Étude examen prédoctoral général

Christopher Blier-Wong

Université Laval
Faculté des sciences et de génie
École d'actuariat

Table des matières

I Mathématiques financières **1**

1 La mesure de l'intérêt **3**
1.1 Les fonctions d'accumulation et de montant 3
1.2 Le taux d'intérêt effectif 4
1.3 Intérêt simple 4
1.4 Intérêt composé 5
1.5 Valeur actualisée 5
1.6 Taux effectif d'escompte 5
1.7 Taux d'intérêt et d'escompte nominaux 6
1.8 Force d'intérêt et d'escompte 7
1.9 Intérêt variable 8

2 Solutions de problèmes d'intérêt **9**
2.1 Le problème de base 9
2.2 Équations de valeur 9

3 Rentes de base **11**
3.1 Introduction 11
3.2 Rente immédiate 11
3.3 Rente due 12

II Mathématiques actuarielles vie **13**

III Distributions de sinistres **15**

1 Quantités distributionnelles de base **17**
1.1 Queues des distributions 17

2 Caractéristiques des modèles actuariels **19**
2.1 Distributions paramétriques et d'échelle 19
2.2 Familles de distributions paramétriques 20
2.3 Distribution de mélange fini 20
2.4 Distributions dépendantes des données 20

3 Distributions continues 23
3.1 Créer des nouvelles distributions 23
3.1.1 Multiplication par une constante 23
3.1.2 Création de distributions en élevant à une puissance 23
3.1.3 Création de distributions avec exponentiation 24
3.1.4 Mélange 24
3.1.5 Modèles à fragilité 24
3.1.6 Raccordement de distributions connues 25
3.2 Familles de distributions et leurs liens 25
3.2.1 Distributions limites 25
3.3 Théorie des valeurs extrêmes 26

IV Théorie de la crédibilité 27

V Théorie du risque 29

VI Processus stochastiques 31

VII Finance 33

Première partie

Mathématiques financières

1 | La mesure de l'intérêt

Voir [Kellison, 2006], chapitre 1

1.1 | Les fonctions d'accumulation et de montant

— Le montant initial investi est appelé le *capital*

— Le montant obtenu après une période de temps est appelé la *valeur accumulée*

— La différence entre le montant accumulé et le principal est le *montant d'intérêt* ou *intérêt*

— t est le temps mesuré depuis le début la date d'investissement

— L'unité de temps est la *période de mesure* ou *période*

Définition 1.1.1 : La fonction d'accumulation

La fonction d'accumulation $a(t)$ correspond à la valeur accumulée au temps $t \geq 0$ d'un investissement initial de 1.

La fonction d'accumulation possède les propriété suivantes :

1. $a(0) = 1$
2. $a(t)$ est généralement croissante
3. Si l'intérêt est accumulé en continu, $a(t)$ est continue

Définition 1.1.2 : Fonction de montant

La fonction de montant $A(t)$ correspond à la valeur accumulée au temps $t \geq 0$ d'un investissement initial de $k > 0$. On a

$$A(t) = k \times a(t) \quad \text{et} \quad A(0) = k.$$

Définition 1.1.3 : Montant d'intérêt

Le montant d'intérêt gagné pendant la $n^{\text{ième}}$ période depuis la date d'investissement est

$$I_n = A(n) - A(n-1) \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

1.2 | Le taux d'intérêt effectif

Définition 1.2.1

Le taux d'intérêt effectif i est le montant d'argent qu'une unité investie au début de la période va gagner pendant la période, où l'intérêt est obtenu à la fin de la période, c.-à-d. $i = a(1) - a(0)$ ou $a(1) = 1 + i$.

Le taux d'intérêt i est le ratio du montant d'intérêt gagné pendant la période et du montant de principal investi au début de la période.

Le mot effectif est utilisé lorsque l'intérêt est payé une fois par période.

