ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

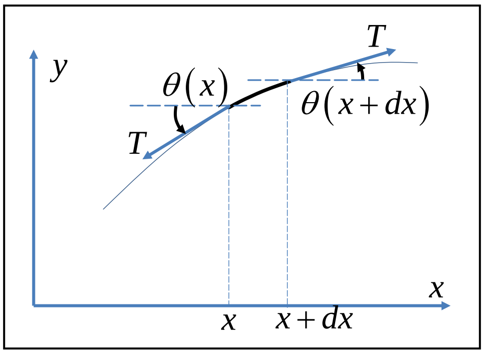
Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος
«Κυματική και Κβαντική Φυσική»
της Σχολής ΗΜΜΥ του ΕΜΠ
Chapter03-1

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα
2020

Παραγωγή της κυματικής εξίσωσης για 1-διάστατο συνεχές ελαστικό μέσο

Θεωρούμε ένα ιδανικό μονοδιάστατο συνεχές ελαστικό μέσο, π.χ., μία ιδανική χορδή αμελητέας διατομής σε σχέση με το μήκος της, η οποία διαθέτει ομοιογενή γραμμική πυκνότητα μάζας, $\rho \equiv (dm/dx) = \sigma\tau\alpha\theta.$, και η οποία, όταν δεν τείνεται με μία εξωτερική τάση, μπορεί να πάρει οποιοδήποτε σχήμα (δηλ., δεν διαθέτει εσωτερική τάση). Τείνουμε αυτή τη χορδή με ίσες και αντίθετες τάσεις T και στα δύο άκρα της, οπότε αποκτά ευθύγραμμο σχήμα, και ορίζουμε ως άξονα-x τον άξονα κατά τον οποίο εκτείνεται η χορδή. Ενώ η χορδή βρίσκεται υπό τάση, προκαλούμε, τη χρονική στιγμή $t=0$, μία αρχική διαταραχή της χορδής, κατά τον άξονα-y $(y \perp x)$, (π.χ., στιγμιαία παραμόρφωση $y = f(x)$, ή στιγμιαία κατανομή ταχυτήτων $\dot{y} = \upsilon(x)$, ή συνδυασμό και των δύο). Το αποτέλεσμα αυτής της αρχικής διαταραχής είναι ότι, για $t > 0$, όλα τα σημεία-x της χορδής κινούνται έτσι ώστε η απομάκρυνση από την κατάσταση ισορροπίας να είναι συνάρτηση της θέσης και του χρόνου, $y = y(x,t)$, όπου τα x και t είναι ανεξάρτητες μεταβλητές του προβλήματος. Ο στόχος είναι να βρεθεί μία κατάλληλη διαφορική εξίσωση, η οποία να διέπει την κίνηση αυτής της χορδής, έτσι ώστε η λύση της να είναι η $y = y(x,t)$, όπου οι μεταβλητές (x,t) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, με την έννοια ότι η απομάκρυνση $y = y(x,t)$ της χορδής από την θέση ισορροπίας της μπορεί να αναζητηθεί για οποιαδήποτε θέση x και για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t,



Η παραγωγή αυτής της διαφορικής εξίσωσης θα γίνει με βάση τον 2^{ο} Νόμο του Νεύτωνα για την επιτάχυνση ενός διαφορικού τμήματος αυτής της χορδής που βρίσκεται μεταξύ των σημείων x και x+dx και έχει μάζα $dm = \rho dx$. Η ανάλυση που ακολουθεί στηρίζεται στην προσέγγιση των μικρών γωνιών, δηλ., στην παραδοχή ότι η διαταραχή της χορδής είναι τέτοια ώστε η γωνία που σχηματίζει οποιοδήποτε διαφορικό τμήμα της χορδής με τον άξονα-x είναι αρκετά μικρή, ώστε να ισχύει με καλή προσέγγιση ότι $\theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta = (dy/dx)$, όπου επίσης η θ είναι συνάρτηση της θέσης και του χρόνου. Η μεταβολή της θ με τη θέση είναι αυτή που εξασφαλίζει τη μεταβλητή καμπυλότητα της χορδής και έχει ως αποτέλεσμα, παρά την διατήρηση του μέτρου της τάσης σε όλη την έκταση της χορδής, να υπάρχει στα άκρα ενός διαφορικού τμήματος dm, γενικά, μη-μηδενική προβολή τάσης κατά μήκος του άξονα-y η οποία και αποτελεί την αντίστοιχη επιταχύνουσα δύναμη, δηλ.,

$$(dm)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_{y,o\lambda}$$

Η σχέση αυτή, στο πλαίσιο της προσέγγισης των μικρών γωνιών, μπορεί να γραφεί

$$(\rho dx)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}\right] = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx \Rightarrow \boxed{\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \qquad (1)$$

Η κυματική εξίσωση που περιγράφει η σχέση (1) παρουσιάζεται και με τη μορφή $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, όπου το μέγεθος $c = \sqrt{T/\rho}$ έχει διαστάσεις ταχύτητας, και θα αποδειχθεί στη συνέχεια ότι είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος κατά μήκος της χορδής.

Λύσεις της κυματικής εξίσωσης (σε 1-διάσταση)

(α) Λύσεις με τη μορφή στάσιμου κύματος (Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης)

Με βάση την εμπειρία απο τους συζευγμένους ταλαντωτές, θα μπορούσαμε να αναζητήσουμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης που είναι συνυφασμένη με αρμονική κίνηση όλων των σημείων της χορδής με την ίδια συχνότητα ω, αλλά με διαφορετικό πλάτος το οποίο εξαρτάται από τη θέση $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t + \varphi)$.
[Αυτή η υπόθεση εργασίας ισοδυναμεί με επίλυση της κυματικής εξίσωσης με τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών $y(x,t) = X(x)T(t)$].

