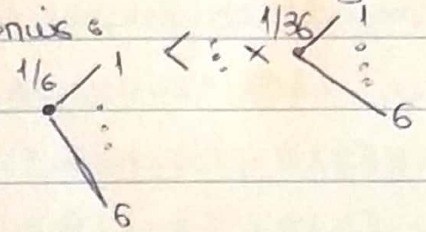
① Κάθε φορά που ρίχνουμε το ζάρι, υπάρχουν 6 διαφορετικές ζαριές.
Εφόσον ρίχνουμε το ζάρι 3 φορές, οι πιθανές τριπλέτες ζαριών είναι 18,
συνεπώς ο χώρος Ω έχει 18 στοιχεία:

$$\Omega = \{(1,1,1), (1,1,2), \ldots, (6,6,6)\}.$$

Για το ενδεχόμενο $A = (1, x, 6)$, όπου x αδιάφορη ζαριά:
Το να φέρει ζαριά "1" την πρώτη φορά, έχει πιθανότητα $1/6$.
Η δεύτερη ζαριά είναι αδιάφορη.
Επίσης, το να φέρει ζαριά "6" την τρίτη φορά, έχει πιθανότητα $1/6$.
Συνεπώς:



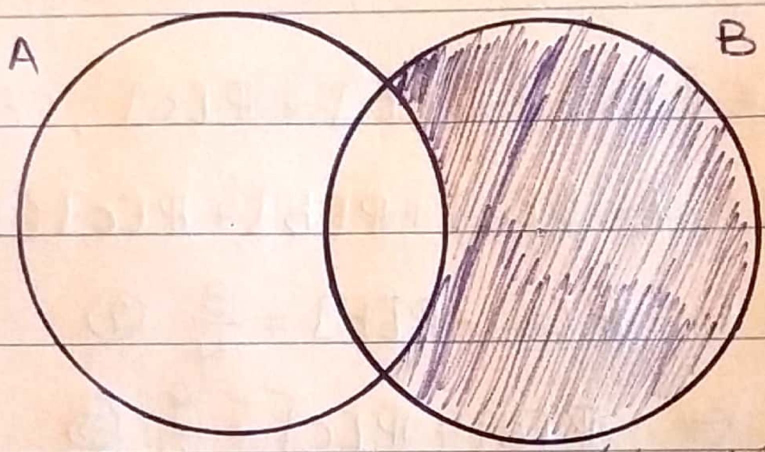
άρα $P[A] = \frac{1}{36}$

Για το ενδεχόμενο $B = (x, x, x)$:
Έστω $x=1$. Το να φέρουμε κάθε φορά την ίδια ζαριά έχει πιθανότητα $1/6$.
Συνεπώς: $P[B] = \frac{1}{6^3} \Leftrightarrow P[B] = \frac{1}{216}$

