

Étude examen prédoctoral général

Christopher Blier-Wong, M.Sc., M.Sc.



UNIVERSITÉ
LAVAL

Faculté des
sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières

I	Mathématiques financières	1
1	La mesure de l'intérêt	3
1.1	Les fonctions d'accumulation et de montant	3
1.2	Le taux d'intérêt effectif	4
1.3	Intérêt simple	4
1.4	Intérêt composé	4
1.5	Valeur actualisée	4
1.6	Taux effectif d'escompte	5
1.7	Taux d'intérêt et d'escompte nominaux	6
1.8	Force d'intérêt et d'escompte	6
1.9	Intérêt variable	7
2	Solutions de problèmes d'intérêt	8
2.1	Le problème de base	8
2.2	Équations de valeur	8
3	Rentes de base	8
3.1	Introduction	9
3.2	Rente immédiate	9
3.3	Rente due	9
3.4	Perpetuité	10
3.5	Rentes payables à fréquences autres que l'intérêt est converti	10
3.5.1	Rente à fréquence inférieure à la période de conversion	10
3.6	Rentes à fréquence supérieure à la période de conversion	11
3.7	Rente continue	11
3.8	Rentes variables	12
4	Analyse du flux de trésorerie	12
4.1	Taux de rendement	12
4.2	Taux de réinvestissement	13
4.3	Mesure de l'intérêt dans un fonds	13
4.3.1	Résultats en discret	13
4.3.2	Résultats en continu	14
4.4	Taux d'intérêt pondéré par le temps	14
II	Mathématiques actuarielles vie	15
1	Distributions de survie	17
1.1	Résumé de la notation	17

1.2	Relations avec tables de mortalité	18
1.3	Groupe de survie déterministe	18
1.4	Autres caractéristiques	19
1.4.1	Relations de récursion	19
1.5	Hypothèses pour les âges fractionnaires	20
1.6	Lois analytique de survie	20
1.7	Tables de mortalité sélectes et ultimes	21
2	Assurance vie	21
2.1	Assurance continue	21
2.2	Assurance discrète	22
2.3	Relation entre l'assurance payable au moment du décès et la fin de l'année	23
3	Rentes	24
3.1	Rentes discrètes	25
3.1.1	Rente temporaire	25
3.1.2	Rentes payables en fin d'année	26
3.2	Rentes payables m fois par année	26
3.2.1	Approximations	27
4	Primes	27
4.1	Principes de primes	28
4.2	Primes pour des contrats continus	28
III	Distributions de sinistres	29
1	Quantités distributionnelles de base	31
1.1	Queues des distributions	31
2	Caractéristiques des modèles actuariels	32
2.1	Distributions paramétriques et d'échelle	32
2.2	Familles de distributions paramétriques	33
2.3	Distribution de mélange fini	33
2.4	Distributions dépendantes des données	33
3	Distributions continues	34
3.1	Créer des nouvelles distributions	34
3.1.1	Multiplication par une constante	34
3.1.2	Création de distributions en élevant à une puissance	34
3.1.3	Création de distributions avec exponentiation	35
3.1.4	Mélange	35
3.1.5	Modèles à fragilité	35
3.1.6	Raccordement de distributions connues	36
3.2	Familles de distributions et leurs liens	36
3.2.1	Distributions limites	36
3.3	Théorie des valeurs extrêmes	36
3.3.1	Distributions à valeur extrêmes (DVE)	36
3.3.2	Distribution du maximum	38
3.3.3	Stabilité du maximum des DVE	38
3.3.4	Théorème Fisher-Tippett	39
3.3.5	Domaine d'attraction du maximum	39
3.3.6	Distributions Pareto généralisées	40
3.3.7	La stabilité de l'excès	40
3.3.8	Distribution limite de l'excès	40

3.3.9 TVaR des DVA	41
4 Distributions discrètes	42
4.1 Notation et rappels	42
4.2 Loi Poisson	42
4.3 Loi binomiale négative	43
4.4 Loi binomiale	43
4.5 La classe $(a, b, 0)$	43
5 Fréquence et sévérité avec modifications de la couverture	44
5.1 Déductibles	44
5.2 Ratio d'élimination de perte et effet de l'inflation sur les déductibles ordinaires	46
5.3 Limites de polices	46
5.4 Coassurance, déductibles et limites	47
6 Rappel des notions de mathématiques statistiques	48
6.1 Estimation ponctuelle	48
6.1.1 Mesures de qualité	48
6.2 Intervalles de confiance	49
6.3 Tests d'hypothèse	50
6.3.1 Types d'erreur	50
7 Estimation pour données complètes	51
8 Estimation pour données modifiées	52
IV Théorie de la crédibilité	55
1 Crédibilité Américaine	57
2 Crédibilité Bayésienne	57
3 Le modèle de Buhlmann	58
3.1 La prime de crédibilité	58
3.2 Le modèle de Buhlmann	58
3.3 Le modèle de Buhlmann-Straub	59
3.4 Estimateurs	60
3.4.1 Modèle de Buhlmann	60
3.4.2 Modèle de Buhlmann-Straub	60
V Théorie du risque	61
1 Mesures de risque	63
1.1 Quelques mesures de risque	63
1.2 Propriétés désirables et cohérence	64
1.3 Mesures de solvabilité sur une période	65
2 Modélisation des risques	65
2.1 Modèle stochastique du risque	65
2.1.1 Fréquence et sévérité avec modification de la couverture	67
2.2 Approche indemnitaire et forfaitaire	67
2.3 Généralisations des principales lois de fréquence	68
2.4 Sommes aléatoires et allocation	68
2.5 Pertes financières	69

3	Mutualisation des risques	69
3.1	Aggrégation des risques	69
3.2	Méthodes d'approximation basée sur les moments	70
3.2.1	Approximation basée sur la distribution normale	70
3.2.2	Approximation basée sur la loi gamma translatée	71
3.2.3	Autres approximations	71
3.2.4	Approximation Poisson du modèle individuel	71
3.3	Mutualisation et activités d'assurance	71
4	Principes de prime	73
4.1	Propriétés désirables	73
4.2	Principes de prime	73
4.2.1	Principe de la valeur espérée	73
4.2.2	Principe de la variance	73
4.2.3	Principe de l'écart type	73
4.2.4	Principe de la VaR	73
4.2.5	Principe de la TVaR	74
4.2.6	Approche top-down	74
4.2.7	Principe exponentiel	74
5	Méthodes de simulation	74
5.1	Méthode de base	74
5.1.1	Simulations de v.a. définis par un mélange	74
5.1.2	Simulation de somme aléatoire	75
6	Méthodes d'aggrégation	75
7	Comparaison des risques	75
7.1	Ordres partiels	76
7.2	Ordre en dominance stochastique	77
7.3	Ordres convexes	78
8	Copules	80
8.1	Copules bivariées	80
8.2	Propriétés des copules	81
8.2.1	Notions de dépendance	81
8.3	Mesures de dépendance	82
8.4	Mesures de queue	83
8.5	Copules archimédiennes	83
8.6	Copules elliptiques	84
8.6.1	Copule gaussienne	84
8.6.2	Copule de Student	84
9	Allocation du capital	85
10	Modèles de ruine	85
10.1	Modèles à temps discret	85
10.2	Modèles à temps continu	86
10.2.1	Coefficient d'ajustement et inégalité de Lundberg.	87
10.2.2	Équation intégral-différentielle	87

VI	Processus stochastiques	89
1	Chaînes de Markov	91
1.1	Équations Chapman-Kolmogorov	91
1.1.1	Probabilités de visiter un état	92
1.2	Classification des états	92
1.3	Probabilités limites	92
2	Processus de Poisson	93
2.1	Distribution exponentielle	93
2.2	Processus de Poisson	94
2.3	Généralisations du processus de Poisson	96
2.3.1	Processus de Poisson composé	97
2.3.2	Processus de Poisson conditionnel ou mixte	97
3	Mouvement Brownien	98
3.1	Définition	98
3.2	Temps d'atteinte d'une barrière	99
3.3	Variations au mouvement Brownien	99
3.3.1	Mouvement Brownien avec dérive	99
3.3.2	Mouvement Brownien géométrique	99
3.4	Processus Gaussien	100
3.4.1	Mouvement Brownien intégré	100
VII	Finance	101
1	Introduction	103
1.1	Contrats à termes	103
1.2	Options	104
1.3	Participants dans les marchés	104
2	Mécanismes du marché des futures	105
2.1	Spécifications d'un contrat à terme standardisé	105
2.2	Opérations des comptes sur marge	106
2.2.1	Règlement quotidien	106
2.2.2	Chambres de compensation	106
2.3	Marchés gré à gré (OTC)	106
2.3.1	Contreparties centrales	107
2.3.2	Compensation bilatérale	107
2.4	Cours du marché	107
2.5	Livraison	107
2.6	Types de boursiers	108
2.7	Types de commandes	108
2.8	Régulations	109
2.9	Forwards vs Futures	109
3	Gestion du risque avec les futures	109
3.1	Principes de base	109
3.2	Arguments pour et contre les couvertures	110
3.3	Risque de corrélation	110
3.3.1	Choix du contrat	111
3.4	Couverture croisée	111
3.4.1	Ratio de couverture optimal	112
3.4.2	Nombre de contrats optimal	112

3.5	Futures sur les indices d'actions	112
3.5.1	Couvrir un portefeuille d'actions	113
3.5.2	Changer le beta d'un portefeuille	113
3.6	Stack and roll	113
4	Taux d'intérêt	114
4.1	Types de taux	114
4.2	Mesure de l'intérêt	114
4.3	Taux zero coupon	114
4.4	Tarifcation des obligations	115
4.5	Détermination des taux zero-coupon des bons du trésor	115
4.6	Taux forward	115
4.7	Accords de taux forwards	115
4.8	Duration	116
4.8.1	Portefeuille d'obligations	116
4.9	Convexité	116
4.10	Théories de la structure à terme des taux d'intérêt	117
5	Tarifcation des contrats à terme	117
5.1	Vente à découvert	118
5.2	Hypothèses et notation	118
5.3	Contrat à terme gré à gré pour un actif d'investissement	118
5.3.1	Et si on ne peut pas vendre à découvert	118
5.3.2	Comparaison des contrats à terme	119
5.3.3	Paiements connus	119
5.3.4	Rendement connu	119
5.3.5	Valeur d'un contrat à terme gré à gré	119
5.4	Contrats à terme sur les marchandises	120
5.4.1	Flux monétaires et coûts d'entreposage	120
5.4.2	Actifs de consommation	120
5.4.3	Rendement de convenance	120
5.4.4	Le coût de porter	121
5.4.5	Options de livraison	121
5.5	Prix futures et prix futures espéré	121
6	Futures sur les taux d'intérêts	122
6.1	Conventions	122
6.1.1	Convention au compte de jours	122
6.1.2	Cotes de prix des bons du trésor aux ÉU	122
6.1.3	Cotes de prix des obligations du trésor aux ÉU	122
6.2	Contrats à termes sur les bons du trésor	123
6.3	Contrat à terme Eurodollar	123
6.4	Couvrir des portefeuilles d'actifs et de passifs	123
7	Swaps	124
8	Mécaniques de marchés d'options	124
9	Propriétés du prix des actions	124
10	Stratégies d'options	124

11 Arbres binomiaux	124
11.1 Modèle binomial à une étape	124
11.2 Évaluation neutre au risque	125
11.3 Arbres binomiaux à deux étapes	126
11.4 Options américaines	126
11.5 Delta	126
11.6 Déterminer u et d en fonction de la variabilité	127
11.7 Options sur d'autres sous-jacents	127
12 Processus de Wiener	127
12.1 Processus de Wiener	128
12.1.1 Mouvement brownien	128
12.1.2 Processus de Wiener généralisé	128
12.1.3 Processus d'Itô	128
12.2 Le processus du prix d'une action	128
12.3 Processus corrélés	129
12.4 Lemme d'Itô	129
12.5 Application aux forwards	129
12.6 Propriété log-normale	130
13 Le modèle Black-Scholes-Merton	130
13.1 Distribution du rendement	130
13.1.1 Rendement attendu	130
13.1.2 Volatilité	131
13.2 Le modèle Black-Scholes-Merton	131
13.3 Les formules de Black-Scholes-Merton	132
13.4 Volatilité implicite	132
13.5 Dividendes	132
13.5.1 Options européens	133
13.5.2 Call américains	133

Première partie

Mathématiques financières

1 | La mesure de l'intérêt

Voir [Kellison, 2006], chapitre 1

1.1 | Les fonctions d'accumulation et de montant

- Le montant initial investi est appelé le *capital*
- Le montant obtenu après une période de temps est appelé la *valeur accumulée*
- La différence entre le montant accumulé et le principal est le *montant d'intérêt* ou *intérêt*
- t est le temps mesuré depuis le début la date d'investissement
- L'unité de temps est la *période de mesure* ou *période*

Définition 1.1.1 : La fonction d'accumulation

La fonction d'accumulation $a(t)$ correspond à la valeur accumulée au temps $t \geq 0$ d'un investissement initial de 1.

La fonction d'accumulation possède les propriétés suivantes :

1. $a(0) = 1$
2. $a(t)$ est généralement croissante
3. Si l'intérêt est accumulé en continu, $a(t)$ est continue

Définition 1.1.2 : Fonction de montant

La fonction de montant $A(t)$ correspond à la valeur accumulée au temps $t \geq 0$ d'un investissement initial de $k > 0$. On a

$$A(t) = k \times a(t) \quad \text{et} \quad A(0) = k.$$

Définition 1.1.3 : Montant d'intérêt

Le montant d'intérêt gagné pendant la $n^{\text{ième}}$ période depuis la date d'investissement est

$$I_n = A(n) - A(n-1) \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

1.2 | Le taux d'intérêt effectif

Définition 1.2.1

Le taux d'intérêt effectif i est le montant d'argent qu'une unité investie au début de la période va gagner pendant la période, où l'intérêt est obtenu à la fin de la période, c.-à-d. $i = a(1) - a(0)$ ou $a(1) = 1 + i$.

Le taux d'intérêt i est le ratio du montant d'intérêt gagné pendant la période et du montant de principal investi au début de la période.

Le mot effectif est utilisé lorsque l'intérêt est payé une fois par période.

Les taux d'intérêt peuvent être calculés sur n'importe quelle période d'investissement. Soit i_n , le taux d'intérêt effectif pour la $n^{\text{ième}}$ période depuis la date d'investissement. Alors, on a

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}, \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots$$

1.3 | Intérêt simple

La fonction d'accumulation est linéaire

$$a(t) = a + it \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Accumuler de l'intérêt avec ce patron correspond à l'intérêt simple. On a

$$i_n = \frac{i}{1 + i(n-1)},$$

donc un intérêt simple constant implique un taux d'intérêt effectif décroissant.

1.4 | Intérêt composé

L'intérêt composé assume que le montant accumulé est automatiquement ré-investi.

$$a(t) = (1 + i)^t \quad \text{pour } t \geq 0.$$

On a $i_n = i$, qui est indépendant de n . Alors, un taux d'intérêt composé correspond au taux d'intérêt effectif.

1.5 | Valeur actualisée

Le terme $1 + i$ est le facteur d'accumulation, car il accumule la valeur d'un investissement au début de la période à la fin de la période. On doit parfois déterminer le montant à investir pour obtenir 1 à la fin de

la période. Pour ce faire, on définit un nouveau symbole

$$v = \frac{1}{1+i}$$

parfois appelé le facteur d'escompte.

- La fonction d'escompte est $a^{-1}(t) = \frac{1}{a(t)}$.
- Pour l'intérêt simple, on a $a^{-1}(t) = \frac{1}{1+it}$.
- Pour l'intérêt composé, on a $a^{-1}(t) = \frac{1}{(1+i)^t} = v^t$.

1.6 | Taux effectif d'escompte

Définition 1.6.1 : Le taux effectif d'escompte

Le taux effectif d'escompte d est le ratio du montant d'intérêt gagné pendant la période et du montant investi à la fin de la période.

La principale différence entre le taux d'effectif d'intérêt et le taux effectif d'escompte est

- Intérêt : payé à la fin de la période divisé par la balance au début de la période.
- Escompte : payé au début de la période divisé sur la balance à la fin de la période.

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)}, \quad \text{pour un entier } n \geq 1.$$

Définition 1.6.2 : Équivalence

Deux taux d'intérêt ou d'escompte sont dit équivalant si un montant de principal investi pour la même durée à chaque taux d'intérêt produisent la même valeur accumulée.

On utilise le concept d'équivalence pour établir des liens entre les taux d'intérêt.

Si une personne emprunte 1 au taux d'escompte effectif d , le principal initial est $1 - d$ et le montant d'intérêt est d . Alors,

$$i = \frac{d}{1-d} \Rightarrow d = \frac{i}{1+i} = iv.$$

Autres relations utiles :

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i} = 1 - v;$$

$$d = iv = i(1-d) = i - id \Rightarrow i - d = id.$$

1.7 | Taux d'intérêt et d'escompte nominaux

- On considère les situations où l'intérêt est payé plus fréquemment qu'une fois par période. Ces taux sont appelés nominaux.
- Le symbole pour un taux nominal d'intérêt payé m fois par période est $i^{(m)}$, où m est un entier positif.
- Par un taux nominal d'intérêt $i^{(m)}$, on veut dire que l'intérêt est $i^{(m)}/m$ pour chaque $\frac{1}{m}$ période.
- De la définition d'équivalence, on a

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \Rightarrow i^{(m)} = m \left[(1 + i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

- Le symbole pour un taux nominal d'escompte payé m fois par période est $d^{(m)}$, où m est un entier positif.
- De la définition d'équivalence, on a

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m \Rightarrow d^{(m)} = m \left[1 - v^{\frac{1}{m}}\right]$$

- Une autre relation est

$$\frac{i^{(m)}}{m} - \frac{d^{(m)}}{m} = \frac{i^{(m)}}{m} \frac{d^{(m)}}{m}.$$

1.8 | Force d'intérêt et d'escompte

Mesure de l'intensité dont d'intérêt opère, i.e. le taux d'intérêt instantané. La force d'intérêt au temps t est défini par

$$\delta_t = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{a'(t)}{a(t)}.$$

Par la dérivée en chaîne, on a aussi

$$\delta_t = \frac{d}{dt} \ln A(t) = \frac{d}{dt} \ln a(t).$$

Autres relations :

- $\exp \left\{ \int_0^t \delta_r dr \right\} = \frac{A(t)}{A(0)} = \frac{a(t)}{a(0)} = a(t);$
- $\int_0^n A(t) \delta_t dt = \int_0^n A'(t) dt = A(n) - A(0).$ Intuition : l'intérêt est égal à la somme du capital investi au temps t multiplié par la force d'intérêt au temps t .

La force d'escompte est

$$\delta'_t = - \frac{\frac{d}{dt} a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)}.$$

On a

$$\delta_t = \delta'_t$$

Par le principe d'équivalence, on a

$$i = e^\delta - 1 \Rightarrow \delta = \ln(1 + i)$$

Séries de Taylor :

$$— i = e^\delta - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots$$

$$— \delta = \ln(1 + i) = i - \frac{i^2}{2!} + \frac{i^3}{3!} - \frac{i^4}{4!} + \dots$$

— Les termes i^k et δ^k sont très petits pour $k > 2$ car i et δ sont très petits.

Liste d'équivalences :

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i = v^{-1} = (1 - d)^{-1} = \left(1 - \frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p} = e^\delta.$$

Sous l'intérêt simple, la force d'intérêt est $\delta_t = \frac{i}{1+it}$ et la force d'escompte est $\delta'_t = \frac{d}{1-dt}$. On remarque que δ_t est une fonction croissante et δ'_t est une fonction décroissante.

En utilisant l'expansion de Taylor, on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} = \delta$$

et

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d^{(m)} = \delta'$$

1.9 | Intérêt variable

— Si la force d'intérêt change, on utilise la relation $a(t) = e^{\int_0^t \delta_r dr}$

— Si le taux effectif d'intérêt change, on utilise la relation

$$a(t) = (1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \dots (1 + i_t) = \prod_{k=1}^t (1 + i_k)$$

— Si le taux effectif d'escompte change, on utilise la relation

$$a^{-1}(t) = (1 - d_1)(1 - d_2)(1 - d_3) \dots (1 - d_t) = \prod_{k=1}^t (1 - d_k)$$

— On a aussi

$$a^{-1}(t) = (1 + i_1)^{-1}(1 + i_2)^{-1}(1 + i_3)^{-1} \dots (1 + i_t)^{-1} = \prod_{k=1}^t (1 + i_k)^{-1} = \prod_{k=1}^t v_k$$

2 | Solutions de problèmes d'intérêt

Voir [Kellison, 2006], chapitre 2.

2.1 | Le problème de base

Les problèmes d'intérêts sont composés de quatre éléments :

1. Le principal investi initialement
2. La longueur de la période d'investissement
3. Le taux d'intérêt
4. La valeur accumulée du principal à la fin de la période d'investissement.

Connaissant trois éléments, le quatrième peut être résolu.

2.2 | Équations de valeur

- Principe fondamental : la valeur temporelle de l'argent.
- Deux valeurs monétaires à différents temps ne peuvent pas être comparées.
- On doit accumuler ou escompter les valeurs à une *date de comparaison*
- L'équation qui compare deux valeurs monétaires à la même date de comparaison est l'équation de valeur.

3 | Rentes de base

Voir [Kellison, 2006], chapitres 3 et 4

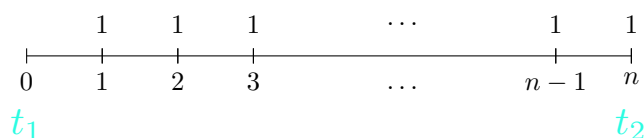
3.1 | Introduction

Définition 3.1.1 : Rente

- Une rente est une série de paiements fait à intervalles égaux.
- Une rente certaine est une rente dont les paiements sont faits pour une période de temps avec certitude.
- L'intervalle entre les paiements est la période de paiements

3.2 | Rente immédiate

Une rente immédiate paie 1 à la fin de chaque période pour n périodes.



La valeur actualisée d'une rente immédiate (au temps t_1) est notée par $a_{\overline{n}|}$. On a

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1} + v^n = \frac{1 - v^n}{i}.$$

La valeur accumulée d'une rente immédiate (au temps t_2) est notée par $s_{\overline{n}|}$

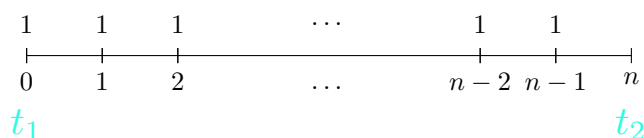
$$s_{\overline{n}|} = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

Quelques relations

$$\begin{aligned} \text{— } 1 &= ia_{\overline{n}|} + v^n & \text{— } s_{\overline{n}|} &= a_{\overline{n}|}(1 + i)^n & \text{— } \frac{1}{a_{\overline{n}|}} &= \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i \end{aligned}$$

3.3 | Rente due

Une rente due paie 1 au début de chaque période pour n périodes.



La valeur actualisée d'une rente due (au temps t_1) est notée par $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. On a

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 \cdots + v^{n-2} + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

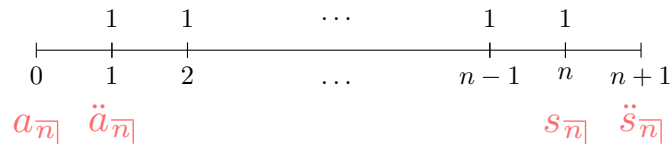
La valeur accumulée d'une rente due (au temps t_2) est notée par $\ddot{s}_{\overline{n}|}$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \cdots + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1} = \frac{(1 + i)^n - 1}{d}.$$

Quelques relations

$$\begin{array}{lll} \text{--- } \ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1 + i)^n & \text{--- } \ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1 + i) & \text{--- } \ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|} \\ \text{--- } \frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + d & \text{--- } \ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|}(1 + i) & \text{--- } \ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1 \end{array}$$

Comparaison des rentes :



3.4 | Perpetuité

Une perpetuité est une rente de durée infinie.

$$a_{\infty|} = \frac{1}{i}; \quad \ddot{a}_{\infty|} = \frac{1}{d}$$

3.5 | Rentes payables à fréquences autres que l'intérêt est converti

3.5.1 | Rente à fréquence inférieure à la période de conversion

S'il y a k périodes de conversion dans une période de paiement, la valeur actualisée d'une rente immédiate est

$$v^k + v^{2k} + \cdots + v^{\frac{n}{k} \times k} = \frac{v^k - v^{nk}}{1 - v^k} = \frac{1 - v^n}{(1 + i)^k - 1} = \frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}.$$

La valeur actualisée d'une rente due est

$$1 + v^k + v^{2k} + \dots + v^{\frac{n}{k} \times k - k} = \frac{1 - v^n}{1 - v^k} = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}.$$

Note : la manipulation des termes $a_{\overline{n}|}$ et $s_{\overline{n}|}$ doit être intuitive.

3.6 | Rentes à fréquence supérieure à la période de conversion

Soit m , le nombre de paiements par période de conversion de l'intérêt et n , le nombre de périodes de conversion de l'intérêt. Chaque paiement est de $\frac{1}{m}$, tel que la somme de 1 est payée pendant une période de conversion. Alors, il y a mn paiements.

La valeur actualisée de cette rente immédiate est

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \left[v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \dots + v^{\frac{mn-1}{m}} + v^{\frac{mn}{m}} \right] = \frac{1 - v^n}{m \left((1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right)} = \frac{1 - v^n}{i^{(m)}}$$

et la valeur accumulée est

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = a_{\overline{n}|}^{(m)} (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i^{(m)}}.$$

De manière équivalente, la valeur actualisée d'une rente due est

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1 - v^n}{d^{(m)}}$$

3.7 | Rente continue

L'expression pour la valeur actualisée d'une rente qui paie 1 par période d'intérêt est

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt = \frac{1 - v^n}{\delta}.$$

L'expression pour la valeur accumulée d'une rente qui paie 1 par période d'intérêt est

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n (1+i)^t dt = \frac{(1+i)^n - 1}{\delta}.$$

On a aussi

$$\frac{d}{dt} \bar{s}_{\overline{t}|} = 1 + \delta \bar{s}_{\overline{t}|}$$

alors, à chaque moment, la rente paie 1 et la force de l'intérêt fois la valeur accumulée de la rente depuis le début de la rente.

3.8 | Rentes variables

Progression géométrique seulement. Dans le cas de l'intérêt composé avec des paiements qui grandissent selon un patron géométrique, on peut se définir un nouveau taux d'intérêt et utiliser les résultats existants.

