

Étude examen prédoctoral général

Christopher Blier-Wong, M.Sc., M.Sc.



UNIVERSITÉ
LAVAL

Faculté des
sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières

I	Mathématiques financières	1
1	La mesure de l'intérêt	3
1.1	Les fonctions d'accumulation et de montant	3
1.2	Le taux d'intérêt effectif	4
1.3	Intérêt simple	4
1.4	Intérêt composé	4
1.5	Valeur actualisée	4
1.6	Taux effectif d'escompte	5
1.7	Taux d'intérêt et d'escompte nominaux	6
1.8	Force d'intérêt et d'escompte	6
1.9	Intérêt variable	7
2	Solutions de problèmes d'intérêt	8
2.1	Le problème de base	8
2.2	Équations de valeur	8
3	Rentes de base	8
3.1	Introduction	9
3.2	Rente immédiate	9
3.3	Rente due	9
3.4	Perpetuité	10
3.5	Rentes payables à fréquences autres que l'intérêt est converti	10
3.5.1	Rente à fréquence inférieure à la période de conversion	10
3.6	Rentes à fréquence supérieure à la période de conversion	11
3.7	Rente continue	11
3.8	Rentes variables	12
4	Analyse du flux de trésorerie	12
4.1	Taux de rendement	12
4.2	Taux de réinvestissement	13
4.3	Mesure de l'intérêt dans un fonds	13
4.3.1	Résultats en discret	13
4.3.2	Résultats en continu	14
4.4	Taux d'intérêt pondéré par le temps	14
II	Mathématiques actuarielles vie	15
1	Distributions de survie	17
1.1	Résumé de la notation	17

1.2	Relations avec tables de mortalité	18
1.3	Groupe de survie déterministe	18
1.4	Autres caractéristiques	19
1.4.1	Relations de récursion	19
1.5	Hypothèses pour les âges fractionnaires	20
1.6	Lois analytique de survie	20
1.7	Tables de mortalité sélectes et ultimes	21
2	Assurance vie	21
2.1	Assurance continue	21
2.2	Assurance discrète	22
2.3	Relation entre l'assurance payable au moment du décès et la fin de l'année	23
3	Rentes	24
3.1	Rentes discrètes	25
3.1.1	Rente temporaire	25
3.1.2	Rentes payables en fin d'année	26
3.2	Rentes payables m fois par année	26
3.2.1	Approximations	27
4	Primes	27
4.1	Principes de primes	28
4.2	Primes pour des contrats continus	28
III	Distributions de sinistres	29
1	Quantités distributionnelles de base	31
1.1	Queues des distributions	31
2	Caractéristiques des modèles actuariels	32
2.1	Distributions paramétriques et d'échelle	32
2.2	Familles de distributions paramétriques	33
2.3	Distribution de mélange fini	33
2.4	Distributions dépendantes des données	33
3	Distributions continues	34
3.1	Créer des nouvelles distributions	34
3.1.1	Multiplication par une constante	34
3.1.2	Création de distributions en élevant à une puissance	34
3.1.3	Création de distributions avec exponentiation	35
3.1.4	Mélange	35
3.1.5	Modèles à fragilité	35
3.1.6	Raccordement de distributions connues	36
3.2	Familles de distributions et leurs liens	36
3.2.1	Distributions limites	36
3.3	Théorie des valeurs extrêmes	36
3.3.1	Distributions à valeur extrêmes (DVE)	36
3.3.2	Distribution du maximum	38
3.3.3	Stabilité du maximum des DVE	38
3.3.4	Théorème Fisher-Tippett	39

4 Distributions discrètes	39
4.1 Notation et rappels	39
4.2 Loi Poisson	39
4.3 Loi binomiale négative	40
4.4 Loi binomiale	40
4.5 La classe $(a, b, 0)$	40
5 Fréquence et sévérité avec modifications de la couverture	41
5.1 Déductibles	41
5.2 Ratio d'élimination de perte et effet de l'inflation sur les déductibles ordinaires	43
5.3 Limites de polices	43
5.4 Coassurance, déductibles et limites	44
6 Rappel des notions de mathématiques statistiques	45
6.1 Estimation ponctuelle	45
6.1.1 Mesures de qualité	45
6.2 Intervalles de confiance	46
6.3 Tests d'hypothèse	47
6.3.1 Types d'erreur	47
7 Estimation pour données complètes	48
8 Estimation pour données modifiées	49
 IV Théorie de la crédibilité	 51
1 Crédibilité Américaine	53
2 Crédibilité Bayésienne	53
3 Le modèle de Buhlmann	54
3.1 La prime de crédibilité	54
3.2 Le modèle de Buhlmann	54
3.3 Le modèle de Buhlmann-Straub	55
3.4 Estimateurs	56
3.4.1 Modèle de Buhlmann	56
3.4.2 Modèle de Buhlmann-Straub	56
 V Théorie du risque	 57
1 Mesures de risque	59
1.1 Quelques mesures de risque	59
1.2 Propriétés désirables et cohérence	60
1.3 Mesures de solvabilité sur une période	61
2 Modélisation des risques	61
2.1 Modèle stochastique du risque	61
2.1.1 Fréquence et sévérité avec modification de la couverture	63
2.2 Approche indemnitare et forfaitaire	63
2.3 Généralisations des principales lois de fréquence	64
2.4 Sommes aléatoires et allocation	64
2.5 Pertes financières	65

3	Mutualisation des risques	65
3.1	Aggrégation des risques	65
3.2	Méthodes d'approximation basée sur les moments	66
3.2.1	Approximation basée sur la distribution normale	66
3.2.2	Approximation basée sur la loi gamma translatée	67
3.2.3	Autres approximations	67
3.2.4	Approximation Poisson du modèle individuel	67
3.3	Mutualisation et activités d'assurance	67
4	Principes de prime	69
4.1	Propriétés désirables	69
4.2	Principes de prime	69
4.2.1	Principe de la valeur espérée	69
4.2.2	Principe de la variance	69
4.2.3	Principe de l'écart type	69
4.2.4	Principe de la VaR	69
4.2.5	Principe de la TVaR	70
4.2.6	Approche top-down	70
4.2.7	Principe exponentiel	70
5	Méthodes de simulation	70
5.1	Méthode de base	70
5.1.1	Simulations de v.a. définis par un mélange	70
5.1.2	Simulation de somme aléatoire	71
6	Méthodes d'aggrégation	71
7	Comparaison des risques	71
7.1	Ordres partiels	72
7.2	Ordre en dominance stochastique	73
7.3	Ordres convexes	74
8	Copules	76
8.1	Copules bivariées	76
8.2	Propriétés des copules	77
8.2.1	Notions de dépendance	77
8.3	Mesures de dépendance	78
8.4	Mesures de queue	79
8.5	Copules archimédiennes	79
8.6	Copules elliptiques	80
8.6.1	Copule gaussienne	80
8.6.2	Copule de Student	80
9	Allocation du capital	81
10	Modèles de ruine	81
10.1	Modèles à temps discret	81
10.2	Modèles à temps continu	82
10.2.1	Coefficient d'ajustement et inégalité de Lundberg.	83
10.2.2	Équation intégral-différentielle	83

VI	Processus stochastiques	85
1	Chaînes de Markov	87
1.1	Équations Chapman-Kolmogorov	87
1.1.1	Probabilités de visiter un état	88
1.2	Classification des états	88
1.3	Probabilités limites	88
2	Processus de Poisson	89
2.1	Distribution exponentielle	89
2.2	Processus de Poisson	90
2.3	Généralisations du processus de Poisson	92
2.3.1	Processus de Poisson composé	93
2.3.2	Processus de Poisson conditionnel ou mixte	93
3	Mouvement Brownien	94
3.1	Définition	94
3.2	Temps d'atteinte d'une barrière	95
3.3	Variations au mouvement Brownien	95
3.3.1	Mouvement Brownien avec dérive	95
3.3.2	Mouvement Brownien géométrique	95
3.4	Processus Gaussien	96
3.4.1	Mouvement Brownien intégré	96
VII	Finance	97
1	Introduction	99
1.1	Contrats à termes	99
1.2	Options	100
1.3	Participants dans les marchés	100
2	Mécanismes du marché des futures	101
2.1	Spécifications d'un contact à terme standardisé	101
2.2	Opérations des comptes sur marge	102
2.2.1	Règlement quotidien	102
2.2.2	Chambres de compensation	102
2.3	Marchés gré à gré (OTC)	102
2.3.1	Contreparties centrales	103
2.3.2	Compensation bilatérale	103
2.4	Cours du marché	103
2.5	Livraison	103
2.6	Types de boursiers	104
2.7	Types de commandes	104
2.8	Régulations	105
2.9	Comptabilité et taxes	105

Première partie

Mathématiques financières

1 | La mesure de l'intérêt

Voir [Kellison, 2006], chapitre 1

1.1 | Les fonctions d'accumulation et de montant

- Le montant initial investi est appelé le *capital*
- Le montant obtenu après une période de temps est appelé la *valeur accumulée*
- La différence entre le montant accumulé et le principal est le *montant d'intérêt* ou *intérêt*
- t est le temps mesuré depuis le début la date d'investissement
- L'unité de temps est la *période de mesure* ou *période*

Définition 1.1.1 : La fonction d'accumulation

La fonction d'accumulation $a(t)$ correspond à la valeur accumulée au temps $t \geq 0$ d'un investissement initial de 1.

La fonction d'accumulation possède les propriétés suivantes :

1. $a(0) = 1$
2. $a(t)$ est généralement croissante
3. Si l'intérêt est accumulé en continu, $a(t)$ est continue

Définition 1.1.2 : Fonction de montant

La fonction de montant $A(t)$ correspond à la valeur accumulée au temps $t \geq 0$ d'un investissement initial de $k > 0$. On a

$$A(t) = k \times a(t) \quad \text{et} \quad A(0) = k.$$

Définition 1.1.3 : Montant d'intérêt

Le montant d'intérêt gagné pendant la $n^{\text{ième}}$ période depuis la date d'investissement est

$$I_n = A(n) - A(n-1) \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

1.2 | Le taux d'intérêt effectif

Définition 1.2.1

Le taux d'intérêt effectif i est le montant d'argent qu'une unité investie au début de la période va gagner pendant la période, où l'intérêt est obtenu à la fin de la période, c.-à-d. $i = a(1) - a(0)$ ou $a(1) = 1 + i$.

Le taux d'intérêt i est le ratio du montant d'intérêt gagné pendant la période et du montant de principal investi au début de la période.

Le mot effectif est utilisé lorsque l'intérêt est payé une fois par période.

Les taux d'intérêt peuvent être calculés sur n'importe quelle période d'investissement. Soit i_n , le taux d'intérêt effectif pour la $n^{\text{ième}}$ période depuis la date d'investissement. Alors, on a

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}, \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

1.3 | Intérêt simple

La fonction d'accumulation est linéaire

$$a(t) = a + it \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Accumuler de l'intérêt avec ce patron correspond à l'intérêt simple. On a

$$i_n = \frac{i}{1 + i(n-1)},$$

donc un intérêt simple constant implique un taux d'intérêt effectif décroissant.

1.4 | Intérêt composé

L'intérêt composé assume que le montant accumulé est automatiquement ré-investi.

$$a(t) = (1 + i)^t \quad \text{pour } t \geq 0.$$

On a $i_n = i$, qui est indépendant de n . Alors, un taux d'intérêt composé correspond au taux d'intérêt effectif.

1.5 | Valeur actualisée

Le terme $1 + i$ est le facteur d'accumulation, car il accumule la valeur d'un investissement au début de la période à la fin de la période. On doit parfois déterminer le montant à investir pour obtenir 1 à la fin de

la période. Pour ce faire, on définit un nouveau symbole

$$v = \frac{1}{1+i}$$

parfois appelé le facteur d'escompte.

- La fonction d'escompte est $a^{-1}(t) = \frac{1}{a(t)}$.
- Pour l'intérêt simple, on a $a^{-1}(t) = \frac{1}{1+it}$.
- Pour l'intérêt composé, on a $a^{-1}(t) = \frac{1}{(1+i)^t} = v^t$.

1.6 | Taux effectif d'escompte

Définition 1.6.1 : Le taux effectif d'escompte

Le taux effectif d'escompte d est le ratio du montant d'intérêt gagné pendant la période et du montant investi à la fin de la période.

La principale différence entre le taux d'effectif d'intérêt et le taux effectif d'escompte est

- Intérêt : payé à la fin de la période divisé par la balance au début de la période.
- Escompte : payé au début de la période divisé sur la balance à la fin de la période.

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)}, \quad \text{pour un entier } n \geq 1.$$

Définition 1.6.2 : Équivalence

Deux taux d'intérêt ou d'escompte sont dit équivalant si un montant de principal investi pour la même durée à chaque taux d'intérêt produisent la même valeur accumulée.

On utilise le concept d'équivalence pour établir des liens entre les taux d'intérêt.

Si une personne emprunte 1 au taux d'escompte effectif d , le principal initial est $1 - d$ et le montant d'intérêt est d . Alors,

$$i = \frac{d}{1-d} \Rightarrow d = \frac{i}{1+i} = iv.$$

Autres relations utiles :

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i} = 1 - v;$$

$$d = iv = i(1-d) = i - id \Rightarrow i - d = id.$$

1.7 | Taux d'intérêt et d'escompte nominaux

- On considère les situations où l'intérêt est payé plus fréquemment qu'une fois par période. Ces taux sont appelés nominaux.
- Le symbole pour un taux nominal d'intérêt payé m fois par période est $i^{(m)}$, où m est un entier positif.
- Par un taux nominal d'intérêt $i^{(m)}$, on veut dire que l'intérêt est $i^{(m)}/m$ pour chaque $\frac{1}{m}$ période.
- De la définition d'équivalence, on a

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \Rightarrow i^{(m)} = m \left[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

- Le symbole pour un taux nominal d'escompte payé m fois par période est $d^{(m)}$, où m est un entier positif.
- De la définition d'équivalence, on a

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m \Rightarrow d^{(m)} = m \left[1 - v^{\frac{1}{m}}\right]$$

- Une autre relation est

$$\frac{i^{(m)}}{m} - \frac{d^{(m)}}{m} = \frac{i^{(m)}}{m} \frac{d^{(m)}}{m}.$$

1.8 | Force d'intérêt et d'escompte

Mesure de l'intensité dont d'intérêt opère, i.e. le taux d'intérêt instantané. La force d'intérêt au temps t est défini par

$$\delta_t = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{a'(t)}{a(t)}.$$

Par la dérivée en chaîne, on a aussi

$$\delta_t = \frac{d}{dt} \ln A(t) = \frac{d}{dt} \ln a(t).$$

Autres relations :

- $\exp \left\{ \int_0^t \delta_r dr \right\} = \frac{A(t)}{A(0)} = \frac{a(t)}{a(0)} = a(t);$
- $\int_0^n A(t) \delta_t dt = \int_0^n A'(t) dt = A(n) - A(0).$ Intuition : l'intérêt est égal à la somme du capital investi au temps t multiplié par la force d'intérêt au temps t .

La force d'escompte est

$$\delta'_t = - \frac{\frac{d}{dt} a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)}.$$

On a

$$\delta_t = \delta'_t$$

Par le principe d'équivalence, on a

$$i = e^\delta - 1 \Rightarrow \delta = \ln(1 + i)$$

Séries de Taylor :

$$— i = e^\delta - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots$$

$$— \delta = \ln(1 + i) = i - \frac{i^2}{2!} + \frac{i^3}{3!} - \frac{i^4}{4!} + \dots$$

— Les termes i^k et δ^k sont très petits pour $k > 2$ car i et δ sont très petits.

Liste d'équivalences :

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i = v^{-1} = (1 - d)^{-1} = \left(1 - \frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p} = e^\delta.$$

Sous l'intérêt simple, la force d'intérêt est $\delta_t = \frac{i}{1+it}$ et la force d'escompte est $\delta'_t = \frac{d}{1-dt}$. On remarque que δ_t est une fonction croissante et δ'_t est une fonction décroissante.

En utilisant l'expansion de Taylor, on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \delta$$

et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d^{(m)} = \delta'$$

1.9 | Intérêt variable

— Si la force d'intérêt change, on utilise la relation $a(t) = e^{\int_0^t \delta_r dr}$

— Si le taux effectif d'intérêt change, on utilise la relation

$$a(t) = (1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \dots (1 + i_t) = \prod_{k=1}^t (1 + i_k)$$

— Si le taux effectif d'escompte change, on utilise la relation

$$a^{-1}(t) = (1 - d_1)(1 - d_2)(1 - d_3) \dots (1 - d_t) = \prod_{k=1}^t (1 - d_k)$$

— On a aussi

$$a^{-1}(t) = (1 + i_1)^{-1}(1 + i_2)^{-1}(1 + i_3)^{-1} \dots (1 + i_t)^{-1} = \prod_{k=1}^t (1 + i_k)^{-1} = \prod_{k=1}^t v_k$$

2 | Solutions de problèmes d'intérêt

Voir [Kellison, 2006], chapitre 2.

2.1 | Le problème de base

Les problèmes d'intérêts sont composés de quatre éléments :

1. Le principal investi initialement
2. La longueur de la période d'investissement
3. Le taux d'intérêt
4. La valeur accumulée du principal à la fin de la période d'investissement.

Connaissant trois éléments, le quatrième peut être résolu.

2.2 | Équations de valeur

- Principe fondamental : la valeur temporelle de l'argent.
- Deux valeurs monétaires à différents temps ne peuvent pas être comparées.
- On doit accumuler ou escompter les valeurs à une *date de comparaison*
- L'équation qui compare deux valeurs monétaires à la même date de comparaison est l'équation de valeur.

3 | Rentes de base

Voir [Kellison, 2006], chapitres 3 et 4

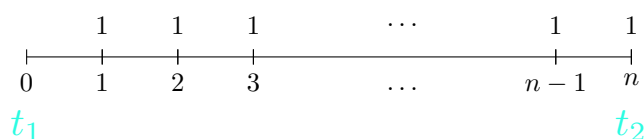
3.1 | Introduction

Définition 3.1.1 : Rente

- Une rente est une série de paiements fait à intervalles égaux.
- Une rente certaine est une rente dont les paiements sont faits pour une période de temps avec certitude.
- L'intervalle entre les paiements est la période de paiements

3.2 | Rente immédiate

Une rente immédiate paie 1 à la fin de chaque période pour n périodes.



La valeur actualisée d'une rente immédiate (au temps t_1) est notée par $a_{\overline{n}|}$. On a

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1} + v^n = \frac{1 - v^n}{i}.$$

La valeur accumulée d'une rente immédiate (au temps t_2) est notée par $s_{\overline{n}|}$

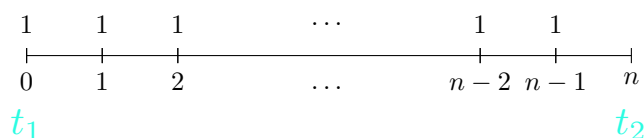
$$s_{\overline{n}|} = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^n = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

Quelques relations

$$\begin{aligned} \text{— } 1 &= ia_{\overline{n}|} + v^n & \text{— } s_{\overline{n}|} &= a_{\overline{n}|}(1 + i)^n & \text{— } \frac{1}{a_{\overline{n}|}} &= \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i \end{aligned}$$

3.3 | Rente due

Une rente due paie 1 au début de chaque période pour n périodes.