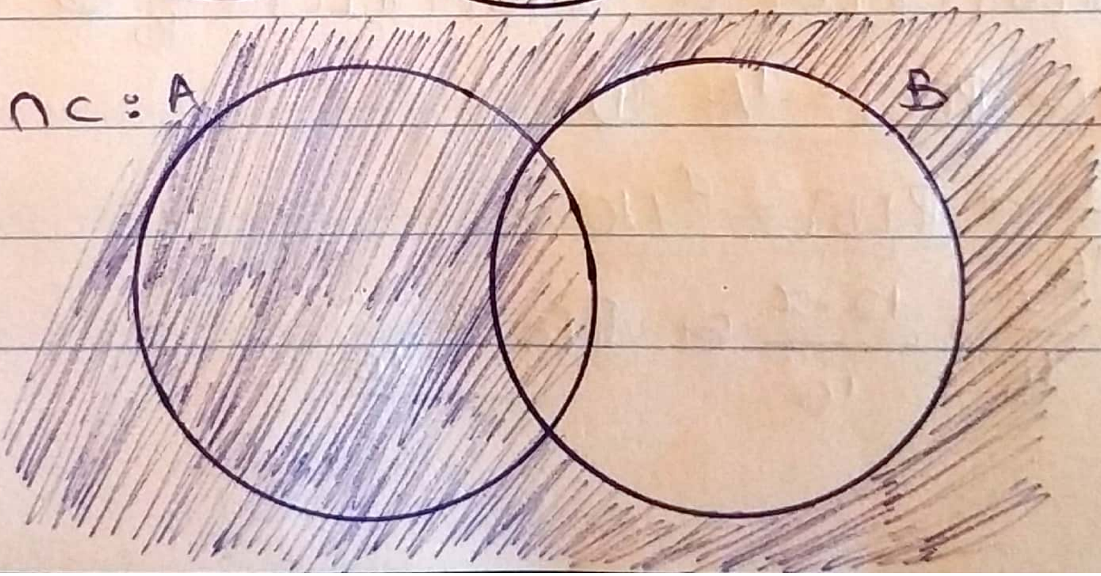
Για το ενδεχόμενο $\Gamma = (x, x, x)$, όπου $x = 2\nu$, $\nu \in Z'$:
Το ενδεχόμενο Γ είναι υποκατηγορία του ενδεχομένου B. Το ενδεχόμενο B έχει πιθανότητα $1/216$ για έναν αριθμό $1 \le x \le 6$ $(x \in Z)$. Αυτός ο αριθμός έχει $1/2$ πιθανότητα να είναι ζυγός. Συνεπώς:

$$P[\Gamma] = P[B] \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{216} \Leftrightarrow P[\Gamma] = \frac{1}{108}$$

② Για $B \cap A'$:

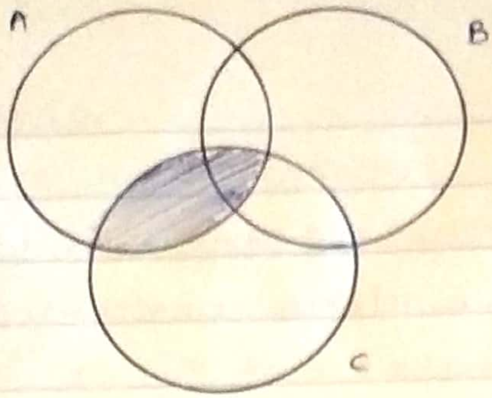


Για $(A \cup B') \cap C$:

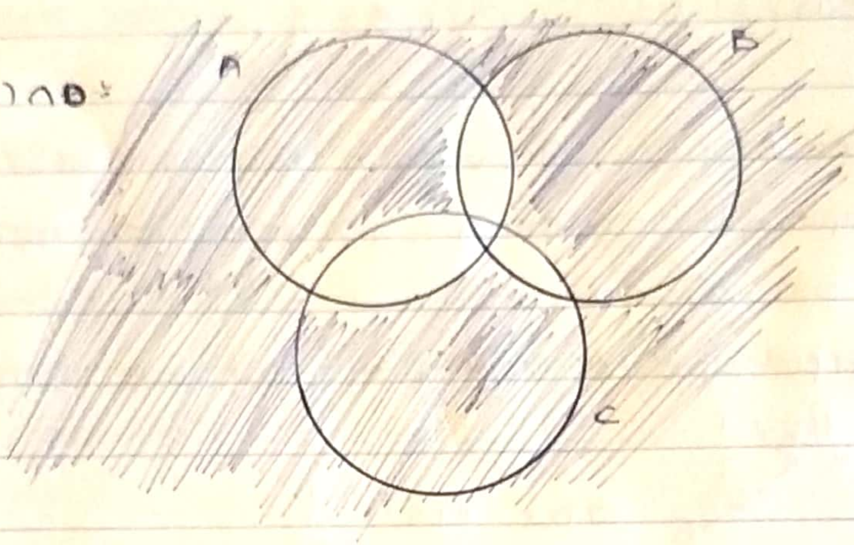


$\Rightarrow A \cup B'$

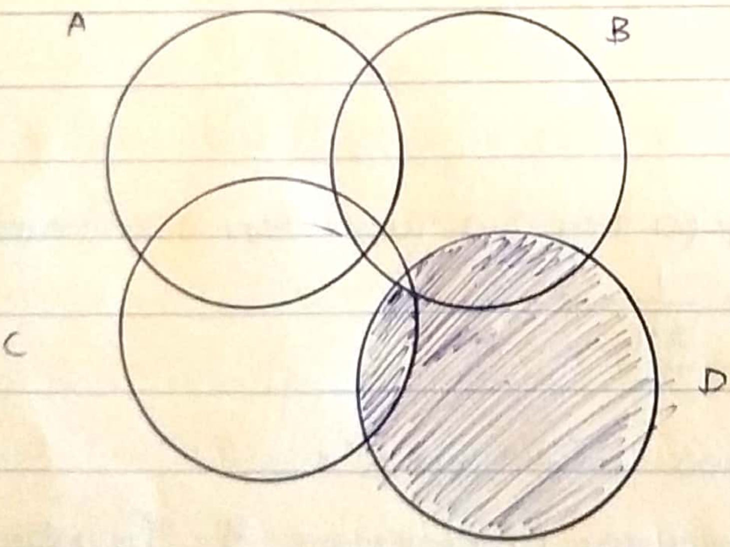
Scanné avec CamScanner



Για $(A' \cup B' \cup C') \cap B$:



$\Rightarrow A' \cup B' C'$



③ $\Omega = \{a, b, c\}$, $\mathbb{P}(\{a, c\}) = 9/16$ και $\mathbb{P}(\{a, b\}) = 3/4$

Έστω ένα ενδεχόμενο $x \in \Omega$: $\mathbb{P}[\{x\}] = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}[\{x, x\}] = \left(\frac{3}{4}\right)^2$,

$\mathbb{P}[\{x, x, x\}] = \left(\frac{3}{4}\right)^3$

$\Omega = \{a, b, c\} = a \cup b \cup c \Leftrightarrow \mathbb{P}[\Omega] = \mathbb{P}[a] + \mathbb{P}[b] + \mathbb{P}[c]$, εφόσον $a \cap b \cap c = \emptyset$, ως στοιχειώδη ενδεχόμενα. Συνεπώς: $1 = \mathbb{P}[a] + \mathbb{P}[b] + \mathbb{P}[c]$ ①

$\mathbb{P}[\{a, b\}] = \mathbb{P}[a \cup b] = \mathbb{P}[a] + \mathbb{P}[b] \Leftrightarrow \mathbb{P}[a] + \mathbb{P}[b] = \frac{3}{4}$ ②

$\mathbb{P}[\{a, c\}] = \mathbb{P}[a \cup c] = \mathbb{P}[a] + \mathbb{P}[c] \Leftrightarrow \mathbb{P}[a] + \mathbb{P}[c] = \frac{9}{16}$ ③

Από ①+②: $1 = \frac{3}{4} + \mathbb{P}[c] \Leftrightarrow \underline{\mathbb{P}[c] = 1/4}$ ④

Από ①+③: $1 = \mathbb{P}[b] + \frac{9}{16} \Leftrightarrow \underline{\mathbb{P}[b] = 7/16}$

Από ②+④: $\mathbb{P}[a] = \frac{3}{4} - \frac{7}{16} = \frac{12-7}{16} \Leftrightarrow \underline{\mathbb{P}[a] = \frac{5}{16}}$

④ $P\left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right] = k(a+b+c)$, $\Omega = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a,b,c \in \{0,1\}\right\}$.