4 | Analyse du flux de trésorerie

Voir [Kellison, 2006], chapitre 5. Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier des positions financières où des entrées et des sorties de fonds sont faites dans le compte.

4.1 | Taux de rendement

On considère des situations où l'investisseur des entrées de fonds de montant $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ aux temps $0, 1, 2, \dots, n$. On suppose que les temps $t, t + 1$ sont espacés de manière uniforme. Note : $C_i, i = 1, \dots, n$ peut être négatif, qui correspond à une sortie de fonds.

On note un rendement (sortie de fonds) au temps t par $R_t, t = 0, 1, 2, \dots, n$, alors $C_t = -R_t, t = 0, 1, 2, \dots, n$.

La valeur actualisée nette est

$$P(i) = \sum_{t=0}^n v^t R_t.$$

Définition 4.1.1

Le taux de rendement est le taux où la valeur actualisée nette des rendements de l'investissement est égale à la valeur actualisée des contributions dans l'investissement. Ce taux est aussi appelé le taux de rendement interne.

On peut trouver le taux de rendement i selon l'équation de valeur

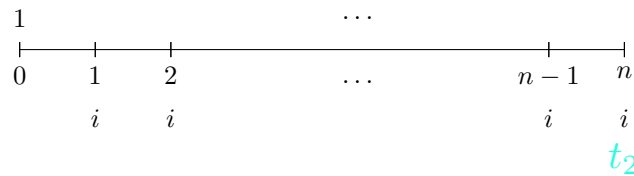
$$P(i) = 0.$$

Un taux de rendement est seulement comparable à un autre si la durée de l'investissement est identique.

4.2 | Taux de réinvestissement

Jusqu'à présent, on n'a pas considéré le taux d'intérêt sur les réinvestissements, on a supposé que ce taux était constant toute la durée de l'investissement. Par contre, un investissement à court terme rapportera probablement un taux d'intérêt inférieur à un investissement à long terme, donc le taux de réinvestissement pourrait être plus petit que le taux de rendement initial.

On considère un investissement de 1 pour n périodes au taux i et au taux de réinvestissement j . L'investissement initial retourne i à chaque période, qui est investi au taux j . Le diagramme de temps est



La valeur accumulée est $1 + i s_{\overline{n}|j}$.

4.3 | Mesure de l'intérêt dans un fonds

Définitions :

- A : le montant dans le fonds au début de la période
- B : le montant dans le fonds à la fin de la période
- I : le montant d'intérêt obtenu pendant la période
- C_t : le montant net de capital contribué au temps t , pour $0 \leq t \leq 1$
- C : le montant de capital total pendant la période, $C = \sum_t C_t$
- ${}_a i_b$: le montant d'intérêt obtenu pour un capital de 1 investi au temps b pendant a unités, et $a + b \leq 1$

4.3.1 | Résultats en discret

Le montant dans le fonds à la fin de la période est la somme du montant initial, les contributions et l'intérêt

$$B = A + C + I.$$

Le montant d'intérêt obtenu est la somme de l'intérêt sur le montant initial et sur les contributions.

$$I = iA + \sum_t C_t \times {}_{1-t}i_t.$$

Avec l'hypothèse d'intérêt composé, on a

$${}_{1-t}i_t = (1 + i)^{1-t} - 1.$$

Une hypothèse simplificatrice est

$$1-t i_t \simeq (1-t)i,$$

qui nous permet d'écrire

$$i \simeq \frac{I}{A + \sum_t C_t(1-t)},$$

qui s'interprète comme l'investissement obtenu divisé par la somme pondérée des contributions. Cette hypothèse tient si les C_t sont petits comparés à A .

Une autre hypothèse est que les contributions sont faites uniformément sur la période, donc en moyenne au temps 0.5. L'approximation devient

$$i \simeq \frac{I}{A + 0.5(B - A - I)} = \frac{2I}{A + B - I}.$$

4.3.2 | Résultats en continu

Le montant du fonds au temps n est

$$B_n = B_0(1+i)^n + \int_0^n C_t(1+i)^{n-t} dt.$$

Une formule plus générale est

$$B_n = B_0 e^{\int_0^n \delta_s ds} + \int_0^n C_t e^{\int_t^n \delta_s ds} dt,$$

qui a une équation différentielle associée

$$\frac{d}{dt} B_t = \delta_t B_t + C_t,$$

donc le rendement instantané est la somme de

- la force d'intérêt au temps t multiplié par la valeur du fonds au temps t ;
- la contribution continue.

4.4 | Taux d'intérêt pondéré par le temps

Le taux de rendement peut dépendre des contributions intermédiaires $C_t, t = 0, 1, 2, \dots, n$.

Le taux d'intérêt pondéré par le temps est une mesure de performance différente. On décompose la période d'investissement à chaque fois où une contribution est faite et on détermine le taux d'intérêt pour chaque intervalle intermédiaire.

Le taux d'intérêt de l'intervalle k est

$$j_k = \frac{B'_k}{B'_{k-1} + C'_{k-1}}.$$

Le taux de rendement est obtenu selon la relation

$$1+i = (1+j_1)(1+j_2) \dots (1+j_m).$$

Deuxième partie

Mathématiques actuarielles vie

1 | Distributions de survie

1.1 | Résumé de la notation

Symbole	Description
(x)	âge de x
$[x]$	âge à la sélection de x
X	v.a. de l'âge au décès
$T(x)$	v.a. de la vie de (x) , aussi $X - x$
$K(x)$	v.a. de la vie entière de x , aussi $\lfloor T(x) \rfloor$
$S(x)$	v.a. de la partie fractionnaire de l'âge au décès, aussi $T(x) - K(x)$

Symbole	Description	
$s(x)$	fonction de survie d'un nouveau né	$\bar{F}_X(x)$
$\mu(x)$	force de mortalité	$\frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}$
$\mu_x(t)$	force de mortalité pour une sélection à l'âge x	
${}_tq_x$	probabilité que (x) décède dans les t prochaines années	$\Pr(T(x) \leq t)$
${}_tp_x$	probabilité que (x) survive les t prochaines années	$\Pr(T(x) > t)$
${}_t uq_x$	probabilité que (x) survive t mais décède avant $t + u$	$\Pr(t < T(x) < t + u)$
\dot{e}_x		$E[T(x)]$
e_x		$E[K(x)]$

Autres relations :

$$\text{— } \Pr(K(x) = k) = {}_kp_xq_{x+k} = {}_k|q_x$$

$$\text{— } F_{K(x)}(y) = \sum_{h=0}^{\lfloor y \rfloor} {}_h|q_x$$

Outil	Relations			
	$F_X(x)$	$s(x)$	$f_X(x)$	$\mu(x)$
$F_X(x)$		$1 - F_X(x)$	$F'_X(x)$	$\frac{F'_X(x)}{1 - F_X(x)}$
$s(x)$	$1 - s(x)$		$-s'(x)$	$-\frac{s'(x)}{s(x)}$
$f_X(x)$	$\int_0^x f_X(t)dt$	$\int_x^\infty f_X(t)dt$		$\frac{f_X(x)}{\int_x^\infty f_X(t)dt}$
$\mu(x)$	$1 - \exp\left\{-\int_0^x \mu(t)dt\right\}$	$\exp\left\{-\int_0^x \mu(t)dt\right\}$	$\mu(x) \exp\left\{-\int_0^x \mu(t)dt\right\}$	

1.2 | Relations avec tables de mortalité

On peut obtenir la probabilité de décès avec la relation

$${}_tq_x = 1 - \frac{s(x+t)}{s(x)}.$$

Soit

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{si l'assuré } j \text{ survie jusqu'à } x \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Symbole	Description	Formule
l_0	nombre initial de nouveaux nés dans la cohorte	
$\mathcal{L}(x)$	v.a. du nombre de survivants d'une cohorte à l'âge x	$\sum_{j=1}^{l_0} I_j$
${}_n\mathcal{D}_x$	v.a. du nombre de décès entre les âges x et $x+n$ d'une cohorte	$E[\mathcal{L}(x)]$
l_x		$E[{}_n\mathcal{D}_x] = l_x - l_{x+n}$
${}_nd_x$		
m_x	âge centrale au décès	
ω	Oméga, l'âge limite d'une table de mortalité	

De plus, $\mathcal{L}(x) \sim \text{Bin}(l_0, s(x))$.

1.3 | Groupe de survie déterministe

Définition 1.3.1

Un groupe de survie déterministe, représenté par une table de mortalité, a les caractéristiques suivantes :

- le groupe contient l_0 nouveaux nés initialement
- les membres sont sujets à taux de mortalité q_x pour chaque année de leur vie

— le groupe est fermé, la taille du groupe change seulement si un membre est décédé.

Récursion avec probabilités de décès :

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0(1 - q_0) \\ l_2 &= l_1(1 - q_1) \\ l_3 &= l_2(1 - q_2) \\ &\vdots \\ l_x &= l_{x-1}(1 - q_{x-1}) = l_0(1 - q_0) \dots (1 - q_{x-1}). \end{aligned}$$

Récursions avec probabilités de survie :

$$\begin{aligned} l_1 &= l_0 p_0 \\ l_2 &= l_1 p_1 = l_0 p_0 p_1 \\ l_3 &= l_2 p_2 = l_0 p_0 p_1 p_2 \\ &\vdots \\ l_x &= l_{x-1} p_{x-1} = l_0 \prod_{y=0}^{x-1} p_y. \end{aligned}$$

1.4 | Autres caractéristiques

$$\begin{aligned} \bar{e}_x &= E[T(x)] = \int_0^\infty {}_t p_x \mu(x+t) dt \\ &= \int_0^\infty {}_t p_x dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[T(x)^2] &= \int_0^\infty t^2 {}_t p_x \mu(x+t) dt \\ &= \int_0^\infty 2t {}_t p_x dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_x &= E[K(x)] = \sum_{k=0}^\infty k {}_k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^\infty {}_k p_x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[K(x)^2] &= \sum_{k=0}^\infty k^2 {}_k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=0}^\infty (2k-1) {}_k p_x. \end{aligned}$$

1.4.1 | Relations de récursion

Définition 1.4.1

La formule de récursion arrière est sous la forme

$$u(x) = c(x) + d(x)u(x+1)$$

La formule de récursion avant est sous la forme

$$u(x+1) = -\frac{c(x)}{d(x)} + \frac{1}{d(x)}u(x)$$

Exemple 1.4.1 : Trouver la relation de récursion arrière pour e_x .

On a

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x.$$

On sort le premier terme de la relation et on obtient

$$e_x = p_x + \sum_{k=2}^{\infty} {}_k p_x.$$

On applique un glissement d'indices et on obtient

$$e_x = p_x + \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{x+1} = p_x + p_x e_{x+1}.$$

On conclut que $u(x) = e_x$, $c(x) = p_x$ et $d(x) = p_x$. Le point de départ est $u(\omega) = 0$.

1.5 | Hypothèses pour les âges fractionnaires

On utilise l'interpolation linéaire pour les âges fractionnaires, c.-à-d.

$$s(x+t) = (1-t)s(x) + ts(x+1).$$

Cette méthode est appelée distribution uniforme des décès (DUD).

Fonction	Hypothèse
${}_t q_x$	$\frac{{}_t q_x}{q_x}$
$\mu(x+t)$	$\frac{1 - {}_t q_x}{(1-t)q_x}$
${}_{1-t} q_{x+t}$	$\frac{1 - {}_t q_x}{{}_y q_x}$
${}_y q_{x+t}$	$\frac{1 - {}_t q_x}{1 - {}_t q_x}$
${}_t p_x$	$1 - {}_t q_x$
${}_t p_x \mu(x+t)$	q_x

1.6 | Lois analytique de survie

Nom	$\mu(x)$	$s(x)$
De Moivre	$(\omega - x)^{-1}$	$1 - \frac{x}{\omega}$
Gompertz	Bc^x	$\exp \left\{ -\frac{B}{\log c} (c^x - 1) \right\}$
Makeham	$A + Bc^x$	$\exp \left\{ -Ax - \frac{B}{\log c} (c^x - 1) \right\}$
Weibull	kx^n	$\exp \left\{ -\frac{k}{n+1} x^{n+1} \right\}$

1.7 | Tables de mortalité sélectes et ultimes

Pour un assuré observé à (x) , on pourrait penser avoir plus d'information qu'un assuré observé plus tôt mais qui a survécu jusqu'à x . Alors, on se définit une table de mortalité sélecte pour les assurés observés à (x) . On note cette sélection dans la notation comme $[x]$.

- Pendant r années (la période de sélection), on a $q_{[x]+1} \neq q_{x+1}$.
- Après r années, on a $q_{[x]+r+1} = q_{x+r+1}$.

2 | Assurance vie

2.1 | Assurance continue

La variable aléatoire qui représente l'assurance vie est notée $Z = b_T v_T$, où b_t est une fonction de prestation et v_t est une fonction d'escompte. La variable aléatoire T représente la durée de vie de l'assuré, comme présenté dans le chapitre sur les distributions de survie.

Définition 2.1.1 : Assurance vie temporaire n -années

Cette assurance paie 1 si l'assuré décède pendant les n premières années et 0 sinon. La variable aléatoire est

$$Z = \begin{cases} v^T, & T \leq n \\ 0, & T > n \end{cases}$$

L'espérance de cette variable aléatoire est

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = E[Z] = \int_0^n v^t {}_t p_x \mu_x(t) dt.$$

Le $j^{\text{ème}}$ moment est

$${}_j \bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = E[Z^j] = \int_0^n (v^t)^j {}_t p_x \mu_x(t) dt,$$

donc est égal au premier moment mais où la force d'intérêt est multipliée par j . De plus, on a

$$F_Z(x) = \begin{cases} \bar{F}_{T_x}(n), & x = 0 \\ \bar{F}_{T_x}(n), & 0 < x < bv^n \\ \bar{F}_{T_x}\left(-\frac{1}{\delta} \ln\left(\frac{x}{b}\right)\right), & bv^n < x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

On déduit que

$$VaR_{\kappa}(Z) = \begin{cases} 0, & 0 < \kappa < \bar{F}_{T_x}(n) \\ bv^{VaR_{1-\kappa}(T_x)}, & \bar{F}_{T_x}(n) < \kappa < 1 \end{cases}$$

et

$$TVaR_{\kappa}(Z) = \begin{cases} \frac{1}{1-\kappa} b\bar{A}_{x:\overline{n}|}, & 0 < \kappa < {}_np_x \\ \frac{1}{1-\kappa} b\bar{A}_{x:\overline{VaR_{1-\kappa}(T_x)}|}, & {}_np_x < \kappa < 1 \end{cases}$$

Définition 2.1.2 : Assurance vie complète

La variable aléatoire pour une assurance vie complète est

$$Z = v^T, t \geq 0.$$

C'est un cas particulier de l'assurance vie temporaire avec $n \rightarrow \infty$. On a

$${}^j\bar{A}_x = \int_0^{\infty} v^{jt} {}_tp_x \mu_x(t) dt.$$

Définition 2.1.3 : Capital différé

Un capital différé verse une prestation après n années si l'assuré a survécu les n années. La v.a. est

$$Z = \begin{cases} 0 & , T \neq n \\ v^n & , T > n \end{cases}$$

La notation est

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = {}_nE_x = v^n {}_np_x.$$

Définition 2.1.4 : Assurance capital différé (assurance mixte)

Une assurance capital différé verse une prestation au décès ou après n années. La v.a. est

$$Z = \begin{cases} 0 & , T \neq n \\ v^n & , T > n \end{cases}$$

La notation est

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}^1 = {}_nE_x = v^n {}_np_x.$$

2.2 | Assurance discrète

Une assurance discrète est une assurance payable à la fin de l'année de décès.

Définition 2.2.1

La variable aléatoire pour une assurance temporaire n années est

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

L'espérance de la valeur actualisée de cette variable aléatoire est

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k}.$$

Avec la règle des moments, on a

$$\text{Var}(Z) = {}^2A_{x:\overline{n}|}^1 - (A_{x:\overline{n}|}^1)^2,$$

où

$${}^2A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} v^{2k+2} {}_k p_x q_{x+k}$$

Des relations de récursion existent aussi pour une assurance discrète :

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = vq_x + vp_x A_{x+1:\overline{n-1}|}^1$$

Intuition : une assurance temporaire n années est égale à une assurance temporaire un an plus une assurance temporaire $n-1$ ans à un assuré d'âge $x+1$ dans un an.

Définition 2.2.2

La variable aléatoire pour une assurance capital différé payable à la fin de l'année est

$$Z = \begin{cases} v^{K+1}, & K = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ v^n, & K = n, n+1, \dots \end{cases}$$

La valeur actuarielle actualisée est

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_k p_x q_{x+k} + v^n {}_n p_x$$

2.3 | Relation entre l'assurance payable au moment du décès et la fin de l'année

Avec l'hypothèse DUD, on a

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x.$$

De manière similaire, on a

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x.$$

3 | Rentes

Définition 3.0.1

Une rente vie-entière paie des prestations jusqu'à la mort de l'individu. La variable aléatoire correspondant à la valeur actualisée de cette rente est

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|}.$$

La fonction de répartition est

$$F_Y(y) = F_T\left(\frac{-\log(1 - \delta y)}{\delta}\right), \quad 0 < y < \frac{1}{\delta}$$

et la fonction de densité est

$$\frac{1}{1 - \delta y} f_T\left(\frac{-\log(1 - \delta y)}{\delta}\right), \quad 0 < y < \frac{1}{\delta}.$$

La valeur actualisée est

$$\bar{a}_x = E[Y] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{t}|} p_x \mu_{x+t} dt = \int_0^\infty v^t p_x dt = \int_0^\infty {}_tE_x dt.$$

On peut définir des relations de récursion comme

$$\bar{a}_x = a_{x:\overline{1}|} + v p_x \bar{a}_{x+1}.$$

Savoir interpréter ces relations (Une rente vie entière est une rente temporaire un an plus une rente vie entière dans un an, si l'assuré survit un an).

De la définition de la rente continue, on avait

$$\bar{a}_{\overline{t}|} = \frac{1 - v^t}{\delta}.$$

En prenant l'espérance des deux côtés de l'équation, on obtient la relation

$$\bar{a}_x = \frac{1 - A_x}{\delta}.$$

On a aussi

$$\begin{aligned} Var(\bar{a}_{\overline{T}|}) &= Var\left(\frac{1 - v^T}{\delta}\right) \\ &= \frac{Var(v^T)}{\delta^2} = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} \end{aligned}$$

3.1 | Rentes discrètes

Définition 3.1.1 : Rente-due vie entière

On considère une rente qui paie 1 au début de chaque période chaque année où (x) survit. La variable aléatoire de la valeur actualisée est

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}.$$

La valeur actuarielle actualisée est

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} k p_x q_{k+k} = \sum_{k=0}^{\infty} v^k k p_x.$$

La relation avec une rente discrète est

$$\frac{1 - A_x}{d}.$$

3.1.1 | Rente temporaire

Définition 3.1.2 : Rente temporaire n années

La variable aléatoire de la valeur actualisée pour une rente temporaire est

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & 0 \leq K < n \\ \ddot{a}_{\overline{n}|}, & K \geq n \end{cases}$$

L'espérance de cette variable aléatoire est

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} k p_x q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|} n p_x = \sum_{k=0}^{n-1} v^k k p_x.$$

On a la relation

$$\frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}.$$

Définition 3.1.3 : Rente différée n années

Une rente différée n années paie 1 au début de chaque année lorsque (x) survit, à partir de l'âge $x + n$. La variable aléatoire est

$$Y = \begin{cases} 0, & 0 \leq K < n \\ {}_n| \ddot{a}_{\overline{K+1-n}|}, & K \geq n \end{cases}$$

L'espérance de la variable aléatoire est

$${}_n|a_x = \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_k p_x = {}_n E_x \ddot{a}_{x+n} = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}.$$

Définition 3.1.4 : Rente viagère garantie n années

Une rente viagère garantie n années paie une rente certaine pour n ans (peu importe si l'assuré survit ou non) et continue les paiements jusqu'au décès. La variable aléatoire de la valeur actualisée des paiements est

$$Y = \begin{cases} \ddot{a}_{\overline{n}|}, & 0 \leq K < n \\ \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, & K \geq n \end{cases}$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} q_x + \sum_{k=n}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} {}_k p_x q_{x+k} = \ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=n}^{\infty} v^k {}_k p_x$$

3.1.2 | Rentes payables en fin d'année

Des versions fin de période sont disponibles pour les rentes. La variable aléatoire qui représente la valeur actualisée des paiements de ces rentes de type

$$Y = a_{\overline{T}|}$$

et l'espérance de cette variable aléatoire est

$$a_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x q_{x+k} a_{\overline{k}|} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_k p_x.$$

Le lien entre cette variable aléatoire et une assurance est

$$a_x = \frac{1 - (1+i)A_x}{i}.$$

3.2 | Rentes payables m fois par année

Définition 3.2.1

Une rente qui paie m fois par année le montant $\frac{1}{m}$ chaque période où l'assuré survit est noté $\ddot{a}_x^{(m)}$. La variable aléatoire de la valeur actualisée est

$$Y = \sum_{j=0}^{mK+J} \frac{1}{m} v^{j/m} = \ddot{a}_{\overline{K+(J+1)/m}|}^{(m)} = \frac{1 - v^{K+(J+1)/m}}{d^{(m)}},$$

où K est le nombre d'années complètes et $J + 1$ est le nombre de paiements faits dans l'année de décès. L'espérance de cette variable aléatoire est

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{h=0}^{\infty} v^{h/m} {}_{h/m}p_x = \frac{1 - A_x^{(m)}}{d^{(m)}}.$$

3.2.1 | Approximations

On peut utiliser des approximations sur la mortalité pour obtenir des approximations des rentes payables m fois par année à partir des rentes payables une fois par année.

Proposition 3.2.2

Sous DUD, on a

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \alpha(m) \times \ddot{a}_x - \beta(m),$$

où

$$\alpha(m) = s_{\overline{1}|}^{(m)} \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} \frac{d}{d^{(m)}}$$

et

$$\beta(m) = \frac{s_{\overline{1}|}^{(m)} - 1}{d^{(m)}} = \frac{i - i^{(m)}}{i^{(m)} d^{(m)}}$$

Proposition 3.2.3

Sous l'hypothèse que $v^{k+j/m} {}_{k+j/m}p_x$ est linéaire, on a

$$\alpha(m) = 1$$

et

$$\beta(m) = \frac{m-1}{2m}$$

Connaître la preuve des propositions 3.2.2 et 3.2.3.

4 | Primes

Ce chapitre s'intéresse aux primes d'assurance ou de rentes.

4.1 | Principes de primes

Les primes sont souvent basés sur le principe d'équivalence.

Définition 4.1.1

Le principe d'équivalence requiert que l'espérance de la perte L soit nulle, c'est-à-dire

$$E[L] = 0.$$

Les primes qui satisfont le principe d'équivalence sont appelés des primes nettes.

On a

$$E[\text{valeur actualisée de la prestation}] = E[\text{valeur actualisée des primes}]$$

Un autre principe de prime est la prime percentile, où la prime est déterminée de telle sorte que la probabilité d'avoir une perte positive est plus petite qu'un seuil α .

4.2 | Primes pour des contrats continus

La valeur actualisée de la perte de l'assureur est

Troisième partie

Distributions de sinistres

1 | Quantités distributionnelles de base

Voir [Klugman et al., 2012], section 3.4

1.1 | Queues des distributions

- Classification basée sur les moments
 - Une manière de classer des distributions est basé sur le nombre de moments qui existent. Une distribution dont tous les moments existent (la FGM existe) est à queue légère.
- Comparaisons basée sur le comportement de queue limite
 - Pour deux distributions avec la même moyenne, une distribution a une queue plus lourde que l'autre si le ratio des fonctions de survie diverge à l'infini.
- Classification basée sur la fonction de hazard
 - Les distributions avec une fonction de hazard décroissante a une queue lourde
 - Les distributions avec une fonction de hazard croissante a une queue légère
 - Une distribution a une queue plus légère que l'autre si sa fonction de hazard augmente à plus rapidement que l'autre.
 - Rappel :

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}, \quad S(x) = \exp \left\{ - \int_0^x h(y) dy \right\}$$

- Classification basée sur la fonction d'excès moyen
 - Si la fonction d'excès moyen est croissante en d , la distribution a une queue lourde.
 - Si la fonction d'excès moyen est décroissante en d , la distribution a une queue légère.
 - On peut comparer deux distributions basé sur le taux de croissance ou décroissance de la fonction d'excès moyen.
 - Rappel :

$$e_X(d) = E[X - d | X > d] = \frac{\int_d^\infty S(x) dx}{S(d)}$$

- Distributions d'équilibre et comportement de queue
 - Distribution d'équilibre
 - $f_e(x) = \frac{S(x)}{E[X]}, \quad x \geq 0$
 - $S_e(x) = \frac{\int_x^\infty S(t) dt}{E[X]}, \quad x \geq 0$

$$— h_e(x) = \frac{f_e(x)}{S_e(x)} = \frac{S(x)}{\int_x^\infty S(t)dt} = \frac{1}{e(x)}$$

- Lire le texte pour le lien entre la fonction de hazard, la fonction d'excès moyen et la lourdeur de la queue

2 | Caractéristiques des modèles actua-riels

Voir [Klugman et al., 2012],

Dans ce chapitre, les modèles sont caractérisés par combien d'information est nécessaire pour spécifier le modèle. Le nombre de paramètre donne une indication de la complexité du modèle.

2.1 | Distributions paramétriques et d'échelle

Définition 2.1.1 : Distribution paramétrique

Ensemble de distributions déterminée par une ou plus valeurs appelé(s) paramètre. Le nombre de paramètre est fixe et connu

Définition 2.1.2 : Distribution d'échelle

Si une variable aléatoire est multipliée par une constante positive, et que la nouvelle variable aléatoire est dans le même ensemble de distributions, elle est dite une distribution d'échelle.

Définition 2.1.3 : Paramètre d'échelle

Un paramètre d'échelle satisfait deux conditions :

1. Lorsqu'une distribution d'échelle est multipliée par une constante, ce paramètre d'échelle est multiplié par la même constante.
2. Tous les autres paramètres de la distribution restent inchangés (le paramètre d'échelle absorbe tout le changement d'échelle).

2.2 | Familles de distributions paramétriques

Définition 2.2.1 : Familles de distributions paramétriques

Ensemble de distributions qui sont reliées de manière significative. Exemple : la loi exponentielle est un cas particulier de la loi gamma avec $\alpha = 1$. Alors, la loi exponentielle est reliée de manière significative avec la loi gamma.

2.3 | Distribution de mélange fini

Définition 2.3.1 : Mélange k -point

Une distribution est un mélange k -point si

$$F_Y(y) = a_1 F_{X_1}(y) + a_2 F_{X_2}(y) + \cdots + a_k F_{X_k}(y)$$

avec $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1$.