La valeur actualisée d'une rente due (au temps t_1) est notée par $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. On a

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 \cdots + v^{n-2} + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

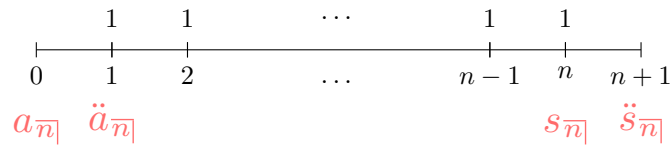
La valeur accumulée d'une rente due (au temps t_2) est notée par $\ddot{s}_{\overline{n}|}$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \cdots + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1} = \frac{(1 + i)^n - 1}{d}.$$

Quelques relations

$$\begin{aligned} \text{--- } \ddot{s}_{\overline{n}|} &= \ddot{a}_{\overline{n}|}(1 + i)^n & \text{--- } \ddot{a}_{\overline{n}|} &= a_{\overline{n}|}(1 + i) & \text{--- } \ddot{a}_{\overline{n}|} &= 1 + a_{\overline{n-1}|} \\ \text{--- } \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} &= \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + d & \text{--- } \ddot{s}_{\overline{n}|} &= s_{\overline{n}|}(1 + i) & \text{--- } \ddot{s}_{\overline{n}|} &= s_{\overline{n+1}|} - 1 \end{aligned}$$

Comparaison des rentes :



3.4 | Perpetuité

Une perpetuité est une rente de durée infinie.

$$a_{\infty|} = \frac{1}{i}; \quad \ddot{a}_{\infty|} = \frac{1}{d}$$

3.5 | Rentes payables à fréquences autres que l'intérêt est converti

3.5.1 | Rente à fréquence inférieure à la période de conversion

S'il y a k périodes de conversion dans une période de paiement, la valeur actualisée d'une rente immédiate est

$$v^k + v^{2k} + \cdots + v^{\frac{n}{k} \times k} = \frac{v^k - v^{nk}}{1 - v^k} = \frac{1 - v^n}{(1 + i)^k - 1} = \frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}.$$

La valeur actualisée d'une rente due est

$$1 + v^k + v^{2k} + \cdots + v^{\frac{n}{k} \times k - k} = \frac{1 - v^{nk}}{1 - v^k} = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}.$$

Note : la manipulation des termes $a_{\overline{n}|}$ et $s_{\overline{n}|}$ doit être intuitive.

3.6 | Rentes à fréquence supérieure à la période de conversion

Soit m , le nombre de paiements par période de conversion de l'intérêt et n , le nombre de périodes de conversion de l'intérêt. Chaque paiement est de $\frac{1}{m}$, tel que la somme de 1 est payée pendant une période de conversion. Alors, il y a mn paiements.

La valeur actualisée de cette rente immédiate est

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \left[v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \dots + v^{\frac{mn-1}{m}} + v^{\frac{mn}{m}} \right] = \frac{1 - v^n}{m \left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right)} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}}$$

et la valeur accumulée est

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)} (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}.$$

De manière équivalente, la valeur actualisée d'une rente due est

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}}$$

3.7 | Rente continue

L'expression pour la valeur actualisée d'une rente qui paie 1 par période d'intérêt est

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt = \frac{1 - v^n}{\delta}.$$

L'expression pour la valeur accumulée d'une rente qui paie 1 par période d'intérêt est

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n (1+i)^t dt = \frac{(1+i)^n - 1}{\delta}.$$

On a aussi

$$\frac{d}{dt} \bar{s}_{\overline{t}|} = 1 + \delta \bar{s}_{\overline{t}|}$$

alors, à chaque moment, la rente paie 1 et la force de l'intérêt fois la valeur accumulée de la rente depuis le début de la rente.

3.8 | Rentes variables

Progression géométrique seulement. Dans le cas de l'intérêt composé avec des paiements qui grandissent selon un patron géométrique, on peut se définir un nouveau taux d'intérêt et utiliser les résultats existants.

4 | Analyse du flux de trésorerie

Voir [Kellison, 2006], chapitre 5. Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier des positions financières où des entrées et des sorties de fonds sont faites dans le compte.

4.1 | Taux de rendement

On considère des situations où l'investisseur des entrées de fonds de montant $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ aux temps $0, 1, 2, \dots, n$. On suppose que les temps $t, t + 1$ sont espacés de manière uniforme. Note : $C_i, i = 1, \dots, n$ peut être négatif, qui correspond à une sortie de fonds.

On note un rendement (sortie de fonds) au temps t par $R_t, t = 0, 1, 2, \dots, n$, alors $C_t = -R_t, t = 0, 1, 2, \dots, n$.

La valeur actualisée nette est

$$P(i) = \sum_{t=0}^n v^t R_t.$$

Définition 4.1.1

Le taux de rendement est le taux où la valeur actualisée nette des rendements de l'investissement est égale à la valeur actualisée des contributions dans l'investissement. Ce taux est aussi appelé le taux de rendement interne.

On peut trouver le taux de rendement i selon l'équation de valeur

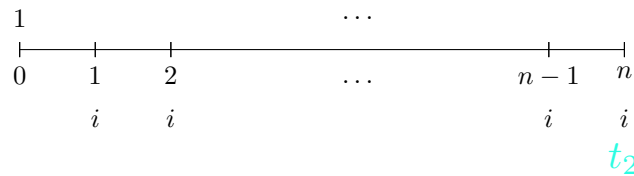
$$P(i) = 0.$$

Un taux de rendement est seulement comparable à un autre si la durée de l'investissement est identique.

4.2 | Taux de réinvestissement

Jusqu'à présent, on n'a pas considéré le taux d'intérêt sur les réinvestissements, on a supposé que ce taux était constant toute la durée de l'investissement. Par contre, un investissement à court terme rapportera probablement un taux d'intérêt inférieur à un investissement à long terme, donc le taux de réinvestissement pourrait être plus petit que le taux de rendement initial.

On considère un investissement de 1 pour n périodes au taux i et au taux de réinvestissement j . L'investissement initial retourne i à chaque période, qui est investi au taux j . Le diagramme de temps est



La valeur accumulée est $1 + i s_{\overline{n}|j}$.

4.3 | Mesure de l'intérêt dans un fonds

Définitions :

- A : le montant dans le fonds au début de la période
- B : le montant dans le fonds à la fin de la période
- I : le montant d'intérêt obtenu pendant la période
- C_t : le montant net de capital contribué au temps t , pour $0 \leq t \leq 1$
- C : le montant de capital total pendant la période, $C = \sum_t C_t$
- ${}_a i_b$: le montant d'intérêt obtenu pour un capital de 1 investi au temps b pendant a unités, et $a + b \leq 1$

4.3.1 | Résultats en discret

Le montant dans le fonds à la fin de la période est la somme du montant initial, les contributions et l'intérêt

$$B = A + C + I.$$

Le montant d'intérêt obtenu est la somme de l'intérêt sur le montant initial et sur les contributions.

$$I = iA + \sum_t C_t \times {}_{1-t}i_t.$$

Avec l'hypothèse d'intérêt composé, on a

$${}_{1-t}i_t = (1 + i)^{1-t} - 1.$$

Une hypothèse simplificatrice est

$$1-t i_t \simeq (1-t)i,$$

qui nous permet d'écrire

$$i \simeq \frac{I}{A + \sum_t C_t(1-t)},$$

qui s'interprète comme l'investissement obtenu divisé par la somme pondérée des contributions. Cette hypothèse tient si les C_t sont petits comparés à A .

Une autre hypothèse est que les contributions sont faites uniformément sur la période, donc en moyenne au temps 0.5. L'approximation devient

$$i \simeq \frac{I}{A + 0.5(B - A - I)} = \frac{2I}{A + B - I}.$$

4.3.2 | Résultats en continu

Le montant du fonds au temps n est

$$B_n = B_0(1+i)^n + \int_0^n C_t(1+i)^{n-t} dt.$$

Une formule plus générale est

$$B_n = B_0 e^{\int_0^n \delta_s ds} + \int_0^n C_t e^{\int_t^n \delta_s ds} dt,$$

qui a une équation différentielle associée

$$\frac{d}{dt} B_t = \delta_t B_t + C_t,$$

donc le rendement instantané est la somme de

- la force d'intérêt au temps t multiplié par la valeur du fonds au temps t ;
- la contribution continue.

4.4 | Taux d'intérêt pondéré par le temps

Le taux de rendement peut dépendre des contributions intermédiaires $C_t, t = 0, 1, 2, \dots, n$.

Le taux d'intérêt pondéré par le temps est une mesure de performance différente. On décompose la période d'investissement à chaque fois où une contribution est faite et on détermine le taux d'intérêt pour chaque intervalle intermédiaire.

Le taux d'intérêt de l'intervalle k est

$$j_k = \frac{B'_k}{B'_{k-1} + C'_{k-1}}.$$

Le taux de rendement est obtenu selon la relation

$$1+i = (1+j_1)(1+j_2) \dots (1+j_m).$$

Deuxième partie

Mathématiques actuarielles vie

1 | Distributions de survie

1.1 | Résumé de la notation

Symbole	Description
(x)	âge de x
$[x]$	âge à la sélection de x
X	v.a. de l'âge au décès
$T(x)$	v.a. de la vie de (x) , aussi $X - x$
$K(x)$	v.a. de la vie entière de x , aussi $\lfloor T(x) \rfloor$
$S(x)$	v.a. de la partie fractionnaire de l'âge au décès, aussi $T(x) - K(x)$

Symbole	Description	
$s(x)$	fonction de survie d'un nouveau né	$\bar{F}_X(x)$
$\mu(x)$	force de mortalité	$\frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}$
$\mu_x(t)$	force de mortalité pour une sélection à l'âge x	
${}_tq_x$	probabilité que (x) décède dans les t prochaines années	$\Pr(T(x) \leq t)$
${}_tp_x$	probabilité que (x) survive les t prochaines années	$\Pr(T(x) > t)$
${}_t uq_x$	probabilité que (x) survive t mais décède avant $t + u$	$\Pr(t < T(x) < t + u)$
\dot{e}_x		$E[T(x)]$
e_x		$E[K(x)]$

Autres relations :

$$\text{— } \Pr(K(x) = k) = {}_kp_xq_{x+k} = {}_k|q_x$$

$$\text{— } F_{K(x)}(y) = \sum_{h=0}^{\lfloor y \rfloor} {}_h|q_x$$

Outil	Relations			
	$F_X(x)$	$s(x)$	$f_X(x)$	$\mu(x)$
$F_X(x)$		$1 - F_X(x)$	$F'_X(x)$	$\frac{F'_X(x)}{1 - F_X(x)}$
$s(x)$	$1 - s(x)$		$-s'(x)$	$-\frac{s'(x)}{s(x)}$
$f_X(x)$	$\int_0^x f_X(t)dt$	$\int_x^\infty f_X(t)dt$		$\frac{f_X(x)}{\int_x^\infty f_X(t)dt}$
$\mu(x)$	$1 - \exp\left\{-\int_0^x \mu(t)dt\right\}$	$\exp\left\{-\int_0^x \mu(t)dt\right\}$	$\mu(x) \exp\left\{-\int_0^x \mu(t)dt\right\}$	

1.2 | Relations avec tables de mortalité

On peut obtenir la probabilité de décès avec la relation

$${}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}.$$

Soit

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{si l'assuré } j \text{ survie jusqu'à } x \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Symbole	Description	Formule
l_0	nombre initial de nouveaux nés dans la cohorte	
$\mathcal{L}(x)$	v.a. du nombre de survivants d'une cohorte à l'âge x	$\sum_{j=1}^{l_0} I_j$
${}_n\mathcal{D}_x$	v.a. du nombre de décès entre les âges x et $x+n$ d'une cohorte	$E[\mathcal{L}(x)]$
l_x		$E[{}_n\mathcal{D}_x] = l_x - l_{x+n}$
${}_nd_x$		
m_x	âge centrale au décès	
ω	Oméga, l'âge limite d'une table de mortalité	

De plus, $\mathcal{L}(x) \sim \text{Bin}(l_0, s(x))$.

1.3 | Groupe de survie déterministe

Définition 1.3.1

Un groupe de survie déterministe, représenté par une table de mortalité, a les caractéristiques suivantes :

- le groupe contient l_0 nouveaux nés initialement
- les membres sont sujets à taux de mortalité q_x pour chaque année de leur vie

— le groupe est fermé, la taille du groupe change seulement si un membre est décédé.

Récursion avec probabilités de décès :

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0(1 - q_0) \\ l_2 &= l_1(1 - q_1) \\ l_3 &= l_2(1 - q_2) \\ &\vdots \\ l_x &= l_{x-1}(1 - q_{x-1}) = l_0(1 - q_0) \dots (1 - q_{x-1}). \end{aligned}$$

Récursions avec probabilités de survie :

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0 p_0 \\ l_2 &= l_1 p_1 = l_0 p_0 p_1 \\ l_3 &= l_2 p_2 = l_0 p_0 p_1 p_2 \\ &\vdots \\ l_x &= l_{x-1} p_{x-1} = l_0 \prod_{y=0}^{x-1} p_y. \end{aligned}$$

1.4 | Autres caractéristiques

$$\begin{aligned} e_x = E[T(x)] &= \int_0^\infty t {}_t p_x \mu(x+t) dt \\ &= \int_0^\infty {}_t p_x dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[T(x)^2] &= \int_0^\infty t^2 {}_t p_x \mu(x+t) dt \\ &= \int_0^\infty 2t {}_t p_x dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_x = E[K(x)] &= \sum_{k=0}^\infty k {}_k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^\infty {}_k p_x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[K(x)^2] &= \sum_{k=0}^\infty k^2 {}_k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^\infty (2k-1) {}_k p_x. \end{aligned}$$

1.4.1 | Relations de récursion

Définition 1.4.1

La formule de récursion arrière est sous la forme

$$u(x) = c(x) + d(x)u(x+1)$$

La formule de récursion avant est sous la forme

$$u(x+1) = -\frac{c(x)}{d(x)} + \frac{1}{d(x)}u(x)$$

Exemple 1.4.1 : Trouver la relation de récursion arrière pour e_x .

On a

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x.$$

On sort le premier terme de la relation et on obtient

$$e_x = p_x + \sum_{k=2}^{\infty} {}_k p_x.$$

On applique un glissement d'indices et on obtient

$$e_x = p_x + \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{x+1} = p_x + p_x e_{x+1}.$$

On conclut que $u(x) = e_x$, $c(x) = p_x$ et $d(x) = p_x$. Le point de départ est $u(\omega) = 0$.

1.5 | Hypothèses pour les âges fractionnaires

On utilise l'interpolation linéaire pour les âges fractionnaires, c.-à-d.

$$s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1).$$

Cette méthode est appelée distribution uniforme des décès (DUD).

Fonction	Hypothèse
${}_t q_x$	$\frac{{}_t q_x}{q_x}$
$\mu(x+t)$	$\frac{1 - {}_t q_x}{(1-t)q_x}$
${}_{1-t} q_{x+t}$	$\frac{1 - {}_t q_x}{{}_y q_x}$
${}_y q_{x+t}$	$\frac{1 - {}_t q_x}{1 - {}_t q_x}$
${}_t p_x$	$1 - {}_t q_x$
${}_t p_x \mu(x+t)$	q_x

1.6 | Lois analytique de survie

Nom	$\mu(x)$	$s(x)$
De Moivre	$(\omega - x)^{-1}$	$1 - \frac{x}{\omega}$
Gompertz	Bc^x	$\exp \left\{ -\frac{B}{\log c} (c^x - 1) \right\}$
Makeham	$A + Bc^x$	$\exp \left\{ -Ax - \frac{B}{\log c} (c^x - 1) \right\}$
Weibull	kx^n	$\exp \left\{ -\frac{k}{n+1} x^{n+1} \right\}$

1.7 | Tables de mortalité sélectes et ultimes

Pour un assuré observé à (x) , on pourrait penser avoir plus d'information qu'un assuré observé plus tôt mais qui a survécu jusqu'à x . Alors, on se définit une table de mortalité sélecte pour les assurés observés à (x) . On note cette sélection dans la notation comme $[x]$.

- Pendant r années (la période de sélection), on a $q_{[x]+1} \neq q_{x+1}$.
- Après r années, on a $q_{[x]+r+1} = q_{x+r+1}$.

2 | Assurance vie

2.1 | Assurance continue

La variable aléatoire qui représente l'assurance vie est notée $Z = b_T v_T$, où b_t est une fonction de prestation et v_t est une fonction d'escompte. La variable aléatoire T représente la durée de vie de l'assuré, comme présenté dans le chapitre sur les distributions de survie.

Définition 2.1.1 : Assurance vie temporaire n -années

Cette assurance paie 1 si l'assuré décède pendant les n premières années et 0 sinon. La variable aléatoire est

$$Z = \begin{cases} v^T, & T \leq n \\ 0, & T > n \end{cases}$$

L'espérance de cette variable aléatoire est

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = E[Z] = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_x(t) dt.$$

Le $j^{\text{ème}}$ moment est

$${}_j \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = E[Z^j] = \int_0^n (v^t)^j {}_t p_x \mu_x(t) dt,$$

donc est égal au premier moment mais où la force d'intérêt est multipliée par j . De plus, on a

$$F_Z(x) = \begin{cases} \bar{F}_{T_x}(n), & x = 0 \\ \bar{F}_{T_x}(n), & 0 < x < bv^n \\ \bar{F}_{T_x}\left(-\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{x}{b}\right)\right), & bv^n < x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

On déduit que

$$VaR_{\kappa}(Z) = \begin{cases} 0, & 0 < \kappa < \bar{F}_{T_x}(n) \\ bv^{VaR_{1-\kappa}(T_x)}, & \bar{F}_{T_x}(n) < \kappa < 1 \end{cases}$$

et

$$TVaR_{\kappa}(Z) = \begin{cases} \frac{1}{1-\kappa} b\bar{A}_{x:\overline{n}|}, & 0 < \kappa < {}_n p_x \\ \frac{1}{1-\kappa} b\bar{A}_{x:\overline{VaR_{1-\kappa}(T_x)}|}, & {}_n p_x < \kappa < 1 \end{cases}$$

Définition 2.1.2 : Assurance vie complète

La variable aléatoire pour une assurance vie complète est

$$Z = v^T, t \geq 0.$$

C'est un cas particulier de l'assurance vie temporaire avec $n \rightarrow \infty$. On a

$${}^j\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^{jt} {}_t p_x \mu_x(t) dt.$$

Définition 2.1.3 : Capital différé

Un capital différé verse une prestation après n années si l'assuré a survécu les n années. La v.a. est

$$Z = \begin{cases} 0 & , T \leq n \\ v^n & , T > n \end{cases}$$

La notation est

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = {}_n E_x = v^n {}_n p_x.$$

Définition 2.1.4 : Assurance capital différé (assurance mixte)

Une assurance capital différé verse une prestation au décès ou après n années. La v.a. est

$$Z = \begin{cases} 0 & , T \leq n \\ v^n & , T > n \end{cases}$$

La notation est

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = {}_n E_x = v^n {}_n p_x.$$

2.2 | Assurance discrète

Une assurance discrète est une assurance payable à la fin de l'année de décès.