Πιθανά ενδεχόμενα:

$$\Omega = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$|\Omega| = 8$

Εφόσον ο P είναι αντιστρέψιμος, $\det P \neq 0 \Leftrightarrow ac - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow ac \neq b^2$

Αν $b=1 \rightarrow$ Τουλάχιστον ένα από τα a,c πρέπει να ισούται με 0 ή και τα δύο

$\{a,b,c\} = \{(0,1,0), (1,1,0), (0,1,1)\}$

Αν $b=0 \rightarrow$ Πρέπει $a=c=1$, άρα συνολικά

$\{a,b,c\} = \{(0,1,0), (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$

$|A| = 4$

Συνεπώς, $P[A] = \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{4}{8} \Leftrightarrow \underline{P[A] = 1/2}$

Από ιδιότητες P: $P[\Omega] = 1 \Leftrightarrow \sum_{a=0}^{1} \sum_{b=0}^{1} \sum_{c=0}^{1} k(a+b+c) = 1 \Leftrightarrow$

(I) $0+0+0=0$
(II) $1+0+0=1$
(III) $0+1+0=1$
(IV) $0+0+1=1$
(V) $1+0+1=2$
(VI) $1+1+0=2$
(VII) $0+1+1=2$
(VIII) $1+1+1=3$

$\sum_{a=0}^{1} \sum_{b=0}^{1} \sum_{c=0}^{1} k(a+b+c) = 12k = 1$

Συνεπώς $\underline{k = 1/12}$

Scanné avec CamScanner

⑤ • Ισχύει ότι $(A-B)=(A\cap B')$. Επίσης ισχύει ότι $A=(A\cap B)\cup(A\cap B')$.

Επομένως $\mathbb{P}[A\cup B]=\mathbb{P}[A]+\mathbb{P}[B]$ αν $A\cap B=\emptyset$

Θεωρώντας $\Gamma=A\cap B$ και $\Delta=A\cap B'$, ισχύει ότι $\Gamma\cap\Delta=\emptyset$, άρα

$\mathbb{P}[\Gamma\cup\Delta]=\mathbb{P}[\Gamma]+\mathbb{P}[\Delta]$, (i) δηλαδή

$\mathbb{P}[(A\cap B)\cup(A\cap B')]=\mathbb{P}[A\cap B]+\mathbb{P}[A\cap B'] \Rightarrow \mathbb{P}[A]=\mathbb{P}[A\cap B]+\mathbb{P}[A\cap B']$

δηλ. $\mathbb{P}[A\cap B']=\mathbb{P}[A]-\mathbb{P}[A\cap B]$.

Αντικαθιστώντας, όπου $A=E$ και $B=F$, έχουμε τη ζητούμενη σχέση:

$\underline{\mathbb{P}[E\cap F']=\mathbb{P}[E]-\mathbb{P}[E\cap F]}$ (ii)

• Θεωρούμε $(A\cup B)=Z$

$\mathbb{P}[Z'\cap C]=\mathbb{P}[C]-\mathbb{P}[Z\cap C]$ (iii)

Από κανόνες de Morgan, ισχύει $(A\cup B)'=A'\cap B'$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A\cup B\cup C] &= \mathbb{P}[Z]+\mathbb{P}[C]-\mathbb{P}[Z\cap C]\\ &= \mathbb{P}[A\cup B]+\mathbb{P}[C]-\mathbb{P}[(A\cup B)\cap C]\\ &= \mathbb{P}[A\cup B]+\mathbb{P}[C]-\mathbb{P}[(A\cap C)\cup(B\cap C)]\\ &\overset{(i)}{=} \mathbb{P}[A\cup B]+\mathbb{P}[C]-\mathbb{P}[A\cap C]-\mathbb{P}[B\cap C]+\mathbb{P}[A\cap B\cap C]\\ &\overset{(i)}{=} \mathbb{P}[A]+\mathbb{P}[B]-\mathbb{P}[A\cap B]+\mathbb{P}[C]-\mathbb{P}[A\cap C]-\mathbb{P}[B\cap C]+\mathbb{P}[A\cap B\cap C]\end{aligned}$$

Από (ii): $\mathbb{P}[A'\cap B]=\mathbb{P}[B]-\mathbb{P}[A\cap B]$

$\rightarrow \mathbb{P}[A\cup B\cup C]=\mathbb{P}[A]+\mathbb{P}[A'\cap B]+\mathbb{P}[C]-\mathbb{P}[A\cap C]-\mathbb{P}[B\cap C]+\mathbb{P}[A\cap B\cap C]$

