Φυλλάδιο X

② $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 1/\pi, & (x,y)\in S \\ 0, & (x,y)\notin S \end{cases}$, $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\le 1\}$

α) Από ιδιότητες από κοινού πιθανότητας $f_X(x)=0$ για $x\notin[-1,1]$

Για $x\in[-1,1]$: $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{1-y^2}$ και $y=\pm\sqrt{1-x^2}$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\,dy=\left[\frac{y}{\pi}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-(-\sqrt{1-x^2})}{\pi}=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}$$

άρα $f_X(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[-1,1] \\ \dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & x\in[-1,1] \end{cases}$

Αντίστοιχα, $f_Y(y)=\begin{cases} 0, & y\notin[-1,1] \\ \dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & y\in[-1,1] \end{cases}$, όπου $f_X(x)=f_Y(y)$

β) $f_X(-x)=f_X(x)$ → Άρα οι f_X και f_Y είναι άρτιες. Συνεπώς και οι xf_X και yf_Y είναι ~~άρτιες~~ περιττές, άρα τα ολοκληρώματά τους στο $\mathbb{R}$ είναι ίσα με 0

Επίσης: $E(XY)=\iint_S xy\,f_{XY}(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}xy\,dy=0$

$E(X)=\int_{-1}^{1}x f_X(x)\,dx=0$ και $E(Y)=\int_{-1}^{1}f_Y(y)\,dy=0$

Συνεπώς, $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y) \Leftrightarrow Cov(X,Y)=0$

Από ιδιότητας της από κοινού πυκνότητας, οι f_X και f_Y είναι αυστηρά θετικές

$P[-1\le X\le 1]>0$ και $P[-1\le Y\le 1]>0$

Από το ορθογώνιο $\Omega=[-1,1]\times[-1,1]$ είναι ξένο ως προς το S του (X,Y), άρα η πιθανότητα $P[(X,Y)\in\Omega]=P[\{-1\le X\le 1\}\cup\{-1\le Y\le 1\}]=0$ και δεν ισούται με τις $P[-1\le X\le 1]$ και $P[-1\le Y\le 1]$. Άρα, οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

③ $X\sim E(\lambda(1))$, $Y\sim U[1,2]$, $Z\sim Bern(1/2)$, $W=ZX+(1-Z)Y$

Όταν $Z=1\to W=X$ και όταν $Z=0\to W=Y$ άρα η W έχει πιθανότητα 1/2 να ισούται με X ή με Y. Έστω $\alpha<\beta$:

$$P[\alpha\le W\le\beta]=P[\alpha\le W\le\beta\mid Z=1]P[Z=1]+P[\alpha\le W\le\beta\mid Z=0]P[Z=0]$$
$$=\frac{1}{2}P[\alpha\le X\le\beta]+\frac{1}{2}P[\alpha\le Y\le\beta]$$

$$P[\alpha \le W \le \beta] = \frac{1}{2}\left[\int_{\alpha}^{\beta} f_X(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f_Y(y)\,dy\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left[f_X(x)\,dx + f_Y(y)\,dy\right]$$

Ορίζουμε τη $g(x) = \frac{1}{2}f_X(x) + \frac{1}{2}f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x}, & x \in [0,1) \cup (2,+\infty) \\ \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}, & x \in [1,2] \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

$$P[\alpha \le W \le \beta] = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$$

και η g ικανοποιεί τον ορισμό της πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής W.