Définition 2.2.1

La variable aléatoire pour une assurance temporaire n années est

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

L'espérance de la valeur actualisée de cette variable aléatoire est

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

Avec la règle des moments, on a

$$\text{Var}(Z) = {}^2A_{x:\overline{n}|}^1 - (A_{x:\overline{n}|}^1)^2,$$

où

$${}^2A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2k+2} {}_k p_x q_{x+k}$$

Des relations de récursion existent aussi pour une assurance discrète :

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = vq_x + vp_x A_{x+1:\overline{n-1}|}^1$$

Intuition : une assurance temporaire n années est égale à une assurance temporaire un an plus une assurance temporaire $n-1$ ans à un assuré d'âge $x+1$ dans un an.

Définition 2.2.2

La variable aléatoire pour une assurance capital différé payable à la fin de l'année est

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ v^n, & K = n, n+1, \dots \end{cases}$$

La valeur actuarielle actualisée est

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + v^n {}_n p_x$$

2.3 | Relation entre l'assurance payable au moment du décès et la fin de l'année

Avec l'hypothèse DUD, on a

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x.$$

De manière similaire, on a

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x.$$

3 | Rentes

Définition 3.0.1

Une rente vie-entière paie des prestations jusqu'à la mort de l'individu. La variable aléatoire correspondant à la valeur actualisée de cette rente est

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|}.$$

La fonction de répartition est

$$F_Y(y) = F_T\left(\frac{-\log(1 - \delta y)}{\delta}\right), \quad 0 < y < \frac{1}{\delta}$$

et la fonction de densité est

$$\frac{1}{1 - \delta y} f_T\left(\frac{-\log(1 - \delta y)}{\delta}\right), \quad 0 < y < \frac{1}{\delta}.$$

La valeur actualisée est

$$\bar{a}_x = E[Y] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty v^t p_x dt = \int_0^\infty {}_tE_x dt.$$

On peut définir des relations de récursion comme

$$\bar{a}_x = a_{x:\overline{1}|} + v p_x \bar{a}_{x+1}.$$

Savoir interpréter ces relations (Une rente vie entière est une rente temporaire un an plus une rente vie entière dans un an, si l'assuré survit un an).

De la définition de la rente continue, on avait

$$\bar{a}_{\overline{t}|} = \frac{1 - v^t}{\delta}.$$

En prenant l'espérance des deux côtés de l'équation, on obtient la relation

$$\bar{a}_x = \frac{1 - A_x}{\delta}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} Var(\bar{a}_{\overline{T}|}) &= Var\left(\frac{1 - v^T}{\delta}\right) \\ &= \frac{Var(v^T)}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} \end{aligned}$$

3.1 | Rentes discrètes

Définition 3.1.1 : Rente-due vie entière

On considère une rente qui paie 1 au début de chaque période chaque année où (x) survit. La variable aléatoire de la valeur actualisée est

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}.$$

La valeur actuarielle actualisée est

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} k p_x q_{k+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k k p_x.$$

La relation avec une rente discrète est

$$\frac{1 - A_x}{d}.$$

3.1.1 | Rente temporaire

Définition 3.1.2 : Rente temporaire n années

La variable aléatoire de la valeur actualisée pour une rente temporaire est

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & 0 \leq K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases}$$

L'espérance de cette variable aléatoire est

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} k p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|} n p_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k k p_x.$$

On a la relation

$$\frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}.$$

Définition 3.1.3 : Rente différée n années

Une rente différée n années paie 1 au début de chaque année lorsque (x) survit, à partir de l'âge $x + n$. La variable aléatoire est

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \leq K < n \\ {}_n| \ddot{a}_{\overline{K+1-n}|}, & K \geq n \end{cases}$$

L'espérance de la variable aléatoire est

$${}_n|a_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_k p_x = {}_n E_x \ddot{a}_{x+n} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}.$$

Définition 3.1.4 : Rente viagère garantie n années

Une rente viagère garantie n années paie une rente certaine pour n ans (peu importe si l'assuré survit ou non) et continue les paiements jusqu'au décès. La variable aléatoire de la valeur actualisée des paiements est

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}, & 0 \leq K < n \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & K \geq n \end{cases}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} q_x + \sum_{k=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} {}_k p_x q_{x+k} = \ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

3.1.2 | Rentes payables en fin d'année

Des versions fin de période sont disponibles pour les rentes. La variable aléatoire qui représente la valeur actualisée des paiements de ces rentes de type

$$Y = a_{\overline{T}|}$$

et l'espérance de cette variable aléatoire est

$$a_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x q_{x+k} a_{\overline{k}|} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x.$$

Le lien entre cette variable aléatoire et une assurance est

$$a_x = \frac{1 - (1+i)A_x}{i}.$$

3.2 | Rentes payables m fois par année

Définition 3.2.1

Une rente qui paie m fois par année le montant $\frac{1}{m}$ chaque période où l'assuré survit est noté $\ddot{a}_x^{(m)}$. La variable aléatoire de la valeur actualisée est

$$Y = \sum_{j=0}^{mK+J} \frac{1}{m} v^{j/m} = \ddot{a}_{\overline{K+(J+1)/m}|}^{(m)} = \frac{1 - v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}},$$

où K est le nombre d'années complètes et $J + 1$ est le nombre de paiements faits dans l'année de décès. L'espérance de cette variable aléatoire est

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{\infty} v^{h/m} {}_{h/m}p_x = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}.$$

3.2.1 | Approximations

On peut utiliser des approximations sur la mortalité pour obtenir des approximations des rentes payables m fois par année à partir des rentes payables une fois par année.

Proposition 3.2.2

Sous DUD, on a

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m) \times \ddot{a}_x^{(1)} - \beta(m),$$

où

$$\alpha(m) = s_{\overline{1}|}^{(m)} \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)}$$

et

$$\beta(m) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}}$$

Proposition 3.2.3

Sous l'hypothèse que $v^{k+j/m} {}_{k+j/m}p_x$ est linéaire, on a

$$\alpha(m) = 1$$

et

$$\beta(m) = \frac{m - 1}{2m}$$

Connaître la preuve des propositions 3.2.2 et 3.2.3.

4 | Primes

Ce chapitre s'intéresse aux primes d'assurance ou de rentes.

4.1 | Principes de primes

Les primes sont souvent basés sur le principe d'équivalence.

Définition 4.1.1

Le principe d'équivalence requiert que l'espérance de la perte L soit nulle, c'est-à-dire

$$E[L] = 0.$$

Les primes qui satisfont le principe d'équivalence sont appelés des primes nettes.

On a

$$E[\text{valeur actualisée de la prestation}] = E[\text{valeur actualisée des primes}]$$

Un autre principe de prime est la prime percentile, où la prime est déterminée de telle sorte que la probabilité d'avoir une perte positive est plus petite qu'un seuil α .

4.2 | Primes pour des contrats continus

La valeur actualisée de la perte de l'assureur est

Troisième partie

Distributions de sinistres

1 | Quantités distributionnelles de base

Voir [Klugman et al., 2012], section 3.4

1.1 | Queues des distributions

- Classification basée sur les moments
 - Une manière de classer des distributions est basé sur le nombre de moments qui existent. Une distribution dont tous les moments existent (la FGM existe) est à queue légère.
- Comparaisons basée sur le comportement de queue limite
 - Pour deux distributions avec la même moyenne, une distribution a une queue plus lourde que l'autre si le ratio des fonctions de survie diverge à l'infini.
- Classification basée sur la fonction de hazard
 - Les distributions avec une fonction de hazard décroissante a une queue lourde
 - Les distributions avec une fonction de hazard croissante a une queue légère
 - Une distribution a une queue plus légère que l'autre si sa fonction de hazard augmente à plus rapidement que l'autre.
 - Rappel :

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}, \quad S(x) = \exp \left\{ - \int_0^x h(y) dy \right\}$$

- Classification basée sur la fonction d'excès moyen
 - Si la fonction d'excès moyen est croissante en d , la distribution a une queue lourde.
 - Si la fonction d'excès moyen est décroissante en d , la distribution a une queue légère.
 - On peut comparer deux distributions basé sur le taux de croissance ou décroissance de la fonction d'excès moyen.
 - Rappel :

$$e_X(d) = E[X - d | X > d] = \frac{\int_d^\infty S(x) dx}{S(d)}$$

- Distributions d'équilibre et comportement de queue
 - Distribution d'équilibre
 - $f_e(x) = \frac{S(x)}{E[X]}, \quad x \geq 0$
 - $S_e(x) = \frac{\int_x^\infty S(t) dt}{E[X]}, \quad x \geq 0$

$$— h_e(x) = \frac{f_e(x)}{S_e(x)} = \frac{S(x)}{\int_x^\infty S(t)dt} = \frac{1}{e(x)}$$

- Lire le texte pour le lien entre la fonction de hazard, la fonction d'excès moyen et la lourdeur de la queue

2 | Caractéristiques des modèles actua- riels

Voir [Klugman et al., 2012],

Dans ce chapitre, les modèles sont caractérisés par combien d'information est nécessaire pour spécifier le modèle. Le nombre de paramètre donne une indication de la complexité du modèle.

2.1 | Distributions paramétriques et d'échelle

Définition 2.1.1 : Distributiob paramétrique

Ensemble de distributions déterminée par une ou plus valeurs appelé(s) paramètre. Le nombre de paramètre est fixe et connu

Définition 2.1.2 : Distribution d'échelle

Si une variable aléatoire est multipliée par une constante positive, et que la nouvelle variable aléatoire est dans le même ensemble de distirbutions, elle est dite une distribution d'échelle.

Définition 2.1.3 : Paramètre d'échelle

Un paramètre d'échelle satisfait deux conditions :

1. Lorsqu'une distribution d'échelle est multipliée par une constante, ce paramètre d'échelle est multiplié par la même constante.
2. Tous les autres paramètres de la distribution restent inchangés (le paramètre d'échelle absorbe tout le changement d'échelle).

2.2 | Familles de distributions paramétriques

Définition 2.2.1 : Familles de distributions paramétriques

Ensemble de distributions qui sont reliées de manière significative. Exemple : la loi exponentielle est un cas particulier de la loi gamma avec $\alpha = 1$. Alors, la loi exponentielle est reliée de manière significative avec la loi gamma.

2.3 | Distribution de mélange fini

Définition 2.3.1 : Mélange k -point

Une distribution est un mélange k -point si

$$F_Y(y) = a_1 F_{X_1}(y) + a_2 F_{X_2}(y) + \cdots + a_k F_{X_k}(y)$$

avec $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1$.

Définition 2.3.2 : Mélange à composante variable

Une distribution mélange k -point où K n'est pas fixé.

$$— F(x) = \sum_{j=1}^K a_j F_j(x)$$

$$— \sum_{j=1}^K a_j = 1, \quad a_j > 0, j = 1, \dots, K, \quad K = 1, 2, \dots$$

— Le nombre de paramètres est la somme des paramètres de chaque distribution plus $(K-1)$ car le dernier paramètre a_k peut être calculé avec $1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{K-1}$.

Ce modèle est appelé semi-paramétrique car sa complexité est entre un modèle paramétrique et non-paramétrique

2.4 | Distributions dépendantes des données

- Une distribution dépendante des données est au moins aussi compliqué que les données ou l'information produites par ces données.
- Le nombre de paramètres augmente lorsque le nombre de données augmente
- Exemple : un modèle empirique est une distribution discrète basée sur la taille échantillonnale n qui assigne une probabilité $\frac{1}{n}$ à chaque point
- Exemple : modèle de lissage à noyau

3 | Distributions continues

3.1 | Créer des nouvelles distributions

3.1.1 | Multiplication par une constante

Théorème 3.1.1

Soit X , une variable aléatoire continue. Soit $Y = \theta X$ avec $\theta > 0$. Alors,

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{y}{\theta}\right)$$

Le paramètre θ est un paramètre d'échelle pour la variable aléatoire Y .

3.1.2 | Création de distributions en élevant à une puissance

Théorème 3.1.2

Soit X , une variable aléatoire continue et $F_X(0) = 0$. Soit $Y = X^{1/\tau}$. Alors,

— si $\tau > 0$, on a

$$F_Y(y) = F_X(y^\tau) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau), \quad y > 0;$$

— si $\tau < 0$, on a

$$F_Y(y) = 1 - F_X(y^\tau) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = -\tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau), \quad y > 0.$$

- Lorsqu'on prend une distribution avec puissance $\tau > 0$, elle est appelée transformée.
- Lorsqu'on prend une distribution avec puissance $\tau = -1$, elle est appelée inverse.
- Lorsqu'on prend une distribution avec puissance $\tau < 0$, $\tau \neq -1$, elle est appelée inverse-transformée.

3.1.3 | Création de distributions avec exponentiation

Théorème 3.1.3

Soit X , une variable aléatoire continue et $f_X(x) > 0$ sur le domaine de x . Soit $Y = e^X$. Alors, pour $y > 0$, on a

$$F_Y(y) = F_X(\ln y) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln y).$$

3.1.4 | Mélange

Théorème 3.1.4

Soit X , une variable aléatoire avec fonction de densité $f_{X|\Lambda}(x|\lambda)$ et fonction de répartition $F_{X|\Lambda}(x|\lambda)$, où λ est un paramètre de X . La fonction de densité inconditionnelle de X est

$$f_X(x) = \int f_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

et la fonction de répartition est

$$F_X(x) = \int F_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda.$$

Autres résultats :

- $E[X^k] = E_\Lambda[E(X^k|\Lambda)]$
- $Var(X) = E[Var(X|\Lambda)] + Var(E[X|\Lambda])$

Les modèles de mélange tendent à créer des distributions à queue lourde. En particulier, si la fonction de hasard de $f_{X|\Lambda}$ est décroissante pour tout λ , la fonction de hasard sera aussi décroissante.

3.1.5 | Modèles à fragilité

Mise en place :

- Soit une variable aléatoire de fragilité $\Lambda > 0$
- Soit une fonction de hasard conditionnelle $h_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \lambda a(x)$, où $a(x)$ est une fonction connue.
- La fragilité quantifie l'incertitude de la fonction de hasard.

La fonction de survie conditionnelle de $X|\Lambda$ est

$$S_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \exp \left\{ - \int_0^x h_{X|\Lambda}(t|\lambda) dt \right\} = e^{-\lambda A(x)},$$

où $A(x) = \int_0^x a(t) dt$. Alors, la fonction de survie inconditionnelle est donnée par

$$S_X(x) = E[e^{-\Lambda A(x)}] = M_\Lambda(-A(x))$$

3.1.6 | Raccordement de distributions connues

Si plusieurs processus séparés sont responsables pour générer les pertes

Définition 3.1.5

Une distribution de raccordement à k composantes a une fonction de densité qui peut être exprimé sous la forme

$$f_X(x) = \begin{cases} a_1 f_1(x), & c_0 \leq x \leq c_1 \\ a_2 f_2(x), & c_1 \leq x \leq c_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_k f_k(x), & c_{k-1} \leq x \leq c_k \end{cases}$$

Pour $j = 1, 2, \dots, k$, chaque a_j doit être positif, f_j doit être une fonction de densité avec toute sa masse sur (c_{j-1}, c_j) et $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$.

3.2 | Familles de distributions et leurs liens

Connaître les familles de distribution beta transformée et gamma inverse/transformée.

3.2.1 | Distributions limites

On peut parfois comparer les familles des distributions basé sur des cas particuliers des familles. Dans d'autres situations, on doit étudier les distributions quand des paramètres tendent vers 0 ou l'infini.

Exemples :

- La distribution gamma est un cas limite de la distribution beta transformée avec $\theta \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow \infty$ et $\frac{\theta}{\alpha^{1/\gamma}} \rightarrow \xi$, une constante.

3.3 | Théorie des valeurs extrêmes

3.3.1 | Distributions à valeur extrêmes (DVE)

Définition 3.3.1 : La distribution Gumbel

La distribution Gumbel standard a la fonction de répartition

$$F(x) = G_0(x) = \exp[-\exp(-x)], \quad -\infty < x < \infty.$$

Avec les paramètres de location et d'échelle, on a

$$F(x) = G_{0,\mu,\theta}(x) = \exp \left[-\exp \left(-\frac{x-\mu}{\theta} \right) \right], \quad -\infty < x < \infty, \theta > 0.$$

Définition 3.3.2 : La distribution de Fréchet

La distribution de Fréchet standard a la fonction de répartition

$$F(x) = G_{1,\alpha}(x) = \exp(-x^{-\alpha}), \quad x \geq 0, \alpha > 0,$$

où α est un paramètre de forme.

Avec les paramètres de location et d'échelle, on a

$$F(x) = G_{1,\alpha,\mu,\theta}(x) = \exp \left[-\left(\frac{x-\mu}{\theta} \right)^{-\alpha} \right], \quad x \geq \mu, \alpha > 0.$$

On note que le support de la distribution de Fréchet est pour x supérieur au paramètre de location.

Définition 3.3.3 : La distribution Weibull

La distribution de Weibull standard a la fonction de répartition

$$F(x) = G_{2,\alpha}(x) = \exp \left[-(-x)^{-\alpha} \right], \quad x \leq 0, \alpha < 0.$$

Avec les paramètres de location et d'échelle, on a

$$F(x) = G_{2,\alpha,\mu,\theta}(x) = \exp \left[-\left(-\frac{x-\mu}{\theta} \right)^{-\alpha} \right], \quad x \leq \mu, \alpha < 0.$$

On note :

- Cette distribution n'est pas la même que la distribution Weibull couramment utilisée en actuariat
- Cette distribution a un support pour x inférieur au paramètre de location μ
 - Pour cette raison, cette distribution n'est pas utilisée en actuariat.

Définition 3.3.4 : La distribution de valeurs extrêmes généralisée

La distribution de valeurs extrêmes généralisée incorpore les trois distributions à valeur extrême comme cas particuliers. L'expression de la fonction de répartition est

$$F(x) = \exp \left[-\left(1 + \frac{x}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right]$$

ou (notation équivalente)

$$F(x) = \exp \left[- (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}} \right]$$

- Pour $\gamma \rightarrow 0$, on obtient la distribution Gumbel
- Pour $\gamma > 0$, on obtient la distribution Fréchet
- Pour $\gamma < 0$, on obtient la distribution Weibull

3.3.2 | Distribution du maximum

Soit M_n , la variable aléatoire qui correspond à la valeur maximale de n observations d'une variable aléatoire. Si on a n observations d'une variable aléatoire iid, la fonction de répartition du maximum est

$$F_n(x) = \Pr(M_n \leq x) = \Pr(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \stackrel{\text{ind}}{=} \prod_{i=1}^n \Pr(X_i \leq x) = [F_X(x)]^n.$$

Les deux premiers moments sont

$$E[M_n] = \int_0^\infty [1 - F_X^n] dx;$$

$$E[M_n^2] = 2 \int_0^\infty x[1 - F_X^n] dx.$$

Si le nombre n est inconnu, N est une variable aléatoire. On a

$$\begin{aligned} F_{M_N}(x) &= \Pr(M_N \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(M_N \leq x | N = n) \Pr(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_X(x)^n \Pr(N = n) \\ &= P_N[F_X(x)]. \end{aligned}$$

3.3.3 | Stabilité du maximum des DVE

On peut montrer que la distribution du maximum des DVE, après normalisation du paramètre de location ou d'échelle, est la même DVE.