Les taux d'intérêt peuvent être calculés sur n'importe quelle période d'investissement. Soit i_n, le taux d'intérêt effectif pour la $n^{\text{ième}}$ période depuis la date d'investissement. Alors, on a

$$i_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n-1)} = \frac{I_n}{A(n-1)}, \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots$$

1.3 | Intérêt simple

La fonction d'accumulation est linéaire

$$a(t) = a + it \quad \text{pour} \quad t \geq 0.$$

Accumuler de l'intérêt avec ce patron correspond à l'intérêt simple. On a

$$i_n = \frac{i}{1 + i(n-1)},$$

donc un intérêt simple constant implique un taux d'intérêt effectif décroissant.

1.4 | Intérêt composé

L'intérêt composé assume que le montant accumulé est automatiquement ré-investi.

$$a(t) = (1+i)^t \quad \text{pour} \quad t \geq 0.$$

On a $i_n = i$, qui est indépendant de n. Alors, un taux d'intérêt composé correspond au taux d'intérêt effectif.

1.5 | Valeur actualisée

Le terme $1+i$ est le facteur d'accumulation, car il accumule la valeur d'un investissement au début de la période à la fin de la période. On doit parfois déterminer le montant à investir pour obtenir 1 à la fin de la période. Pour ce faire, on définit un nouveau symbole

$$v = \frac{1}{1+i}$$

parfois appelé le facteur d'escompte.

— La fonction d'escompte est $a^{-1}(t) = \dfrac{1}{a(t)}$.

— Pour l'intérêt simple, on a $a^{-1}(t) = \dfrac{1}{1+it}$.

— Pour l'intérêt composé, on a $a^{-1}(t) = \dfrac{1}{(1+i)^t} = v^t$.

1.6 | Taux effectif d'escompte

Définition 1.6.1 : Le taux effectif d'escompte

Le taux effectif d'escompte d est le ratio du montant d'intérêt gagné pendant la période et du montant investi à la fin de la période.

La principale différence entre le taux d'effectif d'intérêt et le taux effectif d'escompte est

— Intérêt : payé à la fin de la période divisé par la balance au début de la période.

— Escompte : payé au début de la période divisé sur la balance à la fin de la période.

$$d_n = \frac{A(n) - A(n-1)}{A(n)} = \frac{I_n}{A(n)}, \quad \text{pour un entier} \quad n \geq 1.$$

Définition 1.6.2 : Équivalence

Deux taux d'intérêt ou d'escompte sont dit équivalant si un montant de principal investi pour la même durée à chaque taux d'intérêt produisent la même valeur accumulée.

On utilise le concept d'équivalence pour établir des liens entre les taux d'intérêt.

Si une personne emprunte 1 au taux d'escompte effectif d, le principal initial est $1-d$ et le montant d'intérêt est d. Alors,

$$i = \frac{d}{1-d} \Rightarrow d = \frac{i}{1+i} = iv.$$

Autres relations utiles :

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i} = 1 - v;$$

$$d = iv = i(1-d) = i - id \Rightarrow i - d = id.$$

1.7 | Taux d'intérêt et d'escompte nominaux

— On considère les situations où l'intérêt est payé plus fréquemment qu'une fois par période. Ces taux sont appelés nominaux.

— Le symbole pour un taux nominal d'intérêt payé m fois par période est $i^{(m)}$, où m est un entier positif.

— Par un taux nominal d'intérêt $i^{(m)}$, on veut dire que l'intérêt est $i^{(m)}/m$ pour chaque $\frac{1}{m}$ période.

— De la définition d'équivalence, on a

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \Rightarrow i^{(m)} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

— Le symbole pour un taux nominal d'escompte payé m fois par période est $d^{(m)}$, où m est un entier positif.