Définition 2.3.2 : Mélange à composante variable

Une distribution mélange k -point où K n'est pas fixé.

$$— F(x) = \sum_{j=1}^K a_j F_j(x)$$

$$— \sum_{j=1}^K a_j = 1, \quad a_j > 0, j = 1, \dots, K, \quad K = 1, 2, \dots$$

— Le nombre de paramètres est la somme des paramètres de chaque distribution plus $(K-1)$ car le dernier paramètre a_k peut être calculé avec $1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{K-1}$.

Ce modèle est appelé semi-paramétrique car sa complexité est entre un modèle paramétrique et non-paramétrique

2.4 | Distributions dépendantes des données

- Une distribution dépendante des données est au moins aussi compliqué que les données ou l'information produites par ces données.
- Le nombre de paramètres augmente lorsque le nombre de données augmente
- Exemple : un modèle empirique est une distribution discrète basée sur la taille échantillonnale n qui assigne une probabilité $\frac{1}{n}$ à chaque point
- Exemple : modèle de lissage à noyau

3 | Distributions continues

3.1 | Créer des nouvelles distributions

3.1.1 | Multiplication par une constante

Théorème 3.1.1

Soit X , une variable aléatoire continue. Soit $Y = \theta X$ avec $\theta > 0$. Alors,

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{y}{\theta}\right)$$

Le paramètre θ est un paramètre d'échelle pour la variable aléatoire Y .

3.1.2 | Création de distributions en élevant à une puissance

Théorème 3.1.2

Soit X , une variable aléatoire continue et $F_X(0) = 0$. Soit $Y = X^{1/\tau}$. Alors,

— si $\tau > 0$, on a

$$F_Y(y) = F_X(y^\tau) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau), \quad y > 0;$$

— si $\tau < 0$, on a

$$F_Y(y) = 1 - F_X(y^\tau) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = -\tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau), \quad y > 0.$$

- Lorsqu'on prend une distribution avec puissance $\tau > 0$, elle est appelée transformée.
- Lorsqu'on prend une distribution avec puissance $\tau = -1$, elle est appelée inverse.
- Lorsqu'on prend une distribution avec puissance $\tau < 0$, $\tau \neq -1$, elle est appelée inverse-transformée.

3.1.3 | Création de distributions avec exponentiation

Théorème 3.1.3

Soit X , une variable aléatoire continue et $f_X(x) > 0$ sur le domaine de x . Soit $Y = e^X$. Alors, pour $y > 0$, on a

$$F_Y(y) = F_X(\ln y) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln y).$$

3.1.4 | Mélange

Théorème 3.1.4

Soit X , une variable aléatoire avec fonction de densité $f_{X|\Lambda}(x|\lambda)$ et fonction de répartition $F_{X|\Lambda}(x|\lambda)$, où λ est un paramètre de X . La fonction de densité inconditionnelle de X est

$$f_X(x) = \int f_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

et la fonction de répartition est

$$F_X(x) = \int F_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda.$$

Autres résultats :

- $E[X^k] = E_\Lambda[E(X^k|\Lambda)]$
- $Var(X) = E[Var(X|\Lambda)] + Var(E[X|\Lambda])$

Les modèles de mélange tendent à créer des distributions à queue lourde. En particulier, si la fonction de hasard de $f_{X|\Lambda}$ est décroissante pour tout λ , la fonction de hasard sera aussi décroissante.

3.1.5 | Modèles à fragilité

Mise en place :

- Soit une variable aléatoire de fragilité $\Lambda > 0$
- Soit une fonction de hasard conditionnelle $h_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \lambda a(x)$, où $a(x)$ est une fonction connue.
- La fragilité quantifie l'incertitude de la fonction de hasard.

La fonction de survie conditionnelle de $X|\Lambda$ est

$$S_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \exp \left\{ - \int_0^x h_{X|\Lambda}(t|\lambda) dt \right\} = e^{-\lambda A(x)},$$

où $A(x) = \int_0^x a(t) dt$. Alors, la fonction de survie inconditionnelle est donnée par

$$S_X(x) = E[e^{-\Lambda A(x)}] = M_\Lambda(-A(x))$$

3.1.6 | Raccordement de distributions connues

Si plusieurs processus séparés sont responsables pour générer les pertes

Définition 3.1.5

Une distribution de raccordement à k composantes a une fonction de densité qui peut être exprimé sous la forme

$$f_X(x) = \begin{cases} a_1 f_1(x), & c_0 \leq x \leq c_1 \\ a_2 f_2(x), & c_1 \leq x \leq c_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_k f_k(x), & c_{k-1} \leq x \leq c_k \end{cases}$$

Pour $j = 1, 2, \dots, k$, chaque a_j doit être positif, f_j doit être une fonction de densité avec toute sa masse sur (c_{j-1}, c_j) et $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 1$.

3.2 | Familles de distributions et leurs liens

Connaître les familles de distribution beta transformée et gamma inverse/transformée.

3.2.1 | Distributions limites

On peut parfois comparer les familles des distributions basé sur des cas particuliers des familles. Dans d'autres situations, on doit étudier les distributions quand des paramètres tendent vers 0 ou l'infini.

Exemples :

- La distribution gamma est un cas limite de la distribution beta transformée avec $\theta \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow \infty$ et $\frac{\theta}{\alpha^{1/\gamma}} \rightarrow \xi$, une constante.

3.3 | Théorie des valeurs extrêmes

3.3.1 | Distributions à valeur extrêmes (DVE)

Définition 3.3.1 : La distribution Gumbel

La distribution Gumbel standard a la fonction de répartition

$$F(x) = G_0(x) = \exp[-\exp(-x)], \quad -\infty < x < \infty.$$

Avec les paramètres de location et d'échelle, on a

$$F(x) = G_{0,\mu,\theta}(x) = \exp \left[-\exp \left(-\frac{x-\mu}{\theta} \right) \right], \quad -\infty < x < \infty, \theta > 0.$$

Définition 3.3.2 : La distribution de Fréchet

La distribution de Fréchet standard a la fonction de répartition

$$F(x) = G_{1,\alpha}(x) = \exp(-x^{-\alpha}), \quad x \geq 0, \alpha > 0,$$

où α est un paramètre de forme.

Avec les paramètres de location et d'échelle, on a

$$F(x) = G_{1,\alpha,\mu,\theta}(x) = \exp \left[-\left(\frac{x-\mu}{\theta} \right)^{-\alpha} \right], \quad x \geq \mu, \alpha > 0, \theta > 0.$$

On note que le support de la distribution de Fréchet est pour x supérieur au paramètre de location.

Définition 3.3.3 : La distribution Weibull

La distribution de Weibull standard a la fonction de répartition

$$F(x) = G_{2,\alpha}(x) = \exp \left[-(-x)^{-\alpha} \right], \quad x \leq 0, \alpha < 0.$$

Avec les paramètres de location et d'échelle, on a

$$F(x) = G_{2,\alpha,\mu,\theta}(x) = \exp \left[-\left(-\frac{x-\mu}{\theta} \right)^{-\alpha} \right], \quad x \leq \mu, \alpha < 0, \theta > 0.$$

On note :

- Cette distribution n'est pas la même que la distribution Weibull couramment utilisée en actuariat
- Cette distribution a un support pour x inférieur au paramètre de location μ
 - Pour cette raison, cette distribution n'est pas utilisée en actuariat.

Définition 3.3.4 : La distribution de valeurs extrêmes généralisée

La distribution de valeurs extrêmes généralisée incorpore les trois distributions à valeur extrême comme cas particuliers. L'expression de la fonction de répartition est

$$F(x) = \exp \left[-\left(1 + \frac{x}{\alpha} \right)^{-\alpha} \right]$$

ou (notation équivalente)

$$F(x) = \exp \left[- (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}} \right]$$

- Pour $\gamma \rightarrow 0$, on obtient la distribution Gumbel
- Pour $\gamma > 0$, on obtient la distribution Fréchet
- Pour $\gamma < 0$, on obtient la distribution Weibull

3.3.2 | Distribution du maximum

Soit M_n , la variable aléatoire qui correspond à la valeur maximale de n observations d'une variable aléatoire. Si on a n observations d'une variable aléatoire iid, la fonction de répartition du maximum est

$$F_n(x) = \Pr(M_n \leq x) = \Pr(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \stackrel{\text{ind}}{=} \prod_{i=1}^n \Pr(X_i \leq x) = [F_X(x)]^n.$$

Les deux premiers moments sont

$$E[M_n] = \int_0^\infty [1 - F_X^n(x)] dx;$$

$$E[M_n^2] = 2 \int_0^\infty x[1 - F_X^n(x)] dx.$$

Si le nombre n est inconnu, N est une variable aléatoire. On a

$$\begin{aligned} F_{M_N}(x) &= \Pr(M_N \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(M_N \leq x | N = n) \Pr(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} F_X^n(x) \Pr(N = n) \\ &= P_N[F_X(x)]. \end{aligned}$$

3.3.3 | Stabilité du maximum des DVE

On peut montrer que la distribution du maximum des DVE, après normalisation du paramètre de location ou d'échelle, est la même DVE.

- **Gumbel** : $\mu^* = \mu + \theta \ln n$
- **Fréchet** : $\theta^* = \theta n^{1/\alpha}$

3.3.4 | Théorème Fisher-Tippett

On souhaite évaluer le maximum de n observations lorsque le nombre d'observations approche l'infini. Vu que le maximum est dégénéré. Alors, on étudie une variable normalisée tel que la distribution du maximum n'est pas dégénéré. On requiert une transformation linéaire tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n \left(\frac{x - b_n}{a_n} \right) = G(x) \quad \forall x.$$

Si une telle transformation linéaire existe, on peut appliquer le théorème suivant :

Théorème 3.3.5 : Théorème Fisher-Tippett

Si $\left[F \left(\frac{x - b_n}{a_n} \right) \right]^n$ a une distribution non-dégénérée lorsque $n \rightarrow \infty$ pour des constantes a_n et b_n qui dépendent de n , alors

$$\left[F \left(\frac{x - b_n}{a_n} \right) \right]^n \rightarrow G(x)$$

pour $n \rightarrow \infty$, $\forall x$, où G est une distribution de valeur extrême.

Ce théorème nous permet d'étudier le maximum d'une distribution F par G , sans nécessairement connaître F .

- **Exponentiel** : $a_n = 1, b_n = \ln n$
- **Pareto** : $a_n = \theta n^{1/\alpha} / \alpha, b = \theta n^{1/\alpha} - \theta$

3.3.5 | Domaine d'attraction du maximum

Définition 3.3.6 : Domaine d'attraction du maximum

Le domaine d'attraction du maximum (MDA) pour une distribution G est l'ensemble de toutes les distributions qui ont G comme distribution limite lorsque $n \rightarrow \infty$ du maximum normalisé $(M_n - b_n)/a_n$ pour des constantes a_n et b_n .

Vu qu'on s'intéresse au maximum d'une distribution, le domaine d'attraction du maximum ne dépend que de la queue de la distribution.

Théorème 3.3.7 : Caractérisation du MDA par la queue

Une distribution F appartient au MDA d'une distribution G_i avec constantes de normalisation a_n et b_n si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nS(a_n x + b_n) = -\ln G_i(x).$$

Deux distributions X et Y sont dites équivalentes dans la queue si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S_X(x)}{S_Y(x)} = c,$$

où c est une constante. Deux distributions équivalentes dans la queue appartiennent au même domaine d'attraction du maximum car c peut absorber les constantes de normalisation.

- Toutes les formes de queue asymptotiques $cx^{-\alpha}$ sont dans le MDA Fréchet.
- Toutes les formes de queue asymptotiques $ke^{-x\theta}$ sont dans le MDA Gumbel.

Toutes les distributions avec l'infini comme borne supérieure appartiennent au MDA Fréchet ou Gumbel.

Théorème 3.3.8

Une distribution qui a une queue de la forme $S(x) \sim x^{-\alpha}C(x)$ où $C(x)$ est une fonction qui varie lentement, est dans le MDA Fréchet.

3.3.6 | Distributions Pareto généralisées

Les distributions Pareto généralisées sont reliées avec les distributions à valeur extrême par la relation

$$W(x) = 1 + \ln G(x)$$

avec la condition supplémentaire que $W(x)$ soit positif ($G(x) > e^{-1}$).

- **Distribution exponentielle** : Gumbel
- **Distribution Pareto** : Fréchet
- **Distribution beta** : Weibull

La distribution Pareto généralisée incorpore toutes les distributions

$$F(x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{\alpha\theta}\right)^{-\alpha}$$

ou parfois écrit sous la forme

$$1 - \left(1 + \gamma \frac{x}{\theta}\right)^{-1/\gamma}.$$

3.3.7 | La stabilité de l'excès

Les distributions Pareto généralisées ont la propriété de stabilité de l'excès. Soit $Y = X - d | X > d$, la variable aléatoire d'excès conditionnelle. Pour la distribution Pareto généralisée, la distribution d'excès conditionnelle a la même forme que la distribution sous-jacente.

3.3.8 | Distribution limite de l'excès

La variable aléatoire d'excès conditionnelle est définie par $Y = X - d | X > d$ avec fonction de distribution

$$F^*(y) = F_Y(y) = \Pr(Y \leq y)$$

$$\begin{aligned}
&= \Pr(X \leq d + y | X > d) \\
&= \frac{F(d + y) - F(d)}{1 - F(d)}
\end{aligned}$$

Théorème 3.3.9 : Théorème Balkema-de Haan-Pickands

Si, pour des constantes a_n et b_n , les distributions conditionnelles d'excès $F^*(a_n x + b_n)$ ont des distributions limites continues lorsque d approche la borne supérieure du support de X , alors

$$F^*(x) \rightarrow W(x)$$

lorsque $d \rightarrow \infty$, $\forall x$, où W est une distribution Pareto généralisée.

Lorsque d augmente, la queue droite de la distribution de l'excès converge vers une distribution Pareto généralisée. En pratique, on peut utiliser une distribution Pareto généralisée pour approximer la queue lorsque d est élevé (sans avoir besoin de beaucoup de données).

3.3.9 | TVaR des DVA

Si la distribution d'excès d'une v.a. suit une distribution Pareto généralisée, alors pour $x > d$ on peut écrire la fonction de survie comme

$$\begin{aligned}
S_X(x) &= S_X(d) \Pr(X - d > x - d | X > d) \\
&= S_X(d) S_Y^*(y)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

où Y est la distribution d'excès conditionnelle $X - d | X > d$, $y = x - d$ et $S_Y^*(y)$ est la queue de la distribution d'excès

$$S_Y^*(y) = \left(1 + \gamma \frac{y}{\theta + \gamma d}\right)^{-1/\gamma}.$$

La moyenne de Y est

$$\frac{\theta}{1 - \gamma} + \frac{\gamma}{1 - \gamma} d$$

qui est linéaire en d et existe si $\gamma < 1$. Si $d = VaR_\kappa(X)$, on a

$$TVaR_p(X) = \frac{VaR_p(X)}{1 - \gamma} + \frac{\theta}{1 - \gamma}.$$

Si $d < VaR_\kappa(X)$, on obtient la VaR en inversant (3.1) pour avoir

$$VaR_\kappa(X) = d + \frac{\theta + \gamma d}{\gamma} \left[\left(\frac{1 - p}{S_X(d)} \right)^{-\gamma} - 1 \right], \quad x > d$$

et

$$TVaR_p(X) = \frac{VaR_p(X)}{1 - \gamma} + \frac{\theta}{1 - \gamma}.$$

4 | Distributions discrètes

4.1 | Notation et rappels

- $p_k = \Pr(N = k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$
- $P(z) = P_N(z) = E[z^N] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k.$
- $p_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dz^m} P(z) \Big|_{z=0}$

4.2 | Loi Poisson

- $p_k = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$
- $P(z) = e^{\lambda(z-1)}, \quad \lambda > 0.$
- $E[N] = \lambda$
- $Var(N) = \lambda$
- Équidispersion (moyenne = variance)

Théorème 4.2.1

Soit N_1, N_2, \dots, N_n , des v.a. Poisson avec paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Alors, $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$ est Poisson avec paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$.

Preuve : produit des fgp.

Théorème 4.2.2

Supposons que le nombre d'évènements N est Poisson avec moyenne λ . De plus, supposons que chaque évènement peut être classifié en m types avec probabilité p_1, p_2, \dots, p_m indépendant des autres évènements. Alors, le nombre d'évènements N_1, N_2, \dots, N_m correspondent au types d'évènements $1, 2, \dots, m$ respectivement sont des distributions Poisson mutuellement indépendants avec moyennes $\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_m$.

- Idée de la preuve :
 - Pour N fixé, la distribution conjointe de (N_1, N_2, \dots, N_m) est multinomiale. La fonction de densité multivariée correspond au produit de Poissons.
 - La marginale de N_j est Poisson.
 - Le cas 1 égal le produit des cas 2, donc ils sont mutuellement indépendants.
- Utile pour ajouter ou retirer une couverture d'assurance (λ ne change pas)
- Utile pour déductibles ou franchises : les risques en haut de la franchise sont Poisson.

4.3 | Loi binomiale négative

- Surdispersion (variance > moyenne)
- On peut retrouver la binomiale négative avec une loi mélange (Poisson + gamma)
- La loi Poisson est un cas limite de la binomiale négative ($r \rightarrow \infty, \beta \rightarrow 0, r\beta$ demeure constant).

Un cas particulier est la géométrique ($r = 1$)

- Sans mémoire
- Cas exponentiel : Given that a claim exceeds a certain level d , the expected amount of the claim in excess of d is constant and so does not depend on d .
- Cas géométrique : Given that there are at least m claims, the probability distribution of the number of claims in excess of m does not depend on m .
- Si $r > 1$, on considère que la distribution a une queue légère.
- Si $r < 1$, on considère que la distribution a une queue lourde.

4.4 | Loi binomiale

- Sousdispersion (moyenne > variance)

4.5 | La classe $(a, b, 0)$

Définition 4.5.1 : La classe $(a, b, 0)$

Une v.a. est membre de la classe $(a, b, 0)$ s'il existe des constantes a et b tels que

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = a + \frac{b}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots'$$

Distribution	a	b	p_0
Poisson	0	λ	$e^{-\lambda}$
Binomiale	$-\frac{q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$(1-q)^m$
Binomiale négative	$\frac{\beta}{1+\beta}$	$(r-1)\frac{\beta}{1+\beta}$	$(1+\beta)^{-r}$
Géométrique	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1+\beta)^{-1}$

Outil diagnostique pour déterminer la loi à utiliser : en utilisant la relation

$$k \frac{p_k}{p_{k-1}} = ak + b,$$

faire un graphique de

$$k \frac{\hat{p}_k}{\hat{p}_{k-1}} = k \frac{n_k}{n_{k-1}}.$$

- Si la droite est plate, on a $a = 0 \Rightarrow$ Poisson
- Si la droite est négative, on a $a < 0 \Rightarrow$ Binomiale
- Si la droite est positive, on a $a > 0 \Rightarrow$ Binomiale négative.

5 | Fréquence et sévérité avec modifications de la couverture

- Par perte (Per-loss) : Y^L
- Par paiement (Per-payment) : Y^P
- $Y^P = Y^L | Y^L > 0$.
- En général, diviser Y^L par $S_X(d)$ pour obtenir Y^P

5.1 | Déductibles

Définition 5.1.1 : Déductible ordinaire

Un déductible ordinaire transforme la variable en excès-moyen ou en variable translatée. On a

$$Y^P = \begin{cases} \text{indéfini}, & X \leq d, \\ X - d, & X > d \end{cases}$$

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X - d, & X > d \end{cases}$$

Relations :

	Y^P	Y^L
densité	$\frac{f_X(y+d)}{S_X(d)}$	$f_X(y+d)$
survie	$\frac{S_X(y+d)}{S_X(d)}$	$S_X(y+d)$
répartition	$\frac{F_X(y+d) - F_X(d)}{S_X(d)}$	$F_X(y+d) - F_X(d)$
hasard	$\frac{f_X(y+d)}{S_X(y+d)} = h_{X(y+d)}$	indéfinie à 0, donc indéfinie
moyenne	$\frac{E[X] - E[X \wedge d]}{S(d)}$	$E[X] - E[X \wedge d]$

Définition 5.1.2 : Déductible franchise

Un déductible franchise paie le montant au complet si la franchise est atteinte. On a

$$Y^P = \begin{cases} \text{indéfini}, & X \leq d, \\ X, & X > d \end{cases}$$

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X \leq d, \\ X, & X > d \end{cases}$$

	Y^P	Y^L
densité	$\frac{f_X(y)}{S_X(d)}, y > d$	$\begin{cases} F_X(d), & y = 0 \\ f_X(y), & y > d \end{cases}$
survie	$\begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq d \\ \frac{S_X(y)}{S_X(d)}, & y > d \end{cases}$	$\begin{cases} S_X(d), & 0 \leq y \leq d \\ S_X(y), & y > d \end{cases}$
répartition	$\begin{cases} 0, & 0 \leq y \leq d \\ \frac{F_X(y) - F_X(d)}{S_X(d)}, & y > d \end{cases}$	$\begin{cases} F_X(d), & 0 \leq y \leq d \\ F_X(y), & y > d \end{cases}$
hasard	$\begin{cases} 0, & 0 < y < d \\ h_X(y), & y > d \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & 0 < y < d \\ h_X(y), & y > d \end{cases}$
moyenne	$\frac{E[X] - E[X \wedge d]}{S(d)} + d$	$E[X] - E[X \wedge d] + d[S(d)]$

5.2 | Ratio d'élimination de perte et effet de l'inflation sur les déductibles ordinaires

Définition 5.2.1 : Ratio d'élimination de pertes

Le ratio d'élimination de pertes est le ratio de la décroissance en paiement espéré avec un déductible ordinaire versus un paiement espéré sans déductible :

$$\frac{E[X \wedge d]}{E[X]}$$

Théorème 5.2.2

Pour un déductible ordinaire d après inflation uniforme de $1 + r$, l'espérance du coût par perte est

$$(1 + r) \left\{ E[X] - E \left[X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right\}$$

Si $F\left(\frac{d}{1+r}\right) < 1$, l'espérance du coût par paiement est

$$\frac{(1 + r) \left\{ E[X] - E \left[X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right\}}{S\left(\frac{d}{1+r}\right)}.$$

Savoir le prouver.

5.3 | Limites de polices

Définition 5.3.1

Une police avec limite u paie la perte complète si la perte est inférieure à u , et u si la perte est supérieure à u . On a

$$Y = \begin{cases} Y, & y < u \\ u, & y \geq u. \end{cases}$$

Quelques résultats :

$$— F_Y(y) = \begin{cases} F_X(y), & y < u \\ 1, & y \geq u. \end{cases}$$

$$— f_Y(y) = \begin{cases} f_X(y), & y < u \\ 1 - F_X(u), & y = u. \end{cases}$$

— Pour une limite de police u , après inflation uniforme $1 + r$, le coût espéré est

$$(1 + r)E \left[X \wedge \frac{u}{1 + r} \right]$$

5.4 | Coassurance, déductibles et limites

Dans le cas où la compagnie paie une portion α de la perte, la variable aléatoire est $Y = \alpha X$. La variable aléatoire qui incorpore les quatre modifications du chapitre est

$$Y^L = \begin{cases} 0, & X < \frac{d}{1+r} \\ \alpha [(1+r)X - d], & \frac{d}{1+r} \leq X < \frac{u}{1+r} \\ \alpha(u - d), & X \geq \frac{u}{1+r} \end{cases}$$

On note que les quantités sont appliqués dans un ordre particulier : la coassurance est appliquée en dernier.

Théorème 5.4.1 : Quelques moments pour les modifications

Le premier moment par perte est

$$E[Y^L] = \alpha(1+r) \left\{ E \left[X \wedge \frac{u}{1+r} \right] - E \left[X \wedge \frac{d}{1+r} \right] \right\}$$

et le premier moment par paiement est

$$E[Y^P] = \frac{E[Y^L]}{1 - F_X\left(\frac{d}{1+r}\right)}.$$

Le deuxième moment par perte est

$$E[(Y^L)^2] = \alpha^2(1+r)^2 \{ E[(X \wedge u^*)^2] - E[(X \wedge d^*)^2] - 2d^* E[X \wedge u^*] + 2d^* E[X \wedge d^*] \},$$

où

$$u^* = \frac{u}{1+r} \quad \text{et} \quad d^* = \frac{d}{1+r}.$$

Pour par-paiement, on a

$$E[(Y^L)^2] = \frac{E[(Y^L)^2]}{1 - F_X(d^*)}.$$

Preuve : facile, manipuler les mins et max et prendre l'espérance. À connaître.

Méthode générale pour calculer les moments :

$$E[g(x)] = \int_R g(x)f(x)dx = \int_R g'(x)S(x)dx.$$

La dérivée simplifie souvent l'intégrale.

6 | Rappel des notions de mathématiques statistiques

6.1 | Estimation ponctuelle

Dans cette section, on s'intéresse à produire une seule valeur pour déterminer la valeur d'une quantité pour une population inconnue.

6.1.1 | Mesures de qualité

Définition 6.1.1 : Biais

Un estimateur $\hat{\theta}$ est sans biais si $E[\hat{\theta}|\theta] = \theta, \forall \theta$. Le biais est

$$\text{bias}_{\hat{\theta}}(\theta) = E[\hat{\theta}|\theta] - \theta.$$

Définition 6.1.2 : Biais asymptotique

Soit $\hat{\theta}_n$, un estimateur de θ basé sur un échantillon de taille n . L'estimateur est asymptotiquement sans biais si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}_n|\theta] = \theta, \forall \theta.$$

Définition 6.1.3 : Convergence

Un estimateur est convergent si, pour tout $\delta > 0$ et pour tout θ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(|\hat{\theta}_n - \theta| > \delta) = 0.$$

- Une condition suffisante (mais pas nécessaire) est que l'estimateur soit asymptotiquement sans biais et $\text{Var}(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$.
- Critique : le choix de δ est parfois arbitraire.

Définition 6.1.4 : Erreur quadratique moyenne

L'erreur quadratique moyen d'un estimateur est

$$MSE_{\hat{\theta}}(\theta) = E \left[\left(\hat{\theta} - \theta \right)^2 \middle| \theta \right].$$

On peut décomposer cet estimateur comme

$$MSE_{\hat{\theta}}(\theta) = E \left[\left(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}|\theta] + E[\hat{\theta}|\theta] - \theta \right)^2 \middle| \theta \right] = Var \left(\hat{\theta}|\theta \right) + [\text{bias}_{\hat{\theta}}(\theta)]^2$$

Définition 6.1.5 : Estimateur sans biais à variance minimale

Un estimateur $\hat{\theta}$ est appelé estimateur sans biais à variance minimale si il est sans biais et pour la vraie valeur de θ il n'existe pas d'estimateur avec une plus faible variance.

