

Analisi Matematica

Alessandro Monticelli

A.A. 2021/2022

Contents

Introduzione	4
1 Insiemi	5
1.1 Definizione	5
1.2 Concetti di base e operatori	5
1.2.1 Inclusione	5
1.2.2 Unione	5
1.2.3 Intersezione	5
1.2.4 Differenza	6
1.2.5 Differenza Simmetrica	6
1.2.6 Prodotto Cartesiano	6
1.2.7 Insieme Vuoto	7
2 Proposizioni	8
2.1 Definizione	8
2.2 Quantificatori	8
2.3 Definizioni, teoremi ed enunciati	8
2.4 Principio di induzione	9
3 Collezioni	10
3.1 Insiemi Numerici	10
3.2 Assiomi di \mathbb{R}	10
3.3 Cardinalità	12
3.4 Proprietà di densità	12
3.5 Notazioni	12
3.6 Massimo e Minimo	13
3.6.1 Massimo	13
3.6.2 Minimo	13
3.7 Maggioranti e Minoranti	14
3.7.1 Maggiorante	14
3.7.2 Minorante	14
3.8 Intervalli di \mathbb{R}	15
3.8.1 Punto interno di un intervallo	15
3.8.2 Tipi di intervalli	16
3.9 Simmetria	16
3.10 Periodicità	16
4 Funzioni	17
4.1 Definizione	17
4.2 Grafico	17
4.3 Iniettività e Suriettività	17
4.4 Composizione di funzioni	18
4.5 Funzione identità	19
4.6 Funzioni di una variabile reale	19

4.7	Funzioni crescenti e decrescenti	20
4.8	Teorema de L' Hopital	21

Introduzione

Appunti di Analisi matematica - corso di Ingegneria e Scienze Informatiche.

1 Insiemi

1.1 Definizione

Un insieme è una collezione di elementi. Per ogni elemento si può dire se esso appartiene all'insieme, o no.

Notazioni: Un **insieme** si esprime con una **lettera maiuscola** $\{A, B, C, \dots\}$, un **elemento** si esprime con una **lettera minuscola** $\{a, b, c, \dots\}$.

1.2 Concetti di base e operatori

1.2.1 Inclusione

$$A \subseteq B$$

Tutti gli elementi di A appartengono a B

Esempio:

$$A = \{2, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A \subseteq B$$

Il sottoinsieme si dice *improprio* se A coincide con B, altrimenti si dice *proprio*.

1.2.2 Unione

$$A \cup B$$

Tutti gli elementi del primo insieme e tutti gli elementi del secondo

Definizione:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

1.2.3 Intersezione

$$A \cap B$$

Tutti gli elementi comuni al primo e al secondo insieme

Definizione:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

1.2.4 Differenza

$$A \setminus B$$

Elementi appartenenti **solo** ad A e non a B

Definizione:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Osservazione:

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

1.2.5 Differenza Simmetrica

$$A \triangle B$$

Definizione:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Osservazione:

$$A \triangle B = B \triangle A$$

1.2.6 Prodotto Cartesiano

$$A \times B$$

Definizione:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Osservazione:

$$(a, b) \neq (b, a) \Rightarrow A \times B \neq B \times A$$

1.2.7 Insieme Vuoto

Notazione:

$$A = \emptyset$$

2 Proposizioni

2.1 Definizione

Una proposizione è un'affermazione che è falsa o vera e che può implicare altre affermazioni. Con p, q proposizioni:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \Downarrow \\ p \text{ implica } q \end{array}$$

Se p implica q e q implica p si dicono *equivalenti*

$$p \iff q$$

2.2 Quantificatori

- \forall - per ogni
- \exists - esiste
- $\exists!$ - esiste ed è unico
- \nexists - non esiste

2.3 Definizioni, teoremi ed enunciati

Definizione:

Descrizione univoca di un oggetto.