Αντικαθιστώντας την $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$ στην κυματική εξίσωση, προκύπτει:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow -\frac{\omega^2}{c^2} f(x)\cos(\omega t + \varphi) = f''(x)\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \boxed{f'' + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0}$$

Άρα η συνάρτηση πλάτους $f(x)$ έχει επίσης αρμονική συμπεριφορά, ως προς *x*, με "χωρική συχνοτητα" $k = \omega / c$, δηλ., $f(x) = \mathrm{A}\cos(kx + \theta)$. Άρα, οι **Κανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης** μπορεί να είναι επίσης λύσεις της κυματικής εξίσωσης, με τη μορφή **στάσιμων κυμάτων**: $\boxed{y(x,t) = \mathrm{A}\cos(kx + \theta)\cos(\omega t + \varphi)}$

Όπως θα δούμε σε συγκεκριμμένα παραδείγματα, οι τιμές των (k, θ) θα προσδιοριστούν από τις συνοριακές συνθήκες που επικρατούν στα άκρα («σύνορα») του ελαστικού μέσου, ενώ οι σταθερές (A, φ) μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες (την μετατόπιση και την ταχύτητα όλων των σημείων του ελαστικού μέσου σε μία χρονική στιγμή (π.χ., t=0). Οι δε τιμές της συχνότητας συνδέονται με τα, ως ανωτέρω, υπολογιζόμενα *k*, μέσω της σχέσης $k = \omega / c$.

α) Λύσεις με τη μορφή οδεύοντος κύματος

Από τη συνήθη μορφή της εξίσωσης κύματος : $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, μπορούμε να αναζητήσουμε λύσεις $y = y(x,t)$, μετασχηματίζοντας την εξίσωση κύματος ως εξής:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial (ct)^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial (\pm ct)^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Από την τελευταία έκφραση προκύπτει ότι, στην $y = y(x,t)$, οι μεταβλητές $(x, +ct)$ ή/και $(x, -ct)$ πρέπει να παρουσιάζονται με "ισοδύναμο" τρόπο. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μία $y(x,t) = f_1(x + ct)$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης, όπως μπορεί πράγματι να αποδειχθεί:

$$y(x,t) = f_1(x + ct) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = f' \frac{\partial (x + ct)}{\partial x} = f' \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f'' \frac{\partial (x + ct)}{\partial x} = f''} \qquad (11α)$$

$$y(x,t) = f_1(x + ct) \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = f' \frac{\partial (x + ct)}{\partial t} = cf' \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = cf'' \frac{\partial (x + ct)}{\partial t} = c^2 f''} \qquad (11β)$$

Από το συνδυασμό (11α)+c^2×(11b) προκύπτει $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}$.

Όμοια για την $y(x,t)=f_2(x-ct)$, προκύπτει $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}$

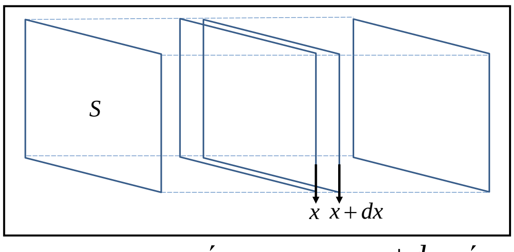
Επειδή η διαφορική εξίσωση κύματος είναι γραμμική, προκύπτει ότι και κάθε γραμμικός συνδυασμός των δύο αυτών λυσεων: $\boxed{y(x,t)=C_1 f_1(x+ct)+C_2 f_2(x-ct)}$, είναι λύση της κυματικής εξίσωσης και, μάλιστα, έχει το σωστό αριθμό “σταθερών ολοκλήρωσης”, δηλ., δύο σταθερές ολοκλήρωσης, (C_1, C_2), αφού είναι 2^{ης} τάξης διαφορική εξίσωση. Όπως προκύπτει από το συνδυασμό των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών (x,t) στις λύσεις, $\left[f_1(x+ct), f_2(x-ct)\right]$, οποιαδήποτε και αν είναι η αναλυτική μορφή των $\left[f_1(\eta), f_2(\xi)\right]$, η $f_2(x-ct)$ παρουσιάζει μία «κυματομορφή» που **οδεύει προς τα δεξιά**, με ταχύτητα c, ενώ η $f_1(x+ct)$ παρουσιάζει μία «κυματομορφή» που **οδεύει προς τα αριστερά**, με ταχύτητα c. Όταν η κυματομορφή είναι αρμονική, συνήθως αποδίδεται από τις συναρτήσεις $f_1=A\cos(kx\pm\omega t)$, ή $f_1=A\sin(kx\pm\omega t)$, ή με τη μιγαδική έκφραση $f_1=Ae^{i(kx\pm\omega t)}$, όπου $k=2\pi/\lambda$: ο κυματαριθμός, $\omega=2\pi f$: η κυκλική συχνότητα, (f,λ): συχνότητα και μήκος κύματος, και $c=f\lambda=\omega/k$.

Σχόλια:

(1) Οι λύσεις των στάσιμων κυμάτων και οι λύσεις των οδευόντων κυμάτων είναι μαθηματικά ισοδύναμες, αφού οι μεν μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικός συνδυασμός των δε, και αντίστροφα.

(2) Η κάθε μορφή των λύσεων «ταιριάζει» σε διαφορετικές οικογένειες προβλημάτων, με την έννοια ότι προσφέρει λογιστική ευκολία, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, τα μεν οδεύοντα κύματα είναι προσφορότερα για την ανάλυση φαινομένων ανάκλασης-διέλευσης σε ασυνέχειες οι οποίες υπάρχουν σε ελαστικά μέσα άπειρης έκτασης, τα δε στάσιμα κύματα προσφέρουν λογιστική ευκολία για την ανάλυση της κίνησης ελαστικών μέσων πεπερασμένης έκτασης (που ενδεχομένως, παρουσιάζουν και ασυνέχειες).

Παρόμοιου τύπου διαφορικές εξισώσεις κύματος μπορούν να παραχθούν για άλλα συνεχή 1-διάστατα υλικά συστήματα, για τα οποία όχι μόνο οι ιδιότητες αδράνειας (πυκνότητα μάζας) αλλά και οι ιδιότητες ελαστικής συμπεριφοράς, (που, στην περίπτωση της χορδής, επιβάλλονται μέσω εξωτερικής τάσης T), αποτελούν εσωτερικές ιδιότητες του υλικού συστήματος. Ως τέτοια παραδείγματα μπορούμε να αναλύσουμε τις διαμήκεις ταλαντώσεις σε μία λεπτή μεταλλική ράβδο, ή σε μία στήλη αέρος