3.3.4 | Théorème Fisher-Tippett

4 | Distributions discrètes

4.1 | Notation et rappels

- $p_k = \Pr(N = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$
- $P(z) = P_N(z) = E[z^N] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$
- $p_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dz^m} P(z) \Big|_{z=0}$

4.2 | Loi Poisson

- $p_k = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$
- $P(z) = e^{\lambda(z-1)}, \quad \lambda > 0.$
- $E[N] = \lambda$
- $Var(N) = \lambda$
- Équidispersion (moyenne = variance)

Théorème 4.2.1

Soit N_1, N_2, \dots, N_n , des v.a. Poisson avec paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Alors, $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$ est Poisson avec paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

Preuve : produit des fgp.

Théorème 4.2.2

Supposons que le nombre d'évènements N est Poisson avec moyenne λ . De plus, supposons que chaque évènement peut être classifié en m types avec probabilité p_1, p_2, \dots, p_m indépendant des autres évènements. Alors, le nombre d'évènements N_1, N_2, \dots, N_m correspondent au types d'évènements $1, 2, \dots, m$ respectivement sont des distributions Poisson mutuellement indépendants

avec moyennes $\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_m$.

- Idée de la preuve :
 - Pour N fixé, la distribution conjointe de (N_1, N_2, \dots, N_m) est multinomiale. La fonction de densité multivariée correspond au produit de Poissons.
 - La marginale de N_j est Poisson.
 - Le cas 1 égal le produit des cas 2, donc ils sont mutuellement indépendants.
- Utile pour ajouter ou retirer une couverture d'assurance (λ ne change pas)
- Utile pour déductibles ou franchises : les risques en haut de la franchise sont Poisson.

4.3 | Loi binomiale négative

- Surdispersion (variance > moyenne)
- On peut retrouver la binomiale négative avec une loi mélange (Poisson + gamma)
- La loi Poisson est un cas limite de la binomiale négative ($r \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0, r\beta$ demeure constant).

Un cas particulier est la géométrie ($r = 1$)

- Sans mémoire
- Cas exponentiel : Given that a claim exceeds a certain level d , the expected amount of the claim in excess of d is constant and so does not depend on d .
- Cas géométrique : Given that there are at least m claims, the probability distribution of the number of claims in excess of m does not depend on m .
- Si $r > 1$, on considère que la distribution a une queue légère.
- Si $r < 1$, on considère que la distribution a une queue lourde.

4.4 | Loi binomiale

- Sousdispersion (moyenne > variance)

4.5 | La classe $(a, b, 0)$

Définition 4.5.1 : La classe $(a, b, 0)$

Une v.a. est membre de la classe $(a, b, 0)$ s'il existe des constantes a et b tels que

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots'$$

Distribution	a	b	p_0
Poisson	0	λ	$e^{-\lambda}$
Binomiale	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$(1-q)^m$
Binomiale négative	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1+\beta)^{-r}$
Géométrique	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1+\beta)^{-1}$

Outil diagnostique pour déterminer la loi à utiliser : en utilisant la relation

$$k \frac{p_k}{p_{k-1}} = ak + b,$$

faire un graphique de

$$k \frac{\hat{p}_k}{\hat{p}_{k-1}} = k \frac{n_k}{n_{k-1}}.$$

- Si la droite est plate, on a $a = 0 \Rightarrow$ Poisson
- Si la droite est négative, on a $a < 0 \Rightarrow$ Binomiale
- Si la droite est positive, on a $a > 0 \Rightarrow$ Binomiale négative.

5 | Fréquence et sévérité avec modifications de la couverture

- Par perte (Per-loss) : Y^L
- Par paiement (Per-payment) : Y^P
- $Y^P = Y^L | Y^L > 0$.
- En général, diviser Y^L par $S_X(d)$ pour obtenir Y^P

5.1 | Déductibles

Définition 5.1.1 : Déductible ordinaire

Un déductible ordinaire transforme la variable en excès-moyen ou en variable translatée. On a

$$Y^P = \begin{cases} \text{indéfini}, & X \leq d, \\ X - d, & X > d \end{cases}$$

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X - d, & X > d \end{cases}$$

Relations :

	Y^P	Y^L
densité	$\frac{f_X(y+d)}{S_X(d)}$	$f_X(y+d)$
survie	$\frac{S_X(y+d)}{S_X(d)}$	$S_X(y+d)$
répartition	$\frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{S_X(d)}$	$F_X(y+d) - F_X(d)$
hasard	$\frac{f_X(y+d)}{S_X(y+d)} = h_{X(y+d)}$	indéfinie à 0, donc indéfinie
moyenne	$\frac{E[X] - E[X \wedge d]}{S(d)}$	$E[X] - E[X \wedge d]$

Définition 5.1.2 : Déductible franchise

Un déductible franchise paie le montant au complet si la franchise est atteinte. On a

$$Y^P = \begin{cases} \text{indéfini}, & X \leq d, \\ X, & X > d \end{cases}$$

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X, & X > d \end{cases}$$

	Y^P	Y^L
densité	$\frac{f_X(y)}{S_X(d)}, y > d$	$\begin{cases} F_X(d), & y = 0 \\ f_X(y), & y > d \end{cases}$
survie	$\begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq d \\ \frac{S_X(y)}{S_X(d)}, & y > d \end{cases}$	$\begin{cases} S_X(d), & 0 \leq y \leq d \\ S_X(y), & y > d \end{cases}$
répartition	$\begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq d \\ \frac{F_X(y) - F_X(d)}{S_X(d)}, & y > d \end{cases}$	$\begin{cases} F_X(d), & 0 \leq y \leq d \\ F_X(y), & y > d \end{cases}$
hasard	$\begin{cases} 0, & 0 < y < d \\ h_X(y), & y > d \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & 0 < y < d \\ h_X(y), & y > d \end{cases}$
moyenne	$\frac{E[X] - E[X \wedge d]}{S(d)} + d$	$E[X] - E[X \wedge d] + d[S(d)]$

5.2 | Ratio d'élimination de perte et effet de l'inflation sur les déductibles ordinaires

Définition 5.2.1 : Ratio d'élimination de pertes

Le ratio d'élimination de pertes est le ratio de la décroissance en paiement espéré avec un déductible ordinaire versus un paiement espéré sans déductible :

$$\frac{E[X \wedge d]}{E[X]}$$

Théorème 5.2.2

Pour un déductible ordinaire d après inflation uniforme de $1 + r$, l'espérance du coût par perte est

$$(1 + r) \left\{ E[X] - E \left[X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right\}$$

Si $F\left(\frac{d}{1+r}\right) < 1$, l'espérance du coût par paiement est

$$\frac{(1 + r) \left\{ E[X] - E \left[X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right\}}{S\left(\frac{d}{1+r}\right)}.$$

Savoir le prouver.

5.3 | Limites de polices

Définition 5.3.1

Une police avec limite u paie la perte complète si la perte est inférieure à u , et u si la perte est supérieure à u . On a

$$Y = \begin{cases} Y, & y < u \\ u, & y \geq u. \end{cases}$$

Quelques résultats :

$$— F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y < u \\ 1, & y \geq u. \end{cases}$$

$$— f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y), & y < u \\ 1 - F_X(u), & y = u. \end{cases}$$

— Pour une limite de police u , après inflation uniforme $1 + r$, le coût espéré est

$$(1 + r)E \left[X \wedge \frac{u}{1 + r} \right]$$

5.4 | Coassurance, déductibles et limites

Dans le cas où la compagnie paie une portion α de la perte, la variable aléatoire est $Y = \alpha X$. La variable aléatoire qui incorpore les quatre modifications du chapitre est

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X < \frac{d}{1+r} \\ \alpha [(1+r)X - d], & \frac{d}{1+r} \leq X < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u - d), & X \geq \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

On note que les quantités sont appliqués dans un ordre particulier : la coassurance est appliquée en dernier.

Théorème 5.4.1 : Quelques moments pour les modifications

Le premier moment par perte est

$$E[Y^L] = \alpha(1+r) \left\{ E \left[X \wedge \frac{u}{1+r} \right] - E \left[X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right\}$$

et le premier moment par paiement est

$$E[Y^P] = \frac{E[Y^L]}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}.$$

Le deuxième moment par perte est

$$E[(Y^L)^2] = \alpha^2(1+r)^2 \{ E[(X \wedge u^*)^2] - E[(X \wedge d^*)^2] - 2d^* E[X \wedge u^*] + 2d^* E[X \wedge d^*] \},$$

où

$$u^* = \frac{u}{1+r} \quad \text{et} \quad d^* = \frac{d}{1+r}.$$

Pour par-paiement, on a

$$E[(Y^L)^2] = \frac{E[(Y^L)^2]}{1 - F_X(d^*)}.$$

Preuve : facile, manipuler les mins et max et prendre l'espérance. À connaître.

Méthode générale pour calculer les moments :

$$E[g(x)] = \int_R g(x)f(x)dx = \int_R g'(x)S(x)dx.$$

La dérivée simplifie souvent l'intégrale.

6 | Rappel des notions de mathématiques statistiques

6.1 | Estimation ponctuelle

Dans cette section, on s'intéresse à produire une seule valeur pour déterminer la la valeur d'une quantité pour une population inconnue.

6.1.1 | Mesures de qualité

Définition 6.1.1 : Biais

Un estimateur $\hat{\theta}$ est sans biais si $E[\hat{\theta}|\theta] = \theta, \forall \theta$. Le biais est

$$\text{bias}_{\hat{\theta}}(\theta) = E[\hat{\theta}|\theta] - \theta.$$

Définition 6.1.2 : Biais asymptotique

Soit $\hat{\theta}_n$, un estimateur de θ basé sur un échantillon de taille n . L'estimateur est asymptotiquement sans biais si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}_n|\theta] = \theta, \forall \theta.$$

Définition 6.1.3 : Convergence

Un estimateur est convergent si, pour tout $\delta > 0$ et pour tout θ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(|\hat{\theta}_n - \theta| > \delta) = 0.$$

- Une condition suffisante (mais pas nécessaire) est que l'estimateur soit asymptotiquement sans biais et $\text{Var}(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$.
- Critique : le choix de δ est parfois arbitraire.

Définition 6.1.4 : Erreur quadratique moyenne

L'erreur quadratique moyen d'un estimateur est

$$MSE_{\hat{\theta}}(\theta) = E \left[\left(\hat{\theta} - \theta \right)^2 \middle| \theta \right].$$

On peut décomposer cet estimateur comme

$$MSE_{\hat{\theta}}(\theta) = E \left[\left(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}|\theta] + E[\hat{\theta}|\theta] - \theta \right)^2 \middle| \theta \right] = Var \left(\hat{\theta}|\theta \right) + [\text{bias}_{\hat{\theta}}(\theta)]^2$$

Définition 6.1.5 : Estimateur sans biais à variance minimale

Un estimateur $\hat{\theta}$ est appelé estimateur sans biais à variance minimale si il est sans biais et pour la vraie valeur de θ il n'existe pas d'estimateur avec une plus faible variance.

6.2 | Intervalles de confiance

Dans cette section, on s'intéresse à produire un intervalle de valeurs possibles d'une quantité pour une population inconnue.

Définition 6.2.1

Un intervalle de confiance à $100(1 - \alpha)\%$ pour un paramètre θ est une paire de valeurs aléatoires, L et U , calculé d'un échantillon aléatoire tel que

$$\Pr(L \leq \theta \leq U) \geq 1 - \alpha, \forall \theta.$$

Si la population est normale avec moyenne et variance inconnue, on a

$$L = \bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad U = \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

et

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{n-1}}.$$

Sinon, l'approximation normale peut être utilisée. Si $\hat{\theta}$ est approximativement normal, on a (approximativement)

$$1 - \alpha = \Pr \left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{v(\hat{\theta})}} \leq z_{\alpha/2} \right).$$

On remarque que θ apparaît à deux endroits. Alors, si isoler θ est trop compliqué, on peut utiliser l'approximation $v(\theta) \approx v(\hat{\theta})$ et l'intervalle de confiance devient

$$1 - \theta = \Pr \left(\theta - z_{\alpha/2} \sqrt{v(\hat{\theta})} \leq \theta \leq \theta + z_{\alpha/2} \sqrt{v(\hat{\theta})} \right).$$

6.3 | Tests d'hypothèse

Un test d'hypothèse est composé de deux hypothèses :

- l'hypothèse nulle (notée H_0), et
- l'hypothèse alternative (notée H_1).

Les deux hypothèses ne sont pas symétriques : les alterner peut changer les résultats.

- Déterminer l'hypothèse est faite avec une statistique de test. C'est une fonction des observations et est une variable aléatoire.
- La spécification d'un test est complétée en construisant une région de rejet.
- Les bornes de la région (autre que $\pm\infty$) sont appelées les valeurs critiques.

6.3.1 | Types d'erreur.

Lorsqu'on construit un test, on peut avoir deux types d'erreurs. Le premier se produit si on rejette l'hypothèse nulle mais que l'hypothèse nulle était vraie. On appelle cet erreur type I.

Définition 6.3.1 : Niveau d'importance

Le niveau d'importance (exceptionnel) d'un test d'hypothèse est la probabilité de faire un erreur de type I sachant que l'hypothèse nulle est vraie. On note ce niveau α . Le niveau d'importance est habituellement déterminé d'avance, entre 0.01 et 0.1.

Le deuxième type d'erreur est de ne pas rejeter l'hypothèse nulle alors que l'hypothèse alternative est vraie. La puissance du test est $1 -$ la probabilité de faire un erreur de type II.

Définition 6.3.2

Un test d'hypothèse est uniformément plus puissant s'il n'existe aucun autre test qui a le même ou plus bas niveau d'importance et, pour une valeur particulière dans l'hypothèse alternative, a une plus petite probabilité de faire un erreur de type II.

Généralement, diminuer un type d'erreur cause l'autre à augmenter.

Définition 6.3.3

Pour un test d'hypothèse, la valeur- p est la probabilité que la statistique de test prend une valeur moins d'accord avec l'hypothèse nulle que la valeur obtenue dans l'échantillon. Les tests effectués à un niveau de confiance supérieur à la valeur- p mènent à rejeter l'hypothèse nulle, et les test effectués à un niveau de confiance inférieur à la valeur- p mènent à l'échec de rejeter l'hypothèse nulle.

7 | Estimation pour données complètes

Lorsque les observations sont collectées d'une distribution de probabilité, la situation idéale est d'avoir les réalisations de chaque observation. Ce cas est référé aux données complètes individuelles.

Les données exactes peuvent être impossibles à avoir car

1. les données peuvent être groupées;
2. les données peuvent être censurées ou tronquées.

On considère premièrement l'estimation pour les données complètes et individuelles.

Définition 7.0.1

La fonction de distribution empirique est

$$F_n(x) = \frac{\text{Nombre d'observations} \leq x}{n},$$

où n est le nombre total d'observations.

Définition 7.0.2

La fonction de hasard cumulative est définie selon

$$H(x) = -\ln S(x).$$

Source de la fonction :

$$H'(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{f(x)}{S(x)} = h(x) \Rightarrow H(x) = \int_{-\infty}^x h(y)dy.$$

Autre notation :

- Soit n , la taille échantillonnale
- Soit $y_1 < y_2 < \dots < y_k$ être les k valeurs uniques
- Soit s_j , le nombre de fois dont y_j apparaît dans l'échantillon.
- Soit le nombre d'observations plus grande qu'une valeur. L'ensemble des risques r_j est définie par $r_j = \sum_{i=j}^k s_i$, le nombre d'observations plus grand ou égal à y_j .

En utilisant cette notation, on obtient

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < y_1 \\ 1 - \frac{r_j}{n}, & y_{j-1} \leq x < y_j, \quad j = 2, 3, \dots, k \\ 1, & x \geq y_k \end{cases}$$

Définition 7.0.3 : L'estimateur Nelson-Åalen

L'estimateur Nelson-Åalen de la fonction de hasard cumulative est

$$\hat{H}(x) = \begin{cases} 0, & x < y_1 \\ \sum_{i=1}^{j-1} \frac{s_i}{r_i}, & y_{j-1} \leq x < y_j, \quad j = 2, 3, \dots, k \\ \sum_{i=1}^k \frac{s_i}{r_i}, & x \geq y_k \end{cases}$$

8 | Estimation pour données modifiées

Définition 8.0.1 : Définitions de modifications

- Une observation est tronquée du haut (tronquée à gauche) à d si lorsque la valeur est inférieure à d , elle n'est pas enregistrée mais qu'elle est enregistrée si sa valeur est supérieure à d .
- Une observations est tronquée du bas (tronquée à droite) à u si lorsque la valeur est supérieure à u , elle n'est pas enregistrée mais qu'elle est enregistrée si sa valeur est inférieure à u .
- Une observation est censurée du bas (censurée à gauche) à d si lorsque la valeur est inférieure à d , elle est enregistrée comme d , mais qu'elle est enregistrée à sa valeur si elle est supérieure à d .
- Une observation est censurée du haut (censurée à droite) à u si lorsque sa valeur est supérieure à u , elle est enregistrée comme u , mais qu'elle est enregistrée à sa valeur si elle est inférieure à u .

En actuariat, on a des données tronquées à gauche et des données censurées à droite.

INCOMPLET

Quatrième partie

Théorie de la crédibilité

1 | Crédibilité Américaine

Démarche générale : On doit avoir

$$\Pr((1 - k)\mu_S \leq S \leq (1 + k)\mu_S) \geq \alpha,$$

qui est équivalent à

$$\Pr\left(\left|\frac{\bar{S} - \mu_S}{\sigma_S}\right| \leq y_p\right) = p$$

avec $y_p \leq \frac{k\mu_S}{\sigma_S}$. On obtient y_p selon

$$\begin{aligned}\Pr(|Z| \leq y_p) &= p \\ y_p &= \Phi(y_p) - \Phi(-y_p) \\ &= \Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right).\end{aligned}$$

2 | Crédibilité Bayesienne

On a les fonctions de densité $f_{X|\Theta}$ et g_Θ . On cherche la distribution a posteriori $f_{X_{n+1}|\mathbf{X}}$.

L'approche est de calculer la distribution a posteriori de $\Theta|\mathbf{X}$ et ensuite calculer l'espérance a posteriori

de X_{n+1} selon $E_{\Theta|X}[X]$.

3 | Le modèle de Buhlmann

3.1 | La prime de crédibilité

Objectif : minimiser l'erreur quadratique moyenne de la prime de crédibilité avec un estimateur linéaire de la forme

$$\mu(\theta) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j.$$

On souhaite minimiser

$$Q = E \left[\left(\mu_{n+1}(\theta) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j \right)^2 \right],$$

par rapport à $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. L'espérance est prise par sur la distribution conjointe de Θ, \underline{X} .

