Analisi Matematica

Alessandro Monticelli

A.A. 2021/2022

Contents

Introduzione

Appunti di Analisi matematica - corso di Ingegneria e Scienze Informatiche.

1 Insiemi

1.1 Definizione

Un insieme è una collezione di elementi. Per ogni elemento si può dire se esso appartiene all'insieme, o no.

Notazioni: Un **insieme** si esprime con una **lettera maiuscola** {A,B,C,...}, un **elemento** si esprime con una **lettera minuscola**{a,b,c,...}.

1.2 Concetti di base e operatori

1.2.1 Inclusione

$$A \subseteq B$$

Tutti gli elementi di A appartengono a B

Esempio:

$$A = \{2, 5, 6, 7\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$A \subseteq B$$

Il sottoinsieme si dice *improprio* se A coincide con B, altrimenti si dice *proprio*.

1.2.2 Unione

$$A \cup B$$

Tutti gli elementi del primo insieme e tutti gli elementi del secondo

Definizione:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

1.2.3 Intersezione

$$A \cap B$$

Tutti gli elementi comuni al primo e al secondo insieme

Definizione:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

1.2.4 Differenza

$$A \setminus B$$

Elementi appartenenti **solo** ad A e non a B

Definizione:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Osservazione:

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

1.2.5 Differenza Simmetrica

$$A \triangle B$$

Definizione:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Osservazione:

$$A \triangle B = B \triangle A$$

1.2.6 Prodotto Cartesiano

$$A \times B$$

Definizione:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Osservazione:

$$(a, b) \neq (b, a) \Rightarrow A \times B \neq B \times A$$

1.2.7 Insieme Vuoto

Notazione:

$$A = \oslash$$

2 Proposizioni

2.1 Definizione

Una proposizione è un'affermazione che è falsa o vera e che può implicare altre affermazioni. Con p, q proposizioni:

$$p \Rightarrow q$$
$$\Downarrow$$
$$p \; implica \; q$$

Se p *implica* q e q *implica* p si dicono *equivalenti*

$$p \iff q$$

2.2 Quantificatori

- $\forall$ - per ogni
- $\exists$ - esiste
- $\exists!$ - esiste ed è unico
- $\nexists$ - non esiste

2.3 Definizioni, teoremi ed enunciati

Definizione:
Descrizione univoca di un oggetto.

Teorema:
Affermazione che coinvolge oggetti già definiti

Enunciato:
Un affermazione da dimostrare composta da un'*ipotesi* e da una *tesi*.

Dimostrazione:
Una dimostrazione è l'insieme dei passaggi logici e di calcolo che verificano un enunciato.

2.4 Principio di induzione

Teorema

Sia $p(n)$ un insieme di proposizioni al variare di $n \ \in \ \mathbb{N}$.

Supponiamo che:

- $p(0)$ sia vera
- $\forall \ n \ \in \ \mathbb{N}, p(n)$ vera $\Rightarrow \ p(n \ + \ 1)$ vera.

Esempio

Dimostrare:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione per induzione:

$$p(1) \Rightarrow \frac{1(2)}{2} = 1 \Rightarrow vera \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ ? \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = 1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) =$$

$$= n+1(\frac{n}{2}+1) = n+1(\frac{n+2}{2}) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ \Rightarrow \ p(n+1) \ vera$$

La proposizione è verificata.

3 Collezioni

3.1 Insiemi Numerici

- $\mathbb{N}$ = Numeri Naturali = $\{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$
- $\mathbb{Z}$ = Numeri Interi = $\{-2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$
- $\mathbb{Q}$ = Numeri Razionali = $\{q = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0\}$
- $\mathbb{R}$ = Numeri Reali = $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ = Numeri Razionali $\cup$ Numeri Irrazionali[1]

Teorema

$$q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q^2 \neq 2$$

Dimostrazione

Supponiamo **per assurdo** che $q^2 = 2$. Per ipotesi $q = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0$ e possiamo supporre che $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

$$\begin{cases} q^2 = 2 \\ q = \frac{m}{n} \end{cases} \iff m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ è pari} \Rightarrow m \text{ è pari} \Rightarrow m = 2p, p \in \mathbb{Z} \text{ è pari} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \text{ è pari} \Rightarrow m \text{ ed } n \text{ hanno il fattore 2 in comune.}$$

Assurdo perchè per ipotesi $\frac{m}{n}$ era ridotta ai minimi termini.

