Ε.Μ.Π. Σχολή Η.Μ.&Μ.Υ. Σήματα και Συστήματα Ακαδ. έτος: 2021-2022

Ημερομηνία 24-11-2021 ***<u>1η Σειρά Ασκήσεων</u>*** Παραδοτέα: 12-12-2021

Οι λύσεις της πρώτης σειράς ασκήσεων θα παραδίδονται **<u>ηλεκτρονικά</u>** και **<u>θα υποβάλλονται στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο https://helios.ntua.gr/</u>** (**<u>μέχρι και τις 12-12-2021</u>**). Αρκεί η χειρόγραφη επίλυση των ασκήσεων και η ηλεκτρονική υποβολή **<u>ενός μοναδικού αρχείου .pdf</u>** με σκαναρισμένα αντίγραφα όλων των σελίδων των χειρόγραφων λύσεων.

Επισημαίνεται ότι οι εργασίες είναι **<u>ατομικές</u>**.

<u>Παρατήρηση</u>: Σε όλες τις ασκήσεις ισχύει: $a = AM \, mod \, 10 + 1$, όπου AM ο αριθμός μητρώου σας. Στο πρώτο δίφυλλο του .pdf αρχείου λύσεών σας, να αναγράφετε ευκρινώς την τιμή του αριθμού α ο οποίος και σας αντιστοιχεί.

<u>Άσκηση 1.1.</u>

Δίδονται τα ακόλουθα σήματα:

(α) $x_1(t) = \cos\left(\frac{a}{3}t - \frac{\pi}{5}\right) + \left[\sin\left(\frac{a}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)\right]^2 - \cos\left(\frac{a}{8}t - \frac{\pi}{7}\right)$

(β) $x_2(t) = \exp\left[j\left(at - \frac{\pi}{4a}\right) \cdot \mathrm{trig}\left(\frac{t}{3a}\right)\right]$

(γ) $x_3[n] = (-1)^n + \sin\left(\frac{6\pi}{a}n\right) \cdot \cos\left(\frac{9\pi}{a}n\right)$

(δ) $x_4[n] = \left[\cos\left(\frac{a\pi}{4} - \frac{a\pi}{30}n^3\right)\right]^2$

Ζητείται να αποφανθείτε σχετικά με την περιοδικότητα ή όχι των σημάτων αυτών αιτιολογώντας επαρκώς τις απαντήσεις σας και για τις περιπτώσεις περιοδικών σημάτων, να υπολογιστεί η θεμελιώδης περίοδός τους.

<u>Άσκηση 1.2.</u>

Δίδονται οι αποκρίσεις $y(t)$ (ή $y[n]$) συστημάτων συνεχούς (ή διακριτού) χρόνου σε εισόδους $x(t)$ (ή $x[n]$), οι οποίες έχουν ως ακολούθως:

(α) $y_1(t) = \frac{dx(t-a)}{dt} + x(t+a)$

(β) $y_2(t) = x^2(t) * \delta(at - 5a)$

(γ) $y_3[n] = \frac{1}{x[n]+a}$

(δ) $y_4[n] = \left[x[n-a] + x[n+a]\right] \cdot u[n]$

Ζητείται να αποφανθείτε σχετικά με τη γραμμικότητα, το χρονικά αναλλοίωτο, τη μνήμη, την αιτιατότητα και την ευστάθεια (κατά την έννοια BIBO) ή όχι των συστημάτων αυτών αιτιολογώντας επαρκώς τις απαντήσεις σας.

Άσκηση 1.3.

Δίδονται τα παρακάτω σήματα διακριτού χρόνου:

$$x[n] = n \cdot u[n + a\mathrm{mod}5] - n \cdot u[n + a \bmod 5 - 7] + 2a \cdot \delta[n-2]$$

$$h_1[n] = a^{-n} \cdot u[n-a] \; h_2[n] = \sin\left(\frac{a\pi}{3}n\right) \cdot \big[u[n+a] - u[n-a]\big]$$

$$y_1[n] = x[n] * h_1[n]$$

$$y_2[n] = x[n] * h_2[n]$$

Επίσης δίδονται τα ακόλουθα σήματα συνεχούς χρόνου:

$$x(t) = u(t+3a) - 2 \cdot u(t) + u(t-3a)$$

$$h_1(t) = u(t+1) + a \cdot \delta(t) - u(t-a)$$

$$h_2(t) = exp(-a|t|)$$

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$

$$y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

Αφού σχεδιαστούν τα δεδομένα σήματα εισόδου x και h, ζητείται να υπολογιστούν αναλυτικά και να σχεδιαστούν τα σήματα εξόδου y που προκύπτουν από τις παραπάνω σχέσεις.

Άσκηση 1.4.

