

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E GEOSCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI
DI SISTEMI HAMILTONIANI AUTONOMI

Laureando:
Alessandro Tamai

Relatore:
Prof. Davide Guzzetti

ANNO ACCADEMICO 2016-2017

Indice

1	Introduzione	4
1.1	Le Equazioni del Moto	5
1.2	La Geometria Simplettica	8
1.3	Trasformazioni di Coordinate	14
2	Teoria dei Sistemi Integrabili	18
2.1	Il Teorema di Liouville-Arnol'd	18
2.2	Le Variabili Azione - Angolo	27
2.3	I Moti Quasi Periodici	33
3	La Teoria delle Perturbazioni	37
3.1	Il Problema dei Tre Corpi	37
3.2	La Teoria Ergotica	47
3.3	Il Sistema di Fermi-Pasta-Ulam	49
3.4	Il Teorema KAM	50
	Bibliografia	55

Premessa

Col presente lavoro ci proponiamo di riassumere gli aspetti fondamentali della Teoria dei Sistemi Integrabili e della Teoria delle Perturbazioni, ponendo attenzione sugli aspetti che le accomunano e che le differenziano. In particolare, nel primo capitolo studieremo la geometria intrinseca legata allo spazio delle fasi di un sistema hamiltoniano ed il suo legame con le soluzioni del moto, mentre nel secondo dimostreremo il Teorema di Liouville-Arnol'd, teorema fondamentale della Teoria dei Sistemi Integrabili, in cui si utilizza questa particolare geometria per risolvere le equazioni di Hamilton e descrivere completamente lo spazio delle fasi. In fine, nel terzo capitolo, introdurremo la Teoria delle Perturbazioni, nella quale si utilizzano le proprietà dei sistemi integrabili per ricavare le soluzioni di sistemi vicini a quelli integrabili a meno di un'infinitesimo al prim'ordine; analizzeremo dei risultati negativi che hanno segnato lo sviluppo della teoria, per poi concludere enunciando il Teorema-KAM, in un certo senso l'analogo del Teorema di Liouville Arnol'd per la Teoria delle Perturbazioni.

Capitolo 1

Introduzione

Iniziamo col richiamare i concetti fondamentali della Teoria dei Sistemi Integrabili, punto di partenza della Teoria delle Perturbazioni.

Dalla formulazione Newtoniana della meccanica, grazie ai lavori di Lagrange e Hamilton, si è arrivati alle formulazioni prima Lagrangiana e poi Hamiltoniana, che hanno profondamente cambiato l'interpretazione matematica e fisica dei fenomeni; interpretazione matematica senza la quale non sarebbe stata possibile la teoria quantistica dell'atomo. Lagrange riuscì a descrivere ogni sistema meccanico *autonomo*¹ con n gradi di libertà tramite $2n$ coordinate generalizzate posizione-velocità, più precisamente n coordinate $q^i \in \mathbb{R}^n$ che descrivono le posizioni del sistema ed n coordinate $\dot{q}^i \in \mathbb{R}^n$ che ne descrivono le velocità. Riscrivendo nel nuovo linguaggio l'equazione di Newton, ottenne una funzione detta *lagrangiana* che indichiamo con $L(q, \dot{q})$ a valori in \mathbb{R} e ad essa associato un sistema di n equazioni differenziali

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} = 0 \quad k = 1, \dots, n$$

la cui risoluzione rende l'equazione del moto del sistema. Nel linguaggio della geometria differenziale, le n coordinate q^k identificano localmente una varietà Q , detta *spazio delle configurazioni*, e dunque le coordinate (q, \dot{q}) ne identificano il fibrato tangente TQ , su cui è definita $L(q, \dot{q})$. Da qui Hamilton sfruttò la trasformata di Legendre della funzione Lagrangiana per ottenerne un'altra, detta *hamiltoniana*, definita questa volta sul *fibrato cotangente* dello spazio delle configurazioni, descritto dalle variabili momento-posizione (p, q) ; questo ha permesso di mettere in evidenza lo stretto legame presente fra le equazioni del moto associate e un nuovo genere di geometria, detta *geometria simplettica*; questo legame ha permesso di ricavare molte informazioni sulla natura della funzione hamiltoniana ed ha svelato l'importanza di tale geometria per la risoluzione delle equazioni del moto. In particolare si è passati a studiare il sistema, detto *Hamiltoniano*, individuato dalla coppia $(T^*Q, H(p, q))$ e le annesse equazioni di Hamilton

¹Le cui equazioni differenziali associate non dipendono esplicitamente dal tempo.

$$\begin{cases} \dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k} \end{cases}$$

$\forall k = 1, \dots, n$, dove $H(p, q)$ è funzione a valori in \mathbb{R} definita su T^*Q , che supporremo infinitamente differenziabile.

1.1 Le Equazioni del Moto

Iniziamo col dare qualche definizione più precisa di ciò di cui abbiamo discusso nell'introduzione.

Definizione.

Consideriamo un sistema descritto da q^1, \dots, q^n coordinate locali di una carta di una varietà differenziabile Q ; diremo *spazio delle fasi* del sistema il fibrato cotangente alla varietà Q

$$T^*Q$$

descritto dalle coordinate locali ²

$$(p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

Definizione.

Diremo *flusso di fase Hamiltoniano* o più semplicemente *flusso di fase* il flusso associato alle equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k} \end{cases}$$

$\forall k = 1, \dots, n$, che indicheremo con

$$\Phi_t : \mathbb{R} \rightarrow T^*Q$$

$$\Phi_t : (p_0, q_0) \rightarrow (p(t), q(t))$$

dove

$$(p(t), q(t))$$

è la curva soluzione delle equazioni di Hamilton per (p_0, q_0) .

Osserviamo che lungo le soluzioni del moto, ovvero lungo la curva definita per ogni (p_0, q_0) dal flusso di fase nello spazio delle fasi, il campo vettoriale tangente alla curva è proprio

$$\frac{d\Phi_t}{dt} = (\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = \left(-\frac{\partial H}{\partial q^1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q^n}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right)$$

²Per le coordinate q^i , p_i adotteremo nelle seguenti pagine la convezione di Einstein di somma sui prodotti di termini ad indici covariante-contravariante.

Introducendo dunque la matrice quadrata a blocchi $J \in M^{2n}(\mathbb{R})$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

dove I_n indica la matrice identità di $M^n(\mathbb{R})$, si ha che lungo il moto il vettore tangente al flusso di fase è il prodotto matrice-vettore del gradiente della funzione hamiltoniana H con la matrice J , ovvero

$$\frac{d\Phi_t}{dt} = J\nabla H$$

dove ∇H indica il campo vettoriale gradiente di H . Diremo quindi J matrice *simplettica canonica* mentre il vettore tangente al flusso

$$X_H = J\nabla H$$

verrà detto *campo vettoriale Hamiltoniano*. Come vedremo in questo capitolo la matrice J gioca un ruolo fondamentale nei sistemi Hamiltoniani in quanto rappresenta proprio il legame geometrico fra lo spazio delle fasi T^*Q e le equazioni di Hamilton di cui abbiamo accennato nell'introduzione. Ora che abbiamo descritto le proprietà fondamentali delle equazioni, dobbiamo cercare di risolverle. Per fare ciò è fondamentale il concetto di *costante del moto*, ovvero di funzione che si mantiene costante lungo il flusso Hamiltoniano; infatti, se esiste una tale funzione, possiamo diminuire i gradi di libertà del sistema ed integrarlo³. Indicato con $C^\infty(T^*Q) = C^\infty(T^*Q, \mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni definite sullo spazio delle fasi a valori in \mathbb{R} infinitamente differenziabili, formuliamo la seguente definizione

Definizione.

Sia $(T^*Q, H(p, q))$ un sistema Hamiltoniano e $F \in C^\infty(T^*Q)$; indicato con $(q(t), p(t)) : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ il flusso di fase Hamiltoniano in coordinate locali, diremo F *costante del moto* del sistema o equivalentemente *integrale primo* del sistema se

$$\frac{dF((p(t), q(t)))}{dt} = 0$$

Diamo quindi subito un'altra definizione che permette di studiare più a fondo le costanti del moto e ne esplicita alcune proprietà.

Definizione.

Sia $(T^*Q, H(p, q))$ un sistema Hamiltoniano con flusso di fase $\Phi_t(p_0, q_0)$, sia $F \in C^\infty(T^*Q)$; diremo *parentesi di Poisson* di F con H la funzione definita da

$$\{F, H\}(p, q) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(\Phi_t(p, q))$$

ovvero la derivata della funzione F lungo il moto.

³Interpretando le costanti del moto come ulteriori vincoli al sistema

Dunque, ricordando che la derivata rispetto al tempo di F lungo al flusso è il suo differenziale dF applicato al campo Hamiltoniano X_H , si ha

$$\{F, H\} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(\Phi_t(p, q)) = dF(X_H) = \langle \nabla F, X_H \rangle$$

Quindi se F è una costante del moto, in ogni punto il suo gradiente è ortogonale al campo vettoriale Hamiltoniano X_H . Sviluppiamo ora la nostra definizione di parentesi di Poisson e calcoliamola direttamente

$$\{F, H\}(p, q) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(\Phi_t(p, q)) = \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial F}{\partial q^k} \dot{q}^k$$

ma lungo il moto $H(p, q)$ soddisfa le equazioni di Hamilton e quindi

$$\{F, H\}(p, q) = \frac{\partial F}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q^k}$$

Osserviamo che dando una definizione più generale di parentesi di Poisson si scopre un'importante proprietà algebrica dello spazio delle funzioni $C^\infty(T^*Q)$

Definizione.

Siano $F, G : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ definiamo una nuova funzione che diremo "parentesi di Poisson" nel modo seguente

$$\{F, G\} := \frac{\partial F}{\partial q^k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q^k}$$

Lo spazio vettoriale delle funzioni infinite volte differenziabili $C^\infty(T^*Q)$ con l'operazione binaria $\{\cdot, \cdot\}$ definiscono infatti un'algebra di Lie

Proposizione. Consideriamo lo spazio vettoriale $C^\infty(T^*Q)$ delle funzioni infinitamente differenziabili definite sullo spazio delle fasi, allora l'operazione binaria

$$\{\cdot, \cdot\} : C^\infty(T^*Q) \times C^\infty(T^*Q) \rightarrow C^\infty(T^*Q)$$

$$(F, G) \rightarrow \{F, G\}$$

definisce un'algebra di Lie su $C^\infty(T^*Q)$ ovvero risultano le seguenti:

$$i) \quad \{G, F + K\} = \{G, F\} + \{G, K\}$$

$$ii) \quad \{G, F\} = -\{F, G\}$$

$$iii) \quad \{K, \{G, F\}\} + \{G, \{F, K\}\} + \{F, \{K, G\}\} = 0$$

Inoltre, è una derivazione, ovvero

$$iv) \quad \{FG, K\} = F\{G, K\} + \{F, K\}G = 0$$

Dunque, diremo essere in *involuzione* due funzioni $F, G \in C^\infty(T^*Q)$ con parentesi di Poisson nulla. Più in generale, diamo la seguente

Definizione.

Diremo k funzioni $F_1, \dots, F_k \in (C^\infty(T^*Q), \{\cdot, \cdot\})$ essere in *involuzione* se

$$\{F_i, F_j\} = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, k$$

Concludiamo osservando che un sistema hamiltoniano $(T^*Q, H(q, p))$ presenta almeno una costante del moto, che è proprio la funzione hamiltoniana, infatti

$$\{H, H\} = \frac{\partial H}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q^k} = 0$$

H è anche detta *energia del sistema*.

1.2 La Geometria Simplettica

Torniamo al sistema differenziale hamiltoniano. Come abbiamo visto, è esprimibile nella forma

$$\frac{d\Phi_t}{dt} = J\nabla H$$

Il legame fra il sistema hamiltoniano e la geometria dello spazio T^*Q è dato dal fatto che la matrice J è la matrice in forma canonica associata ad una particolare 2-forma su T^*Q , detta *forma simplettica* o *prodotto simplettico*. Diamone una definizione precisa

Definizione.

Diremo *2-forma simplettica* su una varietà $2n$ -dimensionale M individuata da coordinate locali (x_1, \dots, x_{2n}) una 2-forma differenziale ω ,

$$\omega : T^*M \rightarrow \bigwedge^2(T^*M)$$

$$\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j \quad \omega_{ji}(x) = -\omega_{ij}(x) \in C^\infty(T^*M)$$

i) *Chiusa* : $d\omega = 0$

ii) *Non degenera*: $\det(\omega_{ij}(x)) \neq 0$

Dunque, diremo *varietà simplettica* la coppia (M, ω) .

Se consideriamo una generica varietà n -dimensionale M , il suo fibrato cotangente T^*M è una varietà liscia $2n$ -dimensionale. Se indichiamo con $p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n$ le coordinate locali di T^*M , dove le q^1, \dots, q^n sono le coordinate locali di M e le p_1, \dots, p_n sono le coordinate dello spazio cotangente definite da

$$p_i(\eta) = \eta_i$$

dove $\eta \in T^*M$ è un generico covettore

$$\eta = \eta_1 dq^1 + \dots + \eta_n dq^n$$

si ottiene un importante risultato.⁴

Teorema.

*Il fibrato cotangente T^*M di una varietà M di dimensione n possiede una struttura naturale di varietà simplettica; in particolare, indicate con $p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n$ le coordinate che lo descrivono e U l'intorno aperto relativo alle coordinate scelte, la 2-forma associata è definita in coordinate locali*

$$\forall (p, q) \in U \quad \omega_{(p,q)} = dp_k \wedge dq^k$$

e non dipende dalla carta scelta.

Dimostrazione.

Consideriamo la forma differenziale $\alpha_q = p_i dq^i$. Dimostriamo che non dipende dalle coordinate scelte per descriverla. Indichiamo con q^1, \dots, q^n le coordinate di M , e consideriamo un cambio di coordinate

$$q^i \rightarrow q'^i = q'^i(q^1, \dots, q^n)$$

ed un generico covettore $\eta_q \in T_q^*M$ descritto in componenti in un punto $q \in M$ rispetto la base canonica dalle coordinate $\eta_i : i = 1, \dots, 2n$

$$\eta_q = \eta_i dq^i$$

indicato con $\eta'_{q'} = \eta'_i dq'^i$ lo stesso covettore η_q nelle nuove coordinate η'_i indette dalla trasformazione, possiamo riscriverlo rispetto la vecchia base. Infatti se la trasformazione inversa è

$$q^i(q') = q^i(q'^1, \dots, q'^n)$$

Il covettore si trasforma come

$$\eta'_{q'} = \eta'_i dq'^i = \eta_i dq^i = \eta_i d(q^i(q')) = \eta_i \frac{\partial q^i}{\partial q'^j} dq'^j$$

da cui

$$\eta'_i = \eta_i \frac{\partial q^i}{\partial q'^j}$$

Dunque nelle nuove coordinate l'1-forma forma α diventa

⁴Osserviamo che sono proprio le coordinate definite dalla trasformata di Legendre, definite in modo più generale.

$$\alpha_{q'} = p'_i dq'^i = \frac{\partial q^i}{\partial q'^i} p_i \frac{\partial q'^i}{\partial q^k} dq^k = p_i dq'^i$$

Concludiamo quindi considerando il differenziale della forma α ovvero

$$\omega = d\alpha = dp_i \wedge dq^i$$

Che definisce su T^*M una struttura di varietà simplettica. \square

Abbiamo così dimostrato che lo spazio cotangente ha una struttura simplettica intrinseca e che la forma associata è quella canonica rispetto alle coordinate definite come sopra; inoltre, essendo la forma invariante rispetto alle trasformazioni di coordinate, l'intero atlante sarà fatto da coordinate di questo tipo. Diremo quindi un tale atlante per una generica varietà simplettica (M, ω) (con ω non necessariamente in forma canonica) *atlante simplettico*, e le relative carte, che come abbiamo detto lasciano invariata la forma simplettica definita, verranno dette trasformazioni simplettiche.

Definizione.