En dérivant et en jouant avec les espérances, on a

$$E[X_{n+1}] = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j X_j$$

et

$$Cov(X_i, X_{n+1}) = \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j Cov(X_i, X_j),$$

nommées les équations normales (utilisées pour déterminer les formules de crédibilité).

Notation :

— $\mu(\theta) = E[X_j \Theta = \theta]$	— $\mu = E[\mu(\Theta)]$
— $v(\theta) = Var(X_j \Theta = \theta)$	— $v = E[v(\Theta)]$
	— $a = Var(\mu(\Theta))$

3.2 | Le modèle de Buhlmann

Hypothèses :

—

Résultats intermédiaires (obtenus en conditionnant) :

- $E[X_j] = \mu$
- $Var(X_j) = v + a$
- $Cov(X_j, X_i) = a$.

La prime de crédibilité devient

$$\tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j X_j = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu,$$

avec

$$Z = \frac{n}{n + k}$$

et

$$k = \frac{v}{a} = \frac{E[Var(X_j|\Theta)]}{Var(E[X_j|\Theta])}.$$

3.3 | Le modèle de Buhlmann-Straub

Hypothèses :

- $E[X_i|\Theta] = \mu$
- $Var(X_i|\Theta) = \frac{v(\theta)}{m_i}$

La prime de crédibilité devient

$$\tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j X_j = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu,$$

avec

$$Z = \frac{m}{m + k},$$

$$\bar{X} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{m} X_j$$

et

$$k = \frac{v}{a}.$$

3.4 | Estimateurs

3.4.1 | Modèle de Buhlmann

On s'intéresse aux estimateurs des paramètres μ , v et a . On a

$$\hat{\mu} = \bar{X}.$$

Ensuite, la variance inter-groupe est donné par

$$\hat{v}_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

et l'estimateur non-biaisé de la moyenne des variances inter-groupes est

$$\hat{v} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r v_i.$$

Vu que $Var(\bar{X}_i) = a + \frac{v}{n}$, on a $a = Var(\bar{X}_i) - \frac{v}{n}$ et l'estimateur non-biaisé pour a est

$$\hat{a} = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \frac{\hat{v}}{n}.$$

Si \hat{a} est négatif, on utilise $\tilde{a} = 0$.

3.4.2 | Modèle de Buhlmann-Straub

$$\mu = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j X_j$$

$$\hat{v}_i = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$$

$$\hat{v} = \sum_{i=1}^r w_i \hat{v}_i, \quad w_i = \frac{n_i - 1}{\sum_{i=1}^r (n_i - 1)},$$

qui devient

$$\hat{v} = \frac{1}{\sum_{i=1}^r (n_i - 1)} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2.$$

Enfin,

$$\hat{a} = \left(m - m^{-1} \sum_{i=1}^r m_i^2 \right)^{-1} \left[\sum_{i=1}^r m_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \hat{v}(r-1) \right].$$

Cinquième partie

Théorie du risque

1 | Mesures de risque

1.1 | Quelques mesures de risque

Définition 1.1.1 : Value-at-risk

$$VaR_{\kappa}(X) = F_X^{-1}(\kappa) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \kappa\}$$

Définition 1.1.2 : Tail Value-at-risk

La Tail Value-at-risk (TVaR) est une mesure de risque défini par l'équation

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 VaR_u(X) du \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \left\{ E \left[X \times \mathbb{1}_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}} \right] + VaR_{\kappa}(X) (F_X(VaR_{\kappa}(X)) - \kappa) \right\}. \end{aligned}$$

D'autres formes incluent

$$— TVaR_{\kappa}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=[nk]+1}^n X_{j:n}}{[n(1-\kappa)]}$$

Définition 1.1.3 : Capital économique

Le capital économique pour un portefeuille basée sur la mesure de risque $\zeta_{\kappa}(S)$ est

$$CE_{\kappa}(S) = \zeta_{\kappa}(S) - E[S].$$

Définition 1.1.4 : Bénéfice de mutualisation

Le bénéfice de mutualisation est

$$B_{\kappa}^{\zeta}(S) = \sum_{i=1}^n \zeta_{\kappa}(X_i) - \zeta_{\kappa}(S).$$

1.2 | Propriétés désirables et cohérence

Propriété 1.2.1 : Homogénéité

Soit un risque X et une constante $a \in \mathbb{R}^+$. Une mesure ζ_κ est homogène si

$$\zeta_\kappa(aX) = a\zeta_\kappa(X),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Propriété 1.2.2 : Invariance à la translation

Soit un risque X et une constante $a \in \mathbb{R}$. Une mesure ζ_κ est invariante à la translation si

$$\zeta_\kappa(X + a) = \zeta_\kappa(X) + a,$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Propriété 1.2.3 : Monotonie

Soient deux risques X_1 et X_2 tels que $\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$. Une mesure ζ_κ est monotone si

$$\zeta_\kappa(X_1) \leq \zeta_\kappa(X_2),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Propriété 1.2.4 : Sous-additivité

Soient deux risques X_1 et X_2 . La mesure ζ_κ est sous-additive si

$$\zeta_\kappa(X_1 + X_2) \leq \zeta_\kappa(X_1) + \zeta_\kappa(X_2),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Définition 1.2.5 : Mesure de risque cohérente

Une mesure de risque cohérente satisfait les propriétés d'homogénéité, d'invariance à la translation, de monotonie et de sous-additivité. La mesure de risque TVaR est cohérente. La mesure de risque VaR n'est pas sous-additive, donc n'est pas cohérente (preuve : contre-exemple).

1.3 | Mesures de solvabilité sur une période

Définition 1.3.1

La probabilité de ruine correspond à la probabilité que la compagnie ne rencontre pas ses engagements au cours de la prochaine période en supposant un capital initial $u \geq 0$. Soit $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ les coûts pour un contrat et π_i la prime demandée pour le risque. La probabilité de ruine $\psi_n(u)$ est définie par

$$\psi_n(u) = \Pr \left(S_n > \sum_{i=1}^n \pi_i + u \right) = 1 - F_{S_n} \left(\sum_{i=1}^n \pi_i + u \right)$$

2 | Modélisation des risques

2.1 | Modèle stochastique du risque

Définition 2.1.1 : Modèle stochastique du risque

On définit la v.a. X par une somme aléatoire

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^M B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

- La v.a. discrète M représente le nombre de sinistres (fréquence)
- La v.a. continue et positive B_k correspond au montant du $k^{\text{ième}}$ sinistre (sévérité)
- On dit que la v.a. est composée

Définition 2.1.2 : Modèle collectif vs modèle individuel

Un modèle collectif du risque est un modèle de la forme 2.1 où

- conditionnel à $N = n$, les v.a. B_k sont i.i.d;
- conditionnel à $N = n$, la suite de v.a. $\{B_k, k = 1, \dots, n\}$ sont i.i.d et ne dépend pas de n ;
- la distribution de N ne dépend pas des valeurs $B_k, k = 1, \dots, n$.

Un modèle individuel du risque représente la perte agrégée sous la forme d'une somme de n contrats d'assurance :

$$S = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- Les pertes X_i sont assumés indépendants mais pas nécessairement identiquement distribués;
- La distribution des X_i a habituellement une masse à 0, représentant la probabilité qu'aucun paiement n'est fait pour un contrat.

L'espérance de X dans un modèle collectif est

$$E[X] = E[E[X|M]] = E[M \times E[B]] = E[M]E[B].$$

La variance de X est

$$Var(X) = E_M[Var(X|M)] + Var_M(E[X|M]).$$

Avec $Var(X|M) = MVar(B)$, on obtient

$$Var(X) = E[M]Var(B) + Var(M)E[B]^2.$$

La fonction de répartition est

$$\begin{aligned} F_X(x) &= E[F_X(x)|M] \\ &= \Pr(M=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M=k) F_{B_1+\dots+B_k}(x). \end{aligned}$$

Pour le modèle collectif, on a

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_B^{*k}(x),$$

où $F_B^{*k}(x)$ est le produit de convolution. En dérivant, on obtient

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k f_B^{*k}(x).$$

La fgp est

$$E[t^X] = E_M[E[t^X|M]] = E_M[t^{B_1+\dots+B_k}] = E_M\left[\prod_{i=1}^k t^{B_i}\right] \stackrel{iid}{=} E_M[P_B(t)^M] = P_M(P_B(t)).$$

La fgm est

$$E[e^{tX}] = E_M[E[e^{tX}|M]] = E_M[e^{t(B_1+\dots+B_k)}] = E_M\left[\prod_{i=1}^k e^{B_i t}\right] \stackrel{iid}{=} E_M[M_B(t)^M] = P_M(M_B(t)).$$

La transformée de Laplace est

$$L_X(t) = P_M(L_B(t)).$$

2.1.1 | Fréquence et sévérité avec modification de la couverture

Soit $v = \Pr(Y^L = 0)$. On a

- Relation entre montant des pertes par perte et par paiement : $M_{Y^L}(t) = (1 - v) + vM_{Y^P}(t)$
- Relation entre nombres de pertes par perte et par paiement : $P_{N^P}(t) = P_{N^L}(1 - v + vt)$

Dans le modèle collectif du risque, on a

- $M_S(t) = P_{N^L}(M_{Y^L}(t))$
- $M_S(t) = P_{N^P}(M_{Y^P}(t))$

2.2 | Approche indemnitaire et forfaitaire

Un cas particulier du modèle stochastique est où M obéit à une loi Bernoulli. On a

$$X = M \times B = \begin{cases} B, & M = 1 \\ 0, & M = 0. \end{cases}$$

Définition 2.2.1 : Approche indemnitaire

Dans l'approche indemnitaire, on suppose qu'un seul sinistre peut arriver dans une période. Les coûts de l'évènement sont définis par la v.a. B . On a

- $F_X(x) = 1 - q + qF_B(x)$
- $E[X] = qE[B]$
- $Var(X) = qVar(B) + q(1 - q)E[B]^2$
- $Var_{\kappa}(X) = \begin{cases} 0, & 0 < \kappa < 1 - q \\ Var_{\frac{\kappa - (1 - q)}{q}}(B), & 1 - q < \kappa < 1 \end{cases}$
- $TVaR_{\kappa}(X) = \frac{qE[B \times \mathbb{1}_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] + VaR_{\kappa}(X)(F_X(VaR_{\kappa}(X)) - \kappa)}{1 - \kappa}$

L'approche indemnitaire est utile pour l'assurance vie. Soit $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Soit q_j , la probabilité de décès de l'individu j et b_j , la prestation de décès. Alors,

- $E[S] = \sum_{j=1}^n b_j q_j$
- $Var(S) = \sum_{j=1}^n b_j^2 q_j (1 - q_j)$
- $P_S(t) = \prod_{j=1}^n (1 - q_j + q_j z_j^b)$
- $M_S(t) = \prod_{j=1}^n (1 - q_j + q_j M_{B_j}(t))$

2.3 | Généralisations des principales lois de fréquence

Définition 2.3.1 : Loi Poisson-mélange

Soit une v.a. Θ de telle sorte que $E[\Theta] = 1$, $Var(\Theta) < \infty$ et $M_\Theta(x)$ existe. La distribution de fréquence est définie selon

$$(M|\Theta = \theta) \sim Pois(\lambda\theta).$$

On a

- $E[M] = E_\Theta[E[M|\Theta]]$
- $Var(X) = \lambda + \lambda^2 Var(\Theta)$
- $P_M(t) = M_\Theta(\lambda(t-1))$
- $\Pr(M = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF_\Theta(t)$

2.4 | Sommes aléatoires et allocation

Soit la v.a. X définie selon un modèle stochastique du risque. Si B est continue et positive, on a

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) E \left[\left(\sum_{j=1}^k B_j \right) \times \mathbb{1}_{\left\{ \sum_{j=1}^k B_j > VaR_\kappa(X) \right\}} \right].$$

On présente deux règles d'allocation du capital.

Définition 2.4.1 : Règle basée sur la variance

Les parts allouées aux v.a. B et M sont

$$C_\kappa^{Var}(M) = \frac{Var(E[X|M])}{Var(X)} TVaR_\kappa(X) = \frac{Var(M)E[B]^2}{Var(X)} TVaR_\kappa(X)$$

$$C_\kappa^{Var}(B) = \frac{E(E[X|M])}{Var(X)} TVaR_\kappa(X) = \frac{E[M]Var(B)}{Var(X)} TVaR_\kappa(X)$$

Définition 2.4.2 : Règle basée sur la TVaR

Avec la décomposition

$$E[X \times \mathbb{1}_{\{X > b\}}] = \underbrace{E_M[(X - E[X|M]) \times \mathbb{1}_{\{X > b\}}]}_{\text{part allouée à } M} + \underbrace{E_M[E[X|M] \times \mathbb{1}_{\{X > b\}}]}_{\text{part allouée à } B},$$

On déduit

$$C_\kappa^{TVaR}(M) = \frac{E_M[E[X|M] \times \mathbb{1}_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}]}{1 - \kappa}$$

et

$$C_{\kappa}^{TVaR}(B) = TVaR_{\kappa}(X) - C_{\kappa}^{TVaR}(M).$$

2.5 | Pertes financières

Définition 2.5.1

Soit $V(0)$, la v.a. qui représente le capital initial investi dans un fonds et $V(1)$, la v.a. qui représente la valeur du fonds au temps $t = 1$. La perte liée à cet investissement est défini selon la v.a. $L = V(0) - V(1)$. Le rendement instantané pour une période est défini selon la v.a. R , alors, $L = V(0) - V(0)e^R$. Si la v.a. R est continue, on a

$$VaR_{\kappa}(L) = V(0) + VaR_{\kappa}(-V(1)) = V(0) - VaR_{1-\kappa}(V(1))$$

et

$$TVaR_{\kappa}(L) = V(0) - \frac{1}{1-\kappa} (E[X] - \kappa TVaR_{1-\kappa}(X)).$$

3 | Mutualisation des risques

3.1 | Aggrégation des risques

On s'intéresse au comportement de la v.a. $S = \sum_{i=1}^n X_i$ représentant les coûts d'un portefeuille de n risques. On a

$$E[S] = E \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

et

$$Var(S) = Var \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n Cov(X_i, X_j).$$

La fgm est donnée par

$$M_S(t) = E \left[e^{t \sum_{i=1}^n X_i} \right] \stackrel{ind}{=} \prod_{i=1}^n E \left[e^{t X_i} \right] = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t).$$

Si les v.a. X_i sont iid, on a

$$M_S(t) = M_{X_i}(t)^n.$$

Proposition 3.1.1 : Loi Poisson composée et agrégation

Soient les v.a. indépendantes X_1, \dots, X_n où

$$X_i \sim PComp(\lambda_i, F_{B_i}), i = 1, 2, \dots, n.$$

Alors,

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \sim PComp(\lambda_S, F_C),$$

où $\lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et

$$F_C(s) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S} F_{B_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S} F_{B_2}(x) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_S} F_{B_n}(x)$$

Preuve : fgm et mettre λ_S en évidence.

Proposition 3.1.2 : Loi binomiale négative composée et agrégation

Soient les v.a. indépendantes X_1, \dots, X_n où

$$X_i \sim BNComp(r_i, q, F_{B_i}), i = 1, 2, \dots, n.$$

Alors,

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \sim BNComp(r_S, q, F_B),$$

où $r_S = \sum_{i=1}^n r_i$.

3.2 | Méthodes d'approximation basée sur les moments

3.2.1 | Approximation basée sur la distribution normale

L'approximation basée sur la distribution normale est fondée sur le théorème central limite. On approxime la v.a. S par la v.a. T , en supposant $E[S]$ et $Var(S)$ connus. On a alors

$$T \sim Norm(E[S], Var(S)).$$

On obtient alors

$$F_S(x) \cong F_T(x) = \Phi\left(\frac{x - E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right)$$

$$VaR_\kappa(S) \cong VaR_\kappa(T) = E[S] + \sqrt{Var(S)} VaR_\kappa(Z)$$

$$TVaR_\kappa(S) \cong TVaR_\kappa(T) = E[S] + \sqrt{Var(S)} TVaR_\kappa(Z).$$

3.2.2 | Approximation basée sur la loi gamma tradatée

L'approximation basée sur la loi gamma est utile pour approximer la distribution de la v.a. S pour la queue de droite. On approxime la v.a. S par $T + x_0$, où $T + x_0$ obéit à une loi gamma tradatée.

À partir des trois premiers moments, on a

$$\begin{aligned} E[S] &= \frac{\alpha}{\beta} + x_0 \\ \text{Var}(S) &= \frac{\alpha}{\beta^2} \\ \gamma(S) &= \frac{2}{\alpha^{0.5}}. \end{aligned}$$

Avec la méthode des moments, on en déduit que

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{4}{\gamma(S)^2} \\ \hat{\beta} &= \frac{2}{\gamma(S)\sqrt{\text{Var}(S)}} \\ \hat{x}_0 &= E[S] - \frac{2\sqrt{\text{Var}(S)}}{\gamma(S)} \end{aligned}$$

On peut approximer les mesures de risque suivantes pour κ élevés :

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\kappa(S) &\cong \text{VaR}_\kappa(T) + x_0 \\ \text{TVaR}_\kappa(S) &\cong \text{TVaR}_\kappa(T) + x_0 \end{aligned}$$

3.2.3 | Autres approximations

- lognormale : $\sigma_T = \sqrt{\ln \frac{E[S^2]}{E[S]^2}}$ et $\mu = \ln(E[S]) - \frac{1}{2}\sigma_T^2$
- F-généralisée.

3.2.4 | Approximation Poisson du modèle individuel

- Rappel : $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, où $X_j = I_j \times b_j$. On a $E[S] = \sum_{j=1}^n b_j q_j$ et $\text{Var}(S) = \sum_{j=1}^n b_j^2 q_j (1 - q_j)$.
- Si q_j est petit, on peut approximer I_j par une loi de Poisson en gardant la même moyenne $\lambda_j = q_j$. Une autre approximation de la loi de Poisson est de garder la même probabilité de non-paiement $e^{-\lambda_j} = 1 - q_j \Rightarrow \lambda_j = -\ln(1 - q_j)$.
- Si $\Pr(B = b_j) = 1$ (comme en assurance vie), alors

$$f_S(x) = \Pr(X = x) = \frac{1}{\lambda_S} \sum_{\{j: b_j = x\}} \lambda_j$$

3.3 | Mutualisation et activités d'assurance

Définition 3.3.1 : Coût moyen par contrat

Le coût moyen par contrat est

$$W_n = \frac{S_n}{n}.$$

On a

$$E[W_n] = E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n}E[S_n] = E[X]$$

La variance est donnée par

$$\text{Var}(W_n) = \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\text{Var}(S_n) \stackrel{\text{ind}}{=} \frac{1}{n}\text{Var}(X).$$

On remarque que $\text{Var}(W_n)$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Si les v.a. ne sont pas indépendantes, on a

$$\text{Var}(W_n) = \frac{1}{n^2}[n\text{Var}(X) + n(n-1)\text{Cov}(X_1, X_2)] = \frac{\text{Var}(X)}{n} + \frac{n-1}{n}\text{Cov}(X_1, X_2).$$

On remarque que $\text{Var}(W_n)$ converge vers $\text{Cov}(X_1, X_2)$ lorsque n tend vers l'infini.

