z_{\alpha/2} \sqrt{v(\hat{\theta})} \right).$$



## 6.3 | Tests d'hypothèse

Un test d'hypothèse est composé de deux hypothèses :

- l'hypothèse nulle (notée  $H_0$ ), et
- l'hypothèse alternative (notée  $H_1$ ).

Les deux hypothèses ne sont pas symétriques : les alterner peut changer les résultats.

- Déterminer l'hypothèse est faite avec une statistique de test. C'est une fonction des observations et est une variable aléatoire.
- La spécification d'un test est complétée en construisant une région de rejet.
- Les bornes de la région (autre que  $\pm\infty$ ) sont appelées les valeurs critiques.

### 6.3.1 | Types d'erreur.

Lorsqu'on construit un test, on peut avoir deux types d'erreurs. Le premier se produit si on rejette l'hypothèse nulle mais que l'hypothèse nulle était vraie. On appelle cet erreur type I.

#### Définition 6.3.1 : Niveau d'importance

Le niveau d'importance (exceptionnel) d'un test d'hypothèse est la probabilité de faire un erreur de type I sachant que l'hypothèse nulle est vraie. On note ce niveau  $\alpha$ . Le niveau d'importance est habituellement déterminé d'avance, entre 0.01 et 0.1.

Le deuxième type d'erreur est de ne pas rejeter l'hypothèse nulle alors que l'hypothèse alternative est vraie. La puissance du test est  $1 -$  la probabilité de faire un erreur de type II.

#### Définition 6.3.2

Un test d'hypothèse est uniformément plus puissant s'il n'existe aucun autre test qui a le même ou plus bas niveau d'importance et, pour une valeur particulière dans l'hypothèse alternative, a une plus petite probabilité de faire un erreur de type II.

Généralement, diminuer un type d'erreur cause l'autre à augmenter.

#### Définition 6.3.3

Pour un test d'hypothèse, la valeur- $p$  est la probabilité que la statistique de test prend une valeur moins d'accord avec l'hypothèse nulle que la valeur obtenue dans l'échantillon. Les tests effectués à un niveau de confiance supérieur à la valeur- $p$  mènent à rejeter l'hypothèse nulle, et les test effectués à un niveau de confiance inférieur à la valeur- $p$  mènent à l'échec de rejeter l'hypothèse nulle.



## 7 | Estimation pour données complètes

Lorsque les observations sont collectées d'une distribution de probabilité, la situation idéale est d'avoir les réalisations de chaque observation. Ce cas est référé aux données complètes individuelles.

Les données exactes peuvent être impossibles à avoir car

1. les données peuvent être groupées;
2. les données peuvent être censurées ou tronquées.

On considère premièrement l'estimation pour les données complètes et individuelles.

### Définition 7.0.1

La fonction de distribution empirique est

$$F_n(x) = \frac{\text{Nombre d'observations} \leq x}{n},$$

où  $n$  est le nombre total d'observations.

### Définition 7.0.2

La fonction de hasard cumulative est définie selon

$$H(x) = -\ln S(x).$$

Source de la fonction :

$$H'(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{f(x)}{S(x)} = h(x) \Rightarrow H(x) = \int_{-\infty}^x h(y)dy.$$

Autre notation :

- Soit  $n$ , la taille échantillonnale
- Soit  $y_1 < y_2 < \dots < y_k$  être les  $k$  valeurs uniques
- Soit  $s_j$ , le nombre de fois dont  $y_j$  apparaît dans l'échantillon.
- Soit le nombre d'observations plus grande qu'une valeur. L'ensemble des risques  $r_j$  est définie par  $r_j = \sum_{i=j}^k s_i$ , le nombre d'observations plus grand ou égal à  $y_j$ .

En utilisant cette notation, on obtient

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < y_1 \\ 1 - \frac{r_j}{n}, & y_{j-1} \leq x < y_j, \quad j = 2, 3, \dots, k \\ 1, & x \geq y_k \end{cases}$$

#### Définition 7.0.3 : L'estimateur Nelson-Åalen

L'estimateur Nelson-Åalen de la fonction de hasard cumulative est

$$\hat{H}(x) = \begin{cases} 0, & x < y_1 \\ \sum_{i=1}^{j-1} \frac{s_i}{r_i}, & y_{j-1} \leq x < y_j, \quad j = 2, 3, \dots, k \\ \sum_{i=1}^k \frac{s_i}{r_i}, & x \geq y_k \end{cases}$$

## 8 | Estimation pour données modifiées

### Définition 8.0.1 : Définitions de modifications

- Une observation est tronquée du haut (tronquée à gauche) à  $d$  si lorsque la valeur est inférieure à  $d$ , elle n'est pas enregistrée mais qu'elle est enregistrée si sa valeur est supérieure à  $d$ .
- Une observations est tronquée du bas (tronquée à droite) à  $u$  si lorsque la valeur est supérieure à  $u$ , elle n'est pas enregistrée mais qu'elle est enregistrée si sa valeur est inférieure à  $u$ .
- Une observation est censurée du bas (censurée à gauche) à  $d$  si lorsque la valeur est inférieure à  $d$ , elle est enregistrée comme  $d$ , mais qu'elle est enregistrée à sa valeur si elle est supérieure à  $d$ .
- Une observation est censurée du haut (censurée à droite) à  $u$  si lorsque sa valeur est supérieure à  $u$ , elle est enregistrée comme  $u$ , mais qu'elle est enregistrée à sa valeur si elle est inférieure à  $u$ .

En actuariat, on a des données tronquées à gauche et des données censurées à droite.

INCOMPLET



## **Quatrième partie**

# **Théorie de la crédibilité**





# 1 | Crédibilité Bayésienne



## 2 | Le modèle de Buhlmann

### 2.1 | La prime de crédibilité

Objectif : minimiser l'erreur quadratique moyenne de la prime de crédibilité avec un estimateur linéaire de la forme

$$\mu(\theta) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j.$$

On souhaite minimiser

$$Q = E \left[ \left( \mu_{n+1}(\theta) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j \right)^2 \right],$$

par rapport à  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ . L'espérance est prise par sur la distribution conjointe de  $\Theta, \underline{X}$ .

