Analisi Matematica

Alessandro Monticelli

A.A. 2021/2022

Contents

Introduzione

Appunti di Analisi matematica - corso di Ingegneria e Scienze Informatiche.

1 Insiemi

1.1 Definizione

Un insieme è una collezione di elementi. Per ogni elemento si può dire se esso appartiene all'insieme, o no.

Notazioni: Un **insieme** si esprime con una **lettera maiuscola** {A,B,C,...}, un **elemento** si esprime con una **lettera minuscola**{a,b,c,...}.

1.2 Concetti di base e operatori

1.2.1 Inclusione

$$A \subseteq B$$

Tutti gli elementi di A appartengono a B

Esempio:

$$A = \{2, 5, 6, 7\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$A \subseteq B$$

Il sottoinsieme si dice *improprio* se A coincide con B, altrimenti si dice *proprio*.

1.2.2 Unione

$$A \cup B$$

Tutti gli elementi del primo insieme e tutti gli elementi del secondo

Definizione:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

1.2.3 Intersezione

$$A \cap B$$

Tutti gli elementi comuni al primo e al secondo insieme

Definizione:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$$

1.2.4 Differenza

$$A \setminus B$$

Elementi appartenenti **solo** ad A e non a B

Definizione:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$$

Osservazione:

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

1.2.5 Differenza Simmetrica

$$A \bigtriangleup B$$

Definizione:

$$A \bigtriangleup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Osservazione:

$$A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$$

1.2.6 Prodotto Cartesiano

$$A \times B$$

Definizione:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Osservazione:

$$(a,b) \neq (b,a) \Rightarrow A \times B \neq B \times A$$

1.2.7 Insieme Vuoto

Notazione:

$$A = \oslash$$

2 Proposizioni

2.1 Definizione

Una proposizione è un'affermazione che è falsa o vera e che può implicare altre affermazioni. Con p, q proposizioni:

$$p \Rightarrow q$$

$$\Downarrow$$

$$p \ implica \ q$$

Se *p implica q* e *q implica p* si dicono *equivalenti*

$$p \iff q$$

2.2 Quantificatori

- $\forall$ - per ogni
- $\exists$ - esiste
- $\exists!$ - esiste ed è unico
- $\nexists$ - non esiste

2.3 Definizioni, teoremi ed enunciati

Definizione:
Descrizione univoca di un oggetto.

Teorema:
Affermazione che coinvolge oggetti già definiti

Enunciato:
Un affermazione da dimostrare composta da un'*ipotesi* e da una *tesi*.

Dimostrazione:
Una dimostrazione è l'insieme dei passaggi logici e di calcolo che verificano un enunciato.

2.4 Principio di induzione

Teorema

Sia $p(n)$ un insieme di proposizioni al variare di $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che:

- $p(0)$ sia vera
- $\forall\ n \in \mathbb{N}, p(n)$ vera $\Rightarrow p(n + 1)$ vera.

Esempio

Dimostrare:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione per induzione:

$$p(1) \Rightarrow \frac{1(2)}{2} = 1 \Rightarrow vera \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\ ? \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = 1{+}2{+}3{+}\cdots{+}n{+}(n{+}1) = \frac{n(n+1)}{2}{+}(n{+}1) =$$

$$= n{+}1(\frac{n}{2}{+}1) = n{+}1(\frac{n+2}{2}) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ \Rightarrow\ p(n{+}1)\ vera$$

La proposizione è verificata.

3 Collezioni

3.1 Insiemi Numerici

- $\mathbb{N}$ = Numeri Naturali = $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
- $\mathbb{Z}$ = Numeri Interi = $\{-2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- $\mathbb{Q}$ = Numeri Razionali = $\{q = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0\}$
- $\mathbb{R}$ = Numeri Reali = $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ = Numeri Razionali $\cup$ Numeri Irrazionali[1]

Teorema

$$q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q^2 \neq 2$$

Dimostrazione

Supponiamo **per assurdo** che $q^2 = 2$. Per ipotesi $q = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0$ e possiamo supporre che $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

$$\begin{cases} q^2 = 2 \\ q = \frac{m}{n} \end{cases} \iff m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ è pari} \Rightarrow m \text{ è pari} \Rightarrow m = 2p, p \in \mathbb{Z} \text{ è pari} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \text{ è pari} \Rightarrow m \text{ ed } n \text{ hanno il fattore 2 in comune.}$$

Assurdo perchè per ipotesi $\frac{m}{n}$ era ridotta ai minimi termini.

3.2 Assiomi di $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è un campo, cioè un insieme su cui sono definite due operazioni ($+$ e $\cdot$) che gode delle seguenti proprietà:

- **Proprietà associativa**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

[1](Decimali illimitati non periodici come $\sqrt{2}, \pi, e$)

- **Proprietà commutiativa**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

- **Proprietà distributiva**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

- $\exists$ **Elemento neutro**

$$0 + x = x \forall x \in \mathbb{R}$$

$$1 \cdot x = x \forall x \in \mathbb{R}$$

- $\exists$ **Opposto**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y = 0$$

- $\exists$ **Reciproco o inverso**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x \cdot y = 1$$

- **Assioma d'ordine**
  È sempre possibile dire se un numero è maggiore o minore di un altro.

