

# ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

## Σ.Η.Μ.Μ.Υ.- ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΙΙΙ

**Άσκηση 1** Οι  $N$  πελάτες ενός εστιατορίου αφήνουν κατά την είσοδό τους το πανωφόρι τους στην γκαρνταρόμπα του εστιατορίου. Λόγω ενός λάθους στον τρόπο φύλαξής τους, τα πανωφόρια μοιράζονται τυχαία στους  $N$  πελάτες όταν εκείνοι φεύγουν από το εστιατόριο. Ποια είναι η πιθανότητα να μην λάβει κανένας πελάτης το σωστό πανωφόρι;

**Άσκηση 2** Έστω τρία οποιαδήποτε ενδεχόμενα  $A, B$  και  $C$ .

(α) Να δείξετε ότι  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|A \cap B)$ .

(β) Να βρεθεί η δεσμευμένη πιθανότητα  $\mathbb{P}(A|B)$  αν  $A \cap B = \emptyset$ , αν  $A \subset B$ , και αν  $B \subset A$ .

(γ) Να δείξετε ότι  $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$  αν και μόνο αν  $\mathbb{P}(B|A) > \mathbb{P}(B)$ .

Βεβαιωθείτε ότι κατανοείτε διαισθητικά γιατί ισχύουν τα παραπάνω.

**Άσκηση 3** Ένα ψηφιακό σύστημα επικοινωνίας αποτελείται από ένα πομπό και ένα δέκτη. Για τη μετάδοση ενός bit ο πομπός στέλνει ένα σήμα που αντιστοιχεί είτε στο ψηφίο 0 είτε στο ψηφίο 1. Ο δέκτης λαμβάνει το σήμα (παμορφωμένο ενδεχομένως) και προσπαθεί να ερμηνεύσει το ψηφίο εκπομπής. Θεωρήστε τα παρακάτω ενδεχόμενα:  
 $\Pi_0 = \{\text{ο πομπός εκπέμπει } 0\}$ ,  $\Delta_0 = \{\text{ο δέκτης ερμηνεύει } 0\}$ ,  
 $\Pi_1 = \{\text{ο πομπός εκπέμπει } 1\}$ ,  $\Delta_1 = \{\text{ο δέκτης ερμηνεύει } 1\}$ .  
Υποθέτουμε ότι  $\mathbb{P}[\Pi_0] = \frac{4}{5}$ ,  $\mathbb{P}[\Delta_0 | \Pi_0] = \frac{99}{100}$ , και  $\mathbb{P}[\Delta_1 | \Pi_1] = \frac{97}{100}$ .

(α) Ποια είναι η πιθανότητα να συμβεί σφάλμα κατά τη μετάδοση;

(β) Ποια είναι η πιθανότητα να έχει συμβεί σφάλμα, αν ο δέκτης έχει ερμηνεύσει το ψηφίο μετάδοσης ως 1;

**Άσκηση 4** Σε κάποιο πληθυσμό, το 8% των ατόμων έχει το στίγμα της μεσογειακής αναιμίας. Έστω ότι ένα τυχαία επιλεγμένο άτομο κάνει μια εξέταση για να διαπιστώσει αν έχει το στίγμα ή όχι. Η εξέταση δεν είναι απόλυτα ακριβής, και η πιθανότητα το αποτέλεσμα να βγει θετικό, ενώ δεν υπάρχει στίγμα, είναι 10%. Επιπλέον, η πιθανότητα να βγει το αποτέλεσμα αρνητικό, ενώ υπάρχει στίγμα, είναι 1%.

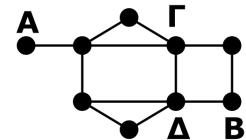
(α) Ποια η πιθανότητα να έχει στίγμα κάποιος που κάνει την εξέταση και προκύπτει θετικό αποτέλεσμα;

(β) Ποια είναι η αντίστοιχη πιθανότητα για κάποιον που κάνει την εξέταση δύο ανεξάρτητες φορές, και προκύπτει θετικό αποτέλεσμα την πρώτη φορά και αρνητικό αποτέλεσμα τη δεύτερη;

**Άσκηση 5** Ένας μαθηματικός και ένας αριστοκράτης εμπλέκονται σε μια μονομαχία. Πυροβολούν εναλλάξ, με τον μαθηματικό να ξεκινά πρώτος, ώσπου ένας από τους δύο να χτυπηθεί. Αν κάθε φορά που πυροβολεί ο μαθηματικός η πιθανότητα ευστοχίας του είναι  $p$  και αντίστοιχα η πιθανότητα ευστοχίας για τον αριστοκράτη είναι  $q$ , υπολογίστε την πιθανότητα να βγει νικητής ο μαθηματικός.

**Άσκηση 6** Ένα μοντέλο προτείνει ότι η πιθανότητα ένα ζευγάρι να έχει  $k$  ακριβώς παιδιά είναι  $p_k = \left(\frac{11}{23}\right)^k$ , για  $k = 1, 2, \dots$ . Ποια πιθανότητα αποδίδει το μοντέλο στο ενδεχόμενο να μην αποκτήσει παιδιά ένα ζευγάρι; Ποια είναι η πιθανότητα κατά το μοντέλο οι θυγατέρες ενός ζευγαριού να είναι ακριβώς 2;

**Άσκηση 7** \*Στο δίκτυο του διπλανού σχήματος οι κόμβοι είναι εξυπηρετητές, και κάθε σύνδεση είναι λειτουργική με πιθανότητα  $p$  ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχει λειτουργικός δίαυλος επικοινωνίας ανάμεσα στους εξυπηρετητές A και B;



**Άσκηση 8** \*Στην ταινία “Τρέξε Λόλα τρέξε” η Λόλα έχει 1.000 μάρκα και χρειάζεται να συγκεντρώσει 1.000.000 μάρκα για να σώσει τον φίλο της Ντόνι από τα χέρια της μαφίας. Η Λόλα μπαίνει σ’ ένα καζίνο και προσπαθεί να συγκεντρώσει το ποσό στη ρουλέτα. Μπορεί είτε να ποντάρει σε αριθμό με πιθανότητα επιτυχίας  $\frac{1}{38}$  οπότε και παίρνει 36 φορές το ποντάρισμά της αν νικήσει, είτε σε χρώμα με πιθανότητα επιτυχίας  $\frac{18}{38}$  οπότε και παίρνει 2 φορές το ποντάρισμά της αν νικήσει. Η Λόλα θέλει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο στρατηγικές. Είτε να ποντάρει συνέχεια 1 μάρκο σε χρώμα μέχρι να συγκεντρώσει το ποσό που χρειάζεται ή να χάσει, είτε να ποντάρει όλο το ποσό της σε έναν αριθμό και αν κερδίσει να ποντάρει πάλι τα πάντα στον ίδιο αριθμό. Ποια στρατηγική έχει μεγαλύτερη πιθανότητα επιτυχίας;