Estadística

Clase 2

Rodrigo Del Rosso

22 de Abril de 2022

Viernes 22 de Abril de 2022

- Principales definiciones y conceptos
- Teoría de Conjuntos y relación con probabilidad
- Axiomas y Teoremas
- Definiciones
- Regla de la Suma y del Producto
- Teorema de la Probabilidad Total y Bayes

Los juegos de azar tienen una antigüedad de más de 40000 años; así por ejemplo, los dados se utilizaron tanto en el juego como en ceremonias religiosas.

Las civilizaciones antiguas explicaban el azar mediante la voluntad divina.

Ya en el siglo XVI, los matemáticos italianos comenzaron a interpretar los resultados de experimentos aleatorios simples y a finales del siglo XVI, existía un análisis empírico de los resultados aleatorios.

La teoría de la probabilidad fue aplicada con buenos resultados a las mesas de juego y con el tiempo a otros problemas socioeconómicos.

Durante el siglo XVIII el cálculo de probabilidades se extiende a problemas físicos y actuariales (seguros marítimos).

El factor principal impulsor es el conjunto de problemas de astronomía y física que surgen ligados a la contrastación empírica de la teoría de Newton.

Estas investigaciones van a ser de importancia fundamental en el desarrollo de la Estadística.

La industria de los seguros, que nació en el siglo XIX, requería un conocimiento exacto del riesgo de perder pues de lo contrario no se podían calcular las pólizas.

El impulso fundamental proviene de la obra de Pierre Simon, Marqués de Laplace, publicó Théorie analytique des probabilités en el que expone un análisis matemático sobre los juegos de azar, y fue quien indujo la primera definición explícita de probabilidad.

Desde los orígenes la principal dificultad para poder considerar la probabilidad como una rama de la matemática fue la elaboración de una teoría suficientemente precisa como para que fuese aceptada como una forma de matemática.

A principios del siglo XX el matemático ruso A. Kolmogorov la definió de forma axiomática y estableció una teoría más amplia como es la teoría de la medida.

La necesidad de sortear la incertidumbre nos lleva a estudiar y aplicar la teoría de la probabilidad.

Para tener éxito en la toma de decisiones, se necesita la capacidad de tratar sistemáticamente con la incertidumbre misma mediante cuidadosas evaluaciones y aplicaciones de métodos estadísticos concernientes a las actividades de los negocios.

Definiciones

Experimento Aleatorio	Fenómeno empírico que admite dos o más resultados posibles, donde no existen elementos de juicio para predecir cuál ocurrirá aunque el mismo se repita ante iguales condiciones
Espacio Muestral	Es el conjunto de todos los resultados posibles que puede presentar el experimento
Suceso Aleatorio o Evento	Cualquier subconjunto del espacio muestral, correspondiente a un experimento
Probabilidad	Representa la chance de que un evento incierto ocurra (valor entre 0 y 1)

En la vida cotidiana aparecen muchas situaciones en las que los resultados observados son diferentes aunque las condiciones iniciales en las que se produce la experiencia sean las mismas.

Por ejemplo, al lanzar una moneda unas veces resultará cara y otras cruz. Estos fenómenos, denominados aleatorios, se ven afectados por la incertidumbre.

La probabilidad es el medio por el cual a partir de la información contenida en una muestra tomamos decisiones o hacemos afirmaciones que se refieren a toda una población mediante el proceso llamado inferencia estadística.

Esta medida de la incertidumbre nos permite estudiar o analizar los fenómenos aleatorios.

Un experimento aleatorio cuando puede concluir de diversas maneras sin que sea posible predecir con certeza que resultado particular va ser observado.

Ejemplos de **Experimentos Aleatorios**:

1. Lanzamiento de un dado una sola vez

2. Lanzamiento de una moneda equilibrada

3. Peso de una persona

4. El precio de cierre de una acción de cierta empresa el día de mañana

5. La temperatura en el día de mañana

Algunos ejemplos del espacio muestral son los siguientes:

1. Lanzamiento de una moneda:

   S= {C,S}

1. Sacar una pelota de un baúl con pelotas rojas, amarillas, negras:

   S= {Pelota amarilla, Pelota negra, Pelota Roja}

1. Lanzar dos monedas:

   S={CC,SS,CS,SC}

1. Lanzar un dado:

   S= {1,2,3,4,5,6}

1. Girar una rueda de la fortuna con números del uno al 15:

   S={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15}

Más ejemplos,

6.- Lanzar una perinola de 8 caras:

S= {1,2,3,4,5,6,7,8}

7.- Sacar el nombre premiado, de tu lista de amigos:

S={maria, jose, robertyo, rubi, daniela, alvaro}

8.- Lanzar una pelota a una canasta:

S={ La pelota entra, La pelota no entra}

9.- Lanzar 3 monedas:

S={ccc, ccs,csc,css, scc,scs,ssc,sss}

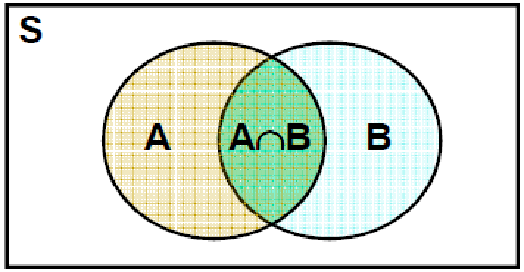
10.- Tener una bolsa con caramelos:

S= { Sacar caramelo de fresa, Sacar caramelo de menta}

Conceptos Básicos sobre Teoría de Conjuntos

Intersección de Eventos

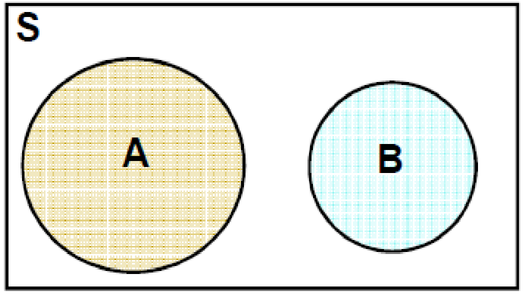
Sean A y B dos eventos en el espacio muestral S, entonces la intersección $A \cap B$, representa la conjunción de todos los resultados que pertenecen tanto a A como a B al mismo tiempo



$$A \cap B \neq \emptyset$$

Eventos Mutuamente excluyentes

Sean A y B dos eventos en el espacio muestral S, entonces son mutuamente excluyentes si no existen resultados en común entre A y B



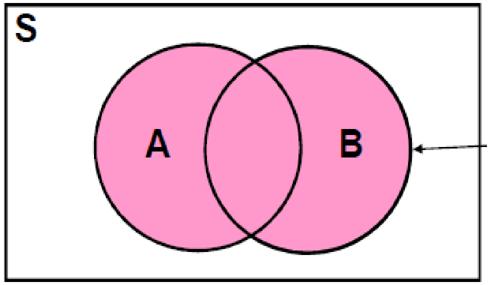
$$A \cap B = \emptyset$$

* Las figuras de esta presentación fueron extraídas del libro:

- Newbold, P.; Carlson, W. y Thorne, B. (2007). *Statistics for Business and Economics.* Pearson Education.

Unión de Eventos

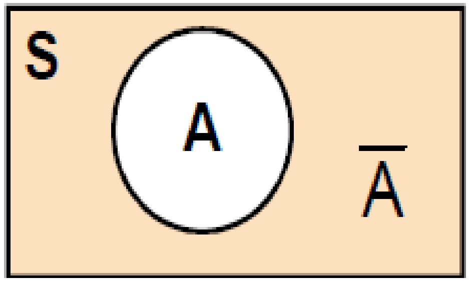
Sean A y B dos eventos en el espacio muestral S, entonces la unión $A \cup B$, representa el conjunto de todos los resultados en S que pertenecen ya sea a A como a B



Principios importantes

Si los eventos 1, 2, …, k son exhaustivos, entonces su unión forman el espacio muestral S.

El complemento de un evento A, es el conjunto de todos los eventos del espacio muestral que no pertenecen a A



Definiciones de Probabilidad

Esta apreciación del concepto de probabilidad como lógica inferencial del conocimiento incierto, da origen a una cuestión fundamental:

¿cómo puede ser caracterizado un sentimiento de incertidumbre mediante una probabilidad definida numéricamente?

Los distintos supuestos a que dio lugar esta cuestión originaron una noción de probabilidad objetiva basada en el concepto de expectativa y, posteriormente, en una interpretación esencialmente dual que asimiló la probabilidad, ya sea a una expresión deductiva basada en la simetría de la aleatoriedad inherente a algunos eventos -definición clásica-, ya sea a la frecuencia con la que se verifican ciertos fenómenos –definición frecuencista.

En el primer caso la probabilidad queda determinada por los modos posibles de presentarse los resultados de un fenómeno, en el segundo por las frecuencias observadas de dichos resultados.

Apenas un poco más tarde -y con la finalidad de aproximarse a una concepción neo-Bayesiana de la noción de modelo identificatorio de la probabilidad- surgió una tercera interpretación (logicista) que asimila la probabilidad a una relación lógica indefinida entre una proposición y un cuerpo de conocimiento.

El agregado a la conceptualización logicista de la inevitable intervención en el proceso de inducción del individuo-evaluador como mecanismo transformador de la información, dio origen a una definición subjetivista (personalista) más general de probabilidad.

Definición Clásica

Se le atribuye a Laplace quien la consagró como el único modelo válido de la verdadera naturaleza de la probabilidad.

Se estableció que la probabilidad de ocurrencia de un evento se determina por la fórmula siguiente,

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables\ al\ suceso\ (evento)}{Casos\ Totales\ al\ Experimento} = \frac{n_A}{n}$$

1. Cada uno de los posibles resultados que conforman el espacio muestral son equiprobables y listables
2. Carácter exclusivamente deductivo
3. Innegable circularidad en la definición → tautología en la definición
4. Imposibilidad de aplicación fuera del ámbito de existencia ideal en los cuales el mecanismo físico que genera la aleatoriedad incluye, en forma simétrica, a todos los resultados posibles.

Ejemplo

Tome como referencia un dado de seis caras.