En dérivant et en jouant avec les espérances, on a

$$E[X_{n+1}] = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j X_j$$

et

$$Cov(X_i, X_{n+1}) = \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j Cov(X_i, X_j).$$

### 2.2 | Le modèle de Buhlmann

Notation :

— $\mu(\theta) = E[X_j   \Theta = \theta]$	— $\mu = E[\mu(\Theta)]$
— $v(\theta) = Var(X_j   \Theta = \theta)$	— $v = E[v(\Theta)]$
	— $a = Var(\mu(\Theta))$

Résultats intermédiaires (obtenus en conditionnant) :

—  $E[X_j] = \mu$

- $Var(X_j) = v + a$
- $Cov(X_j, X_i) = a$ .

La prime de crédibilité devient

$$\tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j X_j = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu,$$

avec

$$Z = \frac{n}{n + k}$$

et

$$k = \frac{v}{a} = \frac{E[Var(X_j|\Theta)]}{Var(E[X_j|\Theta])}.$$

**Cinquième partie**

**Théorie du risque**



# 1 | Mesures de risque

## 1.1 | Quelques mesures de risque

### Définition 1.1.1 : Value-at-risk

$$VaR_{\kappa}(X) = F_X^{-1}(\kappa) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \kappa\}$$

### Définition 1.1.2 : Tail Value-at-risk

La Tail Value-at-risk (TVaR) est une mesure de risque défini par l'équation

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 VaR_u(X) du \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \left\{ E \left[ X \times \mathbb{1}_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}} \right] + VaR_{\kappa}(X) (F_X(VaR_{\kappa}(X)) - \kappa) \right\}. \end{aligned}$$

D'autres formes incluent

$$— TVaR_{\kappa}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=[nk]+1}^n X_{j:n}}{[n(1-\kappa)]}$$

### Définition 1.1.3 : Capital économique

Le capital économique pour un portefeuille basée sur la mesure de risque  $\zeta_{\kappa}(S)$  est

$$CE_{\kappa}(S) = \zeta_{\kappa}(S) - E[S].$$

### Définition 1.1.4 : Bénéfice de mutualisation

Le bénéfice de mutualisation est

$$B_{\kappa}^{\zeta}(S) = \sum_{i=1}^n \zeta_{\kappa}(X_i) - \zeta_{\kappa}(S).$$

## 1.2 | Propriétés désirables et cohérence

### Propriété 1.2.1 : Homogénéité

Soit un risque  $X$  et une constante  $a \in \mathbb{R}^+$ . Une mesure  $\zeta_\kappa$  est homogène si

$$\zeta_\kappa(aX) = a\zeta_\kappa(X),$$

pour  $0 < \kappa < 1$ .

### Propriété 1.2.2 : Invariance à la translation

Soit un risque  $X$  et une constante  $a \in \mathbb{R}$ . Une mesure  $\zeta_\kappa$  est invariante à la translation si

$$\zeta_\kappa(aX) = a\zeta_\kappa(X),$$

pour  $0 < \kappa < 1$ .

### Propriété 1.2.3 : Monotonie

Soient deux risques  $X_1$  et  $X_2$  tels que  $\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$ . Une mesure  $\zeta_\kappa$  est monotone si

$$\zeta_\kappa(X_1) \leq \zeta_\kappa(X_2),$$

pour  $0 < \kappa < 1$ .

### Propriété 1.2.4 : Sous-additivité

Soient deux risques  $X_1$  et  $X_2$ . La mesure  $\zeta_\kappa$  est sous-additive si

$$\zeta_\kappa(X_1 + X_2) \leq \zeta_\kappa(X_1) + \zeta_\kappa(X_2),$$

pour  $0 < \kappa < 1$ .

### Définition 1.2.5 : Mesure de risque cohérente

Une mesure de risque cohérente satisfait les propriétés d'homogénéité, d'invariance à la translation, de monotonie et de sous-additivité. La mesure de risque TVaR est cohérente. La mesure de risque VaR n'est pas sous-additive, donc n'est pas cohérente (preuve : contre-exemple).



### 1.3 | Mesures de solvabilité sur une période

**Définition 1.3.1**

La probabilité de ruine correspond à la probabilité que la compagnie ne rencontre pas ses engagements au cours de la prochaine période en supposant un capital initial  $u \geq 0$ . Soit  $X_i, i = 1, 2, \dots, n$  les coûts pour un contrat et  $\pi_i$ , la prime demandée pour le risque. La probabilité de ruine  $\psi_n(u)$  est définie par

$$\psi_n(u) = \Pr \left( S_n > \sum_{i=1}^n \pi_i + u \right) = 1 - F_{S_n} \left( \sum_{i=1}^n \pi_i + u \right)$$



## 2 | Modélisation des risques

### 2.1 | Modèle stochastique du risque

#### Définition 2.1.1 : Modèle stochastique du risque

On définit la v.a.  $X$  par une somme aléatoire

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^M B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0. \end{cases}$$

- La v.a. discrète  $M$  représente le nombre de sinistres (fréquence)
- La v.a. continue et positive  $B_k$  correspond au montant du  $k^{\text{ième}}$  sinistre (sévérité)
- On dit que la v.a. est composée

L'espérance de  $X$  est

$$E[X] = E[E[X|M]] = E[M \times E[B]] = E[M]E[B].$$

La variance de  $X$  est

$$Var(X) = E_M[Var(X|M)] + Var_M(E[X|M]).$$

Avec  $Var(X|M) = MVar(B)$ , on obtient

$$Var(X) = E[M]Var(B) + Var(M)E[B]^2.$$

La fonction de répartition est

$$\begin{aligned} F_X(x) &= E[F_X(x)|M] \\ &= \Pr(M = 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M = k) F_{B_1 + \dots + B_k}(x). \end{aligned}$$

La fgm est

$$E[e^{tX}] = E_M[E[e^{tX}|M]] = E_M[e^{t(B_1 + \dots + B_k)}] = E_M[e^{Bt}] \stackrel{ind}{=} E_M[M_B(t)^M] = P_M(M_B(t)).$$

