

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γεώργιος Ροβιθάκης
Καθηγητής, Α.Π.Θ.

Γιατί Χρειαζόμαστε τον Αυτόματο Έλεγχο;

Ο άνθρωπος από την πρώτη στιγμή της εμφάνισής του πάνω στη γη κυριαρχείται από την ανάγκη να **μάθει** το περιβάλλον του και να το **ελέγξει** ώστε να καλύψει στον βέλτιστο βαθμό τις επιθυμίες του.

Εφαρμογές του ΑΕ έχουν αναφερθεί από τους αρχαίους χρόνους.

Ο Αυτόματος Έλεγχος:

- Χρησιμοποιείται για να επιλύσει δυσεπίλυτα προβλήματα.
- Αποτελεί την «κρυφή τεχνολογία» πρακτικά σε κάθε τεχνολογικό επίτευγμα.
- Έχει πληθώρα από πολύ ενδιαφέρουσες εφαρμογές.

Ενδεικτικές Εφαρμογές ΑΕ

1) Κινητή Τηλεφωνία

- **Έλεγχος Πρόσβασης (Access Control)**

Κάθε συσκευή περιέχει πομποδέκτη που καθιστά εφικτή την πρόσβαση σε σταθμούς βάσης. Η σχεδίαση πομποδεκτών χαμηλού κόστους, μαζικής παραγωγής και ταυτόχρονα ικανής ισχύος, ευαισθησίας και γραμμικότητας αποτελεί σημαντική τεχνολογική πρόκληση. Βρόχοι ελέγχου που συνεισφέρουν στην κατεύθυνση αυτή είναι μεταξύ άλλων:

- Αυτόματος έλεγχος κέρδους (AGC)
- Αυτόματος έλεγχος συχνότητας (AFC)
- Έλεγχος εκπεμπόμενης ισχύος
- Έλεγχος κωδικοποίησης & διαμόρφωσης



ΕΠΟΠΤΙΚΑ

Αυτόματος Έλεγχος Κέρδους

Η ισχύς του λαμβανόμενου σήματος παρουσιάζει μεγάλες μεταβολές που εξαρτώνται από απόσταση πομπού-δέκτη. Ο δέκτης πρέπει να επιδεικνύει γραμμική συμπεριφορά σε μεγάλου εύρους περιοχή λειτουργίας, που αντιστοιχεί σε μεταβολή της ισχύος στην είσοδο της τάξης του 10^9 . Η επίτευξη του παραπάνω στόχου με χαμηλού κόστους ηλεκτρονικά συστήματα είναι προς το παρόν ανέφικτη. Το πρόβλημα επιλύεται με κατάλληλα σχεδιασμένους βρόχους ελέγχου.

ΕΠΟΠΤΙΚΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑ...

Αυτόματος Έλεγχος Συχνότητας

Για τη σωστή λήψη σημάτων, ο ταλαντωτής της τηλεφωνικής συσκευής πρέπει να έχει την ίδια συχνότητα με το λαμβανόμενο σήμα. Η ακρίβεια της απαιτούμενης ταύτισης των 2 συχνοτήτων είναι τέτοια που η επίτευξή της χωρίς χρήση τεχνικών αυτομάτου ελέγχου θα απαιτούσε ταλαντωτές κρυστάλλων υψηλής κατανάλωσης ισχύος, οι οποίοι επιπλέον είναι ογκώδεις και δαπανηροί.

Εφαρμογές ΑΕ/Κινητή Τηλ. Συνέχεια...

- **Έλεγχος στο Επίπεδο Κυκλωματικής Σχεδίασης**

Τυπική χρήση η αντιστάθμιση των μεταβολών των ηλεκτρονικών διατάξεων λόγω μεταβολών στη θερμοκρασία, τάση λειτουργίας, γήρανση κλπ.

- **Έλεγχος στο Επίπεδο Εφαρμογής**

Αναφέρεται στη διαχείριση των διαθέσιμων πόρων της συσκευής. Η διαθέσιμη μνήμη, ισχύς και οι υπολογιστικοί πόροι είναι άγνωστες λειτουργικές παράμετροι μέχρι τη στιγμή εκτέλεσης κάποιας εφαρμογής.

Ενδεικτικές Εφαρμογές ΑΕ

2) Ενεργητική Ασφάλεια Αυτοκινήτων

- **Antilock Braking System (ABS)**

Στοχεύει στην ελαχιστοποίηση της απόστασης φρεναρίσματος, αποφεύγοντας το μπλοκάρισμα των τροχών, διατηρώντας τον έλεγχο του αυτοκινήτου.

- **Έλεγχος Πρόσφυσης (Traction Control)**

Στοχεύει στην αποφυγή του spinning των τροχών κατά την επιτάχυνση.

Ενδεικτικές Εφαρμογές ΑΕ

- **Έλεγχος Ηλεκτρονικής Ευστάθειας (ESC)**
Στοχεύει στη σταθεροποίηση του οχήματος παρουσία πλαγιολίσθησης.
- **Αυτόματο Κιβώτιο Ταχυτήτων**

Ενδεικτικές Εφαρμογές ΑΕ

3) Συστήματα Δυναμικής Διατήρησης Θέσης

Επιτρέπουν την αυτόματη διατήρηση της θέσης και του προσανατολισμού σκαφών μέσω συντονισμένου ελέγχου των προωθητήρων.

Τυπική εφαρμογή: πλατφόρμες άντλησης υδρογονανθράκων.

Ενδεικτικές Εφαρμογές ΑΕ

4) Segway

Από τα πιο προφανή προϊόντα που δεν μπορούν να λειτουργήσουν απουσία ΑΕ.



5) Υπερμεγέθη Τηλεσκόπια

Πολύ μεγάλα τηλεσκόπια μπορούν να κατασκευαστούν συνενώνοντας πολλούς μικρούς σε μέγεθος φακούς των οποίων η θέση ελέγχεται συνεχώς για να επιτυγχάνεται η επιθυμητή εστίαση αλλά και συνεκτικότητα (adaptive optics).

Ενδεικτικές Εφαρμογές ΑΕ

6) Σκληρός Δίσκος

Η κεφαλή ανάγνωσης είναι προσαρμοσμένη στην άκρη ενός βραχίονα κατασκευασμένο από ελαφρά υλικά για να επιτυγχάνονται γρήγορες κινήσεις. Ο βραχίονας οδηγείται από ηλεκτρικό κινητήρα.

Χωρίς ΑΕ η κίνηση του βραχίονα παρουσιάζει ισχυρές ταλαντώσεις που καθυστερώντας την ανάγνωση των δεδομένων στο χρόνο που διαρκεί η απόσβεση των ταλαντώσεων.



Ενδεικτικές Εφαρμογές ΑΕ

7) Δίκτυα Υπολογιστών

Τα ΔΥ είναι:

- α) πολύ υψηλής κλίμακας (το Internet είναι πιθανότατα το μεγαλύτερο σύστημα ελέγχου που έχει κατασκευάσει ο άνθρωπος)
- β) αποκεντρωμένα (αποφάσεις που αφορούν τη λειτουργία τους λαμβάνονται τοπικά και πολύ γρήγορα)
- γ) ευμετάβλητα, αβέβαια και ετερογενή.

Επιπλέον, μετρήσεις-παρατηρήσεις που αφορούν την κατάσταση του δικτύου λαμβάνονται με καθυστέρηση.

Ενδεικτικά προβλήματα ελέγχου:

- Έλεγχος Συμφόρησης (congestion control)
- Δρομολόγηση (routing)

Ενδεικτικές Εφαρμογές ΑΕ

8) Παραγωγή-Μεταφορά Ηλεκτρικής Ενέργειας

Τα ΣΗΕ αποτελούν καλό παράδειγμα πολύπλοκου καταναμημένου συστήματος με τα ΣΑΕ να δραστηριοποιούνται σε πολλαπλά επίπεδα.

- **Εργοστάσια παραγωγής:** έχουν πολλούς βρόχους ελέγχου.
- **Λειτουργία Δικτύου.** Η ηλεκτρική ενέργεια αποθηκεύεται δύσκολα, άρα η παραγωγή πρέπει να ικανοποιεί κάθε χρονική στιγμή την κατανάλωση.
- **Διαχείριση Ηλεκτρικής Ενέργειας.** Δύσκολο πρόβλημα σε έντονα καταναμημένα συστήματα που απαρτίζονται από πολλές και ετερογενείς πηγές ηλ. ενέργειας με μεγάλες αποστάσεις μεταξύ παραγωγής-κατανάλωσης. Η ζήτηση ηλ. ενέργειας μεταβάλλεται έντονα και κατά δύσκολο προβλέψιμο τρόπο.
- **Αξιοπιστία – Ασφάλεια.** Πτώσεις δέντρων, κεραυνοί κλπ. προκαλούν την εμφάνιση ιδιαίτερα υψηλών υπερτάσεων που λειτουργούν ως διαταραχές στο ΣΗΕ. Ο ΑΕ επιφορτίζεται με την απόσβεσή τους.

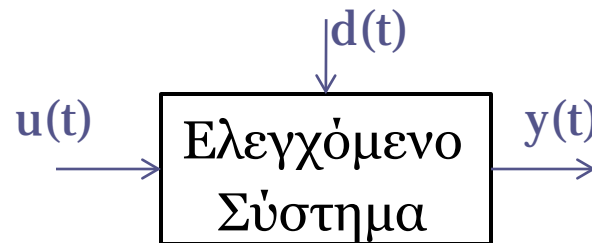
Συμπέρασμα

Ο Αυτόματος Έλεγχος βρίσκεται παντού!

Το Πρόβλημα του ΑΕ

Σύστημα: Λειτουργική μονάδα που οδηγείται από σήματα εισόδου και αποκρίνεται με τα σήματα εξόδου.

Ελεγχόμενο Σύστημα: Είναι το αντικείμενο της μελέτης του ΑΕ. Θέλουμε να του επιβάλουμε λειτουργικά χαρακτηριστικά.



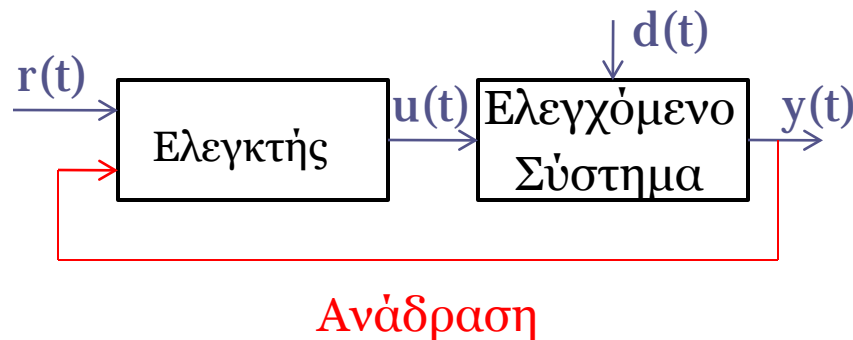
Είσοδοι: $u(t)$, $d(t)$ Έξοδοι: $y(t)$

Το πρόβλημα του ΑΕ: Σχεδιάσετε την είσοδο ελέγχου $u(t)$ έτσι ώστε η έξοδος του ελεγχόμενου συστήματος $y(t)$ να συμπεριφέρεται όπως κάποια επιθυμητή είσοδος αναφοράς $r(t)$, ανεξάρτητα από την παρουσία αβέβαιων εξωτερικών διαταραχών $d(t)$.

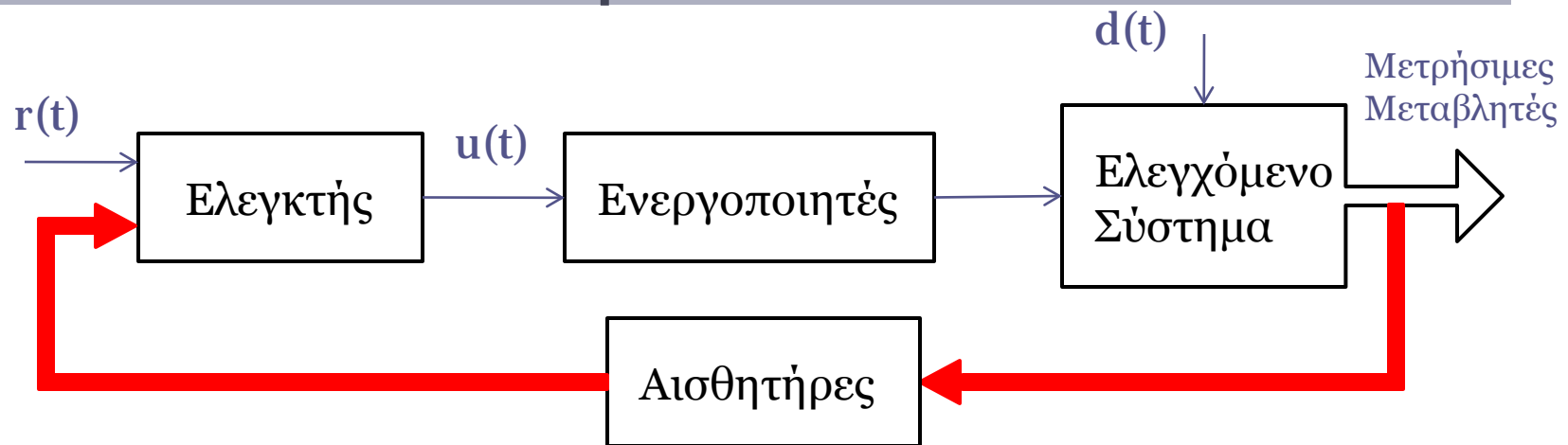
Ανάδραση

Ανάδραση: Θεμελιώδης αρχή του ΑΕ κατά την οποία η ελεγχόμενη μεταβλητή $y(t)$ ανατροφοδοτείται στην είσοδο, συγκρίνεται με την επιθυμητή συμπεριφορά $r(t)$, με την διαφορά να οδηγεί τον ελεγκτή στην παραγωγή του κατάλληλου σήματος ελέγχου $u(t)$, που με τη σειρά του κατευθύνει την έξοδο $y(t)$ του ελεγχόμενου συστήματος στο να ταυτιστεί με την επιθυμητή απόκριση $r(t)$.

Σύστημα κλειστού βρόχου:



Πλήρες Σύστημα Ελέγχου Κλειστού Βρόχου



Αισθητήρες: Αποτελούν τα «μάτια» του ελεγκτή. Καθιστούν τις μετρήσιμες μεταβλητές συμβατές με τη λειτουργία του ελεγκτή.

Ενεργοποιητές: Μετασχηματίζουν την έξοδο του ελεγκτή σε σήμα συμβατό με τη λειτουργία του ελεγχόμενου συστήματος, καθιστώντας εφικτή την ενεργοποίησή του.

Ολοκλήρωση του Συστήματος

Η επιτυχημένη σχεδίαση ΣΑΕ απαιτεί ολιστική θεώρηση. Θέματα που πρέπει να γνωρίζει-επιλέξει ένας μηχανικός ΣΑΕ είναι:

- Ελεγχόμενο Σύστημα
- Επιδιωκόμενοι Στόχοι
- Αισθητήρες/Ενεργοποιητές
- Επικοινωνία
- Υλικό Υπολογιστών
- Αρχιτεκτονικές & Διεπαφές
- Λογισμικό
- Θεωρία Συστημάτων & Ελέγχου

Ολοκλήρωση του Συστήματος

1) Ελεγχόμενο Σύστημα

Ο μηχανικός ελέγχου πρέπει να είναι γνώστης της φυσικής του ελεγχόμενου συστήματος ώστε να μπορεί να αξιολογεί σωστά τα σήματα που καταγράφει και να παίρνει τις κατάλληλες αποφάσεις.

Η γνώση ενός μοντέλου (μαθηματικής περιγραφής) του ελεγχόμενου συστήματος είναι κατά κανόνα απαραίτητη στη σχεδίαση ΣΑΕ.

Σχεδίαση μοντέλου:

- ❖ Από τη φυσική του ελεγχόμενου συστήματος
- ❖ Από δεδομένα εισόδου-εξόδου

Ολοκλήρωση του Συστήματος

2) Επιδιωκόμενοι Στόχοι

Πρέπει να οριστεί ο στόχος ελέγχου. Αυτό περιλαμβάνει:

- α) Τι θέλουμε να πετύχουμε; (μείωση της καταναλισκόμενης ενέργειας, αυξημένη ασφάλεια λειτουργίας, προστασία του περιβάλλοντος κλπ.)
- β) Για να επιτευχθούν οι παραπάνω στόχοι ποιες μεταβλητές του ελεγχόμενου συστήματος πρέπει να ελεγχθούν;
- γ) Για να επιτευχθούν οι στόχοι του (α) ποια επίπεδα ποιότητας απόκρισης απαιτούνται; (ακρίβεια, ταχύτητα σύγκλισης, υπερύψωση κλπ.)

Ολοκλήρωση του Συστήματος

3) Επικοινωνία

Η διασύνδεση των αισθητήρων-ενεργοποιητών στο σύστημα κλειστού βρόχου εμπλέκει τη χρήση τηλεπικοινωνιακών συστημάτων. Η σχεδίαση ή/και η επιλογή των κατάλληλων πρωτοκόλλων επικοινωνίας που να συνεργάζονται με τους χρησιμοποιούμενους ελεγκτές και το αντίστροφο, είναι πρωταρχικής σημασίας σε νεωτερικά ΣΑΕ.

Ολοκλήρωση του Συστήματος

4) Υλικό-Λογισμικό Υπολογιστών

Η υλοποίηση ΣΑΕ απαιτεί σε κάποιο βαθμό την εμπλοκή υπολογιστικών συστημάτων. Συνεπώς, ζητήματα που άπτονται του υλικού των υπολογιστών και της διασύνδεσής τους εμφανίζονται ολοένα και πιο έντονα στη σχεδίαση και καθημερινή λειτουργία των ΣΑΕ.

Είναι ολοένα και πιο συχνό οι ελεγκτές να υλοποιούνται ως αλγόριθμοι που «τρέχουν» σε κάποιο υπολογιστικό σύστημα. Η σωστή αποτύπωση της θεωρητικής σχεδίασης μέσω του λογισμικού είναι κεντρικής σημασίας.

Ολοκλήρωση του Συστήματος

5) Αρχιτεκτονικές-Διεπαφές

Το ζήτημα του τι να συνδεθεί με τι, δεν είναι καθόλου προφανές στη σχεδίαση ΣΑΕ. Υπάρχουν πολλές αρχιτεκτονικές που κατά περίπτωση μπορεί να εμφανίζουν πλεονεκτήματα/μειονεκτήματα.

Παραδείγματα Αρχιτεκτονικών:

- Συγκεντρωτική
- Αποκεντρωμένη
- Ιεραρχική

Ολοκλήρωση του Συστήματος

6) Θεωρία Συστημάτων & Ελέγχου

Στην πράξη τα ΣΑΕ λειτουργούν σε επικίνδυνα περιβάλλοντα κάτω από αντίξοες συνθήκες. Πέρα από την παρουσία θορύβου και εξωγενών διαταραχών, το μοντέλο του ελεγχόμενου συστήματος είναι τις περισσότερες φορές ελλιπές. Οι παραπάνω παράγοντες πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψη στη φάση της θεωρητικής σχεδίασης, διότι μπορεί να οδηγήσουν σε επιδείνωση της λειτουργικής συμπεριφοράς ακόμα και σε αποσταθεροποίηση του ΣΑΕ.

Παράδειγμα Σχεδίασης ΣΑΕ

Διατύπωση του Προβλήματος

Έστω αυτοκίνητο μάζας m [Kg] κινούμενο σε δρόμο κλίσης φ [rad] με στιγμιαία ταχύτητα $y(t)$ [m/s]. Στο αυτοκίνητο ασκείται, μέσω του κινητήρα του, δύναμη οδήγησης $u(t)$ [N] καθώς επίσης και η αντίσταση του αέρα που τη θεωρούμε ανάλογη της στιγμιαίας ταχύτητας. Έστω α [Ns/m] ο συντελεστής αναλογίας (αεροδυναμικός συντελεστής). Οι τριβές μεταξύ των τροχών και του οδοστρώματος θεωρούνται αμελητέες.

Επιθυμούμε να σχεδιάσουμε ελεγκτή που θα παράγει δύναμη οδήγησης $u(t)$ έτσι ώστε η ταχύτητα του αυτοκινήτου να διατηρείται σταθερή για κάθε χρονική στιγμή.

Παράδειγμα Σχεδίασης ΣΑΕ

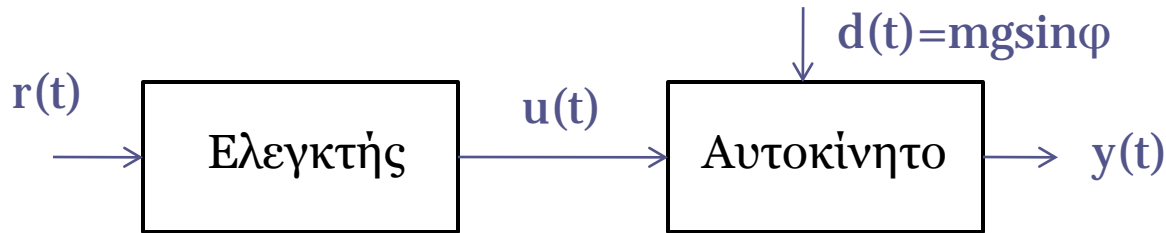
Μοντελοποίηση

Θεωρώντας το αυτοκίνητο ως υλικό σημείο μάζας m , εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής και βρίσκουμε:

$$m\dot{y}(t) = u(t) - \alpha y(t) - mg \sin \varphi$$

Παράδειγμα Σχεδίασης ΣΑΕ

Σχεδίαση Ανοικτού Βρόχου



Θεωρούμε ότι το αυτοκίνητο είναι αρχικά ακίνητο άρα $y(0)=0$ και επιθυμούμε να κινείται με σταθερή ταχύτητα 25m/s. Άρα $r(t)=25$.

Έστω ότι $\phi=0$ άρα $d(t)=0$. Το μοντέλο γίνεται: $m\dot{y} + \alpha y = u$

Επιλέγοντας: $u(t) = kr(t)$, $k > 0$

βρίσκουμε:

$$y(t) = 25 \frac{k}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right), t \geq 0$$

Παράδειγμα Σχεδίασης ΣΑΕ

Συμπέρασμα 1 Η ταχύτητα του αυτοκινήτου συγκλίνει με ρυθμό α/m στην $25k/\alpha$.

Συμπέρασμα 2 Για να πετύχουμε την επιθυμητή ταχύτητα των $25m/s$ πρέπει να επιλέξουμε $k=\alpha$.

Συμπέρασμα 3 Ο ρυθμός σύγκλισης εξαρτάται αποκλειστικά από τις παραμέτρους του μοντέλου του αυτοκινήτου α, m . Άρα είναι αδύνατο να «φτάσουμε» στο στόχο πιο γρήγορα ή πιο αργά με διαφορετική επιλογή της παραμέτρου k του ελεγκτή.

Συμπέρασμα 4 Για να είναι πετυχημένη η παραπάνω σχεδίαση πρέπει να γνωρίζουμε την τιμή του αεροδυναμικού συντελεστή α με πολύ μεγάλη ακρίβεια. Το ίδιο δε συμβαίνει για τη μάζα m διότι επηρεάζει μόνο το ρυθμό σύγκλισης.

Παράδειγμα Σχεδίασης ΣΑΕ

Όταν $\varphi \neq 0 \Rightarrow d(t) \neq 0$. Για τον ίδιο ελεγκτή με πριν προκύπτει:

$$y(t) = \left(\frac{25k}{\alpha} - \frac{mg \sin \varphi}{\alpha} \right) \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right), t \geq 0$$

Όπου θεωρήθηκαν τμηματικά σταθερές κλίσεις οδοστρώματος φ .

Για να πετύχουμε στην περίπτωση αυτή την επιθυμητή ταχύτητα των 25m/s πρέπει να επιλέξουμε:

$$k = \frac{25\alpha + mg \sin \varphi}{25}$$

Συμπέρασμα 5 Ο ελεγκτής ανοικτού βρόχου αδυνατεί να πετύχει την επιθυμητή ταχύτητα παρουσία εξωτερικών διαταραχών ακόμα κι αν γνωρίζουμε με απόλυτη ακρίβεια τις παραμέτρους του μοντέλου του αυτοκινήτου (έχει μεγάλη ευαισθησία).

