"Κυματική και Κβαντική Φυσική"

3η Σειρά Ασκήσεων

Άσκηση 16

α) Η ενέργεια της ακτινοβολίας: $E_{o\lambda} = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$, όπου $h = 4{,}1357 \cdot 10^{-15}\, eVs$,

$\lambda = 1000$ Angstrom και $c = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{10}\, \frac{Å}{s}$

$$\Rightarrow E_{o\lambda} = \frac{12{,}4071 \cdot 10^3}{1000} \Leftrightarrow E_0 = 12{,}4071\, eV$$

Επίσης: $E_k = E_{o\lambda} - W = 9{,}4\, eV$, όπου

$$E_k = \frac{1}{2} m_e u^2 \Leftrightarrow u^2 = \frac{2E_k}{m_e} = \frac{2 \cdot 9{,}4}{0{,}5 \cdot 10^6} c^2 = \frac{4 \cdot 9{,}4 c^2}{10^6} \Leftrightarrow u = 2c\sqrt{9{,}4} \cdot 10^{-3}$$

$$u = 18{,}3956 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{18} \Rightarrow u \simeq 1{,}84 \cdot 10^6\, m/s$$

β) Το δυναμικό αποκοπής V_0 πρέπει να μπορεί να αντισταθμίσει πλήρως την κινητική ενέργεια και να μηδενίσει το ρεύμα, άρα

$V_0 = E_k \Leftrightarrow V_0 = 9{,}4\, eV$

Άσκηση 18

α) Ισχύει: $F_n = \frac{dV}{dr} = 4\lambda r_n^3$ και

$F_n = m \cdot \frac{u_n^2}{r_n} \Leftrightarrow u_n^2 = \frac{F_n \cdot r_n}{m}$

$$u_n^2 = \frac{4\lambda \cdot r_n^4}{m} \quad (1)$$

Συνεπώς: $E_n = \frac{1}{2} m u_n^2 + V(r_n) = 2\lambda r_n^4 + \lambda r_n^4 = 3\lambda r_n^4$

Ισχύει επίσης: $m \cdot u_n \cdot r_n = n \cdot \hbar \Leftrightarrow r_n = \frac{n \cdot \hbar}{m \cdot u_n} \Leftrightarrow r_n^4 = \frac{n^4 \cdot \hbar^4}{m^4 \cdot u_n^4}$ (2)

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι: $r_n^4 = \frac{n^4 \cdot \hbar^4}{m^4} \cdot \frac{m^2}{16\lambda^2 \cdot r_n^8} \Leftrightarrow r_n^{12} = \frac{\cancel{m^2}}{16\lambda^2} \cdot \frac{n^4 \hbar^4}{m^{42}} \rightarrow$

$$\Leftrightarrow r_n^4 = \sqrt[3]{\frac{n^4 \hbar^4}{16\lambda^2 m^2}}$$

$$\Rightarrow E_n = 3\lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{n^4 \hbar^4}{16\lambda^2 m^2}}$$

β) Για την ενέργεια του φωτονίου ισχύει:

$$E_\varphi = E_{n_i} - E_{n_f} = 3\lambda \sqrt[3]{\frac{\hbar^4}{16\lambda^2 m^2}} \cdot \left(\sqrt[3]{n_i^4} - \sqrt[3]{n_f^4}\right)$$

$$\Rightarrow hf = 3\lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{\hbar^4}{16\lambda^2 m^2}} \left(\sqrt[3]{n_i^4} - \sqrt[3]{n_f^4}\right)$$

$$\Rightarrow f = 3\lambda \cdot \sqrt[3]{\frac{\hbar}{16\lambda^2 \cdot m^2}} \cdot \left[\sqrt[3]{n_i^4} - \sqrt[3]{n_f^4}\right]$$

Άσκηση 19

α) $$J = \frac{2\pi h}{c^2} \cdot \frac{f^3}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1} = \frac{2\pi h}{\cancel{c^2}} \cdot \frac{c^{\cancel{3}}}{\lambda^3} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1}$$

$$J = \frac{2\pi h \cdot c}{\lambda} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hf}{kT}\right) - 1}$$

β) Για τον κεραυνό: $\lambda_{max_k} = \frac{0,29}{10^4} = 29 \cdot 10^{-6}\ cm = 29 \cdot 10^{-8}\ m$