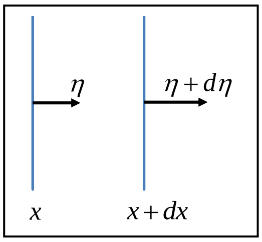
<u>Διαμήκη κύματα σε στήλη αέρος</u>. Ας θεωρήσουμε μία στήλη αέρος, διατομής *S*, ο οποίος έχει, υπό κανονικές συνθήκες, πίεση P_0 και πυκνότητα ρ_0. Θα μελετήσουμε τη διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση ενός διαφορικού τμήματος αυτής της στήλης,, μεταξύ των συντεταγμένων *x* και *x*+*dx*, όταν διαταράσσεται η ομοιογένεια της πίεσης στην περιοχή του. Συμβολίζουμε με V_0 τον όγκο *Sdx* που βρίσκεται μεταξύ των συντεταγμένων *x* και *x+dx*, σε κατάσταση ισορροπίας. Όταν διαταράξουμε την ομοιογένεια της πίεσης, (κατά μήκος της διεύθυνσης-*x*, μόνο), τότε τις νέες τιμές πίεσης και πυκνότητας, σε κάθε σημείο x, συμβολίζουμε ως εξής:

$$P(x) = P_0 + p(x) \Rightarrow \Delta P \equiv P - P_0 = p, \qquad \rho(x) = \rho_0 + \rho_d(x)$$

Οι νέες τιμές πίεσης και πυκνότητας αντιστοιχούν σε έναν όγκο $V = V_0 + \upsilon$, για το υλικό που βρισκόταν αρχικά σε κανονικές συνθήκες, και ορίζουμε $\Delta V \equiv V - V_0 = \upsilon = S\, d\eta$

Λήμμα: Από διατήρηση μάζας: $\rho_0 V_0 = \rho V = (\rho_0 + \rho_d)(V_0 + \upsilon) = \rho_0 V_0 + \rho_0 \upsilon_0 + \rho_d V_0 + \rho_d \upsilon$. Αλλά, $\rho_d \upsilon \approx 0$, ως διαφορικό δεύτερης τάξης, οπότε, η προηγούμενη σχέση δίνει

$$0 = \rho_0 \upsilon_0 + \rho_d V_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_0}{\rho_d} = -\frac{V_0}{\upsilon} \Rightarrow \boxed{\frac{\rho_0}{\rho_d} = -\frac{V_0}{\Delta V}}$$, όπου $V_0 = Sdx, \quad \kappa\alpha\iota \quad \Delta V = Sd\eta$.



Υποθέτουμε ότι, κατά την διαταραχή της ομοιογένειας, η διατομή με αρχική συντεταγμένη *x* υφίσταται μετατόπιση *η*=*η*(*x*,*t*), ενώ η διατομή με αρχική συντεταγμένη *x+dx* υφίσταται μετατόπιση *η+dη*, (όπως στο διπλανό σχήμα). Η κίνηση της μάζας του αέρα, που περιέχεται μεταξύ των δύο διατομών, διέπεται από την εξίσωση του Νεύτωνα,

$$(\rho_0 S dx)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = F_x, \qquad (1)$$

όπου η επιταχύνουσα δύναμη κάθετα στη διατομή προκύπτει από τη διαφορά πιέσεων στις δύο διατομές, [η πίεση θεωρείται ως ασκούμενη από το αέριο που περιβάλλει τον διαφορικό όγκο *Sdx* προς το εσωτερικό αυτού του όγκου], οπότε:

$$F_x(x,t) = S\left[P(x,t) - P(x+dx,t)\right] = S\left[P(x,t) - P(x,t) - \frac{\partial P}{\partial x}dx\right] = -S\frac{\partial P}{\partial x}dx$$

Αν, $P(x,t) = P_0 + p(x,t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}$. Άρα, $F_x(x,t) = -S\frac{\partial p}{\partial x}dx \qquad (2)$

Από (1) και (2),

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (3)$$

Για τον υπολογισμό της παραγώγου του *p*, και της σχέσης της με τις φυσικές ιδιότητες του ελαστικού υλικού, (στην περίπτωσή μας, του αέρα), θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του *μέτρου ελαστικότητας όγκου*[1] (*B*: *Bulk modulus*) του αέρα, που ορίζεται ως εξής: $B \equiv -\frac{\Delta P}{\Delta V / V}$, όπου ΔP είναι η διαφορά πίεσης η οποία προκαλεί μεταβολή όγκου Δ*V* σε κάποιον αρχικό όγκο *V*, [το αρνητικό πρόσημο αποδίδει θετική τιμή στο *B*, δεδομένου ότι για Δ*P*>0 (συμπίεση), έχουμε Δ*V*/*V*<0 (ελάττωση όγκου)]. Άρα, το μέτρο ελαστικότητας όγκου έχει μονάδες πίεσης και είναι τόσο μεγαλύτερο όσο πιο δύσκολα συμπιέζεται το αντίστοιχο υλικό. Συναρτήσει των μεγεθών που ορίσαμε στο πρόβλημα που μελετάμε, η σχέση γράφεται ως εξής

$$B \equiv -\frac{\Delta P}{\Delta V / V} = \frac{-p}{\upsilon / V_0} \quad \Rightarrow \quad p = -B\frac{\upsilon}{V_0} = -B\frac{Sd\eta}{Sdx} \Rightarrow \boxed{p = -B\frac{\partial \eta}{\partial x}} \quad (4)$$

[1] Η ακριβής μετάφραση του *Bulk modulus* ίσως να ήταν *Μέτρο συμπάγειας* (αλλά ο όρος *συμπάγεια* έχει χρησιμοποιηθεί ήδη από τους μαθηματικούς για άλλο θέμα). Οι μηχανικοί της αντοχής υλικών χρησιμοποιούνε τον όρο *Μέτρο διόγκωσης*, που ταιριάζει καλύτερα σε πειράματα εφελκυσμού. Το *Μέτρο Ελαστικότητας Όγκου* που προτείνεται εδώ ίσως δικαιολογείται διότι μελετάμε φαινόμενα που οφείλονται στη συμπεριφορά των υλικών όσο ευρίσκονται μέσα στην περιοχή ελαστικότητας. Οπωσδήποτε, το μέγεθος αυτό είναι το αντίστροφο του μεγέθους της *συμπιεστότητας* (*compressibility*) που ορίζεται ως: $\kappa \equiv -(\Delta V / V)/\Delta P$.