Sia $\Phi : M \rightarrow M$ un diffeomorfismo su una varietà simplettica (M, ω) ; diremo Φ *trasformazione simplettica* o *simplettomorfismo* se la forma simplettica ω è invariante rispetto a Φ , ovvero

$$\Phi^* \omega = \omega$$

Osserviamo che la matrice associata alla forma ω è proprio la matrice J con cui abbiamo descritto il flusso Hamiltoniano in termini del campo gradiente di H

$$\frac{d\Phi_t}{dt} = J\nabla H$$

Quindi lo spazio delle fasi di un sistema hamiltoniano è legato in modo naturale a questa geometria. In coordinate canoniche, ovvero per cui la 2-forma simplettica è scrivibile nella forma canonica della definizione, si ha che le costanti del moto possono essere caratterizzate dalla forma simplettica canonica ω ; date due funzioni nello spazio vettoriale delle funzioni lisce $F, G \in C^\infty(T^*Q)$ ritroviamo infatti che

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q^k} = (\nabla F)^t J (\nabla H) = \omega(X_F, X_H)$$

Inoltre, la matrice J simplettica canonica permette di definire una struttura di gruppo sulla \mathbb{R} -algebra delle matrici quadrate $M^{2n}(\mathbb{R})$; diamo la seguente definizione

Definizione.

Diremo una matrice $A \in M^{2n}(\mathbb{R})$ *simplettica* se data la matrice simplettica canonica J

$$A^t J A = J$$

Si dimostra facilmente che il sottoinsieme di $M^{2n}(\mathbb{R})$ delle matrici simplettiche forma un gruppo, che indichiamo con $S_{p_n}(\mathbb{R})$. Quindi, se una varietà simplettica ammette un atlante simplettico, la rappresentazione della forma simplettica in tale atlante è invariante rispetto alle transizioni da una carta all'altra. Ci chiediamo ora se data una varietà con una forma simplettica generica sia possibile trovare un atlante simplettico per descriverla, in cui la forma simplettica sia nella forma canonica, ovvero quella a cui è associata la matrice J . Premettendo il seguente Lemma tecnico

Lemma.

Sia V un sottospazio nello spazio simplettico $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ tale che $\omega|_V$ è non degenera. Quindi, la restrizione di ω al complemento ortogonale

$$V := \{Y \in \mathbb{R}^{2n} \mid \omega(Y, X) = 0 \quad \forall X \in V\}$$

è anch'essa non degenera.

il Teorema di Darboux garantisce questa proprietà essenziale delle varietà simplettiche.

Teorema. Teorema di Darboux

Consideriamo una varietà simplettica (M^{2n}, ω) ; allora, per ogni punto $a \in M^{2n}$ esiste un intorno $U \subset M^{2n}$ ed un sistema di coordinate locali $(p_1, \dots, p_n, q^1, \dots, q^n)$ su U tali che

$$\omega|_U = dp_i \wedge dq^i$$

Dimostrazione.

Sia x il vettore delle coordinate locali nell'intorno U di un punto $x_0 \in M$, consideriamo la forma ω definita in ogni punto da

$$\omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

Sia p_1 una funzione arbitraria liscia in U tale che $p_1(0) = 0$; allora il campo Hamiltoniano associato alla 1-forma

$$\omega(X_{p_1}, \cdot) = -dp_1$$

è non nullo. Ricordiamo inoltre che possiamo trovare un sistema di coordinate $(q^1, y^0, y^1, \dots, y^{n-2})$ tale che il campo sia nella forma

$$X_{p_1} = \frac{\partial}{\partial q^1}$$

ovvero per cui il flusso Hamiltoniano è una traslazione nella direzione della coordinata q^1 . Dunque, scegliamo q^1 in modo tale che $q^1(x_0) = 0$. Nelle nuove coordinate, p_1 non può dipendere da q^1 in quanto $X_{p_1}(p_1) = 0$, quindi possiamo considerare come coordinate $(q^1, p_1, y^1, \dots, y^{n-2})$. Inoltre, essendo

$$X_{p_1} q^1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \{q^1, p_1\} = 1$$

Abbiamo ottenuto una coppia di funzioni q^1, p_1 in U con parentesi di Poisson canonica. Dunque, se $n = 1$, la dimostrazione è finita, altrimenti sia $n > 1$. Definiamo $\tilde{M} \subset U \cap M$ tramite le equazioni $q^1 = p_1 = 0$. Questa è una varietà liscia di dimensione $2n - 2$. Indichiamo con

$$\tilde{\omega} = \omega|_{\tilde{M}}$$

la restrizione della 2 forma a \tilde{M} . Proviamo ora che $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ è una varietà симпlettica. Chiaramente $d\tilde{\omega} = 0$, dunque basta dimostrare che sia non degenere. Dimostriamo che, lo spazio tangente $T_x \tilde{M}$ in ogni punto $x \in \tilde{M}$ è il complemento ortogonale dello spazio generato da X_{p_1}, X_{q^1} . In particolare

$$Y \in T_x \tilde{M} \iff \omega(Y, X_{p_1}) = \omega(Y, X_{q^1}) = 0$$

Prendiamo un vettore tangente $Y \in T_x M$ ed estendiamolo localmente ad un campo vettoriale su M . Sui punti di \tilde{M} soddisfa

$$Y(p_1) = 0 \quad Y(q^1) = 0$$

Osserviamo che dato un qualsiasi campo Y su (M, ω) ed una $f \in C^\infty(M)$,

$$Y(f) = Y^k \frac{\partial f}{\partial x^k} = Y^k \delta_k^j \frac{\partial f}{\partial x^j} = Y^k \omega_k^j \omega^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \omega_k^j Y^k X_f^j = \omega(Y, X_f)$$

Dove X_f è il campo associato ad f tramite ω . Quindi se consideriamo i due campi Hamiltoniani X_{q^1} e X_{p_1} ed un generico campo Y tangente alla varietà di livello di \tilde{M} ,

$$\omega(Y, X_{p_1}) = Y(q^1) = 0$$

$$\omega(Y, X_{q^1}) = Y(p_1) = 0$$

Viceversa, le due condizioni implicano che Y sia tangente ad \tilde{M} . Abbiamo così dimostrato che $T_x \tilde{M}$ è il complemento ortogonale allo spazio generato dai due campi Hamiltoniani. Tramite il Lemma otteniamo quindi che $(\tilde{M}, \tilde{\omega})$ è una varietà симпlettica e dunque per induzione, abbiamo dimostrato il Teorema. \square

Questo risultato è fondamentale nella *Teoria dei Sistemi Completamente Integrabili*, che affronteremo nel prossimo capitolo: a fine questo capitolo dimostreremo infatti in un Teorema che va sotto il nome di *Liouville - Poincaré* che il flusso di fase

$$\Phi_t : T^*Q \rightarrow T^*Q$$

di un sistema Hamiltoniano conserva la struttura симпlettica, ovvero è tale per cui

$$(\Phi_t)^* \omega = \omega$$

Dunque, l'esistenza di un atlante di questo tipo porta alla possibilità di estendere ad una qualsiasi varietà симпlettica una generica proprietà di carattere

locale di un sistema Hamiltoniano che sia invariante per trasformazioni canoniche di coordinate. Per arrivare al Teorema, abbiamo però prima bisogno di approfondire lo studio dell'algebra di Lie definita dalla parentesi di Poisson. In particolare diamo la seguente definizione.

Definizione.

Diremo *struttura di Poisson* su una varietà M una struttura di algebra di Lie sullo spazio delle funzioni $([\cdot, \cdot], C^\infty(M))$ che soddisfa la regola di Liebniz. Una varietà M su cui è definita una struttura di Poisson verrà detta *varietà di Poisson*.

Osserviamo che la parentesi di Poisson soddisfa la regola di Liebniz, ovvero date $f, g, h \in C^\infty(T^*Q)$

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$$

Dunque lo spazio delle fasi è di per se una varietà di Poisson. Inoltre, si riesce a dimostrare che una qualsiasi varietà di Poisson $([\cdot, \cdot], C^\infty(M))$ che soddisfa la condizione di non degenerazione, ovvero tale per cui se esiste una funzione $f \in C^\infty(M)$ che soddisfi

$$[f, g] = 0 \quad \forall h \in C^\infty(M) \Rightarrow f \text{ e' localmente costante}$$

è anche una varietà simplettica. Vediamo ora come agiscono i campi Hamiltoniani sulle varietà di Poisson. Iniziamo con una definizione

Definizione.

Diremo campo vettoriale $X \in TM$ su una varietà di Poisson $(M, [\cdot, \cdot])$ *simmetria infinitesima* della struttura di Poisson se

$$X[f, g] = [Xf, g] + [f, Xg] \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

In particolare, per quanto riguarda il flusso Hamiltoniano, si dimostra il seguente

Proposizione.

Ogni campo vettoriale Hamiltoniano X_H è una simmetria infinitesima della parentesi di Poisson.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che

$$X_H\{f, g\} = \{X_H f, g\} + \{f, X_H g\} \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

Dato quindi un campo Hamiltoniano X_H e due funzioni $f, g \in C^\infty$ su T^*M applicando X_H alla parentesi di Poisson di f e g , ricordando che $X_H(f) = \{f, H\}$, otteniamo

$$X_H\{f, g\} = \{\{f, g\}, H\}$$

Dall'identità di Jacobi

$$-\{H, \{f, g\}\} = \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\}$$

Utilizzando l'antisimmetria della parentesi di Poisson su entrambi i termini dell'uguaglianza e la bilinearità sul secondo, otteniamo

$$\begin{aligned}\{\{f, g\}, H\} &= \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} = \{f, \{g, H\}\} - \{-\{f, H\}, g\} = \\ &= \{f, \{g, H\}\} + \{\{H, f\}, g\} = \{f, X_H g\} + \{X_H f, g\}\end{aligned}\tag{1.1}$$

da cui la tesi. □

1.3 Trasformazioni di Coordinate

Ora che conosciamo l'importanza della struttura simplettica, per arrivare al Teorema di Liouville-Poincaré dobbiamo studiare quali siano le trasformazioni che lasciano invariati i sistemi Hamiltoniani, ovvero che ne preservano le equazioni.

Definizione.

Consideriamo un sistema Hamiltoniano $(T^*Q, H(p, q))$; un diffeomorfismo $\Phi : T^*Q \rightarrow T^*Q$ verrà detto *trasformazione canonica* di T^*Q , in coordinate

$$(p, q) \rightarrow (P, Q)$$

esiste una funzione $K(P, Q, t)$ tale che

$$\begin{cases} \dot{Q}^k = \frac{\partial K}{\partial P_k} \\ \dot{P}_k = -\frac{\partial K}{\partial Q^k} \end{cases}$$

$\forall k = 1, \dots, n$. In particolare, la diremo *completamente canonica* se la nuova Hamiltoniana $K(P, Q, t)$ è uguale a quella di partenza scritta nelle nuove coordinate

$$K(P, Q, t) = H(p(P, Q), q(P, Q))$$

Cerchiamo ora di capire che legame hanno le trasformazioni completamente canoniche con l'altro tipo di trasformazioni, quelle simplettiche. Per fare ciò, considereremo le trasformazioni completamente canoniche che non dipendono dal tempo. Iniziamo col dimostrare il seguente Lemma.

Lemma. ⁵

Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione di coordinate

⁵In realtà questa condizione è anche sufficiente, ma non ne viene qui riportata la dimostrazione.

$(p, q) \rightarrow (P, Q)$ indipendente dal tempo sia completamente canonica è che per ogni coppia di funzioni $F, G \in C^\infty(T^*Q)$ si verifichi che

$$\{F, G\}_{|(P, Q)} = \{F, G\}_{|(p, q)}$$

Ovvero, nei termini della struttura di algebra di Lie delle funzioni $C^\infty(T^*Q)$, il pull-back della trasformazione Φ_t^* è un automorfismo di algebre di Lie, ovvero per ogni $t \in \mathbb{R}$, $f, g \in C^\infty(T^*Q)$

$$\Phi_t^*(\{f, g\}) = \{\Phi_t^*(f), \Phi_t^*(g)\}$$

Dimostrazione.

Ci limiteremo a dimostrare che la condizione è necessaria. Supponiamo che la trasformazione sia completamente canonica e indipendente dal tempo; sia $F \in C^\infty(T^*Q)$ una funzione con sistema Hamiltoniano

$$\dot{q}^k = \frac{\partial F}{\partial p_k} \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial F}{\partial q^k}$$

Poichè la trasformazione è completamente canonica, si ha che

$$\dot{Q}^k = \frac{\partial F}{\partial P_k} \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial F}{\partial Q^k}$$

Sia quindi $G \in C^\infty(T^*Q)$ un'altra funzione, allora lungo il flusso di fase

$$\begin{aligned} \frac{dG(p(t), q(t))}{dt} &= \{G, F\}_{|(p, q)} \\ \frac{dG(P(t), Q(t))}{dt} &= \{G, F\}_{|(P, Q)} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Da cui la tesi, ovvero

$$\{G, F\}_{|(P, Q)} = \{G, F\}_{|(p, q)}$$

□

Si riesce a dimostrare (noi non lo faremo), il seguente risultato che lega in modo indissolubile i due tipi di trasformazioni

Teorema.

Ogni trasformazione completamente canonica ed indipendente dal tempo

$$\Phi : T^*Q \rightarrow T^*Q$$

è una trasformazione simplettica, e viceversa.

Dal punto di vista della trasformazione lineare indotta da una trasformazione simplettica (o completamente canonica) fra gli spazi tangenti di partenza e di arrivo, si scopre invece il seguente

Teorema.

Consideriamo un diffeomorfismo $\Phi : M \rightarrow M$ su una varietà simplettica (M, ω) : Allora Φ è simplettico se e soltanto se la matrice jacobiana A associata alla trasformazione è una matrice simplettica.

Dimostrazione. Un diffeomorfismo è simplettico se e solo se è una trasformazione canonica, dunque se e solo se per ogni coppia di funzioni $F, G \in C^\infty(T^*Q)$ si ha che

$$\{F, G\}_{|(P, Q)} = \{F, G\}_{|(p, q)}$$

Usando la notazione di prodotto simplettico,

$$\omega(\nabla F, \nabla G)_{|(p, q)} = \omega(\nabla F, \nabla G)_{|(P, Q)}$$

che rispetto alla matrice canonica J

$${}^t(\nabla F_{(p, q)})J(\nabla G_{(p, q)}) = {}^t(\nabla F_{(P, Q)})J(\nabla G_{(P, Q)})$$

Ma, indicata con A la matrice jacobiana della trasformazione

$$\nabla F_{(P, Q)} = A \nabla F_{(p, q)}$$

E quindi, sostituendo otteniamo che

$${}^t A J A = J$$

da cui concludiamo che A è una matrice simplettica. \square

Quindi, il campo Hamiltoniano è una simmetria infinitesima della Parentesi di Poisson mentre ogni trasformazione canonica è anche una trasformazione simplettica, ovvero lascia invariata la forma simplettica definita. Nel prossimo Teorema, dimostreremo che le trasformazioni associate ad una simmetria infinitesima sono completamente canoniche, dimostrando così anche il Teorema di Liouville-Poincaré enunciato subito dopo.

Teorema.

La trasformazione associata ad una simmetria infinitesima ed in particolare ad un campo vettoriale Hamiltoniano X_H , è completamente canonica ed indipendente dal tempo.