— De la définition d'équivalence, on a

$$1 - d = \left(1 - \frac{d^{(m)}}{m}\right)^m \Rightarrow d^{(m)} = m\left[1 - v^{\frac{1}{m}}\right]$$

— Une autre relation est

$$\frac{i^{(m)}}{m} - \frac{d^{(m)}}{m} = \frac{i^{(m)}}{m}\frac{d^{(m)}}{m}.$$

1.8 | Force d'intérêt et d'escompte

Mesure de l'intensité dont d'intérêt opère, i.e. le taux d'intérêt instantané. La force d'intérêt au temps t est défini par

$$\delta_t = \frac{A'(t)}{A(t)} = \frac{a'(t)}{a(t)}.$$

Par la dérivée en chaîne, on a aussi

$$\delta_t = \frac{d}{dt} \ln A(t) = \frac{d}{dt} \ln a(t).$$

Autres relations :

- $\exp\left\{\int_0^t \delta_r dr\right\} = \frac{A(t)}{A(0)} = \frac{a(t)}{a(0)} = a(t);$
- $\int_0^n A(t)\delta_t dt = \int_0^n A'(t)dt = A(n) - A(0)$. Intuition : l'intérêt est égal à la somme du capital investi au temps t multiplié par la force d'intérêt au temps t.

La force d'escompte est

$$\delta'_t = -\frac{\frac{d}{dt}a^{-1}(t)}{a^{-1}(t)}.$$

On a

$$\delta_t = \delta'_t$$

Par le principe d'équivalence, on a

$$i = e^{\delta} - 1 \Rightarrow \delta = \ln(1+i)$$

Séries de Taylor :

- $i = e^{\delta} - 1 = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \frac{\delta^4}{4!} + \dots$
- $\delta = \ln(1+i) = i - \frac{i^2}{2!} + \frac{i^3}{3!} - \frac{i^4}{4!} + \dots$
- Les termes i^k et δ^k sont très petits pour $k > 2$ car i et δ sont très petits.

Liste d'équivalences :

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = 1 + i = v^{-1} = (1-d)^{-1} = \left(1 - \frac{d^{(p)}}{p}\right)^{-p} = e^{\delta}.$$

Sous l'intérêt simple, la force d'intérêt est $\delta_t = \frac{i}{1+it}$ et la force d'escompte est $\delta'_t = \frac{d}{1-dt}$. On remarque que δ_t est une fonction croissante et δ'_t est une fonction décroissante.

En utilisant l'expansion de Taylor, on a

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta$$

et

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)} = \delta'$$

1.9 | Intérêt variable

— Si la force d'intérêt chance, on utilise la relation $a(t) = e^{\int_0^t \delta_r dr}$

— Si le taux effectif d'intérêt change, on utilise la relation

$$a(t) = (1+i_1)(1+i_2)(1+i_3)\dots(1+i_t) = \prod_{k=1}^{t}(1+i_k)$$

— Si le taux effectif d'escompte change, on utilise la relation

$$a^{-1}(t) = (1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)\dots(1-d_t) = \prod_{k=1}^{t}(1-d_k)$$

— On a aussi

$$a^{-1}(t) = (1+i_1)^{-1}(1+i_2)^{-1}(1+i_3)^{-1}\dots(1+i_t)^{-1} = \prod_{k=1}^{t}(1+i_k)^{-1} = \prod_{k=1}^{t} v_k$$

2 | Solutions de problèmes d'intérêt

Voir [Kellison, 2006], chapitre 2.

2.1 | Le problème de base

Les problèmes d'intérêts sont composés de quatre éléments :

1. Le principal investi initialement
2. La longueur de la période d'investissement
3. Le taux d'intérêt
4. La valeur accumulée du principal à la fin de la période d'investissement.

Connaissant trois éléments, le quatrième peut être résoud.

2.2 | Équations de valeur

— Principe fondamental : la valeur temporelle de l'argent.

— Deux valeurs monétaires à différents temps ne peuvent pas être comparés.

— On doit accumuler ou escompter les valeurs à une *date de comparaison*

— L'équation qui compare deux valeurs monétaires à la même date de comparaison est l'équation de valeur.

