

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ V

Άσκηση 1 Μια τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ cx^{-5}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Υπολογίστε την σταθερά c και στη συνέχεια την πιθανότητα των ενδεχομένων $\{X \in [3, 5]\}$ και $\{X \geq t\}$. Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής της X ;

Άσκηση 2 Η συνάρτηση κατανομής μιας συνεχούς τ.μ. X δίνεται από τον τύπο:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 4 \\ Ax + B + \frac{\Gamma}{x}, & x \geq 4. \end{cases}$$

(α') Να βρεθούν οι τιμές των A , B και Γ .

(β') Να υπολογιστεί η πυκνότητα $f(x)$ της X και να γίνει η γραφική της παράσταση.

(γ') Βρείτε την πιθανότητα η X να είναι μικρότερη του 5, δεδομένου ότι είναι μικρότερη του 6.

Άσκηση 3 Έστω ότι επιλέγεται τυχαία ένα σημείο του κυκλικού δίσκου Ω με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1, δηλαδή χωρίς κάποια προτίμηση σε κάποια περιοχή του δίσκου. Έστω Z η απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων. Βρείτε το σύνολο τιμών της τ.μ. Z , και υπολογίστε τη συνάρτηση κατανομής και την πυκνότητα πιθανότητας της.

Άσκηση 4 Αν F είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X , ποια είναι συνάρτηση κατανομής των παρακάτω τ.μ.

1. $Y = aX + b$, $a > 0$

2. $Y = aX + b$, $a < 0$

3. $Z = X^+ = \max\{0, X\}$

4. $E = e^X$

Άσκηση 5 Αν η τ.μ. U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $(0,1)$,

(α') υπολογίστε την σ.κ.π. της τ.μ. $X = -\ln(U)$. Ποια γνωστή κατανομή ακολουθεί;

(β') ποια είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. $Y = U^2$;

(γ') ποια είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τ.μ. $Z = U^{-2}$;

Άσκηση 6 Ένας δέκτης λαμβάνει ένα ημιτονοειδές σήμα. Θεωρητικά το ψηφίο 0 αντιστοιχεί σε πλάτος σήματος 2, ενώ το ψηφίο 1 σε πλάτος σήματος 6. Στην πράξη το πλάτος είναι μια τ.μ. με σ.π.π. $f_0(x) = C_0(1 - \frac{|x-2|}{2})^+$ για το ψηφίο 0 και $f_1(x) = C_1(1 - \frac{|x-6|}{3})^+$ για το ψηφίο 1. Ο δέκτης χρησιμοποιεί ένα κατώφλι πλάτους $x \in (3, 4)$ και ταξινομεί το σήμα ως 0 αν το πλάτος είναι μικρότερο του x και ως 1 διαφορετικά.

(α') Υπολογίστε τις σταθερές C_0 και C_1 και σχεδιάστε σε κοινό διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις των f_0, f_1 .

(β') Βρείτε την τιμή του x που ελαχιστοποιεί την πιθανότητα λάθος ταξινόμησης 1) αν τα δύο ψηφία είναι εξίσου συχνά, 2) αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι με πιθανότητα 90% το ψηφίο είναι 0.

Άσκηση 7 Η στάση ταξί και η στάση του λεωφορείου βρίσκονται κοντά στο σπίτι του Νικόλα. Ο Νικόλας πηγαίνει εκεί κάποιο δεδομένο χρόνο και αν υπάρχει ταξί που περιμένει (αυτό συμβαίνει με πιθανότητα $2/3$), το παίρνει. Διαφορετικά, περιμένει να έρθει ένα ταξί ή το λεωφορείο, όποιο έρθει πρώτα. Το επόμενο ταξί θα φτάσει σε ένα χρόνο που είναι ομοιόμορφα κατανομημένος μεταξύ 0 και 10 λεπτά, ενώ το επόμενο λεωφορείο θα φτάσει σε 5 λεπτά ακριβώς. Βρείτε τη συνάρτηση κατανομής του χρόνου αναμονής του Νικόλα.

Άσκηση 8 Αν η σ.κ.π. F της τ.μ. X είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι η τ.μ. $F(X)$ ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$. Πώς θα μπορούσατε, εμπνεόμενοι από αυτή την άσκηση, να προσομοιώσετε στον υπολογιστή σας μια τυχαία μεταβλητή με σ.κ.π. $F(x) = e^x(1 + e^x)^{-1}$ με τη βοήθεια μιας γεννήτριας τυχαίων αριθμών στο $[0,1]$;

Άσκηση 9 Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας F της τ.μ. X , για $x \in (0,1)$ δίνεται από την $F(x) = \frac{x}{3}$. Αν η τ.μ. $\frac{1}{X}$ ακολουθεί την ίδια κατανομή όπως η X :

(α') Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathbb{P}(X = 1)$.

(β') Να βρεθεί η σ.κ.π. F .

Άσκηση 10 Η τ.μ. X έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(t) = \begin{cases} ct(1-t), & t \in [0,1] \\ 0, & t \notin [0,1] \end{cases}$$

(α') Να υπολογιστεί η σταθερά c .

(β') Ναδειχτεί ότι η $Y = 1 - X$ έχει την ίδια κατανομή με την X .

(γ') Ποια είναι η κατανομή της απόστασης της X από τα άκρα του $[0,1]$;