Dimostrazione. Consideriamo una simmetria infinitesima $X \in T^*M$, sia $\Phi_t : M \rightarrow M$ il flusso associato ad X , dimostriamo che la trasformazione associata a Φ_t è canonica, ovvero che il pull-back del flusso è un'automorfismo di algebre di Lie, ovvero che per ogni tempo $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_t^*(\{f, g\}) = \{\Phi_t^*(f), \Phi_t^*(g)\}$$

Calcolando le derivate rispetto al tempo dei due termini, nel generico punto t'

$$\frac{d}{dt} [\Phi_t^*(\{f, g\})]_{|_{t'}} = \frac{d}{dt} [\{f, g\}(\Phi_t)]_{|_{t'}} = X(\{f, g\})(\Phi_{t'})$$

Mentre

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left[\{ \Phi_t^*(f), \Phi_t^*(g) \} \right]_{t'} &= \left\{ \frac{d}{dt} \Phi_t^*(f), \Phi_t^*(g) \right\}_{|_{t'}} + \left\{ \Phi_t^*(f), \frac{d}{dt} \Phi_t^*(g) \right\}_{|_{t'}} = \\
&= \left\{ X(f)_{|_{t'}}, \Phi_{t'}^*(g) \right\} + \left\{ \Phi_{t'}^*(f), X(g)_{|_{t'}} \right\}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Quindi, essendo X una simmetria infinitesima,

$$\frac{d}{dt} \left[\Phi_t^*(\{f, g\}) \right]_{|_{t'}} = \frac{d}{dt} \left[\{ \Phi_t^*(f), \Phi_t^*(g) \} \right]_{t'}$$

Integrando, rispetto a t , otteniamo

$$\Phi_t^*(\{f, g\}) + \{f, g\} = \{ \Phi_t^*(f), \Phi_t^*(g) \} + \{f, g\}$$

Da cui la tesi del Teorema. □

Otteniamo così finalmente

Teorema. *di Liouville - Poincaré*

*Il flusso di fase hamiltoniano è un gruppo ad un parametri di simplettomorfismi e dunque, in particolare, conserva la struttura simplettica di (T^*Q, ω) ; in altre parole, indicato con $\Phi^t : T^*Q \rightarrow T^*Q$ il gruppo ad un parametro ad esso associato, si ha che*

$$(\Phi_t)^*\omega = \omega$$

Dimostrazione.

Essendo il campo vettoriale Hamiltoniano X_H una simmetria infinitesima, la trasformazione associata è completamente canonica e non dipende dal tempo, ovvero è simplettica; ciò prova così la tesi. □

Capitolo 2

Teoria dei Sistemi Integrabili

In questo capitolo dimostreremo il teorema centrale della Teoria dei Sistemi Integrabili. Valdimir Arnol'd, estendendo i lavori di Liouville, riuscì a dimostrare che sotto la condizione di esistenza di un numero sufficiente di integrali primi sostanzialmente "indipendenti", lo spazio delle fasi è una varietà prodotto di un toro n -dimensionale e uno spazio reale n -dimensionale, ovvero è *foliato* in questi tori n dimensionali. Non solo, riuscì a determinare anche delle variabili canoniche, dette *azioni-angolo* che permettono di esprimere il sistema di equazioni differenziali in una forma molto semplice: lineare. Da un punto di vista più fisico, su ognuno di questi tori l'Hamiltoniana del sistema, ovvero l'energia, è costante: riusciamo così a "parametrizzare" separatamente i livelli energetici del sistema ed il moto vero e proprio. Nel primo paragrafo affronteremo la dimostrazione del Teorema mentre nel secondo ricaveremo queste coordinate fondamentali.

2.1 Il Teorema di Liouville-Arnol'd

Iniziamo con l'enunciare il Teorema. Divideremo poi la dimostrazione in varie parti che affronteremo separatamente, così da renderne più semplice la comprensione.

Teorema. *di Liouville - Arnol'd*

Supponiamo che su una varietà simplettica $2n$ -dimensionale siano definite n funzioni in involuzione F_1, \dots, F_n in involuzione, ovvero tali per cui

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Consideriamo l'insieme di livello delle funzioni F_i

$$M_{\bar{I}} = \{x : F_i(x) = \bar{I}_i, \bar{I}_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n\}$$

Supponiamo inoltre che su M le n funzioni F_i siano tali che i loro differenziali dF_i siano linearmente indipendenti in ogni punto di M , allora

i) M è una varietà regolare invariante rispetto al flusso di fase con funzione di

Hamilton $H = F_1$.

ii) Se la varietà M è compatta e connessa, è diffeomorfa al toro n -dimensionale

$$T^n = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \mod(2\pi)\}$$

iii) Il flusso di fase con funzione di Hamilton $H = F_1$ determina su M un moto definito in coordinate angolari $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ come soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \omega = \omega(\bar{I})$$

iv) La varietà è foliata in Tori invarianti ovvero è localmente diffeomorfa al prodotto

$$V \times \mathbb{T}^n$$

dove V è un'aperto di \mathbb{R}^n .

Consideriamo una varietà simplettica $2n$ dimensionale, come ad esempio lo spazio delle fasi di un sistema ad n gradi di libertà, T^*Q e supponiamo che su di essa siano definite n funzioni, che indicheremo

$$F_1, \dots, F_n,$$

tali che siano fra loro in involuzione, ossia che, $\forall i, j = 1, \dots, n$ si abbia

$$\{F_i, F_j\} = 0,$$

e tali che i loro differenziali siano in ogni punto linearmente indipendenti. Se consideriamo quindi gli insiemi di livello di ognuna di queste funzioni, indichiamoli con

$$M_{F_i} = \{P \in T^*Q \mid F_i(P) = \bar{I}_i\}$$

allora si ha che essi sono, in virtù del teorema della funzione implicita, delle sottovarietà $2n - 1$ dimensionali di T^*Q ; inoltre, se consideriamo la loro intersezione, per via dell'indipendenza lineare dei loro differenziali si ha anche che

$$M_{\bar{I}} = \bigcap_{i=1}^n M_{F_i}$$

è una sottovarietà di T^*Q , in particolare di dimensione n . Il seguente lemma ci dimostra un'ulteriore proprietà di questa sottovarietà M .

Lemma.

Sulla varietà M definita precedentemente esistono n campi vettoriali tangenti, linearmente indipendenti in ogni punto e commutanti a due a due.

Dimostrazione.

Consideriamo per ogni funzione F_i il rispettivo gradiente hamiltoniano, definito come

$$X_{F_i} := \{ \cdot, F_i \}$$

Vogliamo ora dimostrare che i gradienti hamiltoniani delle F_i sono linearmente indipendenti, tangenti ad M e che commutano. L'indipendenza lineare deriva in modo semplice, ricordando che, rispetto alla metrica euclidea definita in modo naturale sulla varietà, possiamo pensare al gradiente hamiltoniano come alla trasformazione lineare del gradiente canonico della funzione tramite la matrice simplettica canonica J

$$X_{F_i} = J \nabla F_i$$

E dunque, essendo J non degenera, quindi un isomorfismo, trasforma vettori linearmente indipendenti in vettori linearmente indipendenti. Inoltre, questi campi vettoriali appartengono allo spazio tangente alla varietà M , infatti

$$\langle X_{F_i} | \nabla F_i \rangle = X_{F_i}(F_i) = 0$$

Dunque, $X_{F_i} \in TM$ e, in particolare, ne formano una base. Dimostriamo infine che questi campi commutano fra loro, ovvero che

$$[X_{F_i}, X_{F_j}] = 0$$

Dalla definizione di commutatore di Lie,

$$\begin{aligned} [X_{F_i}, X_{F_j}](f) &= X_{F_i}(X_{F_j}(f)) - X_{F_j}(X_{F_i}(f)) = \\ &= X_{F_i}(\{f, F_j\}) - X_{F_j}(\{f, F_i\}) = \\ &= \left\{ \{f, F_j\}, F_i \right\} - \left\{ \{f, F_i\}, F_j \right\} \end{aligned}$$

Ma, dall'identità di Jacobi

$$\left\{ \{f, F_j\}, F_i \right\} - \left\{ \{f, F_i\}, F_j \right\} = - \left\{ f, \{F_i, F_j\} \right\} = -X_{\{F_i, F_j\}} = 0$$

□

Per costruire il diffeomorfismo fra la varietà M ed il toro \mathbb{T}^n , dobbiamo utilizzare le proprietà dei sottogruppi di \mathbb{R}^n , in particolare dei sottogruppi *discreti*.

Definizione.

Un sottogruppo Γ di \mathbb{R}^n verrà detto *discreto* se per ogni $t \in \Gamma$, esiste un intorno V di t tale che non contiene altri punti di Γ oltre a t ; in altre parole

$$V \cap \Gamma = \{t\}$$

Per questi particolari sottogruppi, si dimostra infatti il seguente.

Lemma.

Sia Γ un sottogruppo discreto di \mathbb{R}^n . Esistono allora k vettori indipendenti linearmente $E_1, \dots, E_k \in \Gamma$ ($0 \leq k \leq n$) tali che Γ è l'insieme delle loro combinazioni lineari a coefficienti interi.

Possiamo così dimostrare il secondo punto del Teorema, ovvero costruire il diffeomorfismo (globale) fra la varietà M e \mathbb{T}^n .

Lemma.

Consideriamo una varietà M , n -dimensionale, compatta e connessa, su cui siano definiti n campi vettoriali, in ogni punto linearmente indipendenti e che commutano a due a due. Allora tale varietà è diffeomorfa ad un toro n -dimensionale.

Dimostrazione.

• Se la varietà M è compatta, il flusso $\Phi_{t_i}^i$ di X_i si prolunga a $t_i \in \mathbb{R}$ come gruppo ad un parametro di diffeomorfismi. Inoltre, se i campi commutano, commutano i relativi flussi, infatti

$$[X_i, X_j] = 0 \iff \Phi_{t_i}^{(i)} \circ \Phi_{t_j}^{(j)} = \Phi_{t_j}^{(j)} \circ \Phi_{t_i}^{(i)}$$

Dunque l'applicazione da M in M

$$\left(\Phi_{t_1}^{(1)} \circ \dots \circ \Phi_{t_n}^{(n)} \right)(a) = \Phi_{\mathbf{t}}(a)$$

dove $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$, non dipende dall'ordine dei flussi; inoltre, dalla struttura di gruppo ad un parametro dei flussi, segue che

$$\Phi_{\mathbf{t}} \circ \Phi_{\mathbf{s}} = \Phi_{\mathbf{t}+\mathbf{s}}$$

Iniziamo con l'osservare alcune cose: innanzitutto, se fissiamo un punto $a_0 \in M$ e consideriamo l'applicazione

$$\mathbf{t} \rightarrow \Phi_{\mathbf{t}}(a_0)$$

essa definisce un diffeomorfismo (locale)¹ fra un intorno di $\mathbf{t} = 0$ di \mathbb{R}^n e un intorno di a_0 . Infatti, indicata con (con una notazione impropria) Φ_t la funzione definita precedentemente qui espressa in coordinate locali, per la commutatività dei flussi

$$\frac{\partial}{\partial t_k}(\Phi_t) = \frac{\partial}{\partial t_k} \left(\Phi_{t_1}^{(1)} \circ \dots \circ \Phi_{t_n}^{(n)} \right)(a) = \frac{\partial}{\partial t_k} \left(\Phi_{t_k}^k \left(\Phi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \hat{\Phi}_{t_k}^k \circ \dots \circ \Phi_{t_n}^{(n)} \right) \right)(a) \quad (2.1)$$

Posto

$$\Phi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \hat{\Phi}_{t_k}^k \circ \dots \circ \Phi_{t_n}^{(n)}(a_0) = \tilde{a}$$

¹Definisce un diffeomorfismo locale, non globale, infatti \mathbb{R}^n non è compatto, il toro sì.

Possiamo riscrivere l'equazione come

$$\frac{\partial}{\partial t_k}(\Phi_{t_k}^k(\tilde{a})) = X_k(\tilde{a})$$

Da cui

$$\frac{\partial}{\partial t_k}(\Phi_t) = \frac{\partial}{\partial t_k}(\Phi_{t_k}^k(\tilde{a})) = X_1(\tilde{a}) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t_k}(\Phi_t)|_{t=0} = X_k(a_0)$$

Dunque, essendo i campi vettoriali X_i linearmente indipendenti la Jacobiana è non degenera e quindi la trasformazione è localmente invertibile. La seconda osservazione è che $\Phi_{\mathbf{t}}$ è un'azione transitiva cioè, dato un punto $b \in M$ esiste $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$b = \Phi_{\mathbf{t}}(a_0)$$

Infatti essendo M una varietà connessa, è anche connessa per archi²; possiamo quindi considerare una curva γ che congiunga a_0 a b . Per quanto dimostrato precedentemente dato un qualsiasi $a_\gamma \in \gamma$ esiste un intorno U di a_γ diffeomorfo ad un intorno di $\mathbf{t} = 0$. Possiamo quindi ricoprire la curva γ con questi intorni e per compattezza di γ possiamo considerarne un sotto-ricoprimento finito. Indichiamo quindi i punti definiti dalla costruzione con $a_1, \dots, a_m = b$; dunque, esiste \mathbf{t}_1 tale che $a_1 = \Phi_{\mathbf{t}_1}(a_0)$, \dots , \mathbf{t}_m tale che $a_m = \Phi_{\mathbf{t}_m}(a_{m-1})$ da cui

$$b = \Phi_{\mathbf{t}_m} \circ \Phi_{\mathbf{t}_{m-1}} \circ \dots \circ \Phi_{\mathbf{t}_1}(a_0) = \Phi_{\mathbf{t}_1 + \dots + \mathbf{t}_m}(a_0) = \Phi_{\mathbf{t}}(a_0)$$

ovvero l'azione è transitiva.

- Consideriamo un generico punto $a \in M$ possiamo definire l'insieme, detto *gruppo stazionario*

$$\Gamma_a = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n \mid \Phi_{\mathbf{t}}(a) = a\}$$

che si verifica in modo immediato essere un gruppo, in particolare un sottogruppo di \mathbb{R}^n . Dimostriamo che il gruppo non dipende da punto, ovvero $\Gamma_a = \Gamma$. Siano $a, b \in M$ e consideriamo Γ_a, Γ_b , e mostriamo che $\Gamma_a \subset \Gamma_b$. Sia $\tilde{t} \in \Gamma_a$, allora $\Phi_{\tilde{t}}(a) = a$; ma, per la transitività esiste $\tau \in \mathbb{R}^n$ tale che $b = \Phi_{\tau}(a)$, dunque

$$\Phi_{\tilde{t}}(b) = \Phi_{\tilde{t}}(\Phi_{\tau}(a)) = \Phi_{\tau}(\Phi_{\tilde{t}}(a)) = \Phi_{\tau}(a) = b$$

Allo stesso modo $\Gamma_b \subset \Gamma_a$. Dimostriamo ora che Γ è in particolare un gruppo discreto. Supponiamo per assurdo esista un $t \in \Gamma$ che contiene in ogni suo intorno V punti di Γ , ovvero $V \cap \Gamma \neq \emptyset$. Dato $a \in M$ consideriamo $b = \Phi_t(a)$; sappiamo che esiste un intorno di b diffeomorfo ad un intorno U di t e, per ipotesi, $U \cap \Gamma \neq \emptyset$; sia quindi $\tau \in U \cap \Gamma$. Ma allora, in quanto Γ non dipende dal punto

²Per il Teorema di Whitney, possiamo pensare M immersa in uno spazio reale e dunque, come suo sottoinsieme, è anche connesso per archi.

$$\Phi_t(b) = b = \Phi_\tau(b)$$

Da cui la contraddizione, in quanto Φ_t è un diffeomorfismo.

• Per quanto dimostrato nel Lemma ad inizio capitolo, Γ è isomorfo a \mathbb{Z}^k , con $0 \leq k \leq n$; concludiamo quindi la dimostrazione considerando il prodotto diretto

$$\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} = \left\{ (\varphi_1, \dots, \varphi_k ; x_1, \dots, x_{n-k}) \right\}, \quad \varphi \bmod 2\pi$$

fra k circonferenze e $n - k$ rette e la proiezione canonica $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$

$$\Pi(\varphi ; x) = (\varphi \bmod 2\pi ; x)$$

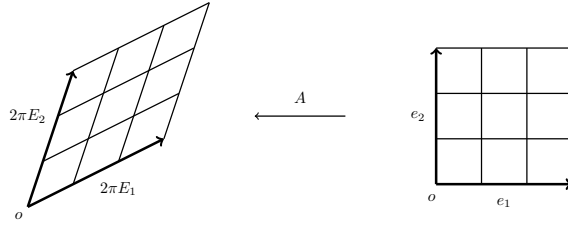
Completiamo la base dei vettori del gruppo stazionario con dei vettori arbitrari ottenendo così una base

$$E_1, \dots, E_k, \tilde{E}_{k+1}, \dots, \tilde{E}_n$$

di \mathbb{R}^n . Ora vogliamo mandare la base standard e_1, \dots, e_k in quella del gruppo stazionario Γ ; per farlo, consideriamo l'isomorfismo lineare $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che realizza questa corrispondenza, definito da

$$\begin{aligned} A(e_i) &= 2\pi E_i, \quad i = 1, \dots, k \\ A(e_i) &= \tilde{E}_i, \quad i = k+1, \dots, n \end{aligned} \tag{2.2}$$

dove e_i denota un vettore della base standard di \mathbb{R}^n .