Για την τελευταία μορφή, έχουν χρησιμοποιηθεί οι σχέσεις $\upsilon \equiv \Delta V = Sd\eta$ και $V_0 = Sdx$ [2]
Αντικαθιστώντας την (4) στην (3), παίρνουμε:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-B\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) \;\Rightarrow\; \boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = B\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}} \qquad (5)$$

Η εξίσωση (5) είναι η κυματική εξίσωση που διέπει την διάδοση των ηχητικών κυμάτων στον αέρα, και σύμφωνα με την οποία, η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στον αέρα είναι ίση με $c = \sqrt{B/\rho_0}$. Στο σημείο αυτό πρέπει να μνημονευθεί ότι, για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας του αέρα (ή, ενός αερίου, γενικότερα), μέσω της σχέσης $B \equiv -\dfrac{\Delta P}{\Delta V/V}$, είναι δυνατόν να προκληθεί μία αδιαβατική ή μία ισόθερμη μεταβολή Πίεσης – Όγκου. Για την περίπτωση των μεταβολών Πίεσης – Όγκου, που προκαλούνται από τη διάδοση ενός ηχητικού κύματος σε ένα αέριο, η ισόθερμη μεταβολή *P-V* δεν αποτελεί καλή προσέγγιση, δεδομένου ότι αυτές οι μεταβολές γίνονται πολύ γρήγορα και δεν προλαβαίνει να αποκατασταθεί θερμική ισορροπία. Αντίθετα, λόγω του γρήγορου της μεταβολής, το αδιαβατικό μέτρο ελαστικότητας όγκου αποτελεί μία πολύ καλύτερη προσέγγιση. Επομένως, από τη σχέση της αδιαβατικής μεταβολής, έχουμε:

$$PV^\gamma = \sigma\tau\alpha\theta. \;\Rightarrow\; \Delta P V^\gamma + \gamma V^{\gamma-1} P \Delta V = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} = \gamma P \Rightarrow \; B = \gamma P_0$$

Οπότε, η ταχύτητα διάδοσης του ήχου στον αέρα είναι $c = \sqrt{B/\rho_0} \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}}$, όπου, $\gamma = c_P/c_V$: το πηλίκο των γραμμομοριακών ειδικών θερμοτήτων, και P_0, ρ_0, η πίεση και η πυκνότητα του αέρα σε κανονικές συνθήκες.

Διαμήκη κύματα σε λεπτή μεταλλική ράβδο. Θερούμε λεπτή μεταλλική ράβδο με πυκνότητα μάζας *dm/dV=ρ=σταθ.*, και μέτρο ελαστικότητας του Young ίσο με *E*. Αν χρησιμοποιήσουμε, για τη μεταβλητή θέσης, και τη μεταβλητή απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας, τα ίδια σύμβολα, *x* και *η*(*x,t*), όπως και στην περίπτωση των ακουστικών κυμάτων στη στήλη αέρος, και S είναι η διατομή της ράβδου, τότε η εξίσωση κίνησης, για το διαφορικό τμήμα της ράβδου, μεταξύ των σημείων *x* και *x*+*dx*, γράφεται

$$(\rho S\, dx)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = F_x \qquad (6)$$

[Επειδή, (εν αντιθέσει με τα αέρια), τόσο τα στερεά όσο και τα υγρά, είναι πρακτικώς ασυμπίεστα, χρησιμοποιούμε για το μέγεθος της πυκνότητας το ίδιο σύμβολο *ρ* και για την κατάσταση ηρεμίας και για την κατάσταση παραμόρφωσης. Η διατήρηση της μάζας, παρά την μεταβολή κατά *dη* του διαφορικού μήκους *dx*, εξασφαλίζεται από (αμελητέα, σε πρώτη τάξη), μεταβολή της διατομής S].

Η επιταχύνουσα δύναμη προκύπτει από τη διακύμανση της τάσης (πίεσης) σ, στα δύο άκρα του διαφορικού στοιχείου, όπου η τάση συνδέεται με την ανηγμένη ελαστική παραμόρφωση, μέσω του Νόμου του Hooke: $\sigma = E\dfrac{\partial \eta}{\partial x}$, [η διαφορά ανάμεσα σε αυτή την ανάλυση και την προηγούμενη, που αφορούσε τον αέρα, είναι ότι στην προηγούμενη

---

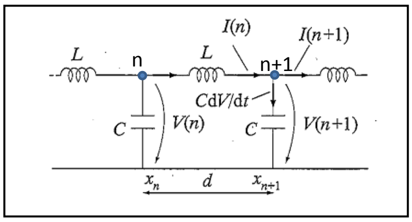
[2] Το ΔP που εμφανίζεται στο $B \equiv -\dfrac{\Delta P}{\Delta V/V}$ είναι η ***διαφορά πίεσης*** $\Delta P = p$, ανάμεσα στο εξωτερικό και το εσωτερικό ενός μικρού όγου *V*, και ΔV είναι η αντίστοιχη ***μεταβολή*** του *V*, λόγω αυτής της διαφοράς πίεσης, (πείραμα μέτρησης του *B*). Κατά τη διάδοση ήχου, υπάρχει και διαφορικό *dp* της διαφοράς πίεσης *p* ανάμεσα στις δύο απέναντι πλευρές του διαφορικού όγκου *Sdx*, όπως αναλύεται στη συνέχεια.

περίπτωση έχουμε συμπιέσιμο αέριο, (και μάλιστα με αδιαβατική διαδικασία), ενώ σε αυτή την περίπτωση έχουμε ελαστική συμπεριφορά τύπου Hooke].

$$F_x\left(x,t\right)=S\left[\sigma\left(x+dx,t\right)-\sigma\left(x,t\right)\right]=S\frac{\partial\sigma}{\partial x}dx=Sdx\frac{\partial}{\partial x}\left(E\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \qquad (7)$$

Αντικαθιστώντας την (7) στην (6), $$\boxed{\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=E\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}} \qquad (8)$$

Άρα, η ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων σε μία στερεά ράβδο είναι $c=\sqrt{E/\rho}$, όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας του Young και ρ είναι η πυκνότητα μάζας του υλικού.