Proposition 3.3.2

Soient les risques X_1, X_2, \dots, X_n et la prime $\pi_i = (1 + \eta_i)E[X_i]$. On définit le coefficient ρ_B comme étant la solution strictement positive (si elle existe) de $E[e^{tS}] = e^{t\pi_S}$, où

$$\psi_n(u) \leq e^{-\rho_B u}, \quad u \geq 0.$$

Proposition 3.3.3

Soient les risques iid X_1, X_2, \dots, X_n et la prime $\pi_i = (1 + \eta_i)E[X_i] = \pi_i$. Alors, on a

1. si $\pi > E[X]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(u) = 0, u \geq 0$
2. si $\pi < E[X]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(u) = 1$

4 | Principes de prime

4.1 | Propriétés désirables

1. Marge de sécurité positive
2. Exclusion de marge de sécurité non justifiée
3. Additivité
4. Sous-additivité
5. Invariance à l'échelle
6. Invariance à la translation
7. Maximum

4.2 | Principes de prime

4.2.1 | Principe de la valeur espérée

La prime majorée est $\Pi(X) = (1 + \kappa)E[X]$, où $\kappa > 0$. Cette prime satisfait les propriétés 1, 3, 4, 5.

4.2.2 | Principe de la variance

La prime est $\Pi(X) = E[X] + \kappa Var(X)$, où $\kappa > 0$. Cette prime satisfait les propriétés 1, 2, 3, 6.

4.2.3 | Principe de l'écart type

La prime est $\Pi(X) = E[X] + \kappa \sqrt{Var(X)}$, où $\kappa > 0$. Cette prime satisfait les propriétés 1, 2, 6.

4.2.4 | Principe de la VaR

La prime est $\Pi(X) = VaR_{\kappa}(X)$, pour κ élevé (0.95 ou plus, en pratique). Cette prime satisfait les propriétés 2, 5, 6, 7.

4.2.5 | Principe de la TVaR

La prime est $\Pi(X) = TVaR_\kappa(X)$, pour κ élevé (0.95 ou plus, en pratique). Cette prime satisfait les propriétés 1 à 7.

4.2.6 | Approche top-down

Le principe de la VaR et la TVaR utilise la v.a. W_n au lieu de la v.a. X . Elle permet de tenir compte du bénéfice de mutualisation. Les principes avec l'approche top-down sont les mêmes que pour le principe de la VaR et le principe de la TVaR.

4.2.7 | Principe exponentiel

La prime est $\Pi(X) = \frac{1}{\kappa} \ln\{M_X(\kappa)\}$, pour $\kappa > 0$. Cette prime satisfait les propriétés 1 à 7.

5 | Méthodes de simulation

5.1 | Méthode de base

Un algorithme pour simuler la réalisation d'une v.a. $X^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, m$ à partir de la fonction de répartition d'une fonction. Pour $j = 1, 2, \dots, m$,

1. simuler la réalisation $U^{(j)} \sim Unif(0, 1)$ à partir d'un GNPA ou `runif`;
2. calculer la simulation $X^{(j)}$ de X avec $X^{(j)} = F_X^{-1}(U^{(j)})$.

5.1.1 | Simulations de v.a. définis par un mélange

Soit une v.a. Θ et une v.a. X dont la fonction de répartition conditionnelle de $(X|\Theta = \theta)$ est $F_{X|\Theta=\theta}$ et la fonction quantile est $F_{X|\Theta=\theta}^{-1}$. Pour simuler des réalisations de \underline{X} , on procède avec les étapes suivantes

1. on simule une réalisation $\Theta^{(j)}$ de Θ ;
2. on produit une réalisation X

5.1.2 | Simulation de somme aléatoire

Soit X une v.a. définie par le modèle stochastique. La procédure pour simuler des réalisations de X est

1. Simuler une réalisation $M^{(j)}$ de la v.a. M .

6 | Méthodes d'aggrégation

Définition 6.0.1 : Méthode de dispersion de la masse

Soit f_j la probabilité placée à $jh, j = 0, 1, 2, \dots$. Alors, on pose

$$\begin{aligned} f_0 &= \Pr\left(X \leq \frac{h}{2}\right) = F_X\left(\frac{h}{2} - 0\right) \\ f_j &= \Pr\left(jh - \frac{h}{2} \leq X < jh + \frac{h}{2}\right) \\ &= F_X\left(jh + \frac{h}{2}\right) - F_X\left(jh - \frac{h}{2}\right), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

7 | Comparaison des risques

L'ordre en dominance stochastique permet de comparer l'ampleur de deux v.a. et l'ordre convexe compare leur variabilité.

7.1 | Ordres partiels

Définition 7.1.1

Soit A un ensemble de fonctions de répartition. Une relation binaire \preceq définie sur A est un ordre partiel si cet ordre satisfait les trois propriétés suivantes :

1. Transitivité : Si $F_X \preceq F_Y$ et $F_Y \preceq F_Z$, alors $F_X \preceq F_Z$.
2. Réflexivité : $F_X \preceq F_X$
3. Anti-symétrie : Si $F_X \preceq F_Y$ et $F_Y \preceq F_X$, alors $F_X \equiv F_Y$.

Les propriétés désirables pour les ordres partiels sont les suivants :

Propriété 7.1.2 : Fermeture sous le mélange

Soient les v.a. X, X' et Θ . On dit que l'ordre stochastique \preceq est fermé sous le mélange si $X|\Theta = \theta \preceq X'|\Theta = \theta$ pour tout θ implique $X \preceq X'$.

Propriété 7.1.3 : Fermeture sous la convolution

Soient deux suites de v.a. indépendantes $\underline{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ et $\underline{X}' = \{X'_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ avec $X_i \preceq X'_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^+$. On dit que l'ordre stochastique \preceq est fermé sous la convolution si

$$\sum_{i=1}^n X_i \preceq \sum_{i=1}^n X'_i$$

est satisfait.

Propriété 7.1.4 : Fermeture sous la composition

On dit que l'ordre est fermé sous la composition si

$$\sum_{i=1}^N X_i \preceq \sum_{i=1}^{N'} X_i$$

pour $N \preceq N'$.

7.2 | Ordre en dominance stochastique

Définition 7.2.1

Soient les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors, X est inférieure à X' sous l'ordre en dominance stochastique, notée $X \preceq_{sd} X'$, si $F_X(x) \geq F_{X'}(x)$ ou $\bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_{X'}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 7.2.2

Soient deux v.a. X et X' telles que $X \preceq_{sd} X'$. Alors, on a $Var_\kappa(X) \leq Var_\kappa(X')$.

Théorème 7.2.3

Soient les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$.

1. Si $X \preceq_{sd} X'$ alors $E[X] \leq E[X']$.
2. Si $X \preceq_{sd} X'$ et $E[X] = E[X']$ alors X et X' ont la même distribution.

Théorème 7.2.4

Soient les deux v.a. X et X' . Alors, on a $X \preceq_{sd} X'$ si et seulement si $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$ pour toute fonction croissante ϕ .

Théorème 7.2.5

Soient les v.a. X et X' telles que $E[X^m] < \infty$ et $E[X'^m] < \infty$, pour $m \in \mathbb{N}^+$. Si on a $X \preceq_{sd} X'$, alors

1. $E[X^m] \leq E[X'^m]$, pour $m = 1, 3, 5, \dots$;
2. $E[X^m] \leq E[X'^m]$, pour $m = 1, 2, 3, \dots$ si les v.a. X et Y sont positives.

Théorème 7.2.6

Soient deux v.a. X et X' . Si $X \preceq_{sd} X'$ alors on a $\phi(X) \preceq_{sd} \phi(X')$ pour toute fonction croissante ϕ .

Soient X_1, \dots, X_n et X'_1, \dots, X'_n des v.a. indépendantes avec $X_i \preceq_{sd} X'_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. On suppose que $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante. Alors, on a $\psi(X_1, \dots, X_n) \preceq_{sd} \psi(X'_1, \dots, X'_n)$.

L'ordre en dominance stochastique est fermé sous la convolution, le mélange et la composition.

Proposition 7.2.7 : Condition suffisante pour déterminer l'ordre en dominance stochastique

Soient deux v.a. X et Y ayant la propriété qu'il existe un nombre réel $a \geq 0$ tel que

$$dF_X(x) \geq dF_Y(x) \text{ pour } x \in (-\infty, a)$$

$$dF_X(x) \leq dF_Y(x) \text{ pour } x \in (-\infty, a).$$

Alors, $X \preceq_{sd} Y$.

Quelques lois avec paramètres différents sont d'ordre en dominance stochastique. Par exemple,

$$X \sim \text{Exp}(\beta) \text{ et } X' \sim \text{Exp}(\beta') \text{ avec } \beta \geq \beta'.$$

Il est aussi possible de comparer des lois paramétriques différentes. Par exemple, si $M \sim \text{Bern}(q)$ et $M' \sim \text{Pois}(\lambda)$ où $\lambda = -\ln(1 - q)$. Alors, on a $M \preceq_{sd} M'$.

Proposition 7.2.8

Soient les v.a. $\tilde{X}^{(u,h')}$, $\tilde{X}^{(u,h)}$, X , $\tilde{X}^{(l,h)}$, $\tilde{X}^{(l,h')}$, où X est un modèle stochastique \tilde{X} est l'approximation upper ou lower pour B . Alors,

$$\tilde{X}^{(u,h')} \preceq_{sd} \tilde{X}^{(u,h)} \preceq_{sd} X \preceq_{sd} \tilde{X}^{(l,h)} \preceq_{sd} \tilde{X}^{(l,h')}$$

pour $0 < h \leq h'$.

Définition 7.2.9

Une v.a. X_θ est dite stochastiquement croissante si et seulement si $X_\theta \preceq_{sd} X_{\theta'}$ quand $\theta \leq \theta'$.

Proposition 7.2.10

Si $\Theta \preceq_{sd} \Theta'$, alors $X_\Theta \preceq_{sd} X_{\Theta'}$.

7.3 | Ordres convexes

Définition 7.3.1

Une fonction est dite convexe si $\phi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha\phi(x) + (1 - \alpha)\phi(y)$ pour tout x et y et pour tout $0 < \alpha < 1$.

Une fonction ϕ est dite concave si $-\phi$ est convexe.

On définit des ordres stochastiques.

Définition 7.3.2

Soient X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors,

— Ordre convexe : $X \preceq_{cx} X'$ si $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$, pour toute fonction réelle convexe ϕ et en

supposant que les espérances existent.

- Ordre convexe croissante : $X \preceq_{icx} X'$ si $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$, pour toute fonction réelle convexe croissante ϕ et en supposant que les espérances existent.
- Ordre concave croissante : $X \preceq_{icv} X'$ si $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$, pour toute fonction réelle concave croissante ϕ et en supposant que les espérances existent.

Définition 7.3.3 : Ordre stop-loss

$X \preceq_{sl} X'$, si $E[(X - d)_+] \leq E[(X' - d)_+]$, pour tout $d \in \mathbb{R}$, où $(u)_+ = \max(u, 0)$.

Théorème 7.3.4

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $X \preceq_{icx} X'$;
2. $X \preceq_{sl} X'$.

Remarque 7.3.5

$X \preceq_{sd} X'$ implique $X \preceq_{icx} X'$ mais pas $X \preceq_{cx} X'$.

Les ordres convexes, convexes croissantes et stop loss sont fermés sous la convolution, le mélange et la composition.

Proposition 7.3.6 : Critère de Karlin-Novikoff

Soient deux v.a. X et X' telles que $E[X] \leq E[X'] < \infty$. S'il existe un nombre $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned} F_X(x) &\leq F_{X'}(x), & x < c \\ F_X(x) &\geq F_{X'}(x), & x \geq c, \end{aligned}$$

alors $X \preceq_{icx} X'$ ou $X \preceq_{sl} X'$.

Proposition 7.3.7

Soient les v.a. X et X' . Alors, on a $X \preceq_{icx} X'$ si et seulement si $TVaR_\kappa(X) \leq TVaR_\kappa(X')$, pour tout $0 < \kappa < 1$.

Proposition 7.3.8

Soient la v.a. positive Θ et la v.a. $X_\theta \sim \text{Pois}(\lambda\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}^+$. Les v.a. Θ et X_θ sont indépendantes. Alors, $\Theta \preceq_{icx} \Theta'$ implique $X_\Theta \preceq_{icx} X_{\Theta'}$.

Proposition 7.3.9

On a $W_{n+1} \preceq_{icx} W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^+$.

8 | Copules

8.1 | Copules bivariées

Définition 8.1.1

Une copule $C(u_1, u_2)$ est une application $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ayant les mêmes propriétés qu'une fonction de répartition :

- $C(u_1, u_2)$ est non décroissante sur $[0, 1]^2$;
- $C(u_1, u_2)$ est continue à droite sur $[0, 1]^2$;
- $\lim_{u_i \rightarrow 0} C(u_1, u_2) = 0$ pour $i = 1, 2$;
- $\lim_{u_1 \rightarrow 1} C(u_1, u_2) = u_2$ et $\lim_{u_2 \rightarrow 1} C(u_1, u_2) = u_1$;
- on a $\delta_{a_1, b_1} \delta_{a_2, b_2} C(u_1, u_2) \geq 0$, pour tout $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$, où

$$\delta_{a_1, b_1} \delta_{a_2, b_2} C(u_1, u_2) = C(b_1, b_2) - C(b_1, a_2) - C(a_1, b_2) + C(a_1, a_2).$$

De plus, on a

$$\delta_{a_1, b_1} \delta_{a_2, b_2} C(u_1, u_2) = \Pr(a_1 < U_1 \leq b_1, a_2 < U_2 \leq b_2).$$

Théorème 8.1.2 : Théorème de Sklar

Soit $F \in \Gamma(F_1, F_2)$ ayant des fonctions de répartition marginales F_1 et F_2 . Alors, il existe une copule C telle que, pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^+$,

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Si F_1 et F_2 sont continues, alors C est unique. Sinon, C est uniquement déterminée sur $\text{Ran} F_1 \times \text{Ran} F_2$, où $\text{Ran} F$ est le support de F . Inversement, si C est une copule et si F_1 et F_2 sont des fonctions de répartition, alors la fonction définie par

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

est une fonction de répartition bivariée avec des fonctions de répartition marginales F_1 et F_2 .

Corollaire 8.1.3

Soit F une fonction de répartition bivariable avec des marginales continues F_1, F_2 et la copule C . Alors, pour tout (u_1, u_2) dans $[0, 1]^2$,

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))$$

8.2 | Propriétés des copules**Définition 8.2.1**

Soit $C(u_1, u_2)$ une copule définie sur $[0, 1]^2$. Alors, on a

$$C^-(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C^+(u_1, u_2),$$

où $C^-(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1; 0)$ et $C^+(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$ correspondent aux copules borne inférieure et supérieure de Fréchet (antimonotone et comonotone).

On a aussi

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2)$$

— Pour une paire de v.a. continues (X_1, X_2) avec $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$

— la fonction de densité est $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$

La copule de survie est obtenue selon

$$\bar{F}_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \hat{C}(\bar{F}_{X_1}(x_1), \bar{F}_{X_2}(x_2))$$

et on obtient la formule

$$\hat{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1.$$

On note que

$$\Pr(U_1 > u_1, U_2 > u_2) \neq \hat{C}(u_1, u_2).$$

Propriété 8.2.2

Soient X_1 et X_2 des v.a. continues dont la structure de dépendance est définie selon la copule C . Soient ϕ_1 et ϕ_2 des fonctions continues monotones. On a les propriétés suivantes :

1. Si ϕ_1 et ϕ_2 sont non décroissantes, alors la structure de dépendance de $(\phi(X_1), \phi(X_2))$ est la copule C .

8.2.1 | Notions de dépendance

— Dépendant positivement par quadrant

$$\bar{F}_X(x_1, x_2) \geq \bar{F}_1(x_1)\bar{F}_2(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$C(u_1, u_2) \geq u_1 u_2 \quad \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$$

— Associé

$$\text{Cov}(\Phi_1(X_1, X_2), \Phi_2(X_1, X_2)) \geq 0$$

quelles que soient les fonctions Φ_1 et $\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ non-décroissants telles que la covariance existe.

— X associé $\Rightarrow X$ positivement dépendant par quadrant

— Conditionnellement croissant : si $x_1 \leq y_1$ dans le support de X_1 , on a

$$\Pr(X_2 > t | X_1 = x_1) \leq \Pr(X_2 > t | X_1 = y_1) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(idem pour X_2). La copule C est conditionnellement croissant ssi

- i) $\forall u_2 \leq 1, u_1 \mapsto \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2)$ est strictement croissante, c.-à-d. $u_1 \mapsto C(u_1, u_2)$ est une fonction concave
- ii) $\forall u_1 \leq 1, u_2 \mapsto \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)$ est strictement croissante, c.-à-d. $u_2 \mapsto C(u_1, u_2)$ est une fonction concave

8.3 | Mesures de dépendance

Définition 8.3.1 : Rho de Spearman

La mesure d'association est donné par

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2)),$$

où ρ est la corrélation linéaire.

On peut écrire les quantités en fonction des marginales uniformes :

- $\rho_S(X_1, X_2) = 12E[F_1(X_1)F_2(X_2)] - 3$
- $\rho_S(X_1, X_2) = 12E[U_1U_2] - 3$

Définition 8.3.2 : Tau de Kendall

On considère deux couples de v.a. iid (X_1, X_2) et (X_1^*, X_2^*) . La mesure d'association est donné par

$$\tau_K(X_1, X_2) = \Pr((X_1 - X_1^*)(X_2 - X_2^*) > 0) - \Pr((X_1 - X_1^*)(X_2 - X_2^*) < 0).$$

Le premier terme mesure la concordance et le deuxième terme mesure la discordance.

- $\tau_K(X_1, X_2) = E[\text{sign}(X_1 - X_1^*)(X_2 - X_2^*)]$
- $\tau_K(X_1, X_2) = 4E[C(U_1, U_2)] - 1$

8.4 | Mesures de queue

Définition 8.4.1 : Dépendance de queue

L'indice de dépendance de queue supérieure est donnée par

$$\lim_{u \rightarrow 1} \Pr(X > F^{-1}(u) | Y > G^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 1} \Pr(U > u | V > u).$$

On peut réécrire cette quantité (en distribuant)

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}.$$

L'indice de dépendance de queue inférieure est donnée par

$$\lim_{u \rightarrow 0} \Pr(X \leq F^{-1}(u) | Y \leq G^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 0} \Pr(U \leq u | V \leq u).$$

On peut réécrire cette quantité (en distribuant)

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}.$$

8.5 | Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes sont sous la forme

$$C(u_1, \dots, u_d) = \phi^{-1}[\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d)],$$

où $\phi(u)$ est appelé une fonction génératrice.

