Φυλλάδιο ΙΙΙ

① $\Omega = N!$

Κάθε άτομο που επιλέγει με κ σειρά, έχει $(N-\kappa)$ επιλογές.

Αν $|A|$ το ενδεχόμενο να μην πάρει κανείς σωστό παλτό:

$$|A| = (N-1)!$$

άρα $\mathbb{P}[A] = \dfrac{(N-1)!}{N!} \Rightarrow \underline{\mathbb{P}[A] = \dfrac{1}{N}}$

② α) $\mathbb{P}[A\cap B\cap C] = \mathbb{P}[A]\cdot \mathbb{P}[B|A]\,\mathbb{P}[C|A\cap B]$

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A\cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

θεωρώντας $A\cap B = D$: $\mathbb{P}[C\cap D] = \mathbb{P}[C|D]\cdot \mathbb{P}[D]$

όπου $\mathbb{P}[A\cap B\cap C] = \cancel{\mathbb{P}[(A\cap B)\cap D]}\ \mathbb{P}[C|(A\cap B)]\cdot \mathbb{P}[A\cap B]$

$\mathbb{P}[A\cap B] = \mathbb{P}[B|A]\cdot \mathbb{P}[A]$ $\Bigg\}\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\mathbb{P}[A\cap B\cap C] = \mathbb{P}[A]\cdot \mathbb{P}[B|A]\cdot \mathbb{P}[C|A\cap B]}$

B) (i) Ar $A \cap B = \emptyset$

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[\emptyset]}{\mathbb{P}[B]} \Rightarrow \underline{\mathbb{P}[A|B] = 0}$$

(ii) $A \subset B$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}[A|B] = \dfrac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \\ \\ A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \end{array}\right\} \underline{\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A]}{\mathbb{P}[B]}}$$

(iii) $A \supset B$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}[A|B] = \dfrac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \\ \\ B \subset A \Rightarrow A \cap B = B \end{array}\right\} \underline{\mathbb{P}[A|B] = 1}$$

Scanné avec CamScanner

γ) Με δεδομένο $P[A], P[B] > 0$

- Αν $P[A|B] > P[A]$:

$$P[A|B] = \frac{P[A\cap B]}{P[B]} > P[A] \Rightarrow P[A\cap B] > P[A]\cdot P[B] \Rightarrow \frac{P[A\cap B]}{P[A]} > P[B]$$

δηλ. $P[B|A] > P[B]$

- Αν $P[B|A] > P[B]$:

$$P[B|A] = \frac{P[A\cap B]}{P[A]} > P[B] \Rightarrow P[A\cap B] > P[A]\cdot P[B] \Rightarrow \frac{P[A\cap B]}{P[B]} > P[A]$$

δηλ. $P[A|B] > P[A]$

③ α) $P[\Pi_0] = \frac{4}{5}$, $P[\Delta_0|\Pi_0] = \frac{99}{100}$, $P[\Delta_1|\Pi_1] = \frac{97}{100}$

$$P[\Delta_1|\Pi_0] = 1 - P[\Delta_0|\Pi_0] = 1 - \frac{99}{100} = \frac{1}{100}$$

$$P[\Delta_0|\Pi_1] = 1 - P[\Delta_1|\Pi_1] = 1 - \frac{97}{100} = \frac{3}{100}$$

Αν ονομάσω S την πιθανότητα σφάλματος, τότε:

$$P[S] = P[\Delta_1|\Pi_0] + P[\Delta_0|\Pi_1] = \frac{4}{100}$$

$$P[S] = \frac{1}{25}$$

β) $\mathbb{P}[\Pi_1] = 1 - \mathbb{P}[\Pi_0] = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$\mathbb{P}[\Delta_1] = \mathbb{P}[\Delta_1 | \Pi_0] \cdot \mathbb{P}[\Pi_0] + \mathbb{P}[\Delta_1 | \Pi_1] \cdot \mathbb{P}[\Pi_1]$, εφόσον $\Pi_1 = \Pi_0^c$

