Ε.Μ.Π. – Σχολή Ηλεκτρολόγων ΜΜΥ
Μάθημα «Κυματική και Κβαντική Φυσική», 2021-22
1η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ – ΣΤΑΣΙΜΑ-ΟΔΕΥΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ

Ι. Ράπτης (ΣΕΜΦΕ) Αθήνα, 17/3/2022

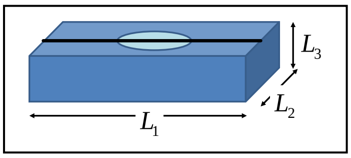
Να επιστραφούν λυμένες, μέχρι 31/3/2022, οι 1, 2, 3, 4, 5.
[ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι **χειρόγραφες** και να αναρτηθούν ως ΕΝΑ ΕΝΙΑΙΟ PDF στις «Εργασίες» του Helios]

1. (α) Δείξτε ότι για ένα εγκάρσιο κύμα που οδεύει προς τα δεξιά ισχύει : $\frac{\partial y}{\partial t} = -c\frac{\partial y}{\partial x}$.

(β) Δίδεται παλμός που περιγράφεται από την συνάρτηση : $y(x,t) = \frac{b^3}{b^2 + (x - \upsilon t)^2}$.

(β1) Σχεδιάστε τη μορφή του παλμού για t=0 και για $t = b/\upsilon$.
(β2) Υπολογίστε τη ***σωματιδιακή*** ταχύτητα (των σημείων του ελαστικού μέσου) και δείξτε ποιοτικά πώς συνδέεται με τη μεταβολή του παλμού.

2. Ιδανική χορδή άπειρου μήκους με γραμμική πυκνότητα μάζας ρ, εκτείνεται από το $x \to -\infty$ μέχρι το $x \to +\infty$ και τείνεται με τάση T. Στη σημείο $x = 0$ συνδέεται ελατήριο με σταθερά σκληρότητας s, εγκάρσια προς τη χορδή, το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται σε ακλόνητο σημείο έτσι ώστε, όταν το σύστημα ηρεμεί, η χορδή είναι ευθύγραμμη και το ελατήριο στο φυσικό του μήκος. Στο άκρο $x \to -\infty$ διεγείρεται μόνιμο εγκάρσιο δεξιά οδεύον αρμονικό κύμα (στο επίπεδο χορδής-ελατηρίου) με κυκλική συχνότητα ω.
(α) Να γραφούν οι συνοριακές συνθήκες στο σημείο $x = 0$, και να υπολογισθούν οι συντελεστές ανάκλασης πλάτους (r) και διέλευσης πλάτους (t), συναρτήσει των ω, s, και της σύνθετης αντίστασης $Z = \sqrt{T\rho}$ της χορδής.
(β) Να υπολογισθεί η εφαπτομένη $\tan\theta$ της διαφοράς φάσης θ, μεταξύ Ανακλώμενου και Προσπίπτοντος κύματος στο x=0, συναρτήσει των ω, s, και Z.
(γ) Να υπολογισθεί η εφαπτομένη $\tan\psi$ της διαφοράς φάσης ψ, μεταξύ Διαδιδόμενου και Προσπίπτοντος κύματος στο x=0, συναρτήσει των ω, s, και Z.
(δ) Να υπολογισθεί, επίσης, η εφαπτομένη $\tan\varphi$ της διαφοράς φάσης φ, μεταξύ Διαδιδόμενου και Ανακλώμενου κύματος στο x=0.



