Analisi Matematica

Alessandro Monticelli

A.A. 2021/2022

Contents

Introduzione

Appunti di Analisi matematica - corso di Ingegneria e Scienze Informatiche.

1 Insiemi

1.1 Definizione

Un insieme è una collezione di elementi. Per ogni elemento si può dire se esso appartiene all'insieme, o no.

Notazioni: Un **insieme** si esprime con una **lettera maiuscola** {A,B,C,...}, un **elemento** si esprime con una **lettera minuscola**{a,b,c,...}.

1.2 Concetti di base e operatori

1.2.1 Inclusione

$$A \subseteq B$$

Tutti gli elementi di A appartengono a B

Esempio:

$$A = \{2, 5, 6, 7\}$$
$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$
$$A \subseteq B$$

Il sottoinsieme si dice *improprio* se A coincide con B, altrimenti si dice *proprio*.

1.2.2 Unione

$$A \cup B$$

Tutti gli elementi del primo insieme e tutti gli elementi del secondo

Definizione:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

1.2.3 Intersezione

$$A \cap B$$

Tutti gli elementi comuni al primo e al secondo insieme

Definizione:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

1.2.4 Differenza

$$A \backslash B$$

Elementi appartenenti **solo** ad A e non a B

Definizione:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Osservazione:

$$A \setminus B \neq B \setminus A$$

1.2.5 Differenza Simmetrica

$$A \triangle B$$

Definizione:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Osservazione:

$$A \ \triangle \ B \ = \ B \ \triangle \ A$$

1.2.6 Prodotto Cartesiano

$$A \times B$$

Definizione:

$$A \ \times \ B = \{(a, b) \mid a \ \in \ A \ \wedge \ b \ \in \ B\}$$

Osservazione:

$$(a, b) \ \neq \ (b, a) \ \Rightarrow \ A \ \times \ B \ \neq \ B \ \times \ A$$

1.2.7 Insieme Vuoto

Notazione:

$$A = \oslash$$

2 Proposizioni

2.1 Definizione

Una proposizione è un'affermazione che è falsa o vera e che può implicare altre affermazioni.

Con p, q proposizioni:

$$p \Rightarrow q$$
$$\Downarrow$$
$$p \textit{ implica } q$$

Se *p implica q* e *q implica p* si dicono *equivalenti*

$$p \iff q$$

2.2 Quantificatori

- $\forall$ - per ogni
- $\exists$ - esiste
- $\exists!$ - esiste ed è unico
- $\nexists$ - non esiste

2.3 Definizioni, teoremi ed enunciati

Definizione:
Descrizione univoca di un oggetto.

Teorema:
Affermazione che coinvolge oggetti già definiti

Enunciato:
Un affermazione da dimostrare composta da un'*ipotesi* e da una *tesi*.

Dimostrazione:
Una dimostrazione è l'insieme dei passaggi logici e di calcolo che verificano un enunciato.

2.4 Principio di induzione

Teorema

Sia $p(n)$ un insieme di proposizioni al variare di $n \in \mathbb{N}$.
Supponiamo che:

- $p(0)$ sia vera
- $\forall\, n \in \mathbb{N}, p(n)$ vera $\Rightarrow p(n + 1)$ vera.

Esempio

Dimostrare:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dimostrazione per induzione:

$$p(1) \Rightarrow \frac{1(2)}{2} = 1 \Rightarrow vera \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \ ? \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= n + 1(\frac{n}{2} + 1) = n + 1(\frac{n+2}{2}) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \Rightarrow \ p(n+1)\ vera$$

La proposizione è verificata.