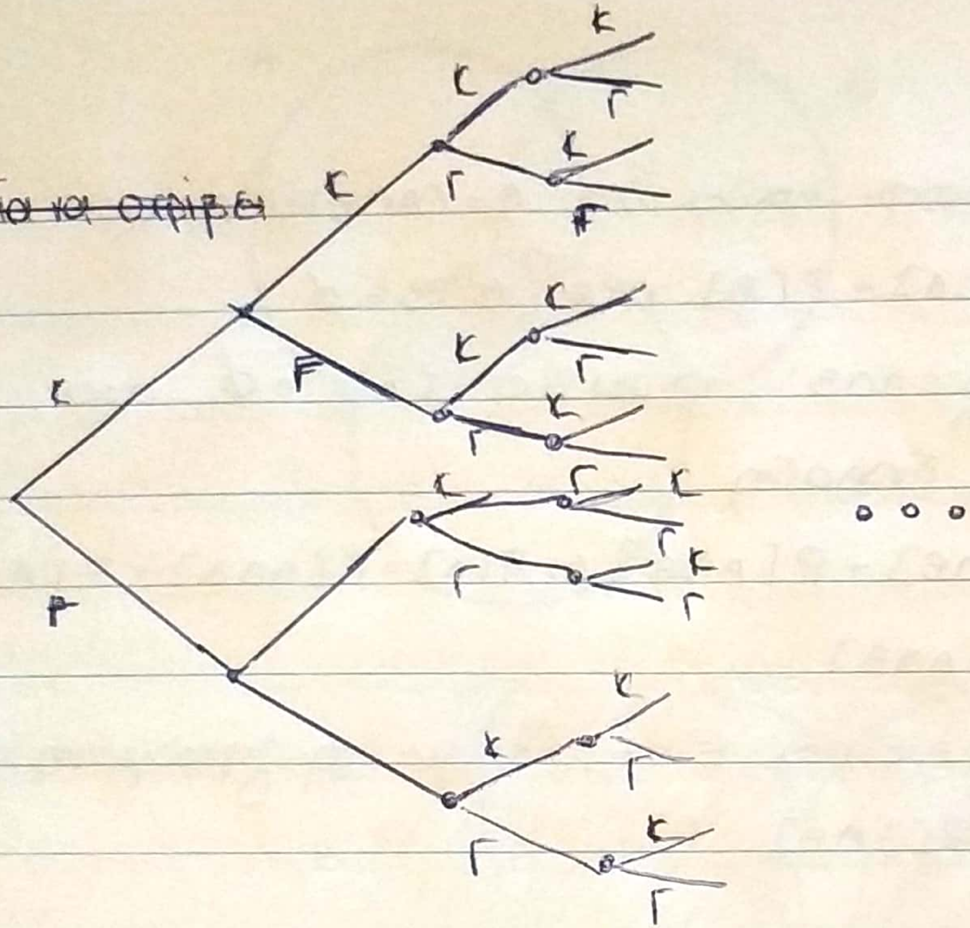
Από (iii): $\mathbb{P}[(A\cup B)'\cap C]=\mathbb{P}[C]-\mathbb{P}[(A\cup B)\cap C]$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A'\cap B'\cap C] &= \mathbb{P}[C]-\mathbb{P}[(A\cap C)\cup(B\cap C)]\\ &= \mathbb{P}[C]-\mathbb{P}[A\cap C]-\mathbb{P}[B\cap C]+\mathbb{P}[A\cap B\cap C]\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας, έχουμε τη ζητούμενη σχέση:

$\underline{\mathbb{P}[A\cup B\cup C]=\mathbb{P}[A]+\mathbb{P}[A'\cap B]+\mathbb{P}[A'\cap B'\cap C]}$

⑥ ~~Για να στρίβει~~



Εφόσον το νόμισμα είναι δίκαιο, κάθε παίκτης θα φέρει τουλάχιστον μια φορά κορώνα, έτσι ο A και ο B θα φέρουν το πολύ (ν−1) και ν φορές αντίστοιχα γράμματα. Επομένως ο **A** έχει μια επιπλέον προσπάθεια,

$\cancel{P[\Gamma] = \frac{\nu}{\nu+1} - \frac{\nu-1}{\nu+1} = \frac{1}{\nu+1}}$ δηλαδή πιθανότητα 1/2 να φέρει παραπάνω φορές γράμματα.