Teorema:

Affermazione che coinvolge oggetti già definiti

Enunciato:

Un'affermazione da dimostrare composta da un'*ipotesi* e da una *tesi*.

Dimostrazione:

Una dimostrazione è l'insieme dei passaggi logici e di calcolo che verificano un enunciato.

2.4 Principio di induzione

Teorema

Sia $p(n)$ un insieme di proposizioni al variare di $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo che:

- $p(0)$ sia vera
- $\forall n \in \mathbb{N}, p(n) \text{ vera} \Rightarrow p(n+1) \text{ vera}.$

Esempio

Dimostrare:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \Rightarrow \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione per induzione:

$$p(1) \Rightarrow \frac{1(2)}{2} = 1 \Rightarrow \text{vera} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} ? \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= n+1\left(\frac{n}{2} + 1\right) = n+1\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow p(n+1) \text{ vera} \end{aligned}$$

La proposizione è verificata.

3 Collezioni

3.1 Insiemi Numerici

- \mathbb{N} = Numeri Naturali = $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- \mathbb{Z} = Numeri Interi = $\{-2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- \mathbb{Q} = Numeri Razionali = $\{q = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0\}$
- \mathbb{R} = Numeri Reali = $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ = Numeri Razionali \cup Numeri Irrazionali¹

Teorema

$$q \in \mathbb{Q} \Rightarrow q^2 \neq 2$$

Dimostrazione

Supponiamo **per assurdo** che $q^2 = 2$. Per ipotesi $q = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z} \wedge n \neq 0$ e possiamo supporre che $\frac{m}{n}$ sia ridotta ai minimi termini.

$$\begin{cases} q^2 = 2 \\ q = \frac{m}{n} \end{cases} \iff m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ è pari} \Rightarrow m \text{ è pari} \Rightarrow m = 2p, p \in \mathbb{Z} \text{ è pari} \Rightarrow \\ \Rightarrow n \text{ è pari} \Rightarrow m \text{ ed } n \text{ hanno il fattore 2 in comune.}$$

Assurdo perchè per ipotesi $\frac{m}{n}$ era ridotta ai minimi termini.

3.2 Assiomi di \mathbb{R}

\mathbb{R} è un campo, cioè un insieme su cui sono definite due operazioni (+ e \cdot) che gode delle seguenti proprietà:

- **Proprietà associativa**

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R} \\ (x + y) + z &= x + (y + z) \\ (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) \end{aligned}$$

¹(Decimali illimitati non periodici come $\sqrt{2}, \pi, e$)

- **Proprietà commutativa**

$$\forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

- **Proprietà distributiva**

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

- \exists **Elemento neutro**

$$0 + x = x \forall x \in \mathbb{R}$$

$$1 \cdot x = x \forall x \in \mathbb{R}$$

- \exists **Opposto**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y = 0$$

- \exists **Reciproco o inverso**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x \cdot y = 1$$

- **Assioma d'ordine**

È sempre possibile dire se un numero è maggiore o minore di un altro.

\mathbb{R} è un campo sempre ordinato

- **Assioma di completezza**

Siano A e B due sottoinsiemi separati (cioè $\forall a \in A, \forall b \in B \Rightarrow a \leq b$),

allora:

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \quad \forall a \in A, b \in B$$

In sostanza, tra due numeri reali esistono infiniti numeri reali.

3.3 Cardinalità

Contare gli elementi di un insieme significa stabilire una corrispondenza iniettiva con un sottoinsieme di \mathbb{N} .

Esempio

$$A = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$$

\Downarrow

3 elementi

Se A ha infiniti elementi e può essere messo in corrispondenza biunivoca con \mathbb{N} , A si dice **numerabile**

Esempio

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è pari}\}$$

A è equipotente a \mathbb{N}

\mathbb{Q} è numerabile

\mathbb{R} non è numerabile

3.4 Proprietà di densità

\mathbb{Q} e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono **densi** su \mathbb{R} .