Sea A el evento "el número obtenido es par" y B " el número obtenido es al menos 4"

$S = (1,2,3,4,5,6)$ $A = (2,4,6)$ $B = (4,5,6)$

$A \cap B = (4,6)$

$A \cup B = (2,4,5,6)$

A y B no son mutuamente excluyentes

A y B no son colectivamente exhaustivos

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Definición Frecuencista

Esta definición es apta sólo para calcular las probabilidades de ocurrencia de aquellos fenómenos considerados repetibles.

No tiene sentido, en el contexto frecuencista, hablar de la probabilidad de ocurrencia de un fenómeno único o de la probabilidad de que una proposición sea verdadera o falsa.

Las probabilidades calculadas a partir de esta interpretación son objetivas y, por lo tanto, independientes de la opinión del individuo-evaluador.

Definición Frecuencista

von Mises (1928) consideró la necesidad de distinguir entre “colectivos empíricos” (que están formados por un número finito de elementos, que son observables y que dan origen a lo que algunos autores han denominado frecuencismo finito) y “colectivos matemáticos” (formados por una sucesión infinita de elementos y que dan origen al llamado frecuencismo hipotético) y supuso que los colectivos empíricos obedecen a dos principios fundamentales: la ley de estabilidad de las frecuencias estadísticas y la ley de irregularidad

Definición Frecuencista

Se estableció que la probabilidad de ocurrencia de un evento se determina por el principio de estabilidad de la frecuencia relativa que establece que a medida que se incrementa la cantidad de repeticiones de un experimento, la frecuencia relativa tiende a estabilizarse en un valor que consideramos que es la probabilidad

$$\lim_{n \to \infty} f_r(A) = P(A)$$

Ejemplo de Simulación en Planilla de Cálculo Excel

Definición Subjetivista

La interpretación subjetivista considera que la probabilidad corresponde siempre a eventos individuales y, cada vez que se asigne una probabilidad, es necesario pensarla como subordinada a la interpretación que hace cada observador de un conjunto de información particular (entendiendo por evento individual un caso que, para un individuo que en ciertas circunstancias no puede asegurar su ocurrencia en forma cierta, es aleatorio).

Es decir la probabilidad se basa en la creencia del observador.

Debe cumplirse lo siguiente,

$$P(E) = 1 \qquad Certeza$$

$$P(E) = 0 \qquad Imposible$$

$$0 < P(E) < 1$$

Axiomas y Teoremas

Regla de la Suma
Regla del Producto

Axiomas

1. Si $\mathrm{E} = \Omega \Rightarrow P(\Omega) = 1$

2. $P(\bar{E}) = 1 - P(E) \quad (evento\ complementario)$

3. Si $E_1 \cap E_2 = \emptyset \quad (eventos\ incompatibles)$

$$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

4. Si $E_i \cap E_j = \emptyset \ \forall i \neq j \ \ (i; j = 1,2, \dots, n) \ (eventos\ incompatibles\ de\ a\ pares)$

$$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots P(E_n)$$

Teoremas

1. Si $\mathrm{E} = \emptyset \Rightarrow P(\emptyset) = 0$

2. $0 < P(E) < 1$

3. Regla de la Suma ("o inclusivo")

Si $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \quad (eventos\ compatibles) \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

4. Regla de la Suma ("o exclusivo")

Si $E_i \cap E_j \neq \emptyset\ (eventos\ compatibles) \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - 2 * P(E_1 \cap E_2)$

Probabilidad Marginal

Es la probabilidad de que se presente un suceso aleatorio A, sin importar de que esté acompañado de otro

Sean $B_1, B_2, \ldots, B_k$ eventos excluyentes y exhaustivos de B, entonces

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A/B_i)$$

Probabilidad Conjunta

Es la probabilidad de que se presente en el mismo experimento dos sucesos A y B al mismo tiempo

Probabilidad Condicional

Es la probabilidad de que se presente el suceso A, dado que se haya presentado el B anteriormente

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{y} \quad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ejemplo

De los autos en un estacionamiento, el 70% tiene aire y 40% CD. Además se sabe que hay un 20% de que posea ambos atributos.

¿Cuál es la probabilidad que un auto tenga CD, dado que tiene aire?

	CD	No CF	Total
Aire	0,2	0,5	**0,7**
No aire	0,2	0,1	**0,3**
Total	**0,4**	**0,6**	**1**

$$P(CD/Aire) = \frac{P(CD \cap Aire)}{P(Aire)} = \frac{0{,}20}{0{,}70} = 0{,}2857$$

Tabla

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	$P(S) = 1.0$

Independencia Estadística

Dos Eventos son estadísticamente independientes cuando la probabilidad de un evento no es afectada por el otro evento. Esto es, si y sólo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Si A y B son independientes, entonces:

$$P(A/B) = P(A) \quad si\ P(B) > 0$$

$$P(B/A) = P(B) \quad si\ P(A) > 0$$

Ejemplo (Continuación)

$$P(CD \cap Aire) = 0{,}2 \quad y \quad P(CD) * P(Aire) = 0{,}7 * 0{,}4 = 0{,}28$$

Entonces los eventos no son estadísticamente independientes

Sucesos probabilísticamente independientes

Si dos o más sucesos son independientes, entonces la presencia de cada uno no modifica el valor de la probabilidad de otras $P(S_1/S_2) = P(S_1)$

Ejemplo

Suponga que dispone de una urna que contiene 5 Bolitas Rojas y 3 Negras. Es decir, en total en la urna hay 8 bolitas.