3 | Rentes de base

Voir [Kellison, 2006], chapitre 3

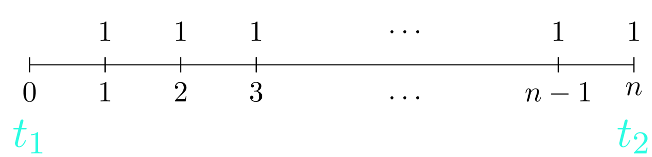
3.1 | Introduction

Définition 3.1.1 : Rente

- Une rente est une série de paiements fait à intervalles égaux.
- Une rente certaine est une rente dont les paiements sont faits pour une période de temps avec certitude.
- L'intervalle entre les paiements est la période de paiements

3.2 | Rente immédiate

Une rente immédiate paie 1 à la fin de chaque période pour n périodes.



La valeur actualisée d'une rente immédiate (au temps t_1) est notée par $a_{\overline{n}|}$. On a

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \cdots + v^{n-1} + v^n = \frac{1 - v^n}{i}.$$

La valeur accumulée d'une rente immédiate (au temps t_2) est notée par $s_{\overline{n}|}$

$$s_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (i+1)^{n-1} + (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Quelques relations

— $1 = i a_{\overline{n}|} + v^n$

— $s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n$

— $\dfrac{1}{a_{\overline{n}|}} = \dfrac{1}{s_{\overline{n}|}} + i$

3.3 | Rente due

Une rente due paie 1 au début de chaque période pour n périodes.

La valeur actualisée d'une rente due (au temps t_1) est notée par $\ddot{a}_{\overline{n}|}$. On a

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 \cdots + v^{n-2} + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{d}.$$

La valeur accumulée d'une rente due (au temps t_2) est notée par $\ddot{s}_{\overline{n}|}$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \cdots + (i+1)^{n-2} + (i+1)^{n-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.$$

Quelques relations

— $\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n$

— $\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)$

— $\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|}$

— $\dfrac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \dfrac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + d$

— $\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|}(1+i)$

— $\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1$

Comparaison des rentes :

Deuxième partie

Mathématiques actuarielles vie

Troisième partie

Distributions de sinistres

1 | Quantités distributionnelles de base

Voir [Klugman et al., 2012], section 3.4

1.1 | Queues des distributions

- Classification basée sur les moments
  - Une manière de classifier des distributions est basé sur le nombre de moments qui existent. Une distribution dont tous les moments existent (la FGM existe) est à queue légère.
- Comparaisons basée sur le comportement de queue limite
  - Pour deux distributions avec la même moyenne, une distribution a une queue plus lourde que l'autre si le ratio des fonctions de survie diverge à l'infini.
- Classification basée sur la fonction de hazard
  - Les distributions avec une fonction de hazard décroissante a une queue lourde
  - Les distributions avec une fonction de hazard croissante a une queue légère
  - Une distribution a une queue plus légère que l'autre si sa fonction de hazard augmente à plus rapidement que l'autre.
  - Rappel :
$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}, \quad S(x) = \exp\left\{-\int_0^x h(y)dy\right\}$$
- Classification basée sur la fonction d'excès moyen
  - Si la fonction d'excès moyen est croissante en d, la distribution a une queue lourde.
  - Si la fonction d'excès moyen est décroissante en d, la distribution a une queue légère.
  - On peut comparer deux distributions basé sur le taux de croissance ou décroissance de la fonction d'excès moyen.
  - Rappel :
$$e_X(d) = E[X - d|X > d] = \frac{\int_d^\infty S(x)dx}{S(d)}$$
- Distributions d'équilibre et comportement de queue

- Distribution d'équilibre
  - $f_e(x) = \dfrac{S(x)}{E[X]}, \quad x \geq 0$
  - $S_e(x) = \dfrac{\int_x^\infty S(t)dt}{E[X]}, \quad x \geq 0$
  - $h_e(x) = \dfrac{f_e(x)}{S_e(x)} = \dfrac{S(x)}{\int_x^\infty S(t)dt} = \dfrac{1}{e(x)}$
- Lire le texte pour le lien entre la fonction de hazard, la fonction d'excès moyen et la lourdeur de la queue

2 | Caractéristiques des modèles actuariels

Voir [Klugman et al., 2012],

Dans ce chapitre, les modèles sont caractérisés par combien d'information est nécessaire pour spécifier le modèle. Le nombre de paramètre donne une indication de la complexité du modèle.