$= \frac{1}{100} \cdot \frac{4}{5} + \frac{97}{100} \cdot \frac{1}{5} = \frac{101}{500}$

$\mathbb{P}[\Delta_1 \cap \Pi_0] = \mathbb{P}[\Delta_1 | \Pi_0] \cdot \mathbb{P}[\Pi_0] = \frac{1}{100} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{500}$

$\mathbb{P}[\Pi_0 | \Delta_1] = \frac{\mathbb{P}[\Delta_1 \cap \Pi_0]}{\mathbb{P}[\Delta_1]} = \frac{4/500}{101/500} \Rightarrow \underline{\mathbb{P}[\Pi_0 | \Delta_1] = \frac{4}{101}}$

④ Θ: θετικό αποτέλεσμα, S: έχει στίγμα

α) $\mathbb{P}[\Theta | S] = \frac{99}{100} \Rightarrow \mathbb{P}[\Theta^c | S] = \frac{1}{100}$

$\mathbb{P}[S] = \frac{8}{100} \Rightarrow \mathbb{P}[S^c] = \frac{92}{100}$

$\mathbb{P}[\Theta | S^c] = \frac{10}{100} \Rightarrow \mathbb{P}[\Theta^c | S^c] = \frac{90}{100}$

$\mathbb{P}[\Theta \cap S] = \mathbb{P}[\Theta | S] \cdot \mathbb{P}[S] = \frac{99}{100} \cdot \frac{8}{100} = \frac{792}{100}$

$\mathbb{P}[\Theta] = \mathbb{P}[\Theta | S] \cdot \mathbb{P}[S] + \mathbb{P}[\Theta | S^c] \cdot \mathbb{P}[S^c] = \frac{99}{100} \cdot \frac{8}{100} + \frac{10}{100} \cdot \frac{92}{100} = \frac{792 + 920}{10^4}$

$\mathbb{P}[\Theta] = \frac{1712}{100}$

$$P[S|\Theta] = \frac{P[S\cap\Theta]}{P[\Theta]} = \frac{7,92}{17,12} = \frac{396}{428} \Rightarrow \underline{P[S|\Theta] = \frac{99}{107}}$$

β) Έστω S_1 το συγκεκριμένο ενδεχόμενο να είναι σήμα

$$P[S_1] = P[S|\Theta] + P[S|\Theta^c]$$

$$P[\Theta^c] = P[\Theta^c|S]\cdot P[S] + P[\Theta^c|S^c]\cdot P[S^c] = \frac{1}{100}\cdot\frac{8}{100} + \frac{90}{100}\cdot\frac{92}{100} = \frac{8288}{10^4}$$

$$P[\Theta^c\cap S] = P[\Theta^c|S]\cdot P[S] = \frac{1}{100}\cdot\frac{8}{100} = \frac{8}{10^4}$$

$$P[S|\Theta^c] = \frac{8/10^4}{8288/10^4} = \frac{1}{1036}$$

$$P[S_1] = \frac{102564+99}{110852} = \frac{102663}{110852} \approx 0,926 \rightarrow \underline{P[S_1] = 0,926}$$

⑤ Ε: ευστοχία, Μ: μαθηματικός, Α: αριστοκράτης.

$\mathbb{P}[E|A] = q$, $\mathbb{P}[E|M] = p$

$\mathbb{P}[M|E] = \dfrac{\mathbb{P}[E \cap M]}{\mathbb{P}[E]} = \mathbb{P}[E|M] \cdot \dfrac{\mathbb{P}[M]}{\mathbb{P}[E]}$

$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[M] = \dfrac{1}{2}$

$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[E|A] \cdot \mathbb{P}[A] = \dfrac{q}{2}$

$\mathbb{P}[M|E] = p \cdot \dfrac{1/2}{q/2}$

$\mathbb{P}[M|E] = \dfrac{p}{q}$

⑥ Έστω Ο η πιθανότητα το ζευγάρι να μην έχει κανένα παιδί, Ν να έχει τουλάχιστον 1 και Π να έχει ακριβώς 2 κόρες.