## 2.2 | Approche indemnitaire et forfaitaire

Un cas particulier du modèle stochastique est où  $M$  obéit à une loi Bernoulli. On a

$$X = M \times B = \begin{cases} B, & M = 1 \\ 0, & M = 0. \end{cases}$$

### Définition 2.2.1 : Approche indemnitaire

Dans l'approche indemnitaire, on suppose qu'un seul sinistre peut arriver dans une période. Les coûts de l'évènement sont définis par la v.a.  $B$ . On a

- $F_X(x) = 1 - q + qF_B(x)$
- $E[X] = qE[B]$
- $Var(X) = qVar(B) + q(1 - q)E[B]^2$
- $Var_{\kappa}(X) = \begin{cases} 0, & 0 < \kappa < 1 - q \\ Var_{\frac{\kappa - (1 - q)}{q}}(B), & 1 - q < \kappa < 1 \end{cases}$
- $TVaR_{\kappa}(X) = \frac{qE[B \times \mathbb{1}_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] + VaR_{\kappa}(X)(F_X(VaR_{\kappa}(X)) - \kappa)}{1 - \kappa}$

### Définition 2.2.2

Approche

## 2.3 | Généralisations des principales lois de fréquence

### Définition 2.3.1 : Loi Poisson-mélange

Soit une v.a.  $\Theta$  de telle sorte que  $E[\Theta] = 1, Var(\Theta) < \infty$  et  $M_{\Theta}(x)$  existe. La distribution de fréquence est définie selon

$$(M|\Theta = \theta) \sim Pois(\lambda\theta).$$

On a

- $E[M] = E_{\Theta}[E[M|\Theta]]$
- $Var(X) = \lambda + \lambda^2 Var(\Theta)$
- $P_M(t) = M_{\Theta}(\lambda(t - 1))$
- $Pr(M = k) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF_{\Theta}(\theta)$

## 2.4 | Sommes aléatoires et allocation

Soit la v.a.  $X$  définie selon un modèle stochastique du risque. Si  $B$  est continue et positive, on a

$$TVaR_{\kappa}(X) = \frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) E \left[ \left( \sum_{j=1}^k B_j \right) \times \mathbb{1}_{\left\{ \sum_{j=1}^k B_j > VaR_{\kappa}(X) \right\}} \right].$$

On présente deux règles d'allocation du capital.

### Définition 2.4.1 : Règle basée sur la variance

Les parts allouées aux v.a.  $B$  et  $M$  sont

$$\begin{aligned} C_{\kappa}^{Var}(M) &= \frac{Var(E[X|M])}{Var(X)} TVaR_{\kappa}(X) = \frac{Var(M)E[B]^2}{Var(X)} TVaR_{\kappa}(X) \\ C_{\kappa}^{Var}(B) &= \frac{E(E[X|M])}{Var(X)} TVaR_{\kappa}(X) = \frac{E[M]Var(B)}{Var(X)} TVaR_{\kappa}(X) \end{aligned}$$

### Définition 2.4.2 : Règle basée sur la TVaR

Avec la décomposition

$$E[X \times \mathbb{1}_{\{X > b\}}] = \underbrace{E_M[(X - E[X|M]) \times \mathbb{1}_{\{X > b\}}]}_{\text{part allouée à } M} + \underbrace{E_M[E[X|M] \times \mathbb{1}_{\{X > b\}}]}_{\text{part allouée à } B},$$

On déduit

$$C_{\kappa}^{TVaR}(M) = \frac{E_M[E[X|M] \times \mathbb{1}_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}]}{1 - \kappa}$$

et

$$C_{\kappa}^{TVaR}(B) = TVaR_{\kappa}(X) - C_{\kappa}^{TVaR}(M).$$

## 2.5 | Pertes financières

### Définition 2.5.1

Soit  $V(0)$ , la v.a. qui représente le capital initial investi dans un fonds et  $V(1)$ , la v.a. qui représente la valeur du fonds au temps  $t = 1$ . La perte liée à cet investissement est défini selon la v.a.  $L = V(0) - V(1)$ . Le rendement instantané pour une période est défini selon la v.a.  $R$ , alors,  $L = V(0) - V(0)e^R$ . Si la v.a.  $R$  est continue, on a

$$VaR_{\kappa}(L) = V(0) + VaR_{\kappa}(-V(1)) = V(0) - VaR_{1-\kappa}(V(1))$$

et

$$TVaR_{\kappa}(L) = V(0) - \frac{1}{1 - \kappa} (E[X] - \kappa TVaR_{1-\kappa}(X)).$$



## 3 | Mutualisation des risques

### 3.1 | Aggrégation des risques

On s'intéresse au comportement de la v.a.  $S = \sum_{i=1}^n X_i$  représentant les coûts d'un portefeuille de  $n$  risques. On a

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

et

$$Var(S) = Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Cov(X_i, X_j).$$

La fgm est donnée par

$$M_S(t) = E\left[e^{t \sum_{i=1}^n X_i}\right] \stackrel{ind}{=} \prod_{i=1}^n E\left[e^{t X_i}\right] = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t).$$

Si les v.a.  $X_i$  sont iid, on a

$$M_S(t) = M_{X_i}(t)^n.$$

#### Proposition 3.1.1 : Loi Poisson composée et aggrégation

Soient les v.a. indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  où

$$X_i \sim PComp(\lambda_i, F_{B_i}), i = 1, 2, \dots, n.$$

Alors,

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \sim PComp(\lambda_S, F_C),$$

où  $\lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  et

$$F_C(s) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S} F_{B_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S} F_{B_2}(x) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_S} F_{B_n}(x)$$

**Proposition 3.1.2 : Loi binomiale négative composée et aggrégation**

Soient les v.a. indépendantes  $X_1, \dots, X_n$  où

$$X_i \sim BNComp(r_i, q, F_{B_i}), i = 1, 2, \dots, n.$$

Alors,

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \sim BNComp(r_S, q, F_B),$$

où  $r_S = \sum_{i=1}^n r_i$ .