Otteniamo così le seguenti relazioni fra gli spazi

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xleftarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \Phi_t \\ \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^{n-k} & \xleftarrow{\alpha} & M \end{array}$$

Dunque ci basta chiudere il cerchio dimostrando che l'applicazione delle carte A definisce un diffeomorfismo

$$\alpha : M \rightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

Dato quindi un generico punto $a \in M$ come visto esiste un suo intorno aperto dominio della carta Φ_t , dunque

$$a \mapsto t \in \mathbb{R}^n$$

tale che $\Phi_t(a_0) = a$, per qualche $a_0 \in M$; se le coordinate di t sono $t = (t_1, \dots, t_n)$ otteniamo che

$$\begin{aligned} A(t_1 e_1 + \dots + t_k e_k + t_{k+1} e_{k+1} + \dots + t_n e_n) &= \\ &= t_1 A(e_1) + \dots + t_k A(e_k) + t_{k+1} A(e_{k+1}) + \dots + t_n A(e_n) \quad (2.3) \\ &= 2\pi t_1 E_1 + \dots + 2\pi t_k E_k + t_{k+1} \tilde{E}_{k+1} + \dots + t_n \tilde{E}_n \end{aligned}$$

Dunque il vettore delle coordinate rispetto a questa base è il vettore

$$A(t) = (2\pi t_1, \dots, 2\pi t_k, t_{k+1}, \dots, t_n)$$

Se indichiamo quindi le coordinate su $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ con $(\varphi_1, \dots, \varphi_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ risultano:

$$\varphi_i = 2\pi t_i \quad x_{k+i} = t_{k+i}$$

Il gruppo Γ sarò quindi contenuto in un sottospazio di \mathbb{R}^n di dimensione k , possiamo quindi considerare il quoziente

$$\mathbb{R}^k / \Gamma \quad \text{dove} \quad t \sim t' \iff t - t' \in \Gamma$$

ottieniamo che

$$t \bmod \Gamma \longleftrightarrow \Phi_j \in [0, 2\pi]$$

e quindi se Φ_t era un diffeomorfismo locale, diventa globale rispetto al quoziente. Dunque, M è diffeomorfa a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Ma, essendo M compatta per ipotesi, deve essere $k = n$ e dunque M è un toro n -dimensionale \mathbb{T}^n . \square

Per via del Lemma appena dimostrato e per le considerazioni fatte ad inizio capitolo, il secondo punto del Teorema di Liouville-Arnol'd è dimostrato. Continuiamo ora la dimostrazione del Teorema, ovvero dimostriamo il seguente.

Proposizione. iii)

Il flusso di fase con funzione di Hamilton $H = F_1$ determina su M un moto definito in coordinate angolari $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ come soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad \omega = \omega(\bar{I})$$

Dimostrazione.

Consideriamo il sistema con Hamiltoniana $H = F_1$ e un punto $a \in T^*Q$; rinominiamo la carta $\Phi_t(a) : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ espressa in coordinate locali (t_1, \dots, t_n) in modo da indicare il primo parametro con il tempo t

$$(t_1, \dots, t_n) = (t, s_2, \dots, s_n) = (t, s)$$

Facciamo ora evolvere il flusso in un intorno di a ovvero consideriamo $(t^0, s) \rightarrow (t^0 + h, s) = (t, s)$ con h sufficientemente piccolo da rimanere nell'intorno di (t^0, s) otteniamo

$$b = \Phi_{(t,s)}(a) = \left(\Phi_{t^0+h} \circ \Phi_{s_2} \circ \dots \circ \Phi_{s_n} \right)(a)$$

dove

$$a = \Phi_{(t^0, s)}(a) = \left(\Phi_{t^0} \circ \Phi_{s_2} \circ \cdots \circ \Phi_{s_n} \right)(a)$$

Possiamo riassumere la situazione nel seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} b = \Phi_t(a) & \xrightarrow{\Phi_{(t, s)}} & \Phi_{(t^0, s) + h e_1}(a) \\ \downarrow \Pi & & \downarrow \Phi_t \\ (t, s) & \xrightarrow{\text{evoluzione}} & (t^0 + h, s) = (t^0, s) + h e_1 \end{array}$$

Nelle coordinate angolari abbiamo quindi che

$$(t^0, s) = \frac{1}{2\pi} \left(\varphi_1^0 E_1 + \cdots + \varphi_n^0 E_n \right)$$

Mentre, se scriviamo e_1 rispetto alla base E_1, \dots, E_n

$$e_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i$$

Ricaviamo che

$$\begin{aligned} (t, s) = (t^0 + h, s) &= \frac{1}{2\pi} \left(\varphi_1^0 E_1 + \cdots + \varphi_n^0 E_n \right) + h e_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\varphi_1^0 E_1 + \cdots + \varphi_n^0 E_n \right) + h \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i \end{aligned} \tag{2.4}$$

Da cui otteniamo che

$$(t, s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n [\varphi_i + 2\pi \lambda_i h] E_i$$

Ma, allora, il flusso è lineare e le equazioni evolvono come

$$\varphi_i^0 \rightarrow \varphi_i = \varphi_i^0 + 2\pi \lambda_i (t - t^0)$$

Definiamo quindi le *frequenze*

$$\omega_i = 2\pi \lambda_i$$

Osservato che ogni frequenza dipende dalle coordinate costanti $\omega = \omega(\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_n)$ le coordinate angolari variano uniformemente

$$\varphi_i(t) = \varphi_i^0 + \omega_i t \quad \dot{\varphi}_i = \omega_i(\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_n)$$

dove è stato posto per semplicità $t^0 = 0$; da ciò la tesi. □

Osservato che nella carta $\{\varphi_i\}$ le traiettorie sono rette, diremo le loro immagini sul toro *eliche*.

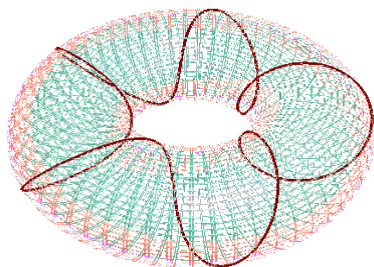


Figura 2.1: Un'elica chiusa sul toro \mathbb{T}^2 .

rispetto ad n variabili che indichiamo con $y_1 = x_{i_1}, \dots, y_n = x_{i_n}$ fra quelle che compongono x . Quindi indicando le rimanenti coordinate con \tilde{x}_i possiamo scrivere la carta come $x = (y, \tilde{x})$. Invertendo la funzione

$$\tilde{F} = (F_1, \dots, F_n) : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}^n$$

rimane definita una sottovarietà regolare³ N di dimensione n , identificata dalle variabili

$$y(I) = y(I_1, \dots, I_n)$$

dove I varia in un intorno $V \subset \mathbb{R}^n$ di $\bar{I} = (\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_n)$. Ma, per ogni punto di N determinato fissando i valori di $\Gamma = I$, possiamo utilizzare la mappa indotta dai flussi

$$\Phi_t : M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

per costruire una carta $x = x(y(I), \tilde{x}(t)) = x(I, t)$. Infatti, ogni punto $P \in M_I$ ha le n coordinate y_1, \dots, y_n costanti in quanto dipendono da I_1, \dots, I_n mentre le rimanenti variabili dipendono dalla mappa indotta dai flussi definita per ogni $I \in V$ da

$$\Phi_t : t \rightarrow (y(I), \tilde{x}(t))$$

Rimane così definita la carta

$$x = (y(I), \tilde{x}(t)) = x(I, t)$$

che è differenziabile e invertibile nell'intorno $V \times W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, con W intorno di $0 \in \mathbb{R}^n$. Dunque essendo differenziabile ed invertibile, abbiamo costruito un diffeomorfismo locale fra un intorno $U \subset T^*Q$ di $P \in M$ e $V \times W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Essendo inoltre l'azione di Φ_t transitiva, dato un altro punto $P' \in M$, esiste un t' tale che

$$\Phi_{t'}(P) = P'$$

con $\Phi_{t'}(U)$ diffeomorfo ad U e dunque anche a $V \times W$. Concludiamo che esiste un intorno U di P a cui possiamo associare le coordinate $(I, t) \in V \times \mathbb{R}^n$ mediante $x = x(I, t)$. Naturalmente, questo non è un diffeomorfismo, in quanto

³In quanto \tilde{F} definisce un diffeomorfismo con un intorno $V \in \mathbb{R}^n$.

non invertibile; dalla costruzione di \mathbb{T}^n svolta nella dimostrazione del Lemma precedente otteniamo però che, quozientando rispetto al gruppo stazionario, $x = x(I, \varphi)$ è un diffeomorfismo fra l'intorno U di P e $V \times \mathbb{T}^n$, da cui la tesi.

2.2 Le Variabili Azione - Angolo

Con il Teorema di Liouville-Arnol'd abbiamo costruito sulla varietà M_I delle coordinate angolari $\varphi_1, \dots, \varphi_n \mod 2\pi$. Sotto le medesime condizioni, si possono scegliere per lo spazio delle fasi delle coordinate simplettiche (J, φ) dove le J_i sono dette *azioni*, le φ_i *angoli* tali che gli integrali primi dipendano solo dalle azioni J , mentre gli angoli siano le coordinate che descrivono il Toro associato.

Definizione.

Diremo un sistema Hamiltoniano autonomo di Hamiltoniana $H(p, q)$ con n gradi di libertà *completamente canonicamente integrabile* se esiste una trasformazione canonica

$$p = p(J, \varphi)$$

$$q = q(J, \varphi)$$

(con p e q dipendenti in modo 2π periodico dagli angoli φ_i) a nuove variabili $(J, \varphi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$, dette *azione-angolo*, tali che la nuova Hamiltoniana K sia funzione solamente delle azioni J

$$K = H(p(J, \varphi), q(J, \varphi)) = K(J)$$

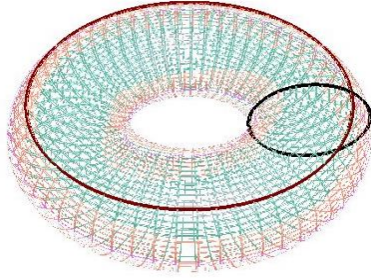


Figura 2.2: Le due curve γ_i e γ_j su \mathbb{T}^2 in figura non sono omotope.

appartenente ad una classe di omotopia di un diverso S^1 ⁴. Costruiti n cicli $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ indipendenti e non omotopi, ad ognuno di essi possiamo associare una variabile, tramite l'1-forma differenziale α definita nel Teorema di Darboux.⁵ Diamo quindi la seguente definizione.

Alla base della costruzione delle variabili azione, c'è il gruppo fondamentale del toro n dimensionale \mathbb{T}^n . Infatti, essendo il prodotto di n circonferenze

$$\mathbb{T}^n \simeq S^1 \times \dots \times S^1$$

ed essendo il gruppo fondamentale di S^1 isomorfo a \mathbb{Z} , il gruppo di \mathbb{T}^n è isomorfo a \mathbb{Z}^n . Quindi, fissato un valore di I , facendo variare separatamente le n variabili angolari $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ in $[0, 2\pi]$ si ottengono n curve chiuse non omotope su \mathbb{T}^n , dette *cicli*, ognuna ap-

⁴Condizione di *indipendenza* dei cicli.

⁵Osserviamo che le variabili non sono uniche, in quanto dipendono dalla scelta delle classi di omotopia dei cicli $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

Definizione.

Diremo variabili *azione* le variabili (J_1, \dots, J_n) definite come

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} p_j dq^j$$

sugli n cicli indipendenti e non omotopi γ_i , con $i = 1, \dots, n$.

Affinchè le variabili azione siano ben definite e canoniche è necessario che siano ognuna ugualmente definita per cicli omotopi e che siano integrali primi in involuzione. Il Lemma di Liouville e la proposizione successiva, dimostrano questo fatto.

Lemma. *di Liouville*

Sotto le ipotesi del Teorema di Liouville-Arnol'd, indicati con F_1, \dots, F_n gli integrali primi, allora, se

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j}\right) \neq 0$$

esiste localmente una funzione $S = S(I, q, t)$ tale che

$$[p_i dq^i - H(p, q) dt]_{|(p, q) \in M_I} = dS(I, q, t)$$

Risulta essere un integrale completo dell'equazioni di Hamilton-Jacobi corrispondente ad $H = F_1$, ovvero il sistema è integrabile per quadrature.

Dimostrazione.

Osserviamo che, scelta come H uno qualsiasi degli integrali primi, H rimane costante su M , in quanto essendo in involuzione con ogni altro integrale primo, è costante anche sui loro flussi. Dunque, poniamo $H|_{M_I} = E(I)$. Allora, posto

$$W(I, q) = S(I, q, t) + E(I)t$$

l'equazione diventa

$$p_i dq^i = dW(I, q)$$

e dunque la varietà è Lagrangiana. La condizione

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j}\right) \neq 0$$

assicura per il teorema della funzione implicita che esistono localmente n funzioni regolari che permettono di scrivere

$$p_i = p_i(I, q) \quad e \quad F_i(p(I, q), q) = \bar{I}_i$$

per $i = 1, \dots, n$. Cerchiamo quindi una funzione W che soddisfi

$$p_i(I, q) dq^i = dW(I, q)$$

L'esistenza di una funzione W che soddisfa l'equazione sopra è garantita almeno localmente se l'1-forma è chiusa, ovvero per ogni $j, h = 1, \dots, n$ vale

$$\frac{\partial p_k}{\partial q_j} = \frac{\partial p_j}{\partial q_k}$$

Ovvero la matrice $B_j^k = \left(\frac{\partial p_j}{\partial q^k} \right)$ è simmetrica. Derivando però $F_i(p(I, q), q) = \bar{I}_i$ rispetto a q^k si ottiene che

$$\frac{\partial F_i}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q^k} + \frac{\partial F_i}{\partial q^k} = 0$$

Ponendo $A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial p_j}$ e $C_i^k = \frac{\partial F_i}{\partial q^k}$, otteniamo quindi che

$$B = -A^{-1}C$$

e dunque

$$\frac{\partial p_k}{\partial q^j} = \frac{\partial p_j}{\partial q^k} \Rightarrow -A^{-1}C = -C^t A^{-t}$$

Ovvero

$$CA^t - AC^t = 0$$

che scritta in componenti diventa

$$\frac{\partial F_i}{\partial q^k} \frac{\partial F_j}{\partial p_k} - \frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{\partial F_j}{\partial q^k} = \{F_i, F_j\} = 0$$

Che, essendo le F_1, \dots, F_n in involuzione, è verificata. Dunque su M la funzione W è definita da

$$W(I, q) = \int_{q_0}^q p_i(I, \xi) d\xi^i$$

Calcolato lungo un cammino in M che congiunge q_0 a q . Si può poi estendere W a valori di F non costanti grazie all'arbitrarietà di \bar{I} . Mostriamo ora che S risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi. Consideriamo

$$H(p, q) = H(p(I, q), q) = H(I, q)$$

Fissato $F = I$, si ottiene

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q^i} = \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial p_i}{\partial q^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} = -\dot{p}_i + \frac{\partial p_i}{\partial q^j} \dot{q}^j = -\dot{p}_i + \dot{p}_i = 0$$

Dunque H non dipende dalle q e l'Hamiltoniana si può esprimere mediante I_1, \dots, I_n

$$H(p(I, q), q) = H(I)$$

Posto allora

$$S(I, q, t) = W(I, q) - H(I)t$$

essa soddisfa

$$[p_i dq^i - H(p, q) dt]_{|(q, p) \in M_K} = dS(I, q, t)$$

ed S è soluzione dell'equazioni di Hamilton-Jacobi, infatti dalla definizione di $W(I, q)$

$$p_i = \frac{\partial W(I, q)}{\partial q^i} = \frac{\partial S}{\partial q^i}$$

e

$$\det\left(\frac{\partial^2 W}{\partial q^i \partial I_j}\right) = \det\left(\frac{\partial p_i}{\partial I_j}\right) \neq 0$$

per ipotesi. Concludiamo così che

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Ed è un integrale completo, poichè dipende dalle n costanti $\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_n$ e H . \square

Osserviamo che la condizione

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j}\right) \neq 0$$

non è restrittiva in quanto la condizione di indipendenza di F_1, \dots, F_n assicura che esistono n coordinate canoniche x_{i_1}, \dots, x_{i_n} tali che

$$\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})} \neq 0$$

ma si dimostra che lo scambio di coordinate canoniche è una trasformazione completamente canonica, dunque possiamo sempre ricondurci alla forma del Teorema ⁶. Possiamo ora dimostrare le proprietà delle variabili azione.