3. Μονόχορδο όργανο και το αντηχείο του προσομοιώνονται με κλειστό παραλληλεπίπεδο, διαστάσεων $(L_1 \times L_2 \times L_3)$, με ακλόνητα τοιχώματα, το οποίο φέρει στόμιο αμελητέων διαστάσεων στην μία πλευρά του επί της οποίας τείνεται μη-ιδανική χορδή, μήκους L_1, με γραμμική πυκνότητα μάζας $\rho_{\chi\rho\delta}$, και ακλόνητα άκρα, οι ταλαντώσεις της οποίας διέπονται από την εξίσωση κύματος $\frac{1}{c_{\chi\rho\delta}^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, όπου $c_{\chi\rho\delta} = \sqrt{T/\rho_{\chi\rho\delta}}$ και a: κατάλληλη θετική σταθερά. Το στόμιο επιτρέπει να διεγερθούν, από τη χορδή, στο εσωτερικό του αντηχείου 3-διάστατα ακουστικά κύματα, (Κανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης στο εσωτερικό του αντηχείου).
Τα ακουστικά κύματα στο εσωτερικό του αντηχείου αντιστοιχούν σε μεταβολές πίεσης του αέρα $\Delta P \equiv p(x,y,z,t)$, στο εσωτερικό του, που ικανοποιούν την εξίσωση ηχητικού κύματος $\frac{1}{c_{\eta\chi}^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$, όπου $c_{\eta\chi} = \sqrt{\gamma\left(P_{\alpha\epsilon\rho}/\rho_{\alpha\epsilon\rho\alpha}\right)}$. Τα στάσιμα κύματα που συντονίζονται στο εσωτερικό του αντηχείου αντιστοιχούν σε διακυμάνσεις πίεσης της μορφής

$p(x,y,z,t) = p_0 \cos(k_x x + \theta_x)\cos(k_y y + \theta_y)\cos(k_z z + \theta_z)\cos(\omega t)$, με συνοριακές συνθήκες πίεσης στις ακλόνητες πλευρές $(\partial p/\partial n) = 0$, όπου $n = \{x, y, z\}$, κάθετα στην κάθε πλευρά,

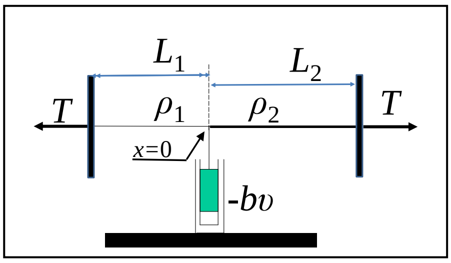
(α) Να προσδιορισθούν οι σχέσεις διασποράς $\omega = \omega(k)$ και $\omega = \omega(k_x, k_y, k_z)$., για τη χορδή και το αντηχείο, αντίστοιχα.

(β) Να προσδιοριστούν οι τιμές των φάσεων $\{\theta_x, \theta_y, \theta_z\}$, οι αποδεκτές τιμές των $\{k_x, k_y, k_z\}$, και οι συχνότητες των ΚΤΤ του αντηχείου.

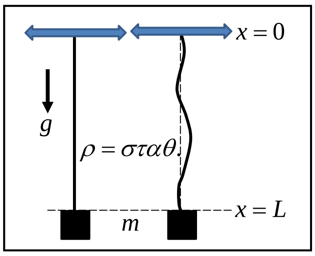
(γ) Να προσδιοριστεί, συναρτήσει των $\{\rho, c_{\eta\chi}, L_1, L_2, L_3\}$ η τιμή της τάσης Τ με την οποία πρέπει να «κουρδισθεί» το έγχορδο, έτσι ώστε η θεμελιώδης συχνότητα της χορδής να συμπίπτει με την συχνότητα του θεμελιώδους ΚΤΤ του αντηχείου.

[Εφαρμογή: $(L_1 \times L_2 \times L_3) = (1 \times 0.25 \times 0.1)\,\mathrm{m}^3$, ρ=0,01 gr/mm, $c_{\eta\chi}$=340 m/s, a=0,0012 m^2]