**3.2 | Méthodes d'approximation basée sur les moments****3.2.1 | Approximation basée sur la distribution normale**

L'approximation basée sur la distribution normale est fondée sur le théorème central limite. On approxime la v.a.  $S$  par la v.a.  $T$ , en supposant  $E[S]$  et  $Var(S)$  connus. On a alors

$$T \sim Norm(E[S], Var(S)).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} F_S(x) &\cong F_T(x) = \Phi\left(\frac{x - E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right) \\ VaR_\kappa(S) &\cong VaR_\kappa(T) = E[S] + \sqrt{Var(S)} VaR_\kappa(Z) \\ TVaR_\kappa(S) &\cong TVaR_\kappa(T) = E[S] + \sqrt{Var(S)} TVaR_\kappa(Z). \end{aligned}$$

**3.2.2 | Approximation basée sur la loi gamma traduite**

L'approximation basée sur la loi gamma est utile pour approximer la distribution de la v.a.  $S$  pour la queue de droite. On approxime la v.a.  $S$  par  $T + x_0$ , où  $T + x_0$  obéit à une loi gamma traduite.

À partir des trois premiers moments, on a

$$\begin{aligned} E[S] &= \frac{\alpha}{\beta} + x_0 \\ Var(S) &= \frac{\alpha}{\beta^2} \\ \gamma(S) &= \frac{2}{\alpha^{0.5}}. \end{aligned}$$

Avec la méthode des moments, on en déduit que

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{4}{\gamma(S)^2} \\ \hat{\beta} &= \frac{2}{\gamma(S)\sqrt{Var(S)}} \end{aligned}$$



$$\hat{x}_0 = E[S] - \frac{2\sqrt{\text{Var}(S)}}{\gamma(S)}$$

On peut approximer les mesures de risque suivantes pour  $\kappa$  élevés :

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\kappa(S) &\cong \text{VaR}_\kappa(T) + x_0 \\ \text{TVaR}_\kappa(S) &\cong \text{TVaR}_\kappa(T) + x_0 \end{aligned}$$

### 3.2.3 | Autres approximations

- lognormale :  $\sigma_T = \sqrt{\ln \frac{E[S^2]}{E[S]^2}}$  et  $\mu = \ln(E[S]) - \frac{1}{2}\sigma_T^2$
- F-généralisée.

## 3.3 | Mutualisation et activités d'assurance

### Définition 3.3.1 : Coût moyen par contrat

Le coût moyen par contrat est

$$W_n = \frac{S_n}{n}.$$

On a

$$E[W_n] = E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n}E[S_n] = E[X]$$

La variance est donnée par

$$\text{Var}(W_n) = \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\text{Var}(S_n) \stackrel{\text{ind}}{=} \frac{1}{n}\text{Var}(X).$$

On remarque que  $\text{Var}(W_n)$  converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Si les v.a. ne sont pas indépendantes, on a

$$\text{Var}(W_n) = \frac{1}{n^2}[n\text{Var}(X) + n(n-1)\text{Cov}(X_1, X_2)] = \frac{\text{Var}(X)}{n} + \frac{n-1}{n}\text{Cov}(X_1, X_2).$$

On remarque que  $\text{Var}(W_n)$  converge vers  $\text{Cov}(X_1, X_2)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

### Proposition 3.3.2

Soient les risques  $X_1, X_2, \dots, X_n$  et la prime  $\pi_i = (1 + \eta_i)E[X_i]$ . On définit le coefficient  $\rho_B$  comme étant la solution strictement positive (si elle existe) de  $E[e^{tS}] = e^{t\pi_S}$ , où

$$\psi_n(u) \leq e^{-\rho_B u}, \quad u \geq 0.$$

**Proposition 3.3.3**

Soient les risques iid  $X_1, X_2, \dots, X_n$  et la prime  $\pi_i = (1 + \eta_i)E[X_i] = \pi_i$ . Alors, on a

1. si  $\pi > E[X]$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(u) = 0, u \geq 0$
2. si  $\pi < E[X]$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(u) = 1$

## 4 | Principes de prime

### 4.1 | Propriétés désirables

1. Marge de sécurité positive
2. Exclusion de marge de sécurité non justifiée
3. Additivité
4. Sous-additivité
5. Invariance à l'échelle
6. Invariance à la translation
7. Maximum

### 4.2 | Principes de prime

#### 4.2.1 | Principe de la valeur espérée

La prime majorée est  $\Pi(X) = (1 + \kappa)E[X]$ , où  $\kappa > 0$ . Cette prime satisfait les propriétés 1, 3, 4, 5.

#### 4.2.2 | Principe de la variance

La prime est  $\Pi(X) = E[X] + \kappa Var(X)$ , où  $\kappa > 0$ . Cette prime satisfait les propriétés 1, 2, 3, 6.

#### 4.2.3 | Principe de l'écart type

La prime est  $\Pi(X) = E[X] + \kappa \sqrt{Var(X)}$ , où  $\kappa > 0$ . Cette prime satisfait les propriétés 1, 2, 6.

#### 4.2.4 | Principe de la VaR

La prime est  $\Pi(X) = VaR_{\kappa}(X)$ , pour  $\kappa$  élevé (0.95 ou plus, en pratique). Cette prime satisfait les propriétés 2, 5, 6, 7.

### 4.2.5 | Principe de la TVaR

La prime est  $\Pi(X) = TVaR_\kappa(X)$ , pour  $\kappa$  élevé (0.95 ou plus, en pratique). Cette prime satisfait les propriétés 1 à 7.

### 4.2.6 | Approche top-down

Le principe de la VaR et la TVaR utilise la v.a.  $W_n$  au lieu de la v.a.  $X$ . Elle permet de tenir compte du bénéfice de mutualisation. Les principes avec l'approche top-down sont les mêmes que pour le principe de la VaR et le principe de la TVaR.

### 4.2.7 | Principe exponentiel

La prime est  $\Pi(X) = \frac{1}{\kappa} \ln\{M_X(\kappa)\}$ , pour  $\kappa > 0$ . Cette prime satisfait les propriétés 1 à 7.