Παράδειγμα Σχεδίασης ΣΑΕ

Σχεδίαση Κλειστού Βρόχου

Ανατροφοδοτούμε την ταχύτητα στον ελεγκτή:

$$u(t) = k(r(t) - y(t)), k > 0$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση του ελεγκτή στο μοντέλο του αυτοκινήτου προκύπτει:

$$m\dot{y}(t) + \alpha y(t) = k(r(t) - y(t)) - mg \sin \varphi$$

Λύνοντας για τμηματικά σταθερές κλίσεις οδοστρώματος φ βρίσκουμε

$$y(t) = \frac{25k - mg \sin \varphi}{\alpha + k} \left(1 - e^{-\left(\frac{\alpha + k}{m}\right)t} \right)$$

Παράδειγμα Σχεδίασης ΣΑΕ

Συμπέρασμα 6 Για $\varphi=0$ η ταχύτητα του αυτοκινήτου συγκλίνει εκθετικά με ρυθμό $(\alpha+k)/m$ (άρα τώρα ελεγχόμενο από το k) στην τιμή $\frac{25k}{\alpha+k} \rightarrow 25$ για μεγάλες τιμές του k .

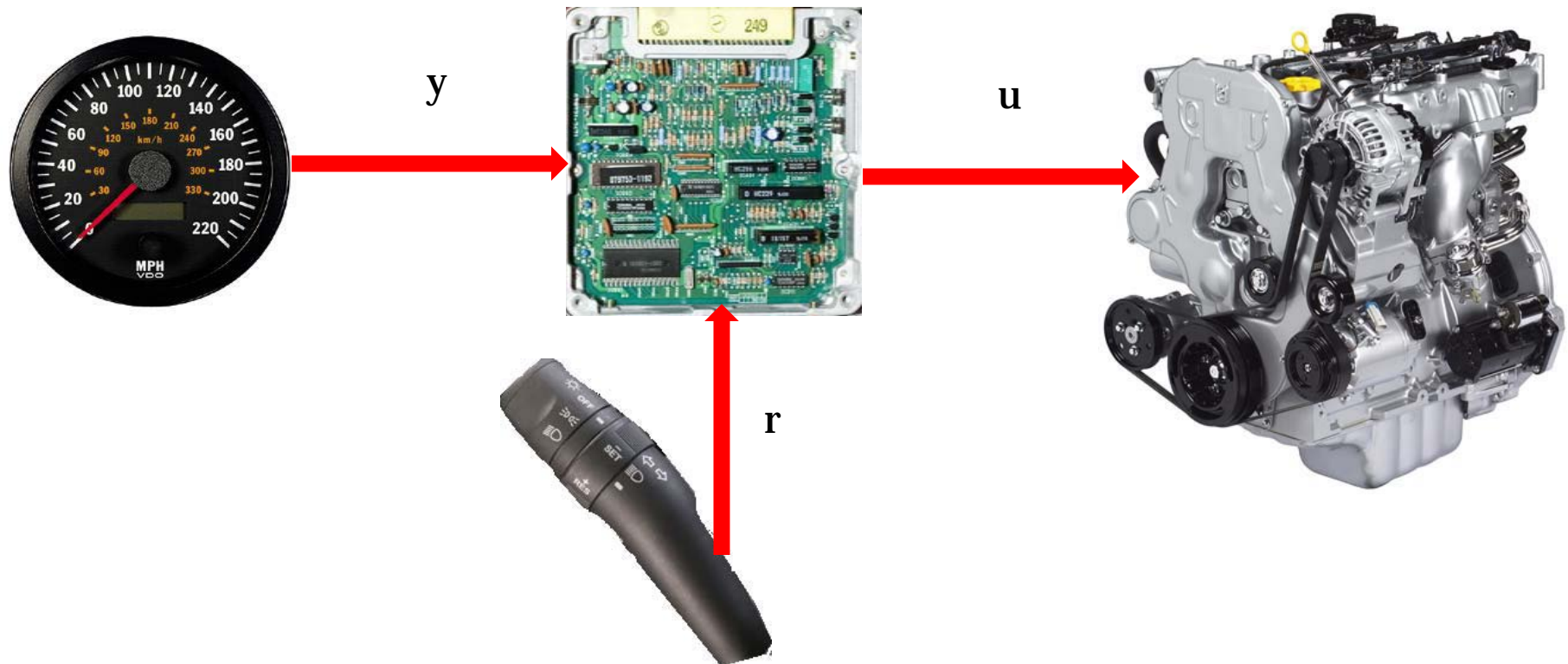
Συμπέρασμα 7 Πετυχαίνουμε απόσβεση των διαταραχών διότι

$$\frac{25k}{\alpha+k} \rightarrow 25$$

για μεγάλες τιμές του k .

Ποια η Φυσική Υπόσταση του Ελεγκτή;

Ο ελεγκτής είναι ένας υπολογιστής στο αυτοκίνητο, μετράει την ταχύτητα του οχήματος, την επιθυμητή ταχύτητα και στέλνει σήματα επιθυμητής ροπής στον κινητήρα



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεώργιος Ροβιθάκης
Καθηγητής, Α.Π.Θ.

Βασικές Έννοιες

Μοντέλο: Η μαθηματική αναπαράσταση του ελεγχόμενου συστήματος

Χρήση: α) στη μελέτη της λειτουργίας των συστημάτων
β) στην πρόβλεψη της απόκρισης του συστήματος για
διάφορα σενάρια λειτουργίας

Δυναμικά Συστήματα: έχουν μνήμη, η τρέχουσα τιμή της εξόδου εξαρτάται από παρελθοντικές τιμές της εισόδου.

Θα ασχοληθούμε με τη μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων.

Πολυπλοκότητα Μοντέλων

Για τη δημιουργία μοντέλων είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι:

Κάθε πραγματικό σύστημα είναι εκ φύσεως πολύπλοκο.

Άρα:

Κάθε προσπάθεια δημιουργίας ακριβέστατων μοντέλων αποτελεί
κατά κανόνα ανέφικτο στόχο.

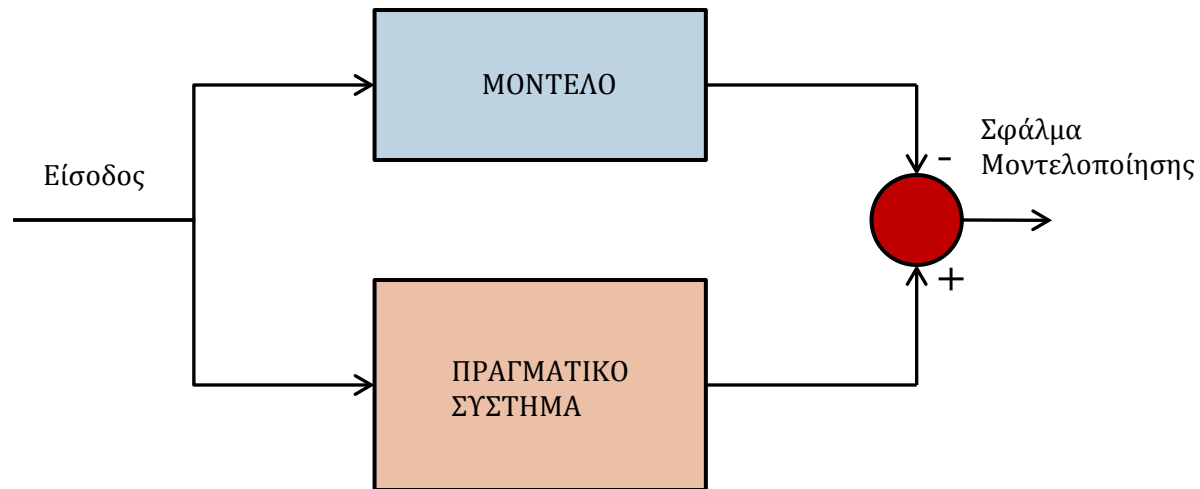
Ευτυχώς:

Η ανάδραση συγχωρεί την παρουσία σφαλμάτων μοντελοποίησης.

Επομένως, στα πλαίσια της σχεδίασης ΣΑΕ μπορούμε να «ξεφύγουμε»
με απλούστερες περιγραφές (μοντέλα), με την προϋπόθεση ότι
αυτές συλλαμβάνουν τα κυρίαρχα λειτουργικά χαρακτηριστικά του
συστήματος.

Σφάλμα Μοντελοποίησης

Σχηματικά:



Σχήμα 2.1. Σχηματική αναπαράσταση του σφάλματος μοντελοποίησης.

Μεθοδολογίες Δημιουργίας Μοντέλων

Μαθηματική Μοντελοποίηση: Κάθε πραγματικό σύστημα υπακούει σε φυσικούς νόμους που συσχετίζουν τις μεταβλητές του π.χ. διατήρηση ενέργειας, μάζας, ορμής, ηλεκτρικού φορτίου κλπ.

Χρήση Δεδομένων Εισόδου-Εξόδου: Είναι συνήθως δύσκολο να μοντελοποιήσουμε πολύπλοκα συστήματα χρησιμοποιώντας φυσικούς νόμους. Στις περιπτώσεις αυτές λύση μπορεί να δοθεί κάνοντας χρήση δεδομένων εισόδου-εξόδου (μοντελοποίηση κατά «μαύρο κουτί»).

Ο συνδυασμός και των δύο μεθόδων απαντάται συχνά στην πράξη

Μοντέλα Δυναμικών Συστημάτων

Η μελέτη της δυναμικής των συστημάτων ξεκίνησε στην προσπάθεια των επιστημόνων να περιγράψουν την κίνηση των πλανητών.

Ο Kepler ανακάλυψε εμπειρικά ότι οι τροχιές των πλανητών είναι ελλειψοειδή.

Στην προσπάθεια να εξηγήσει θεωρητικά τα εμπειρικά ευρήματα του Kepler, ο Newton βρήκε το νόμο της βαρύτητας, το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής (μάζα \times επιτάχυνση = συνισταμένη δύναμη) και επίσης εφεύρε το μαθηματικό λογισμό και τις διαφορικές εξισώσεις.

Η πιο σημαντική ίσως παρατήρηση της Νευτώνειας Μηχανικής είναι ότι η κίνηση των πλανητών μπορεί να προβλεφθεί γνωρίζοντας την τρέχουσα θέση και ταχύτητα κάθε πλανήτη.

Η θέση, ταχύτητα αποτελούν για το πλανητικό σύστημα αυτό που μετά από πολλά χρόνια ονομάστηκε μεταβλητές κατάστασης.

Ορισμοί

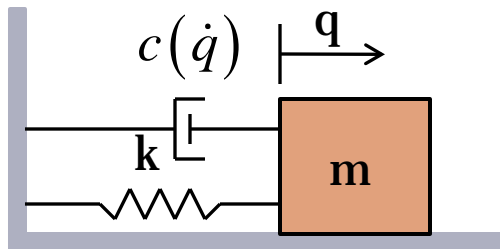
Μεταβλητές Κατάστασης Συστήματος: Το σύνολο των μεταβλητών που απαιτούνται για την πλήρη περιγραφή της απόκρισης του συστήματος, με στόχο την πρόβλεψη της μελλοντικής συμπεριφοράς του.

Χώρος Καταστάσεων: Το σύνολο όλων των τιμών των μεταβλητών κατάστασης.

Κατάσταση: Κάθε σημείο του χώρου καταστάσεων.

Παράδειγμα 2.1

Σώμα μάζας m συνδέεται όπως στο σχήμα με γραμμικό ελατήριο σταθεράς k και με μη γραμμικό αποσβεστήρα του οποίου η έξοδος (δύναμη απόσβεσης της κίνησης) είναι συνάρτηση της ταχύτητας του σώματος.



q : η μετατόπιση του σώματος
 \dot{q} : η ταχύτητα του σώματος
 \ddot{q} : η επιτάχυνση του σώματος

Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής:

$$m\ddot{q} + c(\dot{q}) + kq = 0$$

Μοντέλο Συστήματος

Ορισμοί συνέχεια...

Αυτόνομα Συστήματα: Εξωτερικές εισοδοι δεν επιδρούν στο σύστημα.

Παράδειγμα: Το μοντέλο του Παραδείγματος 2.1 περιγράφει αυτόνομο σύστημα.

Μη- Αυτόνομα Συστήματα: Εξωτερικές εισοδοι επιδρούν στο σύστημα.

Παράδειγμα:

$$m\ddot{q} + c(\dot{q}) + kq = u$$

u: εξωτερική δύναμη

Γενίκευση

Τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 2.1 γενικεύονται:

Πολλά συστήματα μπορούν να παρασταθούν από διαφορικές εξισώσεις:

$$F\left(q^{(n)}, q^{(n-1)}, \dots, \dot{q}, q, u\right) = 0$$

Οι οποίες μετασχηματιζόμενες καταλήγουν ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u)\end{aligned}$$

Μοντέλο χώρου καταστάσεων
(μη γραμμικό)

Στο μοντέλο χώρου καταστάσεων οι διαφορικές εξισώσεις ονομάζονται **εξισώσεις κατάστασης**, οι συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ είναι ομαλές, ενώ $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$
τα διανύσματα των μεταβλητών κατάστασης, των εισόδων και των
εξόδων αντίστοιχα.

Τάξη Συστήματος: η διάσταση του διανύσματος κατάστασης.

Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα: Οι f, h δεν εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο.

Χρονικά Μεταβαλλόμενα Συστήματα: Οι f, h εξαρτώνται άμεσα από τον χρόνο, π.χ. $F(x, u, t) = xucost$.

Γραμμικά Συστήματα

Οι f , h είναι γραμμικές ως προς x, u

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Γραμμικό Χρονικά Αμετάβλητο (ΓΧΑ) Σύστημα: Οι πίνακες A , B , C , D είναι σταθεροί.

Γραμμικό Χρονικά Μεταβαλλόμενο (ΓΧΜ) Σύστημα: Ένα τουλάχιστον στοιχείο των A , B , C , D μεταβάλλεται άμεσα με το χρόνο.

ΓΧΑ Συστήματα – Επιλογή Μεταβλητών Κατάστασης

Περίπτωση 1: Γενική περιγραφή

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u$$

$u, y \in \mathbb{R}$ η είσοδος και η έξοδος αντίστοιχα μετρήσιμα άρα γνωστά σήματα.

Ορίζουμε τις μεταβλητές κατάστασης:

$$x_1 = y$$

$$x_2 = \dot{y}$$

$$\vdots$$

$$x_n = y^{(n-1)}$$

Περίπτωση 1 συνέχεια...

Η διαφορική εξίσωση γίνεται:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + u$$

Περίπτωση 1 συνέχεια...

Ορίζοντας:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0], \quad D = [0]$$

Προκύπτει:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Παρατήρηση: Τάξη συστήματος
= τάξη διαφορικής εξίσωσης

Περίπτωση 2: Γενική περιγραφή

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

με τα u, y όπως ορίστηκαν στην Περίπτωση 1.

Ορίζοντας τις μεταβλητές κατάστασης όπως στη Περίπτωση 1 έχουμε:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

Περίπτωση 2 συνέχεια...

Σε πολλά προβλήματα ΑΕ η προηγούμενη μορφή **δεν υλοποιείται** διότι περιέχει παραγωγίσαις ανώτερης τάξης της εισόδου ελέγχου που δε γνωρίζουμε.

Για να λύσουμε το πρόβλημα ορίζουμε τις μεταβλητές κατάστασης:

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

$$\vdots$$

$$x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \dots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u$$

όπου:

$$\beta_0 = b_0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0$$

$$\vdots$$

$$\beta_n = b_n - a_1 \beta_{n-1} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0$$

Περίπτωση 2 συνέχεια...

Τώρα η διαφορική εξίσωση γράφεται:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots - a_1 x_n + \beta_n u$$

Περίπτωση 2 συνέχεια...

Άρα

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0], \quad D = [\beta_0]$$

Παράδειγμα 2.2

Έστω το σύστημα του Παραδείγματος 2.1 στο οποίο ασκούμε επιπλέον δύναμη $u(t)$ στη διεύθυνση της κίνησης. Υποθέτουμε ότι ο αποσβεστήρας είναι γραμμικός. Ακολουθώντας τη διαδικασία του Παραδείγματος 2.1 προκύπτει το μη αυτόνομο σύστημα:

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = u$$

Ορίζουμε τις μεταβλητές κατάστασης:

$$x_1 = q, x_2 = \dot{q}$$

και βρίσκουμε:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u$$

Παράδειγμα 2.2 συνέχεια...

ή σε μορφή πίνακα:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Συσχέτιση Μοντέλων Χώρου Κατάστασης με Μοντέλα Εισόδου- Εξόδου

Από διαφορική εξίσωση σε συνάρτηση μεταφοράς, μέσω M/Σ Laplace

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} \dot{u} + b_m u$$
$$\downarrow LT$$

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) = (b_0 s^{(m)} + b_1 s^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} s + b_m) U(s)$$

Άρα

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^{(m)} + b_1 s^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Από διαφορικές εξισώσεις σε εξισώσεις κατάστασης: Μελετήθηκε

Από εξισώσεις κατάστασης σε συνάρτηση μεταφοράς:

$$\begin{array}{lcl} \dot{x} = Ax + Bu & \xrightarrow{LT} & sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s) \\ y = Cx + Du & & Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{array}$$

Απαλείφοντας το $X(s)$ βρίσκουμε:

$$Y(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + D \right] U(s) + C(sI - A)^{-1} X(0)$$

Θέτοντας $X(0)=0$ προκύπτει:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D$$

Χρήσεις Μοντέλων

1) **Πρόβλεψη μέσω Προσομοίωσης.** Στόχος η πρόβλεψη της συμπεριφοράς ενός συστήματος για δοσμένες αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα 2.2 (συνέχεια). Για το σύστημα σώμα – ελατήριο – αποσβεστήρας του Παραδείγματος 2.2 είχαμε βρει τις εξισώσεις κατάστασης:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 + \frac{1}{m}u \end{bmatrix} = f(x, u)$$

Θέλουμε να προβλέψουμε τη συμπεριφορά του συστήματος για διέγερση :

$$u(t) = \sin \omega t$$

Δοσμένων των x_1, x_2 τη χρονική στιγμή t μπορούμε να προσεγγίσουμε την τιμή τους τη χρονική στιγμή $t+\Delta t$ με $\Delta t > 0$ (πρόβλεψη), με την προϋπόθεση ότι η $f(x,u)$ είναι σταθερή στο Δt . Τότε:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = f(x, u)$$

Άρα

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t f(x, u)$$

Η παραπάνω διαδικασία ονομάζεται ολοκλήρωση κατά Euler. Το σφάλμα της προσέγγισης μειώνεται καθώς μειώνουμε το Δt .

2) Μελέτη Ευστάθειας. Στο προηγούμενο σύστημα σώμα – ελατήριο – αποσβεστήρας θεωρούμε ότι δεν υπάρχει εξωτερική διέγερση ($u=0$)
Οι εξισώσεις κατάστασης είναι:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \end{bmatrix} = f(x, u)$$

Χωρίς να καταφύγουμε στην αναλυτική επίλυση των εξισώσεων κατάστασης, αλλά ούτε και στην προσομοίωσή τους (προσεγγιστική επίλυση), θέλουμε να διαπιστώσουμε τι θα συμβεί αν εκτραπεί το σώμα από τη θέση ισορροπίας του.

Γιατί όχι αναλυτική επίλυση; α) Διότι σε πολύπλοκα μοντέλα είναι ένα πολύ δύσκολο εγχείρημα. β) Παρουσία αβεβαιοτήτων π.χ. στην τιμή κάποιας παραμέτρου, η αναλυτική επίλυση είναι ανέφικτη.

Γιατί όχι προσομοίωση; Επειδή θεωρούμε τυχαίες μετατοπίσεις του σώματος από τη θέση ισορροπίας του, για την εξαγωγή αξιόπιστων συμπερασμάτων θα απαιτούνταν εξαντλητικές προσομοιώσεις, διαδικασία χρονοβόρα και επίπονη.

Για να λύσουμε το πρόβλημα εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε τη συνάρτηση ενέργειας του συστήματος

$$V(x_1, x_2) = \underbrace{\frac{1}{2} k x_1^2}_{\substack{\text{Δυναμική} \\ \text{Ενέργεια}}} + \underbrace{\frac{1}{2} m x_2^2}_{\substack{\text{Κινητική} \\ \text{Ενέργεια}}}$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x_1, x_2)}{dt} &= kx_1 \dot{x}_1 + mx_2 \dot{x}_2 \\ &= kx_1 x_2 - cx_2^2 - kx_1 x_2 \\ &= -cx_2^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Άρα η ενεργειακή συνάρτηση **δεν αυξάνει ποτέ**. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} V(x_1(0), x_2(0)) &\geq V(x_1(t), x_2(t)), \quad \forall t \geq 0 \\ &\geq \frac{1}{2} k x_1^2, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα,

$$|x_1(t)| \leq \sqrt{x_1^2(0) + \frac{m}{k} x_2^2(0)}, \quad \forall t \geq 0$$

Ομοίως

$$|x_2(t)| \leq \sqrt{\frac{k}{m} x_1^2(0) + x_2^2(0)}, \quad \forall t \geq 0$$

Επομένως x_1, x_2 **φραγμένα σήματα**.

Για να μελετήσουμε την πιθανή **σύγκλιση** των x_1, x_2 υποθέτουμε πως σε κάποιο χρονικό διάστημα η $V(x_1, x_2)$ σταματά να μειώνεται (αποδείξαμε πριν ότι δεν μπορεί να αυξάνει). Έχουμε λοιπόν ότι στο εν λόγω χρονικό διάστημα

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = 0 \quad (x_2 \text{ σταθερή σε χρονικό διάστημα})$$

Όμως

$$\dot{x}_2 = -\frac{c}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει $x_1(t) = 0$.

Καταλήξαμε λοιπόν πως η $V(x_1, x_2)$ σταματά να μειώνεται μόνο όταν

$$x_1(t) = x_2(t) = 0$$

Συμπέρασμα: Αν εκτραπεί το σώμα από τη θέση ισορροπίας του τότε απομάκρυνση και ταχύτητα είναι φραγμένα (**ευστάθεια**) και το σώμα θα συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας του.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ II

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ
ΔΥΝΑΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Λύση Συστήματος

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο πως μια μέθοδος μοντελοποίησης δυναμικών συστημάτων είναι μέσω των μεταβλητών κατάστασης, που μας οδηγούν σ' ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων 1^{ης} τάξης, τις λεγόμενες εξισώσεις κατάστασης. Στη γενική τους μορφή έχουμε:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x, u)$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R}^p$$

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$$

με f, h ομαλές συναρτήσεις. Έστω ότι επιλέγουμε $u = a(x)$.

Τότε

$$\dot{x} = f(x, a(x)) \triangleq F(x) \tag{3.1}$$

Για να κατανοήσουμε τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος θα πρέπει να αναλύσουμε τα χαρακτηριστικά των λύσεών του.

Θα λέμε ότι η $x(t)$ αποτελεί **λύση** του συστήματος (3.1) στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_f]$ αν

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών. Θα λέμε ότι η $x(t)$ αποτελεί λύση του (3.1) με αρχική τιμή $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τη χρονική στιγμή $t_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ αν

$$x(t_0) = x_0 \text{ και } \frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)), \quad \forall t \in (t_0, t_f]$$

Αν η λύση $x(t)$ ορίζεται $\forall t > t_0$ τότε $t_f = \infty$.

Με μόνη απαίτηση την ομαλότητα της F , το σύστημα (3.1) μπορεί να μην έχει λύση $\forall t > t_0$ και αν έχει δε διασφαλίζεται η μοναδικότητά της.

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης διασφαλίζεται αν η F είναι τουλάχιστον τοπικά συνεχής κατά Lipschitz ή διαφορετικά αν

$$\left| F(z_1) - F(z_2) \right| < k \left| z_1 - z_2 \right|, \quad \forall z_1, z_2 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n.$$

Ικανή συνθήκη για να είναι μια συνάρτηση συνεχής κατά Lipschitz είναι ο Ιακωβιανός πίνακας $\partial F / \partial x$ να είναι φραγμένος ως προς x .

Σημεία Ισορροπίας

Σημείο Ισορροπίας: λέγεται η κατάσταση x^* του δυναμικού συστήματος

$$\dot{x} = F(x)$$

αν

$$F(x^*) = 0.$$

Είναι προφανές πως αν $x(0) = x^*$ τότε

$$x(t) = x^*, \quad \forall t \geq 0$$

όπου έχουμε θεωρήσει $t_0 = 0$.

Τα σημεία ισορροπίας είναι από τα βασικότερα χαρακτηριστικά ενός δυναμικού συστήματος, διότι καθορίζουν τις καταστάσεις που οδηγούν σε στάσιμη συμπεριφορά.

Ένα δυναμικό σύστημα μπορεί να έχει 0, 1 ή και περισσότερα σημεία ισορροπίας

Οριακοί Κύκλοι

Τα δυναμικά συστήματα είναι δυνατό να εμφανίζουν στάσιμες περιοδικές λύσεις που ονομάζονται οριακοί κύκλοι.

Παράδειγμα 1. Το σύστημα

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι η

$$(x_1(t), x_2(t)) = (\sin t, \cos t)$$

αποτελεί λύση του συστήματος που στο $x_1 - x_2$ επίπεδο παριστάνει μοναδιαίο κύκλο με κέντρο το $(0,0)$.