Si se extraen dos bolitas con reposición, ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean negras?

$$\boldsymbol{P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2) = \frac{3}{8} * \frac{3}{8} = \frac{9}{64}}$$

Si se extraen dos bolitas sin reposición, ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean negras?

$$\boldsymbol{P(N_1 \cap N_2) = P(N_1)P(N_2/N_1) = \frac{3}{8} * \frac{2}{7} = \frac{6}{56}}$$

Regla de la Suma y del Producto

Regla de la Suma

La regla de la adición o regla de la suma establece que la probabilidad de ocurrencia de cualquier evento en particular es igual a la suma de las probabilidades individuales, si es que los eventos son mutuamente excluyentes, es decir, que dos no pueden ocurrir al mismo tiempo.

Inclusivo para dos eventos

Si $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset \quad (eventos\ compatibles) \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Exclusivo para dos eventos

Si $E_i \cap E_j \neq \emptyset\ (eventos\ compatibles) \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - 2 * P(E_1 \cap E_2)$

Regla de la Suma para 3 eventos

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - 2P(E_1 \cap E_2) - 2P(E_1 \cap E_3) - 2P(E_2 \cap E_3) + 3P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

Regla de la Suma

Se puede generalizar para n eventos,

Inclusivo

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n} P\left(E_i \cap E_j\right) + \cdots + (-1)^s \sum_{i=1}^{n-s} \ldots \sum_{s=i}^{n} P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_s) + \cdots + P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots E_n)$$

Exclusivo

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i}^{n} P\left(E_i \cap E_j\right) + \cdots + (-1)^s s \sum_{i=1}^{n-s} \ldots \sum_{s=i}^{n} P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_s) + \cdots + nP(E_1 \cap E_2 \cap \cdots E_n)$$

Regla del Producto

Eventos Independientes

Si $E_1 \perp E_2 \quad (eventos\ independientes) \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$

Eventos Dependientes

Si $E_1\ y\ E_2 \quad (eventos\ dependientes) \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2/E_1)$

Si $E_1\ y\ E_2 \quad (eventos\ dependientes) \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(E_2)P(E_1/E_1)$

Para n eventos

Eventos independientes

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = P(E_1)P(E_2) \ldots P(E_n) = \prod_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Eventos dependientes

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = P(E_1)P(E_2/E_1) \ldots P(E_n/E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1})$$

Teorema de la Probabilidad Total

Ejemplo

Supongamos que contamos con la siguiente información sobre los estudiantes de la FCE (UBA) respecto a la cantidad de inscriptos por cada carrera y cuantos tienen un dominio del idioma Inglés,

Carrera	Cantidad	Inglés
Actuario	5	4
Administración	15	8
Contador	20	12
Economía	10	8
Sistemas	5	3
Total	55	35

Con esta información podemos determinar, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar un estudiante que tenga conocimiento de inglés?

$$P(Inglés) = \frac{35}{55} \cong 0{,}6364$$

Definición de eventos

Ac: $estudiante\ de\ Actuario$

Ad: $estudiante\ de\ Administración$

Co: $estudiante\ de\ Contador$

Ec: $estudiante\ de\ Economía$

Si: $estudiante\ de\ Sistemas$

I: $conocimiento\ de\ Inglés$

Con la tabla anterior podemos determinar la probabilidad marginal de encontrar un estudiante de cada carrera y la de encontrar alguien que sepa inglés dado que estudia determinada carrera.

Carrera	P(Carrera)	P(Inglés/Carrera)
Actuario	5/55	4/5
Administración	15/55	8/15
Contador	20/55	12/20
Economía	10/55	8/10
Sistemas	5/55	3/5
Total	1	1

Resolución de la pregunta sobre Inglés con los datos de la tabla

$$P(Ac) = \frac{5}{55} \qquad P(I/Ac) = \frac{4}{5}$$

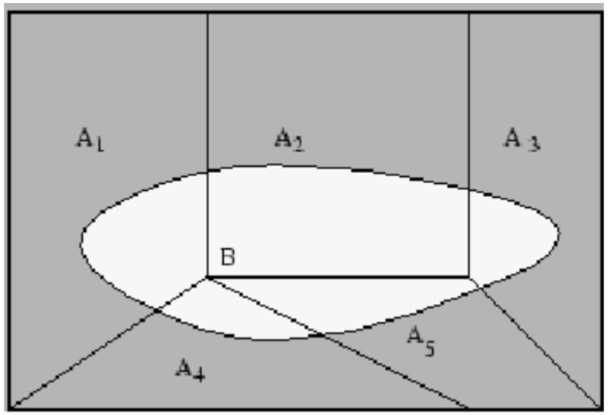
$$P(Ad) = \frac{15}{55} \qquad P(I/Ad) = \frac{8}{15}$$

$$P(Co) = \frac{20}{55} \qquad P(I/Co) = \frac{12}{20}$$

$$P(Ec) = \frac{10}{55} \qquad P(I/Ec) = \frac{8}{10}$$

$$P(Si) = \frac{5}{55} \qquad P(I/Si) = \frac{3}{5}$$

Carrera	P(Carrera)	P(Inglés/Carrera)
Actuario	5/55	4/5
Administración	15/55	8/15
Contador	20/55	12/20
Economía	10/55	8/10
Sistemas	5/55	3/5
Total	1	1



$$P(Ac) + P(Ad) + P(Co) + P(Ec) + P(Si) = 1$$

$$P(I) =? \Rightarrow P(I) = P(I \cap Ac) + P(I \cap Ad) + P(I \cap Co) + P(I \cap Ec) + P(I \cap Si)$$