4. Ιδανική χορδή έχει γραμμική πυκνότητα μάζας ρ=0,002 kg/m, μήκος L=1m, και τείνεται με τάση Τ ανάμεσα στα δύο ακλόνητα άκρα της. (α) Να υπολογισθεί η τάση Τ ώστε η θεμελιώδης συχνότητα να συμπίπτει με το Λα της 3^{ης} Οκτάβας (f_1= 440 Hz). (β) Θέλουμε να υποδιαιρέσουμε σε 12 ημιτόνια το διάστημα συχνοτήτων από το Λα της 3^{ης} Οκτάβας (f_1= 440 Hz) έως το Λα της 4^{ης} Οκτάβας (f_{13}= 880 Hz), έτσι ώστε τα ημιτόνια να έχουν σταθερό λόγο διαδοχικών συχνοτήτων: $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \dfrac{f_n}{f_{n-1}} = \sigma\tau\alpha\theta.$ Να υπολογιστεί ο ζητούμενος λόγος συχνοτήτων. (γ) Να υπολογισθούν οι θέσεις x_i, $i = 1, \cdots, 12$ στις οποίες πρέπει να ακινητοποιείται η χορδή («τάστα») για να πραγματοποιείται ταλάντωση της χορδής με τις ανωτέρω συχνότητες και να δοθούν τα αποτελέσματα με μορφή πίνακα για τις διαδοχικές συχνότητες και τις αντίστοιχες θέσεις.



5. Στο σύστημα του σχήματος δύο χορδές με γραμμικές πυκνότητες μάζας ρ_1, ρ_2 και μήκη L_1 και L_2, αντίστοιχα, τείνονται με τάση T, κατά μήκος του άξονα x. Στο σημείο σύνδεσης των δύο τμημάτων, x=0, είναι συνδεδεμένος μηχανισμός που ασκεί εγκάρσια δύναμη τριβής $F_{\tau\rho\beta}$=-$b\upsilon$, όπου υ η εγκάρσια ταχύτητα του εμβόλου και b μία θετική σταθερά, και τα άκρα των χορδών είναι ακλόνητα. Δείξτε ότι η παραδοχή λύσεων, σε αυτό το σύστημα, με τη μορφή Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης: $y_{1,2}(x,t) = f_{1,2}(x)\cos(\omega t + \varphi)$, οδηγεί σε άτοπο. Εξηγείστε.



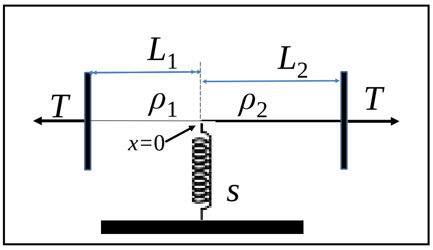
6. Ομοιόμορφη ιδανική χορδή, έχει γραμμική πυκνότητας μάζας $(dm/dx) \equiv \rho = \sigma\tau\alpha\theta.$, μήκος L, και είναι αναρτημένη από το άκρο x=0 μέσα σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας με επιτάχυνση βαρύτητας g. Στο άλλο άκρο, x=L είναι αναρτημένη σημειακή μάζα m.

(α) Υπολογίστε, σε κάθε σημείο x της χορδής, την τάση της χορδής $T = T(x)$ και την παράγωγό της $\partial T/\partial x$.

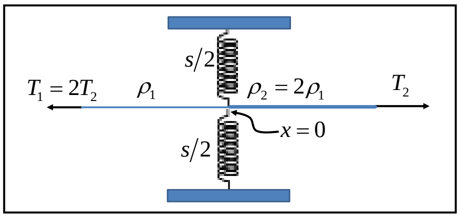
(β) Εξηγείστε γιατί η εξίσωση εγκάρσιας κίνησης ενός διαφορικού τμήματος dx της χορδής, περί το σημείο x, έχει τη μορφή $dm\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx)\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} - T(x)\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_x$.

(γ) Αναπτύξτε, σε πρώτη τάξη κατά Taylor περί το σημείο x, την $T(x+dx)$, και την $\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx}$, αντικαταστήστε στη σχέση του ερωτήματος-β, [αγνοείστε όρους ανάλογους του $(dx)^2$], και γράψτε την εξίσωση εγκάρσιων κυμάτων στο συγκεκριμένο μέσο, συναρτήσει των παραμέτρων $\left[m,\rho,L,g\right]$ και των μεταβλητών $\left[x,t\right]$.[(**β-γ**): ***Προσέγγιση μικρών γωνιών***]

(δ) Αν θεωρήσουμε ότι ισχύει $c(x)=\sqrt{T(x)/\rho},\quad Z(x)=\sqrt{T(x)\rho}$, υπολογίστε την μεταβολή του μήκους κύματος ως συνάρτησης της θέσης $\lambda=\lambda(x)$ και την μεταβολή του πλάτους ενός αρμονικού κύματος ως συνάρτησης της θέσης $A=A(x)$, θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν μηχανισμοί απώλειας ενέργειας στο σύστημα.