Ευστάθεια – Ορισμοί

Έστω το σύστημα $\dot{x} = F(x)$ με F τοπικά Lipschitz συνεχής.

Ευστάθεια κατά Lyapunov. Έστω $x(t; x_0)$ η λύση του συστήματος για αρχική τιμή $x(0) = x_0$ και x^* ένα σημείο ισορροπίας. Το x^* είναι ευσταθές αν $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοια ώστε:

$$|x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow |x(t; x_0) - x(t; x^*)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Παρατήρηση: Ευστάθεια του x^* σημαίνει ότι αν εκκινήσουμε «κοντά» στο x^* η λύση $x(t; x_0)$ θα εξακολουθεί να παραμένει «κοντά» στο x^* . Αυτό δε συνεπάγεται ότι $x(t; x_0) \rightarrow x^*$.

Επίσης, το δ εξαρτάται από το ε . Επομένως, αν επιθυμούμε να παραμένουμε πολύ κοντά στο x^* , $\forall t \geq 0$ θα πρέπει να εκκινήσουμε πολύ κοντά στο x^* .

Ασυμπτωτική Ευστάθεια κατά Lyapunov. Το x^* είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν α) είναι ευσταθές και β) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; x_0) = x^*$.

Εκθετική Ευστάθεια κατά Lyapunov. Το x^* είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν α) είναι ευσταθές και β) υπάρχουν σταθερές $\alpha, \gamma > 0$ τέτοιες ώστε:

$$|x(t; x_0)| \leq \alpha |x_0| e^{-\gamma t}.$$

Αστάθεια. Το x^* είναι ασταθές αν δεν είναι ευσταθές.

Τοπική Ευστάθεια. Αν οι αντίστοιχοι ορισμοί ισχύουν για κάθε αρχική τιμή μέσα από το σύνολο:

$$B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^*| < r\} \subset \mathbb{R}^n$$

Ολική Ευστάθεια. Αν $B_r \equiv \mathbb{R}^n$.

Ευστάθεια Γραμμικών Συστημάτων

Όταν

$$F(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Προκύπτει το γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

Το μηδέν είναι σημείο ισορροπίας του.

Η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας προσδιορίζεται από τις ιδιοτιμές του A

$$\lambda(A) = \{s \in \mathcal{C} : \det(sI - A) = 0\}$$

Αν

$$\lambda_j \in \lambda(A) \Rightarrow \bar{\lambda}_j \in \lambda(A)$$

όπου $\bar{\lambda}_j$ ο συζυγής μιγαδικός του λ_j .

Το σύστημα:

$$\dot{x} = Ax$$

είναι α) ασυμπτωτικά ευσταθές, αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος, β) ασταθές, αν υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή με αυστηρά θετικό πραγματικό μέρος.

Παρατήρηση: Στα γραμμικά συστήματα η ευστάθεια καθορίζεται αποκλειστικά από τον πίνακα A . Επομένως, η ευστάθεια αποτελεί ιδιότητα των γραμμικών συστημάτων και συνεπώς θα μιλάμε για ευστάθεια του συστήματος κι όχι του σημείου ισορροπίας.

Ειδικές Περιπτώσεις

1) **A: Διαγώνιος Πίνακας.** Τώρα έχουμε:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} x$$

Στην περίπτωση αυτή οι διαφορικές εξισώσεις είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες (αποσυζευγμένες) με λύσεις:

$$x_j(t) = x_j(0)e^{\lambda_j t}, \quad \forall t > 0, j = 1, \dots, n.$$

Είναι προφανές πως το $x^* = 0$ είναι εκθετικά ευσταθές όταν όλες οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές, ευσταθές αν τουλάχιστον μία ιδιοτιμή είναι μηδενική και όλες οι άλλες αρνητικές, και ασταθές αν τουλάχιστον μία ιδιοτιμή είναι θετική.

2) Α: Μλók – Διαγώνιος. Συγκεκριμένα:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \omega_1 & \cdots & 0 & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_\nu & \omega_\nu \\ 0 & 0 & \cdots & -\omega_\nu & \sigma_\nu \end{bmatrix} x$$

Τώρα οι ιδιοτιμές είναι συζυγείς μιγαδικές της μορφής:

$$\lambda_j = \sigma_j \pm i\omega_j, \quad j = 1, \dots, \nu$$

και οι λύσεις είναι:

$$x_{2j-1}(t) = e^{\sigma_j t} \left(x_{2j-1}(0) \cos \omega_j t + x_{2j}(0) \sin \omega_j t \right), \quad j = 1, \dots, \nu$$

$$x_{2j}(t) = e^{\sigma_j t} \left(-x_{2j-1}(0) \sin \omega_j t + x_{2j}(0) \cos \omega_j t \right), \quad j = 1, \dots, \nu$$

Το σημείο ισορροπίας που εδώ είναι το μηδέν είναι εκθετικά ευσταθές αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος, ασταθές αν και μόνο αν τουλάχιστον μία ιδιοτιμή έχει θετικό πραγματικό μέρος και ευσταθές αν υπάρχει τουλάχιστον μία φανταστική ιδιοτιμή και όλες οι υπόλοιπες έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Ανάλυση Ευστάθειας μέσω Γραμμικής Προσέγγισης

Είναι πολλές φορές εφικτό να προσδιορίσουμε την ευστάθεια τοπικά γύρω από σημείο ισορροπίας για ένα μη-γραμμικό σύστημα αφού πρώτα το προσεγγίσουμε από ένα γραμμικό.

Έστω το μη-γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x} = F(x), x^* : \sigma.l.$$

Αναπτύσσοντας την $F(x)$ σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο ισορροπίας βρίσκουμε:

$$\dot{x} = F(x^*) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x^*} (x - x^*) + R(|x - x^*|)$$

όπου $R(|x - x^*|)$ όροι ανώτερης τάξης το μέγεθος των οποίων είναι της τάξης του $|x - x^*|$. Αν $x \simeq x^* \Rightarrow R(|x - x^*|) \simeq 0$.

Ισχύει

$$F(x^*) = 0.$$

Άρα στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας το αρχικό μη-γραμμικό σύστημα γράφεται:

$$\dot{x} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x^*} (x - x^*)$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής

$$z = x - x^*$$

προκύπτει το σύστημα:

$$\dot{z} = Az, \quad A = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x^*}$$

που ονομάζεται γραμμικοποίηση του αρχικού μη-γραμμικού συστήματος στο σημείο ισορροπίας.

Συμπέρασμα: Αν η γραμμικοποίηση ενός μη-γραμμικού συστήματος σε σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές ή ασταθές σύστημα, τότε το ίδιο ισχύει **τοπικά** για την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας του αρχικού μη-γραμμικού συστήματος.

Ανάλυση Ευστάθειας κατά Lyapunov

Θα μελετήσουμε την ευστάθεια του μη-γραμμικού συστήματος

$$\dot{x} = F(x)$$

Είδαμε στο Κεφ. 2 πως για τη μελέτη της ευστάθειας φυσικών συστημάτων χρησιμοποιούμε συχνά την ενεργειακή συνάρτηση του συστήματος και αποδεικνύουμε ότι παραμένει τουλάχιστον φραγμένη. Σ' ό,τι ακολουθεί θα γενικεύσουμε εκείνη τη μεθοδολογία.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα θεωρήσουμε πως το μηδέν είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος. Αν δεν είναι κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$z = x - x^*$$

με το μηδέν να αποτελεί πλέον σημείο ισορροπίας.

Κεντρική Ιδέα της Μεθόδου Lyapunov. Αν μπορεί να βρεθεί μια μη-αρνητική συνάρτηση η οποία να φθίνει πάντα κατά μήκος των λύσεων του συστήματος, τότε το ελάχιστο αυτής της συνάρτησης αποτελεί (τοπικά) ευσταθές σημείο ισορροπίας

Ορισμοί

Έστω $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση.

Θετικά (Αρνητικά) Ορισμένη Συνάρτηση. Μια συνεχώς παραγωγήσιμη συνάρτηση V θα λέγεται θετικά (αρνητικά) ορισμένη αν:

$$V(x) > 0 \text{ (} V(x) < 0 \text{)}, \quad \forall x \neq 0 \text{ και } V(0) = 0.$$

Θετικά (Αρνητικά) Ημιορισμένη Συνάρτηση. Μια συνεχώς παραγωγήσιμη συνάρτηση V θα λέγεται θετικά (αρνητικά) ημιορισμένη αν για όλα τα x ισχύει:

$$V(x) \geq 0 \text{ (} V(x) \leq 0 \text{)}.$$

Η διαφορά μεταξύ θετικά (αρνητικά) ορισμένης και θετικά (αρνητικά) ημιορισμένης συνάρτησης είναι ότι η δεύτερη μπορεί να μηδενίζεται και σε μη-μηδενικά σημεία.

Θεώρημα Ευστάθειας Lyapunov

Έστω V μια μη-αρνητική συνάρτηση στον \mathbb{R}^n και \dot{V} η χρονική της παράγωγος κατά μήκος των λύσεων του συστήματος

$$\dot{x} = F(x)$$

Άρα

$$\dot{V} = \frac{\partial V^T}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V^T}{\partial x} F(x)$$

Έστω

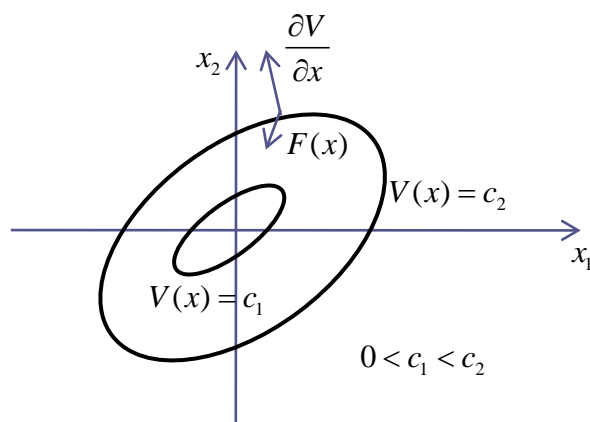
$$B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$$

μια σφαίρα κέντρου $x=0$ και ακτίνας r . Αν υπάρχει $r>0$ τέτοιο ώστε η V να είναι θετικά ορισμένη και η \dot{V} αρνητικά ημιορισμένη (ορισμένη) $\forall x \in B_r(0)$, τότε το $x=0$ είναι τοπικά ευσταθές (ασυμπτωτικά ευσταθές) κατά Lyapunov σημείο ισορροπίας.

Συνάρτηση Lyapunov: Η συνάρτηση V που ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος Ευστάθειας Lyapunov, ονομάζεται συνάρτηση Lyapunov του συστήματος.

Γεωμετρική Ερμηνεία

Για παραστατικούς λόγους θα θεωρήσουμε $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$. Έστω $V(x)$ μια συνάρτηση Lyapunov του συστήματος. Οι ισοβαρείς καμπύλες που ορίζονται από την $V(x) = c$, $c > 0$ δίνονται στο σχήμα που ακολουθεί για διάφορες τιμές του c .



Η συνθήκη $\dot{V}(x) < 0$ σημαίνει ότι το διάνυσμα $F(x)$ σχηματίζει με το διάνυσμα κλίσης της V αμβλεία γωνία, κατευθύνοντας την λύση προς εσωτερικές ισοβαρείς καμπύλες, μειώνοντας την τιμή της $V(x)$. Αν λοιπόν $\dot{V}(x) < 0$ τότε το x θα συγκλίνει οπωσδήποτε στο μηδέν.

Σχόλια

Αποδεικνύεται πως για κάθε ευσταθές σύστημα υπάρχει συνάρτηση Lyapunov και το αντίστροφο.

Η συνάρτηση Lyapunov δεν είναι μοναδική και γενικά είναι δύσκολο να βρεθεί.

Με τη χρήση του Θεωρήματος Ευστάθειας Lyapunov μπορούμε να αποδείξουμε ευστάθεια χωρίς να καταφύγουμε στην επίλυση των εξισώσεων κατάστασης.

Αρχή της Αμεταβλητότητας

Είδαμε πως με το Θεώρημα Ευστάθειας Lyapunov δεν μπορεί να αποδειχθεί η ασυμπτωτική ευστάθεια σημείου ισορροπίας αν η χρονική παράγωγος της υποψήφιας συνάρτησης Lyapunov κατά μήκος των λύσεων του συστήματος προκύψει αρνητικά ημιορισμένη. Στην προσπάθεια αυτή, η Αρχή της Αμεταβλητότητας του Lasalle είναι πολύτιμη.

Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = F(x)$$

και $x(t; x_0)$ η λύση του τη χρονική στιγμή t για αρχική κατάσταση $x(0) = x_0$.

Αμετάβλητο Σύνολο: Ένα σύνολο $M \subset \mathbb{R}^n$ θα λέγεται αμετάβλητο αν

$$\forall \alpha \in M \quad x(t; \alpha) \in M, \quad \forall t \geq 0.$$

Αν η λύση του συστήματος βρεθεί κάποια χρονική στιγμή εντός ενός αμετάβλητου συνόλου, τότε έκτοτε θα εγκλωβιστεί εντός αυτού.

Θεώρημα Αμεταβλητότητας του Lasalle. Έστω $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια τοπικά θετικά ορισμένη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega_r = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq r, r > 0\}.$$

Έστω επίσης το σύνολο

$$S = \{x \in \Omega_r : \dot{V}(x) = 0\}.$$

Καθώς $t \rightarrow \infty$, η λύση του συστήματος θα τείνει στο μεγαλύτερο αμετάβλητο σύνολο που περιέχεται στο S . Αν το S δεν περιέχει άλλα αμετάβλητα σύνολα εκτός του $x=0$, τότε το μηδέν είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Ανάλυση Ευστάθειας Lyapunov Γραμμικών Συστημάτων

Στην ειδική περίπτωση των γραμμικών συστημάτων το σύστημα

$$\dot{x} = F(x)$$

γίνεται

$$\dot{x} = Ax$$

Τώρα ως υποψήφιες συναρτήσεις Lyapunov θα θεωρούμε τις τετραγωνικές συναρτήσεις της μορφής:

$$V(x) = x^T P x, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad P^T = P.$$

Για να είναι η $V(x)$ θετικά ορισμένη θα πρέπει $P > 0$ (θετικά ορισμένος)

Η χρονική παράγωγος της $V(x)$ κατά μήκος των λύσεων του $\dot{x} = Ax$ είναι:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\
 &= x^T A^T P x + x^T P A x \\
 &= x^T (A^T P + P A) x
 \end{aligned}$$

Έστω

$$-Q = A^T P + P A$$

Τότε

$$\dot{V} = -x^T Q x$$

Θεώρημα Ευστάθειας Lyapunov (Γραμμικά Συστήματα). Το γραμμικό σύστημα $\dot{x} = A x$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν για κάποιο δοσμένο πραγματικό, συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα Q , η λύση P της εξίσωσης

$$-Q = A^T P + P A$$

είναι επίσης πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας.

Η εξίσωση

$$A^T P + PA = -Q$$

ονομάζεται **εξίσωση Lyapunov**.

Η εξίσωση Lyapunov είναι γραμμική ως προς τα στοιχεία του P και συνεπώς λύνεται με γραμμική άλγεβρα. Αποδεικνύεται επίσης πως έχει πάντα λύση αν όλες οι ιδιοτιμές του A βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο. Ακόμα η λύση που θα βρεθεί θα είναι πάντα θετικά ορισμένος πίνακας αν ο Q είναι θετικά ορισμένος. Άρα, για ευσταθές γραμμικό σύστημα μπορούμε πάντα να βρούμε μια συνάρτηση Lyapunov τετραγωνικής μορφής.

Πότε ένας Πίνακας είναι Θετικά Ορισμένος;

Ένας συμμετρικός πίνακας A είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν:

Όλες οι ιδιοτιμές του A είναι γνήσια θετικές.

Υπάρχει μη ιδιόμορφος πίνακας B τέτοιος ώστε $A = BB^T$.

Κάθε κύρια ελάσσονα ορίζουσα του A είναι θετική.

$$x^T A x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

2014

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ



Κεφάλαιο 4 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

4.1 Γραμμικότητα

Θεωρείστε το σύστημα:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^p, u \in \mathbb{R}^m.$$

Για λόγους απλότητας θα περιορίσουμε τη μελέτη μας σε συστήματα μίας εισόδου και μίας εξόδου. Άρα $m = p = 1$. Επίσης υποθέτουμε ότι όλες οι συναρτήσεις είναι ομαλές και ότι για λογικές κλάσεις εισόδων (π.χ. τμηματικά συνεχείς χρονικές συναρτήσεις) οι λύσεις του συστήματος υπάρχουν για κάθε χρονική στιγμή. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το $x = 0, u = 0$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος και ότι $h(0, 0) = 0$. Πράγματι αν το $(x_e, u_e) \neq (0, 0)$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος με έξοδο

$$y_e = h(x_e, u_e)$$

τότε ορίζουμε ως νέες καταστάσεις, εισόδους και εξόδους του συστήματος τις

$$\tilde{x} = x - x_e, \quad \tilde{y} = y - y_e, \quad \tilde{u} = u - u_e$$

και το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= f(\tilde{x} + x_e, \tilde{u} + u_e) \triangleq f(\tilde{x}, \tilde{u}) \\ \tilde{y} &= h(\tilde{x} + x_e, \tilde{u} + u_e) \triangleq h(\tilde{x}, \tilde{u})\end{aligned}$$

όπου το $\tilde{x} = 0, \tilde{u} = 0$ σημείο ισορροπίας με έξοδο $\tilde{y} = 0$.

Η λύση του συστήματος για αρχική κατάσταση $x(0) = x_0$ και είσοδο $u(t)$ είναι $y(t; x_0, u)$.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό ένα σύστημα θα λέγεται γραμμικό ως προς είσοδο – έξοδο αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

α) $y(t; \alpha x_1 + \beta x_2, 0) = \alpha y(t; x_1, 0) + \beta y(t; x_2, 0)$

β) $y(t; \alpha x_0, \gamma u) = \alpha y(t; x_0, 0) + \gamma y(t; 0, u)$

γ) $y(t; 0, \zeta u_1 + \xi u_2) = \zeta y(t; 0, u_1) + \xi y(t; 0, u_2)$.

Η γενική μορφή ενός γραμμικού συστήματος είναι:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad x(0) = x_0.$$

Μπορεί ναδειχθεί πως αν ένα σύστημα είναι γραμμικό ως προς είσοδο – έξοδο, τότε με κατάλληλη επιλογή μεταβλητών κατάστασης μπορεί πάντα να παρασταθεί από εξισώσεις κατάστασης της παραπάνω μορφής.

4.2 Χρονική Αμεταβλητότητα

Η έννοια της χρονικής αμεταβλητότητας χρησιμοποιείται για να περιγράψει συστήματα των οποίων οι ιδιότητες δε μεταβάλλονται άμεσα με το χρόνο. Συγκεκριμένα, αν σ' ένα χρονικά αμετάβλητο σύστημα (ΧΑΣ) η εφαρμογή της εισόδου $u(t)$ παράγει έξοδο $y(t)$, τότε αν μετατοπίσουμε το χρόνο εμφάνισης της εισόδου κατά μία σταθερή ποσότητα t_0 η είσοδος $u(t+t_0)$ θα προκαλέσει έξοδο $y(t+t_0)$.

Παράδειγμα 4.1 Το σύστημα $y(t)=\cos(u(t))$ είναι χρονικά αμετάβλητο (ο χρόνος δεν επηρεάζει άμεσα την απόκρισή του). Το σύστημα $y(t)=t\cos(u(t))$ είναι χρονικά μεταβαλλόμενο.

4.3 Λύση Γραμμικών Χρονικά Αμετάβλητων Συστημάτων

Απόκριση Αρχικής Κατάστασης

Ξεκινάμε την εξεύρεση της λύσης των γραμμικών χρονικά αμετάβλητων (ΓΧΑ) συστημάτων θεωρώντας την ομογενή λύση ($u(t)=0$). Τότε το σύστημα γίνεται:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0.$$

Στη βαθμωτή περίπτωση έχουμε:

$$\dot{x} = \alpha x, \quad x(0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

η οποία έχει ως λύση:

$$x(t) = e^{\alpha t} x_0, \quad t \geq 0.$$

Στην προσπάθεια γενίκευσης ορίζουμε τον πίνακα

$$\begin{aligned} e^X &= I + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k, \quad X \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{aligned}$$

όπου

$$X^0 = I, \quad X^2 = XX, \quad X^n = X^{n-1}X.$$

Θέτοντας όπου X τον At προκύπτει

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς t βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\frac{de^{At}}{dt} &= A + A^2t + \frac{1}{2}A^3t^2 + \dots \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k \\ &= Ae^{At}\end{aligned}$$

Επαληθεύεται ότι η

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad t \geq 0$$

Αποτελεί λύση του

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0.$$

Εύκολα διαπιστώνεται πως η ομογενής λύση του γραμμικού συστήματος είναι γραμμική ως προς την αρχική κατάσταση. Πράγματι, αν $x_1(t)$ και $x_2(t)$ είναι οι ομογενείς λύσεις που αντιστοιχούν στις αρχικές καταστάσεις $x_1(0)$ και $x_2(0)$ αντίστοιχα, τότε η λύση για αρχική κατάσταση $x(0) = \alpha x_1(0) + \beta x_2(0)$ με α, β πραγματικούς αριθμούς είναι:

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At}x(0) \\ &= e^{At}(\alpha x_1(0) + \beta x_2(0)) \\ &= \alpha e^{At}x_1(0) + \beta e^{At}x_2(0) \\ &= \alpha x_1(t) + \beta x_2(t).\end{aligned}$$

Ομοίως για την έξοδο βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}y(t) &= Cx(t) \\ &= \alpha Cx_1(t) + \beta Cx_2(t) \\ &= \alpha y_1(t) + \beta y_2(t).\end{aligned}$$

Όπου τα $y_1(t)$, $y_2(t)$ οι έξοδοι που αντιστοιχούν στις λύσεις $x_1(t)$ και $x_2(t)$ αντίστοιχα. Στη βιβλιογραφία ο πίνακας

$$e^{At} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

ονομάζεται πίνακας μετάβασης.

Υπολογισμός του Πίνακα Μετάβασης

Από την

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέρη βρίσκουμε:

$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$

ή

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0).$$

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace προκύπτει:

$$x(t) = L^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \} x(0), \quad t \geq 0.$$

Όμως γνωρίζουμε ότι

$$x(t) = e^{At} x(0), \quad t \geq 0$$

Συγκρίνοντας τις τελευταίες δύο σχέσεις βρίσκουμε ότι:

$$e^{At} = L^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \}.$$

Παρατήρηση: Από τη μέχρι τώρα ανάλυση προκύπτει αβίαστα το συμπέρασμα πως ο υπολογισμός του πίνακα μετάβασης αποτελεί στη γενικότητά του ένα πολύπλοκο πρόβλημα. Όπως όμως θα δούμε στη συνέχεια, με κατάλληλη αλλαγή των μεταβλητών κατάστασης, ο πίνακας A του συστήματος μετασχηματίζεται ισοδύναμα σε μορφή βολική για τον προσδιορισμό του e^{At} .

A: Διαγωνιοποιήσιμος Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

με όλες τις ιδιοτιμές του A απλές και πραγματικές. Τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας T τέτοιος ώστε ο

$$\tilde{A} = TAT^{-1}$$

να είναι διαγώνιος. Ορίζουμε νέες μεταβλητές κατάστασης $z = Tx$ και το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T\dot{x} \\ &= TAx \\ &= TAT^{-1}z \\ &= \tilde{A}z. \end{aligned}$$

Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του νέου πίνακα του συστήματος, τότε

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}^k t^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k t^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k t^k \end{bmatrix}.$$

Επομένως,

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Αποδεικνύεται ότι ο T είναι ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων (v) του A .

Υπενθύμιση: Το ιδιοδιάνυσμα v του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ προκύπτει από τη λύση της εξίσωσης $Av = \lambda v$.

Ιδιοτιμές και Ρυθμοί

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα περιγράφουν τη συμπεριφορά του συστήματος. Για συστήματα που εκτελούν ταλαντώσεις ο όρος ρυθμός χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει το πρότυπο ταλάντωσης που μπορεί να εμφανιστεί.

Είδαμε πως η απόκριση αρχικής κατάστασης ενός ΓΧΑ συστήματος καθορίζεται από τον πίνακα μετάβασης. Ως εκ τούτου, οι ιδιοτιμές του πίνακα A του συστήματος καθορίζουν τη συμπεριφορά του. Δοσμένου του A , το v είναι το ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ αν $Av = \lambda v$. Γενικά τα λ , v είναι μιγαδικά, οπότε και οι συζυγείς εκφράσεις τους θα είναι επίσης ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του A αντίστοιχα.