## 5 | Méthodes de simulation

### 5.1 | Méthode de base

Un algorithme pour simuler la réalisation d'une v.a.  $X^{(j)}, j = 1, 2, \dots, m$  à partir de la fonction de répartition d'une fonction. Pour  $j = 1, 2, \dots, m$ ,

1. simuler la réalisation  $U^{(j)} \sim \text{Unif}(0, 1)$  à partir d'un GNPA ou `runif`;
2. calculer la simulation  $X^{(j)}$  de  $X$  avec  $X^{(j)} = F_X^{-1}(U^{(j)})$ .

#### 5.1.1 | Simulations de v.a. définis par un mélange

Soit une v.a.  $\Theta$  et une v.a.  $X$  dont la fonction de répartition conditionnelle de  $(X|\Theta = \theta)$  est  $F_{X|\Theta=\theta}$  et la fonction quantile est  $F_{X|\Theta=\theta}^{-1}$ . Pour simuler des réalisations de  $\underline{X}$ , on procède avec les étapes suivantes

1. on simule une réalisation  $\Theta^{(j)}$  de  $\Theta$ ;
2. on produit une réalisation  $X$

#### 5.1.2 | Simulation de somme aléatoire

Soit  $X$  une v.a. définie par le modèle stochastique. La procédure pour simuler des réalisations de  $X$  est

1. Simuler une réalisation  $M^{(j)}$  de la v.a.  $M$ .



## 6 | Méthodes d'agrégation





## 7 | Comparaison des risques

L'ordre en dominance stochastique permet de comparer l'ampleur de deux v.a. et l'ordre convexe compare leur variabilité.

### 7.1 | Ordres partiels

#### Définition 7.1.1

Soit  $A$  un ensemble de fonctions de répartition. Une relation binaire  $\preceq$  définie sur  $A$  est un ordre partiel si cet ordre satisfait les trois propriétés suivantes :

1. Transitivité : Si  $F_X \preceq F_Y$  et  $F_Y \preceq F_Z$ , alors  $F_X \preceq F_Z$ .
2. Réflexivité :  $F_X \preceq F_X$
3. Anti-symétrie : Si  $F_X \preceq F_Y$  et  $F_Y \preceq F_X$ , alors  $F_X \equiv F_Y$ .

Les propriétés désirables pour les ordres partiels sont les suivants :

#### Propriété 7.1.2 : Fermeture sous le mélange

Soient les v.a.  $X, X'$  et  $\Theta$ . On dit que l'ordre stochastique  $\preceq$  est fermé sous le mélange si  $X|\Theta = \theta \preceq X'|\Theta = \theta$  pour tout  $\theta$  implique  $X \preceq X'$ .

#### Propriété 7.1.3 : Fermeture sous la convolution

Soient deux suites de v.a. indépendantes  $\underline{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}^+\}$  et  $\underline{X}' = \{X'_i, i \in \mathbb{N}^+\}$  avec  $X_i \preceq X'_i$  pour tout  $i \in \mathbb{N}^+$ . On dit que l'ordre stochastique  $\preceq$  est fermé sous la convolution si

$$\sum_{i=1}^n X_i \preceq \sum_{i=1}^n X'_i$$

est satisfait.

**Propriété 7.1.4 : Fermeture sous la composition**

On dit que l'ordre est fermé sous la composition si

$$\sum_{i=1}^N X_i \preceq \sum_{i=1}^{N'} X_i$$

pour  $N \preceq N'$ .

## 7.2 | Ordre en dominance stochastique

**Définition 7.2.1**

Soient les v.a.  $X$  et  $X'$  telles que  $E[X] < \infty$  et  $E[X'] < \infty$ . Alors,  $X$  est inférieure à  $X'$  sous l'ordre en dominance stochastique, notée  $X \preceq_{sd} X'$ , si  $F_X(x) \geq F_{X'}(x)$  ou  $\bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_{X'}(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Proposition 7.2.2**

Soient deux v.a.  $X$  et  $X'$  telles que  $X \preceq_{sd} X'$ . Alors, on a  $Var_{\kappa}(X) \leq Var_{\kappa}(X')$ .

**Théorème 7.2.3**

Soient les v.a.  $X$  et  $X'$  telles que  $E[X] < \infty$  et  $E[X'] < \infty$ .

1. Si  $X \preceq_{sd} X'$  alors  $E[X] \leq E[X']$ .
2. Si  $X \preceq_{sd} X'$  et  $E[X] = E[X']$  alors  $X$  et  $X'$  ont la même distribution.

**Théorème 7.2.4**

Soient les deux v.a.  $X$  et  $X'$ . Alors, on a  $X \preceq_{sd} X'$  si et seulement si  $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$  pour toute fonction croissante  $\phi$ .

**Théorème 7.2.5**

Soient les v.a.  $X$  et  $X'$  telles que  $E[X^m] < \infty$  et  $E[X'^m] < \infty$ , pour  $m \in \mathbb{N}^+$ . Si on a  $X \preceq_{sd} X'$ , alors

1.  $E[X^m] \leq E[X'^m]$ , pour  $m = 1, 3, 5, \dots$  ;
2.  $E[X^m] \leq E[X'^m]$ , pour  $m = 1, 2, 3, \dots$  si les v.a.  $X$  et  $Y$  sont positives.

**Théorème 7.2.6**

Soient deux v.a.  $X$  et  $X'$ . Si  $X \preceq_{sd} X'$  alors on a  $\phi(X) \preceq_{sd} \phi(X')$  pour toute fonction croissante  $\phi$ .

Soient  $X_1, \dots, X_n$  et  $X'_1, \dots, X'_n$  des v.a. indépendantes avec  $X_i \preceq_{sd} X'_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ . On suppose que  $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction croissante. Alors, on a  $\psi(X_1, \dots, X_n) \preceq_{sd} \psi(X'_1, \dots, X'_n)$ .

L'ordre en dominance stochastique est fermé sous la convolution, le mélange et la composition.

**Proposition 7.2.7 : Condition suffisante pour déterminer l'ordre en dominance stochastique**

Soient deux v.a.  $X$  et  $Y$  ayant la propriété qu'il existe un nombre réel  $a \geq 0$  tel que

$$dF_X(x) \geq dF_Y(x) \text{ pour } x \in (-\infty, a)$$

$$dF_X(x) \leq dF_Y(x) \text{ pour } x \in (-\infty, a).$$

Alors,  $X \preceq_{sd} Y$ .