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$$

$$\exists c \in \mathbb{Q} \mid a \leq c \leq b$$

3.5 Notazioni

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

3.6 Massimo e Minimo

Definizioni

3.6.1 Massimo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, un numero reale λ si dice **massimo** di A se:

$$\lambda \in A, \lambda \geq x \forall x \in A$$

3.6.2 Minimo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$, un numero reale μ si dice **minimo** di A se:

$$\mu \in A, \mu \leq x \forall x \in A$$

Esempi

•

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{R}_+ \\ \exists \min A = 0, \nexists \max A \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \\ \exists \max A = 1, \nexists \min A \end{aligned}$$

infatti:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

•

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{R}_+^* \\ \nexists \min A, \nexists \max A \end{aligned}$$

Infatti se $x \in A$:

$$\frac{x}{2} \in A, \frac{x}{2} < x \forall x \in A$$

3.7 Maggioranti e Minoranti

3.7.1 Maggiorante

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un **maggiorante** di A se:

$$\lambda \geq x \quad \forall x \in A$$

3.7.2 Minorante

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, diciamo che $\mu \in \mathbb{R}$ è un **minorante** di A se:

$$\mu \leq x \quad \forall x \in A$$

Definizione

Se A ammette un maggiorante allora si dice **superiormente limitato**, se ammette un minorante si dice **inferiormente limitato**. Se ammette entrambi si dice **limitato**.

Osservazione

Finito \Rightarrow limitato, limitato \neq finito

Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

- Sia A sup. limitato \Rightarrow l'insieme dei maggioranti ammette minimo
- Sia A inf. limitato \Rightarrow l'insieme dei minoranti ammette massimo.

Osservazione

Se un insieme ammette massimo o minimo, esso è unico.

Definizione

Se A è sup. limitato chiamo **estremo superiore** di A ($\sup.A$) il minimo dell'insieme dei maggioranti, e viceversa ($\inf.A$). Se A non è sup. limitato, poniamo $\sup.A = +\infty$ e analogamente $-\infty$ se non è inf. limitato.

Esempio

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 3\}$$

$$\inf. A = \min A = 0 \sup. A = 3, \nexists \max A$$

3.8 Intervalli di \mathbb{R}

- $(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Questi insiemi sono *intervalli* in quanto soddisfano la seguente proprietà:

Definizione

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che A è un intervallo se

$$\forall c, d \in A, \forall h \in \mathbb{R} \mid c \leq h \leq d \Rightarrow h \in A$$

Esempi

- $(2, 3)$ è un intervallo
- $(2, 3) \cup (4, 5)$ non è un intervallo in quanto esso non comprende i valori compresi tra 3 e 4.

3.8.1 Punto interno di un intervallo**Definizione**

Sia I intervallo di \mathbb{R} , diciamo che c è un punto interno di I quando $c \in I$ ma c non è estremo, cioè $c \in I \setminus \{\inf I, \sup I\}$

$I = (a, b) = [a, b] \setminus \{a, b\}$ L'insieme dei punti interni si definisce $\overset{\circ}{I}$

3.8.2 Tipi di intervalli

- **Limitato** se sono presenti maggiorante e minorante
- **Aperto** se $I = \overset{\circ}{I}$
- **chiuso** $[a, b]$

3.9 Simmetria

Definizione

$A \subseteq \mathbb{R}$ è simmetrico rispetto all'origine se $x \in A \Rightarrow -x \in A$

Esempio

$(-a, a)$

3.10 Periodicità

Definizione

Sia $T \subseteq \mathbb{R}_+^*$, sia $A \subseteq \mathbb{R}$ diciamo che A è T -periodico se

$$\forall x \in A, \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + kT \in A$$

4 Funzioni

4.1 Definizione

Siano A e B due insiemi, $A, B \neq \emptyset$, chiamiamo **funzione** f da A a B una legge che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento di B

$$\forall x \in A, \exists! y \in B \mid y = f(x)$$

$$\begin{array}{ccc} f : A & \rightarrow & B \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \{\text{Dominio}\} & & \{\text{Codominio}\} \end{array}$$