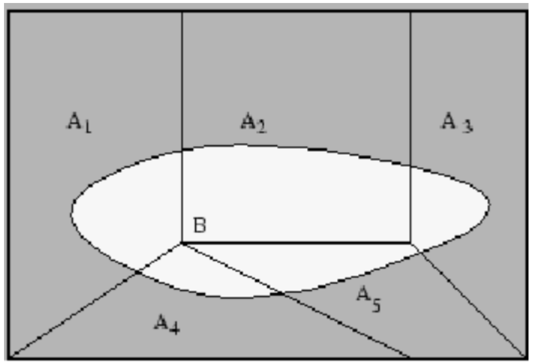
Resolución de la pregunta sobre Inglés con los datos de la tabla

$$P(I) = P(I \cap Ac) + P(I \cap Ad) + P(I \cap Co) + P(I \cap Ec) + P(I \cap Si)$$

$$P(I) = P(Ac)P(I/Ac) + P(Ad)P(I/Ad) + P(Co)P(I/Co) + P(Ec)P(I/Ec) + P(Si)P(I/Si)$$

$$P(I) = \frac{5}{55} * \frac{4}{5} + \frac{15}{55} * \frac{8}{15} + \frac{20}{55} * \frac{12}{20} + \frac{10}{55} * \frac{8}{10} + \frac{5}{55} * \frac{3}{5} = \frac{35}{55}$$

Es decir, la probabilidad de encontrar un estudiante que tenga conocimientos de Inglés es de 35/55 y se obtuvo a partir de considerar todas las posibilidades donde el evento inglés se presentaba en forma conjunta con cada evento incompatible.



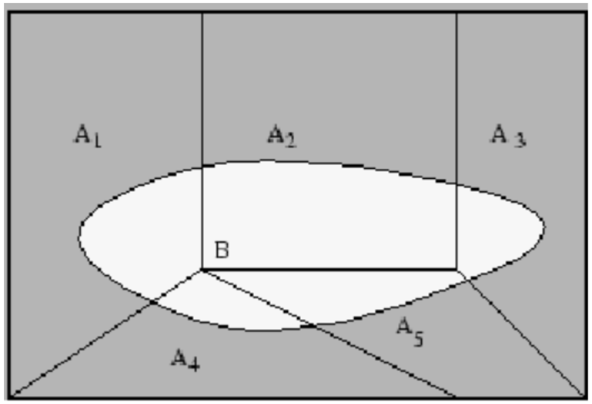
Formalización

Es la probabilidad de que se presente un suceso aleatorio A, sin importar de que esté acompañado de otro/s. Sean $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eventos mutuamente excluyentes que forman un sistema exhaustivo, es decir,

1. $P(B_i) > 0$
2. $P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = P(\Omega) = 1$

Entonces se puede intentar determinar la probabilidad de ocurrencia del evento A de la forma siguiente,

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)$$



Teorema de Bayes

Continuación

Sabemos que un estudiante tiene conocimientos de inglés, ¿Cuál es la probabilidad de que sea a causa de estudiar Contador Público?

Carrera	Cantidad	Inglés
Actuario	5	4
Administración	15	8
Contador	20	12
Economía	10	8
Sistemas	5	3
Total	55	35

$$P(Co/I) = \frac{P(I \cap Co)}{P(I)}$$

$$P(Co/I) = \frac{P(Co)P(I/Co)}{P(Ac)P(I/Ac) + P(Ad)P(I/Ad) + P(Co)P(I/Co) + P(Ec)P(I/Ec) + P(Si)P(I/Si)}$$

$$P(Co/I) = \frac{\frac{20}{55} * \frac{12}{20}}{\frac{35}{55}} = \frac{12}{35}$$

Es decir, dado que el/la estudiante tiene conocimientos de Inglés, la probabilidad de que estudie Contador/a es de 12/35.

Tarea: Hacer lo mismo para el resto de las carreras.

Se le conoce como teorema de Bayes, a la preposición recopilada de las memorias del matemático y sacerdote de origen Inglés Thomas Bayer.

Quien a dos años de su muerte en 1761, expresa la probabilidad (la medida de certidumbre vinculada a un evento) de carácter condicional de un evento aleatorio dada cierta información de antemano sobre el suceso.

Es decir dicho teorema calcula la probabilidad "A" condicionado por la información "B". Logrando la determinación de la probabilidad de las causas a partir de los efectos que han podido ser observados.