6.2 | Intervalles de confiance

Dans cette section, on s'intéresse à produire un intervalle de valeurs possibles d'une quantité pour une population inconnue.

Définition 6.2.1

Un intervalle de confiance à $100(1 - \alpha)\%$ pour un paramètre θ est une paire de valeurs aléatoires, L et U , calculé d'un échantillon aléatoire tel que

$$\Pr(L \leq \theta \leq U) \geq 1 - \alpha, \forall \theta.$$

Si la population est normale avec moyenne et variance inconnue, on a

$$L = \bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}, \quad U = \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

et

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2}{n-1}}.$$

Sinon, l'approximation normale peut être utilisée. Si $\hat{\theta}$ est approximativement normal, on a (approximativement)

$$1 - \alpha = \Pr \left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{v(\hat{\theta})}} \leq z_{\alpha/2} \right).$$

On remarque que θ apparaît à deux endroits. Alors, si isoler θ est trop compliqué, on peut utiliser l'approximation $v(\theta) \approx v(\hat{\theta})$ et l'intervalle de confiance devient

$$1 - \theta = \Pr \left(\theta - z_{\alpha/2} \sqrt{v(\hat{\theta})} \leq \theta \leq \theta + z_{\alpha/2} \sqrt{v(\hat{\theta})} \right).$$

6.3 | Tests d'hypothèse

Un test d'hypothèse est composé de deux hypothèses :

- l'hypothèse nulle (notée H_0), et
- l'hypothèse alternative (notée H_1).

Les deux hypothèses ne sont pas symétriques : les alterner peut changer les résultats.

- Déterminer l'hypothèse est faite avec une statistique de test. C'est une fonction des observations et est une variable aléatoire.
- La spécification d'un test est complétée en construisant une région de rejet.
- Les bornes de la région (autre que $\pm\infty$) sont appelées les valeurs critiques.

6.3.1 | Types d'erreur.

Lorsqu'on construit un test, on peut avoir deux types d'erreurs. Le premier se produit si on rejette l'hypothèse nulle mais que l'hypothèse nulle était vraie. On appelle cet erreur type I.

Définition 6.3.1 : Niveau d'importance

Le niveau d'importance (exceptionnel) d'un test d'hypothèse est la probabilité de faire un erreur de type I sachant que l'hypothèse nulle est vraie. On note ce niveau α . Le niveau d'importance est habituellement déterminé d'avance, entre 0.01 et 0.1.

Le deuxième type d'erreur est de ne pas rejeter l'hypothèse nulle alors que l'hypothèse alternative est vraie. La puissance du test est $1 -$ la probabilité de faire un erreur de type II.

Définition 6.3.2

Un test d'hypothèse est uniformément plus puissant s'il n'existe aucun autre test qui a le même ou plus bas niveau d'importance et, pour une valeur particulière dans l'hypothèse alternative, a une plus petite probabilité de faire un erreur de type II.

Généralement, diminuer un type d'erreur cause l'autre à augmenter.

Définition 6.3.3

Pour un test d'hypothèse, la valeur- p est la probabilité que la statistique de test prend une valeur moins d'accord avec l'hypothèse nulle que la valeur obtenue dans l'échantillon. Les tests effectués à un niveau de confiance supérieur à la valeur- p mènent à rejeter l'hypothèse nulle, et les test effectués à un niveau de confiance inférieur à la valeur- p mènent à l'échec de rejeter l'hypothèse nulle.

7 | Estimation pour données complètes

Lorsque les observations sont collectées d'une distribution de probabilité, la situation idéale est d'avoir les réalisations de chaque observation. Ce cas est référé aux données complètes individuelles.

Les données exactes peuvent être impossibles à avoir car

1. les données peuvent être groupées;
2. les données peuvent être censurées ou tronquées.

On considère premièrement l'estimation pour les données complètes et individuelles.

Définition 7.0.1

La fonction de distribution empirique est

$$F_n(x) = \frac{\text{Nombre d'observations} \leq x}{n},$$

où n est le nombre total d'observations.

Définition 7.0.2

La fonction de hasard cumulative est définie selon

$$H(x) = -\ln S(x).$$

Source de la fonction :

$$H'(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{f(x)}{S(x)} = h(x) \Rightarrow H(x) = \int_{-\infty}^x h(y)dy.$$

Autre notation :

- Soit n , la taille échantillonnale
- Soit $y_1 < y_2 < \dots < y_k$ être les k valeurs uniques
- Soit s_j , le nombre de fois dont y_j apparaît dans l'échantillon.
- Soit le nombre d'observations plus grandes qu'une valeur. L'ensemble des risques r_j est définie par $r_j = \sum_{i=j}^k s_i$, le nombre d'observations plus grand ou égal à y_j .

En utilisant cette notation, on obtient

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < y_1 \\ 1 - \frac{r_j}{n}, & y_{j-1} \leq x < y_j, \quad j = 2, 3, \dots, k \\ 1, & x \geq y_k \end{cases}$$

Définition 7.0.3 : L'estimateur Nelson-Åalen

L'estimateur Nelson-Åalen de la fonction de hasard cumulative est

$$\hat{H}(x) = \begin{cases} 0, & x < y_1 \\ \sum_{i=1}^{j-1} \frac{s_i}{r_i}, & y_{j-1} \leq x < y_j, \quad j = 2, 3, \dots, k \\ \sum_{i=1}^k \frac{s_i}{r_i}, & x \geq y_k \end{cases}$$

8 | Estimation pour données modifiées

Définition 8.0.1 : Définitions de modifications

- Une observation est tronquée du haut (tronquée à gauche) à d si lorsque la valeur est inférieure à d , elle n'est pas enregistrée mais qu'elle est enregistrée si sa valeur est supérieure à d .
- Une observations est tronquée du bas (tronquée à droite) à u si lorsque la valeur est supérieure à u , elle n'est pas enregistrée mais qu'elle est enregistrée si sa valeur est inférieure à u .
- Une observation est censurée du bas (censurée à gauche) à d si lorsque la valeur est inférieure à d , elle est enregistrée comme d , mais qu'elle est enregistrée à sa valeur si elle est supérieure à d .
- Une observation est censurée du haut (censurée à droite) à u si lorsque sa valeur est supérieure à u , elle est enregistrée comme u , mais qu'elle est enregistrée à sa valeur si elle est inférieure à u .

En actuariat, on a des données tronquées à gauche et des données censurées à droite.

Soit l'ensemble de risque r_j , le nombre de personnes observées vivantes à l'age y_j . En IARD, r_j est le nombre de polices où la perte observée est supérieure à y_j moins ceux qui ont un déductible plus grand ou égal à y_j .

$$S_n = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < y_1 \\ \prod_{i=1}^{j-1} \left(\frac{r_i - s_i}{r_i} \right), & y_{j-1} \leq t < y_j, j = 2, \dots, k \\ \prod_{i=1}^k \left(\frac{r_i - s_i}{r_i} \right) \text{ ou } 0, & t \geq y_k \end{cases}$$

Quatrième partie

Théorie de la crédibilité

1 | Crédibilité Américaine

Démarche générale : On doit avoir

$$\Pr((1 - k)\mu_S \leq S \leq (1 + k)\mu_S) \geq \alpha,$$

qui est équivalent à

$$\Pr\left(\left|\frac{\bar{S} - \mu_S}{\sigma_S}\right| \leq y_p\right) = p$$

avec $y_p \leq \frac{k\mu_S}{\sigma_S}$. On obtient y_p selon

$$\begin{aligned}\Pr(|Z| \leq y_p) &= p \\ y_p &= \Phi(y_p) - \Phi(-y_p) \\ &= \Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right).\end{aligned}$$

2 | Crédibilité Bayesienne

On a les fonctions de densité $f_{X|\Theta}$ et g_Θ . On cherche la distribution a posteriori $f_{X_{n+1}|\mathbf{X}}$.

L'approche est de calculer la distribution a posteriori de $\Theta|\mathbf{X}$ et ensuite calculer l'espérance a posteriori

de X_{n+1} selon $E_{\Theta|X}[X]$.

3 | Le modèle de Buhlmann

3.1 | La prime de crédibilité

Objectif : minimiser l'erreur quadratique moyenne de la prime de crédibilité avec un estimateur linéaire de la forme

$$\mu(\theta) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j.$$

On souhaite minimiser

$$Q = E \left[\left(\mu_{n+1}(\theta) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j \right)^2 \right],$$

par rapport à $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$. L'espérance est prise par sur la distribution conjointe de Θ, \underline{X} .

En dérivant et en jouant avec les espérances, on a

$$E[X_{n+1}] = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j X_j$$

et

$$Cov(X_i, X_{n+1}) = \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j Cov(X_i, X_j),$$

nommées les équations normales (utilisées pour déterminer les formules de crédibilité).

Notation :

— $\mu(\theta) = E[X_j \Theta = \theta]$	— $\mu = E[\mu(\Theta)]$
— $v(\theta) = Var(X_j \Theta = \theta)$	— $v = E[v(\Theta)]$
	— $a = Var(\mu(\Theta))$

3.2 | Le modèle de Buhlmann

Hypothèses :

—

Résultats intermédiaires (obtenus en conditionnant) :

- $E[X_j] = \mu$
- $Var(X_j) = v + a$
- $Cov(X_j, X_i) = a$.

La prime de crédibilité devient

$$\tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j X_j = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu,$$

avec

$$Z = \frac{n}{n + k}$$

et

$$k = \frac{v}{a} = \frac{E[Var(X_j|\Theta)]}{Var(E[X_j|\Theta])}.$$

3.3 | Le modèle de Buhlmann-Straub

Hypothèses :

- $E[X_i|\Theta] = \mu$
- $Var(X_i|\Theta) = \frac{v(\theta)}{m_i}$

La prime de crédibilité devient

$$\tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j X_j = Z\bar{X} + (1 - Z)\mu,$$

avec

$$Z = \frac{m}{m + k},$$

$$\bar{X} = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{m} X_j$$

et

$$k = \frac{v}{a}.$$

3.4 | Estimateurs

3.4.1 | Modèle de Buhlmann

On s'intéresse aux estimateurs des paramètres μ , v et a . On a

$$\hat{\mu} = \overline{X}.$$

Ensuite, la variance inter-groupe est donné par

$$\hat{v}_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$$

et l'estimateur non-biaisé de la moyenne des variances inter-groupes est

$$\hat{v} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r v_i.$$

Vu que $Var(\overline{X}_i) = a + \frac{v}{n}$, on a $a = Var(\overline{X}_i) - \frac{v}{n}$ et l'estimateur non-biaisé pour a est

$$\hat{a} = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r (\overline{X}_i - \overline{X})^2 - \frac{\hat{v}}{n}.$$

Si \hat{a} est négatif, on utilise $\tilde{a} = 0$.

3.4.2 | Modèle de Buhlmann-Straub

$$\mu = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n m_j X_j$$

$$\hat{v}_i = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2$$

$$\hat{v} = \sum_{i=1}^r w_i \hat{v}_i, \quad w_i = \frac{n_i - 1}{\sum_{i=1}^r (n_i - 1)},$$

qui devient

$$\hat{v} = \frac{1}{\sum_{i=1}^r (n_i - 1)} \sum_{r=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} m_{ij} (X_{ij} - \overline{X}_i)^2.$$

Enfin,

$$\hat{a} = \left(m - m^{-1} \sum_{i=1}^r m_i^2 \right)^{-1} \left[\sum_{i=1}^r m_i (\overline{X}_i - \overline{X})^2 - \hat{v}(r-1) \right].$$

Cinquième partie

Théorie du risque

1 | Mesures de risque

1.1 | Quelques mesures de risque

Définition 1.1.1 : Value-at-risk

$$VaR_{\kappa}(X) = F_X^{-1}(\kappa) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F_X(x) > \kappa\}$$

Définition 1.1.2 : Tail Value-at-risk

La Tail Value-at-risk (TVaR) est une mesure de risque défini par l'équation

$$\begin{aligned} TVaR_{\kappa}(X) &= \frac{1}{1-\kappa} \int_{\kappa}^1 VaR_u(X) du \\ &= \frac{1}{1-\kappa} \left\{ E \left[X \times \mathbb{1}_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}} \right] + VaR_{\kappa}(X) (F_X(VaR_{\kappa}(X)) - \kappa) \right\}. \end{aligned}$$

D'autres formes incluent

$$— TVaR_{\kappa}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=[nk]+1}^n X_{j:n}}{[n(1-\kappa)]}$$

Définition 1.1.3 : Capital économique

Le capital économique pour un portefeuille basée sur la mesure de risque $\zeta_{\kappa}(S)$ est

$$CE_{\kappa}(S) = \zeta_{\kappa}(S) - E[S].$$

Définition 1.1.4 : Bénéfice de mutualisation

Le bénéfice de mutualisation est

$$B_{\kappa}^{\zeta}(S) = \sum_{i=1}^n \zeta_{\kappa}(X_i) - \zeta_{\kappa}(S).$$

1.2 | Propriétés désirables et cohérence

Propriété 1.2.1 : Homogénéité

Soit un risque X et une constante $a \in \mathbb{R}^+$. Une mesure ζ_κ est homogène si

$$\zeta_\kappa(aX) = a\zeta_\kappa(X),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Propriété 1.2.2 : Invariance à la translation

Soit un risque X et une constante $a \in \mathbb{R}$. Une mesure ζ_κ est invariante à la translation si

$$\zeta_\kappa(X + a) = \zeta_\kappa(X) + a,$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Propriété 1.2.3 : Monotonie

Soient deux risques X_1 et X_2 tels que $\Pr(X_1 \leq X_2) = 1$. Une mesure ζ_κ est monotone si

$$\zeta_\kappa(X_1) \leq \zeta_\kappa(X_2),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Propriété 1.2.4 : Sous-additivité

Soient deux risques X_1 et X_2 . La mesure ζ_κ est sous-additive si

$$\zeta_\kappa(X_1 + X_2) \leq \zeta_\kappa(X_1) + \zeta_\kappa(X_2),$$

pour $0 < \kappa < 1$.

Définition 1.2.5 : Mesure de risque cohérente

Une mesure de risque cohérente satisfait les propriétés d'homogénéité, d'invariance à la translation, de monotonie et de sous-additivité. La mesure de risque TVaR est cohérente. La mesure de risque VaR n'est pas sous-additive, donc n'est pas cohérente (preuve : contre-exemple).

1.3 | Mesures de solvabilité sur une période

Définition 1.3.1

La probabilité de ruine correspond à la probabilité que la compagnie ne rencontre pas ses engagements au cours de la prochaine période en supposant un capital initial $u \geq 0$. Soit $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ les coûts pour un contrat et π_i la prime demandée pour le risque. La probabilité de ruine $\psi_n(u)$ est définie par

$$\psi_n(u) = \Pr \left(S_n > \sum_{i=1}^n \pi_i + u \right) = 1 - F_{S_n} \left(\sum_{i=1}^n \pi_i + u \right)$$

2 | Modélisation des risques

2.1 | Modèle stochastique du risque

Définition 2.1.1 : Modèle stochastique du risque

On définit la v.a. X par une somme aléatoire

$$X = \begin{cases} \sum_{k=1}^M B_k, & M > 0 \\ 0, & M = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

- La v.a. discrète M représente le nombre de sinistres (fréquence)
- La v.a. continue et positive B_k correspond au montant du $k^{\text{ième}}$ sinistre (sévérité)
- On dit que la v.a. est composée

Définition 2.1.2 : Modèle collectif vs modèle individuel

Un modèle collectif du risque est un modèle de la forme 2.1 où

- conditionnel à $N = n$, les v.a. B_k sont i.i.d;
- conditionnel à $N = n$, la suite de v.a. $\{B_k, k = 1, \dots, n\}$ sont i.i.d et ne dépend pas de n ;
- la distribution de N ne dépend pas des valeurs $B_k, k = 1, \dots, n$.

Un modèle individuel du risque représente la perte agrégée sous la forme d'une somme de n contrats d'assurance :

$$S = \sum_{i=1}^n X_i.$$

- Les pertes X_i sont assumés indépendants mais pas nécessairement identiquement distribués ;
- La distribution des X_i a habituellement une masse à 0, représentant la probabilité qu'aucun paiement n'est fait pour un contrat.

L'espérance de X dans un modèle collectif est

$$E[X] = E[E[X|M]] = E[M \times E[B]] = E[M]E[B].$$

La variance de X est

$$Var(X) = E_M[Var(X|M)] + Var_M(E[X|M]).$$

Avec $Var(X|M) = MVar(B)$, on obtient

$$Var(X) = E[M]Var(B) + Var(M)E[B]^2.$$

La fonction de répartition est

$$\begin{aligned} F_X(x) &= E[F_X(x)|M] \\ &= \Pr(M=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Pr(M=k) F_{B_1+\dots+B_k}(x). \end{aligned}$$

Pour le modèle collectif, on a

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_B^{*k}(x),$$

où $F_B^{*k}(x)$ est le produit de convolution. En dérivant, on obtient

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k f_B^{*k}(x).$$

La fgp est

$$E[t^X] = E_M[E[t^X|M]] = E_M[t^{B_1+\dots+B_k}] = E_M\left[\prod_{i=1}^k t^{B_i}\right] \stackrel{iid}{=} E_M[P_B(t)^M] = P_M(P_B(t)).$$

La fgm est

$$E[e^{tX}] = E_M[E[e^{tX}|M]] = E_M[e^{t(B_1+\dots+B_k)}] = E_M\left[\prod_{i=1}^k e^{B_i t}\right] \stackrel{iid}{=} E_M[M_B(t)^M] = P_M(M_B(t)).$$

La transformée de Laplace est

$$L_X(t) = P_M(L_B(t)).$$

2.1.1 | Fréquence et sévérité avec modification de la couverture

Soit $v = \Pr(Y^L = 0)$. On a

— Relation entre montant des pertes par perte et par paiement : $M_{Y^L}(t) = (1 - v) + vM_{Y^P}(t)$

— Relation entre nombres de pertes par perte et par paiement : $P_{N^P}(t) = P_{N^L}(1 - v + vt)$

Dans le modèle collectif du risque, on a

— $M_S(t) = P_{N^L}(M_{Y^L}(t))$

— $M_S(t) = P_{N^P}(M_{Y^P}(t))$

2.2 | Approche indemnitaire et forfaitaire

Un cas particulier du modèle stochastique est où M obéit à une loi Bernoulli. On a

$$X = M \times B = \begin{cases} B, & M = 1 \\ 0, & M = 0. \end{cases}$$

Définition 2.2.1 : Approche indemnitaire

Dans l'approche indemnitaire, on suppose qu'un seul sinistre peut arriver dans une période. Les coûts de l'évènement sont définis par la v.a. B . On a

— $F_X(x) = 1 - q + qF_B(x)$

— $E[X] = qE[B]$

— $Var(X) = qVar(B) + q(1 - q)E[B]^2$

— $Var_{\kappa}(X) = \begin{cases} 0, & 0 < \kappa < 1 - q \\ Var_{\frac{\kappa - (1 - q)}{q}}(B), & 1 - q < \kappa < 1 \end{cases}$

— $TVaR_{\kappa}(X) = \frac{qE[B \times \mathbb{1}_{\{X > VaR_{\kappa}(X)\}}] + VaR_{\kappa}(X)(F_X(VaR_{\kappa}(X)) - \kappa)}{1 - \kappa}$

L'approche indemnitaire est utile pour l'assurance vie. Soit $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Soit q_j , la probabilité de décès de l'individu j et b_j , la prestation de décès. Alors,

— $E[S] = \sum_{j=1}^n b_j q_j$

— $Var(S) = \sum_{j=1}^n b_j^2 q_j (1 - q_j)$

— $P_S(t) = \prod_{j=1}^n (1 - q_j + q_j z_j^b)$

— $M_S(t) = \prod_{j=1}^n (1 - q_j + q_j M_{B_j}(t))$

2.3 | Généralisations des principales lois de fréquence

Définition 2.3.1 : Loi Poisson-mélange

Soit une v.a. Θ de telle sorte que $E[\Theta] = 1$, $Var(\Theta) < \infty$ et $M_\Theta(x)$ existe. La distribution de fréquence est définie selon

$$(M|\Theta = \theta) \sim Pois(\lambda\theta).$$

On a

- $E[M] = E_\Theta[E[M|\Theta]]$
- $Var(X) = \lambda + \lambda^2 Var(\Theta)$
- $P_M(t) = M_\Theta(\lambda(t-1))$
- $\Pr(M = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} dF_\Theta(t)$

2.4 | Sommes aléatoires et allocation

Soit la v.a. X définie selon un modèle stochastique du risque. Si B est continue et positive, on a

$$TVaR_\kappa(X) = \frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^{\infty} f_M(k) E \left[\left(\sum_{j=1}^k B_j \right) \times \mathbb{1}_{\left\{ \sum_{j=1}^k B_j > VaR_\kappa(X) \right\}} \right].$$

On présente deux règles d'allocation du capital.

Définition 2.4.1 : Règle basée sur la variance

Les parts allouées aux v.a. B et M sont

$$C_\kappa^{Var}(M) = \frac{Var(E[X|M])}{Var(X)} TVaR_\kappa(X) = \frac{Var(M)E[B]^2}{Var(X)} TVaR_\kappa(X)$$

$$C_\kappa^{Var}(B) = \frac{E(E[X|M])}{Var(X)} TVaR_\kappa(X) = \frac{E[M]Var(B)}{Var(X)} TVaR_\kappa(X)$$

Définition 2.4.2 : Règle basée sur la TVaR

Avec la décomposition

$$E[X \times \mathbb{1}_{\{X > b\}}] = \underbrace{E_M[(X - E[X|M]) \times \mathbb{1}_{\{X > b\}}]}_{\text{part allouée à } M} + \underbrace{E_M[E[X|M] \times \mathbb{1}_{\{X > b\}}]}_{\text{part allouée à } B},$$

On déduit

$$C_\kappa^{TVaR}(M) = \frac{E_M[E[X|M] \times \mathbb{1}_{\{X > VaR_\kappa(X)\}}]}{1 - \kappa}$$

et

$$C_{\kappa}^{TVaR}(B) = TVaR_{\kappa}(X) - C_{\kappa}^{TVaR}(M).$$

2.5 | Pertes financières

Définition 2.5.1

Soit $V(0)$, la v.a. qui représente le capital initial investi dans un fonds et $V(1)$, la v.a. qui représente la valeur du fonds au temps $t = 1$. La perte liée à cet investissement est défini selon la v.a. $L = V(0) - V(1)$. Le rendement instantané pour une période est défini selon la v.a. R , alors, $L = V(0) - V(0)e^R$. Si la v.a. R est continue, on a

$$VaR_{\kappa}(L) = V(0) + VaR_{\kappa}(-V(1)) = V(0) - VaR_{1-\kappa}(V(1))$$

et

$$TVaR_{\kappa}(L) = V(0) - \frac{1}{1-\kappa} (E[X] - \kappa TVaR_{1-\kappa}(X)).$$

3 | Mutualisation des risques

3.1 | Aggrégation des risques

On s'intéresse au comportement de la v.a. $S = \sum_{i=1}^n X_i$ représentant les coûts d'un portefeuille de n risques. On a

$$E[S] = E \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n E[X_i]$$

et

$$Var(S) = Var \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n Var(X_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n Cov(X_i, X_j).$$

La fgm est donnée par

$$M_S(t) = E \left[e^{t \sum_{i=1}^n X_i} \right] \stackrel{ind}{=} \prod_{i=1}^n E \left[e^{t X_i} \right] = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t).$$

Si les v.a. X_i sont iid, on a

$$M_S(t) = M_{X_i}(t)^n.$$

Proposition 3.1.1 : Loi Poisson composée et agrégation

Soient les v.a. indépendantes X_1, \dots, X_n où

$$X_i \sim PComp(\lambda_i, F_{B_i}), i = 1, 2, \dots, n.$$

Alors,

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \sim PComp(\lambda_S, F_C),$$

où $\lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et

$$F_C(s) = \frac{\lambda_1}{\lambda_S} F_{B_1}(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_S} F_{B_2}(x) + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda_S} F_{B_n}(x)$$

Preuve : fgm et mettre λ_S en évidence.

Proposition 3.1.2 : Loi binomiale négative composée et agrégation

Soient les v.a. indépendantes X_1, \dots, X_n où

$$X_i \sim BNComp(r_i, q, F_{B_i}), i = 1, 2, \dots, n.$$

Alors,

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \sim BNComp(r_S, q, F_B),$$

où $r_S = \sum_{i=1}^n r_i$.

3.2 | Méthodes d'approximation basée sur les moments

3.2.1 | Approximation basée sur la distribution normale

L'approximation basée sur la distribution normale est fondée sur le théorème central limite. On approxime la v.a. S par la v.a. T , en supposant $E[S]$ et $Var(S)$ connus. On a alors

$$T \sim Norm(E[S], Var(S)).$$

On obtient alors

$$F_S(x) \cong F_T(x) = \Phi\left(\frac{x - E[S]}{\sqrt{Var(S)}}\right)$$

$$VaR_\kappa(S) \cong VaR_\kappa(T) = E[S] + \sqrt{Var(S)} VaR_\kappa(Z)$$

$$TVaR_\kappa(S) \cong TVaR_\kappa(T) = E[S] + \sqrt{Var(S)} TVaR_\kappa(Z).$$

3.2.2 | Approximation basée sur la loi gamma tradatée

L'approximation basée sur la loi gamma est utile pour approximer la distribution de la v.a. S pour la queue de droite. On approxime la v.a. S par $T + x_0$, où $T + x_0$ obéit à une loi gamma tradatée.

À partir des trois premiers moments, on a

$$\begin{aligned} E[S] &= \frac{\alpha}{\beta} + x_0 \\ \text{Var}(S) &= \frac{\alpha}{\beta^2} \\ \gamma(S) &= \frac{2}{\alpha^{0.5}}. \end{aligned}$$

Avec la méthode des moments, on en déduit que

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{4}{\gamma(S)^2} \\ \hat{\beta} &= \frac{2}{\gamma(S)\sqrt{\text{Var}(S)}} \\ \hat{x}_0 &= E[S] - \frac{2\sqrt{\text{Var}(S)}}{\gamma(S)} \end{aligned}$$

On peut approximer les mesures de risque suivantes pour κ élevés :

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\kappa(S) &\cong \text{VaR}_\kappa(T) + x_0 \\ \text{TVaR}_\kappa(S) &\cong \text{TVaR}_\kappa(T) + x_0 \end{aligned}$$

3.2.3 | Autres approximations

- lognormale : $\sigma_T = \sqrt{\ln \frac{E[S^2]}{E[S]^2}}$ et $\mu = \ln(E[S]) - \frac{1}{2}\sigma_T^2$
- F-généralisée.