  $\mathbb{R}$ è un campo sempre ordinato

- **Assioma di completezza**

  Siano A e B due sottinsiemi separati (cioè $\forall a \in A, \forall b \in b \Rightarrow a \leq b$), allora:

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid a \leq c \leq b \ \forall \ a \in A, b \in B$$

  In sostanza, tra due numeri reali esistono infiniti numeri reali.

3.3 Cardinalità

Contare gli elementi di un insieme significa stabilire una corrispondenza iniettica con un sottoinsieme di $\mathbb{N}$.

Esempio

$$A = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$$
$$\Downarrow$$
$$\text{3 elementi}$$

Se A ha infiniti elementi e può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$, A si dice **numerabile**

Esempio

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{n è pari}\}$$

A è equipotente a $\mathbb{N}$

$\mathbb{Q}$ è numerabile

$\mathbb{R}$ non è numerabile

3.4 Proprietà di densità

$\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono **densi** su $\mathbb{R}$.

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$$

$$\exists\ c \in \mathbb{Q} \mid a \leq c \leq b$$

3.5 Notazioni

$\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$\mathbb{R}_+^\star = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

3.6 Massimo e Minimo

Definizioni

3.6.1 Massimo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, un numero reale λ si dice **massimo** di A se:

$$\lambda \in A, \lambda \geq x \forall x \in A$$

3.6.2 Minimo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, un numero reale μ si dice **minimo** di A se:

$$\mu \in A, \mu \leq x \forall x \in A$$

Esempi

- $$A = \mathbb{R}_+$$
  $$\exists \; min \; A = 0, \; \nexists \; max \; A$$
- $$A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$
  $$\exists \; max \; A = 1, \; \nexists \; min \; A$$

  infatti:
  $$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$
- $$A = \mathbb{R}^\star_+$$
  $$\nexists \; min \; A, \nexists \; max \; A$$

  Infatti se $x \in A$:
  $$\frac{x}{2} \in A, \; \frac{x}{2} < x \; \forall x \in A$$

3.7 Maggioranti e Minoranti

3.7.1 Maggiorante

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un **maggiorante** di A se:

$$\lambda \geq x \; \forall \; x \in A$$

3.7.2 Minorante

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$, diciamo che $\mu \in \mathbb{R}$ è un **minorante** di A se:

$$\mu \leq x \; \forall \; x \in A$$

Definizione

Se A ammette un maggiorante allora si dice **superiormente limitato**, se ammette un minorante si dice **inferiormente limitato**. Se ammette entrambi si dice **limitato**.

Osservazione

Finito $\Rightarrow$ limitato, limitato $\neq$ finito

Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \varnothing$

- Sia A sup. limitato $\Rightarrow$ l'insieme dei maggioranti ammette minimo
- Sia A inf. limitato $\Rightarrow$ l'insieme dei minoranti ammette massimo.

Osservazione

Se un insieme ammette massimo o minimo, esso è unico.

Definizione

Se A è sup. limitato chiamo **estremo superiore** di A (sup.A) il minimo dell'insieme dei maggioranti, e viceversa(inf.A). Se A non è sup. limitato, poniamo sup.$A = +\infty$ e analogamente $-\infty$ se non è inf. limitato.

Esempio

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$$
$$inf.\ A = min\ A = 0 sup.\ A = 3,\ \nexists\ max\ A$$

3.8 Intervalli di $\mathbb{R}$

- $(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\})$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Questi insiemi sono *intervalli* in quanto soddisfano la seguente proprietà:

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che A è un intervallo se

$$\forall\ c, d \in A, \forall\ h \in \mathbb{R} \mid c \leq h \leq d \Rightarrow h \in A$$

Esempi

- $(2, 3)$ è un intervallo
- $(2, 3) \cup (4, 5)$ non è un intervallo in quanto esso non comprende i valori compresi tra 3 e 4.

3.8.1 Punto interno di un intervallo

Definizione

Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, diciamo che c è un punto interno di I quando $c \in I$ ma c non è estremo, cioè $c \in I \setminus \{inf\ I, sup\ I\}$
$I = (a, b) = [a, b] \setminus \{a, b\}$ L'insieme dei punti interni si definisce $\mathring{I}$

3.8.2 Tipi di intervalli

- **Limitato** se sono presenti maggiorante e minorante
- **Aperto** se $I = \mathring{I}$
- **chiuso** $[a, b]$

3.9 Simmetria

Definizione

$A \subseteq \mathbb{R}$ è simmetrico rispetto all'origine se $x \in A \Rightarrow -x \in A$

Esempio

$(-a, a)$

3.10 Periodicità

Definizione

Sia $T \subseteq \mathbb{R}^{\star}_{+}$, sia $A \subseteq \mathbb{R}$ diciamo che A è $T - periodico$ se

$$\forall\ x \in A, \forall\ x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + kT \in A$$

3.11 Teorema de L' Hopital

Sia I un intervallo o un intervallo forato di $\mathbb{R}$, sia $c \in [inf_I, sup_I]$, $f, g : I \to \mathbb{R}$, derivabili in $I \backslash \{c\}$ Supponiamo g e g' siano diversi da 0 in $I \backslash \{c\}$.
Se

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$$

e se

$$\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Allora

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$