Φυλλάδιο VII

① • Για το δίκαιο νόμισμα

$\mathbb{P}[A_1] = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}[A_2] = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}[A_2|A_1] = \frac{1}{4} \Rightarrow \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \mathbb{P}[A_2|A_1] \cdot \mathbb{P}[A_1] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

↳ $\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] \neq \mathbb{P}[A_1]\mathbb{P}[A_2]$

Άρα τα A_1 και A_2 είναι εξαρτημένα.

• Για το κίβδηλο νόμισμα

$\mathbb{P}[A_1] = \frac{3}{4}$

$\mathbb{P}[A_2] = \frac{3}{4}$

$\mathbb{P}[A_2|A_1] = \frac{9}{16} \Rightarrow \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \mathbb{P}[A_2|A_1]\,\mathbb{P}[A_1] = \frac{9}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$

↳ $\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] \neq \mathbb{P}[A_1]\mathbb{P}[A_2]$

Άρα τα A_1 και A_2 είναι εξαρτημένα.

③ $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

a) $f_X(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

$\mathbb{P}[X < 1{,}22] = \int_{-\infty}^{1{,}22} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \left[\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{2}\right]_{-\infty}^{1{,}22} \Rightarrow \underline{\mathbb{P}[X < 1{,}22] \approx 0{,}89}$

β) $f_X(x) = \cancel{e^{-\frac{(x-1)^2}{\sqrt{2\pi}}}} \; \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

$\mathbb{P}[X > 2{,}7] = \int_{2{,}7}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \approx 0{,}045 \Rightarrow \underline{\mathbb{P}[X > 2{,}7] \approx 0{,}045}$

$\mathbb{P}[X < -4{,}7] = \int_{-\infty}^{-4{,}7} \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx \approx 0$

$\mathbb{P}[X < -4{,}7 \text{ ή } X > 2{,}7] = \mathbb{P}[X < -4{,}7] + \mathbb{P}[X > 2{,}7]$

↳ $\underline{\mathbb{P}[X < -4{,}7 \text{ ή } X > 2{,}7] = 0{,}045}$

γ) $\mathbb{P}[X > 2{,}1 \text{ ή } -1 < X < 1] = \mathbb{P}[X > 2{,}1] + \mathbb{P}[-1 < X < 1] = \int_{2{,}1}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dx$

$\approx 0{,}136 + 0{,}477 \Rightarrow \underline{\mathbb{P}[X > 2{,}1 \text{ ή } -1 < X < 1] \approx 0{,}613}$

δ) $f_X(x) = \dfrac{e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}}{2\sqrt{2\pi}}$

$$P[X>3] = \int_3^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}}{2\sqrt{2\pi}}\,dx \simeq 0{,}0228$$

$$P[X>2] = \int_2^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x+1)^2}{8}}}{2\sqrt{2\pi}}\,dx \approx 0{,}0668$$

$$P[X>3 \mid X>2] = \frac{P[\{X>3\}\cap\{X>2\}]}{P[X>2]} = \frac{P[X>3]}{P[X>2]} = \frac{0{,}0228}{0{,}0668}$$

$\underline{P[X>3 \mid X>2] \approx 0{,}341}$

ε) $f_X(x) = \dfrac{e^{-\frac{(x+2)^2}{7}}}{\sqrt{7\pi}}$

$$E[Y] = E[1-X^2] = \int_{\mathbb{R}} (1-x^2) f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2)\cdot \frac{e^{-\frac{(x+2)^2}{7}}}{\sqrt{7\pi}}\,dx \approx -6{,}5$$

$\underline{E[Y] \approx -6{,}5}$

$$E[V] = E[(X+2)^{15}] = \int_{\mathbb{R}} (x+2)^{15} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+2)^{15}\cdot \frac{e^{-\frac{(x+2)^2}{7}}}{\sqrt{7\pi}}\,dx \approx 0$$

$\underline{E[V] \approx 0}$

στ) $\mu=2$, $P[X<0] = \frac{1}{3}$, $f_X(x) = \dfrac{e^{-\frac{(x-2)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$

$$P[X<0] = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\frac{(x-2)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,dx = -\frac{\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)-1}{2} = -\frac{1}{3} \iff \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \approx \frac{0{,}43}{\sqrt{2}} \iff \sigma \approx \frac{2}{0{,}43} \iff \underline{\sigma^2 \approx 21{,}633}$$