3.2.4 | Approximation Poisson du modèle individuel

- Rappel : $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, où $X_j = I_j \times b_j$. On a $E[S] = \sum_{j=1}^n b_j q_j$ et $\text{Var}(S) = \sum_{j=1}^n b_j^2 q_j (1 - q_j)$.
- Si q_j est petit, on peut approximer I_j par une loi de Poisson en gardant la même moyenne $\lambda_j = q_j$. Une autre approximation de la loi de Poisson est de garder la même probabilité de non-paiement $e^{-\lambda_j} = 1 - q_j \Rightarrow \lambda_j = -\ln(1 - q_j)$.
- Si $\Pr(B = b_j) = 1$ (comme en assurance vie), alors

$$f_S(x) = \Pr(X = x) = \frac{1}{\lambda_S} \sum_{\{j: b_j = x\}} \lambda_j$$

3.3 | Mutualisation et activités d'assurance

Définition 3.3.1 : Coût moyen par contrat

Le coût moyen par contrat est

$$W_n = \frac{S_n}{n}.$$

On a

$$E[W_n] = E\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n}E[S_n] = E[X]$$

La variance est donnée par

$$\text{Var}(W_n) = \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\text{Var}(S_n) \stackrel{\text{ind}}{=} \frac{1}{n}\text{Var}(X).$$

On remarque que $\text{Var}(W_n)$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Si les v.a. ne sont pas indépendantes, on a

$$\text{Var}(W_n) = \frac{1}{n^2}[n\text{Var}(X) + n(n-1)\text{Cov}(X_1, X_2)] = \frac{\text{Var}(X)}{n} + \frac{n-1}{n}\text{Cov}(X_1, X_2).$$

On remarque que $\text{Var}(W_n)$ converge vers $\text{Cov}(X_1, X_2)$ lorsque n tend vers l'infini.

Proposition 3.3.2

Soient les risques X_1, X_2, \dots, X_n et la prime $\pi_i = (1 + \eta_i)E[X_i]$. On définit le coefficient ρ_B comme étant la solution strictement positive (si elle existe) de $E[e^{tS}] = e^{t\pi_S}$, où

$$\psi_n(u) \leq e^{-\rho_B u}, \quad u \geq 0.$$

Proposition 3.3.3

Soient les risques iid X_1, X_2, \dots, X_n et la prime $\pi_i = (1 + \eta_i)E[X_i] = \pi_i$. Alors, on a

1. si $\pi > E[X]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(u) = 0, u \geq 0$
2. si $\pi < E[X]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(u) = 1$

4 | Principes de prime

4.1 | Propriétés désirables

1. Marge de sécurité positive
2. Exclusion de marge de sécurité non justifiée
3. Additivité
4. Sous-additivité
5. Invariance à l'échelle
6. Invariance à la translation
7. Maximum

4.2 | Principes de prime

4.2.1 | Principe de la valeur espérée

La prime majorée est $\Pi(X) = (1 + \kappa)E[X]$, où $\kappa > 0$. Cette prime satisfait les propriétés 1, 3, 4, 5.

4.2.2 | Principe de la variance

La prime est $\Pi(X) = E[X] + \kappa Var(X)$, où $\kappa > 0$. Cette prime satisfait les propriétés 1, 2, 3, 6.

4.2.3 | Principe de l'écart type

La prime est $\Pi(X) = E[X] + \kappa \sqrt{Var(X)}$, où $\kappa > 0$. Cette prime satisfait les propriétés 1, 2, 6.

4.2.4 | Principe de la VaR

La prime est $\Pi(X) = VaR_{\kappa}(X)$, pour κ élevé (0.95 ou plus, en pratique). Cette prime satisfait les propriétés 2, 5, 6, 7.

4.2.5 | Principe de la TVaR

La prime est $\Pi(X) = TVaR_\kappa(X)$, pour κ élevé (0.95 ou plus, en pratique). Cette prime satisfait les propriétés 1 à 7.

4.2.6 | Approche top-down

Le principe de la VaR et la TVaR utilise la v.a. W_n au lieu de la v.a. X . Elle permet de tenir compte du bénéfice de mutualisation. Les principes avec l'approche top-down sont les mêmes que pour le principe de la VaR et le principe de la TVaR.

4.2.7 | Principe exponentiel

La prime est $\Pi(X) = \frac{1}{\kappa} \ln\{M_X(\kappa)\}$, pour $\kappa > 0$. Cette prime satisfait les propriétés 1 à 7.

5 | Méthodes de simulation

5.1 | Méthode de base

Un algorithme pour simuler la réalisation d'une v.a. $X^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, m$ à partir de la fonction de répartition d'une fonction. Pour $j = 1, 2, \dots, m$,

1. simuler la réalisation $U^{(j)} \sim \text{Unif}(0, 1)$ à partir d'un GNPA ou `runif`;
2. calculer la simulation $X^{(j)}$ de X avec $X^{(j)} = F_X^{-1}(U^{(j)})$.

5.1.1 | Simulations de v.a. définis par un mélange

Soit une v.a. Θ et une v.a. X dont la fonction de répartition conditionnelle de $(X|\Theta = \theta)$ est $F_{X|\Theta=\theta}$ et la fonction quantile est $F_{X|\Theta=\theta}^{-1}$. Pour simuler des réalisations de \underline{X} , on procède avec les étapes suivantes

1. on simule une réalisation $\Theta^{(j)}$ de Θ ;
2. on produit une réalisation X

5.1.2 | Simulation de somme aléatoire

Soit X une v.a. définie par le modèle stochastique. La procédure pour simuler des réalisations de X est

1. Simuler une réalisation $M^{(j)}$ de la v.a. M .

6 | Méthodes d'aggrégation

Définition 6.0.1 : Méthode de dispersion de la masse

Soit f_j la probabilité placée à $jh, j = 0, 1, 2, \dots$. Alors, on pose

$$\begin{aligned} f_0 &= \Pr\left(X \leq \frac{h}{2}\right) = F_X\left(\frac{h}{2} - 0\right) \\ f_j &= \Pr\left(jh - \frac{h}{2} \leq X < jh + \frac{h}{2}\right) \\ &= F_X\left(jh + \frac{h}{2}\right) - F_X\left(jh - \frac{h}{2}\right), \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

7 | Comparaison des risques

L'ordre en dominance stochastique permet de comparer l'ampleur de deux v.a. et l'ordre convexe compare leur variabilité.

7.1 | Ordres partiels

Définition 7.1.1

Soit A un ensemble de fonctions de répartition. Une relation binaire \preceq définie sur A est un ordre partiel si cet ordre satisfait les trois propriétés suivantes :

1. Transitivité : Si $F_X \preceq F_Y$ et $F_Y \preceq F_Z$, alors $F_X \preceq F_Z$.
2. Réflexivité : $F_X \preceq F_X$
3. Anti-symétrie : Si $F_X \preceq F_Y$ et $F_Y \preceq F_X$, alors $F_X \equiv F_Y$.

Les propriétés désirables pour les ordres partiels sont les suivants :

Propriété 7.1.2 : Fermeture sous le mélange

Soient les v.a. X, X' et Θ . On dit que l'ordre stochastique \preceq est fermé sous le mélange si $X|\Theta = \theta \preceq X'|\Theta = \theta$ pour tout θ implique $X \preceq X'$.

Propriété 7.1.3 : Fermeture sous la convolution

Soient deux suites de v.a. indépendantes $\underline{X} = \{X_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ et $\underline{X}' = \{X'_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ avec $X_i \preceq X'_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^+$. On dit que l'ordre stochastique \preceq est fermé sous la convolution si

$$\sum_{i=1}^n X_i \preceq \sum_{i=1}^n X'_i$$

est satisfait.

Propriété 7.1.4 : Fermeture sous la composition

On dit que l'ordre est fermé sous la composition si

$$\sum_{i=1}^N X_i \preceq \sum_{i=1}^{N'} X_i$$

pour $N \preceq N'$.

7.2 | Ordre en dominance stochastique

Définition 7.2.1

Soient les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors, X est inférieure à X' sous l'ordre en dominance stochastique, notée $X \preceq_{sd} X'$, si $F_X(x) \geq F_{X'}(x)$ ou $\bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_{X'}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 7.2.2

Soient deux v.a. X et X' telles que $X \preceq_{sd} X'$. Alors, on a $Var_\kappa(X) \leq Var_\kappa(X')$.

Théorème 7.2.3

Soient les v.a. X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$.

1. Si $X \preceq_{sd} X'$ alors $E[X] \leq E[X']$.
2. Si $X \preceq_{sd} X'$ et $E[X] = E[X']$ alors X et X' ont la même distribution.

Théorème 7.2.4

Soient les deux v.a. X et X' . Alors, on a $X \preceq_{sd} X'$ si et seulement si $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$ pour toute fonction croissante ϕ .

Théorème 7.2.5

Soient les v.a. X et X' telles que $E[X^m] < \infty$ et $E[X'^m] < \infty$, pour $m \in \mathbb{N}^+$. Si on a $X \preceq_{sd} X'$, alors

1. $E[X^m] \leq E[X'^m]$, pour $m = 1, 3, 5, \dots$;
2. $E[X^m] \leq E[X'^m]$, pour $m = 1, 2, 3, \dots$ si les v.a. X et Y sont positives.

Théorème 7.2.6

Soient deux v.a. X et X' . Si $X \preceq_{sd} X'$ alors on a $\phi(X) \preceq_{sd} \phi(X')$ pour toute fonction croissante ϕ .

Soient X_1, \dots, X_n et X'_1, \dots, X'_n des v.a. indépendantes avec $X_i \preceq_{sd} X'_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. On suppose que $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante. Alors, on a $\psi(X_1, \dots, X_n) \preceq_{sd} \psi(X'_1, \dots, X'_n)$.

L'ordre en dominance stochastique est fermé sous la convolution, le mélange et la composition.

Proposition 7.2.7 : Condition suffisante pour déterminer l'ordre en dominance stochastique

Soient deux v.a. X et Y ayant la propriété qu'il existe un nombre réel $a \geq 0$ tel que

$$dF_X(x) \geq dF_Y(x) \text{ pour } x \in (-\infty, a)$$

$$dF_X(x) \leq dF_Y(x) \text{ pour } x \in (a, \infty).$$

Alors, $X \preceq_{sd} Y$.

Quelques lois avec paramètres différents sont d'ordre en dominance stochastique. Par exemple,

$$X \sim \text{Exp}(\beta) \text{ et } X' \sim \text{Exp}(\beta') \text{ avec } \beta \geq \beta'.$$

Il est aussi possible de comparer des lois paramétriques différentes. Par exemple, si $M \sim \text{Bern}(q)$ et $M' \sim \text{Pois}(\lambda)$ où $\lambda = -\ln(1 - q)$. Alors, on a $M \preceq_{sd} M'$.

Proposition 7.2.8

Soient les v.a. $\tilde{X}^{(u,h')}$, $\tilde{X}^{(u,h)}$, X , $\tilde{X}^{(l,h)}$, $\tilde{X}^{(l,h')}$, où X est un modèle stochastique \tilde{X} est l'approximation upper ou lower pour B . Alors,

$$\tilde{X}^{(u,h')} \preceq_{sd} \tilde{X}^{(u,h)} \preceq_{sd} X \preceq_{sd} \tilde{X}^{(l,h)} \preceq_{sd} \tilde{X}^{(l,h')}$$

pour $0 < h \leq h'$.

Définition 7.2.9

Une v.a. X_θ est dite stochastiquement croissante si et seulement si $X_\theta \preceq_{sd} X_{\theta'}$ quand $\theta \leq \theta'$.

Proposition 7.2.10

Si $\Theta \preceq_{sd} \Theta'$, alors $X_\Theta \preceq_{sd} X_{\Theta'}$.

7.3 | Ordres convexes

Définition 7.3.1

Une fonction est dite convexe si $\phi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha\phi(x) + (1 - \alpha)\phi(y)$ pour tout x et y et pour tout $0 < \alpha < 1$.

Une fonction ϕ est dite concave si $-\phi$ est convexe.

On définit des ordres stochastiques.

Définition 7.3.2

Soient X et X' telles que $E[X] < \infty$ et $E[X'] < \infty$. Alors,

— Ordre convexe : $X \preceq_{cx} X'$ si $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$, pour toute fonction réelle convexe ϕ et en

supposant que les espérances existent.

- Ordre convexe croissante : $X \preceq_{icx} X'$ si $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$, pour toute fonction réelle convexe croissante ϕ et en supposant que les espérances existent.
- Ordre concave croissante : $X \preceq_{icv} X'$ si $E[\phi(X)] \leq E[\phi(X')]$, pour toute fonction réelle concave croissante ϕ et en supposant que les espérances existent.

Définition 7.3.3 : Ordre stop-loss

$X \preceq_{sl} X'$, si $E[(X - d)_+] \leq E[(X' - d)_+]$, pour tout $d \in \mathbb{R}$, où $(u)_+ = \max(u, 0)$.

Théorème 7.3.4

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $X \preceq_{icx} X'$;
2. $X \preceq_{sl} X'$.

Remarque 7.3.5

$X \preceq_{sd} X'$ implique $X \preceq_{icx} X'$ mais pas $X \preceq_{cx} X'$.

Les ordres convexes, convexes croissantes et stop loss sont fermés sous la convolution, le mélange et la composition.

Proposition 7.3.6 : Critère de Karlin-Novikoff

Soient deux v.a. X et X' telles que $E[X] \leq E[X'] < \infty$. S'il existe un nombre $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned} F_X(x) &\leq F_{X'}(x), & x < c \\ F_X(x) &\geq F_{X'}(x), & x \geq c, \end{aligned}$$

alors $X \preceq_{icx} X'$ ou $X \preceq_{sl} X'$.

Proposition 7.3.7

Soient les v.a. X et X' . Alors, on a $X \preceq_{icx} X'$ si et seulement si $TVaR_\kappa(X) \leq TVaR_\kappa(X')$, pour tout $0 < \kappa < 1$.

Proposition 7.3.8

Soient la v.a. positive Θ et la v.a. $X_\theta \sim \text{Pois}(\lambda\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{R}^+$. Les v.a. Θ et X_θ sont indépendantes. Alors, $\Theta \preceq_{icx} \Theta'$ implique $X_\Theta \preceq_{icx} X_{\Theta'}$.

Proposition 7.3.9

On a $W_{n+1} \preceq_{icx} W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^+$.

8 | Copules

8.1 | Copules bivariées

Définition 8.1.1

Une copule $C(u_1, u_2)$ est une application $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ayant les mêmes propriétés qu'une fonction de répartition :

- $C(u_1, u_2)$ est non décroissante sur $[0, 1]^2$;
- $C(u_1, u_2)$ est continue à droite sur $[0, 1]^2$;
- $\lim_{u_i \rightarrow 0} C(u_1, u_2) = 0$ pour $i = 1, 2$;
- $\lim_{u_1 \rightarrow 1} C(u_1, u_2) = u_2$ et $\lim_{u_2 \rightarrow 1} C(u_1, u_2) = u_1$;
- on a $\delta_{a_1, b_1} \delta_{a_2, b_2} C(u_1, u_2) \geq 0$, pour tout $a_1 \leq b_1$ et $a_2 \leq b_2$, où

$$\delta_{a_1, b_1} \delta_{a_2, b_2} C(u_1, u_2) = C(b_1, b_2) - C(b_1, a_2) - C(a_1, b_2) + C(a_1, a_2).$$

De plus, on a

$$\delta_{a_1, b_1} \delta_{a_2, b_2} C(u_1, u_2) = \Pr(a_1 < U_1 \leq b_1, a_2 < U_2 \leq b_2).$$

Théorème 8.1.2 : Théorème de Sklar

Soit $F \in \Gamma(F_1, F_2)$ ayant des fonctions de répartition marginales F_1 et F_2 . Alors, il existe une copule C telle que, pour tout $\underline{x} \in \mathbb{R}^+$,

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)).$$

Si F_1 et F_2 sont continues, alors C est unique. Sinon, C est uniquement déterminée sur $\text{Ran} F_1 \times \text{Ran} F_2$, où $\text{Ran} F$ est le support de F . Inversement, si C est une copule et si F_1 et F_2 sont des fonctions de répartition, alors la fonction définie par

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

est une fonction de répartition bivariée avec des fonctions de répartition marginales F_1 et F_2 .

Corollaire 8.1.3

Soit F une fonction de répartition bivariable avec des marginales continues F_1, F_2 et la copule C . Alors, pour tout (u_1, u_2) dans $[0, 1]^2$,

$$C(u_1, u_2) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2))$$

8.2 | Propriétés des copules**Définition 8.2.1**

Soit $C(u_1, u_2)$ une copule définie sur $[0, 1]^2$. Alors, on a

$$C^-(u_1, u_2) \leq C(u_1, u_2) \leq C^+(u_1, u_2),$$

où $C^-(u_1, u_2) = \max(u_1 + u_2 - 1; 0)$ et $C^+(u_1, u_2) = \min(u_1, u_2)$ correspondent aux copules borne inférieure et supérieure de Fréchet (antimonotone et comonotone).

On a aussi

$$— c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2)$$

— Pour une paire de v.a. continues (X_1, X_2) avec $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$

— la fonction de densité est $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$

La copule de survie est obtenue selon

$$\bar{F}_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \hat{C}(\bar{F}_{X_1}(x_1), \bar{F}_{X_2}(x_2))$$

et on obtient la formule

$$\hat{C}(u_1, u_2) = C(1 - u_1, 1 - u_2) + u_1 + u_2 - 1.$$

On note que

$$\Pr(U_1 > u_1, U_2 > u_2) \neq \hat{C}(u_1, u_2).$$

Propriété 8.2.2

Soient X_1 et X_2 des v.a. continues dont la structure de dépendance est définie selon la copule C . Soient ϕ_1 et ϕ_2 des fonctions continues monotones. On a les propriétés suivantes :

1. Si ϕ_1 et ϕ_2 sont non décroissantes, alors la structure de dépendance de $(\phi(X_1), \phi(X_2))$ est la copule C .

8.2.1 | Notions de dépendance

— Dépendant positivement par quadrant

$$\bar{F}_X(x_1, x_2) \geq \bar{F}_1(x_1)\bar{F}_2(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$C(u_1, u_2) \geq u_1 u_2 \quad \forall u_1, u_2 \in [0, 1]$$

— Associé

$$\text{Cov}(\Phi_1(X_1, X_2), \Phi_2(X_1, X_2)) \geq 0$$

quelles que soient les fonctions Φ_1 et $\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ non-décroissants telles que la covariance existe.

— X associé $\Rightarrow X$ positivement dépendant par quadrant

— Conditionnellement croissant : si $x_1 \leq y_1$ dans le support de X_1 , on a

$$\Pr(X_2 > t | X_1 = x_1) \leq \Pr(X_2 > t | X_1 = y_1) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(idem pour X_2). La copule C est conditionnellement croissant ssi

- i) $\forall u_2 \leq 1, u_1 \mapsto \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2)$ est strictement croissante, c.-à-d. $u_1 \mapsto C(u_1, u_2)$ est une fonction concave
- ii) $\forall u_1 \leq 1, u_2 \mapsto \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)$ est strictement croissante, c.-à-d. $u_2 \mapsto C(u_1, u_2)$ est une fonction concave

8.3 | Mesures de dépendance

Définition 8.3.1 : Rho de Spearman

La mesure d'association est donné par

$$\rho_S(X_1, X_2) = \rho(F_1(X_1), F_2(X_2)),$$

où ρ est la corrélation linéaire.

On peut écrire les quantités en fonction des marginales uniformes :

- $\rho_S(X_1, X_2) = 12E[F_1(X_1)F_2(X_2)] - 3$
- $\rho_S(X_1, X_2) = 12E[U_1U_2] - 3$

Définition 8.3.2 : Tau de Kendall

On considère deux couples de v.a. iid (X_1, X_2) et (X_1^*, X_2^*) . La mesure d'association est donné par

$$\tau_K(X_1, X_2) = \Pr((X_1 - X_1^*)(X_2 - X_2^*) > 0) - \Pr((X_1 - X_1^*)(X_2 - X_2^*) < 0).$$

Le premier terme mesure la concordance et le deuxième terme mesure la discordance.

- $\tau_K(X_1, X_2) = E[\text{sign}(X_1 - X_1^*)(X_2 - X_2^*)]$
- $\tau_K(X_1, X_2) = 4E[C(U_1, U_2)] - 1$

8.4 | Mesures de queue

Définition 8.4.1 : Dépendance de queue

L'indice de dépendance de queue supérieure est donnée par

$$\lim_{u \rightarrow 1} \Pr(X > F^{-1}(u) | Y > G^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 1} \Pr(U > u | V > u).$$

On peut réécrire cette quantité (en distribuant)

$$\lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}.$$

L'indice de dépendance de queue inférieure est donnée par

$$\lim_{u \rightarrow 0} \Pr(X \leq F^{-1}(u) | Y \leq G^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 0} \Pr(U \leq u | V \leq u).$$

On peut réécrire cette quantité (en distribuant)

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}.$$

8.5 | Copules archimédiennes

Les copules archimédiennes sont sous la forme

$$C(u_1, \dots, u_d) = \phi^{-1}[\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d)],$$

où $\phi(u)$ est appelé une fonction génératrice.

- La fonction génératrice est strictement décroissante, convexe et continue
- Elle projette $[0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ avec $\phi(1) = 0$
- Son inverse ϕ^{-1} doit être complètement monotone sur $[0, \infty]$. Elle satisfait

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} f(x) \geq 0, n = 1, 2, 3, \dots$$

- $\tau_K(X_1, X_2) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi(u)}{\phi'(u)} du$
- $\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + \phi^{-1}(2\phi(u))}{1 - u} \stackrel{RH}{=} 2 - 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt}\phi^{-1}(2t)}{\frac{d}{dt}\phi^{-1}(t)},$ si $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt}\phi^{-1}(t) = -\infty$, sinon il n'y a pas d'indice de dépendance de queue supérieure.
- $\lambda_L = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dt}\phi^{-1}(2t)}{\frac{d}{dt}\phi^{-1}(t)}$ si $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt}\phi^{-1}(t) = 0$, sinon il n'y a pas d'indice de dépendance de queue inférieure.

Voir l'examen spécialisé pour une liste des générateurs et des copules.

8.6 | Copules elliptiques

8.6.1 | Copule gaussienne

$$— C(u_1, \dots, u_d) = \Phi_P(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d))$$

$$— \tau_K(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$$

$$— \tau_K(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{ij})$$

$$— \lambda_U = \lambda_L = 0$$

8.6.2 | Copule de Student

$$— C(u_1, \dots, u_d) = t_{\nu, P}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_d))$$

$$— \tau_K(X_1, X_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho$$

$$— \lambda_U = 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}(\nu+1) \right)$$

$$— \tau_K(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho_{ij}$$

$$— \lambda_U = 2t_{\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{1-\rho_{ij}}{1+\rho_{ij}}}(\nu+1) \right)$$

9 | Allocation du capital

10 | Modèles de ruine

10.1 | Modèles à temps discret

Définition 10.1.1 : Processus de surplus

Le processus de surplus $\{U_t : t \geq 0\}$ (ou la version discrète $\{U_t : t = 0, 1, \dots\}$) mesure le surplus du portefeuille au temps t avec un surplus initial de $u = U_0$. Le surplus au temps t est

$$U_t = U_0 + P_t - S_t,$$

où $\{P_t : t \geq 0\}$ est le processus de primes (net des frais) et $\{S_t : t \geq 0\}$ est le processus des pertes. Le processus de pertes peut être décomposé en processus de fréquence $\{N_t : t \geq 0\}$ et de sévérité $\{X_t : t \geq 0\}$.

Définition 10.1.2 : Un modèle de ruine discret

Soit W_t , l'incrément du surplus lors de l'année t . La v.a. W_t est donné par

$$W_t = P_t - P_{t-1} - S_t + S_{t-1}, t = 1, 2, \dots$$

Le processus de surplus est donné par

$$U_t = U_{t-1} + W_t, t = 1, 2, \dots$$

Définition 10.1.3 : Probabilités de ruine

- Probabilité de survie, temps continu, horizon infini :

$$\phi(u) = \Pr(U_t \geq 0 \forall t \geq 0 | U_0 = u).$$

- Probabilité de survie, temps discret, horizon fini :

$$\tilde{\phi}(u, \tau) = \Pr(U_t \geq 0 \forall t = 0, 1, \dots, \tau | U_0 = u).$$

- Probabilité de survie, temps continu, horizon fini :

$$\phi(u, \tau) = \Pr(U_t \geq 0 \forall 0 \leq t \leq \tau | U_0 = u).$$

- Probabilité de survie, temps discret, horizon infini :

$$\tilde{\phi}(u) = \Pr(U_t \geq 0 \forall t = 0, 1, \dots | U_0 = u).$$

On a

$$\phi(u) \leq \tilde{\phi}(u) \leq \tilde{\phi}(u, \tau)$$

et

$$\phi(u) \leq \phi(u, \tau) \leq \tilde{\phi}(u, \tau).$$

On a aussi

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \phi(u, \tau) = \phi(u) \text{ et } \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{\phi}(u, \tau) = \tilde{\phi}(u).$$

Les probabilités de ruine sont donnés par

$$\psi(u) = 1 - \phi(u)$$

10.2 | Modèles à temps continu

Définition 10.2.1 : Un modèle de ruine continu

Soit les pertes individuelles $\{X_1, X_2, \dots\}$, des v.a. iid avec fonction de répartition F et moyenne μ . On suppose que le processus de pertes est Poisson composé $S_t = X_1 + \dots + X_{N_t}$, où $\{N_t : t \geq 0\}$ est un processus de Poisson avec intensité λ . On a $E[S_t] = \lambda\mu t$. De plus, les primes sont collectées à un taux constant

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu.$$

Le facteur θ est appelé le chargement de sécurité relatif ou le facteur de chargement de prime. Le processus de surplus est donc

$$U_t = u + ct - S_t, t \geq 0,$$

où $u = U_0$ est le surplus initial. La probabilité de survie à temps infini est donné par

$$\phi(u) = \Pr(U_t \geq 0 \forall t \geq 0 | U_0 = u)$$

et la probabilité de ruine est donné par

$$\psi(u) = 1 - \phi(u).$$

10.2.1 | Coefficient d'ajustement et inégalité de Lundberg.