3.2 Assiomi di $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è un campo, cioè un insieme su cui sono definite due operazioni ($+$ e $\cdot$) che gode delle seguenti proprietà:

- **Proprietà associativa**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

[1](Decimali illimitati non periodici come $\sqrt{2}, \pi, e$)

- **Proprietà commutiativa**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$
$$x + y = y + x$$
$$x \cdot y = y \cdot x$$

- **Proprietà distributiva**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

- $\exists$ **Elemento neutro**

$$0 + x = x \forall x \in \mathbb{R}$$
$$1 \cdot x = x \forall x \in \mathbb{R}$$

- $\exists$ **Opposto**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y = 0$$

- $\exists$ **Reciproco o inverso**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x \cdot y = 1$$

- **Assioma d'ordine**
  È sempre possibile dire se un numero è maggiore o minore di un altro.

  $\mathbb{R}$ è un campo sempre ordinato

- **Assioma di completezza**

  Siano A e B due sottinsiemi separati (cioè $\forall a \in A, \forall b \in b \Rightarrow a \leq b$), allora:

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid a \leq c \leq b \; \forall \; a \in A, b \in B$$

  In sostanza, tra due numeri reali esistono infiniti numeri reali.

3.3 Cardinalità

Contare gli elementi di un insieme significa stabilire una corrispondenza iniettica con un sottoinsieme di $\mathbb{N}$.

Esempio

$$A = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{3 elementi}$$

Se A ha infiniti elementi e può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$, A si dice **numerabile**

Esempio

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{n è pari}\}$$

A è equipotente a $\mathbb{N}$

$\mathbb{Q}$ è numerabile

$\mathbb{R}$ non è numerabile

3.4 Proprietà di densità

$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono **densi** su $\mathbb{R}$.

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$$
$$\exists\ c \in \mathbb{Q} \mid a \leq c \leq b$$

3.5 Notazioni

$\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\mathbb{R}_+^\star = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

3.6 Massimo e Minimo

Definizioni

3.6.1 Massimo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, un numero reale λ si dice **massimo** di A se:

$$\lambda \in A, \lambda \geq x \forall x \in A$$

3.6.2 Minimo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, un numero reale μ si dice **minimo** di A se:

$$\mu \in A, \mu \leq x \forall x \in A$$

Esempi

- $$A = \mathbb{R}_+$$
  $$\exists \ \min A = 0, \ \nexists \ \max A$$
- $$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$
  $$\exists \ \max A = 1, \ \nexists \ \min A$$
  infatti:
  $$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$
- $$A = \mathbb{R}_+^\star$$
  $$\nexists \ \min A, \nexists \ \max A$$
  Infatti se $x \in A$:
  $$\frac{x}{2} \in A, \ \frac{x}{2} < x \ \forall x \in A$$

3.7 Maggioranti e Minoranti

3.7.1 Maggiorante

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un **maggiorante** di A se:

$$\lambda \geq x \;\forall\; x \in A$$

3.7.2 Minorante

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, diciamo che $\mu \in \mathbb{R}$ è un **minorante** di A se:

$$\mu \leq x \;\forall\; x \in A$$

Definizione

Se A ammette un maggiorante allora si dice **superiormente limitato**, se ammette un minorante si dice **inferiormente limitato**. Se ammette entrambi si dice **limitato**.

Osservazione

Finito $\Rightarrow$ limitato, limitato $\neq$ finito

Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$

- Sia A sup. limitato $\Rightarrow$ l'insieme dei maggioranti ammette minimo
- Sia A inf. limitato $\Rightarrow$ l'insieme dei minoranti ammette massimo.

Osservazione

Se un insieme ammette massimo o minimo, esso è unico.

Definizione

Se A è sup. limitato chiamo **estremo superiore** di A (sup.A) il minimo dell'insieme dei maggioranti, e viceversa (inf.A). Se A non è sup. limitato, poniamo sup.$A = +\infty$ e analogamente $-\infty$ se non è inf. limitato.