Quelques lois avec paramètres différents sont d'ordre en dominance stochastique. Par exemple,

$$X \sim \text{Exp}(\beta) \text{ et } X' \sim \text{Exp}(\beta') \text{ avec } \beta \geq \beta'.$$

Il est aussi possible de comparer des lois paramétriques différentes. Par exemple, si  $M \sim \text{Bern}(q)$  et  $M' \sim \text{Pois}(\lambda)$  où  $\lambda = -\ln(1 - q)$ . Alors, on a  $M \preceq_{sd} M'$ .

**Proposition 7.2.8**

Soient les v.a.  $\tilde{X}^{(u,h')}$ ,  $\tilde{X}^{(u,h)}$ ,  $X$ ,  $\tilde{X}^{(l,h)}$ ,  $\tilde{X}^{(l,h')}$ , où  $X$  est un modèle stochastique  $\tilde{X}$  est l'approximation upper ou lower pour  $B$ . Alors,

$$\tilde{X}^{(u,h')} \preceq_{sd} \tilde{X}^{(u,h)} \preceq_{sd} X \preceq_{sd} \tilde{X}^{(l,h)} \preceq_{sd} \tilde{X}^{(l,h')}$$

pour  $0 < h \leq h'$ .

**Définition 7.2.9**

Une v.a.  $X_\theta$  est dite stochastiquement croissante si et seulement si  $X_\theta \preceq_{sd} X_{\theta'}$  quand  $\theta \leq \theta'$ .

**Proposition 7.2.10**

Si  $\Theta \preceq_{sd} \Theta'$ , alors  $X_\Theta \preceq_{sd} X_{\Theta'}$ .

## 7.3 | Ordres convexes

### Définition 7.3.1

Une fonction est dite convexe si  $\phi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha\phi(x) + (1 - \alpha)\phi(y)$  pour tout  $x$  et  $y$  et pour tout  $0 < \alpha < 1$ .

Une fonction  $\phi$  est dite concave si  $-\phi$  est convexe.

On définit des ordres stochastiques.

### Définition 7.3.2

Soient  $X$  et  $X'$  telles que  $E[X] < \infty$  et  $E[X'] < \infty$ . Alors,

- Ordre convexe :  $X \preceq_{cx} X'$  si  $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$ , pour toute fonction réelle convexe  $\phi$  et en supposant que les espérances existent.
- Ordre convexe croissante :  $X \preceq_{icx} X'$  si  $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$ , pour toute fonction réelle convexe croissante  $\phi$  et en supposant que les espérances existent.
- Ordre concave croissante :  $X \preceq_{icv} X'$  si  $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$ , pour toute fonction réelle concave croissante  $\phi$  et en supposant que les espérances existent.

### Définition 7.3.3 : Ordre stop-loss

$X \preceq_{sl} X'$ , si  $E[(X - d)_+] \leq E[(X' - d)_+]$ , pour tout  $d \in \mathbb{R}$ , où  $(u)_+ = \max(u, 0)$ .

### Théorème 7.3.4

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1.  $X \preceq_{icx} X'$ ;
2.  $X \preceq_{sl} X'$ .

### Remarque 7.3.5

$X \preceq_{sd} X'$  implique  $X \preceq_{icx} X'$  mais pas  $X \preceq_{cx} X'$ .

Les ordres convexes, convexes croissantes et stop loss sont fermés sous la convolution, le mélange et la composition.

### Proposition 7.3.6 : Critère de Karlin-Novikoff

Soient deux v.a.  $X$  et  $X'$  telles que  $E[X] \leq E[X'] < \infty$ . S'il existe un nombre  $c > 0$  tel que

$$F_X(x) \leq F_{X'}(x), \quad x < c$$

$$F_X(x) \geq F_{X'}(x), \quad x \geq c,$$

alors  $X \preceq_{icx} X'$  ou  $X \preceq_{sl} X'$ .

### Proposition 7.3.7

Soient les v.a.  $X$  et  $X'$ . Alors, on a  $X \preceq_{icx} X'$  si et seulement si  $TVaR_\kappa(X) \leq TVaR_\kappa(X')$ , pour tout  $0 < \kappa < 1$ .

### Proposition 7.3.8

Soient la v.a. positive  $\Theta$  et la v.a.  $X_\theta \sim Pois(\lambda\theta)$ , pour  $\theta \in \mathbb{R}^+$ . Les v.a.  $\Theta$  et  $X_\theta$  sont indépendantes. Alors,  $\Theta \preceq_{icx} \Theta'$  implique  $X_\Theta \preceq_{icx} X_{\Theta'}$ .

### Proposition 7.3.9

On a  $W_{n+1} \preceq_{icx} W_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^+$ .



## 8 | Copules

### 8.1 | Copules bivariées

#### Définition 8.1.1

Une copule  $C(u_1, u_2)$  est une application  $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$  ayant les mêmes propriétés qu'une fonction de répartition :

- $C(u_1, u_2)$  est non décroissante sur  $[0, 1]^2$ ;
- $C(u_1, u_2)$  est continue à droite sur  $[0, 1]^2$ ;
- $\lim_{u_i \rightarrow 0} C(u_1, u_2) = 0$  pour  $i = 1, 2$ ;
- $\lim_{u_1 \rightarrow 1} C(u_1, u_2) = u_2$  et  $\lim_{u_2 \rightarrow 1} C(u_1, u_2) = u_1$ ;
- on a  $\delta_{a_1, b_1} \delta_{a_2, b_2} C(u_1, u_2) \geq 0$ , pour tout  $a_1 \leq b_1$  et  $a_2 \leq b_2$ , où

$$\delta_{a_1, b_1} \delta_{a_2, b_2} C(u_1, u_2) = C(b_1, b_2) - C(b_1, a_2) - C(a_1, b_2) + C(a_1, a_2).$$

De plus, on a

$$\delta_{a_1, b_1} \delta_{a_2, b_2} C(u_1, u_2) = \Pr(a_1 < U_1 \leq b_1, a_2 < U_2 \leq b_2).$$

#### Théorème 8.1.2 : Théorème de Sklar

Soit  $F \in \Gamma(F_1, F_2)$  ayant des fonctions de répartition marginales  $F_1$  et  $F_2$ . Alors, il existe une copule  $C$  telle que, pour tout  $\underline{x} \in \mathbb{R}^+$ ,

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Si  $F_1$  et  $F_2$  sont continues, alors  $C$  est unique. Sinon,  $C$  est uniquement déterminée sur  $\text{Ran} F_1 \times \text{Ran} F_2$ , où  $\text{Ran} F$  est le support de  $F$ . Inversement, si  $C$  est une copule et si  $F_1$  et  $F_2$  sont des fonctions de répartition, alors la fonction définie par

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

est une fonction de répartition bivariée avec des fonctions de répartition marginales  $F_1$  et  $F_2$ .