7. Στο σύστημα του σχήματος δύο χορδές με γραμμικές πυκνότητες μάζας ρ_1, ρ_2 και μήκη L_1 και L_2, αντίστοιχα, τείνονται με τάση T, κατά μήκος του άξονα x. Στο σημείο σύνδεσης των δύο τμημάτων, x=0, είναι συνδεδεμένο ελατήριο σταθεράς s. Τα άκρα των χορδών είναι ακλόνητα και το ελατήριο στο φυσικό του μήκος. Να βρείτε τη σχέση από την οποία υπολογίζονται οι συχνότητες των Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης του συστήματος: $y_{1,2}(x,t)=f_{1,2}(x)\cos(\omega t)$

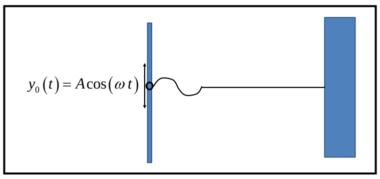


8. Ιδανική χορδή με γραμμική πυκνότητα μάζας ρ_1 συνδέεται, στο σημείο $x=0$, μέσω δακτυλιδού με αμελητέα μάζα, με δεύτερη ιδανική χορδή με γραμμική πυκνότητα μάζας ρ_2=2ρ_1. Η πρώτη χορδή τείνεται με τάση T_1 και η δεύτερη χορδή τείνεται με τάση T_2=T_1/2. Η διαφορά των δύο τάσεων απορροφάται από εγκάρσια ακλόνητη ράβδο, επί της οποίας το δακτυλίδι σύνδεσης των χορδών μπορεί να κινείται χωρίς τριβή, και η οποία περιβάλλεται από δύο ελατήρια με σταθερά σκληρότητας s/2 το καθένα, με το ένα άκρο τους ακλόνητο και το άλλο συνδεδεμένο στο δακτυλίδι, όπως στο σχήμα. Οι δύο χορδές έχουν «ημι-άπειρο» μήκος και, στην πρώτη χορδή διεγείρεται (στο $x\to-\infty$) εγκάρσιο δεξιά οδεύον αρμονικό κύμα (στο επίπεδο του σχήματος) με κυκλική συχνότητα ω.

(α) Να γραφούν οι μιγαδικές μορφές των κυμάτων που υπάρχουν στο σύστημα, μετά την αποκατάσταση μόνιμης κατάστασης (αγνοώντας τα φαινόμενα των άκρων $x\to\pm\infty$, λόγω μεγάλης απόστασης).

(β) Να γραφούν οι συνοριακές συνθήκες στο σημείο $x=0$, και να υπολογισθεί ο συντελεστής ανάκλασης πλάτους (r), συναρτήσει του μεγέθους $\lambda\equiv s\big/\left(\omega\sqrt{T_1\rho_1}\right)$.

(γ) Αν λ=2, να υπολογισθεί το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης πλάτους, καθώς και η διαφορά φάσης μεταξύ προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος.



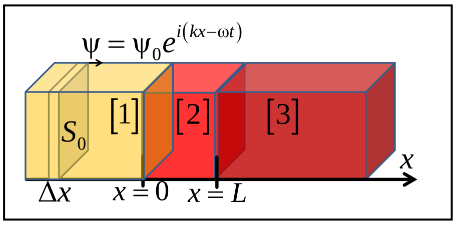
9. Ιδανική χορδή μήκους L, που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x, έχει γραμμική πυκνότητα μάζας ρ, τείνεται με τάση T και η εγκάρσια κυμανσή της $y=y(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση $T\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\rho\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Το ένα άκρο της χορδής $x=L$ στηρίζεται σε ακλόνητο σημείο. Το άλλο άκρο $x=0$ είναι συνδεδεμένο σε κινητήρα, μέσω δακτυλιδιού αμελητέας μάζας που μπορεί να κινείται χωρίς τριβή σε ράβδο εγκάρσια προς τη χορδή.