Se conoce como una probabilidad probatoria que evalúa la probabilidad de una hipótesis, especificando una alguna posibilidad a priori, actualizada a continuación a la luz nuevos datos.

Bayes proporciono un conjunto de procedimientos y formulas estándar para realizar este cálculo.

En esta operación matemática intervienen 3 clases de probabilidades, que son las siguientes:

$P(B_i)$ es la probabilidad a priori de un suceso B_i.

$P(B_i/A)$ es la probabilidad a posteriori de un suceso B_i, (cuando se obtiene la información de que ha ocurrido un suceso A).

$P(A/B_i)$ son las verosimilitudes del suceso A son supuestos que habrían de ocurrir a cada suceso B_i.

Matemáticamente el teorema de Bayes es igual al cociente del producto de la probabilidad "A" dados (Bi), $P(A/B_i)$ (siendo A el suceso conocido y "Bi" los sucesos condicionados) por la probabilidad $P(B_i)$ entre la sumatoria de cada probabilidad que contenga el suceso conocido por cada suceso conocido.

En síntesis, el numerador es la probabilidad condicionada y el denominador es la probabilidad total.

Condiciones

Este teorema permite determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento B_i (incompatible con otros) dado que se presentó otro evento denominado A, el cual es compatible con cada uno de los excluyentes.

Las condiciones que deben presentarse para utilizarlo son las mismas que el Teorema de Probabilidad Total, es decir:

Sean $B_1, B_2, \dots, B_n$ eventos mutuamente excluyentes que forman un sistema exhaustivo, es decir,

1. $P(B_i) > 0$

2. $P(\cup_{i=1}^{n} B_i) = P(\Omega) = 1$

Entonces se puede intentar determinar la probabilidad de ocurrencia del evento A de la forma siguiente,

$$P(B_1/A) = \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)}$$

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(A)}$$

Donde

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)$$

Entonces,

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}$$

Tener presente el axioma de evento complementario, por ejemplo:

$$P(A/B_1) = 1 - P(\bar{A}/B_1) \ \ \textit{Verosimilitud}$$

$$P(B_1/A) = 1 - P(\overline{B_1}/A) \ \ \textit{Bayes}$$

Recordar lo siguiente,

$$P(B_1) + P(B_2) + \cdots + P(B_n) = 1$$

Al estar condicionado por el evento A se cumple lo siguiente,

$$P(B_1/A) + P(B_2/A) + \cdots + P(B_n/A) = 1$$

Es decir, que el condicionamiento al evento A acotó el conjunto de posibles resultados del Experimento a únicamente al evento condicionante A.

Debilidades

Los estadistas han cuestionado el teorema basándose en las limitaciones de su aplicación, ya que es válido únicamente cuando se cumplen sucesos disjuntos y exhaustivos.

De igual manera los especialistas en estadística tradicional ratifican que solo pueden ser admisibles las estadísticas basadas en experimentos repetibles y de comprobación empírica, debido a que las probabilidades estadísticas Bayesianas admiten condiciones relativas.

Aplicaciones

El teorema de Bayes sirve para calcular las posibilidades de un suceso que está dado o no por otro suceso anterior, lo cual consiente evaluar de qué manera se transforman las probabilidades subjetivas, mientras más información nueva se posee de un hecho.

Además de ser aplicable a modelos basados en el conocimiento subjetivo y la evidencia empírica. Se aplica también a modelos que se utilizan, por ejemplo, en la fusión de datos de un sistema.

Así mismo, es considerado como un excelente modelo o método para evaluar nueva información y revisar estimaciones anteriores sustentadas en datos limitados, para conocer entonces si se encuentran en un estado u otro, si es aplicado de manera idónea entonces se hace eficaz la reunión de datos para tomar mejores decisiones.

Ventajas

1. Se puede enfocar de manera tal de que se obtengan beneficios en algunos campos.

2. Es posible el análisis continuo de la información, aunque si la variabilidad entre datos es elevada es necesario algún método que permita llegar a soluciones confiables.

3. Meta-Análisis: buscar acumular información variada para llegar a una apreciación exacta de un problema

4. Evaluación de estudios a pequeña escala con la información de otros, debido a que el desarrollo de estos a escala global no siempre es posible, y a nivel muestra no cuenta con una total veracidad, el enfoque bayesiano permite ratificar y refutar.

5. Estudios de decisión.

Importancia

En el campo estadístico el teorema de Bayes permitió la resolución de problemas de múltiples probabilidades, su importancia radica en la aplicación de la misma, pues es fundamental en cualquier ciencia, ya que permite demostrar la relación intrínseca con la comprensión de las probabilidades de los sucesos causados una vez establecidos los efectos acontecidos.

La probabilidad Bayesiana permite convertir una probabilidad subjetiva en una real cuando esta se va modificando en base a las nuevas informaciones.

Las evidencias empíricas que según los estadistas actúan como base para la aplicación de este teorema tienen aplicaciones puntuales en las distintas ramas de la medicina, desde el diagnóstico de cáncer, hasta para la prevención de la diabetes, también tiene usos menos sofisticado como el evaluar las posibilidades en un juego de barajas.