Proposizione.

Le variabili azione non dipendono dalla scelta dei cicli γ_i all'interno della stessa classe di omotopia, ovvero, se γ'_i è il nuovo ciclo ottenuto da una deformazione continua di γ_i

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_i} p_j dq^j = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma'_i} p_j dq^j$$

Inoltre dipendono solamente dagli integrali primi F_1, \dots, F_n e sono indipendenti e in involuzione.

Dimostrazione.

L'indipendenza dalla scelta di curve omotope deriva dal Lemma di Liouville, che ci dice che la forma $p_i dq^i = dW$ è localmente esatta e dunque il suo integrale è invariante per curve omotope; inoltre, la singola variabile J_k non dipende dal relativo angolo φ_k e nemmeno dagli altri φ_j per $j \neq k$, in quanto la variazione degli altri angoli genera una deformazione continua della curva e quindi,

⁶In particolare, la trasformazione è del tipo $q_{i_k} = -p_{i_k}$

per quanto detto precedentemente, J_k rimane invariante. Dunque, le azioni dipendono solo dagli integrali primi F_1, \dots, F_n e sono in involuzione, infatti

$$\{J_i, J_j\}_{|(q,p)} = \sum_{\nu,h=1}^n \frac{\partial J_i}{\partial F_\nu} \frac{\partial J_j}{\partial F_\mu} \{F_\nu, F_\mu\}_{|(q,p)} = 0$$

Sempre per il Lemma di Liouville, si ha che la funzione caratteristica W è la funzione generatrice di una trasformazione di coordinate completamente canonica a nuove coordinate β, F , dove F sono gli integrali primi, mentre

$$\beta^i = \frac{\partial W}{\partial F_i}$$

Possiamo allora definire le azioni come

$$J_k = \frac{1}{2\pi} F_j \int_{\gamma_i} d\beta^j$$

Posto quindi $\Delta_i \beta^j = \int_{\gamma_i} d\beta^j$, possiamo calcolare la derivata delle azioni rispetto agli integrali primi ottenendo

$$\frac{\partial J_k}{\partial F_j} = \frac{1}{2\pi} \Delta_i \beta^j$$

Indicato con

$$\Delta_i \beta = (\Delta_i \beta^1, \dots, \Delta_i \beta^n)$$

Osserviamo inoltre che $\det(\Delta_i \beta^j) \neq 0$ poiché $\Delta_1 \beta, \dots, \Delta_n \beta$ devono essere indipendenti, per indipendenza dei cicli γ_i . □

Per la proposizione appena dimostrata, le variabili azione costituiscono un insieme di integrali primi indipendenti e in involuzione per H . Quindi, per il Lemma di Liouville, la funzione

$$W(J, q) = \int_{q_0}^q p_i dq^i|_{M_J}$$

genera una trasformazione completamente canonica a nuove variabili (J, φ) e la nuova Hamiltoniana H' è funzione delle sole variabili J . Dimostriamo quindi che le φ^i sono effettivamente degli angoli; integrando lungo γ_i , l'incremento di $W(J, q)$ è

$$\Delta_i W = 2\pi J_i$$

e quindi la variabile φ^k varia come

$$\Delta_i \varphi^k = \Delta_i \frac{\partial W}{\partial J^k} = \frac{\partial}{\partial J^k} (\Delta_i W) = 2\pi \delta_{ik}$$

Per cui $\varphi \in \mathbb{T}^n$.

Esempio 1. *Sistema di Oscillatori Armonici*

Consideriamo ora un sistema composto da n oscillatori armonici lineari di massa m_i , ognuno descritto dalla coordinata (p_i, q_i) ; al sistema è associata l'hamiltoniana

$$H(p, q) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2 + m_i^2 \omega_i^2 q_i^2}{2m_i}$$

Gli integrali primi del sistema sono proprio le hamiltoniane dei singoli oscillatori; indicati con

$$I_k = \frac{p_i^2 + m_i^2 \omega_i^2 q_i^2}{2m_i}$$

Naturalmente sono indipendenti ed in involuzione; i rispettivi cicli, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ sono le curve

$$\gamma_i = \{(p_i, q_i) \mid p_i^2 + m_i^2 \omega_i^2 q_i^2 = 2m_i I_i\}$$

che parametrizzata diventa

$$\gamma_i(q_i) = (q_i, \sqrt{2m_i I_i - m_i^2 \omega_i^2 q_i^2})$$

Ponendo $p_i = 0$ si ottengono gli estremi $q_i = \pm \frac{\sqrt{2m_i I_i}}{m_i \omega_i} = \pm a$. Le azioni sono date quindi dall'integrale

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_i} p_i dq_i = \frac{\sqrt{2m_i I_i}}{2\pi} \int_{-a}^a \sqrt{1 - \left(\frac{q_i}{a}\right)^2} dq_i$$

Posto $s = \frac{q_i}{a}$ possiamo riscrivere l'integrale come

$$J_i = a \frac{\sqrt{2m_i I_i}}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1 - s^2} ds = a \frac{\sqrt{2m_i I_i}}{2\pi} \pi = \frac{I_i}{\omega_i}$$

Dove abbiamo utilizzato il fatto che l'integrale in s non è altro che la lunghezza di una mezza circonferenza di raggio unitario. La funzione generatrice della trasformazione è quindi

$$W(J, q) = \int_{q_0}^q p_i(J, \xi) d\xi^i = \sum_{i=1}^n \int_{q_0}^{q_i} \pm \sqrt{2m_i \omega_i J_i - m_i^2 \omega_i^2 \eta^2} d\eta$$

Mentre le variabili angolari sono, per i valori positivi con $q_0 = 0$

$$\varphi_i = \frac{\partial W(J, q)}{\partial J_i} = \int_0^{q_i} \frac{m_i \omega_i}{\sqrt{2m_i \omega_i J_i - m_i^2 \omega_i^2 \eta^2}} d\eta = \arcsin \left(\sqrt{\frac{m_i \omega_i}{2J_i}} q_i \right)$$

2.3 I Moti Quasi Periodici

Studiando l'evoluzione delle equazioni del moto su \mathbb{T}^n , se ne scoprono importanti proprietà. In particolare si creano sostanzialmente due possibilità per l'orbita: o è chiusa (e quindi periodica) o ricopre tutto il toro in modo denso. Ancora più sorprendente è il fatto che la natura dell'orbita è sostanzialmente legata alla razionalità o meno delle frequenze associate al moto. Un caso che rende molto bene l'idea di ciò di cui stiamo parlando è il caso di un moto sul toro due-dimensionale. Dimostriamo il seguente.

Proposizione.

Consideriamo la funzione di evoluzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \\ t &\rightarrow [\omega_1 t, \omega_2 t] \end{aligned}$$

posto $\omega = \frac{\omega_2}{\omega_1}$, si ha una delle seguenti:

i) Se $\omega \in \mathbb{Q}$ la mappa f non è iniettiva e, in particolare, l'orbita è un'elica chiusa e periodica.

ii) Se $\omega \notin \mathbb{Q}$ la mappa f è iniettiva e, in particolare, l'orbita è densa su \mathbb{T}^2 .

Dimostrazione.

Studiamo l'iniettività di f . Siano $t, t' \in \mathbb{R}$ tali che $f(t) = f(t')$, ovvero

$$[t, \omega t] = [t', \omega t']$$

Questo significa che esistono due interi m, n tali che

$$\begin{aligned} t - t' &= 2\pi m \\ \omega(t - t') &= 2\pi n \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sostituendo la prima equazione nella seconda,

$$\omega = \frac{n}{m}$$

ovvero ω è razionale. Dunque f è iniettiva se e solo se ω è irrazionale. Quindi se ω è razionale dato un qualsiasi punto iniziale $p \in \mathbb{T}^2$, esiste un tempo T tale che

$$f(p) = f^T(p)$$

ovvero l'orbita è chiusa e periodica. Se invece ω è irrazionale ovvero f è iniettiva, mostriamo invece che l'orbita è densa in \mathbb{T}^2 . Consideriamo un qualsiasi punto $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{T}^2$ e fissiamo $\varphi_2 = \bar{\varphi}$. Dunque possiamo considerare la sezione orizzontale su \mathbb{T}^n data da $(\bar{\varphi}, \varphi_1)$. Osserviamo che la sezione non è altro che una circonferenza S^1 , che in particolare è parametrizzata da $\varphi_2 = \varphi$. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$ consideriamo quindi la mappa $f : S^1 \rightarrow S^1$ definita da

$$f(\varphi) = [\varphi + \alpha]$$

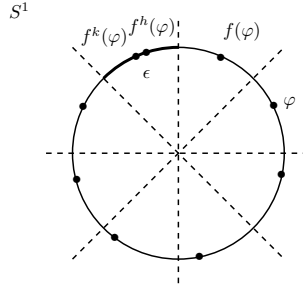
Iterandola, le sue potenze sono definite da

$$f^n(\varphi) = [\varphi + n\alpha]$$

L'idea è di dimostrare che l'insieme $\{f^n(\varphi) \mid n \in \mathbb{N}\}$ è denso nella sezione, ovvero in S^1 . In questo modo, per l'arbitrarietà della sezione, si ottiene anche la tesi del Teorema. Consideriamo un generico intervallo I in S^1 di ampiezza d e un naturale n_0 tale che $\epsilon = \frac{2\pi}{n_0} < d$. Dividiamo S^1 in n_0 parti di ampiezza ϵ e prendiamo gli $N > n_0$ punti definiti da

$$\varphi, f(\varphi), f^2(\varphi), \dots, f^{N-1}(\varphi)$$

Sono $N > n_0$ punti in S^1 che per l'iniettività di f sono distinti. Allora almeno due di loro devono stare nello stesso intervallo, ovvero hanno distanza minore di ϵ .



Esistono quindi due interi h, k tali che

$$d(f^h(\varphi), f^k(\varphi)) < \epsilon$$

Posto quindi $\tau = h - k$ e $f^k(\varphi_k) = \varphi_k$ Si ha che

$$d(f^\tau(\varphi), \varphi_k) < \epsilon$$

Ma le traslazioni preservano le distanze, dunque la relazione vale anche per il dato iniziale φ , ovvero

$$d(f^\tau(\varphi), \varphi) < \epsilon$$

Dunque la successione

$$f^\tau(\varphi), f^{2\tau}(\varphi), \dots$$

ha passo minore di ϵ e quindi per \tilde{N} sufficientemente grande entra in I , ovvero

$$f^{\tilde{N}\tau}(\varphi) \in I$$

da cui la tesi. □

Nel caso di un toro n dimensionale \mathbb{T}^n , si possono generalizzare le considerazioni fatte precedentemente; in particolare la natura dell'orbita varia a seconda

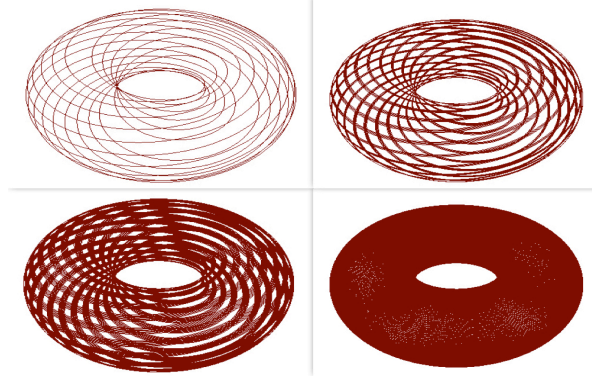


Figura 2.3: *Eliche dense su \mathbb{T}^2 al crescere del tempo*

della dimensione dello spazio delle soluzioni dell'equazione lineare *diofantea*⁷ associata al vettore di frequenze. Osserviamo che il legame con l'irrazionalità-razionalità non viene perso in quanto la dimensione dello spazio delle soluzioni di tale equazione è di fatto legato alla razionalità o meno dei coefficienti.

Definizione.

Dato un vettore di frequenze $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ diremo che le sue componenti sono *non risonanti* se sono linearmente indipendenti sul campo dei numeri razionali, ovvero sono tali per cui

$$\langle k, \omega \rangle \neq 0 \quad \forall k \neq 0, k \in \mathbb{Z}^n$$

Mentre le diremo "*risonanti*" se

$$\langle k, \omega \rangle = 0 \quad \text{per qualche } k \neq 0, k \in \mathbb{Z}^n$$

Possiamo così dare una definizione precisa di cosa intendiamo con lo spazio delle soluzioni.

Definizione.

Sia $\omega \in \mathbb{R}^n$, diremo *modulo di risonanza* associato al vettore di frequenze ω , il complemento ortogonale intero di ω , ovvero l'insieme

$$\Theta_\omega = \{m \in \mathbb{Z}^n \mid m \cdot \omega = 0\}$$

In particolare, se la dimensione del modulo di risonanza Θ_ω è nulla, la frequenza viene detta *non risonante*. Possiamo quindi generalizzare la proposizione dimostrata ad inizio paragrafo; si riesce a dimostrare infatti il seguente:

Teorema.

Sia Θ_ω il modulo associato al vettore di frequenze ω , allora si hanno le seguenti:

⁷Solitamente le equazioni a coefficienti interi di cui si cercano soluzioni intere, vengono chiamate con questo nome; nel nostro caso, l'equazione è molto semplice, essendo lineare.

- i) L'orbita è periodica se e solo se $\dim(\Theta_\omega) = n - 1$ ⁸*
- ii) Se $\dim(\Theta_\omega) = 0$, l'orbita è densa su \mathbb{T}^n .*
- iii) Se $\dim(\Theta_\omega) = k$ con $0 < k < n$, allora l'orbita è densa su toro di dimensione $n - k$, immerso in \mathbb{T}^n .*

Il moto associato ai casi *ii)* e *iii)* del Teorema viene detto *quasi-periodico*. Osserviamo inoltre, in conclusione del capitolo, che *le frequenze risonanti e non risonanti formano sottoinsiemi densi di \mathbb{R}^n* , per via della densità dei numeri razionali ed irrazionali in \mathbb{R} .

⁸In questo caso si parla di *risonanza completa*.

Capitolo 3

La Teoria delle Perturbazioni

Potremmo dire che Teoria delle Perturbazioni nasce e viene confermata in rami della fisica molto diversi fra loro: da una parte gli studi di Henry Poincaré di meccanica celeste, culminati con la dimostrazione della non esistenza di soluzioni analitiche per il celebre *Problema dei tre corpi*, dall'altra la conferma della sua validità negli innovativi e sorprendenti "esperimenti" di calcolo¹ eseguiti da Enrico Fermi utilizzando i computer d'avanguardia dei laboratori di Los Alamos. Questi due esempi fondamentali sono stati spunto di ricerche e riflessioni che hanno portato al Teorema- KAM, come vedremo totalmente contro-intuitivo, che porta il nome dei tre matematici che lo dimostrarono: Kolmogorov, Arnol'd e Moser. Per comprendere quindi l'importanza di tale Teorema, è necessario approfondire questi due aspetti della Teoria.