Ο κινητήρας προσδίδει στο δακτυλίδι κίνηση της μορφής $y(x=0,t)=y_0(t)=A\cos(\omega t)$, όπου ω είναι ελεγχόμενη συχνότητα διέγερσης (του κινητήρα) και A δεδομένο πλάτος. Αν η μόνιμη κίνηση της χορδής, για κάθε συχνότητα ω, είναι της μορφής $y(x,t)=f(x)\cos(\omega t)$:

(α) Να υπολογιστεί η διαφορική εξίσωση την οποία ικανοποιεί η $f(x)$, να γραφεί η γενική μορφή της $f(x)$, καθώς και η ειδική λύση που είναι συνεπής με τη συγκεκριμένη συνοριακή συνθήκη στο σταθερό άκρο της χορδής, $x=L$.
(β) Να αντικατασταθεί η λύση $f(x)$ του ερωτήματος-α στην $y(x,t)=f(x)\cos(\omega t)$, να εφαρμοστεί η συνοριακή συνθήκη στο $x=0$, $\left(y(x=0,t)=A\cos(\omega t)\right)$, και να υπολογισθούν οι συχνότητες διέγερσης ω, που μεγιστοποιούν το πλάτος ταλάντωσης, (που συμπεριφέρονται, επομένως, ως συχνότητες συντονισμού του συστήματος).
(γ) Να διερευνηθεί αν οι συχνότητες «συντονισμού» του ερωτήματος-β αντιστοιχούν σε άκρα, (γ_1) Ελεύθερο-Ελεύθερο, (γ_2) Ελεύθερο – Ακλόνητο, ή (γ_3) Ακλόνητο-Ακλόνητο ; Εξηγήστε.

10. Όταν σε ένα γεωλογικό στρώμα διατομής S_0 διαδίδονται επίπεδα διαμήκη σεισμικά κύματα κατά μήκος της διεύθυνσης x (κάθετα στη διατομή S_0), τότε η εξίσωση κίνησης, για την απομάκρυνση ψ από την κατάσταση ισορροπίας, ενός στοιχειώδους όγκου $S_0\Delta x$, έχει τη μορφή: $(\rho S_0 \Delta x)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) \approx (S_0 E)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Delta x\right)$, όπου ρ: πυκνότητα, και E: μέτρο ελαστικότητας του Young..

(α) Γράψτε τη θεμελιώδη σχέση της Μηχανικής ***από την οποία προκύπτει*** η παραπάνω μορφή και εξηγείστε τη φυσική σημασία κάθε μίας από τις παρενθέσεις της σχέσης που δίδεται. Κάνοντας τις κατάλληλες απλοποιήσεις, γράψτε τη διαφορική εξίσωση για τα αντίστοιχα διαμήκη κύματα, και υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης c αυτών των κυμάτων.

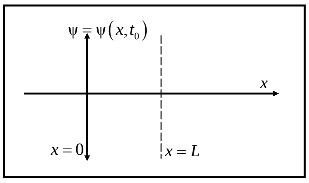


(β) Σε μία σειρά γεωλογικών στρωμάτων [1] $(-\infty < x \le 0)$, [2] $(0 \le x \le L)$, [3] $(L \le x \le \infty)$, όπως στο σχήμα, διαδίδεται δεξιά οδεύον αρμονικό κύμα, πλάτους Ψ_0=1 cm και συχνότητας f=50Hz. Τα στρώματα [1] και [3] είναι ομοιογενή, ενώ στο [2] η χημική σύνθεση και οι ιδιότητες μεταβάλλονται συναρτήσει του x, όπως στον Πίνακα

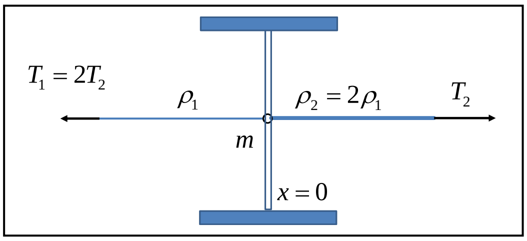
	[1]	[2]	[3]
E (GPa=10^9 N/m^2)	E_0=54	$E_0\, e^{3x/L}$	$E_0\, e^3$
ρ (gr/cm^3)	ρ_0 =6	$\rho_0\, e^{x/L}$	$\rho_0\, e^1$