Έστω ότι τα λ , v είναι πραγματικά. Θα αναζητήσουμε την ομογενή λύση όταν $x(0) = v$. Τότε,

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{At} x(0) \\&= e^{At} v \\&= \left(I + At + \frac{1}{2} A^2 t^2 + \dots \right) v \\&= v + (Av)t + \frac{1}{2} (A^2 v) t^2 + \dots \\&= v + \lambda t v + \frac{1}{2} \lambda^2 t^2 v + \dots \\&= \left(1 + \lambda t + \frac{1}{2} \lambda^2 t^2 + \dots \right) v \\&= e^{\lambda t} v\end{aligned}$$

Η λύση που αναζητούμε ανήκει στο χώρο που παράγεται από το ιδιοδιάνυσμα v . Η ιδιοτιμή λ καθορίζει τη μορφή (σχήμα) της λύσης κάθε χρονική στιγμή.

Ρυθμός: Η ομογενής λύση του γραμμικού συστήματος με αρχική κατάσταση να ισούται με το ιδιοδιάνυσμα v που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του A .

Πολλές φορές ο όρος ρυθμός χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία για να χαρακτηρίσει την ιδιοτιμή λ κι όχι τη λύση.

Παρατηρώντας τα στοιχεία των διανυσμάτων x , v προκύπτει ότι:

$$\frac{x_i(t)}{x_j(t)} = \frac{e^{\lambda t} v_i}{e^{\lambda t} v_j} = \frac{v_i}{v_j}$$

Επομένως, τα πηλικά ανά δύο των στοιχείων του διανύσματος των μεταβλητών κατάστασης, για πραγματικά λ , v είναι σταθερά. Συνεπώς το ιδιοδιάνυσμα καθορίζει ποσοτικά τη λύση.

Η ανάλυση περιπλέκεται όταν οι ιδιοτιμές του A είναι μιγαδικοί. Τότε

$$\lambda = \sigma \pm j\omega, \quad v = u + jw, \quad \bar{v} = u - jw \quad j^2 = -1.$$

Είναι γνωστό ότι

$$u = \operatorname{Re}\{v\} = \frac{v + \bar{v}}{2},$$

$$w = \operatorname{Im}\{v\} = \frac{v - \bar{v}}{2j}.$$

Η ομογενής λύση στη περίπτωση αυτή είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} v \\ &= e^{\lambda t} v \\ &= \left[e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) \right] (u + jw) \\ &= e^{\sigma t} \left[(u \cos \omega t - w \sin \omega t) + j(u \sin \omega t + w \cos \omega t) \right]. \end{aligned}$$

Η λύση είναι λοιπόν ένα λογαριθμικό σπειροειδές το σχήμα του οποίου καθορίζεται από τα σ , ω άρα από τις ιδιοτιμές. Τα ιδιοδιανύσματα μέσω των u , w καθορίζουν ποσοτικά τη λύση.

Αν ο πίνακας A έχει n το πλήθος απλές, πραγματικές ιδιοτιμές, τότε θα έχει και ιδίου πλήθους απλά ιδιοδιανύσματα, τα οποία είναι και γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα για οποιαδήποτε αρχική κατάσταση $x(0)$ θα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α_j , $j=1, \dots, n$ έτσι ώστε:

$$x(0) = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$$

Λόγω της γραμμικότητας, η απόκριση αρχικής κατάστασης είναι:

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{\lambda_j t} v_j$$

Συμπέρασμα: Η απόκριση αρχικής κατάστασης είναι γραμμικός συνδυασμός των ρυθμών του συστήματος.

4.4 Απόκριση Εισόδου – Εξόδου

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε την ομογενή λύση ($u(t)=0$). Τώρα θα εξετάσουμε τη γενική περίπτωση.

Γενική Λύση

Έχουμε δει πως ένα ΓΧΑ σύστημα παριστάνεται από:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du.$$

Υποστηρίζουμε ότι η γενική μορφή της λύσης του παραπάνω συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \\ &= e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ae^{At}x(0) + Ae^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau + e^{At} e^{-At} Bu(t) \\ &= Ae^{At}x(0) + A \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Bu(t) \\ &= A \left[e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \right] + Bu(t) \\ &= Ax + Bu.\end{aligned}$$

Άρα πράγματι το επιχείρημά μας ήταν σωστό. Αντικαθιστώντας προκύπτει για την έξοδο ότι:

$$y(t) = Ce^{At}x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t).$$

Από την παραπάνω σχέση είναι προφανές ότι η έξοδος είναι γραμμική τόσο ως προς την αρχική τιμή της κατάστασης, όσο και ως προς την είσοδο. Επίσης η δυναμική του συστήματος, όπως αυτή χαρακτηρίζεται από τον πίνακα A, είναι ιδιαίτερα σημαντική τόσο για την ευστάθεια, όσο και για την απόκριση του συστήματος. Πράγματι, ο πίνακας μετάβασης επηρεάζει την απόκριση αρχικής τιμής, όσο και την απόκριση του συστήματος λόγω μεταβολών της εισόδου.

Κρουστική Απόκριση

Ας υποθέσουμε ότι ένα ΓΧΑ σύστημα ενεργοποιείται με παλμό εύρους $\varepsilon > 0$ και πλάτους $1/\varepsilon$, αναλυτικής μορφής:

$$p_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq t < \varepsilon \\ 0, & t \geq \varepsilon \end{cases}$$

Στο όριο καθώς το ε τείνει στο μηδέν προκύπτει η συνάρτηση $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon(t).$$

Η απόκριση του συστήματος για είσοδο την $\delta(t)$ και μηδενική αρχική κατάσταση ονομάζεται *κρουστική απόκριση* και θα τη συμβολίζουμε με $h(t)$. Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\int_0^t \delta(\tau) d\tau &= \int_0^t \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon(\tau) d\tau \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^t p_\varepsilon(\tau) d\tau \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} d\tau \\ &= 1.\end{aligned}$$

Άρα η κρουστική απόκριση είναι:

$$\begin{aligned}
h(t) &= \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B \delta(\tau) d\tau \\
&= C e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B \delta(\tau) d\tau \\
&= C e^{At} \int_0^\varepsilon e^{-A\tau} B \delta(\tau) d\tau \\
&= C e^{At} B \int_0^\varepsilon \delta(\tau) d\tau, \quad (\varepsilon \rightarrow 0) \\
&= C e^{At} B.
\end{aligned}$$

Οπότε:

$$y(t) = C e^{At} x(0) + \int_0^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau + D u(t).$$

Η χρήση παλμών ως προσεγγίσεις της συνάρτησης $\delta(t)$ παρέχει ένα μηχανισμό αναγνώρισης της δυναμικής του συστήματος από δεδομένα. Η απόκριση του συστήματος για είσοδο παλμό προσεγγίζει την κρουστική απόκριση καθώς το εύρος του παλμού τείνει στο μηδέν. Ένας πρακτικός κανόνας επιλογής του ε είναι ο εξής: Αν η ταχύτερη ιδιοτιμή ενός ευσταθούς συστήματος έχει πραγματικό μέρος $-\sigma_{\max}$ τότε το εύρος του παλμού ε θα δίνει καλή εκτίμηση της κρουστικής απόκρισης αν $\varepsilon \sigma_{\max} \ll 1$.

Αμεταβλητότητα ΓΧΑ Συστήματος σε Αλλαγή Μεταβλητών Κατάστασης

Στο μοντέλο του γραμμικού συστήματος τα διανύσματα της εισόδου u και της εξόδου y επιλέγονται μοναδικά από τις εισόδους και τις εξόδους αντίστοιχα του πραγματικού συστήματος. Το ίδιο δεν ισχύει όμως για την επιλογή των μεταβλητών κατάστασης, που με τη σειρά της επηρεάζει τους πίνακες A , B , C του μοντέλου. Ο πίνακας D δεν επηρεάζεται διότι απεικονίζει τις εισόδους στις εξόδους αποκλειστικά.

Τι θα συμβεί αν αλλάξουμε τις μεταβλητές κατάστασης του μοντέλου; Έστω ότι οι νέες μεταβλητές κατάστασης z συνδέονται με τις παλιές x μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού:

$$z = T x$$

με τον T αντιστρέψιμο πίνακα. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= T \dot{x} \\
&= T (A x + B u) \\
&= T (A T^{-1} z + B u) \\
&= T A T^{-1} z + T B u.
\end{aligned}$$

Αν

$$\tilde{A} = T A T^{-1}, \quad \tilde{B} = T B$$

τότε

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u.$$

Αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} y &= Cx + Du \\ &= CT^{-1}z + Du. \end{aligned}$$

Αν

$$\tilde{C} = CT^{-1}$$

τότε

$$y = \tilde{C}z + Du$$

Παρατηρούμε ότι στις νέες μεταβλητές κατάστασης z το μοντέλο διατηρεί την αρχική του μορφή. Είναι όπως λέμε αμετάβλητο. Οι αρχικοί πίνακες A , B , C φυσικά διαφοροποιούνται. Γιατί όμως να μπορούμε στον κόπο να αλλάξουμε τις μεταβλητές κατάστασης; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα θα επιστρέψουμε στη γενική μορφή της λύσης:

$$\begin{aligned} x(t) &= T^{-1}z(t) \\ &= T^{-1}e^{\tilde{A}t}z(0) + T^{-1}\int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)}\tilde{B}u(\tau)d\tau \\ &= T^{-1}e^{\tilde{A}t}Tx(0) + T^{-1}\int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Άρα αν είναι εφικτό μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού των μεταβλητών κατάστασης να οδηγηθούμε σε εύκολα υπολογίσιμο πίνακα μετάβασης, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τελευταία μορφή για να προσδιορίσουμε τη γενική λύση του συστήματος.

Απόκριση Μόνιμης Κατάστασης

Δοσμένου του ΓΧΑ συστήματος

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad x(0) = x_0$$

Η γενική μορφή της λύσης δίνεται από:

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x(0)}_{\text{Απόκριση Αρχικής Κατάστασης}} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)}_{\text{Απόκριση Εισόδου}}$$

Από την παραπάνω έκφραση παρατηρούμε ότι η λύση αποτελείται από δύο μέρη, την *απόκριση αρχικής κατάστασης* και την *απόκριση εισόδου*. Η απόκριση εισόδου με τη σειρά της απαρτίζεται από τη *μεταβατική απόκριση* και την *απόκριση μόνιμης κατάστασης*.

Η μεταβατική απόκριση εμφανίζεται τις πρώτες χρονικές στιγμές εφαρμογής της εισόδου και οφείλεται στη διαφορά μεταξύ αρχικής κατάστασης και λύσης στη μόνιμη κατάσταση. Η απόκριση μόνιμης κατάστασης αντικατοπτρίζει τη μόνιμη συμπεριφορά της εξόδου για την εφαρμοζόμενη είσοδο.

Βηματική Απόκριση

Είναι η απόκριση της εξόδου για μηδενική αρχική κατάσταση και είσοδο τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση:

$$u_s(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Θέτοντας $x(0)=0$ και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης έχουμε:

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B d\tau + D \\ &= C \int_0^t e^{A\omega} B d\omega + D \quad (\omega = t - \tau) \\ &= C A^{-1} e^{A\omega} B \Big|_{\omega=0}^{\omega=t} + D \\ &= C A^{-1} e^{At} B - C A^{-1} B + D. \end{aligned}$$

Αν οι ιδιοτιμές του A έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος (το $x=0$ με $u=0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας), τότε:

$$y(t) = \underbrace{C A^{-1} e^{At} B}_{\text{Μεταβατική Απόκριση}} + \underbrace{D - C A^{-1} B}_{\text{Μόνιμη Κατάσταση}}, \quad t \geq 0.$$

Ο όρος της μεταβατικής απόκρισης σβήνει στο 0 καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Ο δεύτερος όρος παριστάνει την τιμή της εξόδου όταν θα έχει παρέλθει το μεταβατικό φαινόμενο και εκφράζει τη μόνιμη κατάσταση.

Ποιοτικά Χαρακτηριστικά Βηματικής Απόκρισης

Τιμή Μόνιμης Κατάστασης: Η τελική τιμή του σήματος εξόδου με την προϋπόθεση ότι συγκλίνει.

Χρόνος Ανόδου: Ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σήμα να εξόδου να μεταβεί από το 10% στο 90% της τιμής μόνιμης κατάστασης.

Υπερύψωση: Το μέγιστο της βηματικής απόκρισης.

Χρόνος Αποκατάστασης: Ο χρόνος που απαιτείται ώστε το σήμα εξόδου να εισέλθει μόνιμα στη ζώνη του 2% της τιμής μόνιμης κατάστασης.

Απόκριση Συχνότητας

Η απόκριση συχνότητας ενός συστήματος εισόδου – εξόδου καταγράφει την απόκριση του συστήματος σε ημιτονοειδή διέγερση. Έστω

$$u(t) = \cos \omega t.$$

Ισχύει ότι

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t.$$

Επομένως,

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}.$$

Επειδή το σύστημα είναι γραμμικό αρκεί να μελετήσουμε την απόκριση για

$$u(t) = e^{st}.$$

Την πραγματική είσοδο $u(t)=\cos\omega t$ θα τη δημιουργήσουμε μέσω υπέρθεσης για $s=j\omega$ και $s=-j\omega$.
Συνεπώς,

$$\begin{aligned} y(t) &= Ce^{At} x(0) + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} B e^{s\tau} d\tau + De^{st} \\ &= Ce^{At} x(0) + Ce^{At} \int_0^t e^{(sI-A)\tau} B d\tau + De^{st}. \end{aligned}$$

Αν ο $sI-A$ είναι αντιστρέψιμος αποδεικνύεται ότι:

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At} (x(0) - (sI - A)^{-1} B)}_{\text{Μεταβατικό Φαινόμενο}} + \underbrace{(C(sI - A)^{-1} B + D) e^{st}}_{\text{Μόνιμη Κατάσταση}}$$

Πάλι η λύση αποτελείται από τον όρο του μεταβατικού φαινομένου και τη μόνιμη κατάσταση. Για ασυμπτωτικά ευσταθή ΓΧΑ συστήματα το μεταβατικό φαινόμενο σβήνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, ενώ η μόνιμη κατάσταση είναι ανάλογη της εισόδου.

Αν με M και θ παραστήσουμε μέτρο και τη φάση αντίστοιχα του μιγαδικού

$$C(sI - A)^{-1} B + D$$

τότε,

$$Me^{j\theta} = C(sI - A)^{-1} B + D.$$

Άρα η απόκριση μόνιμης κατάστασης $y_{ss}(t)$ είναι:

$$y_{ss}(t) = Me^{j\theta} e^{st} = Me^{(st+j\theta)}.$$

Για $s=j\omega$ θα λέμε ότι το M είναι το κέρδος και θ η φάση του συστήματος στη συχνότητα διέγερσης ω . Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν $u=A_1\sin(\omega t+\phi_1)$ και $y=A_2\sin(\omega t+\phi_2)$ τότε:

$$M(\omega) = \frac{A_2}{A_1}, \quad \theta(\omega) = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Η απόκριση μόνιμης κατάστασης είναι:

$$\begin{aligned} y_{ss}(t) &= \operatorname{Re} \{ M e^{st+j\theta} \} \\ &= M \cos(\omega t + \theta). \end{aligned}$$

Αν η φάση θ είναι θετική θα λέμε ότι η έξοδος προπορεύεται της εισόδου, ενώ αν είναι αρνητική θα λέμε ότι η έξοδος έπεται της εισόδου.

Χαρακτηριστικά Απόκρισης Συχνότητας

Κέρδος Μηδενικής Συχνότητας (Κέρδος DC): Είναι το κέρδος του συστήματος για $\omega=0$.

$$M(0) = M_0 = -CA^{-1}B + D.$$

Αντιστοιχεί στο πηλίκο της μόνιμης κατάστασης εξόδου προς τη σταθερή είσοδο. Το κέρδος μηδενικής συχνότητας ορίζεται μόνο αν ο A είναι αντιστρέψιμος. Έχει δε νόημα μόνο αν το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές.

Εύρος Ζώνης (BW): Είναι όλες οι συχνότητες για τις οποίες το κέρδος του συστήματος δεν έχει μειωθεί περισσότερο από το 0.707 της τιμής αναφοράς. Για συστήματα μη-μηδενικού κέρδους μηδενικής συχνότητας, BW είναι εκείνες οι συχνότητες για τις οποίες:

$$M(\omega) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} M_0.$$

Για συστήματα που λειτουργούν ως υπερπαρατά φίλτρα, ως κέρδος αναφοράς λαμβάνεται το κέρδος υψηλής συχνότητας. Σε συστήματα τύπου φίλτρου εύρους ζώνης, ως κέρδος αναφοράς λαμβάνεται το κέρδος που αντιστοιχεί στο μέσο της μπάντας.

Πλάτος Συντονισμού M_r : Η μέγιστη τιμή κέρδους του συστήματος. Εμφανίζεται στη συχνότητα συντονισμού ω_r .

4.5 Γραμμικοποίηση

Όπως έχουμε δει, τα πραγματικά συστήματα είναι κατά κανόνα μη – γραμμικά. Για λόγους όπως η απλότητα της σχεδίασης, αλλά και γιατί η γραμμική συμπεριφορά είναι πολλές φορές επιθυμητή, τα μη – γραμμικά μοντέλα προσεγγίζονται από γραμμικά. Οι γραμμικές αυτές προσεγγίσεις είναι αξιόπιστες τοπικά. Ως εκ τούτου, χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της απόκρισης του συστήματος στη γειτονιά του σημείου λειτουργίας όπου τα μη – γραμμικά φαινόμενα δεν κυριαρχούν.

Γραμμικοποίηση γύρω από Σημείο Ισορροπίας

Έστω το μη – γραμμικό σύστημα μίας εισόδου μίας εξόδου

$$\begin{aligned}\dot{x} &= F(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \\ y &= h(x, u), \quad y \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

με σημείο ισορροπίας το (x^*, u^*) . Θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του συστήματος τοπικά γύρω από το σημείο ισορροπίας. Ορίζουμε τις νέες μεταβλητές κατάστασης καθώς και εισόδους, εξόδους ως:

$$z = x - x^*, \quad v = u - u^*, \quad w = y - h(x^*, u^*)$$

Στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας τα z, v, w είναι περίπου ίσα με το μηδέν. Η γραμμικοποίηση γύρω από το σημείο ισορροπίας του μη – γραμμικού συστήματος είναι:

$$\dot{z} = Az + Bv, \quad w = Cz + Dv$$

όπου

$$\begin{aligned}A &= \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} \right|_{(x^*, u^*)}, \quad B = \left. \frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \right|_{(x^*, u^*)} \\ C &= \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial x} \right|_{(x^*, u^*)}, \quad D = \left. \frac{\partial h(x, u)}{\partial u} \right|_{(x^*, u^*)}\end{aligned}$$

Το γραμμικό σύστημα που προέκυψε με την παραπάνω διαδικασία προσεγγίζει το αρχικό μη – γραμμικό μόνο στη γειτονιά του σημείου ισορροπίας. Για να διευκρινιστεί η τελευταία πρόταση, θεωρήστε το μη – γραμμικό σύστημα:

$$\dot{x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + u, \quad c_0 \neq 0.$$

Έστω ότι θέλουμε να το γραμμικοποιήσουμε γύρω από το $(x, u) = (0, 0)$ το οποίο προφανώς δεν αποτελεί σημείο ισορροπίας του συστήματος. Στη γειτονιά του $(0, 0)$ οι όροι ανώτερης τάξης έχουν αμελητέα συνεισφορά και επομένως το σύστημα γίνεται:

$$\dot{x} = c_0 + c_1 x + u$$

Παρατηρείστε ότι το σύστημα δεν είναι γραμμικό λόγω της παρουσίας του μη – μηδενικού σταθερού όρου. Όμως δε μπορούμε να αγνοήσουμε το σταθερό όρο διότι τότε χαλάει η ποιότητα της προσέγγισης. Επιπλέον, ακόμα κι αν βρεθούμε ακριβώς στο $(0, 0)$ τότε

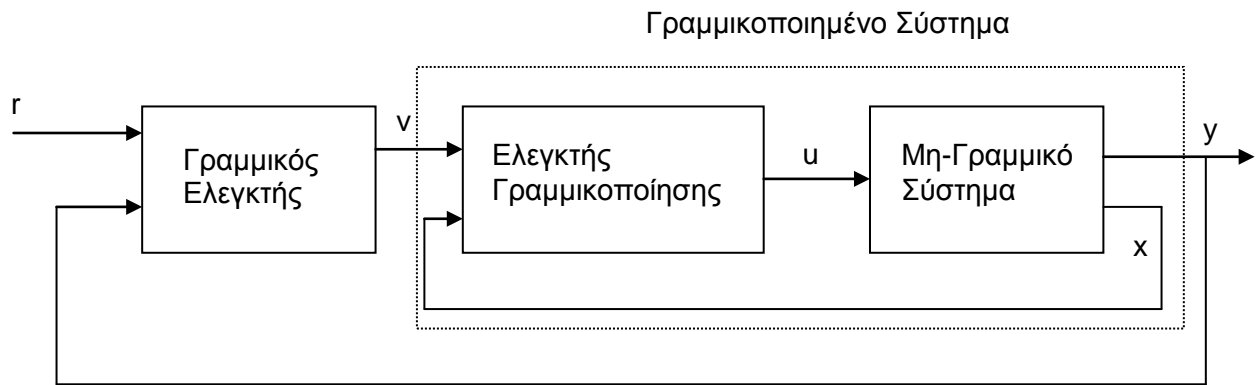
$$\dot{x} = c_0$$

και η τροχιά $x(t)$ θα απομακρυνθεί από το $(0, 0)$ παραβιάζοντας την προϋπόθεση τα x, u να παραμένουν κοντά στο $(0, 0)$ κάθε χρονική στιγμή.

Σχετικά με την ευστάθεια του αρχικού μη – γραμμικού συστήματος γνωρίζουμε πως αν η γραμμικοποίησή του γύρω από σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, τότε το σημείο ισορροπίας είναι τοπικά ασυμπτωτικά ευσταθές για το μη – γραμμικό σύστημα.

Γραμμικοποίηση μέσω Ανάδρασης

Με χρήση ελέγχου κάποια μη – γραμμικά συστήματα μπορούν να μετατραπούν σε γραμμικά. Το δομικό διάγραμμα που ακολουθεί δίνει την κεντρική ιδέα.



Γενικά, ένα μη – γραμμικό σύστημα θα λέγεται γραμμικοποιήσιμο μέσω ανάδρασης, αν μπορεί να βρεθεί ελεγκτής $u=\varphi(x,v)$ έτσι ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου που προκύπτει με είσοδο v και έξοδο y να είναι γραμμικό.

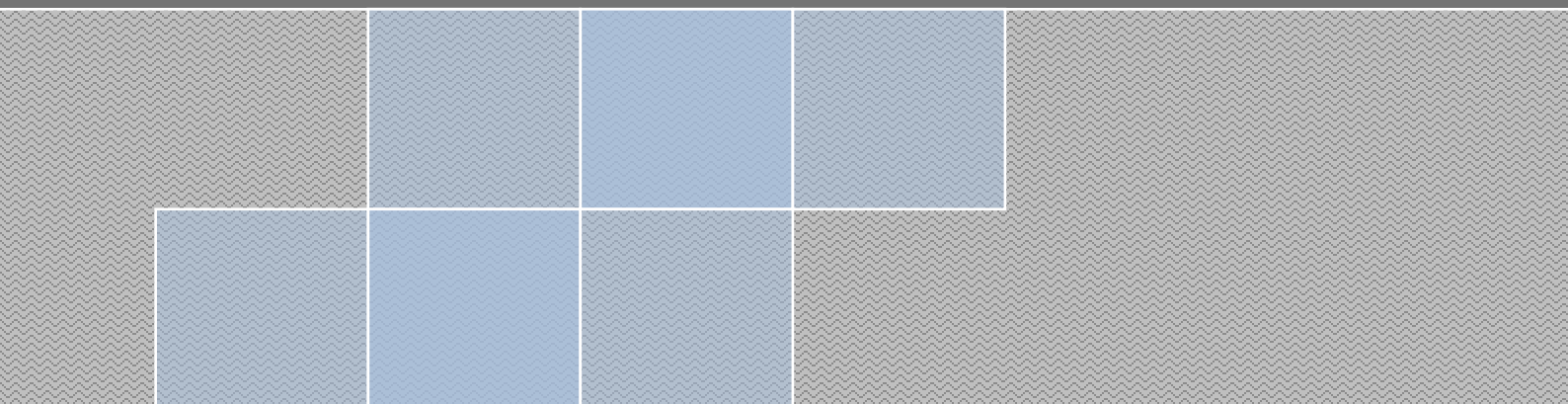
Η γραμμικοποίηση μέσω ανάδρασης στηρίζεται στη πλήρη γνώση του μοντέλου του συστήματος, καθώς και στην ακριβή μέτρηση των καταστάσεων. Πλήρη γνώση του μοντέλου όμως συνήθως ποτέ δεν έχουμε. Τα εμφανιζόμενα σφάλματα μοντελοποίησης μπορούν κάτω από προϋποθέσεις να ειπωθούν ως διαταραχές. Είναι πλέον θέμα σχεδίασης του εξωτερικού βρόχου ελέγχου να καταστήσει το σύστημα εύρωστο ως προς αυτές.