<u>Κύματα σε Γραμμή μεταφοράς</u> Σε μία επαλληλία στοιχείων αυτεπαγωγής και χωρητικότητας, όπως στο σχήμα, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των κόμβων n και n+1, συναρτήσει της μεταξύ τους αυτεπαγωγής L γράφεται $V_n-L\frac{di}{dt}=V_{n+1}$, και το ρεύμα, που διαρρέει τον πυκνωτή που είναι συνδεδεμένος στον κλάδο n, συναρτήσει της χωρητικότητας του κλάδου, γράφεται $I_{n-1}=I_n+\frac{dQ_n}{dt}$. Στο όριο του συνεχούς (γραμμή μεταφοράς), (οπότε: $x_n\to x$ και $x_{n+1}\to x+dx$), οι δύο παραπάνω εξισώσεις έχουν τη μορφή $L_0\left(\partial I/\partial t\right)=-\left(\partial V/\partial x\right)$ και $C_0\left(\partial V/\partial t\right)=-\left(\partial I/\partial x\right)$, (που είναι γνωστές και ως εξισώσεις των «πεδίων» $I=I(x,t)$ και $V=V(x,t)$), όπου L_0: αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους, και C_0: χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους. Δείξτε ότι από τις δύο εξισώσεις «πεδίων» προκύπτει η ίδια εξίσωση κύματος για τα μεγέθη V και I της γραμμής μεταφοράς, και υπολογίστε την κοινή ταχύτητα κύματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΤΗΣ ΕΚΦΩΝΗΣΗΣ

Η διαφορά δυναμικού από τον κόμβο n μέχρι τον κόμβο n+1 οφείλεται στην τάση από αυτεπαγωγή : $$V_n-L\frac{di}{dt}=V_{n+1} \qquad (1\alpha)$$

Το ρεύμα I_{n-1}, που φθάνει στον κόμβο n, διακλαδίζεται εν μέρει στο ρεύμα I_n, που διαρρέει το πηνίο που βρίσκεται ανάμεσα στους κόμβους n και n+1, και εν μέρει προς τον πυκνωτή που είναι συνδεδεμένος στον κόμβο n, μεταβάλλοντας το φορτίο του με ρυθμό $\frac{dQ_n}{dt}$,

επομένως : $$I_{n-1}=I_n+\frac{dQ_n}{dt} \qquad (1\beta)$$

Στο όριο του συνεχούς: $f_n(t)\to f(x,t)$ και $f_{n\pm1}(t)\to f(x\pm dx,t)$,

οπότε οι δύο εξισώσεις (1α) και (1β) γράφονται

$$V(x)-\left(L_0dx\right)\frac{\partial I}{\partial t}=V(x+dx)\Rightarrow V(x)-\left(L_0dx\right)\frac{\partial I}{\partial t}=V(x)+\frac{\partial V}{\partial x}dx\Rightarrow\boxed{L_0\frac{\partial I}{\partial t}=-\frac{\partial V}{\partial x}} \qquad (2\alpha)$$

$$I(x-dx)=I(x)+\frac{\partial}{\partial t}\left(VC_0dx\right)\Rightarrow I(x)+\frac{\partial I}{\partial x}(-dx)=I(x)+C_0dx\frac{\partial V}{\partial t}\Rightarrow\boxed{C_0\frac{\partial V}{\partial t}=-\frac{\partial I}{\partial x}} \qquad (2\beta)$$

ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ

Από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με μερικές παραγώγους (2α) (2β), για τα «πεδία» $I = I(x,t)$ και $V = V(x,t)$, μπορούμε να παράγουμε τις εξισώσεις κύματος (δεύτερης τάξης) για το καθένα από αυτά, ως εξής

$$\frac{\partial}{\partial t}(2a) \quad \Rightarrow \quad L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) \overset{(2\beta)}{\Rightarrow} L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{C_0}\frac{\partial I}{\partial x}\right) \Rightarrow \boxed{L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}}$$

Όμοια, παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την (2β) $\left[\frac{\partial}{\partial t}(2\beta)\right]$ και απαλείφοντας την συνάρτηση του ρεύματος μέσω της (2α) παίρνουμε τελικά $\boxed{L_0 C_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}$.

Όπως φαίνεται, και τα δύο πεδία ικανοποιούν την ίδια διαφορική εξίσωση κύματος, με την ίδια ταχύτητα διάδοσης $c = \dfrac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$

(ε) Αν $V = V_0 e^{i(kx-\omega t)}$ και $I = I_0 e^{i(kx-\omega t)}$ είναι οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης, όπου $\dfrac{\omega}{k} = c = \dfrac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$, τότε, από την εξίσωση (2α) (ή, αντίστοιχα, (2β)), έχουμε:

$$L_0 \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow L_0(-i\omega)I = -(ik)V \Rightarrow \frac{V}{I} = L_0 \frac{\omega}{k} = L_0 c = L_0 \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \Rightarrow \boxed{\frac{V}{I} \equiv Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}}$$

Το μέγεθος αυτό ονομάζεται *χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση*, (σε μερικά βιβλία: *εμπέδηση, impedance*), εξαρτάται από την αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους και την χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους, και χαρακτηρίζει την γραμμή μεταφοράς, ανεξάρτητα από το μήκος της.

Μηχανική σύνθετη αντίσταση. Κατ' αναλογία με το συντελεστή αντίστασης, με τη βοήθεια του οποίου εκφράζεται η δύναμη αντίστασης, (π.χ., στο πρόβλημα του αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση), που είναι ανάλογη της ταχύτητας, $F = -b\upsilon$, ορίζουμε τη μηχανική σύνθετη αντίσταση ενός ελαστικού μέσου, ως το πηλίκο της δύναμης, που ασκείται κατά μήκος της απομάκρυνσης από την κατάσταση ισορροπίας, προς την ταχύτητα των σημείων του ελαστικού μέσου, παράλληλα στην ίδια διεύθυνση, και την συμβολίζουμε με το γράμμα Z, $Z = \dfrac{F_y}{\upsilon_y}, \quad \left(Z = \dfrac{F_\eta}{\upsilon_\eta}\right)$

Παραδείγματα υπολογισμού της σύνθετης μηχανικής αντίστασης διαφορετικών ελαστικών μέσων

Ελαστική χορδή. $$Z = \frac{F_y}{\upsilon_y} = \frac{T\sin\theta}{\partial y/\partial t} = \frac{T(\partial y/\partial x)}{(\partial y/\partial x)(\partial x/\partial t)} = \frac{T}{c} \Rightarrow \boxed{Z = \sqrt{T\rho}} \qquad (9)$$

Μέ όμοιο τρόπο προκύπτουν οι μιγαδικές σύνθετες αντιστάσεις (ανά μοναδιαία διατομή) για τις παρακάτω περιπτώσεις

Ήχος στον αέρα (ανά μοναδιαία επιφάνεια): $Z = \sqrt{\gamma P_0 \rho_0}$ (10α)

Ήχος, σε σωλήνα διατομής *S*: $Z = S\sqrt{\gamma P_0 \rho_0}$ (10β)