3.1 Il Problema dei Tre Corpi

Henry Poincaré, dimostrata appunto l'impossibilità di ricavare le orbite associate a tre corpi celesti vicendevolmente influenzati dalle rispettive attrazioni gravitazionali, cercò di considerare una delle tre interazioni come *perturbazione*, del sistema associato agli altri due corpi che, come sappiamo, è completamente risolubile². Se consideriamo ad esempio lo studio del sistema solare ed in particolare dell'orbita terrestre sotto l'influenza gravitazionale del Sole e di Giove, essendo il rapporto fra la massa di Giove e quella del Sole $\sim 10^{-3}$, possiamo pensare che forza che esercita il primo sulla Terra porti sostanzialmente ad un "disturbo" dell'orbita, ovvero di poter scrivere l'hamiltoniana del problema come

$$H(p, q, \varepsilon) = \frac{|p^2|}{2} - \frac{K}{|q|} - \varepsilon \left[\frac{K}{|q - r_G(t)|} + K \frac{r_G(t) \cdot q}{|r_G(t)|^3} \right]$$

¹Gli elaboratori venivano utilizzati prevalentemente come macchine per eseguire grandi moli di calcoli, fu Fermi per primo ad avere l'idea di usarli come simulatori per studiare l'evoluzione dei sistemi fisici.

²Detto *Problema Ristretto dei Tre Corpi*

dove ε è il rapporto fra la massa di Giove e quella del sole, K è una costante proporzionale alla massa del Sole, r_G è il vettore posizione di Giove, la massa della Terra è posta unitaria e le variabili q sono le sue possibili configurazioni. L'ultimo termine è invece l'energia potenziale generalizzata associata alla forza di inerzia dovuta al fatto che il sistema di riferimento ha come origine il sole stesso. Possiamo indicare le due componenti del sistema perturbato

$$h(p, q) = \frac{|p|^2}{2} - \frac{K}{|q|} \quad f(p, q) = - \left[\frac{K}{|q - r_G(t)|} + K \frac{r_G(t) \cdot q}{|r_G(t)|^3} \right]$$

In particolare il coefficiente che governa la perturbazione ε viene detto *piccolo parametro*. Per dare però una definizione più precisa di cosa si intenda con "piccolo" si impone che soddisfi la seguente condizione

Definizione.

Diremo $0 \leq \varepsilon \ll 1$ *piccolo parametro* se, al variare di (q, p) in un compatto K di \mathbb{R}^{2n} , indicata con costante M_K la costante tale che

$$\max_{(p,q) \in K} |f(p, q)| \leq M_K \max_{(p,q) \in K} |h(p, q)|$$

verifica

$$|\varepsilon M_K| \ll 1$$

Questa condizione sulla perturbazione fa sì che l'hamiltoniana perturbata e non perturbata siano vicine in norma uniforme, a distanza minore di ε , infatti

$$|H(p, q, \varepsilon) - H(p, q, 0)| = |h(p, q) + \varepsilon f(p, q) - h(p, q)| = \varepsilon |f(p, q)|$$

e dunque

$$\max_{(p,q) \in K} |H(p, q, \varepsilon) - H(p, q)| = \varepsilon |f(p, q)| \ll 1$$

Possiamo così dare la nozione formale e generale di ciò che intendiamo per "sistema perturbato".

Definizione.

Diremo un sistema Hamiltoniano *quasi integrabile* se la sua funzione hamiltoniana è esprimibile nella forma

$$H(p, q, \varepsilon) = h(p, q) + \varepsilon f(p, q)$$

con $(p, q) \in \mathbb{R}^{2n}$ e $0 \leq \varepsilon \ll 1$ ed $h(p, q)$ è l'hamiltoniana associata ad un sistema completamente integrabile.

Nel caso del problema studiato da Poincaré, l'hamiltoniana h è completamente integrabile, in quanto rappresenta appunto il problema di Keplero, di cui si conosce la soluzione esplicita. Più in generale, ponendo $\varepsilon = 0$, il problema

$$H(p, q, 0) = h(p, q)$$

è per ipotesi completamente integrabile; in virtù del Teorema di Liouville- Arnold possiamo quindi supporre che tale sistema sia rappresentato in variabili azione-angolo; in particolare le variabili J saranno le variabili azione definite in un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n che indicheremo con D , le φ le variabili angolari, definite sul toro n -dimensionale $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$. Dunque, le variabili angolari saranno periodiche di periodo 2π in ogni componente. In questo modo le equazioni del moto divengono, come visto

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^k = \frac{\partial H}{\partial J_k} = \omega^k \\ \dot{J}_k = -\frac{\partial H}{\partial \varphi^k} = 0 \end{cases}$$

$\forall k = 1, \dots, n$, la cui soluzione generale è data da

$$J_k(t) = J_k(0) \quad \varphi^k(t) = \varphi_0^k + \omega_J^k t$$

che rappresentano delle eliche che avvolgono il toro invariante.

$$\mathbb{T}_J = \{J\} \times \mathbb{T}^n$$

con frequenza costante $\omega(J) = (\omega_1(J), \dots, \omega_n(J))$. Dunque, l'intero spazio delle fasi è foliato in una famiglia ad n parametri di tori invarianti su ognuno dei quali il flusso è lineare con frequenza $\omega(J)$. Possiamo quindi riscrivere il problema quasi integrabile nella forma

$$H(J, \varphi, \varepsilon) = h(J) + \varepsilon f(J, \varphi)$$

Osserviamo inoltre che, per ogni toro \mathbb{T}_J al variare di $J \in D$ le frequenze di un generico sistema cambiano; indicato quindi con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme delle frequenze associate alle azioni $J \in D$, possiamo considerare la mappa

$$\nu : D \rightarrow \Omega$$

Che associa ad ogni $J \in D$ il relativo vettore di frequenze. Chiameremo quindi i tori associati a frequenze risonanti e non risonanti rispettivamente *tori risonanti* e *tori non risonanti*. Dalle equazioni di Hamilton, abbiamo in particolare che $\forall J_0 \in D$

$$\nu(J_0) = \frac{\partial h}{\partial J}(J_0)$$

Richiedendo che l'hamiltoniana integrabile h sia non degenera ovvero che

$$\det \left(\frac{\partial^2 h}{\partial J_j \partial J_i} \right) \neq 0$$

otteniamo che ν è un diffeomorfismo fra D e Ω e dunque, in particolare, è un omeomorfismo: come conseguenza di queste considerazioni, essendo le frequenze

risonanti dense in \mathbb{R}^n anche le azioni formano un sottoinsieme denso di \mathbb{R}^n , ovvero *i tori non risonanti e quelli risonanti sono sottoinsiemi densi nello spazio delle fasi; in particolare quelli risonanti sono posti fra quelli non-risonanti come i numeri razionali fra quelli irrazionali*.³

Tornando al sistema quasi integrabile, il metodo perturbativo si pone il problema di trovare una trasformazione completamente canonica che elimini la dipendenza dalle variabili angolari φ dell'hamiltoniana sviluppata al prim'ordine in ε , per poi iterare il procedimento fino ad eliminare la dipendenza per tutti gli ordini (o per un ordine prefissato). Questo significa determinare una funzione generatrice che porti a nuove variabili (J', φ') di seconda specie, ovvero del tipo $W(J', \varphi)$, in modo che la nuova hamiltoniana che dipenda dalle variabili angolari solo nei termini di ordine $o(\varepsilon^2)$ ovvero che sia della forma

$$H'(J', \varphi', \varepsilon) = h'(J') + \varepsilon h'_1(J') + \varepsilon^2 F(J', \varphi', \varepsilon)$$

dove non richiediamo che la funzione F tenda necessariamente a 0 per $\varepsilon \rightarrow 0$, ma che sia quanto meno limitata. Osserviamo che essendo h di per sè indipendente dalle variabili angolari, la trasformazione cercata sarà l'identità all'ordine zero⁴, a cui è associata la funzione generatrice

$$W^{(0)}(J', \varphi) = J'_k \varphi^k$$

Dunque la trasformazione W cercata avrà un'espansione in serie di potenze rispetto ad ε del tipo

$$W(J', \varphi, \varepsilon) = W^{(0)}(J', \varphi) + \varepsilon W^{(1)}(J', \varphi) + o(\varepsilon^2) = J' \cdot \varphi + \varepsilon W^{(1)}(J', \varphi) + o(\varepsilon^2)$$

Ricordando che per una trasformazione di seconda specie

$$J_i = \frac{\partial W}{\partial \varphi^i} \quad \varphi^{i'} = \frac{\partial W}{\partial J'_i}$$

otteniamo la trasformazione

$$\begin{cases} J_i = J'_i + \varepsilon \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \varphi^i}(J', \varphi) + o(\varepsilon^2) & i = 1, \dots, n \\ \varphi^{i'} = \varphi^i + \varepsilon \frac{\partial W^{(1)}}{\partial J'_i}(J', \varphi) + o(\varepsilon^2) & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

In questo modo sostituendo la prima delle due equazioni nel sistema di partenza espresso in coordinate azione-angolo ed imponendo la forma della nuova hamiltoniana ottenuta tramite questa trasformazione, otteniamo che

$$h(J' + \varepsilon \nabla_{\varphi} W^{(1)}) + \varepsilon f(J', \varphi) + o(\varepsilon^2) = h'(J') + \varepsilon h'_1(J') + o(\varepsilon^2)$$

Osserviamo che questo modo sviluppando h_0 in serie di potenze al prim'ordine ed eguagliando le potenze di ε corrispondenti, ritroviamo all'ordine zero

³Citazione tradotta da [1], pag.4.

⁴Si dice che la trasformazione è ε -vicina all'identità.

$$h(J') = h'(J')$$

ovvero che l'hamiltoniana non perturbata è la stessa nelle due forme, come volevamo. Inoltre, per la prima delle due uguaglianze del sistema, l'espansione in serie di potenze del primo termine dell'uguaglianza ha come coefficiente del prim'ordine in ε

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left[h(J' + \varepsilon \nabla_\varphi W^{(1)}) \right] \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial h}{\partial J}(J') \cdot \nabla_\varphi W^{(1)} = \omega(J') \cdot \nabla_\varphi W^{(1)}$$

dove $\omega(J') = \nabla_J h(J')$ è il vettore delle frequenze della nuova hamiltoniana. Eguagliando quindi i coefficienti al prim'ordine in ε dei due membri dell'equazione otteniamo così che

$$\omega(J') \cdot \nabla_\varphi W^{(1)}(J', \varphi) + f(J', \varphi) = h_1(J')$$

con incognite $W^{(1)}(J', \varphi)$ e $h_1(J')$. Fissato un valore per le azioni J , quest'equazione rappresenta un'equazione differenziale alle derivate parziali del prim'ordine lineare su \mathbb{T}^n . In particolare, questa equazione è detta *equazione fondamentale della teoria classica delle perturbazioni*. Se ammette soluzione, ovvero esistono le funzioni h_1 e $W^{(1)}$ che la soddisfano, le equazioni del moto per le nuove variabili diventano

$$\dot{J}'_i = -\frac{\partial}{\partial \varphi_i} [H'(J', \varphi', \varepsilon)] = -\frac{\partial}{\partial \varphi_i} [h'(J') + \varepsilon h'_1(J') + \varepsilon^2 F(J', \varphi', \varepsilon)] = o(\varepsilon^2)$$

per $i = 1, \dots, n$ e dunque per i tempi $t \in [0, \frac{1}{\varepsilon}]$

$$|J'(t) - J'(0)| = o(\varepsilon)$$

ovvero sono quasi costanti. Per quanto riguarda la soluzione dell'equazione, osserviamo alcune cose. Se fissiamo un valore delle azioni J' le funzioni $W^{(1)}(J', \varphi)$ e $f(J', \varphi)$, essendo ben definite sul toro associato $\mathbb{T}_{J'} := \{J'\} \times \mathbb{T}^n$, devono essere periodiche su \mathbb{R}^n . Questo comporta che la media sul toro $\mathbb{T}_{J'}$ del termine

$$\omega(J') \cdot \nabla_\varphi W^{(1)}(J', \varphi)$$

sia nulla in quanto, per la periodicità di $W(J', \varphi)$ rispetto a φ , integrando ogni singola derivata parziale per prima rispetto alla sua variabile, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^n} \oint_{\mathbb{T}^n} \omega(J') \cdot \nabla_\varphi W^{(1)}(J', \varphi) d\varphi_1 \dots d\varphi_n &= \\ &= \sum_i \omega_i(J') \frac{1}{(2\pi)^n} \oint_{\mathbb{T}^n} \frac{\partial W^{(1)}}{\partial \varphi_i}(J', \varphi) d\varphi_1 \dots d\varphi_n = \\ &= \sum_i \omega_i(J') [W(2\pi) - W(0)] \frac{1}{(2\pi)^n} \oint_{\mathbb{T}^{n-1}} d\varphi_1 \dots d\hat{\varphi} \dots d\varphi_n = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Otteniamo così che una condizione necessaria affinché l'equazione fondamentale abbia soluzione è che si verifichi

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \oint_{\mathbb{T}^n} [h'_1(J') - f(J', \varphi)] d\varphi_1 \dots \varphi_n = 0$$

che permette di determinare h'_1 come la media della perturbazione f

$$h'_1(J') = \frac{1}{(2\pi)^n} \oint_{\mathbb{T}^n} f(J', \varphi) d\varphi_1 \dots \varphi_n$$

Ricordiamo inoltre che ogni funzione periodica su $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la cui restrizione al dominio del periodo \mathbb{T}^n sia a quadrato sommabile⁵, può essere espressa in serie di Fourier

$$v(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{v}_m e^{im \cdot x}$$

dove

$$\hat{v}_m = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} v(x) e^{-im \cdot x} dx_1 \dots dx_n$$

Come ultima cosa osserviamo che considerando l'operatore differenziale lineare

$$D_\omega = \omega \cdot \nabla_\varphi$$

sulle funzioni definite su $T_{J'}$, è a coefficienti costanti ed ha autovalori e relative autofunzioni

$$\lambda = im \cdot \omega \quad u_\lambda(\varphi) = e^{im \cdot \varphi}$$

e quindi se ω è non risonante, l'autovalore $\lambda = 0$ di D_ω corrisponde alla scelta del vettore $m \in \mathbb{Z}^n$, $m = 0$, ed ha molteplicità 1. L'equazione fondamentale è così formalmente risolubile⁶, mediante lo sviluppo in serie delle funzioni $W^{(1)}$ e f . A seguito di queste considerazioni, possiamo dimostrare il seguente Teorema.

Teorema.

Se la frequenza ω associata ad un dei tori T_J è non risonante, esiste una soluzione formale $W^{(1)}(J', \varphi)$ dell'equazione fondamentale della teoria delle perturbazioni e la soluzione è unica se si impone che la sua media sia nulla su \mathbb{T}^n .

Dimostrazione.

Sviluppando $W^{(1)}(J', \varphi)$ e $f(J', \varphi)$ in serie di Fourier,

$$f(J', \varphi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_m(J') e^{im \cdot \varphi}$$

$$W^{(1)}(J', \varphi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \hat{W}_m^{(1)}(J') e^{im \cdot \varphi}$$

sostituite le espansioni in serie nell'equazione fondamentale otteniamo

⁵In questo caso consideriamo uguali i periodi di ogni variabile, in quanto siamo interessati alle funzioni definite su \mathbb{T}^n , questa non è quindi la definizione più generale.

⁶Trascurando i problemi di convergenza della serie.

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \left[\hat{W}_m^{(1)}(J') \omega(J') \cdot \nabla_\varphi e^{im \cdot \varphi} + \hat{f}_m(J') e^{im \cdot \varphi} \right] = 0$$

Osservato che

$$\frac{\partial e^{im \cdot \varphi}}{\partial \varphi_k} = im_k e^{im \cdot \varphi}$$

possiamo scrivere il primo termine di ogni somma come

$$\hat{W}_m^{(1)}(J') \omega(J') \cdot \nabla_\varphi e^{im \cdot \varphi} = im \cdot \omega(J') \hat{W}_m^{(1)}(J') e^{im \cdot \varphi}$$

per ogni termine della serie, ovvero per ogni $m \in \mathbb{Z}^n / \{0\}$ deve quindi essere

$$im \cdot \omega(J') \hat{W}_m^{(1)}(J') + \hat{f}_m(J') = 0$$

cui segue che per trovare la soluzione basta porre i coefficienti

$$\hat{W}_m^{(1)}(J') = \frac{\hat{f}_m(J')}{-im \cdot \omega(J')}$$

e sono ben definiti, in quanto essendo la frequenza non risonante, il termine ha denominatore non nullo. La soluzione sarà allora del tipo

$$W^{(1)}(J', \varphi) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \frac{\hat{f}_m(J')}{-im \cdot \omega(J')} e^{im \cdot \varphi}$$

□

Diamo quindi la seguente definizione.