Να σημειωθεί τέλος πως κατά τη γραμμικοποίηση μέσω ανάδρασης μπορεί να διαγραφούν όροι που λειτουργούν βοηθητικά στην επίτευξη του στόχου ελέγχου, οδηγώντας ταυτόχρονα σε πολύπλοκες υλοποιήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Γραμμικός Έλεγχος Ανάδρασης Καταστάσεων

Γεώργιος Ροβιθάκης, Καθηγητής, Α.Π.Θ.



5.1 Ελεγχιμότητα

Η έννοια της ελεγχιμότητας είναι θεμελιώδης στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου και αναφέρεται στο σύνολο των καταστάσεων του χώρου κατάστασης στις οποίες μπορεί να μεταβεί το ελεγχόμενο σύστημα από κάποια αρχική κατάσταση, με κατάλληλη επιλογή της εισόδου ελέγχου. Φανερώνει επίσης το βαθμό στον οποίο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ανάδραση για να ελέγξουμε τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος.

Για τη μελέτη της ελεγχιμότητας εστιάζουμε την προσοχή μας στην εξέλιξη των μεταβλητών κατάστασης με το χρόνο όπως καθορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}.$$

Έστω $R(x_0, T)$ το σύνολο των καταστάσεων x_T στις οποίες μπορούμε να μεταβούμε από την αρχική κατάσταση $x(0)=x_0$ σε χρόνο μικρότερο του T , χρησιμοποιώντας κατάλληλη είσοδο ελέγχου $u(t)$.

Ορισμός Ελεγχιμότητας Ένα γραμμικό σύστημα θα λέγεται ελέγξιμο αν

$$\forall x_0, x_T \in \mathbb{R}^n, \exists T > 0 \text{ και } u \in [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

έτσι ώστε η λύση του συστήματος να ικανοποιεί $x(0)=x_0$ και $x(T)=x_T$.

Κριτήριο Ελεγχιμότητας

Ο ορισμός της ελεγχιμότητας δεν είναι βολικός για να διαπιστωθεί αν ένα σύστημα είναι ελέγξιμο ή όχι. Σ' ότι ακολουθεί θα οδηγηθούμε στη διατύπωση ενός κριτηρίου ελεγχιμότητας μέσω ισχυρών μαθηματικών ενδείξεων. Η πλήρης απόδειξη του κριτηρίου ξεφεύγει από το επίπεδο του προπτυχιακού μαθήματος και ως εκ τούτου δε θα δοθεί.

Η λύση του γραμμικού συστήματος για μηδενική αρχική κατάσταση είναι:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Αν επιλέξουμε $u(t)=\delta(t)$ προκύπτει

$$x(t) = e^{At} B.$$

Γνωρίζουμε πως αν $x(t)$ είναι η απόκριση για είσοδο $u(t)$, τότε η απόκριση που αντιστοιχεί στην παράγωγο της εισόδου ισούται με την παράγωγο του $x(t)$. Επομένως η απόκριση στην παράγωγο της κρουστικής συνάρτησης θα είναι:

$$Ae^{At} B.$$

Αν θεωρήσουμε ότι η είσοδος παράγεται ως

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta(t)^{(k)}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, n-1$$

τότε λόγω της γραμμικότητας προκύπτει:

$$x(t) = c_0 e^{At} B + c_1 A e^{At} B + c_2 A^2 e^{At} B + \dots + c_{n-1} A^{n-1} e^{At} B.$$

Επομένως,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = c_0 B + c_1 AB + c_2 A^2 B + \dots + c_{n-1} A^{n-1} B.$$

Το δεξί μέρος της ισότητας είναι ο γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα:

$$M = [B \quad AB \quad A^2 B \quad \dots \quad A^{n-1} B] \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Συνεπώς, για να οδηγηθούμε σε οποιοδήποτε σημείο του n -διάστατου πραγματικού χώρου πρέπει τα διανύσματα στήλες του M να αποτελούν βάση και άρα να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Διαφορετικά, πρέπει:

$$\text{rank}(M) = n.$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε κι αν αντί της κρουστικής συνάρτησης και των παραγώγων της χρησιμοποιήσουμε λιγότερο «βίαια» σήματα εισόδου. Πράγματι, για μηδενική αρχική κατάσταση ισχύει:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t e^{A\tau} B u(t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$e^{At} = c_0(t)I + c_1(t)A + c_2(t)A^2 + \dots + c_{n-1}(t)A^{n-1}$$

όπου $c_i(t)$, $i=1, \dots, n-1$ βαθμωτές συναρτήσεις. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$x(t) = B \int_0^t c_0(\tau) u(t-\tau) d\tau + AB \int_0^t c_1(\tau) u(t-\tau) d\tau + \dots + A^{n-1} B \int_0^t c_{n-1}(\tau) u(t-\tau) d\tau$$

Ονομάζουμε

$$\varphi_i(t) \triangleq \int_0^t c_i(\tau) u(t-\tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, n-1$$

οπότε

$$x(t) = B\varphi_0(t) + AB\varphi_1(t) + \dots + A^{n-1}B\varphi_{n-1}(t).$$

Πάλι, το δεξί μέρος της εξίσωσης είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του M και επομένως για να οδηγηθούμε σε οποιοδήποτε κατάσταση x πρέπει $\text{rank}(M)=n$. Είναι λοιπόν εφικτό να αποδειχθεί το θεώρημα:

Θεώρημα 5.1 (Κριτήριο Ελεγχιμότητας). Το γραμμικό σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$$

θα λέγεται ελέγξιμο αν και μόνο αν $\text{rank}(M)=n$, όπου

$$M = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

με τον M να ονομάζεται πίνακας ελεγχιμότητας.

Εν συντομία θα λέμε ότι το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν $\text{rank}(M)=n$.

Παρατήρηση: Η ελεγχιμότητα αναφέρεται στο αν το διάνυσμα κατάστασης ενός συστήματος μπορεί να μεταβεί σε πεπερασμένο χρόνο στο μηδέν από κάποια αρχική κατάσταση, με κατάλληλη είσοδο ελέγχου. Υπάρχουν μη-ελέγξιμα συστήματα των οποίων το διάνυσμα κατάστασης επίσης μπορεί να μεταβεί στο μηδέν αλλά σε άπειρο χρόνο, όπως για παράδειγμα το

$$\dot{x} = -x.$$

Στην περίπτωση αυτή το διάνυσμα κατάστασης θα μεταβεί στο μηδέν όχι λόγω κατάλληλης εισόδου αλλά διότι το 0 αποτελεί ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Μη – Ελέγξιμα Γραμμικά Χρονικά Αμετάβλητα Συστήματα

Θεωρείστε το ΓΧΑ σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

του οποίου ο πίνακας ελεγχιμότητας

$$M = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

έχει βαθμό μικρότερο από n ,

$$\text{rank}(M) = n_c < n.$$

Επομένως το ΓΧΑ σύστημα δεν είναι ελέγξιμο. Στην περίπτωση αυτή είναι εφικτό, με κατάλληλη αλλαγή των μεταβλητών κατάστασης, να το διαχωρίσουμε σε ελέγξιμο και μη-ελέγξιμο μέρος.

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι σχετικό, η απόδειξή του όμως παραλείπεται.

Θεώρημα 5.2 (Παράσταση μη-ελέγξιμων ΓΧΑ συστημάτων). Αν το ζεύγος (A, B) δεν είναι ελέγξιμο, τότε υπάρχει μη-ιδιόμορφος πίνακας μετασχηματισμού των μεταβλητών κατάστασης T τέτοιος ώστε:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου

$$A_1 \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}, \quad \tilde{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_c \times m}$$

και το ζεύγος (A₁, B₁) να είναι ελέγξιμο.

Στις νέες μεταβλητές κατάστασης $x = Tz$ το σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} T\dot{z} &= \dot{x} \\ \dot{z} &= T^{-1}(Ax + Bu) \\ &= T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ &= \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (A_1 z_1 + B_1 u) + A_{12} z_2 \\ \dot{z}_2 &= A_2 z_2 \end{aligned}$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει:

$$z_1(t) = e^{A_1 t} z_1(0) + \int_0^t e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau + \left[\int_0^t e^{A_1(t-\tau)} A_{12} e^{A_2 \tau} d\tau \right] z_2(0), \quad \forall t \geq 0$$

$$z_2(t) = e^{A_2 t} z_2(0), \quad \forall t \geq 0$$

από τις οποίες είναι προφανές ότι η είσοδος δεν επηρεάζει την z_2 . Άρα οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ρυθμοί του A_2 είναι μη-ελέγξιμα μεγέθη. Αντίθετα, οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ρυθμοί του A_1 είναι ελέγξιμα μεγέθη. Ο παράγοντας εντός των αγκυλών περιγράφει την επίδραση του μη-ελέγξιμου μέρους του συστήματος στο ελέγξιμο τμήμα του. Είναι άξιο προσοχής ότι στην απόκριση μηδενικής αρχικής κατάστασης οι μη-ελέγξιμοι ρυθμοί απουσιάζουν.

Κατασκευή του Πίνακα Μετασχηματισμού

Δεδομένου ότι το ζεύγος (A, B) δεν είναι ελέγξιμο και ότι $\text{rank}(M) = n_c < n$, επιλέγουμε n_c το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητες στήλες του M τις οποίες συμβολίζουμε ως $m_i, i=1, \dots, n_c$. Ορίζουμε τον πίνακα μετασχηματισμού T ως

$$T = [m_1 \ m_2 \ \dots \ m_{n_c} \ T_{n-n_c}]$$

Με τον πίνακα T_{n-n_c} να αποτελείται από $n-n_c$ το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητες στήλες επιλεγμένες έτσι ώστε ο T να μην είναι ιδιόμορφος.

Σταθεροποιησιμότητα

Ορισμός: Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο (θα λέμε για συντομία το ζεύγος (A, B) είναι σταθεροποιήσιμο) αν είναι ελέγξιμο ή αν δεν είναι, το μη-ελέγξιμο μέρος του έχει πίνακα A_2 του οποίου οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

Για σταθεροποιήσιμα ΓΧΑ συστήματα η λύση $z_2(t)$ συγκλίνει εκθετικά στο 0. Επομένως γράφουμε:

$$\dot{z}_1 = (A_1 z_1 + B_1 u) + d(t), \quad \forall t \geq 0$$

όπου ο παράγοντας

$$d(t) = A_{12} z_2(t), \quad \forall t \geq 0$$

μπορεί να ειπωθεί ως εκθετικά αποσβεννύμενη διαταραχή.

Παρατήρηση: Η σταθεροποιησιμότητα είναι ελεγχσιμότητα διατυπωμένη για άπειρο χρόνο, με την έννοια ότι αν ένα σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο τότε η κατάστασή του μπορεί να μεταβεί στο 0 από οποιαδήποτε αρχική τιμή, αλλά κάτι τέτοιο πιθανώς να απαιτήσει άπειρο χρόνο.

Ελέγξιμη Κανονική Μορφή

Έχουμε χρησιμοποιήσει αρκετές φορές μέχρι τώρα το τέχνασμα της αλλαγής των μεταβλητών κατάστασης για να οδηγηθούμε σε βολικότερες για ανάλυση αλλά ισοδύναμες παραστάσεις ΓΧΑ συστημάτων. Μια τέτοια βολική παράσταση θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

Έστω ότι με τη χρήση κατάλληλου μετασχηματισμού $z=Tx$ το ΓΧΑ σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

γράφεται ισοδύναμα:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u \triangleq \tilde{A}z + \tilde{B}u$$

$$y = [b_1 \quad b_1 \quad \dots \quad b_n]z + Du \triangleq \tilde{C}z + Du.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος είναι:

$$p(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

προκύπτει μετά από πράξεις ότι ο πίνακας ελεγχσιμότητας

$$\tilde{M} = [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]$$

είναι τριγωνικός άνω μ' όλα τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο 1. Επομένως

$$\det(\tilde{M}) = 1 \neq 0$$

και άρα το σύστημα είναι ελέγξιμο. Για το λόγο αυτό η παραπάνω παράσταση του ΓΧΑ συστήματος ονομάζεται *ελέγξιμη κανονική μορφή*.

Προσδιορισμός του Πίνακα Μετασχηματισμού

Κάνοντας την αλλαγή $z=Tx$ οι εξισώσεις κατάστασης γίνονται:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= T\dot{x} \\ &= T(Ax + Bu) \\ &= (TAT^{-1})z + (TB)u \\ &= \tilde{A}z + \tilde{B}u \\ y &= (CT^{-1})z + Du \\ &= \tilde{C}z + Du \end{aligned}$$

με $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$, $\tilde{C} = CT^{-1}$. Ο πίνακας ελεγχσιμότητας του μετασχηματισμένου συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= [\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] \\ &= [TB \quad TAT^{-1}TB \quad \cdots] \\ &= [TB \quad TAB \quad \cdots \quad TA^{n-1}B] \\ &= T[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \\ &= TM \end{aligned}$$

Επειδή $\text{rank}(M)=n$ ισχύει ότι ο πίνακας M είναι αντιστρέψιμος. Άρα

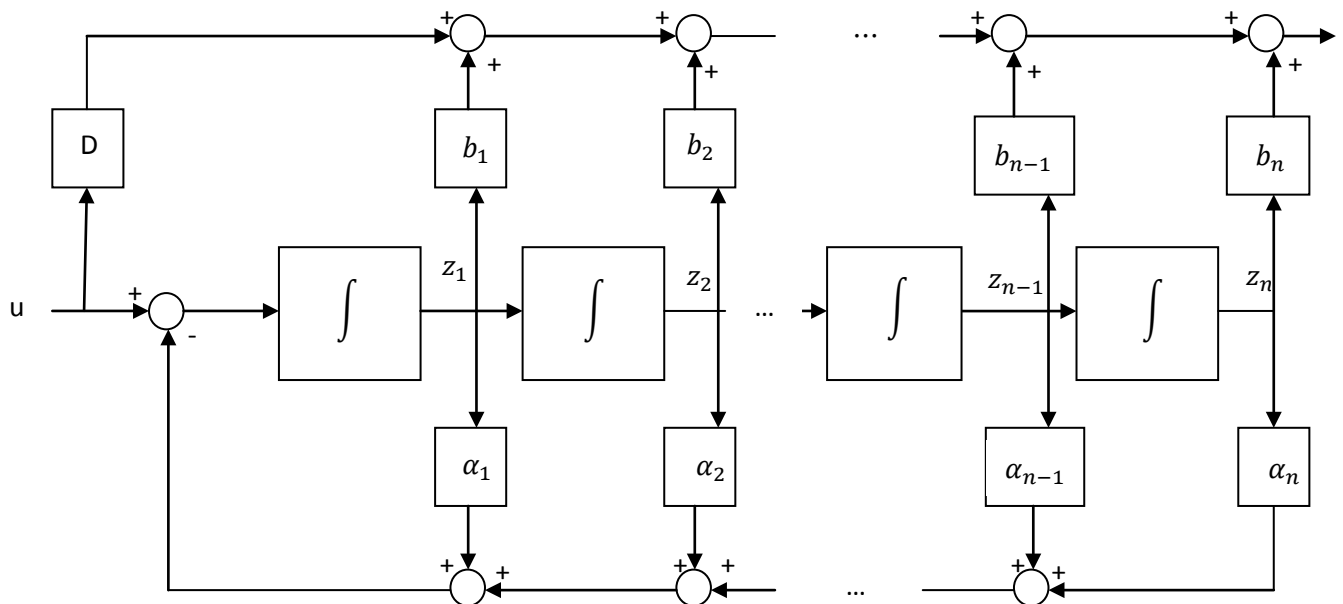
$$T = \tilde{M}M^{-1}.$$

Προκειμένου να σχεδιάσουμε το δομικό διάγραμμα της ελέγξιμης κανονικής μορφής παρατηρείστε ότι αποτελείται από σειριακή σύνδεση ολοκληρωτών (στη βιβλιογραφία ονομάζεται αλυσίδα ολοκληρωτών) με την είσοδο του πρώτου ολοκληρωτή να εξαρτάται από το άθροισμα με βαρύτητα των καταστάσεων. Επιπλέον, η έξοδος της κανονικής μορφής είναι γραμμικός συνδυασμός των καταστάσεων. Η ανάλυση που προηγήθηκε συνοψίζεται στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 5.3 (Ελέγξιμη Κανονική Μορφή). Έστω το ελέγξιμο ζεύγος (A, B) . Υπάρχει μετασχηματισμός $z=Tx$ που να μετατρέπει ισοδύναμα το αρχικό σύστημα στην ελέγξιμη κανονική του μορφή $\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}u, y = \tilde{C}z + Du$, με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του \tilde{A} να είναι:

$$p(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n.$$

Το Θεώρημα 5.2 επιτρέπει, χωρίς βλάβη της γενικότητας, την υπόθεση ότι κάθε ελέγξιμο ΓΧΑ σύστημα είναι στην ελέγξιμη κανονική μορφή.



Σχήμα 5.1 Το δομικό διάγραμμα της ελέγξιμης κανονικής μορφής.

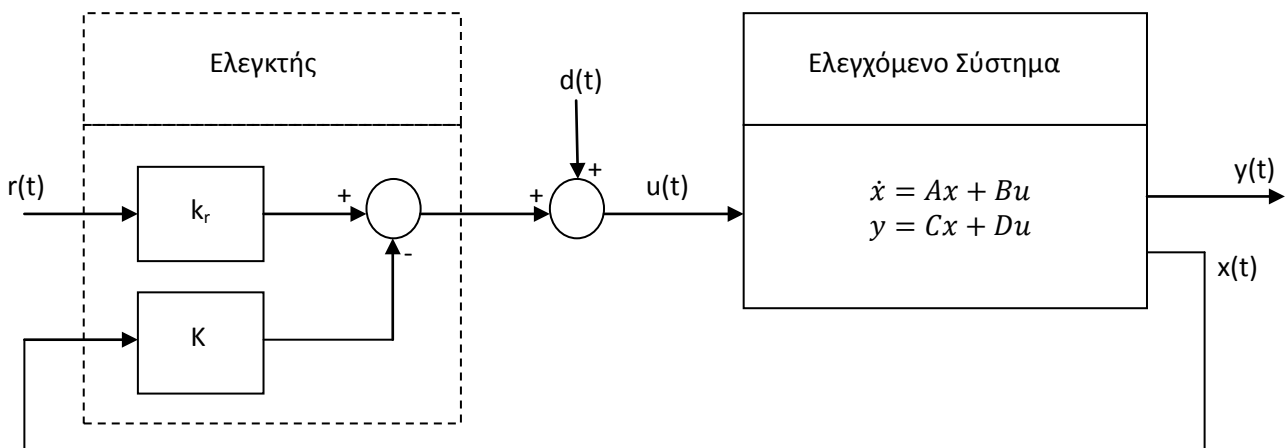
5.2 Γραμμική Ανάδραση Καταστάσεων

Στην παρούσα ενότητα ασχολούμαστε με το πρόβλημα τροποποίησης της δυναμικής συμπεριφοράς των ΓΧΑ συστημάτων, μέσω γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων. Για λόγους απλότητας στην παρουσίαση θα θεωρήσουμε συστήματα μιας εισόδου – μιας εξόδου.

Δομή Ελεγκτή

Το δομικό διάγραμμα του συστήματος κλειστού βρόχου δίνεται στο Σχήμα 5.2. Αποτελείται από το ελεγχόμενο σύστημα που δέχεται ως είσοδο την έξοδο του ελεγκτή αλλοιωμένη από την επίδραση των εξωτερικών διαταραχών $d(t)$ και τον ελεγκτή που δέχεται ως εισόδους το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ καθώς και την είσοδο αναφοράς $r(t)$. Στόχος του ελεγκτή είναι να εξαναγκάσει την έξοδο του ελεγχόμενου συστήματος $y(t)$ να «παρακολουθεί» το επιθυμητό σήμα αναφοράς παρουσία εξωτερικών διαταραχών καθώς και αβεβαιοτήτων στη δυναμική του ελεγχόμενου συστήματος. Το μέσο για την

επίτευξη του στόχου ελέγχου είναι οι παράμετροι K , k_r του ελεγκτή. Βασικό χαρακτηριστικό στην κατεύθυνση αυτή είναι οι προδιαγραφές απόκρισης.



Σχήμα 5.2. Δομικό διάγραμμα συστήματος κλειστού βρόχου με ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων.

Η πιο σημαντική προδιαγραφή δυναμικής συμπεριφοράς είναι η ευστάθεια. Συγκεκριμένα απουσία εξωτερικών διαταραχών ($d(t)=0$) είναι επιθυμητό το σημείο ισορροπίας του συστήματος κλειστού βρόχου να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Παραταύτα, η ευστάθεια από μόνη της δεν είναι αρκετή για να προσδώσει ποιοτικά χαρακτηριστικά απόκρισης εκτός αυτού της σύγκλισης σε άπειρο χρόνο. Υψηλότερου επιπέδου χαρακτηριστικά θεωρούνται προδιαγραφές που σχετίζονται με την υπερύψωση, το χρόνο αποκατάστασης, το χρόνο ανόδου κλπ.

Επιπλέον, κάθε σύστημα ελέγχου θα πρέπει να εμφανίζει εύρωστη συμπεριφορά παρουσία εξωτερικών διαταραχών και πάσης φύσεως αβεβαιοτήτων σχετιζόμενων με τη δυναμική του ελεγχόμενου συστήματος. Για παράδειγμα, μέχρι ποιού ύψους διαταραχές μπορεί να «ανεχθεί» το σύστημα κλειστού βρόχου με την έξοδο να παραμένει «κοντά» στην είσοδο αναφοράς;

Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση θεωρώντας $d(t)=0$. Το ελεγχόμενο σύστημα είναι:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

με στόχο ελέγχου η έξοδος $y(t)$ να οδηγείται στην είσοδο αναφοράς $r(t)$ και να παραμένει εκεί. Έστω ότι $r(t)=\text{σταθερά}$, για κάθε t . Με την παραδοχή ότι όλες οι μεταβλητές κατάστασης είναι μετρήσιμες και τον περιορισμό της γραμμικότητας του ελεγκτή, επιλέγουμε:

$$u = -Kx + k_r r.$$

Η μεταβολή της δυναμικής συμπεριφοράς του ελεγχόμενου συστήματος επιτυγχάνεται τροποποιώντας τις ιδιοτιμές του πίνακα του συστήματος. Παρατηρήστε λοιπόν ότι το σύστημα κλειστού βρόχου γράφεται:

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bk_r r.$$

Επομένως, τροποποίηση των ιδιοτιμών πετυχαίνουμε με κατάλληλη επιλογή του K αποκλειστικά. Το κέρδος k_r δεν επηρεάζει την ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου. Επιδρά όμως στη λύση μόνιμης κατάστασης. Συγκεκριμένα, το σημείο ισορροπίας και η έξοδος στη μόνιμη κατάσταση του συστήματος κλειστού βρόχου είναι:

$$x^* = -(A - BK)^{-1} Bk_r r, \quad y_{ss} = Cx^* + Du^*.$$

Για να διασφαλίσουμε $y_{ss}=r$ το κέρδος k_r προκύπτει ίσο με

$$k_r = \frac{1}{DK(A - BK)^{-1} + D - C(A - BK)^{-1}B}.$$

Στην περίπτωση που $D=0$ βρίσκουμε

$$k_r = \frac{-1}{C(A - BK)^{-1}B}$$

που είναι το αντίστροφο του κέρδους μηδενικής συχνότητας του συστήματος κλειστού βρόχου.

