Tarea 1: Ejercicios 1 y 7

Luis Emilio Valencia Montaño, Yair Levi Castillo Reyes, Alec Daniel Torres Johnson

Ejercicio 1. Demuestra que el segundo problema de optimización para $\mathrm{Var}(\xi_2)$ tiene solución cuando el multplicador de lagrange λ_2 es eigenvalor de la matriz de covarianza de $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

El segundo problema es:

$$\max. \ Var(\xi_2) = b_2 \Sigma_{xx} b_2^t$$

$$s.t. \quad b_2 \cdot b_2^t = 1 \ , \quad b_1 \cdot b_2^t = 0$$

Definimos

$$S(b_2, \lambda_1, \lambda_2) = b_2 \Sigma_{xx} b_2^t - \lambda_1 (b_1 \cdot b_2^t) - \lambda_2 (b_2 b_2^t - 1)$$

$$\frac{\partial S(b_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial b_2} = 2 b_2 \Sigma_{xx} - \lambda_1 b_1 - 2 b_2 \lambda_2 = 0$$

multiplicando por b_2^t

$$2 b_2 \Sigma_{xx} b_2^t - \lambda_1 \cancel{b_1 b_2^t}^{\,0} - 2 b_2 \lambda_2 b_2^t = 0$$

$$2 b_2 \Sigma_{xx} b_2^t = 2 b_2 \lambda_2 b_2^t$$

Solo tiene solución si λ_2 es eigenvalor de Σ_{xx}. ∎

Ejercicio 7. Sea X un vector aleatorio en dimensión 4 de media μ y matriz de covarianza $\Sigma = (\sigma_{ij})$. Supongamos que $\sigma_{ii} = 1$ para todo i.

(1) Sea $0 < \rho < 1$. En la **Figura 1** se muestran dos gráficas, una de ellas presenta la proyección de variables sobre las dos primeros ejes principales. ¿Cuál es? Justifica tu respuesta.

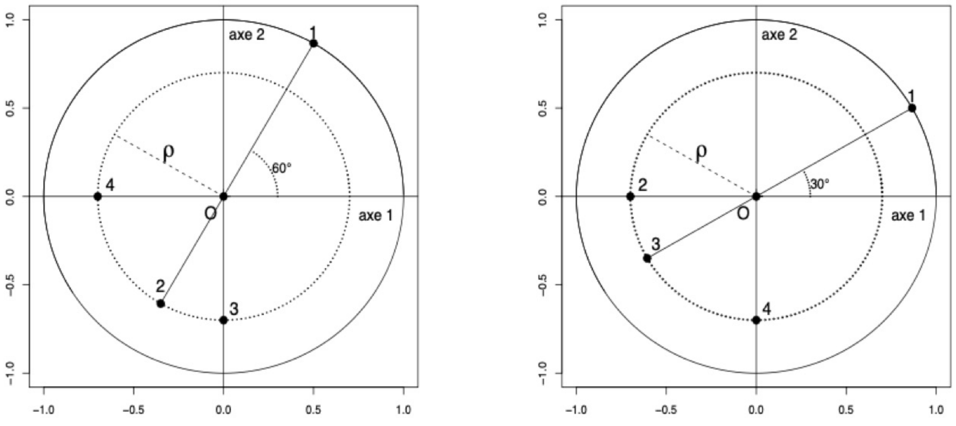

FIGURE 1.

(2) Interpreta las correlaciones existentes entre las variables y las componentes principales.

(3) Calcula la parte de la varianza total explicada por las dos primeras componentes principales.

$$I_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad D_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$
$$I_2 = \left(-\frac{1}{2}\rho, -\frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right) \qquad D_2 = (-\rho, 0)$$
$$I_3 = (0, -\rho) \qquad D_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\rho, -\frac{1}{2}\rho\right)$$
$$I_4 = (-\rho, 0) \qquad D_4 = (0, -\rho)$$

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{4} r_{ij}^2 s_{ii} = 0.5 + 0.5\rho^2 + \rho^2$$
$$\lambda_2 = \sum_{i=1}^{4} r_{ij}^2 s_{ii} = \frac{\sqrt{3}}{2} + p^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} p^2$$

Cámara de Weyl

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{4} r_{ij}^2 S_{ii} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\rho^2 + \rho^2 \qquad \lambda_1 = \sum_{i=1}^{4} r_{ij}^2 S_{ii} = \frac{3}{4} + \rho^2 + \frac{3}{4}\rho^2$$
$$\lambda_2 = \sum_{i=1}^{4} r_{ij}^2 S_{ii} = \frac{3}{4} + \rho^2 + \frac{3}{4}\rho^2 \qquad \lambda_2 = \sum_{i=1}^{4} r_{ij}^2 S_{ii} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\rho^2 + \rho^2$$

(1) El de la derecha, ya que sus eigenvalores deben estar en la cámara de Weyl, y los segundos eigenvalores (los de la derecha) se encuentran ordenados correctamente.

(2) El primer elemento tiene mayor correlación con la primera componente, y el segundo igual tiene correlación con el primer componente mientras que el cuarto elemento tiene correlación únicamente con el segundo componente.

(3) $$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{Tr(\Sigma_x)} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{4} = \frac{\frac{3}{4} + \rho^2 + \frac{3}{4}\rho^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\rho^2 + \rho^2}{4} = \frac{3\rho^2 + 1}{4}$$

//