PRÁCTICA 4: NOTAS AUXILIARES PARA SU CORRECTO DESARROLLO E IMPLEMENTACIÓN

La práctica tiene por objetivo el poder caracterizar el grado de caos (desorden, incertidumbre) que la evolución de los autómatas celular unidimensionales genera; para ello, utilizaremos tres medidas que permitan caracterizar ese desorden: distancia de Hamming, entropía espacial de configuración y entropía temporal celular.

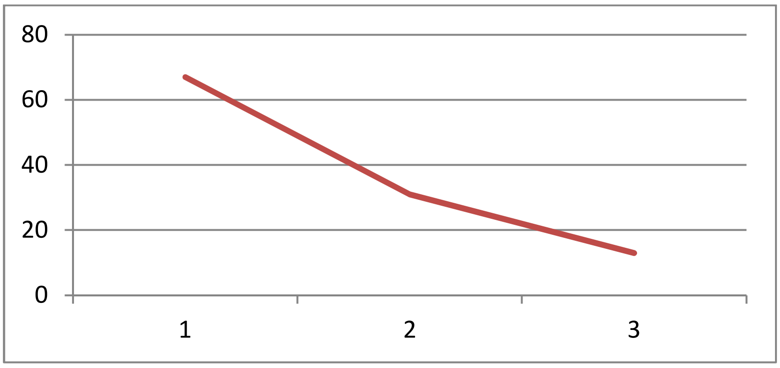
DISTANCIA DE HAMMING

Definición: dadas dos configuraciones de un autómata celular C_1, C_2, la distancia de Hamming interconfiguración $d_H(C_1, C_2)$ se define como el número de dígitos (células) en que varían. Sea consciente de d_H cumple con las tres propiedades que definen matemáticamente una distancia (repáselas), y que por tanto el espacio de configuraciones de un autómata celular, junto con d_H, adquieren estructuras de espacio métrico.

Ejemplo: dadas dos configuraciones de un autómata celular binario 0001 y 1101, su distancia de Hamming es 2.

¿Qué debe hacer vuestra práctica 4 con la distancia de Hamming? El programa efectuará la simulación del autómata celular a partir de su configuración inicial (lo que ya está implementado en la práctica 3), irá calculando la distancia de Hamming interconfiguración, y construyendo la curva de distancias, en función del número de generación.

Ejemplo: sean cuatro configuraciones C_1, C_2, C_3, C_4 de un autómata celular con 100 células, cada una sucesora de la anterior, y obtenida de ella aplicando la función de transición (en nuestro caso, codificada numéricamente). Tras calcular las distancias de Hamming interconfiguración, se encuentra que $d_H(C_1, C_2) = 67$, $d_H(C_2, C_3) = 31$, $d_H(C_3, C_4) = 13$. La curva de distancia de Hamming es:



¿Cómo se interpreta esto? Autómatas celulares con curvas de distancia de Hamming altas (desde un punto de vista relativo, dado un número de células concreto) serán en principio mejores desde el punto de vista de la incertidumbre que su evolución en el tiempo genera.

ENTROPÍA

Definición (fuente de memoria nula): Una fuente de memoria nula es un par $F = (\Omega, \mu_\Omega)$ donde Ω es un alfabeto finito de símbolos $\{s_1, s_{2,}, \ldots, s_n\}$ y $\mu_\Omega: \Omega \to [0, 1]$ es una distribución de probabilidad, donde $\mu_\Omega(s_i)$ es la probabilidad del símbolo s_i.

Informalmente, una fuente de memoria nula puede imaginarse como una caja negra que emite al exterior símbolos del alfabeto al exterior, que un observador recibe. El observador desconoce qué símbolo aparecerá en el instante siguiente.

Objetivo: determinar numéricamente el grado de incertidumbre del observador acerca del siguiente símbolo emitido por la fuente F. O dicho de otra forma (que es equivalente) cuánta información le aporta al observador la aparición de un símbolo. Todo esto se mide mediante el concepto de entropía.

Definición (entropía de información): dada una fuente de memoria nula X, su entropía viene definida por la siguiente ecuación:

$$\mathrm{H}(X) = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(x_i) \log_b \mathrm{P}(x_i)$$

En ella, $P(x_i)$ es la probabilidad del i-ésimo símbolo del alfabeto de la fuente. La base logarítmica se suele escoger igual a 2, a 10 ó a e, si bien la más frecuente es la base 2.

Ejemplo 1: Dada una fuente de memoria nula $F = (\{0,1\}, \mu_\Omega)$ donde $\mu_\Omega(0) = 0.5$ y $\mu_\Omega(1) = 0.5$, la entropía de la fuente es: $H(F) = -(\mu_\Omega(0)\log_2 \mu_\Omega(0) + \mu_\Omega(1)\log_2 \mu_\Omega(1)) = 1$

Interpretación: la incertidumbre del observador es máxima (entropía igual a 1, cada símbolo emitido por la fuente le aporta un bit de información) ya que todos los símbolos son equiprobables.