(7) Ισχύει ότι $P[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] = \sum_{i=1}^{n} P[A_i]$ για ακολουθία $A_1, A_2, \dots, A_n \in \Omega$ με $A_i \cap A_j = \emptyset$ για $\forall\, i \neq j$

Στην περίπτωση που $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ για $i \neq j$, γενικεύουμε τη σχέση:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B], \text{ όπου}$$

$$P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 \cap A_2]$$

για 3 πεδία A_1, A_2, A_3:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup A_3] = P[A_1] + P[A_2] + P[A_3] - P[A_1 \cap A_2] - P[A_1 \cap A_3] - P[A_2 \cap A_3] + P[A_1 \cap A_2 \cap A_3]$$

Από ιδιότητες μέτρου πιθανότητας: $0 \leq P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] \leq 1$

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] \geq 0 \Leftrightarrow P[A_1 \cup A_2 \cup A_3] \geq P[A_1] + P[A_2] + P[A_3] - P[A_1 \cap A_2] - P[A_1 \cap A_3] - P[A_2 \cap A_3]$$

Γενικεύοντας για n αριθμό πεδίων $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n] \geq P[A_1] + P[A_2] + \dots + P[A_n] - P[A_1 \cap A_2] - \dots - P[A_{n-1} \cap A_n]$$

δηλαδή $P[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] \geq \sum_{i=1}^{n} P[A_i] - \sum_{i<j} P[A_i \cap A_j]$

⑧ • Από την άσκηση 7, ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] \leq \mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] + \sum_{i<j} \mathbb{P}[A_i \cap A_j]$$

Για $i \neq j$, οι συνδυασμοί πεδίων $A_i \cap A_j$ είναι $(n-1)$στο αριθμό, συνεπώς λόγω της ιδιότητας $\mathbb{P}[A] \in [0,1]$, ισχύει

$$0 \leq \sum_{i<j} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] \leq n-1$$

Συνεπώς $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] \leq \mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] + \sum_{i<j} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] \leq \mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] + n-1$

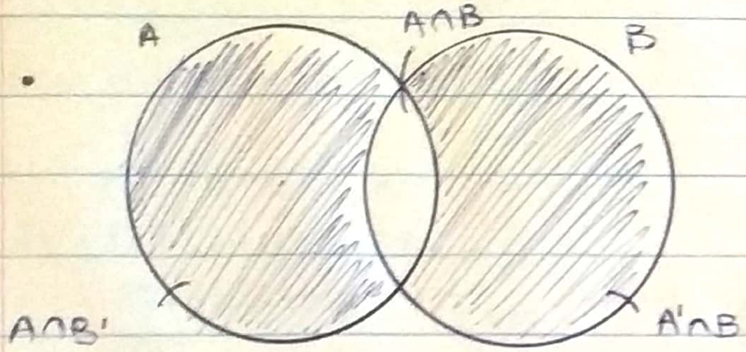
$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] \leq \mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{n} A_i] + n-1$$

• Από ιδιότητες πεδίου ορισμού του μέτρου πιθανότητας $\mathbb{P}$, ισχύει πως

$$\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in F \longrightarrow \bigcup_{\infty} A_\infty \in F$$

Συνεπώς, αφού για $\mathbb{P}[A_i] = 1$ για $\forall i \in \mathbb{N}$, τότε $\mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = 1$.

