- 程式解說
  - Infix to Postfix - 中序式後序式轉

    我們可以用兩種方法來達到此目標，一種是建立二元樹的方式，接著再用後序式走訪，即可將算式轉換成後序式，但此方法相較於直接做運算來說，過於複雜，因此我們會採用由**Edsger W. Dijkstra所設計的「調度場演算法」**。

    1. 由左至右走訪中序式
    2. 若遇到數字則直接輸出
    3. 當遇到“(”、“[”、“{”，push進入Stack
    4. 若遇到“)”、“]”、“}”，則將Stack內的運算子pop出來，直到遇到“(”、“[”、“{”
    5. 遇到運算子時，將Stack中的運算子做輸出，直到[1]·Stack最上面的運算子之優先權小於現在所走訪到的運算子或是[2]·Stack已為空時，再將自己push進入
    6. 重複1.~5.的步驟，直到走訪完畢
    7. 最後將Stack內的運算子全部pop出來

Operator	Precedence
^	3
*	2
/	2
+	1
-	1

運算子優先權

左邊的表格可以算是最基本的優先權，數字越大，代表優先權越大，但因為這裡加入了括號，因此要加以討論。

加入括號後，我們可以發現，當在Step.3時，括號的優先權要是最大的，擁有**最高的優先權**，可以直接進入Stack，但Step.5時，要push進入Stack時，只與堆疊內的運算子之優先權做比較。另一種說法也就是，若Stack最上方是括號，那麼就可以直接壓在括號上面，而這時括號則是**最低的優先權**。

但，上述的內容發生矛盾，因此我們要分開討論。

- Precedence 優先級 - ISP and ICP

```c
int ISP(char c){ // ISP -> In Stack Priority
    switch(c){
        case '^':
            return 3;
        case '*':
        case '/':
            return 2;
        case '+':
        case '-':
            return 1;
        case '(':
        case '[':
        case '{':
            return 0;
    }

    return -1;
}
```

```c
int ICP(char c){ // ICP -> Incoming Priority
    switch(c){
        case '(':
            return 6;
        case '[':
            return 5;
        case '{':
            return 4;
        case '^':
            return 3;
        case '*':
        case '/':
            return 2;
        case '+':
        case '-':
            return 1;
    }

    return -1;
}
```

經由上述的討論，我們發現會遇到兩種情況，一種是**已經在Stack裡**，而另一種是**正要進入Stack**，因此我們可以這兩種優先權的分級。

- In Stack Priority (ISP): 當“(”在裡面時，優先權最低，所有的運算子都可以push進Stack裡，壓在“(”上面

- Incoming Priority (ICP): 當“(”在外面時，優先權最高，可以push進堆疊壓在任何運算子上面

- Character Checker - 字元判斷

```cpp
bool isDigit(char c){
    if(c >= '0' && c <= '9')
        return true;
    else
        return false;
}

bool isOperator(char c){
    if(c == '+' || c == '-' || c == '*' || c == '/' || c == '^')
        return true;
    else
        return false;
}

bool isParentheses(char c){
    if(c == '(' || c == '[' || c == '{' || c == ')' || c == ']' || c == '}')
        return true;
    else
        return false;
}
```

  - bool isDigit(char c) => 確認此字元是不是數字
  - bool isOperator(char c) => 確認此字元是不是運算子
  - bool isParentheses(char c) => 確認此字元是不是括號

- Brackets Checker - 括號判斷

```cpp
bool checkBrackets(){
    if(ValidParentheses.size() > 1){ // check if there are more than one brackets
        char up = ValidParentheses.top(); ValidParentheses.pop();
        char dn = ValidParentheses.top(); ValidParentheses.pop();
        if((up - '0') > (dn - '0')){ // check if the up bracket is bigger than the down bracket
            return false;
        }
        else{
            ValidParentheses.push(dn);
            ValidParentheses.push(up);
        }
    }

    return true;
}
```

  - 判斷該中序式是不是符合大括號包中括號包小括號
  - up是對上面的括號，而dn是第二個，因此若up的ascii-code大於dn的ascii-code也就發生了較小括號包住了較大的括號，因此為錯誤，return false，若沒有發生則目前是合法的，因此再放入stack裡