2.1 | Distributions paramétriques et d'échelle

Définition 2.1.1 : Distributiob paramétrique

Ensemble de distributions déterminée par une ou plus valeurs appelé(s) paramètre. Le nombre de paramètre est fixe et connu

Définition 2.1.2 : Distribution d'échelle

Si une variable aléatoire est multipliée par une constante positive, et que la nouvelle variable aléatoire est dans le même ensemble de distirbutions, elle est dite une distribution d'échelle.

Définition 2.1.3 : Paramètre d'échelle

Un paramètre d'échelle satisfait deux conditions :

1. Lorsqu'une distribution d'échelle est multipliée par une constante, ce paramètre d'échelle est multiplié par la même constante.
2. Tous les autres paramètres de la distribution restent inchangés (le paramètre d'échelle *absorbe* tout le changement d'échelle).

2.2 | Familles de distributions paramétriques

Définition 2.2.1 : Familles de distributions paramétriques

Ensemble de distributions qui sont reliées de manière significative. Exemple : la loi exponentielle est un cas particulier de la loi gamma avec $\alpha = 1$. Alors, la loi exponentielle est reliée de manière significative avec la loi gamma.

2.3 | Distribution de mélange fini

Définition 2.3.1 : Mélange k-point

Une distribution est un mélange k-point si

$$F_Y(y) = a_1 F_{X_1}(y) + a_2 F_{X_2}(y) + \cdots + a_k F_{X_k}(y)$$

avec $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1$.

Définition 2.3.2 : Mélange à composante variable

Une distribution mélange k-point où K n'est pas fixé.

— $F(x) = \sum_{j=1}^{K} a_j F_j(x)$

— $\sum_{j=1}^{K} a_j = 1, \quad a_j > 0, j = 1, \ldots, K, \quad K = 1, 2, \ldots$

— Le nombre de paramètres est la somme des paramètres de chaque distribution plus (K-1) car le dernier paramètre a_k peut être calculé avec $1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{K-1}$.

Ce modèle est appelé semi-paramétrique car sa complexité est entre un modèle paramétrique et non-paramétrique

2.4 | Distributions dépendantes des données

— Une distribution dépendante des données est au moins aussi compliqué que les données ou l'information produites par ces données.

— Le nombre de paramètres augmente lorsque le nombre de données augmente

— Exemple : un modèle empirique est une distribution discrète basée sur la taille échantillonnale n qui assigne une probabilité $\frac{1}{n}$ à chaque point
— Exemple : modèle de lissage à noyau

3 | Distributions continues

3.1 | Créer des nouvelles distributions

3.1.1 | Multiplication par une constante

Théorème 3.1.1

Soit X, une variable aléatoire continue. Soit $Y = \theta X$ avec $\theta > 0$. Alors,

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y}{\theta}\right) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{y}{\theta}\right)$$

Le paramètre θ est un paramètre d'échelle pour la variable aléatoire Y.

3.1.2 | Création de distributions en élevant à une puissance

Théorème 3.1.2

Soit X, une variable aléatoire continue et $F_X(0) = 0$. Soit $Y = X^{1/\tau}$. Alors,

— *si $\tau > 0$, on a*

$$F_Y(y) = F_X(y^\tau) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau), \quad y > 0;$$

— *si $\tau < 0$, on a*

$$F_Y(y) = 1 - F_X(y^\tau) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = -\tau y^{\tau-1} f_X(y^\tau), \quad y > 0.$$

— Lorsqu'on prend une distribution avec puissance $\tau > 0$, elle est appelée transformée.

— Lorsqu'on prend une distribution avec puissance $\tau = -1$, elle est appelée inverse.

— Lorsqu'on prend une distribution avec puissance $\tau < 0, \tau \neq -1$, elle est appelée inverse-transformée.

3.1.3 | Création de distributions avec exponentiation

Théorème 3.1.3

Soit X, une variable aléatoire continue et $f_X(x) > 0$ sur le domaine de x. Soit $Y = e^X$. Alors, pour $y > 0$, on a

$$F_Y(y) = F_X(\ln y) \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \frac{1}{y} f_X(\ln y).$$

3.1.4 | Mélange

Théorème 3.1.4

Soit X, une variable aléatoire avec fonction de densité $f_{X|\Lambda}(x|\lambda)$ et fonction de répartition $F_{X|\Lambda}(x|\lambda)$, où λ est un paramètre de X. La fonction de densité inconditionnelle de X est

$$f_X(x) = \int f_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda$$

et la fonction de répartition est

$$F_X(x) = \int F_{X|\Lambda}(x|\lambda) f_\Lambda(\lambda) d\lambda.$$

Autres résultats :

— $E\left[X^k\right] = E_\Lambda\left[E\left(X^k|\Lambda\right)\right]$

— $Var(X) = E\left[Var(X|\Lambda)\right] + Var\left(E\left[X|\Lambda\right]\right)$

Les modèles de mélange tendent à créer des distributions à queue lourde. En particulier, si la fonction de hasard de $f_{X|\Lambda}$ est décroissante pour tout λ, la fonction de hasard sera aussi décroissante.

3.1.5 | Modèles à fragilité

Mise en place :

— Soit une variable aléatoire de fragilité $\Lambda > 0$

— Soit une fonction de hasard conditionnelle $h_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \lambda a(x)$, où $a(x)$ est une fonction connue.
— La fragilité quantifie l'incertitude de la fonction de hasard.

La fonction de survie conditionnelle de $X|\Lambda$ est

$$S_{X|\Lambda}(x|\lambda) = \text{exp}\left\{-\int_0^x h_{X|\Lambda}(t|\lambda)dt\right\} = e^{-\lambda A(x)},$$

où $A(x) = \int_0^x a(t)dt$. Alors, la fonction de survie inconditionnelle est donnée par

$$S_X(x) = E\left[e^{-\Lambda A(x)}\right] = M_\Lambda(-A(x))$$

3.1.6 | Raccordement de distributions connues

Si plusieurs processus séparés sont responsables pour générer les pertes

Définition 3.1.5

Une distribution de raccordement à k composantes a une fonction de densité qui peut être exprimé sous la forme

$$f_X(x) = \begin{cases} a_1 f_1(x), & c_0 \leq x \leq c_1 \\ a_2 f_2(x), & c_1 \leq x \leq c_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_k f_k(x), & c_{k-1} \leq x \leq c_k \end{cases}$$

Pour $j = 1, 2, \ldots, k$, chaque a_j soit être positif, f_j doit être une fonction de densité avec toute sa masse sur (c_{j-1}, c_j) et $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 1$.

3.2 | Familles de distributions et leurs liens

Connaître les familles de distribution beta transformée et gamma inverse/transformée.

3.2.1 | Distributions limites

On peut parfois comparer les familles des distributions basé sur des cas particuliers des familles. Dans d'autres situations, on doit étudier les distributions quand des paramètres tendent vers 0 ou l'infini.

Exemples :

— La distribution gamma est un cas limite de la distribution beta transformée avec $\theta \to \infty, \alpha \to \infty$ et $\frac{\theta}{\alpha^{1/\gamma}} \to \xi$, une constante.

3.3 | Théorie des valeurs extrêmes

Quatrième partie

Théorie de la crédibilité

Cinquième partie

Théorie du risque

Sixième partie

Processus stochastiques

Septième partie

Finance

Bibliographie

[Kellison, 2006] Kellison, S. G. (2006). *The theory of interest*.

[Klugman et al., 2012] Klugman, S. A., Panjer, H. H., and Willmot, G. E. (2012). *Loss models : from data to decisions*, volume 715. John Wiley & Sons.