Introdução à Computação em Física

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

PROF. WALBER

Refs.:
Cálculo numérico, aspectos teóricos e computacionais (2nd edição), M. A. G. Ruggiero, V. L. da Rocha Lopes
Cálculo numérico Com Aplicações (2nd edição), L. C. Barroso, M. M.A. Barroso, F. F. C. Filho, M. L. B. de Carvalho, M. L. Maia

Interpolação

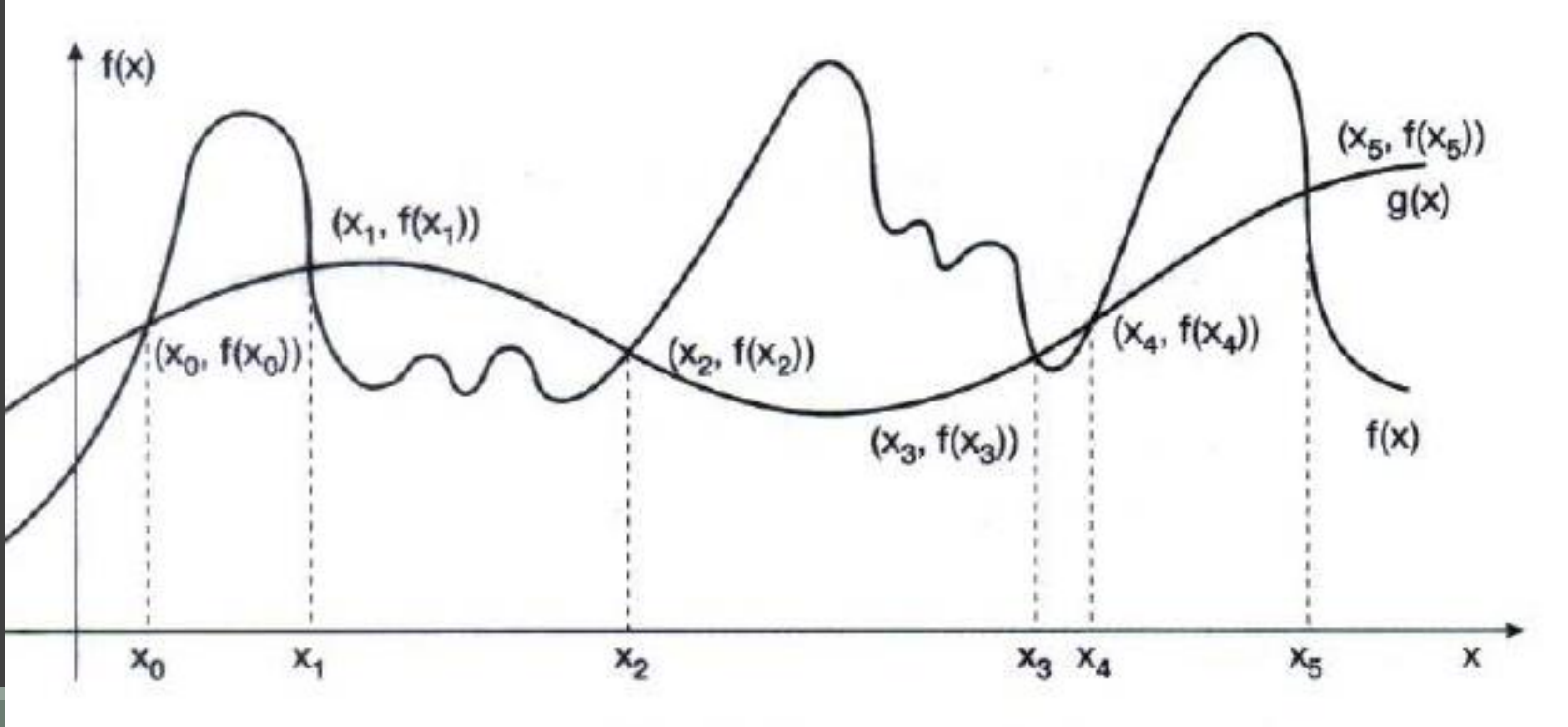
A interpolação consiste em "substituir" uma função f(x), da qual se tem um conjunto de pontos, por uma outra função g(x), com o objetivo de calcular o valor da função em um ponto não tabelado, além de facilitar certas operações (como diferenciação e integração).