Recapitulando, este teorema sirve para evaluar sucesos a priori y a posteriori, teniendo en cuenta hechos que pueden ser subjetivos o no y en base a las posibilidades que desencadenen estos hechos, obtener un dato que como conocimiento permitirá o no establecer un plan de acción.

UNIVERSIDAD AUSTRAL | INGENIERÍA

https://stattrek.com/online-calculator/bayes-rule-calculator.aspx

Bayes Rule Calculator

The Bayes' Rule Calculator computes conditional probabilities P(A_k|B), based on known probabilities of other events. The calculator handles problems that can be solved using Bayes' rule.

Summary Report | Frequently-Asked Questions | Sample Problems

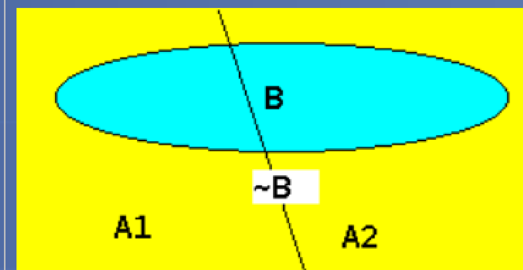
- Specify the number (k) of mutually-exclusive events (A_k) that define the sample space.
- Enter values for P(A_k ∩ B) **Or** for P(A_k) and P(B | A_k).
- Click **Calculate** button to compute conditional probabilities P(A_k|B).

How many events (k) are in the sample space? 2

Event A_k	Prob (A_k∩ B)		Prob (A_k)	Prob (B | A_k)	Prob (A_k | B)
A_1		**Or**			
A_2					

Calculate

https://www.uv.es/ceaces/scrips/tablas/bayes.htm

	Cálculo de probabilidades: partición de A en dos. teorema de bayes Introducir probabilidades conocidas y CALCULAR	CaEst 1.7 CALCULAR BORRA TODO	
	A1	**A2**	
B	$P_{(B\|A1)}$ = 0.40 $P_{(A1\|B)}$ = 0.2758621	$P_{(B\|A2)}$ = 0.70 $P_{(A2\|B)}$ = 0.7241379	P(B)= 0.58
~B	$P_{(\sim B\|A1)}$ = 0.6 $P_{(A1\|\sim B)}$ = 0.5714286	$P_{(\sim B\|A2)}$ = 0.3 $P_{(A2\|\sim B)}$ = 0.4285714	P(~B)= 0.42
	$P_{(A1)}$ = 0.4	$P_{(A2)}$ = 0.6	$P_{(\text{Total de A})}$ = 1.0
			Juan Mtnez. de Lejarza

Ejercicio para pensar

Se tienen tres urnas. Cada una de ellas contiene un número diferente de bolitas blancas y rojas:

Primera urna, U1: 3 bolitas blancas y 2 rojas;

Segunda urna, U2: 4 bolitas blancas y 2 rojas;

Tercera urna, U3: 3 bolitas rojas.

Se realiza el siguiente experimento aleatorio: Alguien elige al azar y con la misma probabilidad una de las tres urnas, y saca una bolita.

Si el resultado del experimento es que ha salido una bolita blanca,

¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la primera urna?

Calcular lo mismo para las otras dos urnas.

Solución

Urna 1		Urna 2		Urna 3	
3 B	P(B/U1)=3/5	4 B	P(B/U2)=4/6	0 B	P(B/U3)=0
2 R	P(R/U1)=2/5	2 R	P(R/U2)=2/6	3 R	P(R/U3)=1
P(U1)=1/3		**P(U2)=1/3**		**P(U3)=1/3**	

En este caso U1, U2 y U3 forman un sistema exhaustivo y mutuamente excluyente (la bola resultado debe provenir de una de esas tres urnas y de una sólo de ellas), por tanto es posible aplicar el teorema de Bayes:

$$P(U_1|B) = \frac{P(B|U_1)\cdot P(U_1)}{P(B|U_1)\cdot P(U_1)+P(B|U_2)\cdot P(U_2)+P(B|U_3)\cdot P(U_3)} = \frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}} = \frac{9}{19}.$$

Con respecto a las demás urnas es lo mismo,

$$
\begin{aligned}
P\left(U_2|B\right) &= \frac{P\left(B|U_2\right)\cdot P\left(U_2\right)}{P\left(B|U_1\right)\cdot P\left(U_1\right)+P\left(B|U_2\right)\cdot P\left(U_2\right)+P\left(B|U_3\right)\cdot P\left(U_3\right)} = \\
&= \frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}} = \frac{10}{19}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(U_3|B\right) &= \frac{P\left(B|U_3\right)\cdot P\left(U_3\right)}{P\left(B|U_1\right)\cdot P\left(U_1\right)+P\left(B|U_2\right)\cdot P\left(U_2\right)+P\left(B|U_3\right)\cdot P\left(U_3\right)} = \\
&= \frac{0\cdot\frac{1}{3}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}} = 0.
\end{aligned}
$$

La regla de Bayes se puede expresar de otras maneras. La fórmula de Bayes es la siguiente,

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}$$

Por ejemplo, si calculamos el cociente

$$\frac{P(B_1/A)}{P(\overline{B_1}/A)} = \frac{P(A/B_1)}{P(\bar{A}/B_1)} * \frac{P(B_1)}{P(\overline{B_1})}$$