Η σύνθετη μηχανική (κυματική) αντίσταση (του συστήματος που περιγράφεται στην εκφώνηση) είναι: (Δύναμη)/(Μονάδα Ταχύτητας): $Z=S_0\sqrt{E\rho}$, και η ισχύς του αντίστοιχου κύματος, είναι $P=A^2\omega^2 Z/2$, ενώ το σύστημα χαρακτηρίζεται από μηδενικές απώλειες. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης c, τη σύνθετη μηχανική αντίσταση ανά μονάδα διατομής και το μήκος κύματος λ, σε κάθε γεωλογικό στρώμα, συμπληρώνοντας τον επόμενο Πίνακα.
(γ) Λαμβάνοντας υπόψη σας ότι δεν υπάρχουν φαινόμενα ανάκλασης, (επειδή οι ιδιότητες των στρωμάτων μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο), να υπολογίσετε το πλάτος Ψ, σε κάθε γεωλογικό στρώμα και να συμπληρώσετε τις τιμές, επίσης στον Πίνακα που ακολουθεί.

	[1]	[2]	[3]
c (m/s)			
Z/S_0 (kg/s/m^2)			
λ (m)			
Ψ (cm)			



(γ) Να σχεδιάσετε στο διπλανό σχήμα ένα στιγμιότυπο του κύματος $\psi=\psi(x,t_0)=\psi_0(x)e^{i(k(x)x-\omega t_0)}$, για t_0 τέτοιο ώστε το κύμα να βρίσκεται και στις τρεις περιοχές [1], [2], [3]. Να υπολογίσετε τους συντελεστές ανάκλασης πλάτους $r=(Z_1-Z_3)/(Z_1+Z_3)$, διάδοσης πλάτους $t=2Z_1/(Z_1+Z_3)$, αν απουσίαζε το μεταβατικό στρώμα [2].



11. Ιδανική χορδή με γραμμική πυκνότητα μάζας ρ_1 συνδέεται, στο σημείο $x=0$, μέσω δακτυλιδιού μάζας m, με δεύτερη ιδανική χορδή με γραμμική πυκνότητα μάζας $\rho_2=2\rho_1$. Η πρώτη χορδή τείνεται με τάση T_1 και η δεύτερη χορδή τείνεται με τάση $T_2=T_1/2$. Η διαφορά των δύο τάσεων απορροφάται από εγκάρσια ακλόνητη ράβδο, επί της οποίας το δακτυλίδι σύνδεσης των χορδών μπορεί να κινείται χωρίς τριβή. Οι δύο χορδές έχουν «ημι-άπειρο» μήκος και, στην πρώτη χορδή διεγείρεται (στο $x \to -\infty$) εγκάρσιο δεξιά οδεύον αρμονικό κύμα (στο επίπεδο του σχήματος) με κυκλική συχνότητα ω.

(α) Να γραφούν οι μιγαδικές μορφές των κυμάτων που υπάρχουν στο σύστημα, μετά την αποκατάσταση μόνιμης κατάστασης (αγνοώντας τα φαινόμενα των άκρων $x \to \pm\infty$, λόγω μεγάλης απόστασης).

(β) Να γραφούν οι συνοριακές συνθήκες στο σημείο $x=0$, και να υπολογισθεί ο συντελεστής ανάκλασης πλάτους (r), στην ασυνέχεια $x=0$, συναρτήσει του μεγέθους $\lambda \equiv (\omega m)\big/\sqrt{T_1\rho_1}$.

(γ) Αν λ=1, να υπολογισθεί το μέτρο του συντελεστή ανάκλασης πλάτους, καθώς και η εφαπτομένη της διαφοράς φάσης μεταξύ προσπίπτοντος και ανακλώμενου κύματος.