Definizione.

Diremo che una funzione $f : U \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ del tipo $f(J, \varphi)$ ammette uno *sviluppo in serie di fourier generico* se per ogni $J \in U$ e $m \in \mathbb{Z}^n$ esiste un $m' \in \mathbb{Z}^n$ parallelo ad m tale che

$$\hat{f}_{m'}(J') \neq 0$$

Possiamo ora dimostrare il primo fondamentale Teorema di Poincaré.

Teorema. di Poincaré

Dato un sistema quasi integrabile

$$H(J, \varphi, \varepsilon) = h(J) + \varepsilon f(J, \varphi)$$

se $h(J)$ è non degenere in un aperto U e la perturbazione $f(J, \varphi)$ ammette uno sviluppo in serie di Fourier generico, l'equazione fondamentale della teoria delle perturbazioni

$$\omega(J') \cdot \nabla_\varphi W^1(J', \varphi) + f(J', \varphi) = H'_1(J')$$

non ammette soluzioni $W^{(1)}(J', \varphi)$ regolari al variare delle variabili azione J' nell'aperto U .

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo esista una soluzione $W^{(1)}$ regolare rispetto alle azioni nell'aperto U ; essendo h_0 non degenera, possiamo invertire le azioni J' rispetto alle frequenze ω in modo continuo. Ma, essendo l'insieme Ω delle frequenze risonanti denso in ogni aperto di \mathbb{R}^n , l'insieme delle azioni J' associate a frequenze risonanti è denso in U quindi, per ogni $J' \in U$, per ogni intorno V di J' esiste un'azione \bar{J} associata ad una frequenza risonante e un vettore $\bar{m} \in \mathbb{Z}^n$ non nullo tale che

$$\bar{J} \in V \quad e \quad k\bar{m} \cdot \omega(\bar{J}) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Considerate quindi le equazioni del Teorema precedente, per ogni $m \in \mathbb{Z}^n / \{0\}$;

$$im \cdot \omega(J') \hat{W}_m^{(1)}(J') + \hat{f}_m(J') = 0$$

implicano che deve necessariamente essere

$$f_{\bar{m}}(\bar{J}) = 0$$

e quindi per continuità deve essere anche $f_{\bar{m}}(J) = 0$; ma, allora

$$f_{k\bar{m}}(J) = 0$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$, in contraddizione con l'ipotesi di genericità dello sviluppo in serie di Fourier di f . □

Abbandonata la possibilità di una parametrizzazione liscia per lo spazio delle fasi, ci chiediamo ora se esistano quanto meno integrali primi per il problema, ovvero cerchiamo soluzioni dell'equazione

$$\{I, H\} = 0$$

In particolare, chiediamo che questi integrali primi siano analitici, in modo da poter confrontare il loro ordine in ε e ci poniamo il problema di trovarne di indipendenti dall'hamiltoniana.

Definizione.

Dato un integrale primo del moto I analitico lo diremo *dipendente* da H se esiste una funzione analitica non costante g di una variabile tale che

$$I = g(H)$$

In caso contrario, diremo che I è *indipendente* da H .

Sviluppando così l'integrale primo I in serie di potenze

$$I(J, \varphi, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n I^{(n)}(J, \varphi)$$

E sostituendola nell'equazione, insieme alla definizione di H otteniamo

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n I^{(n)}(J, \varphi), h(J) + \varepsilon f(J, \varphi) \right\} = 0$$

da cui, per l'antisimmetria e la bilinearità della parentesi di Poisson

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \left\{ I^{(n)}(J, \varphi), h(J) \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \left\{ f(J, \varphi), I^{(n)}(J, \varphi) \right\}$$

Che, con un confronto dei termini allo stesso ordine porta al sistema

$$\begin{cases} \{I^{(0)}, h\} = 0 \\ \{I^{(n)}, h\} = \{f, I^{(n-1)}\}, \quad \forall n > 0 \end{cases}$$

Osserviamo quindi che la parentesi di Poisson fissato h non è altro che l'operatore D_ω introdotto precedentemente

$$\{\cdot, h\} = \omega(J) \cdot \nabla_\varphi$$

dunque ognuna di queste equazioni ha la medesima forma dell'equazione fondamentale della teoria delle perturbazioni. Sfortunatamente, i prossimi due Lemmi (che non dimostreremo) permetteranno di dimostrare il II° Teorema di Poincaré, un risultato negativo rispetto al problema della ricerca di integrali primi analitici.

Lemma. I°

Se l'hamiltoniana $h(J)$ è non degenere e $I^{(0)}$ è un integrale primo regolare per il flusso Hamiltoniano associato ad h_0 , ovvero è soluzione dell'equazione

$$\{h, I^{(0)}\} = 0$$

allora $I^{(0)}$ non dipende dalle variabili angolari φ^i ovvero

$$I^{(0)} = I^{(0)}(J)$$

Mentre

Lemma. II°

Un integrale primo analitico I tale che $I^{(0)}$ sia indipendente da h , è indipendente da H . Viceversa, se I è un integrale primo analitico indipendente da H , vi si può associare un integrale primo analitico \tilde{I} con $\tilde{I}^{(0)}$ indipendente da h .

Nella dimostrazione del Lemma II°, dato un integrale primo I analitico ed indipendente da H con $I^{(0)} = g(h)$ dipendente da h , osservato che

$$I - g(H) = I^{(0)} - g(h) + \varepsilon[I^{(1)} - g'(h)f] + o(\varepsilon^2)$$

si costruisce quindi l'integrale primo \tilde{I} ponendolo

$$\tilde{I} = \tilde{I}(I, H) = \frac{I - g(H)}{\varepsilon}$$

e si dimostra essere indipendente da H e tale per cui $\tilde{I}^{(0)}$ è indipendente da h . Arriviamo così a dimostrare il secondo Teorema di Poincaré, che nega l'esistenza di integrali primi del moto analitici, diversi dall'hamiltoniana o da una sua trasformazione.

Teorema. *di Poincaré*
Dato un sistema quasi integrabile

$$H(J, \varphi, \varepsilon) = h(J) + \varepsilon f(J, \varphi)$$

se $h(J)$ è non degenere in un aperto U e la perturbazione $f(J, \varphi)$ ammette uno sviluppo in serie di Fourier generico allora non esiste nessun integrale primo del moto $I(J, \varphi, \varepsilon)$ analitico indipendente da H .

Dimostrazione.

Consideriamo un integrale primo I analitico per il sistema; per il Lemma I°, il primo coefficiente della sua espansione in serie di potenze $I^{(0)}$ è funzione delle sole azioni J . Se sviluppiamo in serie di Fourier $I^{(1)}$ ed f (sono entrambe funzioni periodiche nelle variabili angolari)

$$f(J, \varphi) = \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}_h(J) e^{ih \cdot \varphi} \quad I^{(1)}(J, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{I}_k^{(1)}(J) e^{ik \cdot \varphi}$$

e le sostituiamo in

$$\{I^{(1)}, h\} = \{f, I^{(0)}\}$$

otteniamo l'equazione

$$im \cdot \omega(J) \hat{I}_m^{(1)}(J) = i[m \cdot \nabla_J I^{(0)}(J)] \hat{f}_m(J)$$

dove $m \in \mathbb{Z}^n$. Per una buona definizione di $\hat{I}_m^{(1)}(J)$ è quindi necessario che $m \cdot \omega(J)$ si annulli per ogni valore di J che annulla il membro destro. Essendo lo sviluppo di Fourier di f generico possiamo supporre che

$$\hat{f}_m(J) \neq 0$$

altrimenti potrei considerare un vettore $m' = km$ con $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\hat{f}_{m'}(J) \neq 0$$

e quindi si avrebbe che

$$m \cdot \nabla_J I^{(0)}(J) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m \cdot \omega(J) = 0$$

Fissiamo quindi una frequenza risonante ω e consideriamo il relativo modulo di risonanza associato Θ_ω se valgono entrambe le condizioni

$$\begin{cases} m \cdot \nabla_J I^{(0)}(J) = 0 \\ m \cdot \omega(J) = 0 \end{cases}$$

Significa che sia ω che $\nabla_J I^{(0)}$ siano ortogonali al sottomodulo Θ_ω . Se quindi la sua dimensione è $n - 1$, devono necessariamente essere paralleli fra loro. Come abbiamo visto, inoltre, essendo l'hamiltoniana non degenere, l'insieme delle azioni associate a frequenze risonanti è denso in \mathbb{R}^n . Ciò significa che

$$\omega(J) = \nabla_J h(J) \quad e \quad \nabla_J I^{(0)}(J)$$

devono essere paralleli al variabile di J in un'insieme denso di \mathbb{R}^n ; per la continuità deve esistere allora una funzione scalare $\alpha(J)$ tale che

$$\nabla_J h(J) = \alpha(J) \nabla_J I^{(0)}(J)$$

per ogni valore dell'azione J al suo variare in \mathbb{R}^n . Ciò significa che esiste una funzione

$$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che

$$\alpha(J) = (A'(h(J)))^{-1}$$

ovvero

$$I^{(0)}(J) = A(h(J))$$

il che significa, in virtù del Lemma II°, che l'integrale primo $I(J)$ è dipendente da H , contraddicendo così l'ipotesi. \square

Come vedremo nel prossimo paragrafo questo fondamentale risultato ha fatto pensare che in generale la teoria delle perturbazioni non fosse efficace per ricavare informazioni riguardanti la possibilità di integrare le equazioni del moto.

3.2 La Teoria Ergotica

In questo paragrafo introdurremo la Teoria Ergotica con la volontà di darne un'idea intuitiva e generale, più che una trattazione formale, che richiederebbe una profondità che esula dagli scopi di questa tesi. Per descrivere il comportamento macroscopico di sistemi formati da un numero molto elevato di particelle si rende necessario uno studio statistico globale piuttosto che dei singoli moti⁷. Sotto questo punto di vista, la scala dei tempi macroscopici è molto più grande, in proporzione, a quella dei tempi microscopici; in un intervallo macroscopico anche molto piccolo il sistema microscopico passa attraverso un numero molto elevato di stati intermedi. Possiamo quindi pensare che una generica grandezza fisica associata al sistema (ad esempio la temperatura, la pressione,...) sia la media della stessa nei singoli stati intermedi, ovvero la sua media lungo l'evoluzione del sistema; per un sistema meccanico autonomo e dunque per ogni singola particella componente il sistema globale, l'hamiltoniana sarà la somma della sua energia cinetica e del potenziale di interazione che la lega alle altre particelle; più precisamente per un sistema di N particelle individuate dalle coordinate (q, p) in uno spazio delle fasi $6N = n$ dimensionale rimane definita l'hamiltoniana globale

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + U(q)$$

Se consideriamo la trasformazione indotta dal flusso di fase per un certo tempo fissato, per il noto *Teorema di Liouville*, essa preserva il volume, ovvero per ogni

⁷Basti pensare al comportamento di un fluido, dal moto deterministico di una singola particella a quello globale, somma dei singoli moti.

aperto misurabile Ω di \mathbb{R}^{2n} immagine di una carta di T^*Q , indicata con μ la misura di Lebesgue su \mathbb{R}^{2n} , si ha

$$\mu(\Phi_t(\Omega)) = \mu(\Omega)$$

Dunque, dato un generico punto $\omega \in \Omega$, l'orbita $\Phi_{nt}(\omega)$ con $n \in \mathbb{Z}$ rappresenta la sua storia completa. Se consideriamo quindi una generica grandezza fisica g misurabile, possiamo considerare la sua evoluzione nel tempo che, per tempi discreti, è della forma

$$g(\omega), g(\Phi_t(\omega)), g(\Phi_{2t}(\omega)), \dots$$

e quindi la rispettiva media temporale

$$\bar{g} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(\Phi_{jt}(\omega))$$

Il problema principale della definizione sta nel fatto che per conoscere il valor medio \bar{g} sarebbe necessario conoscere la traiettoria nello spazio delle fasi ed il valore dell'osservabile in ogni suo punto, cosa impraticabile in quanto è sostanzialmente impossibile conoscere le singole traiettorie soluzioni delle equazioni per H . Per ovviare a questo problema L. Boltzmann formulò l'*ipotesi ergotica*, poi sviluppata nei lavori di J.von Neumann e D. Birkhoff:

• *"Una superficie di energia costante non può essere suddivisa in regioni (misurabili) contenenti ognuna moti completi, cioè regioni invarianti per evoluzione temporale. Inoltre, per ogni traiettoria, il tempo medio di permanenza in una certa regione è proporzionale al volume della regione".*

La prima parte dell'ipotesi implica che ogni superficie di energia fissata è completamente accessibile a qualunque moto con la data energia, la seconda che normalizzando la misura del volume della regione ed interpretandola come una probabilità, il moto ha probabilità quasi nulla di rimanere per lungo tempo in un volume dello spazio molto piccolo. Il significato più profondo racchiuso nell'ipotesi ergotica è che *il sistema in tempi lunghi perde memoria del suo stato iniziale, tendendo all'equilibrio statistico, salvo rari casi, che hanno probabilità nulla di verificarsi*. L'importanza in Meccanica Statistica dell'ipotesi ergotica sta nel fatto che permette di aggirare il problema del calcolo della media temporale; con questa assunzione infatti, per un tempo $T = nt$ sufficientemente grande la media temporale dipende solamente dall'energia del sistema ed assume quindi lo stesso valore su tutte le soluzioni per quel fissato valore di energia. L'ipotesi ergotica permette così di eguagliare media temporale e spaziale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g(\Phi_{jt}(\omega)) = \int_{\Omega} g d\mu$$

La possibilità di applicarla, ovvero di poter esprimere la media temporale come sopra, costituisce il nucleo di quello che viene detto *problema ergotico*. Osserviamo quindi che per un generico sistema hamiltoniano, se esistessero altri integrali primi oltre all'energia del sistema, il problema non potrebbe essere ergotico, in quanto la superficie ad energia costante si potrebbe decomporre in

una regione, quella ad integrale primo costante, che contiene un moto completo, ed è invariante, contraddicendo l'ipotesi ergotica. Per una buona descrizione statistica del sistema, oltre all'ipotesi ergotica, si richiede anche che, in tempi macroscopici ragionevoli, il sistema si porti all'equilibrio statistico⁸, ovvero non abbia memoria del suo particolare stato iniziale. Quest'ipotesi si realizza se, ad esempio, le traiettorie cambiano rapidamente al variare dei dati iniziali, caratteristica tipica di quelli che vengono detti *moti caotici*.

E. Fermi riuscì a dimostrare, generalizzando il Teorema di Poincarè, che per un sistema quasi integrabile una superficie contenente tutte le traiettorie uscenti da suoi punti deve necessariamente essere una superficie ad energia costante. Non solo, dimostrò anche che date due regioni comunque piccole di una superficie per H costante, esiste sempre una traiettoria che le attraversa entrambe. I risultati ottenuti, insieme a quelli di Poincarè, portarono lo stesso Fermi e la maggioranza dei fisici e matematici che si dedicavano al problema a ritenere che i sistemi Hamiltoniani quasi integrabili fossero in generale Ergotici, per quanto piccola sia la perturbazione.