(α) Θεωρήστε περιοδικό σήμα $x(t)$, το οποίο έχει περίοδο $T = 6a$ και για το οποίο ισχύει $x(t) = |t| + \alpha, \; -3\alpha \leq t \leq 3\alpha$. Αφού σχεδιαστεί το σήμα στο πεδίο του χρόνου, να υπολογιστούν οι συντελεστές c_m του αναπτύγματος του σήματος αυτού σε μιγαδική σειρά Fourier και να σχεδιαστεί το φάσμα πλάτους $|c_m|$.

(β) Θεωρήστε το περιοδικό σήμα $x(t)$, το οποίο έχει περίοδο T και του οποίου οι συντελεστές του αναπτύγματος του σήματος αυτού σε τριγωνομετρική σειρά Fourier με ημίτονα και συνημίτονα είναι: $\alpha_m^x = \frac{(-1)^a\sqrt{3}}{m}$ και $b_m^x = \frac{(-1)^{a+1}}{m}$.

Να υπολογιστούν οι συντελεστές α_m^y και b_m^y της τριγωνομετρικής σειρά Fourier με ημίτονα και συνημίτονα του σήματος $y(t) = x(at + a)$, καθώς και οι τιμές ισχύος P_x και P_y των δύο σημάτων.

(γ) Έστω δύο περιοδικά σήματα $x(t)$ και $y(t)$ με θεμελιώδη περίοδο T, τα οποία έχουν συντελεστές της μιγαδικής σειράς Fourier ίσους με c_m^x και c_m^y αντιστοίχως. Να υπολογιστούν οι συντελεστές c_m^z της μιγαδικής σειράς Fourier του σήματος $z(t) = x(t) * y(t)$, συναρτήσει των c_m^x και c_m^y.

Άσκηση 1.5.

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier των παρακάτω σημάτων συνεχούς χρόνου:

(α) $x_1(t) = 4t \cdot \sin(3t - a) + 2t \cdot \cos(3at) \cdot \mathrm{rect}(6at)$

(β) $x_2(t) = \begin{cases} t - a, & a \le t < a + 1 \\ 1, & a + 1 \le t < a + 4 \\ -t + a + 5, & a + 4 \le t < a + 5 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Ακολούθως, υπολογίστε τα σήματα συνεχούς χρόνου, τα οποία αντιστοιχούν στους παρακάτω μετασχηματισμούς Fourier:

(γ) $X_3(\omega) = \left(1 - \frac{|\omega|}{a}\right) \cdot \left[u\left(\omega + \frac{a}{2}\right) - u\left(\omega - \frac{a}{2}\right)\right]$

(δ) $X_4(\omega) = \frac{a}{-\omega^2 + j3a\omega + 2a^2}$

Άσκηση 1.6.

Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier (DTFT) των παρακάτω σημάτων διακριτού χρόνου:

(α) $x_1[n] = \left[n \cdot u[n + a] - n \cdot u[n - 2a]\right] * \frac{\sin(\pi(n-a)/4)}{\pi(n-a)}$

(β) $x_2[n] = \begin{cases} -n\cos\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right) + jn\sin\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right), & |n| < 8 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$

Ακολούθως, υπολογίστε τα σήματα διακριτού χρόνου, τα οποία αντιστοιχούν στους παρακάτω μετασχηματισμούς Fourier (DTFT):

(γ) $X_3(\Omega) = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2 - 2\beta\cos\Omega}$, $\beta = \max(\alpha, 2)$

(δ) $X_4(\Omega) = |\sin(a\Omega)|$

Άσκηση 1.7.

(α) Δίδεται Γραμμικό και Χρονικά Αναλλοίωτο σύστημα συνεχούς χρόνου, με είσοδο $x(t)$ και έξοδο $y(t)$, το οποίο περιγράφεται από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 2\alpha^2\frac{d}{dt}y(t) + \alpha^4 y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + (\alpha + 1)x(t)$$

Ζητείται να εκτελεστούν τα ακόλουθα:

(α) υπολογισμός της απόκρισης συχνότητας $H(\omega)$ του συστήματος,

(β) υπολογισμός της κρουστικής απόκρισης $h(t)$ του συστήματος,

(γ) αναλυτικός υπολογισμός της εξόδου του συστήματος $y_1(t)$ που αντιστοιχεί σε είσοδο $x(t) = [e^{-(a+1)t} + \delta(2t - \alpha)] \cdot u(t)$,

(δ) αναλυτικός υπολογισμός της εξόδου του συστήματος $y_2(t)$ που αντιστοιχεί στο σήμα της Άσκησης 1.1 (α) ως είσοδο.

<u>Σημείωση:</u> Τα ζητούμενα σήματα θα πρέπει να είναι εκπεφρασμένα σε όσο το δυνατόν απλούστερες μορφές (π.χ., να μην είναι εκπεφρασμένα ως μιγαδικοί, σε περίπτωση που είναι πραγματικές συναρτήσεις).