12. Δύο ιδανικές χορδές, με γραμμικές πυκνότητες μάζας $\rho_{(1)} < \rho_{(2)}$ και κοινό μήκος L=1m, είναι συνδεδεμένες παράλληλα στον ίδιο μηχανισμό και τείνονται με μία τάση T, μεταξύ ακλόνητων άκρων. (α) Αν η μία χορδή έχει γραμμική πυκνότητα μάζας $\rho_{(1)}$=0,001 kg/m, να υπολογισθεί η τάση T ώστε αυτή η χορδή να έχει θεμελιώδη συχνότητα $f_{(1)1}$=200 Hz. (β) Να υπολογισθεί η πυκνότητα $\rho_{(2)}$ της δεύτερης χορδής , ώστε οι θεμελιώδεις συχνότητες των δύο χορδών να έχουν λόγο 2/1 (σχέση οκτάβας). (γ) Δύο χορδές μεγάλου μήκους, με γραμμικές πυκνότητες μάζας $\rho_{(1)} <$ $\rho_{(2)}$, όπως αυτές των ερωτημάτων α-β, συνδέονται με ιδανικό τρόπο (χωρίς μεσολάβηση σημειακής μάζας) η μία μετά την άλλη και τείνονται με την τάση T του ερωτήματος-α. Να υπολογιστεί το ποσοστό ανακλώμενης ισχύος, κατά τη διάδοση εγκάρσιου κύματος από την $\rho_{(1)}$ προς την $\rho_{(2)}$.

13. Ιδανική χορδή μήκους L, που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x, έχει μεταβλητή γραμμική πυκνότητα μάζας, $\rho(x) = \rho_0\left(1 + x^2/L^2\right)$ και τείνεται με τάση T .

(α) Να παραχθεί η διαφορική εξίσωση κύματος που ικανοποιεί μία εγκάρσια διαταραχή, $y = y(x,t)$, της χορδής, στην προσέγγιση των μικρών γωνιών, $(\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta)$, και να υπολογισθεί η ταχύτητα διάδοσης κύματος $c = \sqrt{T/\rho}$ και η σύνθετη μηχανική αντίσταση (κυματική αντίσταση) $\mathrm{Z} = \sqrt{T\rho}$, ως συνάρτηση της θέσης x, κατά μήκος του συστήματος.

(β) Στην περίπτωση που διεγείρουμε, στο άκρο $x=0$, αρμονική ταλάντωση, $y(x=0,t) = A\cos(\omega t)$, σε μόνιμη κατάσταση, να υπολογίσετε το μήκος κύματος της διαταραχής που διαδίδεται στη χορδή, ως συνάρτηση της θέσης x, $\lambda = \lambda(x)$, και να σχεδιάσετε, κατά προσέγγιση (ποιοτικά), ένα στιγμιότυπο αυτής της κίνησης, τη χρονική στιγμή που η ταλάντωση αυτή φτάνει στο άκρο x=L.

(γ) Η παραπάνω χορδή συνδέεται στο σημείο x=L με ιδανική χορδή, που έχει μεγάλο μήκος και ομοιόμορφη γραμμική πυκνότητα μάζας ρ_2, και το σύστημα εξακολουθεί να τείνεται με τάση T.

(**γ₁**) Πόση πρέπει να είναι η γραμμική πυκνότητα ρ_2 προκειμένου να μην έχουμε καθόλου ανακλώμενο κύμα στο σημείο x=L ; (**γ₂**) Πόση πρέπει να είναι η γραμμική πυκνότητα ρ_2 προκειμένου να έχουμε, στο σημείο x=L, ανάκλαση ισχύος κατά 25% ; Σε αυτή την περίπτωση, ποιές είναι οι τιμές των συντελεστών ανάκλασης πλάτους, διέλευσης πλάτους, και διέλευσης ισχύος ; Δίνονται:

Συντελεστές Ανάκλασης: Πλάτους: $r \equiv \dfrac{A_r}{A_i} = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$, Ισχύος: $R \equiv \left(\dfrac{A_r}{A_i}\right)^2 = \left(\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$

Συντελεστές Διέλευσης: Πλάτους: $t \equiv \dfrac{A_t}{A_i} = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$, Ισχύος: $T = \dfrac{Z_2 A_t^2}{Z_1 A_i^2} = \dfrac{4Z_1 Z_2}{\left(Z_1 + Z_2\right)^2}$

14. Θεωρήσετε ιδανική ομοιογενή χορδή μήκους *α* και γραμμικής πυκνότητας *ρ*, καθώς και ιδανική ομοιογενή τετραγωνική μεμβράνη πλευράς *b* και επιφανειακής πυκνότητας *σ*, αμφότερα τα ελαστικά μέσα με ακλόνητα άκρα.

