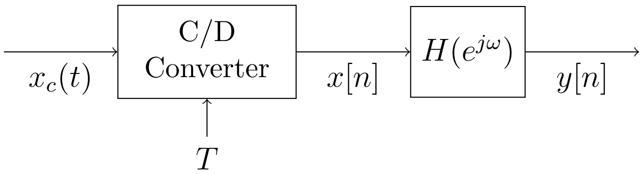
Ε.Μ.Π., Σχολή Η.Μ.Μ.Υ. ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΊΑ ΣΗΜΑΤΩΝ Ακαδ.Έτος 2022-23
Ημερομηνία: 12-4-2023 **1η Σειρά Αναλυτ. Ασκήσεων** Παραδοτέο: 28-4-2023

Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο HELIOS. Θα πρέπει να υποβάλετε την αναφορά σας ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: dsp23_hwk1_AM_FirstnameLastname.pdf, όπου AM είναι ο οκταψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναρισμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην πρώτη σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM και email address σας.

Άσκηση 1.1: Θεωρήστε την αναπαράσταση των διαδοχικών διαδικασιών ιδανικής δειγματοληψίας και επεξεργασίας σήματος διακριτού χρόνου που φαίνεται στο Σχήμα 1.



Σχήμα 1

Υποθέστε ότι το αναλογικό σήμα εισόδου, $x_c(t)$, είναι:

$$x_c(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(500\pi t + \pi/2)}{(t + 10^{-3})} + \frac{\sin(500\pi t - \pi/2)}{(t - 10^{-3})}\right] \quad -\infty < t < \infty,$$

και το σύστημα διακριτού χρόνου είναι ιδανικό βαθυπερατό φίλτρο με απόκριση συχνότητας:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} T, & |\omega| \le \pi/2 \\ 0, & |\omega| > \pi/2. \end{cases}$$

(α) Προσδιορίστε το μετασχηματισμό Fourier συνεχούς χρόνου $X_c(j\Omega)$ του σήματος εισόδου $x_c(t)$ και σχεδιάστε τον συναρτήσει του Ω.

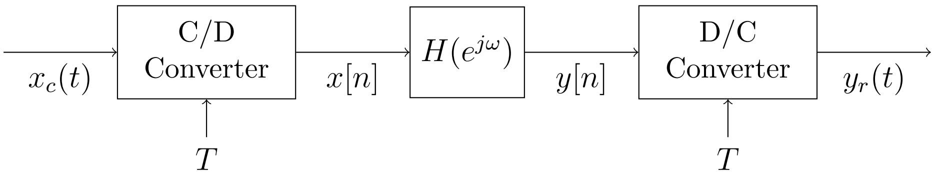
(β) Με βάση τη μορφή του $X_c(j\Omega)$ που πήρατε στο ερώτημα (α), βρείτε τη μέγιστη περίοδο δειγματοληψίας T, που απαιτείται ώστε να αποφεύγεται η αναδίπλωση (aliasing) του φάσματος του σήματος μετά τη δειγματοληψία.

(γ) Για την τιμή του T του ερωτήματος (β), να προσδιορίσετε το σήμα διακριτού χρόνου $x[n]$ και τον Fourier μετασχηματισμό του, $X(e^{j\omega})$, τον οποίο και να σχεδιάσετε στο διάστημα $-3\pi < \omega < 3\pi$.

(δ) Επαναλάβετε το ερώτημα (γ) για τα $y[n]$ και $Y(e^{j\omega})$.