Για την πυρηνική έκρηξη: $\lambda_{max_n} = \frac{0,29}{10^7} = 29 \cdot 10^{-9}\ cm = 29 \cdot 10^{-11}\ m$

$$\frac{J_{max_k}}{J_{max_n}} = \frac{\cancel{2\pi hc} \cdot (29 \cdot 10^{-11})^3 \cdot \left[\exp\left(\frac{hc}{29 \cdot 10^{-11} k \cdot 10^7}\right) - 1\right]}{\cancel{2\pi hc} \cdot (29 \cdot 10^{-8})^3 \cdot \left[\exp\left(\frac{hc}{29 \cdot 10^{-8} k \cdot 10^6}\right) - 1\right]} = \frac{\lambda_k T_k}{\lambda_n T_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{J_{max_k}}{J_{max_n}} = 10^{-9}$$

γ) Παρατηρώντας το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα, βλέπουμε ότι:

- Ο κεραυνός ακτινοβολεί περισσότερο στην περιοχή της υπεριώδους ακτινοβολίας ($\lambda_{max_k} = 290\ nm$)
- Η πυρηνική έκρηξη ακτινοβολεί ισχυρότερα στην περιοχή των ακτινών X ($\lambda_{max_n} = 0,29\ nm$).

Άσκηση 21

Διατήρηση της Ενέργειας: $hf + m_e c^2 = hf' + E_e$

Διατήρηση της Ορμής: $\frac{hf}{c} + 0 = hf' \cdot \cos\theta + p_e \cos$ (για τον άξονα x'x)

$$0+0=\frac{hf'}{c}\sin\theta-p_{ey} \text{ (για τον άξονα y'y)}$$

Έχουμε $\theta=90°$, άρα: $p_{ex}=\frac{hf}{c}=\frac{10^5\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}}{3\cdot 10^8}=0{,}53\cdot 10^{-22}\,kg\cdot\frac{m}{s}$ και

$$p_{ey}=\frac{hf'}{c}=\frac{10^5 f'}{3\cdot 10^8}=\frac{1}{3}10^{-3}\cdot f'\,kg\cdot m/s$$

Ισχύει επίσης: $\frac{1}{f'}-\frac{1}{f}=\frac{h}{m_e c^2}(1-\cos\theta)$

$$(\theta=90°)\Rightarrow \frac{1}{f'}-\frac{1}{f}=\frac{h}{m_e\cdot c^2}\Leftrightarrow \frac{1}{hf'}-\frac{1}{hf}=\frac{1}{m_e\cdot c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{hf'}=\frac{1}{0{,}5\cdot 10^6 eV}+\frac{1}{10^5 eV}=1{,}2\cdot 10^{-5}\,(eV)^{-1}$$

$$\Rightarrow hf'=0{,}83\cdot 10^5 eV=0{,}83\cdot 10^5\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}$$

$$J=1{,}328\cdot 10^{-14} J$$

Συνεπώς: $p_{ey}=\frac{1{,}328\cdot 10^{-14}}{3\cdot 10^8}=0{,}443\cdot 10^{-22}\,kg\cdot m/s$

Άρα $p_{ex}=0{,}53\cdot 10^{-22}\,kg\cdot\frac{m}{s}$ και $p_{ey}=0{,}443\cdot 10^{-22}\,kg\cdot\frac{m}{s}$

Άσκηση 22

Για $n_1=6$: $E_6=\frac{Z^2\cdot E_1}{6^2}$, όπου $Z=1$ και $E_1=-13{,}6\,eV$

$$E_6=-\frac{13{,}6}{36}\Leftrightarrow E_6=-0{,}38\,eV$$

Για $n_2=4$: $E_4=\frac{Z^2\cdot E_1}{4^2}=\frac{1\cdot(-13{,}6)}{16}\Leftrightarrow E_4=-0{,}85\,eV$

$E_\varphi=E_6-E_4=-0{,}38+0{,}85\Leftrightarrow E_\varphi=0{,}47\,eV$

Για το ηλεκτρόνιο:

- $f_6=-\frac{2E_1}{h}\cdot\frac{1}{n_1^3}=\frac{2\cdot 13{,}6}{4{,}14\cdot 10^{-15}}\cdot\frac{1}{6^3}\Rightarrow f_6=0{,}3\cdot 10^{14}\,Hz$

- $f_4=-\frac{2E_1}{h}\cdot\frac{1}{n_2^3}=\frac{2\cdot 13{,}6}{4{,}14\cdot 10^{-15}}\cdot\frac{1}{4^3}\Rightarrow f_4=1{,}03\cdot 10^{14}\,Hz$

↳ $f_\varphi=\frac{E_\varphi}{h}=\frac{0{,}47}{4{,}14\cdot 10^{-15}}=1{,}135\cdot 10^{-14}\,Hz\Rightarrow f_\varphi>f_4>f_6$

Scanné avec CamScanner