- 基本運作及變數介紹

```cpp
int main(){
    string str;

    while(getline(cin, str)){
        stack <char> s;

        string ans = ""; // postfix
        string clear_str = ""; // infix

        int val = 0;
        bool isValid = true;

        int num_cnt = 0; // numbers of digits
        int op_cnt = 0; // numbers of operators

        for(int i=0; i<str.length(); i++){
            // scan the string...
        }

        // ...
    }
}
```

先做基本輸入，而我們這裡使用getline()，讓他可以接收包含空白字串

- stack <char> s => 存入運算子的堆疊

- string str => 輸入的中序式字串
- string clear_str => 篩選掉一些不需要的字元後，所存入的中序式字串

- int val => 如果是數字的話，將值暫時存入這裡
- bool isValid => 確認這個中序式是不是合法的

- int num_cnt => 紀錄有幾個數字
- int op_cnt => 紀錄有幾個運算子

- 篩選字元

```
while(getline(cin, str)){
        // ...

        for(int i=0; i<str.length(); i++){
            if(!isDigit(str[i]) && !isOperator(str[i]) && !isParentheses(str[i])){ // if str[i] is not a digit, operator, or parentheses
                continue;
            }

            if(!isDigit(str[i])){
                clear_str += str[i];
                clear_str += ' ';
            }

            if(!checkBrackets()){ // check brackets are valid
                isValid = false;
                break;
            }

            // ...
        }

        // ...
    }
```

我們將除了數字、運算子、括號等之外的字元做過濾，若不是數字先丟入clear_str，而若為數字則處理完後再放入clear_str裡面

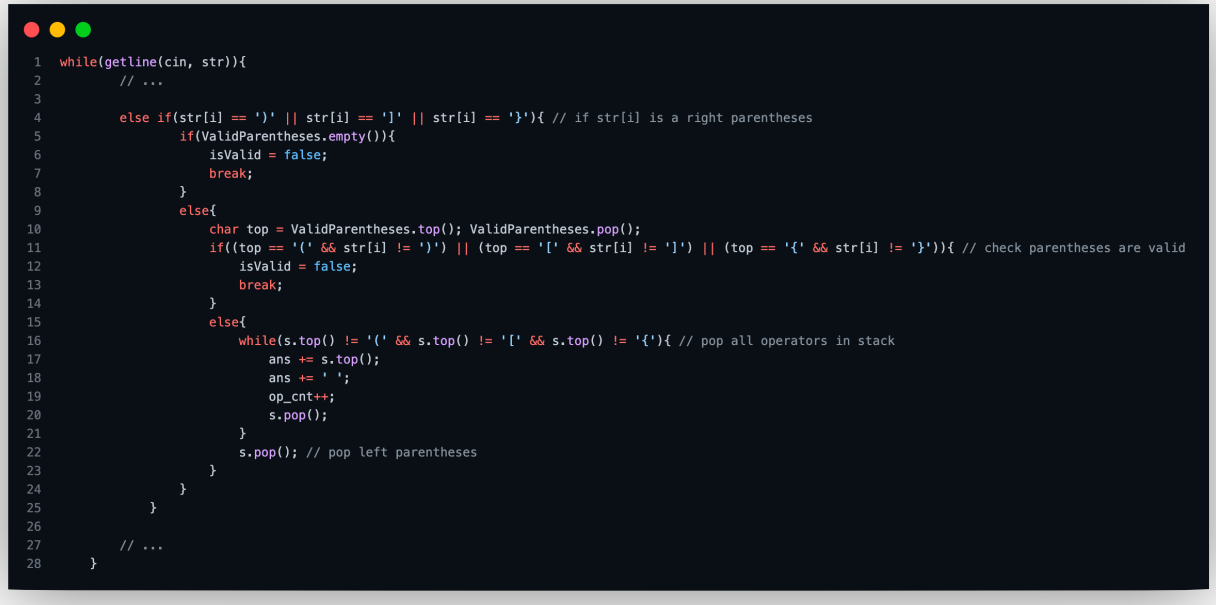
由於題目設定為“字串中夾帶有+-*/^0123456789()[]{}以外的符號直接輸出ERROR”，因此這裡已做更改