Sejam (n+1) pontos distintos: x_0, x_1, ..., x_n, que são os pontos de interpolação. Sejam os valores de f(x) nesses pontos: $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$. Queremos obter uma função g(x) tal que:

$$g(x_0) = f(x_0)$$
$$g(x_1) = f(x_1)$$
$$g(x_2) = f(x_2)$$
$$g(x_3) = f(x_3)$$
$$\ldots$$
$$g(x_n) = f(x_n)$$

Interpolação (ponto de vista gráfico)

Sejam (n+1) pontos distintos: x_0, x_1, ..., x_n, que são os pontos de interpolação. Sejam os valores de f(x) nesses pontos: $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_n)$. Queremos obter uma função g(x) tal que:



Interpolação polinomial

Vamos considerar o caso onde a função g(x) é na verdade um polinômio p_n de grau $\leq n$, tal que:

$$f(x_k) = p_n(x_k),$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Teorema da Existência e Unicidade:

Dado um conjunto de $n+1$ pontos distintos, isto é $(x_k, f_k), k = 0, 1, 2, \ldots, n$, com $x_k \neq x_j$ para $k \neq j$. Existe um único polinômio $p(x)$ de grau menor ou igual a n, tal que $p(x_k) = f_k$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Interpolação polinomial

Seja então o polinômio interpolador:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Da condição que p deve ser igual a f nos pontos, obtêm-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 + \cdots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \cdots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 + \cdots + a_n x_2^n = f(x_2) \\ \cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + a_3 x_n^3 + \cdots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

Temos n+1 equações e n+1 variáveis (a_0, a_1, a_2, ..., a_n)

Interpolação polinomial

Temos então na forma matricial o sistema linear Aa = f

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Matriz de Vandermonde

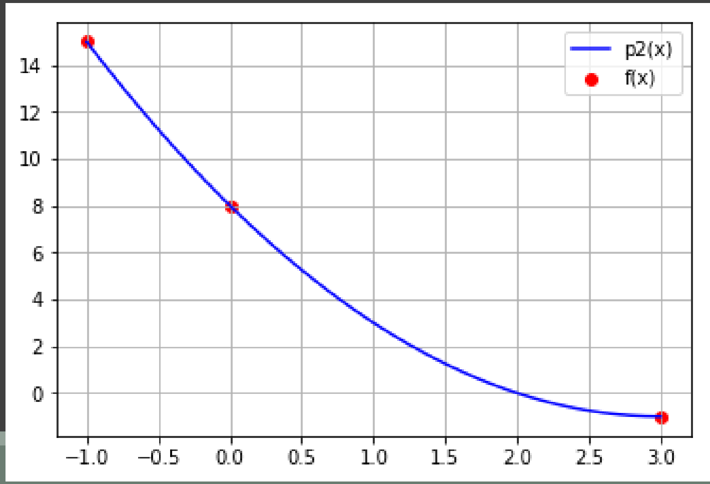
Uma das formas de se determinar as variáveis (a_0, a_1, a_2, ..., a_n) seria resolver o sistema linear acima. Entretanto, o método empregado deve ser escolhido com cuidado.

Interpolação polinomial (Atividade prática)

Exemplo:

x	-1	0	3
f(x)	15	8	-1

Implementar código para o cálculo dos coeficientes do polinômio p2(x). Código deve escrever a matriz A obtida bem como os coeficientes.



Valor dos coeficientes a serem obtidos:

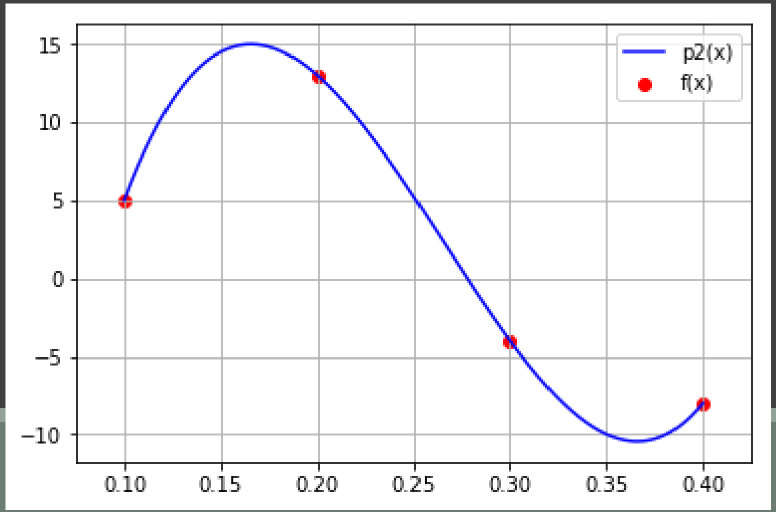
a0 = 8
a1 = -6
a2 = 1

Interpolação polinomial (Atividade prática)

Exemplo2:

x	0.1	0.2	0.3	0.4
f(x)	5	13	-4	-8

Implementar código para o cálculo dos coeficientes do polinômio p3(x). Código deve escrever a matriz A obtida bem como os coeficientes. Além disso, o código deve escrever na tela os valores de p3 nos pontos interpoladores.