Σε μία μεταλλική ράβδο με διατομή S και χαρακτηριστικά (ρ, E), επομένως με ταχύτητα κύματος $c = \sqrt{E/\rho}$, έχουμε: $\dfrac{F}{S} = \sigma = E\dfrac{\partial \eta}{\partial x} \Rightarrow F = SE\dfrac{\partial \eta / \partial t}{\partial x / \partial t} \Rightarrow Z \equiv \dfrac{F}{\partial \eta / \partial t} = \dfrac{SE}{c}$ και, αντικαθιστώντας την c, προκύπτει:

$$Z = S\sqrt{E\rho} \qquad (10\gamma)$$

Ως γενικός κανόνας, όταν είναι γνωστή η ταχύτητα διάδοσης c και η πυκνότητα μάζας ρ (γραμμική, επιφανειακή, ή πυκνότητα όγκου), τότε ισχύει:

$$Z = \rho c \qquad (11)$$

Με βάση τα προηγούμενα παραδείγματα, μπορούμε να πούμε ότι η ταχύτητα διάδοσης του ήχου, σε ένα ελαστικό μέσα έχει τη γενική μορφή:

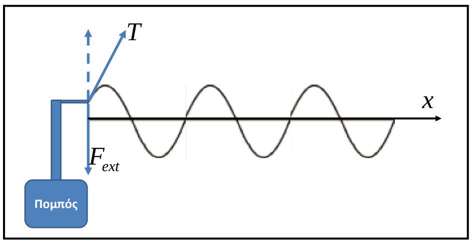
$$c = \sqrt{\frac{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \sigma\kappa\lambda\eta\rho\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma}{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \alpha\delta\rho\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma}},$$

ενώ η μηχανική σύνθετη (κυματική) αντίσταση του μέσου έχει τη γενική μορφή :

$$Z = \sqrt{(\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \sigma\kappa\lambda\eta\rho\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma) \times (\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \alpha\delta\rho\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma)}$$

Όπου τα αντίστοιχα μέτρα προσαρμόζονται, κατά περίπτωση, και επίσης, μπορεί να είναι ανηγμένα ανά μοναδα διατομής, ή όχι, ανάλογα με τη γεωμετρία του εκτεταμένου κυματικού μέσου που μελετάται. Στην περίπτωση ιδανικού 1-διάστατου ελαστικού μέσου (π.χ., χορδή μηδενικής διατομής, χωρίς εσωτερική τάση) δεν υπάρχει αναφορά σε διατομή.

Ενέργεια κύματος σε 1-διάσταση



Ενέργεια που εκπέμπεται από τον πομπό-διεγέρτη προς το μέσο στο οποίο διαδίδεται το κύμα.

Θεωρούμε ιδανική χορδή (ρ,T) άπειρου μήκους, η οποία διεγείρεται στο ένα άκρο της από έναν αρμονικό πομπό-διεγέρτη. Το αποτέλεσμα αυτής της διέγερσης είναι η εκπομπή ενός αρμονικού κύματος κατά μήκος της χορδής.

Αν η σύνδεση πομπού-χορδής είχε γίνει με την παρεμβολή σημειακής μάζας m_0, τότε η συνθήκη κίνησης αυτής της μάζας θα ήταν: $m_0 \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} - F_{ext}$

Αν θεωρήσουμε ότι η σύνδεση του πομπού-διεγέρτη με το ελαστικό μέσο έχει γίνει με ιδανικό τρόπο, δηλ., χωρίς την παρεμβολή κάποιας σημειακής μάζας στο σημείο σύνδεσης, τότε, σε κάθε χρονική στιγμή, η δύναμη που ασκείται από τον διεγέρτη στην αρχή της χορδής πρέπει να είναι ίση και αντίθετη με την κατακόρυφη προβολή της τάσης, $T\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = F_{ext}$, έτσι ώστε η επιτάχυνση του άκρου, x=0, να είναι πεπερασμένη (και σύμφωνη με την κυματική εξίσωση του συνεχούς μέσου), παρά το μηδενισμό της σημειακής μάζας στο σημείο σύνδεσης. Από την τελευταία σχέση μπορεί να υπολογιστεί η μορφή της εξωτερικής δύναμης για την ορθή αρμονική διέγερση του ελαστικού μέσου

$$F_{ext} = T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0} = T\frac{(\partial y/\partial t)dt}{(\partial x/\partial t)dt} \Rightarrow F_{ext} = T\frac{\upsilon_y}{c} = \left(\frac{T}{c}\right)\upsilon_y \Rightarrow \boxed{F_{ext} = Z\upsilon_y}, \qquad (12)$$

αποτέλεσμα που είναι συνεπές και με τη φυσική σημασία της σύνθετης μηχανικής αντίστασης, Z, ως τον συντελεστή αναλογίας ανάμεσα στην εξωτερική δύναμη και στην ταχύτητα κίνησης του σημείου εφαρμογής της.

Η συνεχής εφαρμογή μίας εξωτερικής δύναμης F_{ext} (που είναι συνάρτηση του χρόνου, σύμφωνα με την αντίστοιχη χρονική εξάρτηση της υ_y), που μετακινεί το σημείο εφαρμογής της με ταχύτητα υ_y, αντιστοιχεί σε παροχή ισχύος, από τον πομπό-διεγέρτη προς το ελαστικό μέσο, ίση με $P = F_{ext}\upsilon_y = \left(Z\upsilon_y\right)\upsilon_y \Rightarrow \quad P = Z\upsilon_y^2$

Άρα, για την περίπτωση μίας αρμονικής διέγερσης, $y = A\cos\left(kx - \omega t\right)$, η ταχύτητα υ_y στο αρχικό σημείο ($x=0$) του ελαστικού μέσου είναι

$$\upsilon_y = \left[-\omega A\sin\left(kx - \omega t\right)\right]_{x=0} \Rightarrow \upsilon_y = -\omega A\sin\left(-\omega t\right)$$

και, επομένως, η ισχύς που πρέχει η F_{ext} στο ελαστικό μέσο είναι

$$P\left(t\right) = Z\upsilon_y^2 = ZA^2\omega^2\sin^2\left(-\omega t\right) = A^2\omega^2\rho c\sin^2\left(\omega t\right).$$

Ο μέσος χρονικός όρος αυτής της ισχύος είναι :

$$\left\langle P\left(t\right)\right\rangle = \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} A^2\omega^2\rho c\sin^2\left(\omega t\right)dt = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\mathrm{T}} A^2\omega^2\rho c\sin^2\left(\omega t\right)dt$$

όπου: Τ=2π/ω, η περίοδος του κύματος.

$$\left\langle P\left(t\right)\right\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A^2\omega^2\rho c\sin^2\left(\omega t\right)d\left(\omega t\right) \Rightarrow \boxed{\left\langle P\left(t\right)\right\rangle = \frac{1}{2}A^2\omega^2\rho c = \frac{1}{2}A^2\omega^2 Z} \qquad (13)$$

Ενέργεια dE του τμήματος $\left(x, x+dx\right)$, ιδανικής ελαστικής χορδής, με γραμμική πυκνότητα ρ, τάση T, στην οποία διαδίδεται αρμονικό κύμα $y = A\cos\left(kx - \omega t\right)$.

