

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IV

Άσκηση 1 Ένα αεροπλάνο έχει 50 θέσεις και έχουν γίνει κρατήσεις από 55 επιβάτες. Η πιθανότητα καθένας από αυτούς να έρθει στο αεροδρόμιο είναι 0,9 ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους. Ποια είναι η πιθανότητα κάποιοι επιβάτες που θα φθάσουν στο αεροδρόμιο να είναι υπεράριθμοι;

Άσκηση 2 Έστω πως από 10 μπάλες, οι οποίες είναι αριθμημένες από το 1 έως το 10, επιλέγουμε τυχαία 3 χωρίς επαναστατοποίηση. Έστω Y ο μέγιστος αριθμός από τις τρεις μπάλες που επιλέξαμε, και Z ο ελάχιστος. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση μάζας πιθανότητας των Y και Z .

Άσκηση 3 Στον τελικό των play-offs έχουν προκριθεί δύο ομάδες A, B οι οποίες παίζουν μεταξύ τους μέχρις ότου κάποια να συμπληρώσει τρεις νίκες. Έστω ότι οι αγώνες αποτελούν ανεξάρτητες δοκιμές και ότι η πιθανότητα να κερδίσει έναν αγώνα η ομάδα A είναι 0.48, ενώ η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα B είναι 0.52 (δεν υπάρχει δυνατότητα ισοπαλίας).

(α) Ποια είναι η πιθανότητα να χρειαστεί να γίνουν 5 παιχνίδια μέχρι να αναδειχτεί ο πρωταθλητής;

(β) Αν για την ανάδειξη του πρωταθλητή έχουν χρειαστεί 5 αγώνες, ποια η πιθανότητα να είναι πρωταθλήτρια η ομάδα A ;

Άσκηση 4 Μια διακριτή τ.μ. X παίρνει τιμές στο \mathbb{N} και έχει συνάρτηση μάζας πιθανότητας $p_n = Cn^{-s}$ για κάποια σταθερά C και κάποιο $s > 1$. Ποια πρέπει να είναι η C ως συνάρτηση του s ; Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου η X να είναι πολλαπλάσιο του 7;

Άσκηση 5 Ρίχνουμε ένα ζάρι και στρίβουμε τόσα κέρματα όσα και η ένδειξη του. Να υπολογιστεί η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του πλήθους των κορώνων.

Άσκηση 6 Ένα δοχείο περιέχει αρχικά 1 λευκή και 1 μαύρη σφαίρα. Σε κάθε γύρο επιλέγουμε τυχαία μία από τις σφαίρες που υπάρχουν στο δοχείο εκείνη τη στιγμή και την επιστρέφουμε στο δοχείο μαζί με μία ακόμα σφαίρα του ίδιου χρώματος. Να υπολογιστεί η συνάρτηση μάζας πιθανότητας των λευκών σφαιρών μετά από n επαναλήψεις του πειράματος.

Άσκηση 7 Ο παίκτης A στρίβει ν φορές ένα δίκαιο νόμισμα και ο παίκτης B στρίβει το ίδιο νόμισμα $\nu + 1$ φορές. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο A να φέρει αυστηρά περισσότερες φορές γράμματα από τον B .

Άσκηση 8 Ένας μαθηματικός έχει πάντα μαζί του ένα σπιρτόκουτο στη δεξιά του τσέπη και ένα άλλο στην αριστερή. Όταν χρειάζεται ένα σπέρτο, επιλέγει ένα σπιρτόκουτο από οποιαδήποτε τσέπη του με πιθανότητα $1/2$, ανεξάρτητα από τις προηγούμενες επιλογές. Έστω ότι αρχικά το κάθε κουτί περιέχει N σπέρτα και ας θεωρήσουμε τη στιγμή κατά την οποία για πρώτη φορά ο μαθηματικός ανακαλύπτει ότι το ένα κουτί είναι κενό. Ποια είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας του αριθμού των σπέρτων που περιέχει το άλλο κουτί;

Πώς γενικεύεται στην περίπτωση όπου οι πιθανότητες επιλογής της αριστερής ή της δεξιάς τσέπης είναι p και $1 - p$ αντίστοιχα;

Άσκηση 9 Να κατασκευάσετε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, \mathbb{P}) στον οποίο να είναι ορισμένες τ.μ. $X \sim Be(p)$ και $Y \sim Po(p)$ και να ισχύει:

$$\mathbb{P}[X \neq Y] \leq p^2$$