3.3 Il Sistema di Fermi-Pasta-Ulam

Finita la guerra, Fermi continuò a frequentare i laboratori di Los Alamos, dotati di computer all'epoca all'avanguardia; Fermi, Pasta ed Ulam pensarono così di sfruttare le loro potenzialità per verificare ed indagare il comportamento di alcuni sistemi dinamici non lineari; in particolare studiarono il comportamento di un sistema costituito da una catena di $N+2$ particelle di massa m collegate fra loro da molle non lineari, detto *sistema FPU* (acronimo di Fermi-Pasta-Ulam)

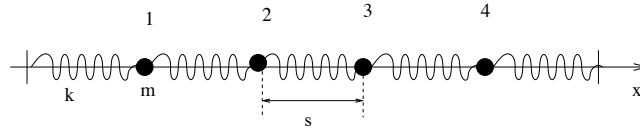


Figura 3.1: Catena di scillatori non lineari.

a cui è associata l'hamiltoniana

$$H(p, q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + \frac{k}{2} \sum_{i=0}^n (q_{i+1} - q_i)^2 + \varepsilon \left[\frac{\lambda}{r} \sum_{i=0}^n (q_{i+1} - q_i)^r \right]$$

dove in particolare $q_0 = q_{N+1} = 0$, $r = 3$ o $r = 4$ è l'esponente associato alla non linearità delle molle e λ è una costante. Il sistema è quindi composto dai due termini

$$h(p, q) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i^2}{2m} + \frac{k}{2} \sum_{i=0}^n (q_{i+1} - q_i)^2 \quad f(p, q) = \frac{\lambda}{r} \sum_{i=0}^n (q_{i+1} - q_i)^r$$

⁸Solitamente ci si riferisce a questo comportamento col termine "mixing", "mescolamento".

Il sistema imperturbato ottenuto ponendo $\varepsilon = 0$ è canonicamente integrabile; possiamo infatti ricondurlo, tramite il *Teorema sui Modi Normali*, ad un sistema composto da N oscillatori armonici disaccoppiati, che abbiamo risolto nel secondo capitolo. Si riesce inoltre a dimostrare che per perturbazioni sufficientemente piccole l'energia associata ad ogni oscillatore E_k è circa l' N -esima parte dell'energia totale del sistema

$$E_k \simeq \frac{E_{tot}}{N}$$

I tre fisici provarono così a simulare l'evoluzione del sistema per i valori $N = 16, 32, 64$, la cui configurazione iniziale era tale da concentrare tutta l'energia iniziale su un singolo oscillatore, ovvero del tipo

$$\begin{cases} E_1 \neq 0 \\ E_k = 0, & k = 2, \dots, N \end{cases}$$

Come conseguenza dell'ipotesi Ergotica, ci si sarebbe aspettati uno scambio di energia dal primo oscillatore agli altri, fino a che l'energia di ognuno degli oscillatori non avesse fluttuato vicino alla sua energia media, definita precedentemente. La simulazione mostrò però, con loro stupore, che l'energia degli oscillatori per queste configurazioni iniziali non si stabilizza partizionandosi in quantità eguali sui singoli oscillatori; l'ipotesi ergotica secondo cui il sistema per tempi molto lunghi perde memoria del dato iniziale non si verifica, anzi, dopo un tempo abbastanza lungo si osserva un comportamento che appare periodico: il sistema torna praticamente allo stato iniziale. In realtà, all'insaputa dei tre scienziati, già un anno prima Andrej Kolmogorov aveva congetturato questa possibilità, in netto contrasto con l'opinione generale, enunciando il Teorema KAM che Arnol'd e Moser dimostreranno qualche anno più tardi.

3.4 Il Teorema KAM

Per la dimostrazione del Teorema KAM necessitiamo di una condizione sulle frequenze più forte della non risonanza, più esattamente

Definizione.

Diremo una frequenza ω *fortemente non risonante* se esistono due costanti $\alpha > 0$ e $\tau > 0$ tali che

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\alpha}{|k|^\tau}$$

per ogni $k \in \mathbb{Z}$ non nullo, dove

$$|k| = \sum_{i=1}^n |k_i|$$

Kolmogorov riuscì a dimostrare che queste frequenze sono "molte" e che sono quindi "molti" anche i tori ad esse associati, aprendo così la strada al Teorema KAM. Più formalmente

Teorema. *di Kolmogorov*

L'insieme delle frequenze fortemente non risonanti ha misura non nulla rispetto la misura di Lebesgue di \mathbb{R}^n .

Dimostrazione.

Fissiamo due reali positivi α e τ , e consideriamo gli insiemi

$$\Delta_\alpha^\tau = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } |\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\alpha}{|k|^\tau} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n / \{0\} \right\}$$

e

$$R_{\alpha,k}^\tau = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } |\langle k, \omega \rangle| < \frac{\alpha}{|k|^\tau} \right\}$$

Dunque Δ_α^τ è l'insieme complementare all'insieme denso

$$R_\alpha^\tau = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n / \{0\}} R_{\alpha,k}^\tau$$

Dimostriamo ora, per ogni dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, la seguente stima:

$$\mu(R_{\alpha,k}^\tau \cap \Omega) = O\left(\frac{\alpha}{|k|^{\tau+1}}\right)$$

Possiamo supporre che il vettore $k \in \mathbb{Z}^n$ sia rappresentato nella forma $k = k_1 e_1$, in quanto la misura di Lebesgue è invariante per rotazioni dello spazio. Possiamo così riscrivere l'insieme nella forma

$$R_{\alpha,k}^\tau = \left\{ \omega \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } |\omega_1| < \frac{\alpha}{|k_1|^{\tau+1}} \right\}$$

Quindi, essendo Ω limitato, indicato l'intervallo

$$I = \left[-\frac{\alpha}{|k_1|^{\tau+1}}, \frac{\alpha}{|k_1|^{\tau+1}} \right]$$

si ha che esiste un'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tale che

$$R_{\alpha,k}^\tau \cap \Omega \subset I \times [a, b]^{n-1}$$

Da cui

$$\mu(R_{\alpha,k}^\tau \cap \Omega) \leq \mu(I) \cdot \mu([a, b]^{n-1}) = O\left(\frac{\alpha}{|k_1|^{\tau+1}}\right)$$

Che prova il caso generale, per la relazione fra rotazioni dello spazio e misura enunciate precedentemente. Se scegliamo quindi $\tau > n - 1$

$$\mu(R_\alpha^\tau \cap \Omega) \leq \sum_{k \neq 0} \mu(R_{\alpha,k}^\tau \cap \Omega) = O(\alpha)$$

essendo la serie armonica di esponente strettamente maggiore di 1. Concludiamo così, osservato che se $\alpha < \alpha'$ allora $R_{\alpha'}^\tau \subset R_\alpha^\tau$, che l'insieme

$$R^\tau = \bigcap_{\alpha > 0} R_\alpha^\tau$$

è un insieme di misura nulla, ovvero il suo complementare

$$\Delta^\tau = \bigcup_{\alpha > 0} \Delta_\alpha^\tau$$

è un sottoinsieme di piena misura (non nulla) di \mathbb{R}^n , per ogni $\tau > n - 1$, da cui la tesi. □

Naturalmente, ogni frequenza fortemente non risonante è una frequenza non risonante; e le frequenze non risonanti sono dense in \mathbb{R}^n . Ciò non implica naturalmente che anche le frequenze fortemente non risonanti lo siano, ma il fatto esse abbiano misura non nulla, fa pensare che siano fitte in \mathbb{R}^n . Per enunciare il Teorema necessitiamo di altre due nozioni, che ne sono in un certo senso il fulcro. Se ai sistemi integrabili, privi di perturbazione, eravamo riusciti a costruire una trasformazione dello spazio delle fasi in un toro, per quelli quasi integrabili dobbiamo tener conto del fatto che la perturbazione perturberà, in un certo senso, anche lo spazio delle fasi.

Definizione.

Dato un toro n dimensionale T e fissato un $\varepsilon_0 > 0$, diremo una famiglia ad un parametro di sottovarietà n -dimensionali di \mathbb{R}^{2n} , $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)}$ *deformazione analitica* del toro T se, indicato con

$$T = T_0 = \{J_0\} \times \mathbb{T}^n$$

per ogni $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, T_ε ha equazioni parametriche

$$J = J_0 + \varepsilon A(\varphi, \varepsilon)$$

$$\psi = \varphi + \varepsilon B(\varphi, \varepsilon)$$

Dove $\varphi \in \mathbb{T}^n$, mentre

$$A : \mathbb{T}^n \times [\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$B : \mathbb{T}^n \times [\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{T}^n$$

sono funzioni analitiche⁹.

Anche dal punto di vista delle nuove equazioni del moto, quindi, dobbiamo tener conto della perturbazione.

Definizione.

Una deformazione $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)}$ di T_0 è una deformazione di T_0 in tori invarianti per il sistema perturbato

$$H(J, \varphi, \varepsilon) = h(J) + \varepsilon f(\varphi, J)$$

se, fissato $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, comunque si scelga $\varphi_0 \in \mathbb{T}^n$, il flusso hamiltoniano $(J(t, \varphi_0), \psi(t, \varphi_0))$ si ottiene dalla parametrizzazione di deformazione ponendo $\psi = \varphi_0 + \omega(J_0)t$, ovvero le equazioni del moto sono della forma

⁹Per $\varepsilon = 0$ trovo il toro di partenza

$$J(t, \varphi_0) = J_0 + \varepsilon A(\varphi_0 + \omega(J_0)t, \varepsilon)$$

$$\psi(t, \varphi_0) = \varphi_0 + \omega(J_0)t + \varepsilon B(\varphi_0 + \omega(J_0)t, \varepsilon)$$

e quindi

$$(J(t, \varphi_0), \psi(t, \varphi_0)) \in T_\varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Per una deformazione di questo tipo le equazioni del moto in un intorno di una condizione iniziale (J_0, φ_0) assumono la forma

$$\begin{cases} \dot{J} = \varepsilon \frac{dA}{dt}(\varphi, \varepsilon) = \varepsilon \omega(J_0) \cdot \nabla_\varphi A(\varphi, \varepsilon) \\ \dot{\psi} = \omega_0 + \varepsilon \frac{dB}{dt}(\varphi, \varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon \omega(J_0) \cdot \nabla_\varphi B(\varphi, \varepsilon) \end{cases}$$

Mentre quelle per il sistema quasi integrabile sono

$$\dot{J} = -\varepsilon \nabla_\varphi f(J(t, \varphi_0), \varphi(t, \varphi_0)) = -\varepsilon \nabla_\varphi f(J_0 + \varepsilon A(\varphi, \varepsilon), \varphi + \varepsilon B(\varphi, \varepsilon))$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega(J(t, \varphi)) + \varepsilon \nabla_J f(J(t, \varphi_0), \psi(t, \varphi_0)) = \\ &= \omega(J_0 + \varepsilon A(\varphi, \varepsilon)) + \varepsilon \nabla_J f(J_0 + \varepsilon A(\varphi, \varepsilon), \varphi + \varepsilon B(\varphi, \varepsilon)) \end{aligned}$$

Imponendo che siano uguali, otteniamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \varepsilon \omega(J_0) \cdot \nabla_\varphi A(\varphi, \varepsilon) = \varepsilon \nabla_\varphi f(J_0 + \varepsilon A(\varphi, \varepsilon), \varphi + \varepsilon B(\varphi, \varepsilon)) \\ \omega_0 + \varepsilon \omega(J_0) \cdot \nabla_\varphi B(\varphi, \varepsilon) = \omega(J_0 + \varepsilon A(\varphi, \varepsilon)) + \varepsilon \nabla_J f(J_0 + \varepsilon A(\varphi, \varepsilon), \varphi + \varepsilon B(\varphi, \varepsilon)) \end{cases}$$

Esprimendo in serie di Taylor in un intorno di J_0 la frequenza $\omega(J)$ otteniamo

$$\omega(J) = \omega(J_0 + \varepsilon A(\varphi, \varepsilon)) = \omega_0 + \varepsilon \nabla_J A(\varphi, \varepsilon) + \dots$$

sostituendola quindi nel sistema insieme agli sviluppi in serie di potenze rispetto ad ε di A e B e confrontando i termini al prim'ordine delle equazioni del sistema otteniamo un nuovo sistema di equazioni

$$\begin{cases} \varepsilon \omega_0 \cdot \nabla_\varphi A^{(0)}(\varphi) = -\varepsilon \nabla_\varphi f(J_0, \varphi) \\ \varepsilon \omega_0 \cdot \nabla_\varphi B^{(0)}(\varphi) = \varepsilon \nabla_J \omega(J_0) \cdot A^{(0)}(\varphi) + \varepsilon \nabla_J f(J_0, \varphi) \end{cases}$$

Come abbiamo visto, per le frequenze non risonanti l'equazione fondamentale ha soluzione formale; in questo caso, se si aggiunge l'ipotesi che l'hamiltoniana

h_0 sia non degenere, è possibile determinare i coefficienti $A^{(k)}$ e $B^{(k)}$ dello sviluppo in serie di potenze delle funzioni $A(\varphi, \varepsilon)$ e $B(\varphi, \varepsilon)$ ed in particolare, se la frequenza è fortemente non risonante, si riesce a dimostrare anche la loro convergenza. Il problema della convergenza delle serie di potenze delle funzioni A e B e quindi della possibilità di riscrivere le equazioni del moto così come si presentano nell'ultima definizione è stato risolto da Kolmogorov, Arnol'd e Moser. Più precisamente, sono riusciti a dimostrare il seguente .

Teorema. KAM

Consideriamo un sistema quasi integrabile definito sulla foliazione $U \times \mathbb{T}^n$ dello spazio delle fasi del tipo

$$H(J, \varphi, \varepsilon) = h(J) + \varepsilon f(J, \varphi)$$

Se l'hamiltoniana $H(J, \varphi)$ del sistema è analitica e non degenere, ovvero la mappa delle frequenze ν è un diffeomorfismo fra U ed un sottoinsieme del dominio delle frequenze Ω

$$\nu : U \rightarrow \nu(U) \subset \Omega$$

Allora per tutti i tori \mathbb{T} relativi a valori delle azioni J associate a frequenze fortemente non risonanti in $\nu(U)$, con $\tau > n - 1$ e $\alpha > 0$ fissati, esiste una deformazione

$$\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)}$$

di T in tori invarianti, dove il parametro della deformazione ε_0 dipende solamente da α .

Se nella Teoria dei Sistemi Integrabili abbiamo scoperto che lo spazio delle fasi è foliato in modo liscio al variare delle azioni in tori invarianti, nel caso di quelli quasi integrabili, questa proprietà si perde. Il Teorema KAM prova però che per alcune fra le frequenze fortemente non risonanti, possiamo ancora risolvere il moto per il valore della relativa azione, in analogia con quanto fatto per quelli integrabili, e il moto avviene su un toro deformato, descritto dalle equazioni definite sopra. La densità delle frequenze risonanti però non permette più di foliare la varietà, anzi, non si ha nemmeno una variazione uniforme di questi tori, in quanto quelli risonanti e quelli non risonanti sono fitti nello spazio delle fasi.

Bibliografia

- [1] V.I. Arnol'd (1979), *Metodi Matematici della Meccanica Classica*, Editori Riuniti, Roma (ed. originale russa 1966).
- [2] A. Fasano e S. Marmi (1994), *Meccanica Analitica*, Bollati Boringhieri, Torino.
- [3] Jürgen Pöschel (2009), *A Lecture on the Classical KAM Theorem*.
- [4] B. Dubrovin, *Syllabus del corso: Differential Geometry*, tenuto presso SISSA, Trieste.
- [5] B. Dubrovin, *Syllabus del corso: Meccanica Analitica*, tenuto presso SISSA, Trieste.
- [6] *Note personali del corso: Meccanica Analitica*, tenuto presso Università di Trieste dal prof. G. Landi.
- [7] M. Falcioni e A. Vulpiani, *Il contributo di Enrico Fermi ai sistemi non lineari: L'influenza di un articolo mai pubblicato*.
- [8] C. Sempì (2005), *Quaderno 2- Introduzione alla Teoria Ergodica*, Lecce.
- [9] G. Benettin (2014-2015), *Appunti per il corso di Meccanica Analitica*, Università di Padova, Padova.
- [10] G. Benettin (2011-2012), *Introduzione ai Sistemi Dinamici*, Scuola Galileiana, Padova.
- [11] Luc Haine (2014-2015), *Eléments de Géométrie Différentielle*, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve.