

FÍSICO

Estimado estudiante, es un placer saludarte. Como profesor de matemáticas avanzadas, abordaremos el concepto de **Derivadas Direccionales** con el rigor y la claridad que la disciplina exige.

En el cálculo de una variable, la derivada mide la tasa de cambio de una función respecto a su única variable. En el cálculo multivariable, las derivadas parciales f_x y f_y nos indican cómo cambia la función a lo largo de los ejes coordenados. Sin embargo, en el espacio real, necesitamos conocer la tasa de cambio en **cualquier dirección**. Aquí es donde introducimos la derivada direccional.

1. DEFINICIÓN FORMAL

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar y \vec{u} un **vector unitario**. La derivada direccional de f en el punto P en la dirección de \vec{u} se define mediante el límite:

$$D_{\vec{u}}f(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P+h\vec{u}) - f(P)}{h}$$

Si la función f es diferenciable, no es necesario recurrir al límite. Podemos utilizar el **Vector Gradiente** (∇f).

2. EL TEOREMA FUNDAMENTAL

Para una función diferenciable, la derivada direccional es el producto escalar entre el gradiente de la función y el vector unitario de dirección:

$$D_{\vec{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}$$

Donde:

- $\nabla f(x, y) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$
- $\vec{u} = \langle \cos \theta, \sin \theta \rangle$ (en \mathbb{R}^2 , si se da un ángulo).
- **Importante:** El vector de dirección **debe ser unitario** ($\|\vec{u}\| = 1$). Si se te entrega un vector \vec{v} no unitario, debes normalizarlo: $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$.

3. MAPA CONCEPTUAL DE PROPIEDADES

Utilicemos la lógica deductiva para entender las implicaciones de la fórmula $D_{\vec{u}}f = |\nabla f| \cdot |\vec{u}| \cos \phi = |\nabla f| \cos \phi$.

4. EJEMPLO PRÁCTICO PASO A PASO

Problema: Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = x^2e^{xy}$ en el punto $P(2, 0)$ en la dirección del vector $\vec{v} = \langle 3, -4 \rangle$.

Paso 1: Calcular el vector gradiente $\nabla f(x, y)$ Calculamos las derivadas parciales:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = x^3e^{xy}$

Evaluamos en $P(2, 0)$:

- $f_x(2, 0) = 2(2)e^0 + 2^2(0)e^0 = 4$
- $f_y(2, 0) = 2^3e^0 = 8$ $\nabla f(2, 0) = \langle 4, 8 \rangle$

Paso 2: Normalizar el vector de dirección El vector $\vec{v} = \langle 3, -4 \rangle$ no es unitario.

Su magnitud es: $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ Por lo tanto, el vector unitario \vec{u} es: $\vec{u} = \frac{1}{5}\langle 3, -4 \rangle = \langle 0.6, -0.8 \rangle$

Paso 3: Aplicar el producto escalar $D_{\vec{u}}f(2, 0) = \nabla f(2, 0) \cdot \vec{u}$ $D_{\vec{u}}f(2, 0) = \langle 4, 8 \rangle \cdot \langle 0.6, -0.8 \rangle$ $D_{\vec{u}}f(2, 0) = (4)(0.6) + (8)(-0.8)$ $D_{\vec{u}}f(2, 0) = 2.4 - 6.4 = -4$

Interpretación: En el punto $(2, 0)$, si nos movemos en la dirección $\langle 3, -4 \rangle$, el valor de la función disminuye a una tasa de 4 unidades por unidad de distancia.

5. RESUMEN DE FÓRMULAS CLAVE

CONCEPTO	EXPRESIÓN MATEMÁTICA
Gradiente	$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$
Derivada Direccional	$D_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u}$
Máximo Valor	\$
Vector Unitario	$\ \vec{u}\ = \frac{\ \vec{v}\ }{\ \vec{v}\ }$

¿Deseas que profundicemos en la demostración del teorema mediante la regla

de la cadena o preferires realizar otro ejercicio práctico? Queao a tu entera disposición.

derivadas direccionales

FÍSICO

Estimado estudiante, dado que solicitas profundizar nuevamente en las **Derivadas Direccionales**, permíteme elevar el nivel de la discusión desde la perspectiva de la **Física Teórica**.