$O = N^c \Rightarrow \mathbb{P}[O] = 1 - \mathbb{P}[N] = 1 - (p_t)$

$\mathbb{P}[N] = \sum_{t=1} \left(\dfrac{11}{23}\right)^t \quad t = 1, 2, 3, \ldots$

Για 2 ακριβώς παιδιά, η πιθανότητα $p_2 = \left(\frac{11}{23}\right)^2$. Αν θέλουμε αυτά τα παιδιά να είναι κορίτσια, τότε $\mathbb{P}[\Pi_1] = \left(\frac{11}{23}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}$

Για 3 παιδιά, αντίστοιχα $p_3 = \left(\frac{11}{23}\right)^2$. Αν θέλουμε 2 κορίτσια και 1 αγόρι, τότε $\mathbb{P}[\Pi_2] = \left(\frac{11}{23}\right)^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

Συνοψίζοντας, $\mathbb{P}[\Pi] = \left(\frac{11}{23}\right)^t \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^{t-2}}$, όπου $t = 1, 2, \ldots$

⑦ Έχουμε 2 πιθανές διαδρομές για κάθε ακολουθία:

$$\begin{cases} A \to \Gamma \to B & (p^5 + p^4) \\ A \to \Gamma \to \Delta \to B & (p^5 + p^4) \\ A \to \Delta \to B & (p^5 + p^4) \end{cases}$$

(εφόσον υψώνουμε το p στη δύναμη που αντιστοιχεί στο πλήθος των κόμβων)

Συνεπώς, $\underline{\mathbb{P}[A \to B] = 3 \cdot (p^5 + p^4)}$

⑧ Ποντάρισμα σε αριθμό : A_p

Ποντάρισμα σε χρώμα : X_p

Επιτυχία : E

Στρατηγική No. 1 : S_1

Στρατηγική No. 2 : S_2

Νίκη : N

Ήττα : H

$\mathbb{P}[E \mid A_p] = \frac{1}{38}$, $\mathbb{P}[E \mid X_p] = \frac{18}{38}$

Έστω M τα μάρκα στο λόγος κάθε φορά.

$\underline{S_1}$:

$$A_p \begin{cases} \xrightarrow{N} 1/38,\ M+36 \ \ldots\ M+275\cdot 36 \\ \xrightarrow{H} 37/38,\ M-36 \ \ldots\ M-275\cdot 36 \end{cases}$$

⇒ Για να κερδίσει με τη S_1, πρέπει να συγκεντρώσει άλλα 9900 μάρκα, δηλ. να φέρει νίκη τουλάχιστον 275, άρα $\mathbb{P}[N \mid S_1] \leq \left(\frac{1}{38}\right)^{275}$

S_1:

Ap
- N: $1/38,\ M+36$ ... $M+270\cdot 36$
- H: $37/38,\ M-36$ ... $M-27\cdot 36$

$\Rightarrow$ Για να κερδίσει με τη S_1, πρέπει να συγκεντρώσει άλλα 9900 μάρκα, δηλ. να φέρει νίκη τουλάχιστον 271, άρα

$$P[N|S_1] \leq \left(\frac{1}{38}\right)^{271}$$

S_2:

Xp
- N: $18/38,\ 2M$ ...
- H: $20/38,\ \frac{M}{2}$ ...

$\Rightarrow$ Για να κερδίσει με τη S_2, πρέπει να νικήσει τουλάχιστον ν φορές, με ν τέτοιο ώστε: $\frac{10^6}{\nu!} = 2$

δηλ. $\nu! = 5\cdot 10^5$, άρα $9<\nu<10$

Αυτό σημαίνει ότι $P[N|S_2] \in \left[\left(\frac{18}{38}\right)^9, \left(\frac{18}{38}\right)^{10}\right]$

δηλαδή $\underline{P[N|S_2] > P[N|S_1]}$