Το διαφορικό τμήμα $\left(x, x+dx\right)$της χορδής, που βρίσκεται σε αρμονική ταλάντωση, διαθέτει κινητική ενέργεια (λόγω κίνησης) και δυναμική ενέργεια (λόγω παραμόρφωσης)

$$dE = dE_{\mathrm{KIN}} + dE_{\Delta\Upsilon\mathrm{N}}.$$

Η κινητική ενέργεια του $dm = \rho dx$ είναι: $\quad dE_{\mathrm{KIN}} = \frac{1}{2}\left(dm\right)\upsilon_y^2 = \frac{1}{2}\left(\rho dx\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2.$

Η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια συσσωρεύεται στο διαφορικό τμήμα της χορδής επειδή, λόγω της τάσης T, έχει μεταβάλει το μήκος του από dx σε μήκος ίσο με

$$ds = \sqrt{\left(dx\right)^2 + \left(dy\right)^2} = dx\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{1/2} \approx dx\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] = dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Η επιπλέον επιμήκυνση είναι $ds - dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$, και η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια

είναι: $\qquad dE_{\Delta\Upsilon\mathrm{N}} = \left(ds - dx\right)T = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$

Επομένως, $\qquad dE = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \qquad (14)$

Για την περίπτωση αρμονικής ταλάντωσης: $y = A\cos(kx-\omega t)$, αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους στην προηγούμενη σχέση, προκύπτει:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{\rho}{2}A^2\omega^2\sin^2(kx-\omega t) + \frac{T}{2}A^2k^2\sin^2(kx-\omega t)$$

$$\frac{dE}{dx} = \frac{A^2}{2}\omega^2\left[\rho + Tk^2/\omega^2\right]\sin^2(kx-\omega t) = A^2\omega^2\rho\sin^2(kx-\omega t), \qquad \left[Tk^2/\omega^2 = T/c^2 = \rho\right]$$

Και ο μέσος χρονικός όρος: $\left\langle \frac{dE}{dx}\right\rangle_{\mathrm{T}} = \frac{1}{\mathrm{T}}A^2\omega^2\rho\int_0^{\mathrm{T}}\sin^2(kx-\omega t)\,dt$

$$\left\langle \frac{dE}{dx}\right\rangle_{\mathrm{T}} = A^2\omega^2\rho\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2(kx-\omega t)\,d(\omega t) \Rightarrow \boxed{\left\langle \frac{dE}{dx}\right\rangle_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}A^2\omega^2\rho} \qquad (15)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (13) και (15), προκύπτει η ***<u>σχέση</u>*** ανάμεσα στο ***<u>χρονικό μέσο όρο για την πυκνότητα ενέργειας, ανά μονάδα μήκους</u>*** του ελαστικού μέσου, και στη ***<u>μέση ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου (μέση ισχύ), που διέρχεται από μία διατομή</u>*** του μέσου

$$\langle P(t)\rangle \equiv \left\langle \frac{dE}{dt}\right\rangle_{\mathrm{T}} = \left\langle \frac{dE}{dx}\frac{dx}{dt}\right\rangle_{\mathrm{T}} \Rightarrow \boxed{\langle P(t)\rangle = \left\langle \frac{dE}{dx}\right\rangle_{\mathrm{T}} c} = \frac{1}{2}A^2\omega^2\rho c = \frac{1}{2}A^2\omega^2 Z$$

***Ενέργεια ηχητικού κύματος σε αέρια στήλη διατομής** S_0.*

Αν η πίεση, ο όγκος και η πυκνότητα μία στήλης αερίου, σε κανονικές συνθήκες είναι (P_0, V_0, ρ_0), αντίστοιχα, τότε συμβολίζουμε τα αντίστοιχα μεγέθη, κατά τη διάδοση μία ακουστικής ταλάντωσης από τη στήλη, με τα: $P = P_0 + p, \quad V = V_0 + \upsilon, \quad \rho = \rho_0 + \rho_d$, όπου τα μικρά σύμβολα, (p, υ, ρ_d), δείχνουν τις μεταβολές των αντίστοιχων μεγεθών από τις κανονικές συνθήκες, είναι συναρτήσεις του χρόνου, και αλληλοσυνδέονται μέσω της διατήρηση της μάζας, όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Κατά τη διάδοση κύματος από το σύστημα, σε κάθε στοιχείο όγκου S_0dx αποθηκεύεται κινητική ενέργεια, (λόγω της ταλάντωσης των μορίων που περιλαμβάνονται στον όγκο), και δυναμική ενέργεια, (λόγω της μεταβολής του όγκου υπό μεταβλητή πίεση).

Επομένως, η ενέργεια που αντιστοιχεί στη «φέτα» πλάτους dx, αντιστοιχεί στο άθροισμα των δύο ανωτέρω ενεργειών.

$\Delta E_{\mathrm{KIN}} = \frac{1}{2}(\rho S_0 dx)\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2$, όπου $\eta = \eta_0\cos(kx-\omega t)$: η μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας

Άρα: $\Delta E_{\mathrm{KIN}} = \frac{1}{2}(\rho S_0 dx)\omega^2\eta_0^2\sin^2(kx-\omega t) \Rightarrow \boxed{\langle \Delta E_{\mathrm{KIN}}\rangle_{\mathrm{T}} = \frac{1}{4}(\rho S_0 dx)\omega^2\eta_0^2}$