- 讀取數字

```
while(getline(cin, str)){
            // ...

            if(isDigit(str[i])){ // if str[i] is a digit
                val += (str[i] - '0');

                int index = i+1;
                while(index != str.length() && isDigit(str[index])){
                    val = val * 10 + (str[index] - '0');
                    index++;
                }

                if(index != str.length()){
                    if(str[index] == '(' || str[index] == '[' || str[index] == '{'){
                        isValid = false;
                        break;
                    }
                }

                clear_str += to_string(val);
                clear_str += ' ';

                num_cnt++;
                ans += to_string(val);
                ans += ' ';
                val = 0;
                i = index - 1;
            }
            else if ...

        }
```

若str[i]為數字，我們利用index和迴圈直將將這個數字一次取出來，並放入clear_str，最後若str[index]為括號，那則為不合法，直接將isValid做記號，跳出迴圈，若不是則直接存入ans並且加上空格加上區隔，進入下個迭代

- 若為右括號



```
while(getline(cin, str)){
        // ...

        else if(str[i] == ')' || str[i] == ']' || str[i] == '}'){ // if str[i] is a right parentheses
                if(ValidParentheses.empty()){
                    isValid = false;
                    break;
                }
                else{
                    char top = ValidParentheses.top(); ValidParentheses.pop();
                    if((top == '(' && str[i] != ')') || (top == '[' && str[i] != ']') || (top == '{' && str[i] != '}')){ // check parentheses are valid
                        isValid = false;
                        break;
                    }
                    else{
                        while(s.top() != '(' && s.top() != '[' && s.top() != '{'){ // pop all operators in stack
                            ans += s.top();
                            ans += ' ';
                            op_cnt++;
                            s.pop();
                        }
                        s.pop(); // pop left parentheses
                    }
                }
            }

        // ...
    }
```

若是為右括號的情況，我們先看ValidParentheses是不是空的，若是空的或是括號沒有對應到，代表這個中序式不合法，因此將isValid做記號，跳出迴圈，其他情況代表合法，將Stack內的運算子pop出來，直到出現左括號，最後再將左括號pop出來

- 若為左括號或運算子 - Case1: stack is empty or ICP > ISP

```
while(getline(cin, str)){
        // ...

        else if(s.empty() || (ICP(str[i]) > ISP(s.top()))){ // if str[i] is a left parentheses or operator with higher precedence
                s.push(str[i]);

                if(str[i] == '(' || str[i] == '[' || str[i] == '{'){ // if str[i] is a left parentheses
                    ValidParentheses.push(str[i]);
                }
            }

        // ...
    }
```

當現在的字元為左括號或是運算子時，會出現現在字元的優先權大於堆疊最上面的元素的優先權或者其他，而我這裡先討論前者，當大於時直接將此字元push進堆疊，而若這個字元是左括號時則也push進入ValidParentheses裡

- 若為左括號或運算子 - Case2: ICP <= ISP

```
while(getline(cin, str)){
        // ...

        else{
            while(!s.empty() && (ICP(str[i]) <= ISP(s.top()))){ // if str[i] is a operator with lower precedence
                ans += s.top();
                ans += ' ';
                op_cnt++;
                s.pop();
            }
            s.push(str[i]); // push str[i] to stack

            if(str[i] == '(' || str[i] == '[' || str[i] == '{'){
                ValidParentheses.push(str[i]);
            }
        }

        // ...
    }
```

繼上一個case後，現在來討論另個案例，若於小於等於時，我們則是將堆疊裡的運算子先pop出來，直到堆疊裡的運算子之優先權小於現在運算子的優先權，最後在將目前的運算子push進堆疊裡，而若這個字元是左括號時則也push進入ValidParentheses裡

- 最後輸出和後序式運算

```
while(getline(cin, str)){
        // ...

        while(!s.empty()){ // pop all operators in stack
            ans += s.top();
            ans += ' ';
            op_cnt++;
            s.pop();
        }

        if(isValid && checkBrackets() && ValidParentheses.empty() && num_cnt == op_cnt + 1){ // check infix is valid
            cout << "Infix: " << clear_str << endl;
            postfix_operator(ans); // calculate postfix
            // output_oj(ans);
            // cout << ans << endl;
        }
        else
            cout << "ERROR" << endl;

        while(!ValidParentheses.empty()){ // clear ValidParentheses
            ValidParentheses.pop();
        }


        cout << endl;
    }
```

由左至右走訪完畢後，我們將還在堆疊裡面的運算子pop出來，接者經由確認此中序式是合法的後，輸出經由過濾過的中序式，最後進入後序式運算，結束後再將ValidParentheses做清空

輸出的部分已根據測資和題目規定做更改

- 後序式運算

```
1  void postfix_operator(string str){
2      stack <int> nums; // store the numbers
3
4      for(int i=0; i<str.length(); i++){
5          if(isDigit(str[i])){ // if the character is a number
6              int val = 0;
7              while(isDigit(str[i])){
8                  val = val * 10 + (str[i] - '0');
9                  i++;
10             }
11
12             nums.push(val);
13         }
14         else if(str[i] != ' '){ // if the character is an operator
15             int b = nums.top(); nums.pop(); // pop the top two numbers
16             int a = nums.top(); nums.pop();
17
18             switch(str[i]){
19                 case '+':
20                     nums.push(a + b);
21                     break;
22                 case '-':
23                     nums.push(a - b);
24                     break;
25                 case '*':
26                     nums.push(a * b);
27                     break;
28                 case '/':
29                     nums.push(a / b);
30                     break;
31                 case '^':
32                     nums.push(pow(a, b));
33                     break;
34             }
35         }
36     }
37
38     cout << "Postfix: " << str << endl;
39     cout << "Ans: " << nums.top() << endl;
40 }
```