Esempio

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$$
$$\inf A = \min A = 0 \sup A = 3, \; \nexists \; \max A$$

3.8 Intervalli di $\mathbb{R}$

- $(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\})$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Questi insiemi sono *intervalli* in quanto soddisfano la seguente proprietà:

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che A è un intervallo se

$$\forall\; c, d \in A, \forall\; h \in \mathbb{R} \mid c \leq h \leq d \Rightarrow h \in A$$

Esempi

- $(2, 3)$ è un intervallo
- $(2, 3) \cup (4, 5)$ non è un intervallo in quanto esso non comprende i valori compresi tra 3 e 4.

3.8.1 Punto interno di un intervallo

Definizione

Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, diciamo che c è un punto interno di I quando $c \in I$ ma c non è estremo, cioè $c \in I \setminus \{\inf I, \sup I\}$
$I = (a, b) = [a, b] \setminus \{a, b\}$ L'insieme dei punti interni si definisce $\mathring{I}$

3.8.2 Tipi di intervalli

- **Limitato** se sono presenti maggiorante e minorante
- **Aperto** se $I = \mathring{I}$
- **chiuso** $[a, b]$

3.9 Simmetria

Definizione

$A \subseteq \mathbb{R}$ è simmetrico rispetto all'origine se $x \in A \Rightarrow -x \in A$

Esempio

$(-a, a)$

3.10 Periodicità

Definizione

Sia $T \subseteq \mathbb{R}^{\star}_{+}$, sia $A \subseteq \mathbb{R}$ diciamo che A è $T-\mathit{periodico}$ se

$$\forall\ x \in A, \forall\ x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + kT \in A$$

4 Funzioni

4.1 Definizione

Siano A e B due insiemi, $A, B \neq \varnothing$, chiamiamo **funzione** f da A a B una legge che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento di B

$$\forall x \in A, \exists! y \in B \mid y = f(x)$$

$$f : \underbrace{A}_{\{Dominio\}} \to \underbrace{B}_{\{Codominio\}}$$

Esempio

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = 2x$$

oppure

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 2x$$

4.2 Grafico

Il grafico di una funzione è un sottoinsime del **prodotto cartesiano** tra A e B.

$$f : A \to B$$
$$Graf_f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$

4.3 Iniettività e Suriettività

Definizione

Diciamo che $f : A \to B$ è **suriettiva** se l'immagine (sottoinsime del codominio) coincide con il codominio

$$\forall\ y \in B, \exists\ x \in A \mid y = f(x)$$

$$f : A \underset{su}{\to} B$$

Definizione

Diciamo che $f : A \to B$ è **iniettiva** se:

$$\forall\ y \in\ f(A), \exists! x\ \in\ A \mid y = f(x)$$

$$f : A \underset{|-|}{\to} B$$

Definizione

Diciamo che $f : A \to B$ è **biunivoca** (o biiettiva o invertibile) se è sia suriettiva che iniettiva.

Esempio

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2$$

f non è suriettiva perchè non assume valori negativi, quindi non copre tutto il codominio $\mathbb{R}$. f non è iniettiva perchè per ogni $x > 0$ esiste più di una y

Definizione

Sia $f : A \to B$ biunivoca, chiamiamo funzione **inversa** di f (indicandola con f^{-1} la funzione:

$$f : B \to A)$$

$$\forall\ y\ \in\ B,\ f^{-1}(y) = y = f(x)$$

4.4 Composizione di funzioni

Definizione

Siano X, Y, Z, W insiemi $\neq \oslash$,

$$f : X \to Y, g : Z \to W \mid f(X) \subseteq Z$$

chiamiamo **funzione composta** $g \circ f$ la funzione:

$$g \circ f : X \to W, (g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall\ x \in X$$

Esempio

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(y) = y^2$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = (2x + 1)^2 = 4x^2+4x+1$$
$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y^2) = 2y^2 + 1$$
$$g \circ f \neq f \circ g$$

4.5 Funzione identità

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$$
$$Id(x) = x$$

Teorema

Siano $f : X \to Y, g : Z \to W$ invertibili, $Y = Z \Rightarrow g \circ f$ è invertibile e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4.6 Funzioni di una variabile reale