Γραμμική Ανάδραση Καταστάσεων Συστημάτων σε Ελέγξιμη Κανονική Μορφή

Η διαδικασία επιλογής των κερδών της γραμμικής ανάδρασης απλουστεύεται σημαντικά αν το σύστημα γραφεί σε ελέγξιμη κανονική μορφή. Έστω ότι το σύστημα έχει έρθει στην ελέγξιμη κανονική μορφή

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n] z.$$

Όπως γνωρίζουμε, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ελεγχόμενου συστήματος είναι:

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n.$$

Επιλέγοντας τη γραμμική ανάδραση καταστάσεων

$$u = -Kz + k_r r$$

$$= -k_1 z_1 - k_2 z_2 - \cdots - k_n z_n + k_r r$$

προκύπτει το σύστημα κλειστού βρόχου:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -a_1 - k_1 & -a_2 - k_2 & \cdots & -a_{n-1} - k_{n-1} & -a_n - k_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} k_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n] z.$$

Επομένως, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου είναι:

$$p_c(s) = s^n + (a_1 + k_1)s^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + k_{n-1})s + (a_n + k_n).$$

Αν το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος κλειστού βρόχου είναι:

$$p_d(s) = s^n + p_1 s^{n-1} + \cdots + p_{n-1} s + p_n$$

τότε τα κέρδη της γραμμικής ανάδρασης που επιβάλουν την παραπάνω επιθυμητή συμπεριφορά είναι:

$$k_i = p_i - a_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Το κέρδος k_r ισούται με το αντίστροφο του κέρδους μηδενικής συχνότητας, άρα

$$k_r = \frac{a_n + k_n}{b_n} = \frac{p_n}{b_n}$$

Αν το ελέγξιμο σύστημα δεν έχει δοθεί σε ελέγξιμη κανονική μορφή, τότε όπως γνωρίζουμε υπάρχει πίνακας μετασχηματισμού T και αλλαγή μεταβλητών κατάστασης $z=Tx$ έτσι ώστε το

$$\dot{z} = (TAT^{-1})z + (TB)u \triangleq \tilde{A}z + \tilde{B}u$$

να είναι σε ελέγξιμη κανονική μορφή. Συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι $T = \tilde{M}M^{-1}$ όπου M, \tilde{M} οι πίνακες ελεγχιμότητας του αρχικού και του μετασχηματισμένου συστήματος αντίστοιχα. Η γραμμική ανάδραση καταστάσεων γίνεται τώρα:

$$\begin{aligned} u &= -\tilde{K}z + k_r r \\ &= -\tilde{K}Tx + k_r r \\ &= -Kx + k_r r, \quad (K = \tilde{K}T = \tilde{K}\tilde{M}M^{-1}) \end{aligned}$$

Η ανάλυση που προηγήθηκε συνοψίζεται στο θεώρημα που ακολουθεί:

Θεώρημα 5.4 (Τοποθέτηση Ιδιοτιμών με Γραμμική Ανάδραση Καταστάσεων). Θεωρείστε το ΓΧΑ σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}.$$

Έστω

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A . Αν το σύστημα είναι ελέγξιμο, με πίνακα ελεγχιμότητας M , τότε υπάρχει γραμμικός ελεγκτής της μορφής

$$u = -Kx + k_r r$$

έτσι ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου που προκύπτει να έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p_d(s) = s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_{n-1} s + p_n$$

και $y(t)=r(t)$ ασυμπτωτικά. Τα κέρδη ανάδρασης δίνονται από:

$$K = [p_1 - a_1 \quad p_2 - a_2 \quad \dots \quad p_n - a_n] \tilde{M} M^{-1}$$

όπου

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Επιπλέον

$$k_r = \frac{-1}{C(A - BK)^{-1}B}$$

Παρατήρηση: Όσο μακρύτερα, σε σχέση με τις ιδιοτιμές του ελεγχόμενου συστήματος, βρίσκονται οι επιθυμητές ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόχου, τόσο μεγαλύτερα είναι τα κέρδη της γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων που απαιτούνται για να γίνει η επιθυμητή μετακίνηση.

Παρατήρηση: Η σχεδίαση του ελεγκτή γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων που παρουσιάστηκε απαιτεί πέρα από τη μέτρηση όλων των μεταβλητών κατάστασης και την ακριβή γνώση της δυναμικής του ελεγχόμενου συστήματος (πίνακες A, B, C, D) ώστε μέσω της επιλογής του k_r να επιτευχθεί ο στόχος ελέγχου $y(t)=r(t)$ ασυμπτωτικά.

5.3 Βέλτιστη Επιλογή Κερδών

Εναλλακτικά της επιλογής των κερδών του γραμμικού ελεγκτή ανάδρασης καταστάσεων ώστε να τοποθετούνται οι ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόχου σε προκαθορισμένες θέσεις, είναι δυνατόν να τα επιλέξουμε ώστε να ελαχιστοποιείται ένας κατάλληλα ορισμένος δείκτης επίδοσης που συσχετίζει την απόκριση του συστήματος με το μέγεθος της εισόδου ελέγχου που απαιτείται για να επιτευχθεί το συγκεκριμένο επίπεδο απόδοσης.

Δείκτες Επίδοσης

Για το ελεγχόμενο σύστημα ο δείκτης επίδοσης χρησιμοποιείται ως μετρική της ποιότητας απόκρισής του και ως εκ τούτου θεωρείται τμήμα της μοντελοποίησης του συστήματος.

Θεωρείστε το ΓΧΑ σύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \\ y &= Cx\end{aligned}$$

και έστω ότι επιθυμούμε να το ελέγξουμε κατά τρόπον ώστε το $x(t)$ να είναι «μικρό» στο χρονικό διάστημα $[t_0, t_f]$. Ο παραπάνω στόχος ελέγχου μπορεί να επιτευχθεί αν ελαχιστοποιηθεί ο δείκτης επίδοσης:

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_f} x^T(t)x(t)dt = \int_{t_0}^{t_f} |x(t)|^2 dt.$$

Παρατηρείστε ότι ο J_1 είναι ένα μέτρο της ισχύος του σήματος $x(t)$. Αν λοιπόν το J_1 είναι μικρό, τότε επίσης μικρό θα είναι και το $|x(t)|$ στο διάστημα $[t_0, t_f]$.

Αν επιθυμούμε να ελέγξουμε το σύστημα ώστε να εμφανίζει «μικρή» έξοδο στο διάστημα $[t_0, t_f]$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε το δείκτη επίδοσης

$$\begin{aligned}J_2 &= \int_{t_0}^{t_f} y^T(t)y(t)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} x^T(t)C^T Cx(t)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} x^T(t)Qx(t)dt\end{aligned}$$

όπου ο $Q=C^T C$ ονομάζεται πίνακας βάρους και πρέπει να είναι συμμετρικός ($Q=Q^T$) και θετικά ορισμένος.

Στην περίπτωση που επιθυμούμε το σήμα ελέγχου να παίρνει «μικρές» τιμές στο $[t_0, t_f]$, τότε θα ελαχιστοποιήσουμε το δείκτη επίδοσης:

$$J_3 = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t)u(t)dt$$

ή εναλλακτικά τον

$$J_4 = \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) R u(t) dt$$

όπου R συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας.

Να σημειωθεί ότι ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση των J_1 και J_3 δεν μπορεί να επιτευχθεί κι αυτό διότι η ελαχιστοποίηση του J_1 απαιτεί κατά κανόνα μεγάλα $u(t)$, ενώ η ελαχιστοποίηση του J_3 απαιτεί μικρά $u(t)$. Για να λύσουμε το παραπάνω δίλημμα δημιουργούμε ένα νέο δείκτη επίδοσης J ως τον κυρτό συνδυασμό των J_1 και J_3 :

$$\begin{aligned} J &= \lambda J_1 + (\lambda - 1) J_3, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [\lambda x^T(t) x(t) + (1 - \lambda) u^T(t) u(t)] dt \end{aligned}$$

Γενικεύοντας προκύπτει ο δείκτης επίδοσης:

$$J_4 = \int_{t_0}^{t_f} x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) dt.$$

Βέλτιστος Τετραγωνικός Ρυθμιστής

Θεωρείστε το ΓΧΑ σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0$$

και τον δείκτη επίδοσης

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt, \quad Q = Q^T \geq 0, \quad R = R^T > 0.$$

Στόχος μας είναι να σχεδιαστεί γραμμικός ελεγκτής ανάδρασης καταστάσεων της μορφής $u = -Kx$ που να ελαχιστοποιεί τον δείκτη επίδοσης J. Έστω u_0 ο βέλτιστος ελεγκτής που αναζητούμε.

Υποθέτουμε πως ένας τέτοιος βέλτιστος ελεγκτής υπάρχει και καθιστά το σύστημα κλειστού βρόχου

$$\dot{x} = (A - BK)x, \quad x(t_0) = x_0$$

ασυμπτωτικά ευσταθές. Επομένως, υπάρχει συνάρτηση Lyapunov

$$V(x) = x^T P x, \quad P = P^T > 0$$

τέτοια ώστε η χρονική της παράγωγος κατά μήκος της λύσης του συστήματος να είναι αρνητικά ορισμένη.

Θεώρημα 5.5. Έστω το σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0$$

και ο δείκτης επίδοσης

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt, \quad Q = Q^T \geq 0, \quad R = R^T > 0.$$

Αν ο ελεγκτής $u_0 = -Kx$ που καθιστά ασυμπτωτικά ευσταθές το σύστημα κλειστού βρόχου ικανοποιεί:

$$\min_u \left(\frac{dV}{dt} + x^T Q x + u^T R u \right) = 0$$

για κάποια συνάρτηση

$$V(x) = x^T P x, \quad P = P^T > 0$$

τότε ο u_0 ελαχιστοποιεί τον δείκτη επίδοσης J, η ελάχιστη τιμή του οποίου είναι $J_{min} = x_0^T P x_0$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.5, για να σχεδιάσουμε το βέλτιστο ελεγκτή u_0 πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε ως προς u τη συνάρτηση

$$f(u) = \frac{dV}{dt} + x^T Q x + u^T R u.$$

Επειδή η f είναι γνήσια κυρτή, η ελαχιστοποίηση επιτυγχάνεται όταν

$$\left. \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{dV}{dt} + x^T Qx + u^T Ru \right) \right|_{u=u_0} = 0.$$

Όμως

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{dV}{dt} + x^T Qx + u^T Ru \right) &= \frac{\partial}{\partial u} (2x^T P\dot{x} + x^T Qx + u^T Ru) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} (2x^T PAx + 2x^T PBu + x^T Qx + u^T Ru) \\ &= 2x^T PB + 2u^T R. \end{aligned}$$

Επομένως πρέπει

$$x^T PB + u_0^T R = 0$$

ή

$$\begin{aligned} u_0 &= -R^{-1}B^T Px \\ &= -Kx, \quad (K = R^{-1}B^T P). \end{aligned}$$

Για να υλοποιηθεί ο παραπάνω ελεγκτής αρκεί να προσδιοριστεί ο πίνακας P. Από το Θεώρημα 5.5 γνωρίζουμε ότι ο u_0 ικανοποιεί

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{u=u_0} + x^T Qx + u_0^T Ru_0 = 0$$

ή

$$2x^T PAx + 2x^T PBu_0 + x^T Qx + u_0^T Ru_0 = 0$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση του u_0 βρίσκουμε:

$$2x^T PAx - 2x^T PBR^{-1}B^T Px + x^T Qx + x^T PBR^{-1}RR^{-1}B^T Px = 0$$

Όμως

$$\begin{aligned} 2x^T PAx &= x^T PAx + x^T PAx \\ &= x^T PAx + (x^T PAx)^T \\ &= x^T PAx + x^T A^T Px \\ &= x^T (A^T P + PA)x. \end{aligned}$$

Άρα

$$x^T (A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P)x = 0.$$

Για να ισχύει η παραπάνω εξίσωση για κάθε x πρέπει:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

η οποία ονομάζεται *αλγεβρική εξίσωση Riccati* και η επίλυσή της μας δίνει τον πίνακα P.

5.4 Δυναμική Ανάδραση Καταστάσεων

Οι ελεγκτές που σχεδιάσαμε μέχρι τώρα στηρίζονται στον πολλαπλασιασμό των μεταβλητών κατάστασης με κατάλληλα κέρδη που οδηγούν στη σταθεροποίηση του συστήματος (ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας), αλλά και την αυστηρή επιλογή του κέρδους εισόδου αναφοράς (k_r) ώστε να επιτυγχάνεται ο στόχος ελέγχου $y(t)=r(t)$ ασυμπτωτικά. Τα παραπάνω απαιτούν την ακριβή γνώση του δυναμικού μοντέλου του συστήματος, άρα των πινάκων A, B, C, D.

Όμως, πρωταρχικός στόχος της ανάδρασης είναι η επίτευξη καλής λειτουργίας παρουσία αβεβαιοτήτων στο μοντέλο του συστήματος, καθώς και εξωτερικών διαταραχών. Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, η

προσθήκη ενός ολοκληρωτή στο γραμμικό ελεγκτή ανάδρασης καταστάσεων λειτουργεί βοηθητικά προς την κατεύθυνση αυτή. Ο ελεγκτής που προκύπτει ονομάζεται *δυναμική ανάδραση καταστάσεων*. Η φιλοσοφία της μεθόδου έχει ως εξής: Στο μοντέλο του ελεγχόμενου συστήματος προσθέτουμε τον ολοκληρωτή:

$$\dot{z} = y - r = Cx - r$$

Σημείωση: Η διαφορά $y-r$ ονομάζεται σφάλμα ελέγχου διότι εκφράζει την απόκλιση της εξόδου από την επιθυμητή συμπεριφορά, όπως αυτή μεταφράζεται από το σήμα αναφοράς $r(t)$.

Με την προσθήκη του ολοκληρωτή το ελεγχόμενο σύστημα γράφεται:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\dot{z} = Cx - r$$

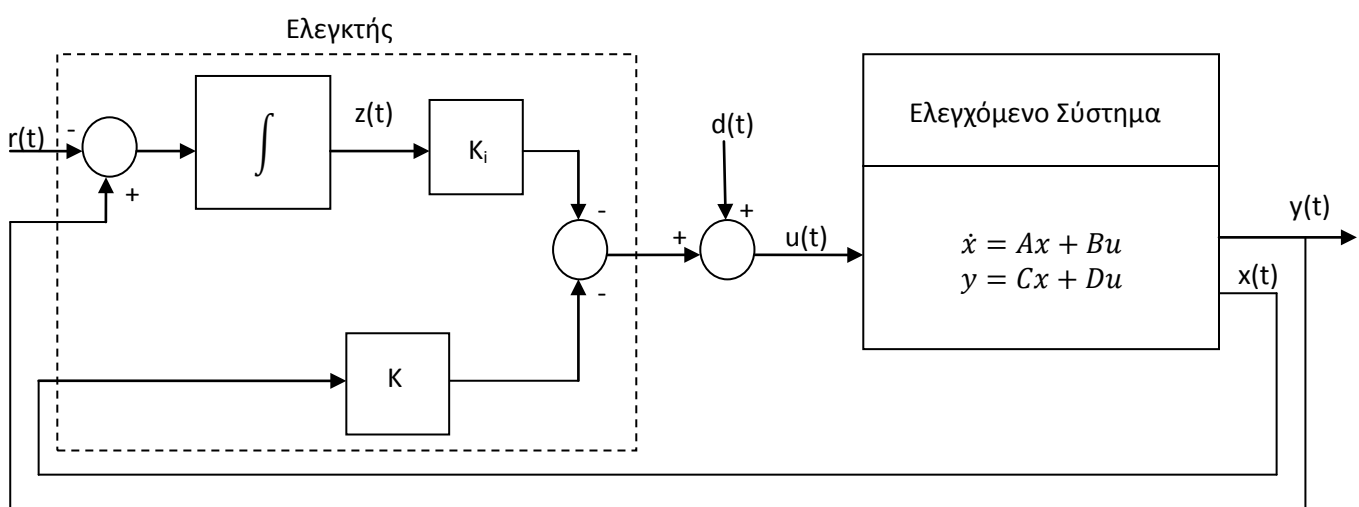
το οποίο έχει πλέον $n+1$ μεταβλητές κατάστασης τα x, z . Αν με γραμμική ανάδραση των x, z σταθεροποιηθεί το σύστημα, τότε τα x, z θα οδηγηθούν στα σημεία ισορροπίας x^*, z^* . Άρα θα ισχύει $\dot{z} = 0$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $y=r$ ασυμπτωτικά.

Επειδή στη σταθεροποίηση του συστήματος συμμετέχουν μόνο τα κέρδη ανάδρασης των x, z ο στόχος ελέγχου ($y=r$) επιτυγχάνεται χωρίς την εμπλοκή του κέρδους εισόδου αναφοράς (k_r). Επιπλέον, για την επιλογή των κερδών ανάδρασης δεν απαιτείται ακρίβεια στη γνώση του δυναμικού μοντέλου. Αρκεί οι ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόχου που προκύπτει να έχουν αυστηρά αρνητικό πραγματικό μέρος.

Οι εξισώσεις του ελεγκτή δυναμικής ανάδρασης καταστάσεων είναι:

$$\begin{aligned} u &= -Kx - k_i z \\ \dot{z} &= y - r \end{aligned}$$

Το δομικό διάγραμμα του συστήματος κλειστού βρόχου με ελεγκτή δυναμικής ανάδρασης καταστάσεων δίνεται στο Σχήμα 5.3.



Σχήμα 5.3. Δομικό διάγραμμα συστήματος κλειστού βρόχου με γραμμικό ελεγκτή δυναμικής ανάδρασης καταστάσεων.

2015

Κεφάλαιο 6

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΑΝΑΔΡΑΣΗΣ ΕΞΟΔΟΥ

Γεώργιος Ροβιθάκης, Καθηγητής Α.Π.Θ.



Στο προηγούμενο κεφάλαιο προκειμένου να τροποποιήσουμε τη δυναμική συμπεριφορά του ελεγχόμενου συστήματος υποθέσαμε πως όλες οι μεταβλητές κατάστασης είναι μετρήσιμες. Στην πράξη όμως δεν είναι σπάνια η παραβίαση της παραπάνω παραδοχής. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη μεταβολή του συστήματος χρησιμοποιώντας μετρήσεις της εξόδου καθώς και εκτιμήσεων των μεταβλητών κατάστασης.

6.1 Παρατηρησιμότητα

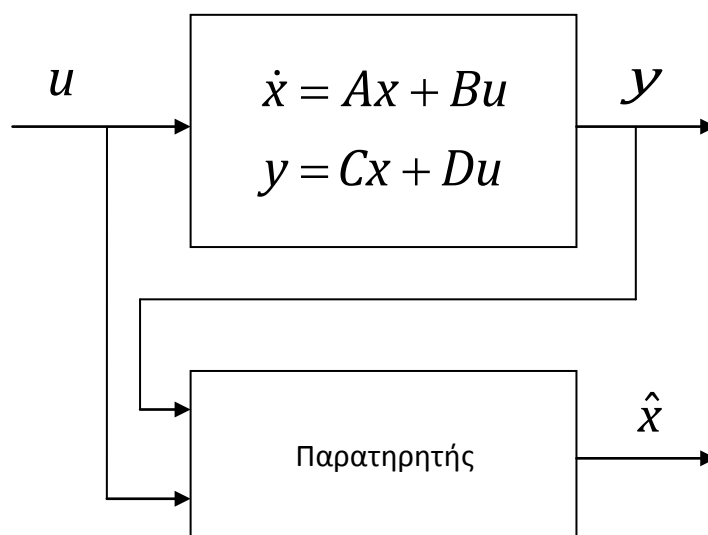
Η εκτίμηση των μεταβλητών κατάστασης ενός συστήματος γίνεται με τη βοήθεια κατάλληλα σχεδιασμένων δυναμικών συστημάτων που ονομάζονται παρατηρητές. Για να είναι εφικτή η εκτίμηση των μεταβλητών κατάστασης από μετρήσεις εισόδου – εξόδου πρέπει το σύστημα να είναι όπως λέμε *παρατηρήσιμο*.

Ορισμός Παρατηρησιμότητας

Έστω το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}.$$

Επιθυμούμε να εκτιμήσουμε τις μεταβλητές κατάστασης από μετρήσεις εισόδου – εξόδου. Έστω \hat{x} η εκτίμηση του x . Το δομικό διάγραμμα συστήματος – παρατηρητή δίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



Σχ. 6.1. Δομικό διάγραμμα συστήματος-παρατηρητή

Ορισμός 6.1 (Παρατηρησιμότητα). Ένα σύστημα θα λέγεται παρατηρήσιμο, αν για οποιοδήποτε $T > 0$ είναι εφικτός ο προσδιορισμός της κατάστασης $x(T)$ του συστήματος από μετρήσεις της εξόδου $y(t)$ και της εισόδου $u(t)$ στο χρονικό διάστημα $[0, T]$.

Ένα παρατηρήσιμο σύστημα δεν έχει «κρυφή» δυναμική. Μ' άλλα λόγια, πάντα είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε οτιδήποτε συμβαίνει στο εσωτερικό του μετρώντας είσοδο – έξοδο. Επιπλέον, η παρατηρησιμότητα φανερώνει αν ένα σύνολο αισθητήρων είναι αρκετό για να ελεγχθεί ένα σύστημα. Επειδή

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

και τα $A, B, u(t)$ είναι γνωστά, η $x(t)$ προσδιορίζεται για κάθε t αρκεί να γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση. Συνεπώς, για ΓΧΑ συστήματα εναλλακτικά του Ορισμού 6.1 έχουμε:

Ορισμός 6.2 (Παρατηρησιμότητα). Ένα ΓΧΑ σύστημα θα λέγεται παρατηρήσιμο, αν η αρχική του κατάσταση $x(0)=x_0$ μπορεί να προσδιοριστεί μοναδικά από μετρήσεις εισόδου - εξόδου στο χρονικό διάστημα $[0,T]$.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για να μελετήσουμε την παρατηρησιμότητα αρκεί να θεωρήσουμε μόνο την απόκριση μηδενικής εισόδου:

$$y(t) = Ce^{At}x(0).$$

Ορισμός 6.3 (Μη - παρατηρήσιμη κατάσταση). Η μη-μηδενική κατάσταση x^* θα λέγεται μη-παρατηρήσιμη, αν η απόκριση μηδενικής εισόδου με $x(0)=x^*$ ισούται με το μηδέν για κάθε t . Μ' άλλα λόγια αν

$$Ce^{At}x^* = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Θεώρημα 6.1 Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν δεν έχει μη-παρατηρήσιμες καταστάσεις. Εν συντομία θα λέμε ότι το ζεύγος (A,C) είναι παρατηρήσιμο.

Αντί απόδειξης, έστω x^* μια μη-μηδενική, μη-παρατηρήσιμη κατάσταση ενός ΓΧΑ συστήματος. Η απόκριση μηδενικής εισόδου για αρχική κατάσταση $x_1(0)$ είναι:

$$y_1(t) = Ce^{At}x_1(0), \quad \forall t \geq 0.$$

Η απόκριση μηδενικής εισόδου για αρχική κατάσταση $x_2(0)=x_1(0)+x^*$ είναι:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= Ce^{At}x_2(0), \quad \forall t \geq 0 \\ &= Ce^{At}x_1(0) + Ce^{At}x^*, \quad \forall t \geq 0 \\ &= Ce^{At}x_1(0), \quad \forall t \geq 0 \\ &= y_1(t), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Άρα δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες δίνουν την ίδια απόκριση μηδενικής εισόδου. Ως εκ τούτου, είναι αδύνατος ο προσδιορισμός της πραγματικής αρχικής κατάστασης δοσμένης της $y_1(t)$. Επομένως, το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο.

Έλεγχος Παρατηρησιμότητας

Από τη συζήτηση που προηγήθηκε συμπεραίνουμε ότι ο έλεγχος της παρατηρησιμότητας μπορεί να πραγματοποιηθεί αναζητώντας την ύπαρξη μη-μηδενικού διανύσματος x^* έτσι ώστε:

$$Ce^{At}x^* = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Όπως αναφέρθηκε και στη μελέτη της ελεγχιμότητας αποδεικνύεται ότι

$$e^{At} = c_0(t)I + c_1(t)A + c_2(t)A^2 + \dots + c_{n-1}(t)A^{n-1}$$

όπου $c_i(t)$, $i=0,1,\dots,n-1$ βαθμωτές χρονικές συναρτήσεις και n το πλήθος των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος. Αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$\left[c_0(t)C + c_1(t)CA + c_2(t)CA^2 + \dots + c_{n-1}(t)CA^{n-1} \right] x^* = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Η παραπάνω συνθήκη φανερώνει πως το διάνυσμα x^* πρέπει να είναι κάθετο στα $C, CA, CA^2, \dots, CA^{n-1}$ το οποίο είναι εφικτό αν και μόνο αν $\text{rank}(W) = n_0 < n$, όπου

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Πράγματι, αν $\text{rank}(W)=n$ τότε τα διανύσματα γραμμές του W θα αποτελούν βάση του n -διάστατου χώρου στον οποίο ανήκει και το x^* . Επομένως, το x^* θα εκφράζεται αναγκαστικά ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων βάσης. Συνεπώς, είναι αδύνατο να βρεθεί μη-μηδενικό x^* που να είναι ταυτόχρονα κάθετο σε κάθε διάνυσμα της βάσης. Ο πίνακας W ονομάζεται πίνακας παρατηρησιμότητας. Επομένως έχουμε το θεώρημα:

Θεώρημα 6.2 (Έλεγχος Παρατηρησιμότητας). Έστω το ΓΧΑ σύστημα με ζεύγος (A,C) . Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι το (A,C) παρατηρήσιμο είναι $\text{rank}(W)=n$ όπου

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

και n το πλήθος των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος.