L2: 先設立一個堆疊，用來存放數字

L4: 由左至右走訪後序式

L5: 若是數字，則如同main裡面的做法一樣，將數字取過來，並push進堆疊

L14: 若不是數字也不是空格，那必定是運算子，進行運算

L15: 將最上面的數字取出，設為b，並做pop

L16: 將最上面的數字取出，設為a，並做pop

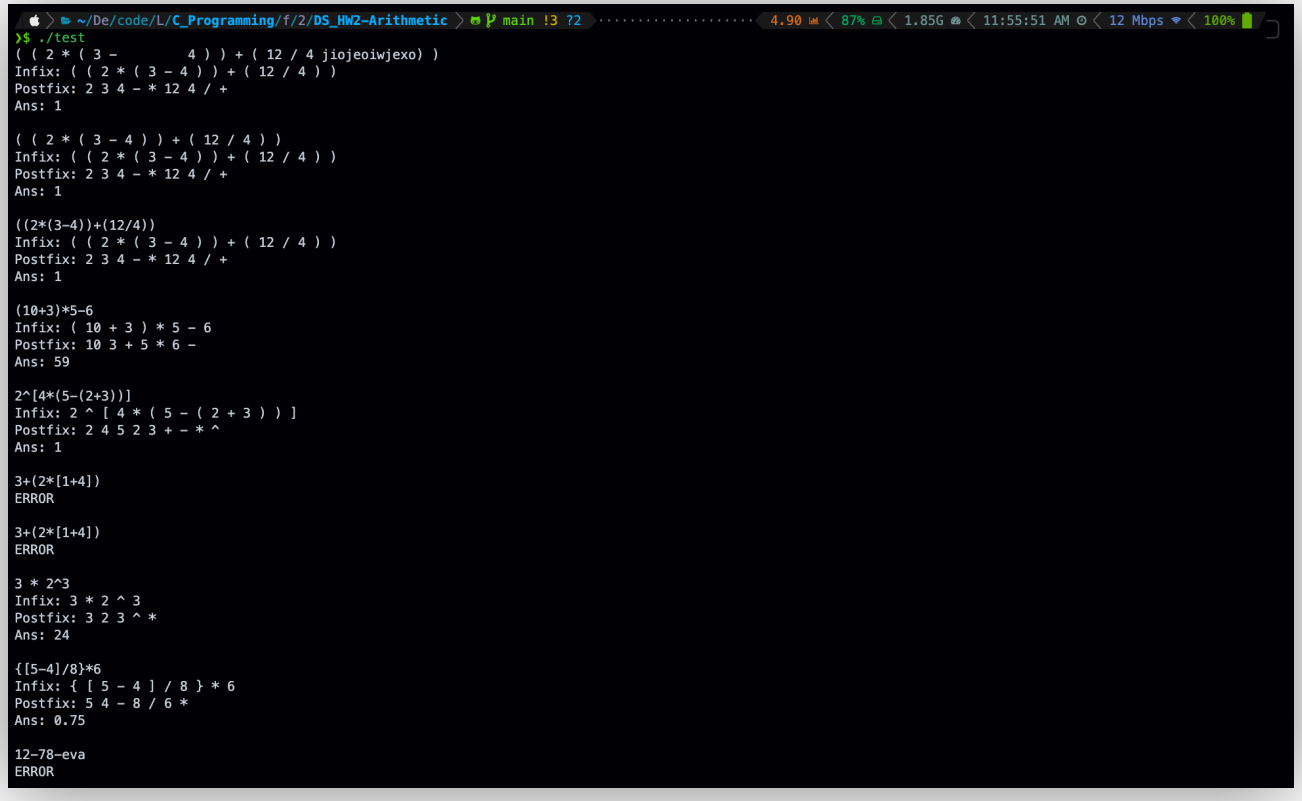
L18: 進入運算，依照運算子，最後在將答案push進堆疊裡

L38: 輸出後序式字串

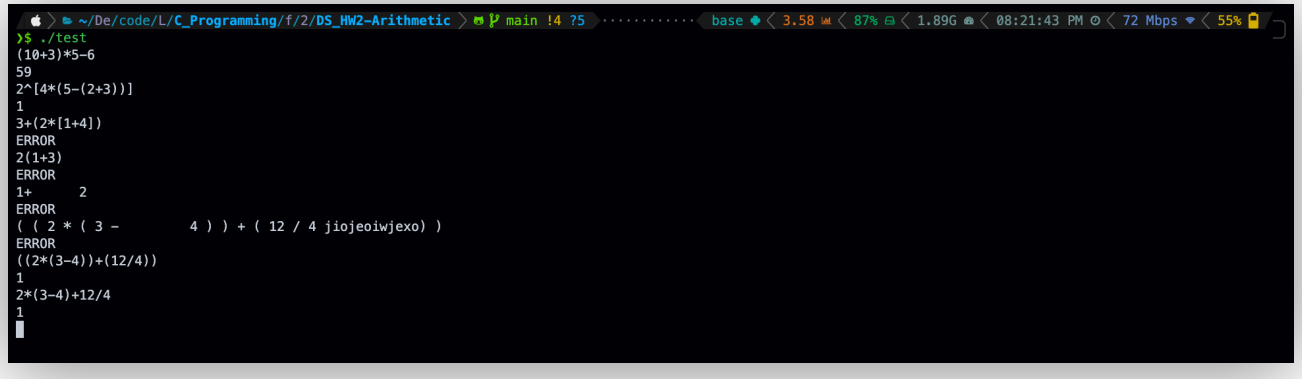
L39: 取出top，輸出運算結果，回到主函式

輸出結果已根據題目做更改

- 程式輸出結果



- 我的版本可以過濾掉不相干的字元，並且做輸出中序式和後序式，最後再做運算



- 這是題目所要求的版本

- 心得

  一開始拿到這個題目的時候，我以為會像之前寫的那種，有小數、奇怪字元、空格，要做過濾和在處理上要修改一下，而寫完後和朋友的對照一下才發現，原來沒那麼複雜，只是做基本的轉換並做後序運算，但思考的過程的確很有趣，要考慮各種奇怪的特例，並且做不斷不斷地修正，當然，這次也要教導朋友寫作業，但透過教學和討論，也看到不同的思考與解法，而透過報告也可以使我們更明白，自己的程式在做什麼，並了解哪些可以再做優化，這個作業使我受益良多。

- 補充說明

  iLearn上繳交的程式碼是為了符合題目的目標所改的，而報告上的輸出則是放在GitHub上，歡迎助教與老師參閱，謝謝。

  URL: https://github.com/alecwu44743/c_learning/blob/main/fcu_cs/22fall_Data_Structures/DS_HW2-Arithmetic/Infix2Postfix_Arithmetic.cpp