④ $f_X(x) = \begin{cases} c x^{-r}, & x \geq 1 \\ 0, & x<1 \end{cases}$

α) Από ιδιότητες σππ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = \int_1^{+\infty} c x^{-r}\,dx \underset{(r\neq 1)}{=} \left[c\,\frac{x^{1-r}}{1-r}\right]_1^{+\infty} = c\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-r}}{1-r} - \frac{1}{1-r}\right]$$

↳ Αν $r<1$: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^{1-r}}{1-r} \underset{y=1-r}{\overset{1-r>0}{=}} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^y}{y} = +\infty$, άτοπο

Αν $r>1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{1-r}}{1-r} \underset{y<0}{\overset{y=1-r}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{y x^{-y}} = 0$, δεκτό

Αν $r=1$: $\int_1^{+\infty} c\frac{1}{x}dx = c[\ln x]_1^{+\infty} = +\infty$, απορρίπτεται

ΆΡΑ $r>1$

β) $1 = c\left[\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{1-r}}{1-r} - \frac{1}{1-r}\right] \Leftrightarrow \frac{1}{c} = 0 - \frac{1}{1-r} \Leftrightarrow c = r-1$

$$f_X(x) = \begin{cases} (r-1)x^{-r}, & x\geq 1,\ r>1 \\ 0, & x<1 \end{cases}$$

γ) $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx = \int_1^{+\infty} (r-1)x^{1-r}dx \underset{(r\neq 2)}{=} (r-1)\left[\frac{x^{2-r}}{2-r}\right]_1^{+\infty} = (r-1)\left[\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{2-r}}{2-r} - \frac{1}{2-r}\right] < +\infty$

↳ Αν $r<2$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{2-r}}{2-r} \underset{y>0}{\overset{y=2-r}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^y}{y} = +\infty$, απορρίπτεται

Αν $r>2$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{2-r}}{2-r} \underset{y<0}{\overset{y=2-r}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{y x^{-y}} = 0$, δεκτό

Αν $r=2$: $\mathbb{E}[X] = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^{+\infty} = +\infty$, απορρίπτεται

ΆΡΑ $r>2$

δ) $\mathbb{E}[X^a] = \int_1^{+\infty} x^a (r-1)x^{-r}dx \underset{(a\neq r-1)}{=} (r-1)\left[\frac{x^{1+a-r}}{1+a-r}\right]_1^{+\infty} = (r-1)\left[\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{1+a-r}}{1+a-r} - \frac{1}{1+a-r}\right] < +\infty$

↳ Αν $a>-1+r$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{1+a-r}}{1+a-r} \underset{y>0}{\overset{y=1+a-r}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^y}{y} = +\infty$, απορρίπτεται

Αν $a<r-1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{1+a-r}}{1+a-r} \underset{y<0}{\overset{y=1+a-r}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{y x^{-y}} = 0$, δεκτό

Αν $a=r-1$: $\mathbb{E}[X] = \int_1^{+\infty} \frac{r-1}{x}dx = (r-1)[\ln x]_1^{+\infty} = +\infty$, απορρίπτεται

ΆΡΑ $a<r-1$

(7) $X \sim N(\mu, \sigma^2) \to f_X(x) = \dfrac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$

$E[e^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,dx \Rightarrow \underline{E[e^{tX}] = e^{(\sigma^2 t^2 + 2\mu t)/2}}, \; t \in \mathbb{R}$

(9) α) Μια ακμή:

- συνδέει δύο κορυφές ίδιου χρώματος (ενδεχόμενο Ι)
- συνδέει δύο κορυφές διαφορετικού χρώματος (ενδεχόμενο Δ)

$P[\Delta] = P[A_1 = $ η μια κορυφή είναι κόκκινη $| A_2 = $ η μια κορυφή δεν είναι κόκκινη$]$

$= \dfrac{P[A_1 \cap A_2]}{P[A_2]}$ όμως τα A_1 και A_2 είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα, όρα

$P[\Delta] = \dfrac{P[A_1]P[A_2]}{P[A_2]} = P[A_1] = \dfrac{1}{2}$ για κάθε μια ακμή

Για $|E|$ ακμές: $\underline{P[\#\text{ακμών που συνδέουν } \sout{\text{ακμές}} \text{ κορυφές διαφορετικού χρώματος}] = \frac{|E|}{2}}$

β) Μπορούμε να διαχωρίσουμε το V σε δύο υποσύνολα:

- V_1, οι κόκκινες κορυφές
- V_2, οι μη-κόκκινες κορυφές.

Λόγω του (α) υπάρχουν $\dfrac{|E|}{2}$ ακμές που ενώνουν τα 2 υποσύνολα μεταξύ τους.

Scanné avec CamScanner