(9) •



$A\cap B' = A - B \Rightarrow \mathbb{P}[A\cap B'] = \mathbb{P}[A-B]$

$B\cap A' = B - A \Rightarrow \mathbb{P}[A'\cap B] = \mathbb{P}[B-A]$

$\mathbb{P}[A\cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A\cap B]$

Ισχύει $\mathbb{P}[A\cup B] = \mathbb{P}[A]\cdot\mathbb{P}[B]$, άρα:

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{P}[A\cap B']\cdot\mathbb{P}[A'\cap B] &= \mathbb{P}[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\\ \mathbb{P}[A\cap B]\cdot\mathbb{P}[A\cup B] &= \mathbb{P}[(A\cap B)\cup(A\cup B)]\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathbb{P}[A\cap B]\cdot\mathbb{P}[A\cup B] + \mathbb{P}[A\cap B']\cdot\mathbb{P}[A'\cap B] = \mathbb{P}[(A\cap B')\cup(A'\cap B)] + \mathbb{P}[(A\cap B)\cup(A\cup B)]$

$\mathbb{P}[A\cap B]\cdot\mathbb{P}[A\cup B] + \mathbb{P}[A\cap B']\cdot\mathbb{P}[A'\cap B] = \mathbb{P}[(A\cap B')\cup(A'\cap B)\cup(A\cup B)\cup(A\cap B)]$

$+\mathbb{P}[((A\cap B')\cup(A'\cap B))\cap((A\cup B)\cup(A\cap B))]$

όμως, για οποιαδήποτε σχέση μεταξύ των A, B, ισχύει

$[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]\cap[(A\cup B)\cup(A\cap B)] = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}[\emptyset]=0$

Από διάγραμμα Venn, ισχύει: $(A\cap B')\cup(A'\cap B)\cup(A\cup B)\cup(A\cap B) = A\cup B$

Συνεπώς, $\mathbb{P}[A\cap B]\cdot\mathbb{P}[A\cup B] + \mathbb{P}[A\cap B']\cdot\mathbb{P}[A'\cap B] = \mathbb{P}[A\cup B]$

και, ανακαθιστώντας, έχουμε τη ζητούμενη σχέση:

$$\mathbb{P}[A]\cdot\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A\cap B]\cdot\mathbb{P}[A\cup B] + \mathbb{P}[A\cap B']\mathbb{P}[B\cap A']$$

- $\mathbb{P}[A]\mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A\cap B] = \mathbb{P}[A\cap B]\left[\mathbb{P}[A\cup B]-1\right] + \mathbb{P}[A\cap B']\mathbb{P}[A'\cap B]$.

Απο ιδιότητες μέτρου πιθανοτήτων:

$\mathbb{P}[(A\cup B)'] = 1 - \mathbb{P}[A\cup B] \hookrightarrow \mathbb{P}[A\cup B] = 1 - \mathbb{P}[A'\cap B']$

$\hookrightarrow \mathbb{P}[A]\cdot\mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A\cap B] = \mathbb{P}[A\cap B][\cancel{1} - \mathbb{P}[A'\cap B']\cancel{-1}] + \mathbb{P}[A\cap B']\mathbb{P}[A'\cap B]$

$= -\mathbb{P}[A\cap B]\mathbb{P}[A'\cap B'] + \mathbb{P}[A\cap B']\mathbb{P}[A'\cap B]$

$= -\mathbb{P}[(A\cap B)\cup(A'\cap B')] + \mathbb{P}[(A\cap B')\cup(A'\cap B)]$

Θεωρώντας πως $A, B \in \Omega$:

$$\left.\begin{aligned}(A\cap B)\cup(A'\cap B') &= \Omega - (A\cap B') - (A'\cap B)\\ (A\cap B')\cup(A'\cap B) &= (A\cup B) - (A\cap B)\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathbb{P}[A]\cdot\mathbb{P}[B] = -(1 - \mathbb{P}[A\cap B'] - \mathbb{P}[A'\cap B]) + \mathbb{P}[A\cup B] - \mathbb{P}[A\cap B]$

$= \mathbb{P}[A\cap B'] + \mathbb{P}[A'\cap B] + \mathbb{P}[A\cup B] - \mathbb{P}[A\cap B] - 1$

$= 2\mathbb{P}[(A\cup B) - (A\cap B)] - 1$