Ejemplo 2: Dada una fuente de memoria nula $F = (\{0,1\}, \mu_\Omega)$ donde $\mu_\Omega(0) = 0.7$ y $\mu_\Omega(1) = 0.3$, la entropía de la fuente es:

$$H(F) = -(\mu_\Omega(0)\log_2 \mu_\Omega(0) + \mu_\Omega(1)\log_2 \mu_\Omega(1)) = 0.81$$

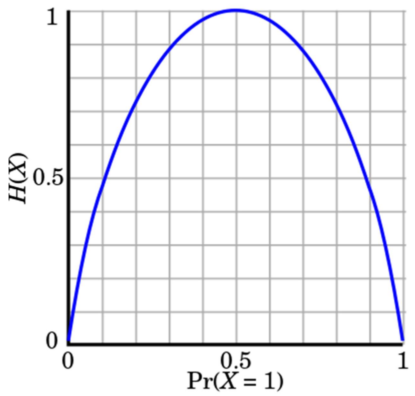
Interpretación: la incertidumbre del observador es menor que antes (entropía igual a 0.81, y cada símbolo aporta menos de un bit de información) ya que un símbolo es mucho más probable que otro.

Ejemplo 3: Dada una fuente de memoria nula $F = (\{0,1\}, \mu_\Omega)$ donde $\mu_\Omega(0) = 0.95$ y $\mu_\Omega(1) = 0.05$, la entropía de la fuente es: $H(F) = -(\mu_\Omega(0)\log_2 \mu_\Omega(0) + \mu_\Omega(1)\log_2 \mu_\Omega(1)) = 0.29$

Interpretación: la incertidumbre del observador es muy baja (entropía igual a 0.29, y cada símbolo aporta muy poca información) ya que un símbolo es mucho más probable que el otro.

Nota: hay una calculadora de entropía disponible on-line en https://planetcalc.com/2476/

Gráfica: variación de la entropía para un alfabeto con dos símbolos; en ordenadas, la probabilidad P(X) de uno de los símbolos en orden creciente (la del otro símbolo sería 1-P(X)):



Vemos como la entropía es máxima cuando ambos símbolos son equiprobables.

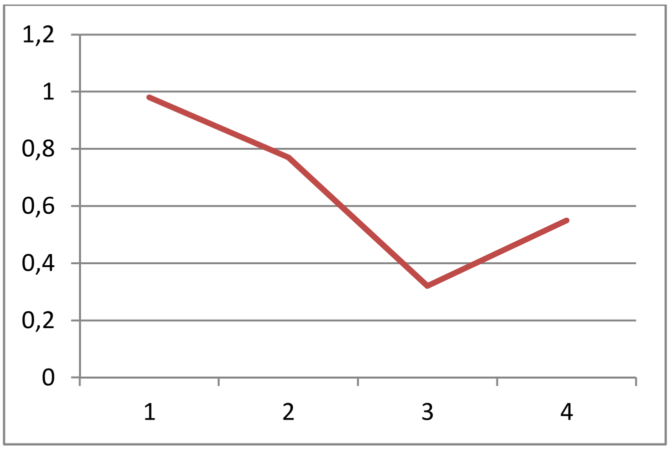
APLICACIÓN DE LA ENTROPÍA SOBRE AUTÓMATAS CELULARES UNIDIMENSIONALES

Veamos cómo aplicar esto para medir el grado de desorden (caos, incertidumbre) en un autómata celular unidimensional:

Entropía Espacial de Configuración: dada una configuración de un autómata celular, que no es más que un array finito de n células que toman valores en el espacio de estados, es posible extraer una distribución de probabilidad sin más que contar el número de células que hay en cada estado, y dividir por n. A partir de esta distribución, el cálculo de la entropía de la configuración es inmediato.

Ejemplo: Dada la configuración C_1 de un autómata celular binario 1101100100 vemos que $\mu_\Omega(0) = \mu_\Omega(0) = \frac{5}{10} = 0.5$, de manera que la entropía espacial de la configuración es $H(C_0) = 1$

Curva de Entropía Espacial: Sean ahora cuatro configuraciones (cada una sucesora de la anterior, y obtenida por aplicación de la función de transición) de un autómata celular unidimensional C_1, C_2, C_3, C_4 con entropías espaciales computadas según el Ejemplo anterior, e iguales a 0.98, 0.77, 0.32, 0.55. La curva de entropía es:



Interpretación: En un autómata celular que conserve (o aumente) el grado de desorden presente en la configuración inicial (aleatoria) la curva será plana y estará cerca del límite superior que es 1.

Son los autómatas que nos interesan. Un autómata donde la curva es descendente hacia valores de entropía pequeños, no nos interesará, ya que conserva (genera) incertidumbre.

¿Qué debe hacer vuestra práctica 4 con la entropía espacial? Exactamente el proceso descrito en este apartado. Ir calculando configuraciones de un autómata celular elegido por el usuario, calculando sus entropías espaciales, y construyendo la curva de entropía espacial.

Entropía Temporal Celular: sea ahora un autómata celular binario, del que computamos n configuraciones (o n generaciones temporales) dadas por $C_1, C_2, \ldots, C_n$, y consideremos los estados adoptados por una célula concreta a_i. Resulta evidente que esos n estados forman una sucesión de bits, de la que nuevamente podemos extraer una distribución de probabilidad, y una entropía. Esa entropía $H(a_i)$ es la entropía espacial de la célula a_i.

Ejemplo: Sea la siguiente secuencia de configuraciones de un autómata celular binario:

Generación	a_0	a_1	a_2	a_3
1	0	0	1	1
2	1	0	1	0
3	1	1	1	1
4	1	1	1	0

Si ahora computamos la entropía temporal celular de a_1, vemos que $H(a_1) = 1$; si hacemos lo propio para a_2, resulta que $H(a_2) = 0$.

¿Qué debe hacer vuestra práctica 4 con la entropía temporal celular? El usuario debe poder escoger una célula concreta del array, tras lo cual el programa computará y mostrará su entropía temporal.