- La fonction génératrice est strictement décroissante, convexe et continue
- Elle projette $[0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ avec $\phi(1) = 0$
- Son inverse ϕ^{-1} doit être complètement monotone sur $[0, \infty]$. Elle satisfait

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) \geq 0, n = 1, 2, 3, \dots$$

- $\tau_K(X_1, X_2) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(u)}{\phi'(u)} du$
- $\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + \phi^{-1}(2\phi(u))}{1 - u} \stackrel{RH}{=} 2 - 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt}\phi^{-1}(2t)}{\frac{d}{dt}\phi^{-1}(t)},$ si $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt}\phi^{-1}(t) = -\infty$, sinon il n'y a pas d'indice de dépendance de queue supérieure.
- $\lambda_L = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dt}\phi^{-1}(2t)}{\frac{d}{dt}\phi^{-1}(t)}$ si $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt}\phi^{-1}(t) = 0$, sinon il n'y a pas d'indice de dépendance de queue inférieure.

Voir l'examen général pour une liste des générateurs et des copules.

8.6 | Copules elliptiques

8.6.1 | Copule gaussienne

$$— C(u_1, \dots, u_d) = \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$$

$$— \tau_K(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$$

$$— \tau_K(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{ij})$$

$$— \lambda_U = \lambda_L = 0$$

8.6.2 | Copule de Student

$$— C(u_1, \dots, u_d) = t_{\nu, P}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_d))$$

$$— \tau_K(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho$$

$$— \lambda_U = 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}(\nu+1) \right)$$

$$— \tau_K(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{ij}$$

$$— \lambda_U = 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{1-\rho_{ij}}{1+\rho_{ij}}}(\nu+1) \right)$$

9 | Allocation du capital

10 | Modèles de ruine

10.1 | Modèles à temps discret

Définition 10.1.1 : Processus de surplus

Le processus de surplus $\{U_t : t \geq 0\}$ (ou la version discrète $\{U_t : t = 0, 1, \dots\}$) mesure le surplus du portefeuille au temps t avec un surplus initial de $u = U_0$. Le surplus au temps t est

$$U_t = U_0 + P_t - S_t,$$

où $\{P_t : t \geq 0\}$ est le processus de primes (net des frais) et $\{S_t : t \geq 0\}$ est le processus des pertes. Le processus de pertes peut être décomposé en processus de fréquence $\{N_t : t \geq 0\}$ et de sévérité $\{X_t : t \geq 0\}$.

Définition 10.1.2 : Un modèle de ruine discret

Soit W_t , l'incrément du surplus lors de l'année t . La v.a. W_t est donné par

$$W_t = P_t - P_{t-1} - S_t + S_{t-1}, t = 1, 2, \dots$$

Le processus de surplus est donné par

$$U_t = U_{t-1} + W_t, t = 1, 2, \dots$$

Définition 10.1.3 : Probabilités de ruine

- Probabilité de survie, temps continu, horizon infini :

$$\phi(u) = \Pr(U_t \geq 0 \forall t \geq 0 | U_0 = u).$$

- Probabilité de survie, temps discret, horizon fini :

$$\tilde{\phi}(u, \tau) = \Pr(U_t \geq 0 \forall t = 0, 1, \dots, \tau | U_0 = u).$$

- Probabilité de survie, temps continu, horizon fini :

$$\phi(u, \tau) = \Pr(U_t \geq 0 \forall 0 \leq t \leq \tau | U_0 = u).$$

- Probabilité de survie, temps discret, horizon infini :

$$\tilde{\phi}(u) = \Pr(U_t \geq 0 \forall t = 0, 1, \dots | U_0 = u).$$

On a

$$\phi(u) \leq \tilde{\phi}(u) \leq \tilde{\phi}(u, \tau)$$

et

$$\phi(u) \leq \phi(u, \tau) \leq \tilde{\phi}(u, \tau).$$

On a aussi

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi(u, \tau) = \phi(u) \text{ et } \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(u, \tau) = \tilde{\phi}(u).$$

Les probabilités de ruine sont donnés par

$$\psi(u) = 1 - \phi(u)$$

10.2 | Modèles à temps continu

Définition 10.2.1 : Un modèle de ruine continu

Soit les pertes individuelles $\{X_1, X_2, \dots\}$, des v.a. iid avec fonction de répartition F et moyenne μ . On suppose que le processus de pertes est Poisson composé $S_t = X_1 + \dots + X_{N_t}$, où $\{N_t : t \geq 0\}$ est un processus de Poisson avec intensité λ . On a $E[S_t] = \lambda\mu t$. De plus, les primes sont collectées à un taux constant

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu.$$

Le facteur θ est appelé le chargement de sécurité relatif ou le facteur de chargement de prime. Le processus de surplus est donc

$$U_t = u + ct - S_t, t \geq 0,$$

où $u = U_0$ est le surplus initial. La probabilité de survie à temps infini est donné par

$$\phi(u) = \Pr(U_t \geq 0 \forall t \geq 0 | U_0 = u)$$

et la probabilité de ruine est donné par

$$\psi(u) = 1 - \phi(u).$$

10.2.1 | Coefficient d'ajustement et inégalité de Lundberg.

Définition 10.2.2 : Coefficient d'ajustement

Soit $t = \kappa$ la plus petite solution positive de

$$1 + (1 + \theta)\mu t = M_x(t).$$

Équations équivalentes :

$$— E[e^{tS}] = e^{t(1+\theta)\mu\lambda}.$$

$$— 1 + \theta = \int_0^\infty e^{\kappa x} f_e(x) dx, \text{ où } f_e \text{ est la fonction de densité équilibre.}$$

Proposition 10.2.3 : L'inégalité de Lundberg

On suppose que $\kappa > 0$ est la solution du coefficient d'ajustement. Alors, la probabilité de ruine $\psi(u)$ satisfait

$$\psi(u) \leq e^{-\kappa u}, u \geq 0.$$

La probabilité de ruine est bornée par le haut par une fonction du capital initial et du chargement de sécurité relatif. Supposons qu'on tolère une probabilité de ruine de α . Si un chargement de u est disponible,

$$\theta = \frac{u (E[\exp\{-\frac{\ln \alpha}{u} X\}] - 1)}{-\mu \ln \alpha} - 1.$$

Si un chargement de sécurité relatif de θ est prescrit,

$$u = \frac{-\ln \alpha}{\kappa}$$

L'inégalité de Lundberg garanti les résultats suivantes :

$$— \psi(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0;$$

$$— \phi(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) = 1.$$

10.2.2 | Équation intégral-différentielle

Sixième partie

Processus stochastiques

1 | Chaînes de Markov

1. Soit $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$, un processus qui peut prendre un nombre fini ou comptable d'états.
2. Si le processus est dans l'état i au temps n , on le note $X_n = i$.
3. Si le processus est dans l'état i , il a une probabilité fixe, notée P_{ij} , que le processus sera dans l'état j au prochain état.
4. Ce processus est appelé un processus de Markov.

On a

$$P_{ij} \geq 0, i, j \geq 0$$

et

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, i = 0, 1, \dots$$

Les probabilités sont présentées dans une matrice de transition

$$P = \begin{vmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0j} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ P_{i0} & P_{i1} & \dots & P_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

1.1 | Équations Chapman-Kolmogorov

On étudie les probabilité de transition pour plus d'une période. Soit

$$P_{ij}^n = \Pr(X_{n+k} = j | X_k = i), \quad n \geq 0, i, j \geq 0.$$

Pour calculer ces valeurs, on a

$$P_{ij}^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^n P_{kj}^m \quad \text{pour } n, m \geq 0 \forall i, j.$$

Intuition : la probabilité de partir de i et finir à j est la somme de tous les chemins possibles. En notation matricielle, on a

$$P^{n+m} = P^n P^m.$$

1.1.1 | Probabilités de visiter un état

On s'intéresse à la probabilité qu'un processus visite un état à un moment. Pour ce faire, on crée un état absorbant.

$$\begin{aligned} Q_{i,j} &= P_{i,j}, \text{ si } i \notin A, j \notin A \\ Q_{i,A} &= \sum_{j \in A} P_{i,j}, \text{ si } i \notin A \\ Q_{A,A} &= 1. \end{aligned}$$

1.2 | Classification des états

- L'état j est dit accessible de l'état i si $P_{ij}^n > 0$ pour un $n \geq 0$
- Deux états i et j qui sont accessibles l'un à l'autre sont appelés des états communicants et on les note $i \leftrightarrow j$
- Deux états qui communiquent sont appelés dans la même classe
- Une chaîne de Markov avec une seule classe est appelée irréductible
- Pour un état i , on note f_i la probabilité que partant de l'état i , le processus revisitera l'état i .
 - Si $f_i = 1$, on note l'état i récurrent. On a aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^n = \infty$$

- Si $f_i < 1$, on note l'état transient. La probabilité que le processus sera dans l'état i pour n périodes est une distribution géométrique. On a aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^n < \infty$$

- Si i est récurrent, et i communique avec j , alors j est aussi récurrent.

1.3 | Probabilités limites

Théorème 1.3.1

Pour une chaîne de Markov irréductible et ergodique, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$ existe et est indépendant de i . De plus, avec

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n, \quad j \geq 0$$

alors π_j est la solution positive unique de

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \quad j \geq 0,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1.$$

2 | Processus de Poisson

2.1 | Distribution exponentielle

Définition :

- $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$
- $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$
- Premier moment : $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- FGM : $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad \text{où } t < \lambda$
- Fonction d'intensité : $r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$

Propriétés :

- Sans mémoire : $\Pr(X > s + t | X > t) = \Pr(X > s)$
- Probabilité avec les minimums : $\Pr(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$
- Probabilité avec les minimums (n v.a.) : $\Pr(X_i = \min(X_1, \dots, X_n)) = \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_j}$
- Distribution des minimums : exponentielle avec somme des intensités

MANQUE ERLANG GÉNÉRALISÉE

2.2 | Processus de Poisson

Définition 2.2.1 : Processus de comptage

Un processus de comptage

1. $N(t) \geq 0$
2. $N(t)$ est un entier
3. si $s < t$, alors $N(s) \leq N(t)$
4. Pour $s < t$, $N(t) - N(s)$ correspond au nombre d'évènements dans l'intervalle $(s, t]$.

Un processus de comptage a

- des accroissements indépendants si le nombre d'évènements dans des intervalles distinctes sont indépendants
- des accroissements stationnaires si la distribution du nombre d'évènements dans l'intervalle dépend seulement de la longueur de l'intervalle.

Définition 2.2.2 : Processus de Poisson I

Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson avec taux $\lambda > 0$ si

1. $N(0) = 0$
2. Le processus a des accroissements indépendants
3. Le nombre d'évènements dans l'intervalle de longueur t est Poisson avec moyenne λt

Définition 2.2.3

Une fonction f est dite $o(h)$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Définition 2.2.4 : Processus de Poisson II

Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est dit un processus de Poisson avec taux d'intensité $\lambda > 0$ si

1. $N(0) = 0$
2. Le processus a des accroissements indépendants et stationnaires
3. $\Pr(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
4. $\Pr(N(h) = 2) = o(h)$

Définition 2.2.5

La séquence de temps entre les arrivées est notée par $\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$. Le temps du premier sinistre est T_1 . Avec

$$\Pr(T_1 > t) = \Pr(N(t) = 0) = e^{-\lambda t},$$

donc le temps du premier sinistre est de distribution exponentielle avec paramètre λ . Le temps entre le premier et le deuxième sinistre T_2 est

$$\Pr(T_2 > t | T_1 = s) = \Pr(N(t+s) - N(s) = 0) = e^{-\lambda(t+s-s)} = e^{-\lambda t}.$$

$T_n, n = 1, 2, \dots$ sont iid et de distribution exponentielle avec paramètre λ .

Définition 2.2.6

Le temps d'attente au n^{e} évènement est noté par la v.a. $S_n = \sum_{i=1}^n T_i, n \geq 1$. De plus, on a $S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$.

Les énoncés suivants sont équivalents :

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow S_n \leq t.$$

Propriété 2.2.7

Soient $N_1(t)$ et $N_2(t)$, deux processus de Poisson avec intensités respectives λp et $\lambda(1-p)$. Alors, $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ est un processus de Poisson avec intensité λ .

La probabilité que n évènements de type I (noté S_n^1) arrivent avant m évènements de type II (noté S_m^2). On a $P(S_1^1 < S_1^2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Répéter cette expérience donne une v.a. binomiale et on a

$$\Pr(S_n^1 < S_m^2) = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{m+n-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n+m-1-k}.$$

Proposition 2.2.8

Si 1 évènement d'un processus de Poisson a eu lieu au temps t , le temps de cet évènement est uniforme sur $[0, t]$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \Pr(T_1 < s | N(t) = 1) &= \frac{\Pr(T_1 < s, N(t) = 1)}{\Pr(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\Pr(1 \text{ évènement sur } [0, s], 0 \text{ évènement sur } [s, t])}{\Pr(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\Pr(1 \text{ évènement sur } [0, s]) \Pr(0 \text{ évènement sur } [s, t])}{\Pr(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

Une version plus générale de ce résultat est présenté dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.9

Sachant $N(t) = n$, les temps d'inter-arrivé S_1, \dots, S_n sont distribués comme les statistiques d'ordres des n v.a. uniformes sur $(0, t)$.

La densité conditionnelle de S_1, \dots, S_n sachant $N(t) = n$ est équivalente à la densité conditionnelle de $T_1 = s_1, T_2 = s_2 - s_1, \dots, T_n = s_n - s_{n-1}, T_{n+1} > t - s_n$. Alors, on a

$$\begin{aligned} f(s_1, \dots, s_n | n) &= \frac{f(s_1, \dots, s_n, n)}{\Pr(N(t) = n)} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda s_1} \lambda e^{-\lambda(s_2 - s_1)} \dots \lambda e^{-\lambda(s_n - s_{n-1})} e^{\lambda(t - s_n)}}{\frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}} \\ &= \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < s_1 < \dots < s_n < t. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.10

On suppose que si un évènement arrive au temps y , alors il sera classifié comme type i , indépendamment, avec probabilité $P_i(y), i = 1, \dots, k$, où $\sum_{i=1}^k P_i(y) = 1$. Alors, si $N_i(t), i = 1, \dots, k$ représente le nombre d'évènements de type i qui arrivent d'ici le temps t alors $N_i(t), i = 1, \dots, k$ sont des v.a. indépendantes avec moyennes

$$E[N_i(t)] = \lambda \int_0^t P_i(s) ds.$$

2.3 | Généralisations du processus de Poisson

Définition 2.3.1 : Processus de Poisson non homogène

Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non-homogène avec fonction d'intensité $\lambda(t), t \geq 0$ si

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t), t \geq t'\}$ a des accroissements indépendants
3. $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$
4. $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$

Proposition 2.3.2

Soient $\{N(t), t \geq 0\}$ et $\{M(t), t \geq 0\}$, des processus de Poisson non-homogènes indépendants, avec fonctions d'intensités respectives $\lambda(t)$ et $\mu(t)$, et soit $N^*(t) = N(t) + M(t)$. Alors,

1. $\{N^*(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non homogène avec fonction d'intensité $\lambda(t) + \mu(t)$
2. Sachant qu'un évènement de type t arrive au temps t , alors, indépendamment de ce qu'il se passe avant t , l'évènement au temps t provient du processus $\{N(t)\}$ avec probabilité

$$\frac{\lambda(t)}{\lambda(t)+\mu(t)}$$

Un avantage du processus de Poisson non-homogène est que l'hypothèse d'accroissements non stationnaires n'est plus requise. De plus, le nombre d'évènements entre s et $s+t$ est Poisson avec moyenne $\int_s^{s+t} \lambda(y)dy$.

Définition 2.3.3

Le temps du n^e évènement d'un processus de Poisson non-homogène est

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t)e^{-m(t)} \frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!},$$

où $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$.

2.3.1 | Processus de Poisson composé

Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson composé s'il peut être représenté par le modèle stochastique

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0,$$

où $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson et Y_i sont des v.a. iid et indépendantes du processus de comptage. On a

$$E[X(t)] = \lambda t E[Y] \quad \text{et} \quad \text{Var}(X(t)) = \lambda t E[Y^2].$$

Propriété 2.3.4

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$, un processus de Poisson composé avec intensité λ_1 et fonction de répartition F_1 . Soit aussi $\{Y(t), t \geq 0\}$, un processus de Poisson composé avec λ_2 et F_2 . Alors, $\{X(t) + Y(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson composé avec intensité $\lambda_1 + \lambda_2$ et fonction de répartition

$$F(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} F_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} F_2(x).$$

2.3.2 | Processus de Poisson conditionnel ou mixte

Soit $\{N(t), t \geq 0\}$, un processus de Poisson avec paramètre λ . Soit Λ , une v.a. positive représentant l'hétérogénéité du paramètre λ . Ce processus de Poisson est appelé conditionnel ou mixte. Stratégie générale : conditionner. On a

$$\Pr(N(t+s) - N(s) = n) = \int_0^\infty \Pr(N(t+s) - N(s) = n | \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

On a aussi

$$\text{Var}(N(t)) = tE[L] + t^2 \text{Var}(L).$$

De plus,

$$\Pr(\Lambda \leq x | N(t) = n) = \frac{\int_0^x (\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda) d\lambda}$$

et

$$f_{\Lambda|N(t)=n}(\lambda|n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda)}{\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda) d\lambda}.$$

Enfin,

$$\Pr(N(t) > n) = \int_0^\infty \bar{F}_\Lambda(\lambda) \lambda \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} d\lambda.$$

3 | Mouvement Brownien

3.1 | Définition

Définition 3.1.1

Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien si

1. $X(0) = 0$
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ a des accroissements stationnaires et indépendants
3. pour tout $t > 0$, $X(t)$ est de distribution normale avec moyenne 0 et variance $\sigma^2 t$.

La densité conjointe des observations est

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \dots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}).$$

Avec cette fonction de densité, on peut calculer, par exemple, la distribution conditionnelle de $X(s)$ sachant que $X(t) = B$, où $s < t$. On a

$$f_{s|t}(x|B) = \frac{f_s(x) f_{t-s}(B-x)}{f(B)} \propto \exp \left\{ -\frac{(x - Bs/t)^2}{2s(t-s)/t} \right\},$$

donc $(X(s)|X(t) = B) \sim \text{Norm}\left(\frac{s}{t}B, \frac{s}{t}(t-s)\right)$.

3.2 | Temps d'atteinte d'une barrière

Soit T_a , la première atteinte à la barrière a du mouvement Brownien. Pour calculer $\Pr(T_a \leq t)$, on utilise la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}\Pr(X(t) \geq a) &= \underbrace{\Pr(X(t) \geq a | T_a \leq t)}_{\frac{1}{2}} \Pr(T_a \leq t) + \underbrace{\Pr(X(t) \geq a | T_a > t)}_0 \Pr(T_a > t) \\ \Pr(T_a \geq t) &= 2 \Pr(X(t) > a) \\ &= 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right) \right).\end{aligned}$$

3.3 | Variations au mouvement Brownien

3.3.1 | Mouvement Brownien avec dérive

Définition 3.3.1

On dit que $\{X(t), t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien avec dérive μ et variance σ^2 si

1. $X(0) = 0$
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants et stationnaires
3. $X(t)$ est de distribution normale avec moyenne μt et variance $t\sigma^2$.