Δυναμικότητα Ελεγχιμότητας-Παρατηρησιμότητας

Έστω το ΓΧΑ σύστημα:

$$(\Sigma_1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Γνωρίζουμε πως το (Σ_1) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\right) = n$$

Επίσης το (Σ_1) είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n$$

Με δεδομένο το (Σ_1) κατασκευάζουμε το σύστημα:

$$(\Sigma_2) \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}} = A^T \bar{x} + C^T \bar{u}, & \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{y} \in \mathbb{R}, \bar{u} \in \mathbb{R} \\ \bar{y} = B^T \bar{x} + D^T \bar{u} \end{cases}$$

Παρατηρούμε πως το (Σ_2) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}\right) = n$$

ή ισοδύναμα αν

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n.$$

Άρα, αν και μόνο αν το (Σ_1) είναι παρατηρήσιμο. Ομοίως το (Σ_2) είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

ή ισοδύναμα αν

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \cdots & A^{n-1} B \end{bmatrix} = n.$$

Άρα αν και μόνο αν το (Σ_1) είναι ελέγξιμο. Τα παραπάνω συνοψίζονται στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 6.3 (Δυαδικότητα Ελεγχιμότητας-Παρατηρησιμότητας). Έστω τα ΓΧΑ συστήματα $(\Sigma_1), (\Sigma_2)$.

- Το (Σ_1) είναι ελέγξιμο αν και μόνο αν το (Σ_2) είναι παρατηρήσιμο.
- Το (Σ_1) είναι παρατηρήσιμο αν και μόνο αν το (Σ_2) είναι ελέγξιμο.

Το (Σ_2) θα λέμε ότι είναι το δυαδικό του (Σ_1) .

Παρατηρήσιμη Κανονική Μορφή

Ένα ΓΧΑ σύστημα μίας εισόδου-μίας εξόδου θα λέμε ότι είναι στην παρατηρήσιμη κανονική μορφή, αν οι εξισώσεις κατάστασης δίνονται από:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} z + Du$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της παρατηρήσιμης κανονικής μορφής είναι:

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

Από τη μορφή των εξισώσεων κατάστασης, της εξόδου και υποθέτοντας την παραγωγισιμότητα των z_i , $i=1, \dots, n$ μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε την παρατηρησιμότητα των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος σε παρατηρήσιμη κανονική μορφή. Πράγματι,

$$y = z_1 + Du$$

Άρα

$$z_1 = y - Du$$

Επομένως, η κατάσταση z_1 υπολογίζεται μετρώντας τα y, u . Επιπλέον,

$$\dot{z}_1 = -a_1 z_1 + z_2 + b_1 u$$

Άρα

$$z_2 = \dot{z}_1 + a_1 z_1 - b_1 u$$

από την οποία υπολογίζουμε την z_2 . Προχωρώντας,

$$\dot{z}_2 = -a_2 z_1 + z_3 + b_2 u$$

ή

$$z_3 = \dot{z}_2 + a_2 z_1 - b_2 u$$

από την οποία υπολογίζουμε την z_3 . Συνεχίζοντας όπως παραπάνω μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε (παρατηρήσουμε) όλες τις μεταβλητές κατάστασης από μετρήσεις εισόδου-εξόδου.

Πιο αυστηρός προσδιορισμός της παρατηρησιμότητας γίνεται υπολογίζοντας τον πίνακα παρατηρησιμότητας, που για την παρατηρήσιμη κανονική μορφή αποδεικνύεται ότι είναι τριγωνικός κάτω μ' όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ίσα με τη μονάδα. Επομένως, $\det(W)=1$ και άρα $\text{rank}(W)=n$. Επιπλέον, προκύπτει μετά από πράξεις ότι

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Όπως και στην περίπτωση της ελέγξιμης κανονικής μορφής, μπορεί να αποδειχθεί πως αν ένα ΓΧΑ σύστημα είναι παρατηρήσιμο τότε πάντα υπάρχει πίνακας μετασχηματισμού T που να το μετατρέπει στην παρατηρήσιμη κανονική μορφή. Η διαδικασία της μετατροπής στηρίζεται στη δυαδικότητα ελεγχιμότητας-παρατηρησιμότητας και συνοψίζεται στον Πίνακα 6.1.

Πίνακας 6.1 Διαδικασία εύρεσης της παρατηρήσιμης κανονικής μορφής

| | |
|---------|---|
| Βήμα 1. | Διαπιστώνουμε ότι το δοσμένο ΓΧΑ σύστημα $(\Sigma_1) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, & x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R} \\ y = Cx + Du \end{cases}$ είναι παρατηρήσιμο. |
| Βήμα 2. | Σχηματίζουμε το δυαδικό του $(\Sigma_2) \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}} = A^T \bar{x} + C^T \bar{u}, & \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \bar{y} \in \mathbb{R}, \bar{u} \in \mathbb{R} \\ \bar{y} = B^T \bar{x} + D^T \bar{u} \end{cases}$ το οποίο θα είναι ελέγξιμο. |
| Βήμα 3. | Βρίσκουμε τον πίνακα μετασχηματισμού T που μετατρέπει το (Σ_2) στην ελέγξιμη κανονική μορφή $T = \tilde{M}M^{-1}$ όπου \tilde{M} ο πίνακας ελεγχιμότητας της ελέγξιμης κανονικής μορφής και M ο πίνακας ελεγχιμότητας του (Σ_2) . |
| Βήμα 4. | Σχηματίζουμε το δυαδικό της ελέγξιμης κανονικής μορφής του (Σ_2) . Το αποτέλεσμα είναι η παρατηρήσιμη κανονική μορφή του (Σ_1) . |

Μη-Παρατηρήσιμα ΓΧΑ Συστήματα

Έστω το ΓΧΑ σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$$

του οποίου ο πίνακας παρατηρησιμότητας W έχει βαθμό $n_0 < n$. Επομένως το σύστημα δεν είναι παρατηρήσιμο. Όπως και στην περίπτωση των μη-ελέγξιμων συστημάτων είναι εφικτός ο διαχωρισμός του αρχικού συστήματος σε παρατηρήσιμο και μη-παρατηρήσιμο μέρος. Το θεώρημα που ακολουθεί είναι σχετικό.

Θεώρημα 6.4 (Παράσταση Μη-Παρατηρήσιμων ΓΧΑ Συστημάτων). Αν το ζεύγος (A,C) δεν είναι παρατηρήσιμο, τότε υπάρχει μη-ιδιόμορφος πίνακας μετασχηματισμού των μεταβλητών κατάστασης που να μετατρέπει το αρχικό σύστημα στο

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + Du$$

όπου $A_1 \in \mathbb{R}^{n_o \times n_o}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n_o}$ και το ζεύγος (A_1, C_1) είναι παρατηρήσιμο.

Από τα παραπάνω και κατ' αντιστοιχία με την παράσταση των μη-ελέγξιμων ΓΧΑ συστημάτων, γίνεται φανερό ότι η $z_2(0)$ δε μπορεί να προσδιοριστεί από μετρήσεις εισόδου-εξόδου. Άρα η μεταβλητή κατάστασης z_2 είναι μη-παρατηρήσιμη.

Ο διαχωρισμός ενός μη-παρατηρήσιμου ΓΧΑ συστήματος σε παρατηρήσιμο και μη-παρατηρήσιμο μέρος ακολουθεί τη διαδικασία που συνοψίζεται στον Πίνακα 6.1 με τη διαφορά ότι τώρα το (Σ_1) δε θα είναι παρατηρήσιμο και ως εκ τούτου το (Σ_2) δε θα είναι ελέγξιμο. Επομένως, στο Βήμα 3 ο πίνακας μετασχηματισμού T είναι εκείνος που ικανοποιεί το Θεώρημα 5.2.

6.2 Εκτίμηση Καταστάσεων

Με δεδομένη την παρατηρησιμότητα ενός ΓΧΑ συστήματος είναι εφικτή η σχεδίαση ενός συστήματος εκτίμησης των μεταβλητών του κατάστασης από μετρήσεις εισόδου-εξόδου. Το σύστημα αυτό ονομάζεται *παρατηρητής*. Όπως προκύπτει από το Σχ. 6.1 ο παρατηρητής δέχεται ως εισόδους τα u , y και αποκρίνεται με την εκτίμηση των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος \hat{x} . Στόχος της σχεδίασης του παρατηρητή είναι $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$.

Σχεδίαση Παρατηρητή

Έστω το ΓΧΑ σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$$

για το οποίο έχουμε θεωρήσει για λόγους απλότητας της παρουσίασης ότι $D=0$. Επιλέγουμε ως παρατηρητή το σύστημα:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu$$

Τότε αν ορίσουμε το σφάλμα εκτίμησης \tilde{x} ως

$$\tilde{x} = x - \hat{x}$$

προκύπτει η διαφορική εξίσωση σφάλματος

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= Ax + Bu - A\hat{x} - Bu \\ &= A\tilde{x}\end{aligned}$$

Αν ο A έχει όλες του τις ιδιοτιμές στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, τότε το \tilde{x} θα συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν. Η παραπάνω επιλογή παρατηρητή παρουσιάζει σημαντικά προβλήματα. Καταρχήν απαιτεί ο A να είναι ευσταθής πίνακας διαφορετικά το \tilde{x} μπορεί να ταλαντώνει ή να αποκλίνει. Αλλά ακόμα κι αν ο A είναι πράγματι ευσταθής πίνακας, η ταχύτητα σύγκλισης του \hat{x} στο x πρέπει να είναι τέτοια ώστε η εκτίμηση να «προλάβει» να ταυτιστεί πρακτικά με το x αρκετά πριν το τελευταίο βρεθεί στη μόνιμη κατάστασή του, ώστε το \hat{x} να αποτυπώνει το μεταβατικό φαινόμενο του x .

Για να πετύχουμε την παραπάνω ποιοτική συμπεριφορά τροποποιούμε την επιλογή του παρατηρητή ως εξής:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

Η διαφορά με πριν είναι η προσθήκη του όρου $L(y - C\hat{x})$ που αποτελεί το αναλογικό σφάλμα στη μέτρηση της εξόδου. Εργαζόμενοι όπως και πριν προκύπτει η διαφορική εξίσωση του σφάλματος εκτίμησης

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= Ax - A\hat{x} - LC(x - \hat{x}) \\ &= A\tilde{x} - LC\tilde{x} \\ &= (A - LC)\tilde{x}\end{aligned}$$

Ο πίνακας L σχεδιάζεται έτσι ώστε όλες οι ιδιοτιμές του $A-LC$ να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος και επομένως ότι το σφάλμα \tilde{x} θα συγκλίνει εκθετικά στο μηδέν.

Παρατηρείστε την ομοιότητα των προβλημάτων σχεδίασης γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων και της σχεδίασης παρατηρητή. Στη γραμμική ανάδραση καταστάσεων, η τοποθέτηση των ιδιοτιμών γίνεται επιλέγοντας τον πίνακα των κερδών ανάδρασης K έτσι ώστε ο $A-BK$ να έχει τις επιθυμητές ιδιοτιμές. Στη σχεδίαση του παρατηρητή ο πίνακας L επιλέγεται έτσι ώστε ο $A-LC$ να έχει επιθυμητές ιδιοτιμές. Επειδή όταν αναστρέφουμε ένα πίνακα οι ιδιοτιμές του δε μεταβάλλονται, ισχύουν οι «ισοδυναμίες»

$$A \leftrightarrow A^T, \quad B \leftrightarrow C^T, \quad K \leftrightarrow L^T, \quad M \leftrightarrow W^T$$

με τη βοήθεια των οποίων θα λέμε ότι τα δύο προβλήματα σχεδίασης α) παρατηρητή και β) ανάδρασης καταστάσεων είναι δυαδικά. Θυμηθείτε πως ανάλογη παρατήρηση είχαμε κάνει και για τις έννοιες ελεγχιμότητα-παρατηρησιμότητα.

Αξιοποιώντας τη δυαδικότητα των δύο προβλημάτων σχεδίασης και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.3 περί τοποθέτησης ιδιοτιμών με γραμμική ανάδραση καταστάσεων, καταλήγουμε στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 6.5 (Σχεδίαση Παρατηρητή μέσω Τοποθέτησης Ιδιοτιμών). Έστω το ΓΧΑ σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n.$$

Αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο με πίνακα παρατηρησιμότητας W , τότε το σύστημα

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

είναι ένας παρατηρητής του συστήματος με

$$L = W^{-1} \tilde{W} \begin{bmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ \vdots \\ p_n - a_n \end{bmatrix}$$

όπου

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Η διαφορική εξίσωση του σφάλματος εκτίμησης είναι

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A-LC$ είναι

$$p_d(s) = s^n + p_1 s^{n-1} + \dots + p_{n-1} s + p_n.$$

Από τη μέχρι τώρα ανάλυση προκύπτει ότι ο παρατηρητής περιέχει στην δομή του ένα «αντίγραφο» του συστήματος. Πρόκειται για τον όρο

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu.$$

6.3 Έλεγχος Ανάδρασης Εξόδου με Χρήση Παρατηρητή

Έστω το ΓΧΑ σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}.$$

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο πως αν όλες οι μεταβλητές κατάστασης είναι μετρήσιμες και το σύστημα είναι ελέγξιμο, ο γραμμικός ελεγκτής ανάδρασης καταστάσεων

$$u = -Kx + k_r r$$

μεταφέρει τις ιδιοτιμές σε όποια επιθυμητή θέση, οδηγώντας ταυτόχρονα την έξοδο να συγκλίνει ασυμπτωτικά στην είσοδο αναφοράς $r(t)$.

Αν οι μεταβλητές κατάστασης δεν είναι διαθέσιμες για μέτρηση, είναι λογικό να υποθέσουμε πως ο ελεγκτής

$$u = -K\hat{x} + k_r r$$

όπου \hat{x} η εκτίμηση του άγνωστου διανύσματος κατάστασης x όπως αυτή παράγεται από τον παρατηρητή

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

πετυχαίνει τον ίδιο στόχο ελέγχου. Για να διαπιστώσουμε την αλήθεια της υπόθεσής μας ορίζουμε το σφάλμα εκτίμησης $\tilde{x} = x - \hat{x}$ οπότε προκύπτει η διαφορική εξίσωση σφάλματος

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC)\tilde{x}$$

Επιπλέον,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

Όμως

$$u = -K\hat{x} + k_r r$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - BK\hat{x} + Bk_r r \\ &= Ax - BK(x - \tilde{x}) + Bk_r r \\ &= (A - BK)x + BK\tilde{x} + Bk_r r\end{aligned}$$

Σε μορφή πίνακα το σύστημα κλειστού βρόχου είναι:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bk_r \\ 0 \end{bmatrix} r$$

Επειδή ο πίνακας του συστήματος κλειστού βρόχου είναι μπλόκ-διαγώνιος, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:

$$p(s) = \det(sI - A + BK) \det(sI - A + LC)$$

Παρατηρείστε ότι το $p(s)$ είναι το γινόμενο του χαρακτηριστικού πολυωνύμου όταν ο βρόχος κλείνει μέσω της γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων και του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του συστήματος σφάλματος εκτίμησης. Τα παραπάνω συνοψίζονται στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 6.6 (Τοποθέτηση Ιδιοτιμών μέσω Ανάδρασης Εξόδου). Έστω το ΓΧΑ σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{R}.$$

Ο ελεγκτής

$$u = -K\hat{x} + k_r r$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

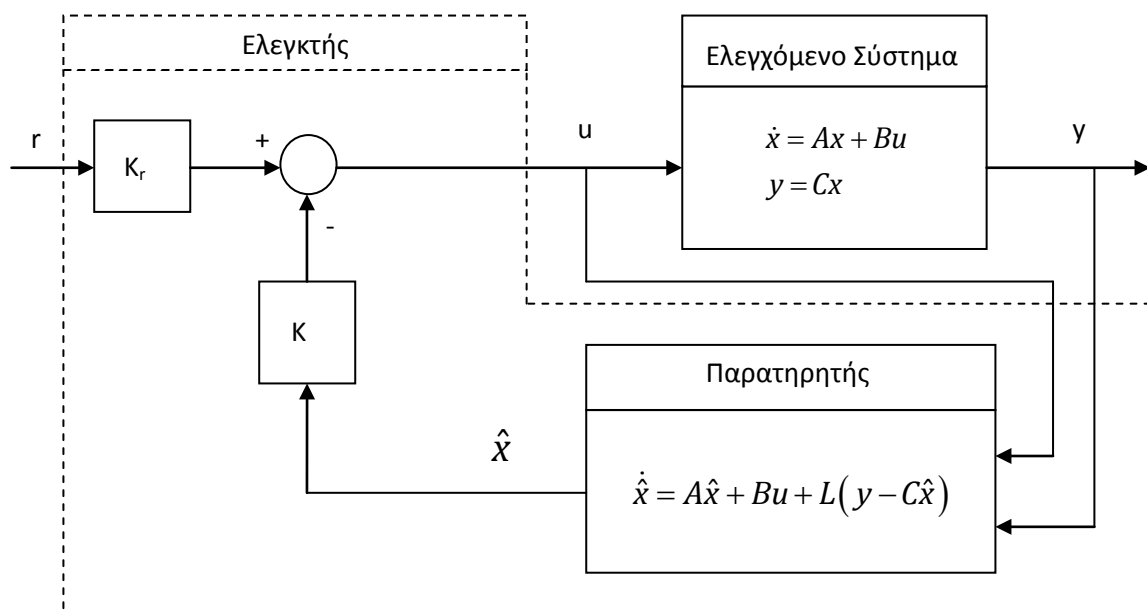
δημιουργεί σύστημα κλειστού βρόχου με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(s) = \det(sI - A + BK) \det(sI - A + LC)$$

Μέσω των K, L μπορούμε να τοποθετήσουμε τις ρίζες του $p(s)$ οπουδήποτε αν το ΓΧΑ σύστημα είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

Το κέρδος K εξαρτάται από τα A, B , ενώ το L από τα A, C . Συνεπώς τα K, L υπολογίζονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται *αρχή του διαχωρισμού*.

Το δομικό διάγραμμα του ελεγκτή ανάδρασης εξόδου δίνεται στο Σχ. 6.2.



Σχ. 6.2. Ο ελεγκτής ανάδρασης εξόδου

Να τονιστεί πως ο ελεγκτής περιλαμβάνει ένα αντίγραφο του δυναμικού μοντέλου του ελεγχόμενου συστήματος (στον παρατηρητή). Η παραπάνω διαπίστωση αποτελεί την *αρχή του εσωτερικού μοντέλου*.

Επίδραση Αβεβαιοτήτων και Εξωτερικών Διαταραχών

Ως γενικός κανόνας επιλογής των κερδών του παρατηρητή είναι οι ιδιοτιμές του $A-LC$ να είναι αρκετά γρηγορότερες (τουλάχιστον 2 έως 6 φορές) σε σχέση με τις ιδιοτιμές του ελεγκτή $(A-BK)$. Κάτι τέτοιο επιτρέπει την ταχεία απόσβεση των σφαλμάτων εκτίμησης των μεταβλητών κατάστασης και συνεπώς την κυριαρχία των ιδιοτιμών του ελεγκτή στην απόκριση του συστήματος κλειστού βρόχου. Η παρουσία δομικών αβεβαιοτήτων καθώς και εξωτερικών διαταραχών περιπλέκει την επιλογή. Ας μελετήσουμε για παράδειγμα την ενότητα της παρατήρησης. Το ελεγχόμενο σύστημα θα περιγράφεται από τις εξισώσεις κατάστασης

$$\dot{x} = Ax + Bu + Gd$$

$$y = Cx + \eta$$

Στις παραπάνω εξισώσεις με d συμβολίζουμε τις εξωτερικές διαταραχές και με η το μετρητικό θόρυβο. Να σημειωθεί πως ο όρος Gd μπορεί να συμπεριλάβει και φραγμένα σφάλματα μοντελοποίησης. Η εξίσωση του παρατηρητή είναι

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

Να τονιστεί πως τα G, d , η είναι άγνωστες ποσότητες και ως εκ τούτου δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη σχεδίαση του παρατηρητή. Ορίζοντας το σφάλμα εκτίμησης ως $\tilde{x} = x - \hat{x}$ προκύπτει μετά από διαφόριση η εξίσωση σφάλματος:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= Ax + Bu + Gd - A\hat{x} - Bu - L(y - C\hat{x}) \\ &= A\tilde{x} + Gd - L\eta - LC\tilde{x} \\ &= (A - LC)\tilde{x} + Gd - L\eta\end{aligned}$$

Παρατηρείστε ότι ο πίνακας των κερδών L πολλαπλασιάζεται με το θόρυβο μέτρησης η αλλά όχι με τις εξωτερικές διαταραχές/σφάλματα μοντελοποίησης. Επομένως, αν τα κέρδη L επιλεγούν μικρά, η επίδραση του θορύβου μέτρησης στο σφάλμα εκτίμησης γίνεται αμελητέα. Αυτή η επιλογή όμως καθιστά τη δυναμική συμπεριφορά του παρατηρητή «αργή», με αποτέλεσμα να μη γίνεται καλή απόσβεση των διαταραχών/σφαλμάτων μοντελοποίησης στο \tilde{x} (το \hat{x} δε θα παρακολουθεί ικανοποιητικά το x). Αν τα κέρδη L επιλεγούν μεγάλα, τότε ναι μεν θα επιτυγχάνεται καλή απόσβεση των διαταραχών/σφαλμάτων μοντελοποίησης στο \tilde{x} αλλά ταυτόχρονα θα ενισχύεται ο θόρυβος μέτρησης και άρα και η συνεισφορά του στο σφάλμα εκτίμησης. Είναι λοιπόν προφανές πως η επιλογή του L απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή, με το μηχανικό να αναζητά το βέλτιστο συμβιβασμό.

6.4 Αποδόμηση Kalman Γραμμικών Συστημάτων

Για να απλοποιήσουμε την παρουσίαση των εννοιών ας θεωρήσουμε ότι ο πίνακας A ενός ΓΧΑ συστήματος έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές. Τότε μπορεί να διαγωνιοποιηθεί, και μετά από πιθανή αναδιάταξη των μεταβλητών κατάστασης, το αρχικό ΓΧΑ σύστημα να γραφεί:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} A_{co} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{\bar{co}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{\bar{co}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{\bar{co}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} B_{co} \\ B_{\bar{co}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_{co} & 0 & C_{\bar{co}} & 0 \end{bmatrix} x + Du\end{aligned}$$

Παρατηρείστε ότι εκείνες οι μεταβλητές κατάστασης που αντιστοιχούν σε $B_{co}, B_{\bar{co}} \neq 0$ είναι ελέγξιμες, ενώ εκείνες που αντιστοιχούν σε $C_{co}, C_{\bar{co}} \neq 0$ είναι παρατηρήσιμες.

Για μηδενικές αρχικές συνθήκες προκύπτει ότι:

$$x_{co}(t) = x_{\bar{co}}(t) = 0, \forall t \geq 0.$$

Επομένως, οι μεταβλητές κατάστασης $x_{\bar{co}}$ δεν εμφανίζονται στην έξοδο y . Ως εκ τούτου, η έξοδος προσδιορίζεται από το σύστημα:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{co} &= A_{co}x_{co} + B_{co}u \\ y &= C_{co}x_{co} + Du\end{aligned}$$

το οποίο είναι ελέγξιμο και παρατηρήσιμο. Είναι λοιπόν προφανές, πως συνεισφορά στην παράσταση εισόδου-εξόδου έχει μόνο η ελέγξιμη και παρατηρήσιμη δυναμική του συστήματος.

Κατά την αποδόμηση Kalman, κάθε ΓΧΑ σύστημα μπορεί να χωριστεί σε τέσσερα υποσυστήματα: στο ελέγξιμο και παρατηρήσιμο Σ_{co} , στο ελέγξιμο και μη-παρατηρήσιμο $\Sigma_{\bar{co}}$, στο μη-ελέγξιμο και παρατηρήσιμο $\Sigma_{\bar{co}}$, και στο μη-ελέγξιμο και μη-παρατηρήσιμο $\Sigma_{\bar{co}}$.

Αν και στη γενικότητά της η αποδόμηση Kalman οδηγεί σε πιο πολύπλοκο πίνακα από τη block-διαγώνια έκφραση που παρουσιάστηκε στην αρχή της ενότητας, η φιλοσοφία της διατηρείται.

Αποδεικνύεται πως η συνάρτηση μεταφοράς του αρχικού συστήματος:

$$C(sI - A)^{-1}B + D$$

ταυτίζεται με τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$C_{co}(sI - A_{co})^{-1}B_{co} + D$$

του ελέγξιμου και παρατηρήσιμου υποσυστήματος.