Άσκηση 1.2: Στο σύστημα συνεχούς χρόνου που ακεικονίζεται στο Σχήμα 2, θεωρούμε ιδανικούς C/D και D/C μετατροπείς και περιόδο δειγματοληψίας T. Υποθέτουμε ότι το σήμα εισόδου, $x_c(t)$, στο σύστημα είναι:

$$x_c(t) = \frac{\sin(\Omega_1 t)}{t} + \cos(\Omega_2 t),$$



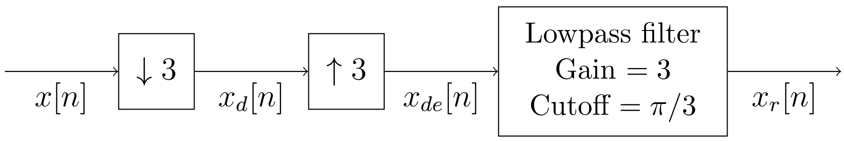
Σχήμα 2

με $\Omega_1 < \Omega_2 < \pi/T$, και η απόκριση συχνότητας $H(e^{j\omega})$ του συστήματος διακριτού χρόνου δίνεται από τη σχέση:

$$H(e^{j\omega}) = j\omega/T, \quad -\pi \leq \omega < \pi.$$

(α) Προσδιορίστε την ακολουθία διακριτού χρόνου $x[n]$ καθώς και την έκφραση του μετασχηματισμού Fourier $X(e^{j\omega})$ στο διάστημα $|\omega| < \pi$.
(β) Προσδιορίστε τον DTFT, $Y(e^{j\omega})$, της εξόδου του συστήματος διακριτού χρόνου.
(γ) Βρείτε αναλυτικά τον μετασχηματισμό Fourier, $Y_r(j\Omega)$, της εξόδου του D/C μετατροπέα.
(δ) Από το αποτέλεσμα του ερωτήματος (γ), προσδιορίστε το αναλογικό σήμα εξόδου, $y_r(t)$ του συστήματος. Σχολιάστε.

Άσκηση 1.3: Θεωρήστε το σύστημα του Σχήματος 3. Για καθένα από τα παρακάτω σήματα εισόδου $x[n]$ αποφανθείτε για το κατά πόσο η ανακατασκευασμένη έξοδος $x_r[n]$ ισούται με την είσοδο, και εξηγήστε την απάντησή σας.
(α) $x[n] = \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$
(β) $x[n] = \cos(\pi n/2)$
(γ) $x[n] = \left[\frac{\sin(\pi n/6)}{\pi n}\right]^2$
Υπόδειξη: Για το ερώτημα (γ), να υπολογιστεί πρώτα ο μετασχηματισμός Fourier.



Σχήμα 3

Άσκηση 1.4: Θεωρήστε το σύστημα του Σχήματος 4, στο οποίο το υψιπερατό φίλτρο είναι ιδανικό και ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος εισόδου $x_c(t)$ είναι:

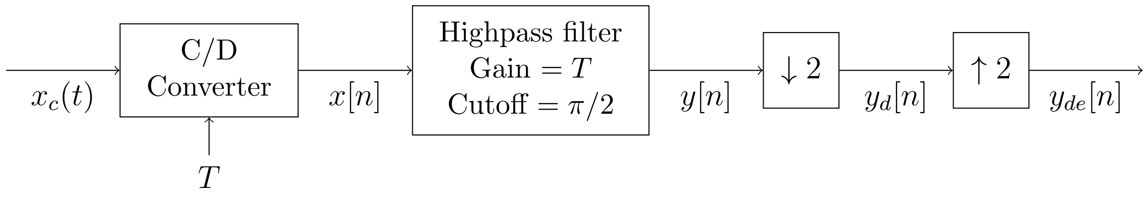
$$X_c(j\Omega) = \begin{cases} 1 - \frac{|\Omega|}{\Omega_N} & |\Omega| \leq \Omega_N \\ 0, & |\Omega| > \Omega_N. \end{cases}$$

Το σήμα $x[n]$ προκύπτει μέσω ιδανικής δειγματοληψίας του $x_c(t)$ με περίοδο δειγματοληψίας $T = \frac{\pi}{\Omega_N}$.

(α) Να σχεδιάσετε το φάσμα $X_c(j\Omega)$ και να προσδιορίσετε αναλυτικά την έκφραση του σήματος $x_c(t)$.