Définition 10.2.2 : Coefficient d'ajustement

Soit $t = \kappa$ la plus petite solution positive de

$$1 + (1 + \theta)\mu t = M_x(t).$$

Équations équivalentes :

$$— E[e^{tS}] = e^{t(1+\theta)\mu\lambda}.$$

$$— 1 + \theta = \int_0^\infty e^{\kappa x} f_e(x) dx, \text{ où } f_e \text{ est la fonction de densité équilibre.}$$

Proposition 10.2.3 : L'inégalité de Lundberg

On suppose que $\kappa > 0$ est la solution du coefficient d'ajustement. Alors, la probabilité de ruine $\psi(u)$ satisfait

$$\psi(u) \leq e^{-\kappa u}, u \geq 0.$$

La probabilité de ruine est bornée par le haut par une fonction du capital initial et du chargement de sécurité relatif. Supposons qu'on tolère une probabilité de ruine de α . Si un chargement de u est disponible,

$$\theta = \frac{u (E[\exp\{-\frac{\ln \alpha}{u} X\}] - 1)}{-\mu \ln \alpha} - 1.$$

Si un chargement de sécurité relatif de θ est prescrit,

$$u = \frac{-\ln \alpha}{\kappa}$$

L'inégalité de Lundberg garanti les résultats suivantes :

$$— \psi(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0;$$

$$— \phi(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} \phi(u) = 1.$$

10.2.2 | Équation intégral-différentielle

Sixième partie

Processus stochastiques

1 | Chaînes de Markov

1. Soit $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$, un processus qui peut prendre un nombre fini ou comptable d'états.
2. Si le processus est dans l'état i au temps n , on le note $X_n = i$.
3. Si le processus est dans l'état i , il a une probabilité fixe, notée P_{ij} , que le processus sera dans l'état j au prochain état.
4. Ce processus est appelé un processus de Markov.

On a

$$P_{ij} \geq 0, i, j \geq 0$$

et

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, i = 0, 1, \dots$$

Les probabilités sont présentées dans une matrice de transition

$$P = \begin{vmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0j} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ P_{i0} & P_{i1} & \dots & P_{ij} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

1.1 | Équations Chapman-Kolmogorov

On étudie les probabilité de transition pour plus d'une période. Soit

$$P_{ij}^n = \Pr(X_{n+k} = j | X_k = i), \quad n \geq 0, i, j \geq 0.$$

Pour calculer ces valeurs, on a

$$P_{ij}^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^n P_{kj}^m \quad \text{pour } n, m \geq 0 \forall i, j.$$

Intuition : la probabilité de partir de i et finir à j est la somme de tous les chemins possibles. En notation matricielle, on a

$$P^{n+m} = P^n P^m.$$

1.1.1 | Probabilités de visiter un état

On s'intéresse à la probabilité qu'un processus visite un état à un moment. Pour ce faire, on crée un état absorbant.

$$\begin{aligned} Q_{i,j} &= P_{i,j}, \text{ si } i \notin A, j \notin A \\ Q_{i,A} &= \sum_{j \in A} P_{i,j}, \text{ si } i \notin A \\ Q_{A,A} &= 1. \end{aligned}$$

1.2 | Classification des états

- L'état j est dit accessible de l'état i si $P_{ij}^n > 0$ pour un $n \geq 0$
- Deux états i et j qui sont accessibles l'un à l'autre sont appelés des états communicants et on les note $i \leftrightarrow j$
- Deux états qui communiquent sont appelés dans la même classe
- Une chaîne de Markov avec une seule classe est appelée irréductible
- Pour un état i , on note f_i la probabilité que partant de l'état i , le processus revisitera l'état i .
 - Si $f_i = 1$, on note l'état i récurrent. On a aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^n = \infty$$

- Si $f_i < 1$, on note l'état transient. La probabilité que le processus sera dans l'état i pour n périodes est une distribution géométrique. On a aussi

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^n < \infty$$

- Si i est récurrent, et i communique avec j , alors j est aussi récurrent.

1.3 | Probabilités limites

Théorème 1.3.1

Pour une chaîne de Markov irréductible et ergodique, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n$ existe et est indépendant de i . De plus, avec

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n, \quad j \geq 0$$

alors π_j est la solution positive unique de

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \quad j \geq 0,$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1.$$

2 | Processus de Poisson

2.1 | Distribution exponentielle

Définition :

- $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$
- $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$
- Premier moment : $E[X] = \frac{1}{\lambda}$
- FGM : $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad \text{où } t < \lambda$
- Fonction d'intensité : $r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$

Propriétés :

- Sans mémoire : $\Pr(X > s + t | X > t) = \Pr(X > s)$
- Probabilité avec les minimums : $\Pr(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$
- Probabilité avec les minimums (n v.a.) : $\Pr(X_i = \min(X_1, \dots, X_n)) = \frac{\lambda_i}{\sum \lambda_j}$
- Distribution des minimums : exponentielle avec somme des intensités

MANQUE ERLANG GÉNÉRALISÉE

2.2 | Processus de Poisson

Définition 2.2.1 : Processus de comptage

Un processus de comptage

1. $N(t) \geq 0$
2. $N(t)$ est un entier
3. si $s < t$, alors $N(s) \leq N(t)$
4. Pour $s < t$, $N(t) - N(s)$ correspond au nombre d'évènements dans l'intervalle $(s, t]$.

Un processus de comptage a

- des accroissements indépendants si le nombre d'évènements dans des intervalles distinctes sont indépendants
- des accroissements stationnaires si la distribution du nombre d'évènements dans l'intervalle dépend seulement de la longueur de l'intervalle.

Définition 2.2.2 : Processus de Poisson I

Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson avec taux $\lambda > 0$ si

1. $N(0) = 0$
2. Le processus a des accroissements indépendants
3. Le nombre d'évènements dans l'intervalle de longueur t est Poisson avec moyenne λt

Définition 2.2.3

Une fonction f est dite $o(h)$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0.$$

Définition 2.2.4 : Processus de Poisson II

Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est dit un processus de Poisson avec taux d'intensité $\lambda > 0$ si

1. $N(0) = 0$
2. Le processus a des accroissements indépendants et stationnaires
3. $\Pr(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
4. $\Pr(N(h) = 2) = o(h)$

Définition 2.2.5

La séquence de temps entre les arrivées est notée par $\{W_n, n = 1, 2, \dots\}$. Le temps du premier sinistre est W_1 . Avec

$$\Pr(W_1 > t) = \Pr(N(t) = 0) = e^{-\lambda t},$$

donc le temps du premier sinistre est de distribution exponentielle avec paramètre λ . Le temps entre le premier et le deuxième sinistre T_2 est

$$\Pr(W_2 > t | T_1 = s) = \Pr(N(t+s) - N(s) = 0) = e^{-\lambda(t+s-s)} = e^{-\lambda t}.$$

$W_n, n = 1, 2, \dots$ sont iid et de distribution exponentielle avec paramètre λ .

Définition 2.2.6

Le temps d'attente au n^e évènement est noté par la v.a. $T_n = \sum_{i=1}^n W_i, n \geq 1$. De plus, on a $T_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$.

Les énoncés suivants sont équivalents :

$$N(t) \geq n \Leftrightarrow T_n \leq t.$$

Propriété 2.2.7

Soient $N_1(t)$ et $N_2(t)$, deux processus de Poisson avec intensités respectives λp et $\lambda(1-p)$. Alors, $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ est un processus de Poisson avec intensité λ .

La probabilité que n évènements de type I (noté S_n^1) arrivent avant m évènements de type II (noté S_m^2). On a $P(S_1^1 < S_1^2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$. Répéter cette expérience donne une v.a. binomiale et on a

$$\Pr(T_n^1 < T_m^2) = \sum_{k=n}^{n+m-1} \binom{m+n-1}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n+m-1-k}.$$

Proposition 2.2.8

Si 1 évènement d'un processus de Poisson a eu lieu au temps t , le temps de cet évènement est uniforme sur $[0, t]$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \Pr(W_1 < s | N(t) = 1) &= \frac{\Pr(W_1 < s, N(t) = 1)}{\Pr(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\Pr(1 \text{ évènement sur } [0, s], 0 \text{ évènement sur } [s, t])}{\Pr(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\Pr(1 \text{ évènement sur } [0, s]) \Pr(0 \text{ évènement sur } [s, t])}{\Pr(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\Pr(N(s) = 1) \Pr(N(t) - N(s) = 0)}{\Pr(N(t) = 1)} \\ &= \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\ &= \frac{s}{t}. \end{aligned}$$

Une version plus générale de ce résultat est présenté dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.9

Sachant $N(t) = n$, les temps d'inter-arrivé T_1, \dots, T_n sont distribués comme les statistiques d'ordres des n v.a. uniformes sur $(0, t)$.

La densité conditionnelle de T_1, \dots, T_n sachant $N(t) = n$ est équivalente à la densité conditionnelle de $W_1 = s_1, W_2 = s_2 - s_1, \dots, W_n = s_n - s_{n-1}, W_{n+1} > t - s_n$. Alors, on a

$$\begin{aligned} f(s_1, \dots, s_n | n) &= \frac{f(s_1, \dots, s_n, n)}{\Pr(N(t) = n)} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda s_1} \lambda e^{-\lambda(s_2 - s_1)} \dots \lambda e^{-\lambda(s_n - s_{n-1})} e^{-\lambda(t - s_n)}}{\frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}} \\ &= \frac{n!}{t^n}, \quad 0 < s_1 < \dots < s_n < t. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.10

On suppose que si un évènement arrive au temps y , alors il sera classifié comme type i , indépendamment, avec probabilité $P_i(y), i = 1, \dots, k$, où $\sum_{i=1}^k P_i(y) = 1$. Alors, si $N_i(t), i = 1, \dots, k$ représente le nombre d'évènements de type i qui arrivent d'ici le temps t alors $N_i(t), i = 1, \dots, k$ sont des v.a. indépendantes avec moyennes

$$E[N_i(t)] = \lambda \int_0^t P_i(s) ds.$$

2.3 | Généralisations du processus de Poisson

Définition 2.3.1 : Processus de Poisson non homogène

Le processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non-homogène avec fonction d'intensité $\lambda(t), t \geq 0$ si

1. $N(0) = 0$
2. $\{N(t), t \geq t\}$ a des accroissements indépendants
3. $\Pr(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$
4. $\Pr(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)$

Proposition 2.3.2

Soient $\{N(t), t \geq 0\}$ et $\{M(t), t \geq 0\}$, des processus de Poisson non-homogènes indépendants, avec fonctions d'intensités respectives $\lambda(t)$ et $\mu(t)$, et soit $N^*(t) = N(t) + M(t)$. Alors,

1. $\{N^*(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson non homogène avec fonction d'intensité $\lambda(t) + \mu(t)$

2. Sachant qu'un évènement de type t arrive au temps t , alors, indépendamment de ce qu'il se passe avant t , l'évènement au temps t provient du processus $\{N(t)\}$ avec probabilité $\frac{\lambda(t)}{\lambda(t)+\mu(t)}$

Un avantage du processus de Poisson non-homogène est que l'hypothèse d'accroissements non stationnaires n'est plus requise. De plus, le nombre d'évènements entre s et $s+t$ est Poisson avec moyenne $\int_s^{s+t} \lambda(y)dy$.

Définition 2.3.3

Le temps du n^e évènement d'un processus de Poisson non-homogène est

$$f_{S_n}(t) = \lambda(t)e^{-m(t)} \frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!},$$

où $m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$.

2.3.1 | Processus de Poisson composé

Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson composé s'il peut être représenté par le modèle stochastique

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0,$$

où $\{N(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson et Y_i sont des v.a. iid et indépendantes du processus de comptage. On a

$$E[X(t)] = \lambda t E[Y] \quad \text{et} \quad \text{Var}(X(t)) = \lambda t E[Y^2].$$

Propriété 2.3.4

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$, un processus de Poisson composé avec intensité λ_1 et fonction de répartition F_1 . Soit aussi $\{Y(t), t \geq 0\}$, un processus de Poisson composé avec λ_2 et F_2 . Alors, $\{X(t) + Y(t), t \geq 0\}$ est un processus de Poisson composé avec intensité $\lambda_1 + \lambda_2$ et fonction de répartition

$$F(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} F_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} F_2(x).$$

2.3.2 | Processus de Poisson conditionnel ou mixte

Soit $\{N(t), t \geq 0\}$, un processus de Poisson avec paramètre λ . Soit Λ , une v.a. positive représentant l'hétérogénéité du paramètre λ . Ce processus de Poisson est appelé conditionnel ou mixte. Stratégie générale : conditionner. On a

$$\Pr(N(t+s) - N(s) = n) = \int_0^\infty \Pr(N(t+s) - N(s) = n | \Lambda = \lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

$$= \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

On a aussi

$$\text{Var}(N(t)) = tE[L] + t^2 \text{Var}(L).$$

De plus,

$$\Pr(\Lambda \leq x | N(t) = n) = \frac{\int_0^x (\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda) d\lambda}{\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda) d\lambda}$$

et

$$f_{\Lambda|N(t)=n}(\lambda|n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda)}{\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} f_\Lambda(\lambda) d\lambda}.$$

Enfin,

$$\Pr(N(t) > n) = \int_0^\infty \bar{F}_\Lambda(\lambda) \lambda \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} d\lambda.$$

3 | Mouvement Brownien

3.1 | Définition

Définition 3.1.1

Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien si

1. $X(0) = 0$
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ a des accroissements stationnaires et indépendants
3. pour tout $t > 0$, $X(t)$ est de distribution normale avec moyenne 0 et variance $\sigma^2 t$.

La densité conjointe des observations est

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2-t_1}(x_2 - x_1) \dots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1}).$$

Avec cette fonction de densité, on peut calculer, par exemple, la distribution conditionnelle de $X(s)$ sachant que $X(t) = B$, où $s < t$. On a

$$f_{s|t}(x|B) = \frac{f_s(x) f_{t-s}(B-x)}{f(B)} \propto \exp \left\{ -\frac{(x - Bs/t)^2}{2\sigma^2 s(t-s)/t} \right\},$$

donc $(X(s)|X(t) = B) \sim \text{Norm}\left(\frac{s}{t}B, \frac{s}{t}(t-s)\sigma^2\right)$.

3.2 | Temps d'atteinte d'une barrière

Soit T_a , la première atteinte à la barrière a du mouvement Brownien. Pour calculer $\Pr(T_a \leq t)$, on utilise la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}\Pr(X(t) \geq a) &= \underbrace{\Pr(X(t) \geq a | T_a \leq t)}_{\frac{1}{2}} \Pr(T_a \leq t) + \underbrace{\Pr(X(t) \geq a | T_a > t)}_0 \Pr(T_a > t) \\ \Pr(T_a \geq t) &= 2 \Pr(X(t) > a) \\ &= 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{a}{\sqrt{t}} \right) \right).\end{aligned}$$

3.3 | Variations au mouvement Brownien

3.3.1 | Mouvement Brownien avec dérive

Définition 3.3.1

On dit que $\{X(t), t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien avec dérive μ et variance σ^2 si

1. $X(0) = 0$
2. $\{X(t), t \geq 0\}$ a des accroissements indépendants et stationnaires
3. $X(t)$ est de distribution normale avec moyenne μt et variance $t\sigma^2$.

On peut exprimer le mouvement Brownien avec dérive en fonction d'un mouvement Brownien standard avec la relation

$$X(t) = \mu t + \sigma B(t).$$

3.3.2 | Mouvement Brownien géométrique

Définition 3.3.2

Soit $\{Y(t), t \geq 0\}$ un mouvement Brownien avec dérive μ et variance σ^2 . Le processus $\{X(t), t \geq 0\}$ défini selon

$$X(t) = e^{Y(t)}$$

est un mouvement Brownien géométrique.

On peut montrer, à l'aide des hypothèses d'accroissements indépendants et stationnaires de $Y(t)$, que l'espérance du processus au temps t qu'on a observé jusqu'à $s, s < t$ est

$$E[X(t) | X(s), 0 \leq s \leq t] = X(s) e^{(t-s)(\mu + \sigma^2/2)}.$$

3.4 | Processus Gaussien

Définition 3.4.1

Un processus stochastique $\{X(t), t \geq 0\}$ est appelé Gaussien, ou normal, si $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ a une distribution normale pour tout t_1, t_2, \dots, t_n .

Un mouvement Brownien est un processus Gaussien. On a

$$\text{Cov}(X(s), X(t)) = \text{Cov}(X(s), X(s) + [X(t) - X(s)]) = \text{Cov}(X(s), X(s)) = \text{Var}(X(s)) = s.$$

On considère ensuite le processus Gaussien entre 0 et 1, sachant que $X(1) = 0$. Puisque la distribution conditionnelle de $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ est Gaussienne, la distribution conditionnelle est aussi Gaussienne et on l'appelle un pont Brownien (car on sait que $X(t) = 0$ pour $t = 0$ et $t = 1$).

On a, pour $s < t < 1$ (en conditionnant sur $X(1)$)

$$\text{Cov}[(X(s), X(t)) | X(1) = 0] = s(1 - t).$$

Proposition 3.4.2

Si $\{X(t), t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien standard, alors $\{Z(t), 0 \leq t \leq 1\}$ est un pont Brownien lorsque $Z(t) = X(t) - tX(1)$.

3.4.1 | Mouvement Brownien intégré

Si $\{X(t), t \geq 0\}$ est un mouvement Brownien, alors le processus $\{Z(t), t \geq 0\}$ est défini selon

$$Z(t) = \int_0^t X(s) ds$$

est appelé un mouvement Brownien intégré. Le processus est aussi Gaussien avec

$$E[Z(t)] = 0$$

et

$$\text{Cov}(Z(s), Z(t)) = s^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{s}{6} \right).$$

Septième partie

Finance

1 | Introduction

Définition 1.0.1 : Produit dérivé

Un produit dérivé est un outil financier dont la valeur dépend sur (ou est dérivé par) la valeur d'un autre variable sous-jacente et plus simple.

Les produits sont échangés sur différentes plateformes :

- **Marché de produits dérivés** Un marché de produits dérivés est un marché où les individus échangent des contrats standardisés, défini par le marcher d'échanges.
- **Marchés en vente libre** Lorsqu'un entente est fait entre deux parties (gré à gré), il est dit vendu en vente libre (over-the-counter). Les parties présentent le contrat à une contrepartie centrale pour réduire le risque de défaut.

Une opération au comptant (spot contract) est une opération qui implique la vente (presque) immédiate d'un titre. La valeur de l'opération au comptant est le cours au comptant (spot price).

1.1 | Contrats à termes

Les contrats à termes sont des ententes entre deux parties qui oblige la première partie à acheter à la seconde partie un actif sous-jacent à une date et un prix pré-déterminé.

- Un contrat à terme de gré à gré (forward contract) est négocié entre deux parties. Il est échangé sur un marché en vente libre. Ces contrats ont l'avantage d'être flexibles.
- Un contrat à terme standardisé (futures contract) est négocié sur un marché organisé. Le marché offre un mécanisme qui garantie que les contrats seront honorés.

La partie qui accepte d'acheter le sous-jacent prend une position longue. La partie qui accepte de vendre le sous-jacent prend une position courte. En général, le détenteur de la position longue bénéficie d'une augmentation du prix d'un sous-jacent.

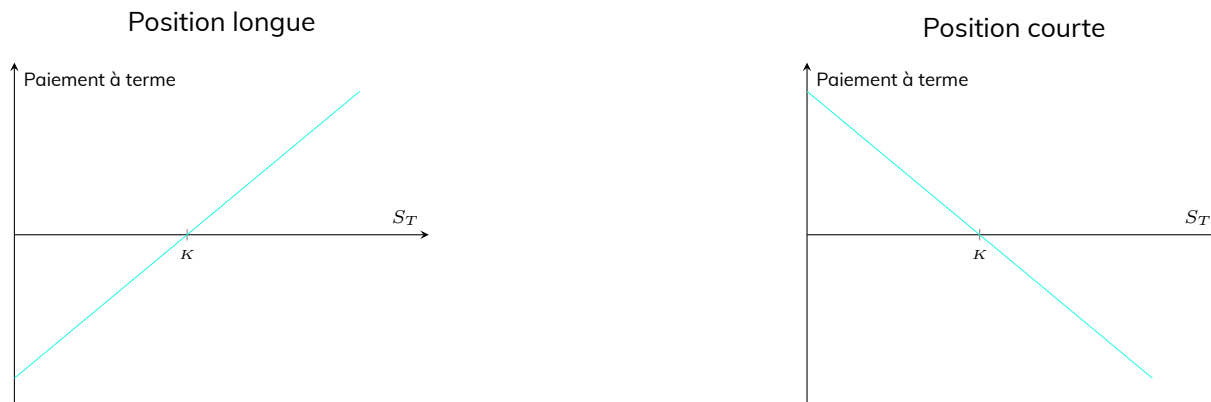
Les contrats à terme gré à gré peuvent être utilisés pour couvrir (hedge) le risque de devise étrangère.

Le paiement à terme de la position longue d'un *forward* pour une unité du sous-jacent est

$$S_T - K,$$

où K est le prix d'exercice, T est la date de maturité et S_t est le prix du sous-jacent au temps t . Le paiement à terme de la position courte d'un forward est

$$K - S_T.$$



1.2 | Options

Définition 1.2.1

- Un option d'achat (call option) donne le **droit** au détenteur d'acheter le sous-jacent d'ici une certaine date à un certain prix.
- Un option de vente (put option) donne le **droit** au détenteur de vendre le sous-jacent d'ici une certaine date à un certain prix.

Le choix d'exercer l'option ou non est toujours à la discrétion de la partie avec la position longue. C'est cette subtilité qui distingue les contrats à terme.

Le prix dans le contrat est le prix d'exercice (exercise ou strike price). La date u contrat est la date de maturité.

Une option américaine peut être exercé à tout moment jusqu'à la maturité. Une option européenne peut seulement être exercé à la maturité.

1.3 | Participants dans les marchés

- Gestionnaires de risque (hedgers) : utilisent des produits dérivés pour couvrir leurs risque, i.e. réduire ou limiter leur exposition au risque du marché. Ils veulent réduire leur exposition aux mouvements adverses du prix d'un sous-jacent. On peut couvrir un risque avec un contrat forward (neutraliser le risque) ou avec un contrat d'option (assurance contre une baisse ou hausse).
- Spéculateurs : désirent prendre une position dans le marché et exploiter un mouvement dans le prix d'un sous-jacent. Un spéculateur qui utilise des contrats à terme est exposé à beaucoup de risque. Un spéculateur qui utilise de contrats d'options a sa perte limité par le prix de l'option.
- Arbitragiste : personne qui exploite un profit sans risque en entrant simultanément dans des positions en deux ou plusieurs marchés.

Il peut être plus bénéfique pour les gestionnaires de risques et les spéculateurs d'utiliser des produits dérivés que le produit dérivé lui-même.

2 | Mécanismes du marché des futures

Ce chapitre survole les particularités des marchés de contrats à terme standardisés. Le prix des contrats à terme standardisés est négocié sur le marché, et déterminé par les principes d'offre et de demande.

La grande majorité des contrats à terme standardisés ne mènent pas à la livraison. La plupart des boursiers mettent leur positions à terme avant la période de livraison spécifiée dans le contrat. On peut fermer sa position dans un contrat en entrant dans la position inverse d'un contrat.

2.1 | Spécifications d'un contact à terme standardisé

Vu que les futures sont standardisés, on doit déterminer avec détail les particularités du contrat : le sous-jacent, la taille du contrat, où la livraison sera faite, quand la livraison sera faite.

- **Le sous-jacent** : Lorsque le sous-jacent est une marchandise (denrée, matière première), il peut y avoir de la variation dans la qualité disponible. Lorsqu'un sous-jacent est échangé, on doit spécifier le grade / la qualité de la marchandise qui est acceptable.
- **La taille du contrat** : Spécifie la quantité du sous-jacent qui doit être livré sous un seul contrat. Trop grand = peu d'acheteurs, trop petit = possiblement trop cher car il y a des frais pour chaque contrat.
- **Ententes de livraison** : La place où la livraison est faite doit être spécifiée par le marché. Ceci a un grand impacte si le sous-jacent a beaucoup de coûts de livraison.
- **Mois de livraison** : Un contrat futures est spécifié par son mois de livraison. Le marché doit spécifier la période pendant le mois où la livraison peut être faite.
- **Devis de soumission** (price quote) : définit comment les prix sont énoncés : dollars et sous ou dollars et 32e de dollars américains ?
- **Limites de prix** : parfois, les marchés limitent le mouvement des prix pour une seule journée. Si le prix baisse ou monte dans une direction plus que la limite, l'échange de ce produit est suspendu pour la journée.
- **Limites de positions** : parfois, les marchés limitent la quantité de contrats qu'un spéculateur peut détenir, pour limiter leur impacte / influence sur le marché.

Lorsque la date de livraison approche, le prix d'un future converge vers le prix d'un spot. À la date de livraison, le prix du future est égal au prix du spot.

2.2 | Opérations des comptes sur marge

Un compte sur marge permet de réduire le risque de défaut sur le contrat. Ces opérations sont fait par l'intermédiaire d'une chambre de compensation (clearing house). Le but du système de marges est d'assurer que les fonds sont disponibles pour payer les investisseurs qui font un profit.

2.2.1 | Règlement quotidien

- Lorsqu'un investisseur achète un futures, le courtier va lui demander de déposer des fonds dans un compte sur marge. Le montant qui doit être déposé à l'entrée du contrat est la **marge initiale**.
- À la fin de chaque jour d'échange, le compte sur marge doit être ajusté pour refléter le gain ou la perte de l'investisseur. Cette pratique est appelé le règlement quotidien (daily settlement ou marking to market).
- Un investisseur peut retirer toute balance au delà de la marge initiale.
- Pour s'assurer que la balance dans un compte sur marge n'est jamais négatif, une marge de maintenance est déterminé. Si la valeur du compte sur marge baisse sous la marge de maintenance, l'investisseur doit ajouter des fonds pour remonter la valeur du compte à la marge initiale d'ici la prochaine journée.
- L'ajout de fonds est appelé la variation sur marge.
- Un investisseur qui ne fournis par la variation sur marge, le courtier ferme la position.
- La plupart des courtiers paient de l'intérêt sur la balance des comptes sur marge.
- Si un investisseur ne peut pas payer la variation sur marge, il peut offrir des bons du trésor ou des actifs à une valeur moindre que leur valeur marchande (la réduction de la valeur marchande est référée à un haircut : 10% pour les bons du trésor et 50% pour les actifs).

2.2.2 | Chambres de compensation

Une chambre de compensation (clearing house) joue le rôle d'intermédiaire dans les transactions de futures. Il garantie que chaque partie puisse remplir ses obligations. Un courtier doit être membre d'une chambre de compensation, ou passer par un membre et payer la marge par ce membre. Une chambre de compensation surveille les transactions chaque jour et calcule la position nette de ses membres. Les membres de chambres de compensations doivent contribuer à un fonds de garantie, si un membre est incapable de fournir la variation sur la marge et qu'il y a une perte lorsque la position du membre est fermé.

2.3 | Marchés gré à gré (OTC)

Un contrat gré à gré est négocié entre deux parties. Le risque de crédit est plus élevé dans un marché gré à gré. Pour réduire ce risque, certains marchés gré à gré ont emprunté des idées des marchés d'échange.

2.3.1 | Contreparties centrales

Une contrepartie centrale (central counterparty, CCP) est agitée comme chambre de compensation. Un membre d'un CCP fournit la marge initiale et la variation sur la marge. Il doit aussi contribuer au fonds de garantie. Lorsque deux parties s'entendent sur la transaction d'un produit dérivé, ils la présentent à un CCP. Celui-ci devient la contrepartie entre les deux parties.

Pour un contrat forward où A accepte d'acheter un sous-jacent de B, la chambre de compensation accepte

- d'acheter le sous-jacent de B au prix convenu ;
- de vendre le sous-jacent à A au prix convenu.

Il accepte donc le risque de crédit des deux parties.

2.3.2 | Compensation bilatérale

Dans un marché compensé bilatéralement, deux compagnies entrent dans une entente mère (master agreement) qui couvre toutes leurs échanges. Cette entente inclut une annexe qui requiert les compagnies à fournir une garantie (collatérale).

2.4 | Cours du marché

Les cours de futures sont disponibles d'échanges ou en ligne. Le sous-jacent, la taille et la quantité est déterminé.

- **Prix** : Plusieurs prix sont disponibles : le prix d'ouverture (prix immédiatement à l'ouverture des marchés), le plus haut prix de la journée et le plus bas prix de la journée.
- **Prix de fermeture** : Le prix de fermeture est le prix utilisé pour déterminer le gain ou la perte quotidienne et les obligations sur les marges. Il est calculé comme le prix juste avant la fermeture des marchés.
- **Volume d'échange** : le nombre de contrats échangés pendant la journée.
- **Intérêt ouvert** : le nombre de positions longues. S'il y a un grand nombre de participants, le volume d'échange peut être plus élevé que l'intérêt ouvert.
- **Patrons des futures** : Si le prix des futures est une fonction croissante de la maturité des contrats, le patron est dit dans un marché normal. Si le prix des futures est une fonction décroissante de la maturité des contrats, le patron est dit dans un marché inversé.

2.5 | Livraison

Très peu de contrats futures mènent à la livraison du sous-jacent, la plupart sont fermés plus tôt. Par contre, le prix du futures doit tenir compte des frais possibles dans la livraison.

- La période où la livraison est faite est définie par le marché et varie de contrat à contrat. La décision de quand livrer est faite par la partie avec la position courte.

- Lorsque la position courte est prête à livrer, le courtier de la position courte envoie un avis de livraison à la chambre de compensation.
- Pour une marchandise, prendre livraison veut dire accepter un reçu d'entrepôt en échange de paiement immédiat. La partie qui prend livraison (position longue) accepte tous les coûts d'entreposage.
- Pour des produits financiers, la livraison est fait par virement bancaire.
- Le prix payé est le plus récent cours de fermeture. Si spécifié par l'échange, le prix peut être ajusté pour la qualité, la location de la livraison, etc.
- Il y a trois dates importantes : le premier jours d'avis est la première journée du mois où la position courte peut faire un avis de livraison. Le dernier jour de livraison est le dernier jour. Le dernier jour d'échange est quelques jours avant le dernier jours de livraison. Un investisseur qui ne veut pas prendre livraison devrait fermer sa position avant le premier jours d'avis.
- **Règlement en espèces** : certains futures, comme sur des indices d'actions, sont réglés en espèces car il est inconvenient ou impossible de livrer le sous-jacent. Lorsqu'un contrat est réglé en espèces, les contrats sont déclarés fermés dans un journée prédéterminée (pas de période pour l'avis de livraison). Le prix de règlement est égal au prix spot du sous-jacent à l'ouverture ou à la fermeture de l'échange cette-journée.

2.6 | Types de boursiers

Il y a deux types de boursiers qui effectuent des échanges : les marchands de commissions futures (qui effectuent des commandes de leurs clients et qui chargent des commissions), et les locaux (qui échangent sur leur propre compte). Les individus qui prennent des positions peuvent être des gestionnaires de risques, des spéculateurs ou des arbitragistes. Les spéculateurs peuvent être caractérisés comme

- scalpers : analysent des tendances à court terme et tentent de profiter de petits changements dans le prix du contrat
- day traders : ferment leur position à la fin de la journée, ils veulent éviter le risque qu'une nouvelle affecte le prix lorsque les marchés sont fermés.
- échangeurs de position : gardent leurs positions pour plus long et espèrent faire des profits de grands mouvements dans les marchés.

2.7 | Types de commandes

- **Ordre au cours du marché** (market order) : requête qu'un échange soit fait immédiatement au meilleur prix disponible sur le marché
- **Ordre à cours limité** (limit order) : spécifie un prix particulier. La commande peut être exécutée à ce prix (ou à un prix plus favorable à l'investisseur).
- **Ordre à seuil de déclenchement** (stop order ou stop-loss order) : la commande est exécutée au meilleure prix une fois que l'offre ou la demande d'achat est fait à un certain prix ou à un prix moins favorable. Ex : Stop order à 30\$ lorsque le cours du marché est 35\$: il devient un ordre de vente lorsque le prix baisse à 30. Il limite les pertes.
- **Ordre à plage de déclenchement** (stop-limit order) : combinaison d'une stop order et d'une limit order. Ex : cours spot est 35\$, une stop-limit order est émise avec prix stop de 40 et prix limite de 41. Lorsqu'il y a une demande ou une offre à 40, la stop-limit order devient une limit order à 41.
- **Market-if-touched order** : exécuté au meilleur prix après qu'un échange arrive à un certain prix (ou plus favorable). Le MIT devient une ordre au cours du marché lorsqu'un échange est effectué à un certain prix.

2.8 | Régulations

Aux états unis, les marchés de futures est régularisé par la Commodity Futures Trading Commission. Leurs rôle est de protéger l'intérêt du public :

- Irrégularités : le marché doit être efficient et dans l'intérêt du public. Une irrégularité arrive quand un groupe tente d'accaparer le marché (corner the market). Un groupe prend des positions longues dans des futures et tente de contrôler l'offre du marché du sous-jacent. Les détenteurs de positions courtes ne peuvent plus livrer le produit, et le prix des futures et du spot monte.

2.9 | Forwards vs Futures

- Profits : De plus, il y a une différence quand les gains sont réalisés. Par exemple, avec les futures, les gains / pertes sont réalisés à chaque jour car les positions sont réglées à chaque jour. Avec les forwards, le gain ou la perte est réalisée à la date de livraison.
- Cours en devises étrangères : il peut y avoir une différence dans la manière où les devises sont annoncées dans différents marchés. Souvent, forwards : USD/CAD, et futures : CAD/USD

3 | Gestion du risque avec les futures

L'objectif des gestionnaires de risque est de réduire un risque qu'ils font face. Ce risque peut être lié à la fluctuation dans le prix d'une marchandise ou d'une matière première.

Une couverture parfaite permet de réduire complètement le risque. Ces couvertures sont rares. L'objectif des couvertures est souvent de répliquer au plus possible une couverture parfaite.

On restreint notre attention aux couvertures *hedge-and-forget*, où l'on n'ajuste pas la couverture une fois qu'elle est mis en place.

3.1 | Principes de base

Une couverture courte implique une position courte dans un contrat de futures. Une couverture courte est appropriée lorsque le gestionnaire de risque a déjà le sous-jacent en sa possession et prévoit le vendre dans le futur.

Une couverture longue implique une position longue dans un contrat de futures. Une couverture longue est appropriée lorsque le gestionnaire de risque prévoit acheter un sous-jacent dans le futur et désire déterminer son prix maintenant.

3.2 | Arguments pour et contre les couvertures

- + La plupart des compagnies (sauf celles en finance) ne sont pas dans le domaine de finance : ils n'ont pas d'expertise dans la gestion ou dans la tarification des taux d'intérêt, des taux d'échange de devises ou du prix de la marchandise. Les compagnies peuvent donc se concentrer dans les activités qu'ils se concentrent.
- Certaines compagnies croient que c'est le rôle des actionnaires de couvrir leur risque. Un actionnaire qui investit dans une compagnie de métal sait qu'il fait face à un risque lié au prix du métal : il peut lui-même couvrir son risque. Cet argument est débattable, car il assume qu'un investisseur est bien éduqué et qu'il comprend le risque de la compagnie.
- Certaines compagnies croient qu'un investisseur peut diversifier lui-même son risque. Ainsi, il est moins exposé à un risque de marchandise que la compagnie. Par exemple, un investisseur qui investit dans un fournisseur et un utilisateur d'une marchandise peut couvrir son risque.
- Si la couverture du risque n'est pas la norme dans une industrie, une compagnie qui couvre son risque peut être désavantagée. Une compagnie qui vend un bien à un prix qui fluctue avec le marché (bijoux) ajuste ses prix souvent. Alors, le profit est toujours prix (v.a.) + profit. Alors, le profit est constant d'une année à l'autre. Une compagnie qui couvre son risque peut fixer son prix et son produit. Alors, il n'y a plus de risque, mais ses prix ne seront pas compétitifs si le prix de l'industrie descend (et vendra à rabais si les prix de l'industrie monte). Alors, ses profits seront négatifs si le prix monte et très grand si le prix descend. Couvrir son risque peut augmenter la variabilité des profits si les concurrents ne couvrent pas leur risque.
- La couverture des risques, en moyenne, ne change pas le profit. Si le prix d'une marchandise descend mais que le risque était couvert, le président de la compagnie peut punir le gestionnaire de risque car s'il n'avait pas couvert son risque, le profit aurait été plus élevé. Au contraire, si le prix d'une marchandise monte, un gestionnaire de risque a moins souvent de gloire, car c'est son rôle comme gestionnaire de risque. Alors, il est important de comprendre que couvrir son risque est une stratégie et non une spéculation. Tout le monde doit accepter cette politique.

3.3 | Risque de corrélation

S'il existe des futures avec la marchandise exacte et les dates de livraison exactes nécessaires pour couvrir le risque, c'est simple de couvrir le risque. Par contre, il est rare qu'une telle couverture parfaite existe.

- Le sous-jacent à couvrir n'est peut-être pas exactement le même que le sous-jacent du futures
- Le gestionnaire de risque peut être incertain dans la date où le sous-jacent doit être acheté ou vendu
- La couverture pourrait demander que la position dans le futures doit être mise à terme avant son mois de livraison.

Le risque de corrélation (basis risk) dans une couverture est définie comme suit :

Basis = Prix spot du sous-jacent à être couvert - Prix futures du contrat utilisé.

Risque de corrélation dans le temps : Un gestionnaire de risque au temps t_1 sait qu'il veut vendre une marchandise au temps t_2 et prend une position courte dans un futures. Le prix qu'il obtient pour la marchandise est

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2.$$

Vu que F_1 est connu au temps t_1 , le seul risque est celui associé au risque de corrélation b_2 .

Risque de corrélation dans une couverture croisée : Un gestionnaire de risque ne peut parfois pas couvrir exactement le sous-jacent qu'il désire, sont utilise un produit similaire.

Soit S^* , le prix du sous-jacent dans le contrat futures et S , le prix du sous-jacent qui doit être couvert. En couvrant son risque, le prix qu'une compagnie paie est

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + (S_2^* - F_2) + (S_2 - S_2^*).$$

La première parenthèse est le risque dans le temps. La deuxième parenthèse est le risque associé à la couverture croisée. Ces deux composantes forment le risque de corrélation.

3.3.1 | Choix du contrat

Un facteur important qui impacte le risque de corrélation est le choix du contrat futures :

- le choix du sous-jacent du futures;
- le choix du mois de livraison.
- Parfois on choisit un mois de livraison plus tard que le mois où on veut livrer
 - car le prix du futures fluctue beaucoup pendant le mois de livraison.
 - car on risque de prendre possession du bien si on a une position longue.
- En général, le risque de corrélation augmente lorsque le temps entre l'expiration de la couverture et le mois de livraison augmente. Alors, on veut un mois de livraison plus proche possible, mais pas après, l'expiration de la couverture.
 - Si les mois de livraison sont mars, juin, septembre et décembre,
 - Les couvertures avec échéance dec, jan, fev utilisent un futures avec livraison en mars.
 - Les couvertures avec échéance mar, avr, mai utilisent un futures avec livraison en juin.
 - etc.
- Cette stratégie assume que la liquidité de tous les contrats est suffisante. En pratique, la liquidité est plus grande pour des contrats à courte maturité. Alors, un gestionnaire de risque peut utiliser des contrats à courte maturité et les renouveler (roll them forward).

3.4 | Couverture croisée

La couverture croisée arrive lorsque le sous-jacent du futures et le bien nécessaire est différent. Le ratio de couverture est la taille de la position dans un contrat futures sur la taille de l'exposition. Si le sous-jacent et le bien nécessaire est égal, on peut un ratio de couverture de 1. Sinon, on tente de minimiser la variance de la valeur de la position couverte.

3.4.1 | Ratio de couverture optimal

Soit ΔS , le changement du prix spot pendant la durée de la couverture, et ΔF , le changement du prix futures pendant la durée de la couverture. Le ratio de couverture qui minimise la variance est donné par

$$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F},$$

où σ_S est l'écart-type de ΔS , σ_F est l'écart-type de ΔF et ρ est le coefficient de corrélation entre ΔF et ΔS . L'efficacité de la couverture est la proportion de la variance éliminée par la couverture et est donné par ρ^2 .

3.4.2 | Nombre de contrats optimal

Soient Q_A , la taille (unités) de la position couverte et Q_F , la taille d'un contrat futures. La couverture doit être sur $h^* Q_A$ (A = asset) unités, et le nombre de contrats futures à acheter est

$$N^* = h^* \frac{Q_A}{Q_F}.$$

Si on utilise des futures, les prix sont réglés chaque jour avec une série de couvertures d'une journée. Parfois, le pourcentage de changements quotidien des futures et des spots sont utilisés. Soient $\hat{\rho}$, $\hat{\sigma}_S$ et $\hat{\sigma}_F$ les mesures équivalentes avec les pourcentages de changements quotidiens. Alors, le ratio de couverture quotidien est

$$\hat{\rho} \frac{S \hat{\sigma}_S}{F \hat{\sigma}_F}$$

et le nombre de contrats nécessaire pour couvrir le risque le lendemain est

$$N^* = \hat{\rho} \frac{S \hat{\sigma}_S}{F \hat{\sigma}_F} \frac{Q_A}{Q_F}.$$

3.5 | Futures sur les indices d'actions

Un indice d'actions réplique les changements dans la valeur d'un portefeuille d'actions. Le poids de chaque actif est égal à la proportion du portefeuille investi dans l'actif à un moment particulier.

- **Dow Jones Industrial Average** : 30 actions blue-chip. Le groupe CMI vend deux futures sur ces indices : 10\$ fois la valeur de l'indice et 5\$ (mini) fois la valeur de l'indice.
- **Standard & Poor's 500** : 500 actions : 400 industriel, 40 utilités, 20 transportation, 40 institutions financières. Le groupe CMI vend deux futures sur ces indices : 250\$ fois la valeur de l'indice et 50\$ (mini) fois la valeur de l'indice.
- **Nasdaq-100** : 100 actions. Le groupe CMI vend deux futures sur ces indices : 100\$ fois la valeur de l'indice et 20\$ (mini) fois la valeur de l'indice.

Les futures sont réglés en argent.

3.5.1 | Couvrir un portefeuille d'actions

Soit V_A , la valeur d'un portefeuille et V_F , la valeur d'un futures. On utilise le modèle d'évaluation des actifs financiers (CAPM) pour identifier le paramètre β , correspondant à la sensibilité du portefeuille par rapport au marché.

Le nombre de futures à acheter pour couvrir un portefeuille est

$$N^* = \beta \frac{V_A}{V_F}.$$

Un gestionnaire qui couvre son portefeuille va avoir un gain équivalent au taux sans risque. Pourquoi avoir un portefeuille d'actifs au lieu de bons du trésor? Un gestionnaire de risque peut décider de couvrir son portefeuille car il croit que sa sélection d'actions sera plus profitable que le marché (se profiter contre les mouvements du marché, mais rentabiliser sur l'ajout de ses sélections). Il peut aussi couvrir s'il a un portefeuille pour le long terme mais désire se couvrir pour le court terme : vendre maintenant et acheter plus tard peut avoir plus de frais de transaction que de se couvrir.

3.5.2 | Changer le beta d'un portefeuille

Dans la section précédente, on a réduit le beta à 0, c.-à-d. qu'on a éliminé le risque avec des futures. On peut aussi changer le beta pour une autre valeur. Pour changer le beta d'un portefeuille de β à β^* , avec $\beta > \beta^*$, alors prendre une position courte dans

$$(\beta - \beta^*) \frac{V_A}{V_F}$$

futures. Si $\beta < \beta^*$, prendre une position longue dans

$$(\beta^* - \beta) \frac{V_A}{V_F}$$

futures.

3.6 | Stack and roll

Parfois, la date d'expiration de la couverture est plus longue que la date des futures utilisée. Le gestionnaire de risque doit donc rouler la couverture en réglant sa position d'un futures et prendre la même position dans un futures à une date ultérieure. Les couvertures peuvent être roulées plusieurs fois,

dans une procédure appelée stack and roll.

4 | Taux d'intérêt

En général, répète les deux premiers chapitres de la partie I sur les mathématiques financières. Différents types de taux d'intérêt sont montrés.

4.1 | Types de taux

Les taux d'intérêt sont souvent exprimés en points de base. Un point de base est 0.01% par année.

- **Taux du trésor** : Taux d'intérêt obtenu sur des bons du trésor. Ils sont utilisés par des gouvernements pour emprunter de l'argent.
- **LIBOR** : London Interbank Offered Rate, le taux d'emprunt à court-terme des banques (non sécurisé).
- **Taux Fed Funds** : Les institutions financières aux états unis doivent maintenir un montant liquide avec la federal reserve, dépendant de leurs actifs et obligations. À la fin de la journée, certaines institutions financières ont un surplus / déficit qui doit être réglé au cours de la nuit. Le taux imposé pour cette nuit est le taux federal funds.
- **Taux repo** (Repo rate) : taux d'emprunt sécurisé (repurchase agreement). Ils vendent et rachètent un actif pour agir comme emprunt à court terme. La différence entre le prix de vente et de rachat est l'intérêt, référé au taux repo.
- **Taux sans risque** : Les produits dérivés dépendent du taux sans risque. On utilise souvent el taux LIBOR comme taux sans risque (même si le taux LIBOR n'est pas sans risque).

4.2 | Mesure de l'intérêt

Savoir comment composer m fois par année, continuellement.

4.3 | Taux zero coupon

Le taux d'intérêt d'un zero-coupon n années est le taux d'intérêt accru sur un investissement qui commence aujourd'hui est dure n années. L'intérêt et le principal initial est repayé à la fin des n années, il n'y a aucun paiement intermédiaire. C'est appelé un zero-coupon car c'est un obligation (dette) sans coupon.

4.4 | Tarification des obligations

Un obligation est une dette que l'investisseur achète aujourd'hui. En retour, il reçoit des coupons (paiements intermédiaires). L'investisseur reçoit le paiement initial à la fin de la durée du coupon. Le prix théorique d'une obligation est déterminé par la valeur actualisée de tous les sorties de fonds : les coupons et le paiement à échéance.

Il peut y avoir un taux d'escompte pour tous les coupons, ou utiliser différents taux zéro-coupon pour actualiser chaque coupon.

Taux de rendement des obligations : Le taux de rendement de l'obligation est le taux d'escompte à utiliser si tous les maturités ont le même taux d'escompte annuel. On doit souvent résoudre des équations non-linéaires pour obtenir le taux de rendement.

Taux valeur nominale : Le taux de valeur nominale (par yield) pour une obligation est le taux de rendement dont la valeur actualisée des paiements est égal à la valeur nominale.

4.5 | Détermination des taux zero-coupon des bons du trésor

Pour déterminer les taux zéro-coupon sur les bons du trésor, il faut décomposer un bon du trésor en bandes (strips). Ces obligations zéro-coupon sont créés synthétiquement et vendus comme coupons individuels, séparés de la valeur nominale de l'obligation.

Une autre méthode est la méthode *bootstrap*. On prend des bons du trésor avec plusieurs maturités. Les taux zéro-coupon sont déterminés par les coupons avec aucun coupon. Pour les obligations avec des coupons, les coupons sont actualisés avec les taux zéro-coupon déterminés avec maturités plus courtes correspondants.

4.6 | Taux forward

Les taux d'intérêt forward sont les taux d'intérêt implicites des taux zéro-coupon. Si le taux d'intérêt 0 coupon de maturité 1 et 2 sont respectivement 3% et 4%, le taux d'intérêt entre l'année 1 et 2 est le taux d'intérêt tel que $(1.03)(1 + x) = (1.04)^2$.

4.7 | Accords de taux forwards

Un accord de taux d'intérêt forward est un accord gré-à-gré pour déterminer le taux d'intérêt pour emprunter une certaine valeur nominale pour une période de temps dans le futur. Les taux LIBOR sont souvent utilisés comme taux de référence : les accords paient la différence.

Valuation : Lorsqu'un contrat à terme est entré, la valeur du contrat est 0 car aucune valeur n'est échangée. Par contre, lorsque le prix change, la valeur du contrat change. La valeur marchande d'un produit dérivé est son évaluation à la valeur de marché (mark-to-market, MTM)

4.8 | Duration

La duration d'un obligation mesure la durée de temps qu'un investisseur doit attendre pour recevoir des paiements. La duration d'un obligation zéro-coupon de n années est n années. Un obligation n années avec des coupons a une duration de moins que n années.

Un obligation retourne des flux monétaires de valeur c_i au temps t_i , $1 \leq i \leq n$. Le prix de l'obligation B et le taux de rendement interne est déterminé par la relation

$$B = \sum_{i=1}^n c_i e^{-yt_i}.$$

La duration de l'obligation est notée par

$$D = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^n t_i c_i e^{-yt_i} = \sum_{i=1}^n t_i \left[\frac{c_i e^{-yt_i}}{B} \right],$$

qui est une moyenne dy temps, pondéré par la valeur des paiements. Pour calculer la duration, toutes les actualisations sont faites avec le taux de rendement de l'obligation.

On a l'équation différentielle

$$\frac{\Delta B}{B} = -D \Delta y,$$

qui permet d'approximer le changement de pourcentage du prix de l'obligation avec le changement dans son taux de rendement.

La duration est faite avec l'hypothèse d'intérêt composé en continu. Si l'intérêt est composé m fois par année, on a

$$\Delta B = -\frac{BD \Delta y}{1 + y/m}.$$

La variable $D^* = \frac{D}{1 + y/m}$ est noté la duration modifiée, qui permet d'écrire

$$\Delta B = -BD^* \Delta y,$$

où y est le taux d'intérêt composé m fois par année.

4.8.1 | Portefeuille d'obligations

La duration D d'un portefeuille est défini comme la moyenne pondérée (par le prix des obligations) des durations des obligations individuelles dans le portefeuille.

4.9 | Convexité

La convexité mesure la courbature des fonctions de taux de rendement. Une mesure de convexité est

$$C = \frac{1}{B} \frac{d^2 B}{dy^2} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^n c_i t_i^2 e^{-yt_i}.$$

De l'expansion de Taylor de ΔB , on a

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y \frac{1}{2}C(\Delta y)^2.$$

Pour un portefeuille avec une certaine duration, la convexité d'un portefeuille d'obligations tend à être plus grande quand les coupons sont répartis sur une grande période et plus petite lorsque les paiements sont concentrés à une date.

4.10 | Théories de la structure à terme des taux d'intérêt

- **Expectations theory** : les taux d'intérêt à long terme devraient refléter les taux d'intérêt à court terme.
- **Market segmentation theory** : il n'y a aucune relation entre les taux d'intérêt à court, moyen et long terme.
- **Liquidity preference theory** : plus populaire. Les investisseurs préfèrent préserver leur liquidité et investir dans des produits à court terme. Les emprunteurs désirent sécuriser leur taux d'intérêt pour longtemps et préfèrent les produits à long terme. Par exemple, la majorité des dépôts dans les banques sont sur des produits court terme, et la majorité des prêts hypothécaires sont pour 5 ans. Alors, il y a un désaccord entre les actifs et obligations.

5 | Tarification des contrats à terme

Définition 5.0.1 : Actif d'investissement vs actif de consommation

Un actif d'investissement est un actif qui est détenu pour des fins d'investissements par au moins certains investisseurs. Par exemple, l'or est un actif qui peut être consommé (bijoux, électronique) mais certains investisseurs l'utilisent pour investir.

Un actif de consommation est détenu pour des fins de consommation : ils ne sont pas utilisés pour des fins d'investissement.

On peut déterminer le prix de contrats à terme pour des actifs d'investissement mais pas pour des actifs de consommation.

5.1 | Vente à découverte

La vente à découverte consiste à vendre un actif qui n'est pas en notre possession. L'investisseur doit payer les dividendes ou l'intérêt à l'acheteur comme s'il vendait vraiment l'actif. L'investisseur doit aussi garder un compte sur marge avec le courtier.

5.2 | Hypothèses et notation

On applique les hypothèses suivantes :

1. Les participants n'ont pas de frais de transaction.
2. Les participants sont sujets au même taux de taxation sur tous les profits.
3. Les participants peuvent emprunter au même taux d'intérêt sans risque qu'ils peuvent prêter.
4. Les participants exploitent toutes les opportunités d'arbitrage.

On utilise la notation suivante :

- T : temps de livraison d'un contrat à terme (en années)
- S_0 : prix du sous-jacent dans le contrat à terme aujourd'hui
- F_0 : prix du contrat à terme aujourd'hui
- r : taux d'intérêt zéro-coupon par année, composé en continu pour un investissement à échéance T .

5.3 | Contrat à terme gré à gré pour un actif d'investissement

Si le sous-jacent ne verse aucun flux monétaire (dividende, coupons), la relation entre le prix du sous-jacent et le contrat à terme est

$$F_0 = S_0 e^{rT}.$$

Si $F_0 > S_0 e^{rT}$, un investisseur peut acheter le sous-jacent et prendre une position courte dans un forward sur le sous-jacent. Si $F_0 < S_0 e^{rT}$, un investisseur peut vendre à découvert le sous-jacent et prendre une position longue dans un forward. Le seul prix en absence d'arbitrage est $S_0 e^{rT}$.

5.3.1 | Et si on ne peut pas vendre à découvert

Il n'est pas nécessaire de vendre à découvert un actif pour pouvoir avoir la relation précédente. Si un actif est un actif d'investissement, on peut emprunter le capital nécessaire pour acheter ou vendre le sous-jacent. Pour acheter le sous-jacent, on peut

1. Emprunter S_0 au taux sans risque r pour T années;
2. Acheter une unité du sous-jacent.

Pour vendre à découvert le sous-jacent, on peut

1. Vendre le sous-jacent pour S_0 ;
2. Investir ce montant au taux sans risque r pour T années.

5.3.2 | Comparaison des contrats à terme

Est-ce que les futures et les forwards ont la même valeur ? En théorie, oui. Par contre, il y a plusieurs facteurs qui peuvent changer cela.

- **Variabilité des taux d'intérêts** : Si le sous-jacent et les taux d'intérêts sont positivement corrélés, les règlements quotidiens sont investis à un taux d'intérêt plus élevé, augmentant la valeur de la position. Les futures peuvent donc être plus avantageux, dont le prix pourrait être plus élevé.
- **Frais** : En pratique, il peut y avoir des différences de taxes, de frais de transaction, de comptes sur marges, de risque de liquidité.

On assume que ces facteurs sont négligeables et que le prix des futures et des forwards sont égaux.

5.3.3 | Paiements connus

Si le sous-jacent verse un flux monétaire attendu, on peut trouver une relation entre le sous-jacent et le contrat à terme. Soit I , la valeur actualisée des flux monétaires pendant la durée du contrat à terme. Alors, on a

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT}.$$

5.3.4 | Rendement connu

Si le sous-jacent verse un rendement connu (dividende, coupons) proportionnel au prix du sous-jacent, le prix du contrat à terme est donné par

$$S_0 = S_0 e^{(r-q)T},$$

où q est le rendement moyen par année sur le sous-jacent.

Un indice d'actions peut être considéré comme un sous-jacent qui offre des dividendes en continu.

Une devise étrangère peut être considéré comme un sous-jacent qui offre un rendement continu (son propre taux sans risque). Soit r_f , le taux sans risque dans une devise étrangère pour T années et r , le taux sans risque dans notre devise pour T années. La relation pour le contrat à terme est

$$F_0 = S_0 e^{(r-r_f)T}$$

5.3.5 | Valeur d'un contrat à terme gré à gré

La valeur initiale d'un contrat à terme gré à gré est 0 car il n'y a aucun échange monétaire. Lorsque le temps t avance, la valeur du sous-jacent S_t change et la valeur du contrat à terme change.

Soit K , le prix de livraison, F_0 , la valeur d'un forward si le contrat était négocié aujourd'hui et f , la valeur du forward initial en date d'aujourd'hui. La valeur (longue) d'un forward avec échéance dans T années est

$$f = (F_0 - K)e^{-rT}.$$

On peut donc calculer la valeur marchande du contrat en assumant que le prix du sous-jacent à maturité est le prix du forward F_0 .

En utilisant les relations des sous-sections précédentes, on a

$$\begin{aligned} f &= S_0 - Ke^{-rT} \text{ (aucun paiement);} \\ f &= S_0 - I - Ke^{-rT} \text{ (paiement connu);} \\ f &= S_0 e^{-qT} - Ke^{-rT} \text{ (rendement connu).} \end{aligned}$$

5.4 | Contrats à terme sur les marchandises

Dans cette section, on analyse les contrats à terme sur la marchandise : les sous-jacents d'investissement et de consommation.

5.4.1 | Flux monétaires et coûts d'entreposage

Certains sous-jacents, comme l'or et l'argent, coûtent de l'intérêt pour emprunter. L'or et l'argent peut donc apporter du rendement au propriétaire. Ces actifs sont physiques, donc il y a un coût associé à les entreposer. Un coût d'entreposage peut être considéré comme un flux monétaire négatif.

Soit U , la valeur actualisée des coûts d'entreposage, net de revenus, pendant la durée du forward. Alors,

$$F_0 = (S_0 + U)e^{rT}.$$

Si le coût d'entreposage est proportionnel au prix de l'actif, on a

$$F_0 = S_0 e^{(r+u)T},$$

où u correspond aux coûts annuels et net de revenus.

5.4.2 | Actifs de consommation

Les actifs de consommation n'apportent habituellement pas de revenus, mais ont quand même des frais d'entreposage significatifs. Les utilisateurs d'actifs de consommation veulent utiliser ces actifs, il est donc plus favorables d'avoir l'actif en sa possession (alors que pour des actifs d'investissement, avoir un forward ou avoir l'actif est équivalent en terme de valeur). Alors, on a

$$F_0 \leq (S_0 + U)e^{rT}$$

ou

$$F_0 \leq S_0 e^{(r+u)T}.$$

5.4.3 | Rendement de convenance

Les bienfaits d'avoir un sous-jacent en sa possession peut être considéré comme un rendement de convenance. Le rendement de convenance y est déterminé tel qu'une des relations suivantes tiennent :

$$F_0 e^{yT} = (S_0 + U)e^{rT}$$

$$F_0 e^{yT} = e^{(r+u)T}.$$

Pour les actifs d'investissement, le rendement de convenance doit être 0, sinon il y a une opportunité d'arbitrage. Si le prix de futures décroît lorsque la maturité du contrat augmente, cela suggère que $y > r + u$ pendant cette période.

5.4.4 | Le coût de porter

La relation entre les coûts futures et spot sont résumés en un coût de porter. Ceci mesure le coût d'entreposage, l'intérêt payé pour financer le sous-jacent moins le rendement sur l'actif. Soit c , le coût de porter. Pour un actif d'investissement, on a

$$F_0 = S_0 e^{cT}$$

et pour un actif de consommation, on a

$$F_0 = S_0 e^{(c-y)T}.$$

5.4.5 | Options de livraison

Pour des actifs de consommation, la date de livraison est une période pendant le mois. Si $c > y$ (les bienfaits d'avoir le sous-jacent est moins que le taux sans risque), la position courte dans le future est avantage s'il livre la marchandise le plus tôt possible dans la période de livraison (et plus tard possible si $c < y$).

5.5 | Prix futures et prix futures espéré

- L'opinion moyenne du marché sur le prix spot dans le future est appelée le prix spot espéré.
- Keynes & Hicks : le gestionnaires de risque veulent des positions courtes et les spéculateurs veulent des positions longues : le prix futures d'un sous-jacent sera plus bas que le prix spot espéré car les spéculateurs désirent être compensés pour le risque qu'ils maintiennent.
- Selon le CAPM, le risque d'un actif peut être décomposé en risque systématique et en risque non-systématique. Un investisseur requiert un rendement plus élevé que le taux sans-risque pour maintenir un risque systématique positif.
- Un investisseur qui achète un futures (flux monétaire de $-F_0 e^{-rT}$) pour avoir le sous-jacent en retour (flux monétaire de $+S_T$) doit avoir une position nette nulle pour être en absence d'arbitrage. Vu qu'on ne connaît pas S_T , on doit utiliser $E[S_T]$. On a

$$F_0 = E[S_T] e^{(r-k)T},$$

où k est le rendement désiré par l'investisseur. Le tableau suivant énumère les situations possibles et les relations entre le futures et le spot.

Aucun risque systématique	$k = r$	$F_0 = E[S_T]$
Risque systématique positif	$k > r$	$F_0 < E[S_T]$
Risque systématique négatif	$k < r$	$F_0 > E[S_T]$

- Lorsque $F_0 < E[S_T]$, on appelle *normal backwardation*. Lorsque $F_0 > E[S_T]$, on appelle *contango*.

6 | Futures sur les taux d'intérêts

6.1 | Conventions

6.1.1 | Convention au compte de jours

Le day count définit comment l'intérêt est accumulé. On connaît l'intérêt obtenu sur une période de référence, on tente de calculer l'intérêt obtenu sur une autre période.

La convention day count est exprimée sous la forme X/Y :

- X définit la manière dont le nombre de jours est calculé entre deux dates;
- Y définit la manière dont le nombre total de jours dans la période de référence est calculé.

L'intérêt entre deux dates est

$$\frac{\text{Nombre de jours entre dates}}{\text{Nombre de jours dans la période de référence}} \times \text{Intérêt rapporté dans la période de référence.}$$

Les conventions day count communément utilisés aux États Unis sont

- Actuel / actuel (inter période), bons du trésor;
- 30 / 360, obligations corporatifs et municipaux;
- Actuel / 360, instruments sur le marché monétaire (money market instruments).

Ces conventions peuvent être différents dans d'autres pays. Au Canada, la convention day count pour les instruments sur les marchés monétaires sont cotés sur une base actuel / 365.

6.1.2 | Cotes de prix des bons du trésor aux ÉU

Le prix d'instruments sur le marché monétaire sont parfois cotés en utilisant un taux d'escompte .

Soient P , le prix coté, Y , le prix comptant, n , le nombre de jours restant. On a, pour une valeur monétaire de 100\$,

$$P = \frac{360}{n}(100 - Y).$$

6.1.3 | Cotes de prix des obligations du trésor aux ÉU

Les obligations du trésor aux ÉU sont cotées en dollars et 32^e de dollars. Le prix est coté pour une obligation avec valeur monétaire 100\$. Par exemple, une cote de 90 – 05 veut dire qu'une obligation avec

valeur monétaire 100\$ coûte $90 + \frac{5}{32} = 90.15625$.

Le prix coté est le prix *clean*. Le prix d'un obligation revendu (*dirty*) est

$$\text{prix} = \text{prix coté} + \text{intérêt accru depuis le dernier coupon.}$$

6.2 | Contrats à termes sur les bons du trésor

Les futures sur les bons et obligations du trésor sont échangés sur le marché. Ils sont cotés de la même manière que les bons du trésor (dollars et 32e). La position courte peut choisir quel obligation remettre (avec certaines intervalles sur la maturité possible).

Facteurs de conversion : Lorsqu'un obligation est livré, un paramètre appelé facteur de conversion défini le prix reçu pour l'obligation par la partie avec la position courte. Le montant reçu pour une obligation livrée avec une valeur monétaire de 100\$ est

$$\text{Cours de fermeture le plus récent} \times \text{Facteur de conversion} + \text{Intérêt accru}$$

Le facteur de conversion est basé sur le prix de l'obligation, en actualisant tous les coupons et le capital (avec des règles pour les approximations).

Obligation la moins cher à livrer Vu qu'il y a une différence entre le montant à livrer et le prix d'acquisition, la position courte dans le forward peut choisir quel obligation rendre.

Prix du futures Si la date de livraison est connue, on a

$$F_0 = (S_0 - I)e^{rT},$$

où I est la valeur actualisée des coupons pendant la durée sur contrat à terme.

6.3 | Contrat à terme Eurodollar

À faire : important ?

6.4 | Couvrir des portefeuilles d'actifs et de passifs

Les institutions financières peuvent se couvrir contre leur risque de taux d'intérêt en s'assurant que la duration moyenne de leurs actifs est égal à la duration moyenne de leurs passifs. Cette stratégie s'appelle duration matching ou portfolio immunization. Ceci couvre des mouvements parallèle des courbes de

taux d'intérêts.

7 | Swaps

8 | Mécaniques de marchés d'options

9 | Propriétés du prix des actions

10 | Stratégies d'options

11 | Arbres binomiaux

11.1 | Modèle binomial à une étape

seulement deux dénouements possibles, il est toujours possible d'établir un portefeuille sans risque.

Soit un action de valeur S_0 et un option sur l'action dont le prix aujourd'hui est f . Si le prix de l'action monte, sa valeur sera S_0u et le paiement de l'option sera f_u . Si le prix de l'action diminue, sa valeur sera S_0d et le paiement de l'option sera f_d . On imagine un portefeuille constitué d'une position longue dans Δ actions et une position courte dans l'option. On doit calculer Δ tel que le portefeuille est sans risque.

- Si le prix de l'action monte, la valeur du portefeuille est $S_0u\Delta - f_u$
- Si le prix de l'action baisse, la valeur du portefeuille est $S_0d\Delta - f_d$
- En posant les deux égaux, on a

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d}.$$

Pour trouver le coût de l'option, on remarque que la valeur actualisée du portefeuille est $(S_0u\Delta - f_u)e^{-rT}$ et le coût pour établir le portefeuille est $S_0\Delta - f$. On isole

$$f = S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + f_ue^{-rT}.$$

En substituant pour la valeur de Δ , on obtient

$$f = e^{-rT} [pf_u + (1 - p)f_d],$$

où

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}.$$

Alors, la valeur de l'option est la v.a. de l'espérance du paiement dans le futur, où la probabilité d'une hausse du prix est déterminé telle qu'il soit impossible d'établir une position d'arbitrage. On note que p ne dépend pas du rendement attendu sur l'action. Les probabilités de mouvements vers le haut ou vers le bas sont déjà incorporés dans le prix de l'action, il n'est pas nécessaire de les considérer dans le prix de l'option.

11.2 | Évaluation neutre au risque

Lorsqu'on détermine le prix d'un produit dérivé, on doit être neutre au risque. Ceci veut dire que les investisseurs ne s'attendent pas à un surplus de rendement pour un surplus de risque dans leur position. On appelle un marché qui est neutre au risque un monde neutre au risque. Ceci est faux en pratique, mais on peut montrer que les prix calculés dans ce monde correspond aux prix dans notre monde. Une des raisons est que lorsque les investisseurs sont averses au risque, le prix des actions diminuent, mais les formules qui déterminent le prix des options demeurent le même.

Le monde neutre au risque nous permet d'utiliser le taux sans risque comme rendement attendu sur un action, et actualiser le paiement attendu sur un option au taux sans risque.

Pour calculer le prix d'un option dans un monde neutre au risque, on calcule les probabilités des résultats dans un monde neutre au risque. Ensuite, on calcule la valeur actualisée des paiements selon les différentes probabilités.

Dans un monde neutre au risque, l'espérance du prix futur est égal à la valeur accumulée du prix de l'action aujourd'hui :

$$S_0up + S_0d(1 - p) = S_0e^{rT}.$$

Pour déterminer les probabilités dans le vrai monde, on utilise le rendement attendu μ dans la formule de p , qu'on nommera p^* .

11.3 | Arbres binomiaux à deux étapes

L'objectif est de calculer le nœud initial de l'arbre. Pour calculer chaque nœud, on doit appliquer la méthode vue plus haut. Soit Δt , le temps entre chaque nœud. On sait que

$$f = e^{-r\Delta t} [pf_u + (1 - p)f_d], \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \quad (11.1)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} f_u &= e^{-r\Delta t} [pf_{uu} + (1 - p)f_{ud}] \\ f_d &= e^{-r\Delta t} [pf_{ud} + (1 - p)f_{dd}]. \end{aligned}$$

On conclut que

$$f = e^{-2r\Delta t} [p^2 f_{uu} + 2p(1 - p)f_{ud} + (1 - p)^2 f_{dd}].$$

On remarque que le nombre de mouvements vers le haut suit une loi binomiale, où n est le nombre d'étapes et p est la probabilité d'un mouvement vers le haut.

11.4 | Options américaines

La procédure est similaire, mais c'est possible que l'exercice plus tôt soit avantageuse. La valeur de chaque nœud est le plus grand de

- La valeur donnée par l'espérance du paiement (11.1).
- Le profit de l'exercice anticipée.

11.5 | Delta

Le delta (Δ) d'un option est le nombre d'unités de l'action nécessaire pour créer un portefeuille sans risque de l'option. Le delta d'un call est positif, le delta d'un put est négatif. Il représente aussi le ratio de Δf sur ΔS .

Pour maintenir une couverture sans risque dans l'option et dans le sous-jacent, on doit ajuster nos parts périodiquement. Cette pratique est parfois appelée la couverture delta (delta hedging).

11.6 | Déterminer u et d en fonction de la variabilité

Soit la valeur d'un dollar dans le sous-jacent aujourd'hui. Soit X , la v.a. qui représente la valeur de cette position dans une période. On sait déjà que $E[X] = e^{r\Delta t}$. De plus,

$$\text{Var}(X) = p(u - 1)^2 + (1 - p)(d - 1)^2 - e^{2r\Delta t}.$$

On souhaite que cette valeur soit égale à une certaine volatilité $\sigma^2 \Delta t$. En isolant pour u et d , on obtient¹

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \text{ et } d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{u}.$$

On remarque que u et d ne dépendent pas du rendement attendu sur l'option (ni p , p^* , r ou μ).

- **Théorème de Girsanov** : Lorsqu'on change d'un ensemble de préférences vers un autre, le rendement attendu sur l'action change, mais sa volatilité demeure la même.
- Lorsqu'on change du monde neutre au risque vers le vrai monde, le rendement attendu sur l'action change, mais sa volatilité demeure la même.
- Changer d'un ensemble de préférences de risque vers un autre est appelé le changement de mesure. La mesure du vrai monde est appelé la P -measure, alors que le monde neutre au risque est appelé Q -measure.

11.7 | Options sur d'autres sous-jacents

- On peut utiliser les arbres binomiaux pour d'autres options, mais où p change.
- **Actions avec dividendes** : Les dividendes sont distribués en continu avec taux q . Les gains sur le capital sont $r - q$. Le taux sans risque est remplacé par $r - q$ pour la formule de p .
- **Indices d'actions** : Les indices d'actions retournent un taux de dividende q , comme dans le point plus haut.
- **Devises** Une devise étrangère peut être considéré comme un sous-jacent qui accumule le taux sans risque r_f (comme une dividende).
- **Futures** Ça ne coûte rien d'entrer dans un futures. Alors, le rendement est 0 et le taux sans risque est 0.

12 | Processus de Wiener

Pour les propriétés générales, voir le chapitre 3 de la partie VI.

1. En prenant l'expansion de Taylor de e^x et en assumant que les termes Δt^2 et plus sont ignorés.

12.1 | Processus de Wiener

12.1.1 | Mouvement brownien

Un mouvement brownien a des propriétés suivantes :

- Le changement ΔW pendant une petite période de temps Δt est $\Delta W = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, où $\varepsilon \sim Norm(0, 1)$.
- Les valeurs de ΔW pour deux intervalles différentes Δ sont indépendantes.

12.1.2 | Processus de Wiener généralisé

Un processus de Wiener généralisé X est définie en termes de dt et dW comme

$$dX =adt + bdW,$$

où a et b sont des constantes. Le terme adt est la dérive (drift) déterministe et le terme bdW est le terme aléatoire.

12.1.3 | Processus d'Itô

Un processus d'Itô est un processus de Wiener généralisé, où les paramètres a et b sont des fonctions de X et du temps t . On peut écrire le processus d'Itô sous la forme

$$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW.$$

12.2 | Le processus du prix d'un action

Le rendement attendu et l'écart-type sont constants (proportionnels au prix de l'action). Cela suggère que le prix de l'action suis le processus

$$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz,$$

ou

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz.$$

Selon les propriétés des mouvements browniens, on a

$$\frac{\Delta S}{S} \sim Norm(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t).$$

On peut estimer la volatilité comme l'écart-type du changement du prix de l'action sur une période d'un an.

12.3 | Processus corrélés

Soit la paire de processus (X_1, X_2) , donnés selon

$$dX_1 = a_1 dt + b_1 dW_1 \text{ et } dX_2 = a_2 dt + b_2 dW_2.$$

Si W_1 et W_2 sont corrélés, on peut simuler leurs valeurs avec une loi normale bivariée.

12.4 | Lemme d'Itô

On suppose que la valeur de la variable X est un processus d'Itô avec

$$dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW,$$

où dW est un processus de Wiener. Une fonction G de X et t suit un processus

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G^2}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dW,$$

donc G suit un processus d'Itô avec dérive $\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G^2}{\partial x^2} b^2$ et variance $\left(\frac{\partial G}{\partial x} \right)^2 b^2$.

Lorsque S est le prix d'un action, et G est un sous-jacent (fonction de S et t), on a

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G^2}{\partial S^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} b dW.$$

On remarque que S et G partagent la même volatilité dW .

12.5 | Application aux forwards

La relation entre le prix d'un forward F et d'un actif S est, pour $t < T$,

$$F = S e^{r(T-t)}.$$

Ceci est un processus d'Itô, et on a

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -r S e^{r(T-t)}.$$

En remplaçant ces termes dans le lemme d'Itô, on obtient

$$dF = (\mu - r) F dt + \sigma F dW,$$

qui suit un mouvement brownien.

12.6 | Propriété log-normale

Soit $G = \ln S$. en utilisant le lemme d'Itô, on a

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW.$$

Alors,

$$\ln S_t - \ln S_0 \sim \text{Norm} \left(\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] T, \sigma^2 T \right),$$

qui devient

$$\ln S_t \sim \text{Norm} \left(\ln S_0 + \left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] T, \sigma^2 T \right).$$

On conclut que $\ln S_t$ suit une loi normale et S_t suit une loi log-normale.

13 | Le modèle Black-Scholes-Merton

13.1 | Distribution du rendement

On tente de trouver la distribution du rendement sur une action. On a

$$S_T = S_0 e^{xT},$$

qui devient

$$x = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0}.$$

Comme vu dans la section 12.6, on a

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim \text{Norm} \left(\left[\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] T, \sigma^2 T \right).$$

On conclut que la distribution de x est

$$x \sim \text{Norm} \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T} \right).$$

13.1.1 | Rendement attendu

Le rendement attendu sur un petit intervalle de temps Δt est $\mu \Delta t$. Par contre, l'espérance du rendement attendu est $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ et non μ : on peut expliquer cela car la moyenne géométrique est toujours moins grande que la moyenne arithmétique. On peut aussi attribuer cela à l'inégalité de Jensen : on sait que $\ln E[S_T] > E[\ln S_T]$.

13.1.2 | Volatilité

La volatilité attendue sur un petit intervalle de temps Δt est $\sigma^2 \Delta t$. Cela représente la variabilité du prix de l'action sur un an. Pour estimer la volatilité du prix d'un action empiriquement, on calcule les rendements pour une période Δt

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et on calcule

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2.$$

On obtient

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{s}{\Delta t}.$$

Si un action paie des dividendes, on peut adapter le rendement. Si un intervalle ne contient pas de dividendes, utiliser la formule plus haut. Si il contient un dividende, utiliser

$$u_i = \ln \frac{S_i + D}{S_{i-1}},$$

où D est le montant du dividende.

La volatilité lors d'un jour d'échange est plus élevée que lors d'un jours non échange (la fin de semaine, par exemple). On considère souvent seulement la volatilité pendant les jours d'échange pour estimer la volatilité. La volatilité par année peut être calculée par

$$\text{Volatilité par année} = \text{Volatilité par jours d'échange} \times \sqrt{\frac{\text{Nombre de jours d'échange}}{\text{par année}}}.$$

La vie d'un option est souvent exprimé en termes de jours d'échanges. T est parfois calculé comme le nombre de jours d'échange jusqu'à maturité, divisé par 252.

13.2 | Le modèle Black-Scholes-Merton

- Le prix de l'action suit le processus $dS = \mu S dt + \sigma S dW$.
- On peut vendre des actions à découvert.
- Il n'y a aucun frais de transaction ou taxes, et les actifs sont parfaitement divisibles.
- Il n'y a pas de dividendes pendant la vie du produit dérivé.
- Il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage.
- L'échange est en continu.
- Le taux sans risque est r et est constant pour toutes les maturité.

Dans cette section, on considère le prix de l'option au temps t , alors le temps à maturité est $T - t$.

Pour créer un portefeuille sans risque, on doit créer un portefeuille telle que le processus dW est éliminé. Ce portefeuille est

- -1 parts dans le produit dérivé;
- + $\frac{\partial f}{\partial S}$ parts dans le sous-jacent.

Ce portefeuille satisfait

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf, \quad (13.1)$$

qui correspond à l'équation différentielle de Black-Scholes-Merton. Cette équation a plusieurs solutions, correspondant à tous les produits dérivés de S . Toute fonction $f(S, t)$ qui est une solution à (13.1) est le prix d'un produit dérivé dont il est possible de créer sans opportunités d'arbitrage.

Vu que l'équation de Black-Scholes-Merton ne dépend pas de préférences de risque (comme μ), on conclut que ces préférences de risques n'ont aucun impact sur leurs solutions. Alors, il n'est pas nécessaire de trouver le prix de l'action dans le vrai monde, on peut faire les calculs dans le monde neutre au risque. L'évaluation neutre au risque est un outil artificiel pour obtenir des solutions à (13.1), et ces solutions sont valides dans tous les mondes (tous les ensembles de préférences).

13.3 | Les formules de Black-Scholes-Merton

Deux solutions à (13.1) sont pour le prix des options européens. On a

$$c = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

et

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1),$$

où

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}};$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Le terme $\Phi(d_2)$ correspond à la probabilité qu'un call soit exercé dans un monde neutre au risque.

13.4 | Volatilité implicite

On a vu comment estimer la volatilité σ empiriquement. En pratique, les participants utilisent la volatilité implicite à la place. Cette volatilité est celle sous-entendue par le prix des options sur le marché. La volatilité implicite est utilisée pour suivre l'opinion du marché sur la volatilité d'un sous-jacent. La volatilité historique représente le passé, alors que la volatilité implicite représente le futur.

13.5 | Dividendes

Il est possible de calculer le prix d'un option si le montant et le moment du versement du dividende est connu avec certitude. Le jour du versement d'un dividende est appelé la date ex-dividende, et le prix du sous-jacent diminue par le montant du dividende à cette date.

13.5.1 | Options européens

On assume que le prix d'un action peut être décomposé en composante déterministe (le dividende connu) et en composante aléatoire. À la maturité de l'option, les dividendes ont été payés et la composante sans risque n'existe plus. Si on utilise S_0 comme le prix de la composante risquée (on a retiré la valeur actualisée des dividendes pendant la durée de l'option), les formules de Black-Scholes-Merton sont encore valides.

Cette approche est critiquée. Par contre, en pratique les options européens sont calculés en utilisant les prix des forwards du sous-jacent. Alors, on peut ignorer les versements du sous-jacent pendant la durée de l'option.

13.5.2 | Call américains

S'il y a des dividendes, le seul moment opportun pour exercer l'option d'avance est juste avant la date ex-dividende. Voir les inégalités dans le livre. En général, il peut être optimal d'exercer l'option juste avant le dernier dividende si la date du dernier dividende est proche de la maturité et si la valeur du dividende est élevé.

Bibliographie

[Kellison, 2006] Kellison, S. G. (2006). *The theory of interest*.

[Klugman et al., 2012] Klugman, S. A., Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (2012). *Loss models : from data to decisions*, volume 715. John Wiley & Sons.