Esempio

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x$$

oppure

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x$$

4.2 Grafico

Il grafico di una funzione è un sottoinsieme del **prodotto cartesiano** tra A e B .

$$f : A \rightarrow B$$

$$Graf_f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$

4.3 Iniettività e Suriettività

Definizione

Diciamo che $f : A \rightarrow B$ è **suriettiva** se l'immagine (sottoinsieme del codominio) coincide con il codominio

$$\forall y \in B, \exists x \in A \mid y = f(x)$$

$$f : A \xrightarrow{su} B$$

Definizione

Diciamo che $f : A \rightarrow B$ è **iniettiva** se:

$$\forall y \in f(A), \exists! x \in A \mid y = f(x)$$

$$f : A \xrightarrow{|\cdot|} B$$

Definizione

Diciamo che $f : A \rightarrow B$ è **biunivoca** (o biiettiva o invertibile) se è sia suriettiva che iniettiva.

Esempio

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2$$

f non è suriettiva perchè non assume valori negativi, quindi non copre tutto il codominio \mathbb{R} . f non è iniettiva perchè per ogni $x > 0$ esiste più di una y

Definizione

Sia $f : A \rightarrow B$ biunivoca, chiamiamo funzione **inversa** di f (indicandola con f^{-1} la funzione:

$$f : B \rightarrow A)$$

$$\forall y \in B, f^{-1}(y) = x = f(x)$$

4.4 Composizione di funzioni

Definizione

Siano X, Y, Z, W insiemi $\neq \emptyset$,

$$f : X \rightarrow Y, g : Z \rightarrow W \mid f(X) \subseteq Z$$

chiamiamo **funzione composta** $g \circ f$ la funzione:

$$g \circ f : X \rightarrow W, (g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in X$$

Esempio

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(y) = y^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y^2) = 2y^2 + 1$$

$$g \circ f \neq f \circ g$$

4.5 Funzione identità

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$$

$$Id(x) = x$$

Teorema

Siano $f : X \rightarrow Y, g : Z \rightarrow W$ invertibili, $Y = Z \Rightarrow g \circ f$ è invertibile e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4.6 Funzioni di una variabile reale

Sia $c \subseteq \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}$

Esempi

- $f(x) = 2x + 1$
- $f(x) = |x|$
- $f(x) = \text{sgn}(x)$
- $f(x) = [x]$

Definizione

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che f è limitata se lo è $f(A)$.

$$\sup f = \sup_A f(A)$$

Definizione

$f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$

- f ha un massimo se lo ha $f(A)$
- f ha un minimo se lo ha $f(A)$

$$\exists \bar{x} \in A \mid f(x) \leq \underbrace{f(\bar{x})}_{\max f} \forall x \in A$$

Esempio

$$f : (0, 1] \Rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x$$

$$f((0, 1]) = (0, 2]$$

$(0, 2]$ è limitato $\Rightarrow f$ è limitata

$$\inf_{(0, 1]} f = 0 \quad \sup_{(0, 1]} f = 2$$

$$\max_{(0, 1]} f = 2 \quad \nexists \min_{(0, 1]} f = 2$$

4.7 Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione

$f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$

Diciamo che f è **crescente** ($f \nearrow$) se:

$$\forall x_1, x_2, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Definizione

$f : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$

Diciamo che f è **decrescente** ($f \searrow$) se:

$$\forall x_1, x_2, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Definizione

f è strettamente crescente o decrescente se valgono le disuguaglianze strette.

4.8 Teorema de L' Hopital

Sia I un intervallo o un intervallo forato di \mathbb{R} , sia $c \in [inf_I, sup_I]$, $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, derivabili in $I \setminus \{c\}$. Supponiamo g e g' siano diversi da 0 in $I \setminus \{c\}$.

Se

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$$

oppure

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty$$

e se

$$\exists \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$