Ελάχιστη Υλοποίηση

Δοσμένης μιας συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ θα λέμε ότι το μοντέλο των εξισώσεων κατάστασης

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du$$

αποτελεί υλοποίηση της $G(s)$ αν

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Η διάσταση του διανύσματος κατάστασης ονομάζεται *τάξη* της υλοποίησης. Γνωρίζουμε πως μια συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να έχει πολλές υλοποιήσεις διαφορετικών τάξεων.

Ορισμός (Ελάχιστη Υλοποίηση). Η υλοποίηση μιας συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ θα λέγεται ελάχιστη, αν δεν υπάρχει για την $G(s)$ υλοποίηση μικρότερης τάξης.

Η ελάχιστη υλοποίηση συνδέεται με την ελεγχσιμότητα και την παρατηρησιμότητα με το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 6.7 Η υλοποίηση μιας συνάρτησης μεταφοράς είναι ελάχιστη αν και μόνο αν είναι ελέγξιμη και παρατηρήσιμη.

Από τη συζήτηση που προηγήθηκε είναι φανερό πως οι πόλοι μιας συνάρτησης μεταφοράς ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές της ελάχιστης υλοποίησης.



Κεφάλαιο 7

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΕΥΡΩΣΤΙΑΣ

Γεώργιος Ροβιθάκης, Καθηγητής Α.Π.Θ.



Στα προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε ζητήματα που άπτονται της σχεδίασης γραμμικών ελεγκτών για ΓΧΑ συστήματα. Το αποτέλεσμα ήταν να προταθεί ο γραμμικός έλεγχος ανάδρασης καταστάσεων, θεωρώντας ότι το πλήρες διάνυσμα μεταβλητών κατάστασης του ελεγχόμενου συστήματος είναι μετρήσιμο. Για την περίπτωση παραβίασης της παραπάνω παραδοχής, προτάθηκε η εκτίμηση των μεταβλητών κατάστασης μέσω κατάλληλα σχεδιασμένων συστημάτων, τους παρατηρητές, και είδαμε πως συνδυάζονται οι παρατηρητές με το γραμμικό έλεγχο ανάδρασης καταστάσεων προκειμένου να επιτευχθεί ο έλεγχος του συστήματος με ανάδραση εξόδου.

Σε κάθε περίπτωση, η ανάλυση πραγματοποιήθηκε θεωρώντας ΓΧΑ συστήματα απαλλαγμένα από εξωτερικές επιδράσεις (διαταραχές, θόρυβος μετρήσεων), σφάλματα μοντελοποίησης κλπ. που εκτρέπουν το ελεγχόμενο σύστημα από την γραμμική χρονικά αμετάβλητη παράσταση. Σε κάθε τέτοια περίπτωση θα μελετήσουμε την ευρωστία του συστήματος κλειστού βρόχου.

7.1 Εξωτερικές Επιδράσεις

Έστω το ελέγξιμο γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + d(t)), \quad y(t) = C(x(t) + \eta(t)), \quad x, \eta \in \mathbb{R}^n, y, u, d \in \mathbb{R}.$$

Στην παραπάνω περιγραφή, $d(t)$ είναι η είσοδος των εξωτερικών διαταραχών στο σύστημα και $\eta(t)$ ο θόρυβος στη μέτρηση του διανύσματος κατάστασης $x(t)$. Η είσοδος ελέγχου είναι $u(t)$, ενώ με $y(t)$ συμβολίζουμε την έξοδο του συστήματος.

Στόχος μας είναι να σχεδιαστεί ελεγκτής που να σταθεροποιεί το σύστημα και να οδηγεί την έξοδο στο να συγκλίνει ασυμπτωτικά στην είσοδο αναφοράς $r(t)$.

Επίδραση Εξωτερικών Διαταραχών

Για να μελετήσουμε την επίδραση των εξωτερικών διαταραχών $d(t)$ στην απόκριση του συστήματος, θεωρούμε

$$\eta(t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad r(t) = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Η απαίτηση μηδενισμού των η, r δράζεται στην αρχή της επαλληλίας που ισχύει στα γραμμικά συστήματα. Επιπλέον, για το διάνυσμα των εξωτερικών διαταραχών υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$|d(t)| \leq \bar{d}, \quad \forall t \geq 0$$

όπου $\bar{d} > 0$ μία σταθερά. Με τις παραπάνω παραδοχές το σύστημα γίνεται

$$\dot{x} = Ax + B(u + d)$$

$$y = Cx$$

Χρησιμοποιώντας γραμμική ανάδραση καταστάσεων

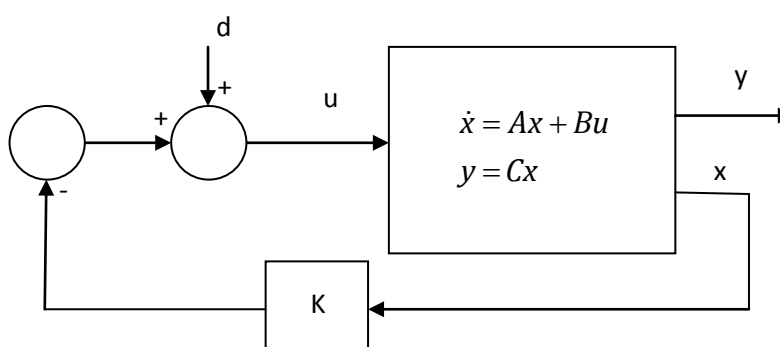
$$u(t) = -Kx$$

προκύπτει το σύστημα κλειστού βρόχου

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bd$$

$$y = Cx$$

Σε μορφή δομικού διαγράμματος το σύστημα κλειστού βρόχου είναι



Τα κέρδη του πίνακα K (κέρδη ανάδρασης) επιλέγονται έτσι ώστε ο A-BK να είναι ευσταθής πίνακας. Για να αναλύσουμε το σύστημα κλειστού βρόχου θεωρούμε την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x > 0, \quad P^T = P > 0.$$

Η χρονική παράγωγος της V κατά μήκος των λύσεων του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \dot{x}^T P x + \frac{1}{2} x^T P \dot{x} \\ &= \frac{1}{2} x^T (A - BK)^T P x + \frac{1}{2} d^T B^T P x + \frac{1}{2} x^T P (A - BK) x + \frac{1}{2} x^T P B d \\ &= \frac{1}{2} x^T \left[(A - BK)^T P + P (A - BK) \right] x + x^T P B d. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε πως επειδή ο A-BK είναι ευσταθής πίνακας, υπάρχει πάντα συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας P έτσι ώστε:

$$(A - BK)^T P + P (A - BK) = -Q, \quad Q^T = Q > 0.$$

Οπότε,

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} x^T Q x + x^T P B d.$$

Για κάθε συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα Δ ισχύει:

$$\lambda_{\min}(\Delta) |x|^2 \leq x^T \Delta x \leq \lambda_{\max}(\Delta) |x|^2$$

όπου $\lambda_{\min}(\Delta)$, $\lambda_{\max}(\Delta)$ η ελάχιστη και η μέγιστη ιδιοτιμή του Δ αντίστοιχα. Άρα

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2} |x|^2 + |x| |P| |B| |d| \\ &\leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2} |x|^2 + |x| |P| |B| \bar{d} \\ &= |x| \left[-\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2} |x| + |P| |B| \bar{d} \right]. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\dot{V} < 0$ αν

$$|x| > \frac{2|P||B|\bar{d}}{\lambda_{\min}(Q)}$$

Επομένως, το $|x(t)|$ είναι ομοιόμορφα τελικώς φραγμένο ως προς το σύνολο

$$X_d \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \frac{2|P||B|\bar{d}}{\lambda_{\min}(Q)} \right\}$$

Το ίδιο ισχύει και για το $|y(t)|$, αλλά ως προς το σύνολο

$$Y_d \triangleq \left\{ y \in \mathbb{R} : |y| \leq \frac{2|C||P||B|\bar{d}}{\lambda_{\min}(Q)} \right\}$$

Παρατήρηση: Για δεδομένο άνω φράγμα επιτρεπτών εξωτερικών διαταραχών (\bar{d}), το εύρος της ζώνης εντός της οποίας θα βρίσκεται, μετά από την πάροδο πεπερασμένου χρόνου, τόσο το $|x(t)|$ όσο και το $|y(t)|$ ελέγχεται από την ελάχιστη τιμή του πίνακα Q και από τα κέρδη ανάδρασης K. Όσο μεγαλώνει το \bar{d} τόσο πρέπει να μεγαλώνει το μέτρο της ελάχιστης ιδιοτιμής του Q και να αυξάνεται το K, γεγονός που κατά κανόνα οδηγεί σε αύξηση της προσπάθειας ελέγχου γενικότερα.

Επίδραση Θορύβου Μετρήσεων

Για να μελετήσουμε την επίδραση του θορύβου μετρήσεων $\eta(t)$ στην απόκριση του συστήματος, θεωρούμε

$$d(t)=r(t)=0, \quad \forall t \geq 0.$$

Όπως και στην περίπτωση των εξωτερικών διαταραχών, η απαίτηση μηδενισμού των d, r εδράζεται στην αρχή της επαλληλίας που ισχύει στα γραμμικά συστήματα. Το ελεγχόμενο σύστημα είναι:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = C(x + \eta)$$

Όμως τώρα επειδή το διάνυσμα κατάστασης μετριέται με θόρυβο, η γραμμική ανάδραση καταστάσεων γίνεται:

$$u = -K(x + \eta)$$

με τη χρήση της οποίας προκύπτει το σύστημα κλειστού βρόχου

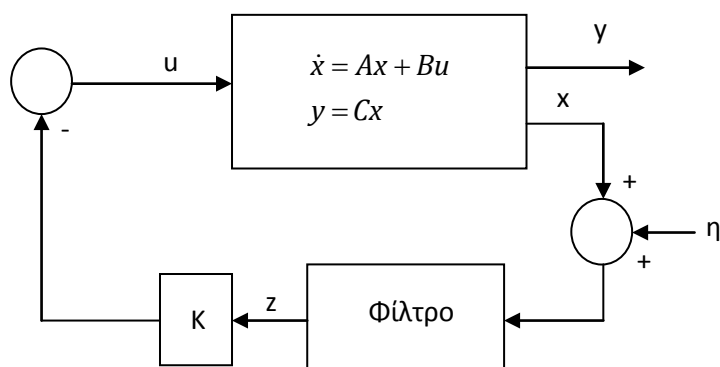
$$\dot{x} = (A - BK)x - BK\eta.$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα για την ανάλυση του παραπάνω συστήματος μ' εκείνα που ακολουθήθηκαν στην περίπτωση των εξωτερικών διαταραχών, αποδεικνύεται ότι τα $|x(t)|, |y(t)|$ είναι ομοιόμορφα τελικώς φραγμένα ως προς τα σύνολα:

$$X_{\eta} \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq \frac{2\|P\|\|B\|\|K\|\bar{\eta}}{\lambda_{\min}(Q)} \right\}$$
$$Y_{\eta} \triangleq \left\{ y \in \mathbb{R} : |y| \leq \frac{2\|C\|\|P\|\|B\|\|K\|\bar{\eta}}{\lambda_{\min}(Q)} + \|C\|\bar{\eta} \right\}$$

όπου $\bar{\eta} > 0$ το άνω φράγμα του επιτρεπτού θορύβου μέτρησης του διανύσματος κατάστασης ($|\eta(t)| \leq \bar{\eta}, \forall t \geq 0$).

Εξαιτίας της παρουσίας του $|K|$ στον αριθμητή, το μέγεθος των συνόλων X_{η}, Y_{η} δεν μπορεί πλέον να γίνει οσοδήποτε μικρό επιθυμούμε μέσω του K . Λύση στο πρόβλημα της συρρίκνωσης των X_{η}, Y_{η} είναι δυνατό να δοθεί αν εκμεταλλευτούμε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του θορύβου μέτρησης. Πράγματι, αν η συχνότητες του θορύβου $\eta(t)$ είναι υψηλότερες από εκείνες του $x(t)$, που τυπικά ισχύει σε εφαρμογές αυτομάτου ελέγχου, τότε χρησιμοποιώντας κατάλληλα σχεδιασμένα φίλτρα μπορούμε να εξασθενίσουμε σημαντικά την επίδρασή του. Το προτεινόμενο σύστημα κλειστού βρόχου σε μορφή δομικού διαγράμματος είναι:



Αν το φίλτρο σχεδιαστεί σωστά θα ισχύει $z \approx x$, οπότε και η ανάλυση του συστήματος κλειστού βρόχου εντάσσεται με καλή προσέγγιση στην ιδανική περίπτωση ($\eta=0$).

Το πρόβλημα με τη χρήση του φίλτρου είναι ότι εισάγει καθυστέρηση στην ανάδραση του πραγματικού διανύσματος κατάστασης, με τον έλεγχο γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων να δίνεται τώρα από:

$$u(t) = -Kx(t - \tau)$$

όπου $\tau > 0$ η χρονική καθυστέρηση που εισάγεται από το φίλτρο. Κλείνοντας το βρόχο προκύπτει:

$$\dot{x} = Ax - BKx(t - \tau).$$

Από το ανάπτυγμα Taylor έχουμε:

$$x(t - \tau) = x(t) - \tau \dot{x}(t) + R(\tau)$$

όπου $R(\tau)$ οι όροι ανώτερης τάξης. Για μικρές χρονικές καθυστερήσεις ισχύει $R(\tau) \equiv 0$ και επομένως χωρίς ιδιαίτερη βλάβη της γενικότητας γράφουμε

$$x(t - \tau) = x(t) - \tau \dot{x}(t)$$

Αντικαθιστώντας, το σύστημα κλειστού βρόχου γράφεται:

$$\dot{x} = (A - BK)x + \tau BK\dot{x}.$$

Άρα

$$(I - \tau BK)\dot{x} = (A - BK)x$$

ή

$$\dot{x} = (I - \tau BK)^{-1}(A - BK)x$$

Αν λοιπόν ο $I - \tau BK$ αντιστρέφεται και ο $(I - \tau BK)^{-1}(A - BK)$ είναι ευσταθής πίνακας, τότε η ανάλυση από το σημείο αυτό και μετά ταυτίζεται μ' εκείνη της ιδανικής περίπτωσης.

7.2 Επίδραση Σφαλμάτων Μοντελοποίησης

Έστω ότι το ελέγξιμο ΓΧΑ σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$$

που μελετήσαμε στις προηγούμενες ενότητες δεν εκφράζει με απόλυτη ακρίβεια την πραγματικότητα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχουν άγνωστα αλλά συνεχή μη γραμμικά διανύσματα $f(x)$, $g(x)$ τέτοια ώστε το μοντέλο του πραγματικού συστήματος να είναι:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x) + g(x)u$$

Για τα $f(x)$, $g(x)$ υποθέτουμε ότι ικανοποιούν τις παρακάτω ανισότητες:

$$|f(x)| \leq c_1 |x|, \quad |g(x)| \leq c_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Έστω επίσης ότι $A < 0$. Αν η τελευταία παραδοχή δεν ισχύει τότε επειδή το (A, B) είναι ελέγξιμο, μπορούμε πάντα να χρησιμοποιήσουμε πάντα τον ελεγκτή

$$u = -Kx + v$$

όπου τα κέρδη ανάδρασης επιλέγονται έτσι ώστε $A - BK < 0$. Η σχεδίαση που ακολουθεί αναφέρεται πλέον στη νέα είσοδο ελέγχου v .

Αν λοιπόν ισχύουν όλες οι παραπάνω παραδοχές, επιλέγουμε τον ελεγκτή

$$u = v = -\gamma B^T x, \quad \gamma > 0$$

με τη βοήθεια του οποίου κλείνουμε το βρόχο. Για να μελετήσουμε την ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου θεωρούμε την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T x > 0.$$

Η παράγωγος της V κατά μήκος των λύσεων του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T \dot{x} \\ &= x^T [Ax + Bu + f(x) + g(x)u] \\ &= x^T Ax + x^T Bu + x^T f(x) + x^T g(x)u \end{aligned}$$

Επειδή $A < 0$ ισχύει

$$x^T Ax \leq -\lambda_{\min}(A) |x|^2$$

όπου $\lambda_{\min}(A)$ η ελάχιστη ιδιοτιμή του A . Αντικαθιστώντας την έκφραση του ελεγκτή προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\lambda_{\min}(A) |x|^2 - \gamma x^T B B^T x + |x| |f(x)| + \gamma |x| |g(x)| |x^T B| \\ &= -\lambda_{\min}(A) |x|^2 - \gamma |x^T B|^2 + c_1 |x|^2 + \gamma c_2 |x| |x^T B| \\ &= [-\lambda_{\min}(A) + c_1] |x|^2 - \gamma |x^T B|^2 + \gamma c_2 |x| |x^T B|. \end{aligned}$$

Άρα

$$\dot{V} \leq \begin{bmatrix} |x| & |x^T B| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 - \lambda_{\min}(A) & \frac{\gamma c_2}{2} \\ \frac{\gamma c_2}{2} & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x| \\ |x^T B| \end{bmatrix}.$$

Για να είναι αρνητικά ορισμένη η \dot{V} πρέπει

$$\begin{bmatrix} c_1 - \lambda_{\min}(A) & \frac{\gamma c_2}{2} \\ \frac{\gamma c_2}{2} & -\gamma \end{bmatrix} < 0$$

το οποίο ισχύει όταν

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_{\min}(A) &> c_1 \\ \gamma &> \frac{4(\lambda_{\min}(A) - c_1)}{c_2^2} \end{aligned}}$$

Αν ισχύουν οι παραπάνω το σύστημα κλειστού βρόχου θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές παρά την ύπαρξη άγνωστων σφαλμάτων μοντελοποίησης.

Σχόλια

Όπως φάνηκε ξεκάθαρα από την ανάλυση που παρατέθηκε στην Ενότητα 7.1, η επιλογή των κερδών της γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων σχετίζεται με την επιβολή επιθυμητής δυναμικής συμπεριφοράς στο σύστημα κλειστού βρόχου, διότι επηρεάζουν άμεσα τις ιδιοτιμές του συστήματος κλειστού βρόχου. Επιπλέον, στα κέρδη της γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων οφείλεται η εξασθένιση εξωτερικών, του ελεγχόμενου συστήματος, επιδράσεων όπως εξωτερικές διαταραχές, χρονικές καθυστερήσεις στη μέτρηση των καταστάσεων, αλλά και σφαλμάτων μοντελοποίησης.

Η επίτευξη της ασυμπτωτικής σύγκλισης της εξόδου $y(t)$ σε είσοδο αναφοράς $r(t)$ σταθερή για κάθε t , συντελείται με την προσθήκη ενός κατάλληλα επιλεγμένου κέρδους k_r , δημιουργώντας τον ελεγκτή

$$u = -Kx + k_r r$$

Ο παράγοντας $k_r r$ ονομάζεται *προσοτροφοδότηση* (feedforward). Το παραπάνω σχήμα ελέγχου μπορεί να ειπωθεί και ως ένας ελεγκτής 2-βαθμών ελευθερίας (2-DOF), διότι ο μεν παράγοντας της γραμμικής ανάδρασης καταστάσεων είναι υπεύθυνος για την επίτευξη της ασυμπτωτικής ευστάθειας και την εγκαθίδρυση της ευρωστίας, ο δε παράγοντας της προσοτροφοδότησης για την ασυμπτωτική σύγκλιση της εξόδου στην είσοδο αναφοράς, με την παραπάνω σχεδίαση να πραγματοποιείται ανεξάρτητα η μία από την άλλη.

7.3 Διακοπτικός Έλεγχος Παρακολούθησης Μοντέλου Αναφοράς

Στις αναλύσεις που παρουσιάσαμε έως τώρα, η είσοδος αναφοράς ήταν σταθερή. Στην παρούσα ενότητα θα σχεδιάσουμε ελεγκτές για ελέγξιμο ΓΧΑ συστήματα με στόχο το διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης να συγκλίνει ασυμπτωτικά σ' ένα επιθυμητό διάνυσμα κατάστασης. Το τελευταίο υποθέτουμε ότι παράγεται από ένα εξωτερικό σύστημα (μοντέλο αναφοράς) το οποίο διεγείρεται από κατάλληλα επιλεγμένη είσοδο $r(t)$.

Έστω λοιπόν το ελέγξιμο ΓΧΑ σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$$

και το μοντέλο αναφοράς

$$\dot{x}_d = A_d x_d + B_d r, \quad x_d \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών του A_d (σχεδιαστική επιλογή) είναι αρνητικό και ότι η είσοδος $r(t)$ είναι φραγμένη για κάθε t .

Σχηματίζουμε το σήμα σφάλματος

$$e(t) \triangleq x(t) - x_d(t).$$

Στόχος μας είναι

$$e(t) \rightarrow 0$$

Παραγωγίζοντας ως προς χρόνο το e , προκύπτει η διαφορική εξίσωση σφάλματος

$$\dot{e} = Ax + Bu - A_d x_d - B_d r.$$

Επιλέγουμε τον ελεγκτή

$$u = -Kx + u_0$$

όπου K ο πίνακας των κερδών ανάδρασης των καταστάσεων και u_0 μια νέα είσοδος ελέγχου που θα σχεδιαστεί στην πορεία. Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\dot{e} = (A - BK)x + Bu_0 - A_d x_d - B_d r.$$

Επιλέγουμε τα κέρδη K έτσι ώστε $A_d = A - BK$, οπότε

$$\dot{e} = A_d e + Bu_0 - B_d r.$$

Επιλέγουμε επίσης $B_d = B$ και η διαφορική εξίσωση σφάλματος γίνεται

$$\dot{e} = A_d e + B(u_0 - r).$$

Για να προχωρήσουμε στη σχεδίαση, ορίζουμε την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov

$$V(e) = \frac{1}{2} e^T e > 0.$$

Παραγωγίζοντας ως προς χρόνο κατά μήκος των λύσεων του συστήματος σφάλματος, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e^T \dot{e} \\ &= e^T A_d e + e^T B(u_0 - r).\end{aligned}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1 ($e^T B = 0$). Τότε αδιάφορα από την επιλογή του u_0 (άρα και για $u_0 = 0$) έχουμε:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e^T A_d e \\ &< 0.\end{aligned}$$

Περίπτωση 2 ($e^T B \neq 0$). Τότε επιλέγοντας

$$u_0 = -\frac{B^T e}{|B^T e|} |r|$$

προκύπτει

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e^T A_d e - \frac{|B^T e|^2 |r|}{|B^T e|} - e^T B r \\ &\leq e^T A_d e - |B^T e| |r| + |B^T e| |r| \\ &= e^T A_d e \\ &< 0.\end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση εκμεταλλευόμενοι το θεώρημα ευστάθειας του Lyapunov συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 0.$$

Η ανάλυση που προηγήθηκε συνοψίζεται στο θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 7.1 Έστω το ελέγξιμο ΓΧΑ σύστημα

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}$$

και το μοντέλο αναφοράς

$$\dot{x}_d = A_d x_d + B_d r, \quad x_d \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$$

όπου $r(t)$ φραγμένο για κάθε $t \geq 0$, $A_d < 0$ και $B_d = B$. Ο ελεγκτής

$$\begin{aligned}u &= -Kx + u_0 \\ u_0 &= \begin{cases} -\frac{B^T e}{|B^T e|} |r|, & \alpha \nu |B^T e| \neq 0 \\ 0, & \alpha \nu |B^T e| = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

με τα κέρδη K να επιλέγονται έτσι ώστε

$$A - BK = A_d$$

εγγυάται ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_d(t).$$

Σχόλιο: Ο προτεινόμενος στο Θεώρημα 7.1 ελεγκτής είναι ασυνεχής, γεγονός που εισάγει προβλήματα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης. Το πρόβλημα μπορεί να ξεπεραστεί αν στην έκφραση του u_0 η συνθήκη μετάβασης από τη μία έκφραση του ελεγκτή στην άλλη ($|B^T e| = 0$) μετατραπεί σε ζώνη όπως:

$$u_0 = \begin{cases} -\frac{B^T e}{|B^T e|} |r|, & \alpha \nu |B^T e| > \delta \\ \rho(e, r), & \alpha \nu |B^T e| \leq \delta \end{cases}$$

με κατάλληλα επιλεγμένη συνάρτηση $\rho(e, r)$. Στην περίπτωση αυτή όμως δεν μπορούμε να εγγυηθούμε πλέον ότι $e(t) \rightarrow 0$. Θα εγγυηθούμε όμως ότι το $|e(t)|$ είναι ομοιόμορφα τελικώς φραγμένο ως προς σύνολο το εύρος του οποίου εξαρτάται από το δ . Όσο μικρότερο το δ τόσο μικρότερο και το μέγεθος της περιοχής στην οποία τελικώς θα βρεθεί το $|e|$.