En física, no solo nos interesa cuánto cambia una magnitud (como la temperatura o el potencial eléctrico), sino hacia dónde fluye ese cambio. La derivada direccional es la herramienta que conecta la geometría del espacio con la dinámica del cambio.

1. EL OPERADOR NABLA (∇) Y EL GRADIENTE

Desde un punto de vista fundamental, el gradiente de un campo escalar $\phi(\mathbf{r})$ es un vector que apunta en la dirección de la máxima tasa de incremento. En coordenadas cartesianas:

$$\nabla\phi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i$$

Si consideramos una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la derivada direccional en la dirección de un vector unitario \mathbf{u} es la proyección del gradiente sobre dicha dirección.

2. DEMOSTRACIÓN MEDIANTE LA REGLA DE LA CADENA

Para entender por qué $D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$, consideremos una trayectoria rectilínea que pasa por el punto \mathbf{x}_0 en la dirección \mathbf{u} : $\mathbf{r}(h) = \mathbf{x}_0 + h\mathbf{u}$

Definimos una función compuesta $g(h) = f(\mathbf{r}(h))$. La derivada direccional es, por definición, $g'(0)$. Aplicando la **Regla de la Cadena multivariable**:

$$g'(h) = \frac{df}{dh} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dh}$$

Como $x_i = x_{0,i} + hu_i$, entonces $\frac{dx_i}{dh} = u_i$. Sustituyendo:

$$D_{\mathbf{u}}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i = \nabla f \cdot \mathbf{u}$$

Esta elegancia matemática nos permite calcular cambios en infinitas direcciones conociendo solo las derivadas parciales en los ejes principales.

3. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA Y FÍSICA

En física, las funciones escalares suelen representar **potenciales**. Las líneas de campo son siempre perpendiculares a las superficies de nivel (equipotenciales).

4. PROPIEDADES EXTREMALES (RIGUROSIDAD MATEMÁTICA)

A partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, sabemos que: $|D_{\mathbf{u}}f| = |\nabla f \cdot \mathbf{u}| \leq \|\nabla f\| \|\mathbf{u}\|$

Como $\|\mathbf{u}\| = 1$, se concluye que:

1. **Valor Máximo:** $D_{\mathbf{u}}f = \|\nabla f\|$ cuando \mathbf{u} tiene la misma dirección que ∇f .
2. **Valor Mínimo:** $D_{\mathbf{u}}f = -\|\nabla f\|$ cuando \mathbf{u} tiene dirección opuesta a ∇f .
3. **Ortogonalidad:** Si la derivada direccional es cero, el vector de dirección es tangente a la curva de nivel $f(x, y) = k$.

5. EJEMPLO DE APLICACIÓN EN TERMODINÁMICA

Imagina una placa metálica donde la temperatura en cualquier punto (x, y) está dada por: $T(x, y) = 100 - x^2 - 3y^2$

Un insecto se encuentra en el punto $P(2, 1)$ y desea moverse en la dirección donde la temperatura disminuya más rápidamente (para enfriarse).

Paso 1: Hallar el gradiente (dirección de máximo calor) $\nabla T = \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y} \right\rangle = \langle -2x, -6y \rangle$ Evaluando en $P(2, 1)$: $\nabla T(2, 1) = \langle -4, -6 \rangle$

Paso 2: Dirección de máximo enfriamiento La temperatura disminuye más rápido en la dirección opuesta al gradiente: $-\nabla T(2, 1) = \langle 4, 6 \rangle$

Paso 3: Tasa de cambio en esa dirección La magnitud del cambio es la norma del gradiente: $\|\nabla T\| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7.21$

CONCEPTO	RESULTADO	SIGNIFICADO FÍSICO
Gradiente	$\langle -4, -6 \rangle$	Dirección de mayor calentamiento local.
Derivada en \mathbf{u}	$\nabla f \cdot \mathbf{u}$	Tasa de cambio en una trayectoria específica.
Isotermas	$\nabla f \cdot \mathbf{v} = 0$	Dirección donde el insecto no siente cambio de temperatura

¿Te gustaría que analizáramos cómo se comportan las derivadas direccionales en **coordenadas polares o cilíndricas**, donde los vectores unitarios dependen de la posición?