**Corollaire 8.1.3**

Soit  $F$  une fonction de répartition bivariable avec des marginales continues  $F_1, F_2$  et la copule  $C$ . Alors, pour tout  $(u_1, u_2)$  dans  $[0, 1]^2$ ,

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))$$

## 8.2 | Propriétés des copules

**Définition 8.2.1**

Soit  $C(u_1, u_2)$  une copule définie sur  $[0, 1]^2$ . Alors, on a

$$C^-(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C^+(u_1, u_2),$$

où  $C^-(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1; 0)$  et  $C^+(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$  correspondent aux copules borne inférieure et supérieure de Fréchet (antimonotone et comonotone).

On a aussi

$$— c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2)$$

— Pour une paire de v.a. continues  $(X_1, X_2)$  avec  $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$

— la fonction de densité est  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$

La copule de survie est obtenue selon

$$\bar{F}_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \hat{C}(\bar{F}_{X_1}(x_1), \bar{F}_{X_2}(x_2))$$

et on obtient la formule

$$\hat{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1.$$

On note que

$$\Pr(U_1 > u_1, U_2 > u_1) \neq \hat{C}(u_1, u_2).$$

**Propriété 8.2.2**

Soient  $X_1$  et  $X_2$  des v.a. continues dont la structure de dépendance est définie selon la copule  $C$ . Soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  des fonctions continues monotones. On a les propriétés suivantes :

1. Si  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont non décroissantes, alors la structure de dépendance de  $(\phi(X_1), \phi(X_2))$  est la copule  $C$ .



## 9 | Allocation du capital



**Sixième partie**

# **Processus stochastiques**



# 1 | Chaînes de Markov



## 2 | Processus de Poisson

### 2.1 | Distribution exponentielle

Définition :

- $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$
- $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$
- Premier moment :  $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- FGM :  $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad \text{où } t < \lambda$
- Fonction d'intensité :  $r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$

Propriétés :

- Sans mémoire :  $\Pr(X > s + t | X > t) = \Pr(X > s)$
- Probabilité avec les minimums :  $\Pr(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$
- Probabilité avec les minimums ( $n$  v.a.) :  $\Pr(X_i = \min(X_1, \dots, X_n)) = \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_j}$
- Distribution des minimums : exponentielle avec somme des intensités

MANQUE ERLANG GÉNÉRALISÉE

### 2.2 | Processus de Poisson

#### Définition 2.2.1 : Processus de comptage

Un processus de comptage

1.  $N(t) \geq 0$
2.  $N(t)$  est un entier

3. si  $s < t$ , alors  $N(s) \leq N(t)$
4. Pour  $s < t$ ,  $N(t) - N(s)$  correspond au nombre d'évènements dans l'intervalle  $(s, t]$ .

Un processus de comptage a

- des accroissements indépendants si le nombre d'évènements dans des intervalles distinctes sont indépendants
- des accroissements stationnaires si la distribution du nombre d'évènements dans l'intervalle dépend seulement de la longueur de l'intervalle.

### Définition 2.2.2 : Processus de Poisson I

Le processus de comptage  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson avec taux  $\lambda > 0$  si

1.  $N(0) = 0$
2. Le processus a des accroissements indépendants
3. Le nombre d'évènements dans l'intervalle de longueur  $t$  est Poisson avec moyenne  $\lambda t$

### Définition 2.2.3

Une fonction  $f$  est dite  $o(h)$  si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

### Définition 2.2.4 : Processus de Poisson II

Le processus de comptage  $\{N(t), t \geq 0\}$  est dit un processus de Poisson avec taux d'intensité  $\lambda > 0$  si

1.  $N(0) = 0$
2. Le processus a des accroissements indépendants et stationnaires
3.  $\Pr(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
4.  $\Pr(N(h) = 2) = o(h)$

### Définition 2.2.5

La séquence de temps entre les arrivées est notée par  $\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$ . Le temps du premier sinistre est  $T_1$ . Avec

$$\Pr(T_1 > t) = \Pr(N(t) = 0) = e^{-\lambda t},$$

donc le temps du premier sinistre est de distribution exponentielle avec paramètre  $\lambda$ . Le temps entre le premier et le deuxième sinistre  $T_2$  est

$$\Pr(T_2 > t | T_1 = s) = \Pr(N(t+s) - N(s) = 0) = e^{-\lambda(t+s-s)} = e^{-\lambda t}.$$

$T_n, n = 1, 2, \dots$  sont iid et de distribution exponentielle avec paramètre  $\lambda$ .



**Définition 2.2.6**

Le temps d'attente au  $n^{\text{e}}$  évènement est noté par la v.a.  $S_n = \sum_{i=1}^n T_i, n \geq 1$ . De plus, on a  $S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$ .

Les énoncés suivants sont équivalents :

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t.$$

**Propriété 2.2.7**

Soient  $N_1(t)$  et  $N_2(t)$ , deux processus de Poisson avec intensités respectives  $\lambda p$  et  $\lambda(1-p)$ . Alors,  $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$  est un processus de Poisson avec intensité  $\lambda$ .