De este modo se puede escribir

Apuestas a posteriori = *Factor Bayes* x *Apuestas a priori*

En nuestro ejemplo de los estudiantes, esto daría lo siguiente:

$$\frac{P(Co/I)}{P(\overline{Co}/I)} = \frac{P(I/Co)}{P(\bar{I}/Co)} * \frac{P(Co)}{P(\overline{Co})} = \frac{\frac{12}{20}}{\frac{8}{20}} * \frac{\frac{20}{55}}{\frac{35}{55}} = 1{,}5 * 0{,}571428571 = 0{,}857142857$$

Una vez procesada la información mediante la fórmula de Bayes, la emplearemos para tomar decisiones o realizar predicciones. El problema de predicción se describe como sigue.

Partiendo de las probabilidades a priori $P(B_1)$ y las verosimilitudes $P(A/B_1)$ hemos hecho una realización del experimento y obtenido A_1, es decir hemos procesado esta información a $P(B_1/A)$.

Deseamos predecir el resultado de una segunda realización del experimento; para ello emplearemos las probabilidades $P(A_2/A_1)$. Se observa que

$$P(A_2/A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(A_2 \cap A_1 \cap B_i)}{P(A_1)}$$

$$P(A_2/A_1) = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(A_2 \cap A_1 \cap B_i)}{P(A_1 \cap B_i)} * \frac{P(A_1 \cap B_i)}{P(A_1)}$$

$$P(A_2/A_1) = \sum_{i=1}^{n} P(A_2/A_1 \cap B_i) * P(B_i/A_1)$$

$$P(A_2/A_1) = \sum_{i=1}^{n} P(A_2/A_1 \cap B_i) * P(B_i/A_1)$$

En muchas ocasiones, si se conoce A_1 entonces resulta irrelevante para predecir A_2 por lo tanto,

$$P(A_2/A_1 \cap B_i) = P(A_2/B_i)$$

(esto es, G_1 y G_2 son condicionalmente independientes dados A_j) y resulta que

$$P(A_2/A_1) = \sum_{i=1}^{n} P(A_2/B_i) * P(B_i/A_1)$$

¿en cuál de los dos escenarios nos encontramos?

MC

$$P(MC) = \frac{1}{2}$$

MA

$$P(MA) = \frac{1}{2}$$

Tapita	MC	MA
C	2/3	1/3
A	1/3	2/3

Lo que ocurre realmente es esto,

Lo que sabemos es que se ha producido la siguiente secuencia de 6 (seis) valores observados,

$$C \quad A \quad A \quad C \quad A \quad C$$

¿Podría inferir con lo visto en clase que escenario de frasco es más probable?

De ser así realicé los cálculos y determiné que decisión tendría haber tomado en cada extracción del frasco. Tarea para el hogar y para discutir en el foro del Campus Virtual.

Próxima Clase

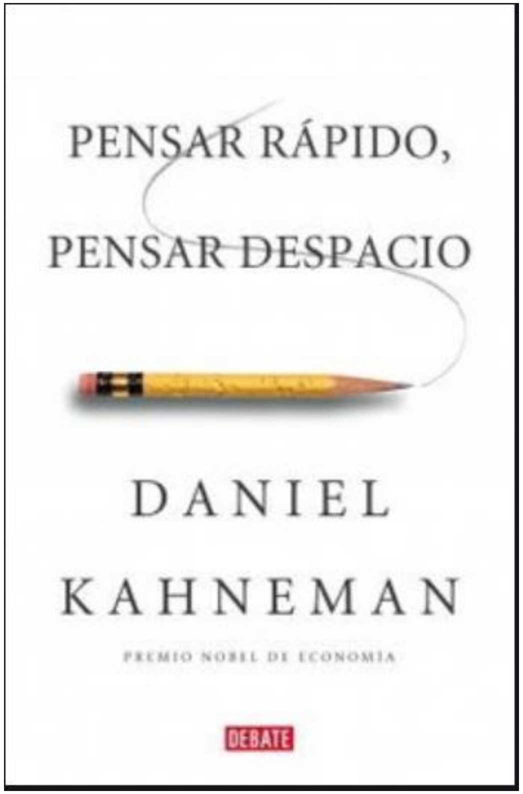
Repasaremos los principales conceptos de esta clase.

Es importante que repasen todo lo visto y que las consultas las canalicen mediante el foro del campus virtual.

Veremos el concepto uno de los conceptos más importantes de la materia,

- Variables Aleatorias
- Variables Discretas: Función de Probabilidad, Función de Distribución, etc.
- Variables Continuas: Función de Densidad, Función de Distribución, etc.
- Esperanza Matemática, Varianza, etc.
- Modelos probabilísticos para variables discretas y continuas

Libro


PENSAR RÁPIDO,
PENSAR DESPACIO
DANIEL
KAHNEMAN
PREMIO NOBEL DE ECONOMIA
DEBATE


TO BE
CONTINUED....

Preguntas, Sugerencias y Comentarios

RDelRosso-ext@austral.edu.ar

¡Muchas Gracias!