On peut exprimer le mouvement Brownien avec dérive en fonction d'un mouvement Brownien standard avec la relation

$$X(t) = \mu t + \sigma B(t).$$

3.3.2 | Mouvement Brownien géométrique

Définition 3.3.2

Soit $\{Y(t), t \geq 0\}$ un mouvement Brownien avec dérive μ et variance σ^2 . Le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ défini selon

$$X(t) = e^{Y(t)}$$

est un mouvement Brownien géométrique.

On peut montrer, à l'aide des hypothèses d'accroissements indépendants et stationnaires de $Y(t)$, que l'espérance du processus au temps t qu'on a observé jusqu'à $s, s < t$ est

$$E[X(t) | X(s), 0 \leq s \leq t] = X(s) e^{(t-s)(\mu + \sigma^2/2)}.$$

3.4 | Processus Gaussien

Définition 3.4.1

Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est appelé Gaussien, ou normal, si $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ a une distribution normale pour tout t_1, t_2, \dots, t_n .

Un mouvement Brownien est un processus Gaussien. On a

$$\text{Cov}(X(s), X(t)) = \text{Cov}(X(s), X(s) + [X(t) - X(s)]) = \text{Cov}(X(s), X(s)) = \text{Var}(X(s)) = s.$$

On considère ensuite le processus Gaussien entre 0 et 1, sachant que $X(1) = 0$. Puisque la distribution conditionnelle de $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ est Gaussienne, la distribution conditionnelle est aussi Gaussienne et on l'appelle un pont Brownien (car on sait que $X(t) = 0$ pour $t = 0$ et $t = 1$).

On a, pour $s < t < 1$ (en conditionnant sur $X(1)$)

$$\text{Cov}[(X(s), X(t)) | X(1) = 0] = s(1 - t).$$

Proposition 3.4.2

Si $\{X(t), t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard, alors $\{Z(t), 0 \leq t \leq 1\}$ est un pont Brownien lorsque $Z(t) = X(t) - tX(1)$.

3.4.1 | Mouvement Brownien intégré

Si $\{X(t), t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien, alors le processus $\{Z(t), t \geq 0\}$ est défini selon

$$Z(t) = \int_0^t X(s) ds$$

est appelé un mouvement Brownien intégré. Le processus est aussi Gaussien avec

$$E[Z(t)] = 0$$

et

$$\text{Cov}(Z(s), Z(t)) = s^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{s}{6} \right).$$

Septième partie

Finance

1 | Introduction

Définition 1.0.1 : Produit dérivé

Un produit dérivé est un outil financier dont la valeur dépend sur (ou est dérivé par) la valeur d'un autre variable sous-jacente et plus simple.

Les produits sont échangés sur différentes plateformes :

- **Marché de produits dérivés** Un marché de produits dérivés est un marché où les individus échangent des contrats standardisés, défini par le marcher d'échanges.
- **Marchés en vente libre** Lorsqu'un entente est fait entre deux parties (gré à gré), il est dit vendu en vente libre (over-the-counter). Les parties présentent le contrat à une contrepartie centrale pour réduire le risque de défaut.

Une opération au comptant (spot contract) est une opération qui implique la vente (presque) immédiate d'un titre. La valeur de l'opération au comptant est le cours au comptant (spot price).

1.1 | Contrats à termes

Les contrats à termes sont des ententes entre deux parties qui oblige la première partie à acheter à la seconde partie un actif sous-jacent à une date et un prix pré-déterminé.

- Un contrat à terme de gré à gré (forward contract) est négocié entre deux parties. Il est échangé sur un marché en vente libre. Ces contrats ont l'avantage d'être flexibles.
- Un contrat à terme standardisé (futures contract) est négocié sur un marché organisé. Le marché offre un mécanisme qui garantie que les contrats seront honorés.

La partie qui accepte d'acheter le sous-jacent prend une position longue. La partie qui accepte de vendre le sous-jacent prend une position courte. En général, le détenteur de la position longue bénéficie d'une augmentation du prix d'un sous-jacent.

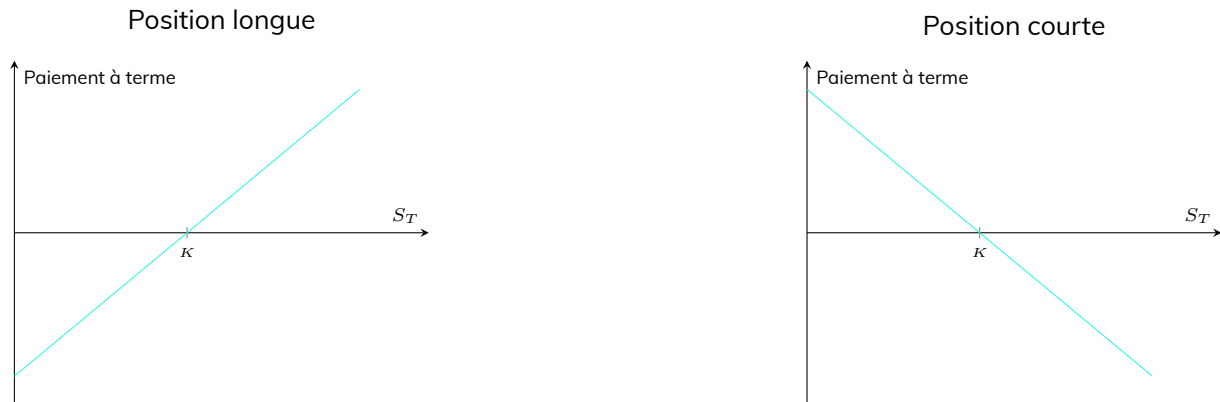
Les contrats à terme gré à gré peuvent être utilisés pour couvrir (hedge) le risque de devise étrangère.

Le paiement à terme de la position longue d'un *forward* pour une unité du sous-jacent est

$$S_T - K,$$

où K est le prix d'exercice, T est la date de maturité et S_t est le prix du sous-jacent au temps t . Le paiement à terme de la position courte d'un forward est

$$K - S_T.$$



1.2 | Options

Définition 1.2.1

- Un option d'achat (call option) donne le **droit** au détenteur d'acheter le sous-jacent d'ici une certaine date à un certain prix.
- Un option de vente (put option) donne le **droit** au détenteur de vendre le sous-jacent d'ici une certaine date à un certain prix.

Le choix d'exercer l'option ou non est toujours à la discrétion de la partie avec la position longue. C'est cette subtilité qui distingue les contrats à terme.

Le prix dans le contrat est le prix d'exercice (exercise ou strike price). La date u contrat est la date de maturité.

Une option américaine peut être exercé à tout moment jusqu'à la maturité. Une option européenne peut seulement être exercé à la maturité.

1.3 | Participants dans les marchés

- Gestionnaires de risque (hedgers) : utilisent des produits dérivés pour couvrir leurs risque, i.e. réduire ou limiter leur exposition au risque du marché. Ils veulent réduire leur exposition aux mouvements adverses du prix d'un sous-jacent. On peut couvrir un risque avec un contrat forward (neutraliser le risque) ou avec un contrat d'option (assurance contre une baisse ou hausse).
- Spéculateurs : désirent prendre une position dans le marché et exploiter un mouvement dans le prix d'un sous-jacent. Un spéculateur qui utilise des contrats à terme est exposé à beaucoup de risque. Un spéculateur qui utilise de contrats d'options a sa perte limité par le prix de l'option.
- Arbitragiste : personne qui exploite un profit sans risque en entrant simultanément dans des positions en deux ou plusieurs marchés.

Il peut être plus bénéfique pour les gestionnaires de risques et les spéculateurs d'utiliser des produits dérivés que le produit dérivé lui-même.

2 | Mécanismes du marché des futures

Ce chapitre survole les particularités des marchés de contrats à terme standardisés. Le prix des contrats à terme standardisés est négocié sur le marché, et déterminé par les principes d'offre et de demande.

La grande majorité des contrats à terme standardisés ne mènent pas à la livraison. La plupart des boursiers mettent leur positions à terme avant la période de livraison spécifiée dans le contrat. On peut fermer sa position dans un contrat en entrant dans la position inverse d'un contrat.

2.1 | Spécifications d'un contact à terme standardisé

Vu que les futures sont standardisés, on doit déterminer avec détail les particularités du contrat : le sous-jacent, la taille du contrat, où la livraison sera faite, quand la livraison sera faite.

- **Le sous-jacent** : Lorsque le sous-jacent est une marchandise (denrée, matière première), il peut y avoir de la variation dans la qualité disponible. Lorsqu'un sous-jacent est échangé, on doit spécifier le grade / la qualité de la marchandise qui est acceptable.
- **La taille du contrat** : Spécifie la quantité du sous-jacent qui doit être livré sous un seul contrat. Trop grand = peu d'acheteurs, trop petit = possiblement trop cher car il y a des frais pour chaque contrat.
- **Ententes de livraison** : La place où la livraison est faite doit être spécifiée par le marché. Ceci a un grand impacte si le sous-jacent a beaucoup de coûts de livraison.
- **Mois de livraison** : Un contrat futures est spécifié par son mois de livraison. Le marché doit spécifier la période pendant le mois où la livraison peut être faite.
- **Devis de soumission** (price quote) : définit comment les prix sont énoncés : dollars et sous ou dollars et 32e de dollars américains ?
- **Limites de prix** : parfois, les marchés limitent le mouvement des prix pour une seule journée. Si le prix baisse ou monte dans une direction plus que la limite, l'échange de ce produit est suspendu pour la journée.
- **Limites de positions** : parfois, les marchés limitent la quantité de contrats qu'un spéculateur peut détenir, pour limiter leur impacte / influence sur le marché.

Lorsque la date de livraison approche, le prix d'un future converge vers le prix d'un spot. À la date de livraison, le prix du future est égal au prix du spot.

2.2 | Opérations des comptes sur marge

Un compte sur marge permet de réduire le risque de défaut sur le contrat. Ces opérations sont fait par l'intermédiaire d'une chambre de compensation (clearing house). Le but du système de marges est d'assurer que les fonds sont disponibles pour payer les investisseurs qui font un profit.

2.2.1 | Règlement quotidien

- Lorsqu'un investisseur achète un futures, le courtier va lui demander de déposer des fonds dans un compte sur marge. Le montant qui doit être déposé à l'entrée du contrat est la **marge initiale**.
- À la fin de chaque jour d'échange, le compte sur marge doit être ajusté pour refléter le gain ou la perte de l'investisseur. Cette pratique est appelé le règlement quotidien (daily settlement ou marking to market).
- Un investisseur peut retirer toute balance au delà de la marge initiale.
- Pour s'assurer que la balance dans un compte sur marge n'est jamais négatif, une marge de maintenance est déterminé. Si la valeur du compte sur marge baisse sous la marge de maintenance, l'investisseur doit ajouter des fonds pour remonter la valeur du compte à la marge initiale d'ici la prochaine journée.
- L'ajout de fonds est appelé la variation sur marge.
- Un investisseur qui ne fournis par la variation sur marge, le courtier ferme la position.
- La plupart des courtiers paient de l'intérêt sur la balance des comptes sur marge.
- Si un investisseur ne peut pas payer la variation sur marge, il peut offrir des bons du trésor ou des actifs à une valeur moindre que leur valeur marchande (la réduction de la valeur marchande est référée à un haircut : 10% pour les bons du trésor et 50% pour les actifs).

2.2.2 | Chambres de compensation

Une chambre de compensation (clearing house) joue le rôle d'intermédiaire dans les transactions de futures. Il garantie que chaque partie puisse remplir ses obligations. Un courtier doit être membre d'une chambre de compensation, ou passer par un membre et payer la marge par ce membre. Une chambre de compensation surveille les transactions chaque jour et calcule la position nette de ses membres. Les membres de chambres de compensations doivent contribuer à un fonds de garantie, si un membre est incapable de fournir la variation sur la marge et qu'il y a une perte lorsque la position du membre est fermé.

2.3 | Marchés gré à gré (OTC)

Un contrat gré à gré est négocié entre deux parties. Le risque de crédit est plus élevé dans un marché gré à gré. Pour réduire ce risque, certains marchés gré à gré ont emprunté des idées des marchés d'échange.

2.3.1 | Contreparties centrales

Une contrepartie centrale (central counterparty, CCP) est agitée comme chambre de compensation. Un membre d'un CCP fournit la marge initiale et la variation sur la marge. Il doit aussi contribuer au fonds de garantie. Lorsque deux parties s'entendent sur la transaction d'un produit dérivé, ils la présentent à un CCP. Celui-ci devient la contrepartie entre les deux parties.

Pour un contrat forward où A accepte d'acheter un sous-jacent de B, la chambre de compensation accepte

- d'acheter le sous-jacent de B au prix convenu ;
- de vendre le sous-jacent à A au prix convenu.

Il accepte donc le risque de crédit des deux parties.

2.3.2 | Compensation bilatérale

Dans un marché compensé bilatéralement, deux compagnies entrent dans une entente mère (master agreement) qui couvre toutes leurs échanges. Cette entente inclut une annexe qui requiert les compagnies à fournir une garantie (collatérale).

2.4 | Cours du marché

Les cours de futures sont disponibles d'échanges ou en ligne. Le sous-jacent, la taille et la quantité est déterminé.

- **Prix** : Plusieurs prix sont disponibles : le prix d'ouverture (prix immédiatement à l'ouverture des marchés), le plus haut prix de la journée et le plus bas prix de la journée.
- **Prix de fermeture** : Le prix de fermeture est le prix utilisé pour déterminer le gain ou la perte quotidienne et les obligations sur les marges. Il est calculé comme le prix juste avant la fermeture des marchés.
- **Volume d'échange** : le nombre de contrats échangés pendant la journée.
- **Intérêt ouvert** : le nombre de positions longues. S'il y a un grand nombre de participants, le volume d'échange peut être plus élevé que l'intérêt ouvert.
- **Patrons des futures** : Si le prix des futures est une fonction croissante de la maturité des contrats, le patron est dit dans un marché normal. Si le prix des futures est une fonction décroissante de la maturité des contrats, le patron est dit dans un marché inversé.

2.5 | Livraison

Très peu de contrats futures mènent à la livraison du sous-jacent, la plupart sont fermés plus tôt. Par contre, le prix du futures doit tenir compte des frais possibles dans la livraison.

- La période où la livraison est faite est définie par le marché et varie de contrat à contrat. La décision de quand livrer est faite par la partie avec la position courte.

- Lorsque la position courte est prête à livrer, le courtier de la position courte envoie un avis de livraison à la chambre de compensation.
- Pour une marchandise, prendre livraison veut dire accepter un reçu d'entrepôt en échange de paiement immédiat. La partie qui prend livraison (position longue) accepte tous les coûts d'entreposage.
- Pour des produits financiers, la livraison est fait par virement bancaire.
- Le prix payé est le plus récent cours de fermeture. Si spécifié par l'échange, le prix peut être ajusté pour la qualité, la location de la livraison, etc.
- Il y a trois dates importantes : le premier jours d'avis est la première journée du mois où la position courte peut faire un avis de livraison. Le dernier jour de livraison est le dernier jour. Le dernier jour d'échange est quelques jours avant le dernier jours de livraison. Un investisseur qui ne veut pas prendre livraison devrait fermer sa position avant le premier jours d'avis.
- **Règlement en espèces** : certains futures, comme sur des indices d'actions, sont réglés en espèces car il est inconvenient ou impossible de livrer le sous-jacent. Lorsqu'un contrat est réglé en espèces, les contrats sont déclarés fermés dans un journée prédéterminée (pas de période pour l'avis de livraison). Le prix de règlement est égal au prix spot du sous-jacent à l'ouverture ou à la fermeture de l'échange cette-journée.

2.6 | Types de boursiers

Il y a deux types de boursiers qui effectuent des échanges : les marchands de commissions futures (qui effectuent des commandes de leurs clients et qui chargent des commissions), et les locaux (qui échangent sur leur propre compte). Les individus qui prennent des positions peuvent être des gestionnaires de risques, des spéculateurs ou des arbitragistes. Les spéculateurs peuvent être caractérisés comme

- scalpers : analysent des tendances à court terme et tentent de profiter de petits changements dans le prix du contrat
- day traders : ferment leur position à la fin de la journée, ils veulent éviter le risque qu'une nouvelle affecte le prix lorsque les marchés sont fermés.
- échangeurs de position : gardent leurs positions pour plus long et espèrent faire des profits de grands mouvements dans les marchés.

2.7 | Types de commandes

- **Ordre au cours du marché** (market order) : requête qu'un échange soit fait immédiatement au meilleur prix disponible sur le marché
- **Ordre à cours limité** (limit order) : spécifie un prix particulier. La commande peut être exécutée à ce prix (ou à un prix plus favorable à l'investisseur).
- **Ordre à seuil de déclenchement** (stop order ou stop-loss order) : la commande est exécutée au meilleure prix une fois que l'offre ou la demande d'achat est fait à un certain prix ou à un prix moins favorable. Ex : Stop order à 30\$ lorsque le cours du marché est 35\$: il devient un ordre de vente lorsque le prix baisse à 30. Il limite les pertes.
- **Ordre à plage de déclenchement** (stop-limit order) : combinaison d'une stop order et d'une limit order. Ex : cours spot est 35\$, une stop-limit order est émise avec prix stop de 40 et prix limite de 41. Lorsqu'il y a une demande ou une offre à 40, la stop-limit order devient une limit order à 41.
- **Market-if-touched order** : exécuté au meilleur prix après qu'un échange arrive à un certain prix (ou plus favorable). Le MIT devient une ordre au cours du marché lorsqu'un échange est effectué à un certain prix.

2.8 | Régulations

Aux états unis, les marchés de futures est régularisé par la Commodity Futures Trading Commission. Leurs rôle est de protéger l'intérêt du public :

- Irrégularités : le marché doit être efficient et dans l'intérêt du public. Une irrégularité arrive quand un groupe tente d'accaparer le marché (corner the market). Un groupe prend des positions longues dans des futures et tente de contrôler l'offre du marché du sous-jacent. Les détenteurs de positions courtes ne peuvent plus livrer le produit, et le prix des futures et du spot monte.

2.9 | Forwards vs Futures

- Profits : De plus, il y a une différence quand les gains sont réalisés. Par exemple, avec les futures, les gains / pertes sont réalisés à chaque jour car les positions sont réglées à chaque jour. Avec les forwards, le gain ou la perte est réalisée à la date de livraison.
- Cours en devises étrangères : il peut y avoir une différence dans la manière où les devises sont annoncées dans différents marchés. Souvent, forwards : USD/CAD, et futures : CAD/USD

3 | Gestion du risque avec les futures

L'objectif des gestionnaires de risque est de réduire un risque qu'ils font face. Ce risque peut être lié à la fluctuation dans le prix d'une marchandise ou d'une matière première.

Une couverture parfaite permet de réduire complètement le risque. Ces couvertures sont rares. L'objectif des couvertures est souvent de répliquer au plus possible une couverture parfaite.

On restreint notre attention aux couvertures *hedge-and-forget*, où l'on n'ajuste pas la couverture une fois qu'elle est mis en place.

Bibliographie

[Kellison, 2006] Kellison, S. G. (2006). *The theory of interest*.

[Klugman et al., 2012] Klugman, S. A., Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (2012). *Loss models : from data to decisions*, volume 715. John Wiley & Sons.