Interpolação polinomial - Forma de Lagrange

Além da forma envolvendo a solução do sistema linear (que pode introduzir erros de arredondamento), há outras maneiras de se obter o polinômio de interpolação.

Sejam os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e $y_0 = f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, ..., $y_n=f(x_n)$.
A forma de fórmula de Lagrange consiste em representar $p_n(x)$ na forma:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

Onde $L_k(x)$ são os polinômios de grau $\leq n$, dados por:

$$L_k(x) = \frac{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x - x_j)}{\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(x_k - x_j)}$$

Interpolação polinomial - Forma de Lagrange

Exemplo:

x	-1.0	0.0	2.0
f(x)	4.0	1.0	-1.0

Nesse caso

$$p_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{x^2 - 2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{x^2 - x - 2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{x^2 + x}{6}$$

Logo,

$$p_2(x) = 4\left(\frac{x^2 - 2x}{3}\right) + \left(\frac{x^2 - x - 2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{x^2 + x}{6}\right)$$

Interpolação polinomial - Forma de Lagrange (Atividade prática)

Implementar a interpolação polinomial de Lagrange, lembrando que:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)$$

$$L_k(x) = \frac{\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0, j\neq k}^{n} (x_k - x_j)}$$

Aplicar aos dados do slide anterior.

Interpolação polinomial - Forma de Newton

Interpolação polinomial - Forma de Newton

Vamos agora ver uma outra forma para o polinômio interpolador $p_n(x)$,

$$p_n(x) = f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

A forma de Newton se basea nos chamados operadores de <u>diferenças divididas</u>.

Seja uma função f(x) tabelada em n+1 pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Definimos o operador diferença dividida de ordem zero em x_k, como:

$$f[x_k] = f(x_k)$$

Operador de ordem 1

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_k] - f[x_{k+1}]}{x_k - x_{k+1}}$$

Operador de ordem n

$$f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+n}] - f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n-1}]}{x_{k+n} - x_k}$$

Interpolação polinomial - Forma de Newton

- Tabela operadores de diferenças divididas:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		$\vdots$	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$		
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	$\vdots$		$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n]$
		$f[x_3, x_4]$	$\vdots$		$\vdots$	
x_4	$f[x_4]$	$\vdots$		$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
$\vdots$	$\vdots$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
		$f[x_{n-1}, x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

A partir das ordem inferiores, vamos obtendo os valores relacionados as ordens superiores (colunas da esquerda para a direita)

Interpolação polinomial - Forma de Newton

- Exemplo:

x	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
f(x)	1.0	1.0	0.0	-1.0	-2.0

Ordem 0

$$f[x_0] = 1$$
$$f[x_1] = 1$$
$$f[x_2] = 0$$
$$f[x_3] = -1$$
$$f[x_4] = -2$$

Ordem 1

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{0-1}{1-0} = -1$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{-1-0}{2-1} = -1$$

$$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3} = \frac{-2+1}{3-2} = -1$$

Ordem 2

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\frac{1}{2}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = 0$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2} = 0$$

Interpolação polinomial - Forma de Newton

- Exemplo:

x	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
f(x)	1.0	1.0	0.0	-1.0	-2.0

Ordem 2

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = -\frac{1}{2}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = 0$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2} = 0$$

Ordem 3

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{1}{6}$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1} = 0$$

Interpolação polinomial - Forma de Newton

- Exemplo:

x	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
f(x)	1.0	1.0	0.0	-1.0	-2.0

Ordem 3

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{1}{6}$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1} = 0$$

Ordem 4

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0} = -\frac{1}{24}$$

Interpolação polinomial - Forma de Newton

- Exemplo: Tabela

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-1	1				
		0			
0	1		$-\frac{1}{2}$		
		-1		$\frac{1}{6}$	
1	0		0		$-\frac{1}{24}$
		-1		0	
2	-1		0		
		-1			
3	-2				

Interpolação polinomial - Forma de Newton

Considerando os operadores de diferenças divididas, a forma de Newton para o polinômio de grau ≤ n que interpola f(x) em x_0:

$$p_n(x) = f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

Pode-se mostrar que o erro associado é dado por:

$$E_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)f[x,x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

Interpolação polinomial - Forma de Newton (Atividade prática)

- Implementar o Forma de Newton para os seguintes dados vistos anteriormente:

x	-1.0	0.0	1.0	2.0	3.0
f(x)	1.0	1.0	0.0	-1.0	-2.0

Lembrando que: $$p_n(x) = f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\cdots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
-1	1				
		0			
0	1		$-\frac{1}{2}$		
		-1		$\frac{1}{6}$	
1	0		0		$-\frac{1}{24}$
		-1		0	
2	-1		0		
		-1			
3	-2				

Algoritmo deve determinar os operadores diferenças divididas primeiro.