

Analisi Matematica

Alessandro Monticelli

A.A. 2021/2022

Contents

Introduzione	3
1 Insiemi	4
1.1 Definizione	4
1.2 Concetti di base e operatori	4
1.2.1 Inclusione	4
1.2.2 Unione	4
1.2.3 Intersezione	5
1.2.4 Differenza	5
1.2.5 Differenza Simmetrica	5
1.2.6 Prodotto Cartesiano	6
1.2.7 Insieme Vuoto	6
2 Proposizioni	7
2.1 Definizione	7
2.2 Quantificatori	7
2.3 Definizioni, teoremi ed enunciati	7
2.4 Principio di induzione	8

Introduzione

Appunti di Analisi matematica - corso di Ingegneria e Scienze Informatiche.

1 Insiemi

1.1 Definizione

Un insieme è una collezione di elementi. Per ogni elemento si può dire se esso appartiene all'insieme, o no.

Notazioni: Un **insieme** si esprime con una **lettera maiuscola** {A,B,C,...}, un **elemento** si esprime con una **lettera minuscola** {a,b,c,...}.

1.2 Concetti di base e operatori

1.2.1 Inclusione

$$A \subseteq B$$

Tutti gli elementi di A appartengono a B

Esempio:

$$A = \{2, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A \subseteq B$$

Il sottoinsieme si dice *improprio* se A coincide con B, altrimenti si dice *proprio*.

1.2.2 Unione

$$A \cup B$$

Tutti gli elementi del primo insieme e tutti gli elementi del secondo

Definizione:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

1.2.3 Intersezione

$$A \cap B$$

Tutti gli elementi comuni al primo e al secondo insieme

Definizione:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

1.2.4 Differenza

$$A \setminus B$$

Elementi appartenenti **solo** ad A e non a B

Definizione:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Osservazione:

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

1.2.5 Differenza Simmetrica

$$A \triangle B$$

Definizione:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Osservazione:

$$A \triangle B = B \triangle A$$

1.2.6 Prodotto Cartesiano

$$A \times B$$

Definizione:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

Osservazione:

$$(a, b) \neq (b, a) \Rightarrow A \times B \neq B \times A$$

1.2.7 Insieme Vuoto

Notazione:

$$A = \emptyset$$

2 Proposizioni

2.1 Definizione

Una proposizione è un'affermazione che è falsa o vera e che può implicare altre affermazioni. Con p, q proposizioni:

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \\ \Downarrow \\ p \text{ implica } q \end{array}$$

Se p implica q e q implica p si dicono *equivalenti*

$$p \iff q$$

2.2 Quantificatori

- \forall - per ogni
- \exists - esiste
- $\exists!$ - esiste ed è unico
- \nexists - non esiste

2.3 Definizioni, teoremi ed enunciati

Definizione:

Descrizione univoca di un oggetto.

Teorema:

Affermazione che coinvolge oggetti già definiti

Enunciato:

Un'affermazione da dimostrare composta da un'*ipotesi* e da una *tesi*.

Dimostrazione:

Una dimostrazione è l'insieme dei passaggi logici e di calcolo che verificano un enunciato.

2.4 Principio di induzione

Teorema

Sia $p(n)$ un insieme di proposizioni al variare di $n \in \mathbb{N}$.
Supponiamo che:

- $p(0)$ sia vera
- $\forall n \in \mathbb{N}, p(n) \text{ vera} \Rightarrow p(n+1) \text{ vera}.$

Esempio

Dimostrare:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n \Rightarrow \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione per induzione:

$$p(1) \Rightarrow \frac{1(2)}{2} = 1 \Rightarrow \text{vera} \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} ? \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= n+1\left(\frac{n}{2} + 1\right) = n+1\left(\frac{n+2}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Rightarrow p(n+1) \text{ vera} \end{aligned}$$

La proposizione è verificata.