(β) Να δώσετε τις εκφράσεις των $x[n]$ και $X(e^{j\omega})$ και να σχεδιάσετε το $X(e^{j\omega})$.

(γ) Να σχεδιάσετε τα $Y(e^{j\omega})$, $Y_d(e^{j\omega})$, $Y_{de}(e^{j\omega})$ και να εξηγήσετε σε κάθε περίπτωση πως προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζετε. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.



Σχήμα 4

***Άσκηση* 1.5**: Έστω τα πεπερασμένα σήματα διακριτού χρόνου:

$$x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + 3\delta[n-3] - \delta[n-4] + \delta[n-7] - 3\delta[n-8] + 2\delta[n-9] - \delta[n-11],$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4] + \delta[n-5].$$

(α) Αν $X[k], H[k]$ είναι οι DFT 12-σημείων των σημάτων $x[n], h[n]$ και $Y[k] = X[k]H[k]$, να βρείτε τις τιμές του σήματος $y[n]$ που προκύπτει με ένα αντίστροφο DFT 12-σημείων του $Y[k]$. Εξηγήστε πως προέκυψαν αυτές οι τιμές.

(β) Σχεδιάστε τα σήματα $x[n], h[n]$ και $y[n]$.

(γ) Αν επαναλάβετε το (α) με DFT N-σημείων, να βρείτε την τιμή του N ώστε $y[n] = x[n] * h[n]$ για $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Εξηγήστε. Επίσης, να σχεδιάσετε το σήμα συνέλιξης $y[n]$ και να το συγκρίνετε με το σήμα που πήρατε στο ερώτημα (α).

(δ) Με βάση το μετασχηματισμό $X[k]$ ορίζουμε τις ακολουθίες:

$$P[k] = (-1)^k \mathcal{R}e\{X[k]\}, \quad k = 0, 1, \ldots, 11$$
$$Q[k] = |X[3k]|^2, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

ως τους DFT των σημάτων $p[n]$ και $q[n]$, αντίστοιχα. Χωρίς να υπολογίσετε τους ευθείς και αντίστροφους DFT των σχετικών ακολουθιών, αλλά χρησιμοποιώντας μόνο ιδιότητες του DFT:

(δ.1) Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $p[n]$. Εξηγήστε.

(δ.2) Να βρείτε αναλυτικά και να σχεδιάσετε το σήμα $q[n]$. Εξηγήστε.

***Άσκηση* 1.6**: Έστω $X(e^{j\omega})$ ο μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου της ακολουθίας:

$$x[n] = \begin{cases} (-1)^n(n+1), & n = 0, 1, 2, \ldots, 9 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

(α) Δίχως να υπολογίσετε ευθείς και αντίστροφους DFT, να βρείτε μια ακολουθία, $y[n]$, μήκους 4, που είναι μη μηδενική μόνο για $n = 0, 1, 2, 3$, και για την οποία ισχύει:

$$Y[k] = X(e^{j2\pi k/4}), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Με άλλα λόγια, ο DFT 4-σημείων της ακολουθίας $y[n]$ ισούται με τον DTFT της ακολουθίας $x[n]$ υπολογισμένο στα σημεία $\omega_k = 2\pi k/4$ για $k = 0, 1, 2, 3$.

(β) Δίχως να υπολογίσετε ευθείς και αντίστροφους DFT, να προσδιορίσετε μια ακολουθία, $z[n]$, μήκους 7, που είναι μη μηδενική μόνο για $n = 0, 1, \ldots, 6$, και για την οποία ισχύει:

$$Z(e^{j2\pi k/5}) = X(e^{j2\pi k/5}), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Δηλαδή, ο DTFT της ακολουθίας $z[n]$ ταυτίζεται με τον DTFT της ακολουθίας $x[n]$ στα σημεία $\omega_k = 2\pi k/5$ για $k = 0, 1, 2, 3, 4$.