Sia $c \subseteq \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$

Esempi

- $f(x) = 2x + 1$
- $f(x) = |x|$
- $f(x) = sgn(x)$
- $f(x) = [x]$

Definizione

Sia $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che f è limitata se lo è $f(A)$.

$$\sup f = \sup_{\mathrm{A}} f(A)$$

Definizione

$f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$

- f ha un massimo se lo ha $f(A)$
- f ha un minimo se lo ha $f(A)$

$$\exists\ \bar{x} \in A \mid f(x) \leq \underbrace{f(\bar{x})}_{\max f} \forall\ x \in A$$

Esempio

$$f : (0, 1] \Rightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = 2x$$
$$f((0, 1]) = (0, 2]$$

$(0, 2]$ è limitato $\Rightarrow f$ è limitata

$$\inf_{(0,1]} f = 0 \qquad \sup_{(0,1]} f = 2$$

$$\max_{(0,1]} f = 2 \qquad \nexists \min_{(0,1]} f = 2$$

4.7 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione

$f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$

Diciamo che f è **crescente** ($f \nearrow$) se:

$$\forall x_1, x_2, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1 \leq f(x_2))$$

Definizione

$f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$

Diciamo che f è **decrescente** ($f \searrow$) se:

$$\forall x_1, x_2, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1 \geq f(x_2))$$

Definizione

f è strettamente crescente o decrescente se valgono le disuguaglianze strette.

Esempio

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = mx + q$
Verifico se e quando $f \nearrow$
$x_1, x_2 \in \mathbb{R} \mid x_1 \le x_2$
$f(x_1 = mx_1 + q)$
$f(x_2 = mx_2 + q)$

$f(x_1) \le f(x_2) \iff mx_1 + \cancel{q} \le mx_2 + \cancel{q}$
$\iff m(\underbrace{x_1 + x_2}_{\le 0}) \le 0$
$\iff m \ge 0$

$$\Rightarrow f(x) = mx + q \text{ è } \begin{cases} \nearrow & \text{se } m \ge 0 \\ \searrow & \text{se } m < 0 \end{cases}$$

Monotonia

Definizione

Una funzione è **monotona** se è sempre crescente o sempre decrescente.

Teorema

Sia $f : A \to \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$

1. Se f è strettamente monotona $\Rightarrow f$ è iniettiva $\Rightarrow f : A \to f(A)$ è invertibile.
2. $f^{-1} : f(A) \to A$ è strettamente monotona con la stessa monotonia di f.

Dimostrazione

1. Assumo f strettamente crescente e voglio dimostrare che f è iniettiva.
   Siano:
   - $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
   - $x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
2. Devo dimostrare che $f^{-1} \nearrow$.
   $f^{-1} : f(A) \to A$
   Siano $z_1, z_2 \in f(A)$ con $z_1 < z_2$,
   devo dimostrare che $f^{-1}(z_1) < f^{-1}(z_2)$.
   Supponiamo per assurdo che: $f^{-1}(z_1) \ge f^{-1}(z_2)$, ma $z_1 = f(f^{-1}(z_1))$

Quindi:
$f(f^{-1}(z_1)) \geq f(f^{-1}(z_2)) \Rightarrow z_1 \geq z_2 \Rightarrow$ Assurdo (per ipotesi $z_1 < z_2$).

4.8 Simmetria di una funzione

Definizione

Sia A **simmetrico** rispetto all'origine, sia $f : A \to \mathbb{R}$, diciamo che:

- f è **pari** se $f(x) = f(-x)$
- f è **dispari** se $f(x) = -f(x)$

4.9 Periodicità di una funzione

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ **periodico**, sia $f : A \to \mathbb{R}$, diciamo che f è $T-periodica$ se

$$\forall\ x \in A,\ f(x) = f(x + kT) \forall\ k \in \mathbb{Z}$$

4.10 Teorema de L' Hopital

Sia I un intervallo o un intervallo forato di $\mathbb{R}$, sia $c \in [inf_I, sup_I]$, $f, g : I \to \mathbb{R}$, derivabili in $I \backslash \{c\}$ Supponiamo g e g' siano diversi da 0 in $I \backslash \{c\}$.
Se

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$$

e se

$$\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Allora

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$