Αντίστοιχα, η μεταβολή δυναμικής ενέργειας, $\Delta E_{\Delta\Upsilon\mathrm{N}}$, αναφέρεται στην επιπλέον ενέργεια, που οφείλεται στην ολοκλήρωση διαφορικών ποσών δυναμικής ενέργειας λόγω εφαρμογής δύναμης $\vec{F}$ σε επιφάνεια εμβαδού S και μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της κατά $d\vec{r}$, κάθετα σε αυτή, οπότε $dE_{\Delta\Upsilon\mathrm{N}} = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -Fdl = -(pS)(dl) = -p(Sdl) = -pdV$, και τελικά $\Delta E_{\Delta\Upsilon\mathrm{N}} = -\int pdV$. Αυτή η σχέση, προσαρμόζεται στο πρόβλημα που μελετάμε και αφορούν την διάδοση του κύματος, Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος θα χρησιμοποιηθεί η διατήρηση της μάζας του στοιχείου της αέριας στήλη, την ταλάντωση της οποίας μελετάμε, (βλ. Λήμμα, ανωτέρω)

$$m = σταθ. \Rightarrow \rho_0 V_0 = \rho V = \left(\rho + \rho_d\right)\left(V + \upsilon\right) = \rho_0 V_0 \left(1+s\right)\left(1+\delta\right)$$

Όπου, $\delta \equiv \dfrac{\upsilon}{V_0}$: σχετική διαστολή, και $s \equiv \dfrac{\rho_d}{\rho_0}$: σχετική συμπύκνωση. Από την προηγούμενη σχέση, και θεωρώντας ότι (σε πρώτη τάξη): $s\delta \simeq 0$, (λόγω της μικρής τιμής των s και δ), έχουμε $\rho_0 V_0 = \rho_0 V_0 \left(1+s\right)\left(1+\delta\right) = \rho_0 V_0 \left(1+s+\delta+s\delta\right) \approx \rho_0 V_0 \left(1+s+\delta\right) \Rightarrow \boxed{s = -\delta}$

Αλλά, η μεταβολή του όγκου είναι: $\upsilon = V_0 \delta = -V_0 s$ και το αντίστοιχο διαφορικό, για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, $\left[dV = d\left(V_0 + \upsilon\right) = d\upsilon\right]$ είναι $dV = d\upsilon = -V_0 ds$, ενώ η πίεση p, που ολοκληρώνεται για τον υπολογισμό της ενέργειας, σχετίζεται με τη σχετική διαστολή μέσω του μέτρου *ελαστικότητας όγκου* (*Bulk modulus*) B: $p = -B\delta = Bs$. Άρα, η μεταβολή κινητικής ενέργειας που σχετίζεται με τη διάδοση του κύματος θα είναι ίση με

$$\Delta E_{\Delta\Upsilon\mathrm{N}} = -\int p dV = -\int \left(Bs\right)\left(-V_0 ds\right) \Rightarrow \Delta E_{\Delta\Upsilon\mathrm{N}} = BV_0 \int_0^s s ds \Rightarrow \Delta E_{\Delta\Upsilon\mathrm{N}} = \frac{1}{2} B V_0 s^2$$

Αλλά $\left(s\right)^2 = \left(-\delta\right)^2 = \left(-\dfrac{\upsilon}{V_0}\right)^2 = \left(-\dfrac{S_0 d\eta}{S_0 dx}\right) \Rightarrow s^2 = \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2$, όπου έχει χρησιμοποιηθεί η ίδια συνάρτηση $\eta = \eta\left(x,t\right)$ για την διαμήκη παλινδρομική μετατόπιση μιας διατομής της αέριας στήλης, κατά την διάδοση του ηχητικού κύματος. Τελικά η μεταβολή κινητικής ενέργειας λόγω του κύματος, που αντιστοιχεί στη “φέτα” dx, υπολογίζεται ίση με $\Delta E_{\Delta\Upsilon\mathrm{N}} = \dfrac{1}{2} B V_0 s^2 = \dfrac{1}{2} B\left(S_0 dx\right)\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2$, όπου $\eta = \eta_0 \cos\left(kx - \omega t\right)$,οπότε

$$\Delta E_{\Delta\Upsilon\mathrm{N}} = \frac{1}{2} B\left(S_0 dx\right) k^2 \eta_0^2 \sin^2\left(kx - \omega t\right) = \frac{1}{2} B\left(S_0 dx\right)\frac{\omega^2}{c^2}\eta_0^2 \sin^2\left(kx - \omega t\right), \quad \text{όπου} \quad c = \sqrt{B/\rho_0},$$

και υπολογίζοντας και τον μέσο χρονικό όρο σε μία περίοδο

$$\boxed{\left\langle \Delta E_{\Delta\Upsilon\mathrm{N}} \right\rangle_{\mathrm{T}} = \frac{1}{4}\rho\left(S_0 dx\right)\omega^2 \eta_0^2} \Rightarrow \left\langle \frac{\Delta E_{ολ}}{dx} \right\rangle_{\mathrm{T}} = \left\langle \frac{\Delta E_{\mathrm{KIN}}}{dx} \right\rangle_{\mathrm{T}} + \left\langle \frac{\Delta E_{\Delta\Upsilon\mathrm{N}}}{dx} \right\rangle_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\rho S_0 \omega^2 \eta_0^2$$

Δεδομένου ότι η ροή ενέργειας είναι ίση με την (πυκνότητα ενέργειας)×(ταχύτητα διάδοσης) και ότι, σε πρώτη τάξη, $\rho \approx \rho_0$, παίρνουμε, για τη ροή ηχητικής ενέργειας από μία στήλη αέρος με διατομή S_0, τη σχέση

$$\left\langle P \right\rangle_{S_0} = \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle_{S_0} c = \frac{1}{2}\rho S_0 \omega^2 \eta_0^2 c \Rightarrow \boxed{\left\langle P \right\rangle_{S_0} = \frac{1}{2}\eta_0^2 \omega^2 Z_{S_0}},$$

όπου έχουμε ορίσει ως $Z_{S_0} = \rho c S_0$, την κυματική αντίστασης αέριας στήλης διατομής S_0.

Επίσης: $Z_{S_0} = \rho S_0 c = \rho S_0 \sqrt{B/\rho_0} = S_0 \sqrt{B\rho_0} \Rightarrow \boxed{\dfrac{Z_{S_0}}{S_0} = c\rho_0 = \sqrt{B\rho_0}}$: αντίσταση ανά διατομή.

<u>Σχόλιο</u>: Ενώ στην κυματική αντίσταση της χορδής δεν αναφέρεται η διατομή, (σωστά, διότι θεωρούμε μηδενική της διατομή της ιδανικής χορδής), στην αέρια στήλη η σύνθετη αντίσταση είναι ανάλογη της διατομής της (αναμενόμενο, διότι η μεταφερόμενη ενέργεια ανά dx, είναι ανάλογη του ταλαντούμενου όγκου, επομένως, ανάλογη της διατομής). Το ίδιο ισχύει για διαμήκη κύματα σε μία μεταλλική ράβδο πεπερασμένης διατομής.