(α) Αν T_μ είναι η τάση ανά μονάδα μήκους με την οποία τείνεται ομοιόμορφα η μεμβράνη, να υπολογίσετε την τάση T_χ με την οποία πρέπει να τείνεται η χορδή, προκειμένου η συχνότητα του πρώτου εγκάρσιου κανονικού τρόπου ταλάντωσης των δύο ελαστικών μέσων να είναι κοινή, $f_{\chi(1)} = f_{\mu(1,1)}$, («κούρδισμα»).

(β) Στην περίπτωση αυτή, να υπολογίσετε το πηλίκο των συχνοτήτων για τον αμέσως επόμενο («δεύτερο») κανονικό τρόπο ταλάντωσης των δύο μέσων.

(γ) Περιγράψτε, (είτε αναλυτικά, $z = z\left(x, y, t\right)$, είτε με ένα απλό σχήμα), τους δύο διαφορετικούς τρόπους κίνησης της μεμβράνης, που αντιστοιχούν σε αυτόν τον «δεύτερο» κανονικό τρόπο ταλάντωσης.

(δ) Αν a=2b=1m, και η κοινή θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_{\chi(1)} = f_{\mu(1,1)} = 50\ \mathrm{Hz}$, να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων στα δύο μέσα.

(ε) Σε ένα κυματικό μέσο, στο οποίο η ταχύτητα διάδοσης κύματος δίνεται με τη μορφή $c = \sqrt{\left(\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \sigma\kappa\lambda\eta\rho\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma\right) / \left(\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \alpha\delta\rho\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma\right)}$, με ποιά μορφή θα δίνεται η μηχανική σύνθετη (κυματική) αντίσταση του ίδιου μέσου;

15. Μεταλλική γέφυρα μήκους L, που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x, συμπεριφέρεται ως μη-ιδανική χορδή της οποίας οι εγκάρσιες ταλαντώσεις υπακούουν την κυματική εξίσωση $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \omega_0^2 y$, όπου ω_0^2 μία θετική σταθερά. α) Υπολογίστε τη σχέση διασποράς ω=ω(k) για στάσιμα ή/και οδεύοντα εγκάρσια κύματα της γέφυρας. β) Αν τα δύο άκρα της γέφυρας είναι είναι ακλόνητα, βρείτε τους κυματαριθμούς k_n και τις ιδιοσυχνότητες ω_n των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (ή στασίμων κυμάτων), $y(x,t)=f(x)\cos(\omega t+\varphi)$. γ) Οταν φυσάει ένα μόνιμο ρεύμα αέρα, η γέφυρα υφίσταται μία μόνιμη εγκάρσια παραμόρφωση η οποία δίνεται από τη σχέση: $y(x)=f_0(x)=4D\dfrac{x}{L}\left(1-\dfrac{x}{L}\right)$. Αν θεωρήσουμε ως αρχή των χρόνων, t=0, τη χρονική στιγμή κατά την οποία παύει απότομα το ρεύμα αέρος που είναι υπεύθυνο για την παραμόρφωση, χωρίς καμία άλλη διαταραχή, δείξτε ότι η χρονική εξέλιξη της κίνησης της χορδής περιγράφεται από μία σχέση της μορφής $y(x,t) = \sum_n A_n \sin(k_n x + \varphi_{xn}) \cos(\omega_n t + \varphi_{tn})$, προσδιορίστε τις σταθερές, k_n, ω_n, A_n, φ_{xn}, φ_{tn}, και υπολογίσετε την κίνηση της γέφυρας $y=y(x,t)$, για t>0.