La probabilité que  $n$  évènements de type I (noté  $S_n^1$ ) arrivent avant  $m$  évènements de type II (noté  $S_m^2$ ). On a  $P(S_1^1 < S_1^2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ . Répéter cette expérience donne une v.a. binomiale et on a

$$\Pr(S_n^1 < S_m^2) = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{m+n-1}{k} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n+m-1-k}.$$

**Proposition 2.2.8**

Si 1 évènement d'un processus de Poisson a eu lieu au temps  $t$ , le temps de cet évènement est uniforme sur  $[0, t]$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \Pr(T_1 < s | N(t) = 1) &= \frac{\Pr(T_1 < s, N(t) = 1)}{\Pr(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\Pr(1 \text{ évènement sur } [0, s], 0 \text{ évènement sur } [s, t])}{\Pr(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\Pr(1 \text{ évènement sur } [0, s]) \Pr(0 \text{ évènement sur } [s, t])}{\Pr(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

Une version plus générale de ce résultat est présenté dans le théorème suivant :

**Théorème 2.2.9**

Sachant  $N(t) = n$ , les temps d'inter-arrivé  $S_1, \dots, S_n$  sont distribués comme les statistiques d'ordres des  $n$  v.a. uniformes sur  $(0, t)$ .

La densité conditionnelle de  $S_1, \dots, S_n$  sachant  $N(t) = n$  est équivalente à la densité conditionnelle

de  $T_1 = s_1, T_2 = s_2 - s_1, \dots, T_n = s_n - s_{n-1}, T_{n+1} > t - s_n$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} f(s_1, \dots, s_n | n) &= \frac{f(s_1, \dots, s_n, n)}{\Pr(N(t) = n)} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda s_1} \lambda e^{-\lambda(s_2 - s_1)} \dots \lambda e^{-\lambda(s_n - s_{n-1})} e^{\lambda(t - s_n)}}{\frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}} \\ &= \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < s_1 < \dots < s_n < t. \end{aligned}$$

### Proposition 2.2.10

On suppose que si un évènement arrive au temps  $y$ , alors il sera classifié comme type  $i$ , indépendamment, avec probabilité  $P_i(y), i = 1, \dots, k$ , où  $\sum_{i=1}^k P_i(y) = 1$ . Alors, si  $N_i(t), i = 1, \dots, k$  représente le nombre d'évènements de type  $i$  qui arrivent d'ici le temps  $t$  alors  $N_i(t), i = 1, \dots, k$  sont des v.a. indépendantes avec moyennes

$$E[N_i(t)] = \lambda \int_0^t P_i(s) ds.$$

## 2.3 | Généralisations du processus de Poisson

### Définition 2.3.1 : Processus de Poisson non homogène

Le processus de comptage  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson non-homogène avec fonction d'intensité  $\lambda(t), t \geq 0$  si

1.  $N(0) = 0$
2.  $\{N(t), t \geq 0\}$  a des accroissements indépendants
3.  $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$
4.  $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$

### Proposition 2.3.2

Soient  $\{N(t), t \geq 0\}$  et  $\{M(t), t \geq 0\}$ , des processus de Poisson non-homogènes indépendants, avec fonctions d'intensités respectives  $\lambda(t)$  et  $\mu(t)$ , et soit  $N^*(t) = N(t) + M(t)$ . Alors,

1.  $\{N^*(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson non homogène avec fonction d'intensité  $\lambda(t) + \mu(t)$
2. Sachant qu'un évènement de type  $t$  arrive au temps  $t$ , alors, indépendamment de ce qu'il se passe avant  $t$ , l'évènement au temps  $t$  provient du processus  $\{N(t)\}$  avec probabilité  $\frac{\lambda(t)}{\lambda(t) + \mu(t)}$

Un avantage du processus de Poisson non-homogène est que l'hypothèse d'accroissements non stationnaires n'est plus requise. De plus, le nombre d'évènements entre  $s$  et  $s+t$  est Poisson avec moyenne

$$\int_s^{s+t} \lambda(y) dy.$$

**Définition 2.3.3**

Le temps du  $n^{\text{e}}$  évènement d'un processus de Poisson non-homogène est

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t) e^{-m(t)} \frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!},$$

où  $m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ .

**2.3.1 | Processus de Poisson composé**

Un processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson composé s'il peut être représenté par le modèle stochastique

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0,$$

où  $\{N(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson et  $Y_i$  sont des v.a. iid et indépendantes du processus de comptage. On a

$$E[X(t)] = \lambda t E[Y] \quad \text{et} \quad \text{Var}(X(t)) = \lambda t E[Y^2].$$

**Propriété 2.3.4**

Soit  $\{X(t), t \geq 0\}$ , un processus de Poisson composé avec intensité  $\lambda_1$  et fonction de répartition  $F_1$ . Soit aussi  $\{Y(t), t \geq 0\}$ , un processus de Poisson composé avec  $\lambda_2$  et  $F_2$ . Alors,  $\{X(t) + Y(t), t \geq 0\}$  est un processus de Poisson composé avec intensité  $\lambda_1 + \lambda_2$  et fonction de répartition

$$F(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} F_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} F_2(x).$$

**2.3.2 | Processus de Poisson conditionnel ou mixte**

Soit  $\{N(t), t \geq 0\}$ , un processus de Poisson avec paramètre  $\lambda$ . Soit  $\Lambda$ , une v.a. positive représentant l'hétérogénéité du paramètre  $\lambda$ . Ce processus de Poisson est appelé conditionnel ou mixte. Stratégie générale : conditionner. On a

$$\begin{aligned} \Pr(N(t+s) - N(s) = n) &= \int_0^\infty \Pr(N(t+s) - N(s) = n | \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} f_\Lambda(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

On a aussi

$$\text{Var}(N(t)) = tE[L] + t^2 \text{Var}(L).$$

De plus,

$$\Pr(\Lambda \leq x | N(t) = n) = \frac{\int_0^x (\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda) d\lambda}$$

et

$$f_{\Lambda|N(t)=n}(\lambda|n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda)}{\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda) d\lambda}.$$

Enfin,

$$\Pr(N(t) > n) = \int_0^\infty \bar{F}_\Lambda(\lambda) \lambda \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} d\lambda.$$

## **Septième partie**

# **Finance**



# Bibliographie

[Kellison, 2006] Kellison, S. G. (2006). *The theory of interest*.

[Klugman et al., 2012] Klugman, S. A., Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (2012). *Loss models : from data to decisions*, volume 715. John Wiley & Sons.