- البندول المركب:

إذا وقع مركز الثقل رأسياً تحت محور التعليق O فإن الجسم يكون في حالة سكون، أما إذا أزيح إزاحة صغيرة θ عن الوضع الرأسي فإن الجسم يتذبذب.

فإذا كانت M هي كتلة الجسم، h هي المسافة بين محور التعليق ومركز الثقل، g عجلة الجاذبية الأرضية فإن عزم الازدواج:

$$C = Mgh\sin\theta = Mgh\theta$$

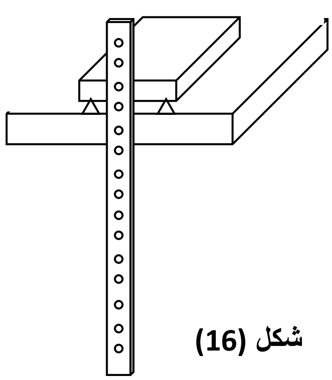
على اعتبار أن θ إزاحة صغيرة بحيث يكون:

$$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$$

$$\therefore\ I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh\theta$$

وهذه تمثل حركة توافقية بسيطة ويكون زمن الذبذبة الواحدة:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{Mgh}} \qquad (18)$$



شكل (16)

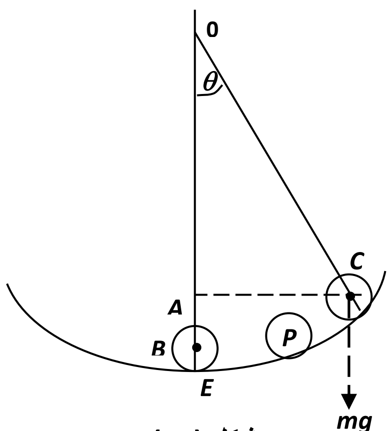
حيث I_O هو عزم القصور الذاتي للجسم حول محور الدوران O ، فإذا كان I_C هو عزم القصور الذاتي للجسم حول محور يوازي المحور السابق ويمر بمركز الثقل:

$$\therefore\ I_O = I_C + Mh^2$$

$$= MK^2 + Mh^2$$

فإذا رسمنا العلاقة بين $h\tau^2$, h^2 نجدها خط مستقيم (شكل 17) يقطع محور h^2 في جزء يعطي K^2. أما ميل الخط فهو $\frac{4\pi^2}{g}$ ومنه يمكن إيجاد عجلة الجاذبية الأرضية g.

17- إيجاد عجلة الجاذبية الأرضية بطريقة تدحرج كرة صغيرة فوق مرآة مقعرة:



شكل (19)

توضع المرآة المقعرة أفقياً فتحتها إلى أعلى بحيث يمكن أن تتدحرج فوقها كرة صغيرة من الصلب وتتذبذب في مستوى رأسي بأسفل نقطة. ثم يحسب زمن الذبذبة τ. فإذا كانت R هي نصف قطر تكور المرآة (الوجه الذي تتدحرج فوقه الكرة) ويمكن قياس ذلك بأسفيرومتر، m كتلة الكرة المعدنية.

r نصف قطرها، g عجلة الجاذبية الأرضية فإنه في حالة إذا كانت الإزاحة BC صغيرة بالنسبة إلى R وإذا وضعت الكرة عند C ثم تركت تتدحرج فإن:

طاقة الوضع للكرة عند C = $mg.\overline{AB}$

ولكن:

$$AB = OB - OA = (R - r) - (R - r)\cos\theta$$

$$= (R - r)(1 - \cos\theta)$$

$\therefore$

حيث v_m هي السرعة الخطية العظمى لمركز ثقل الكرة، ω_m السرعة الزاوية العظمى للدوران، I عزم القصور الذاتي للكرة حول محور ما بمركز ثقلها وعمودياً على مستوى الرسم.

$\therefore$ طاقة الحركة عند B

$$= \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_m^2}{r^2}$$

وعند أي نقطة متوسطة P تبعد x عن B على قوس الحركة فإن:

طاقة الوضع + طاقة الحركة = ثابت

$$\therefore \ \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{I}{r^2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} mg \frac{x^2}{(R-r)} = \text{const.}$$

حيث $\dot{x}$ هي السرعة عند النقطة P في اتجاه القوس. وبالتفاضل:

$$\therefore \quad m\dot{x}\ddot{x} + \frac{I}{r^2} \dot{x}\ddot{x} + \frac{mg}{(R-r)} x\dot{x} = 0$$

بالقسمة على $\dot{x}$ نجد أن:

$$\ddot{x} = -\frac{mg}{(R-r)\left(m + \frac{I}{r^2}\right)} x$$

وهذه معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري:

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{mg}{(R-r)\left(m+\dfrac{I}{r^2}\right)}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{(R-r)\left(m+\dfrac{I}{r^2}\right)}{mg}}$$

ولكن:

$$I = \frac{5}{2}mr^2$$

$$\therefore\ \tau = 2\pi\sqrt{\frac{(R-r)\dfrac{7}{5}}{g}} \qquad (20)$$

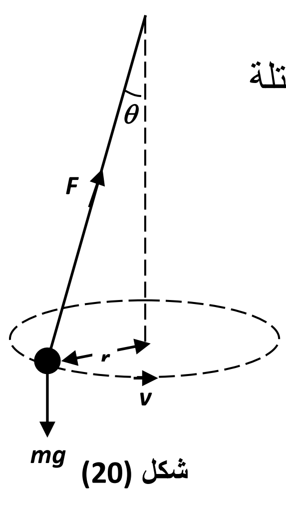
ومن هذه المعادلة يمكن تعيين g. ولا تعتبر هذه الطريقة من الطرق الدقيقة في قياس عجلة الجاذبية الأرضية.

18- البندول المخروطى:

إذا تحرك البندول البسيط على شكل مخروط بحيث تتحرك الكتلة m المعلقة في دائرة أفقية نصف قطرها r (شكل 19) فإن:

$$r = l \sin\theta$$

وإذا كانت v هي السرعة المنتظمة للكتلة فإن:



شكل (20)

القوة الطاردة المركزية = $\frac{mv^2}{r}$ في الاتجاه الأفقي، وإذا كانت F هي الشد في الخيط فإن:

مركبة قوة الشد في الاتجاه الأفقي $= F \sin\theta$ في حالة الاتزان الأفقي:

$$F \sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

وفي حالة الاتزان الرأسي:

$$F \cos\theta = mg$$

وبقسمة المعادلتين:

$$\therefore \ \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\therefore \ v = \sqrt{gr\tan\theta} = \sin\theta\sqrt{\frac{gl}{\cos\theta}}$$

ولكن زمن الذبذبة:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\frac{l\sin\theta}{\sin\theta\sqrt{\frac{gl}{\cos\theta}}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}$$