Οι αναλυτικές σειρές ασκήσεων είναι ατομικές και οι λύσεις που θα δώσετε πρέπει να αντιπροσωπεύουν μόνο την προσωπική σας εργασία. Αν χρησιμοποιήσετε κάποια άλλη πηγή εκτός των σημειώσεων για την λύση σας, πρέπει να το αναφέρετε. Η παράδοση των λύσεων των αναλυτικών ασκήσεων της σειράς αυτής θα γίνει ηλεκτρονικά στην ιστοσελίδα του μαθήματος στο HELIOS. Θα πρέπει να υποβάλετε την αναφορά σας ως ένα ενιαίο αρχείο PDF με το εξής filename format χρησιμοποιώντας μόνο λατινικούς χαρακτήρες: dsp23_hwk2_AM_FirstnameLastname.pdf, όπου AM είναι ο οκταψήφιος αριθμός μητρώου σας. Σκαναρισμένες χειρόγραφες λύσεις επιτρέπονται αρκεί να είναι καθαρογραμμένες και ευανάγνωστες. Επίσης στην πρώτη σελίδα των λύσεων θα αναγράφετε το ονοματεπώνυμο, AM και email address σας.

Άσκηση 2.1: (Ελάχιστη φάση, Γραμμική Φάση): Ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα έχει συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{(1 - 1/3z^{-1})(1 + 3z^{-1})}{(1 - 1/4z^{-2})}.$$

(α) Βρείτε εκφράσεις για ένα σύστημα ελάχιστης φάσης $H_{1,min}(z)$ και ένα all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$ έτσι ώστε

$$H(z) = H_{1,min}(z)H_{ap}(z).$$

(β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα πόλων και μηδενικών για το minimum-phase σύστημα $H_{1,min}(z)$ και για το all-pass σύστημα $H_{ap}(z)$, και να βρείτε τις περιοχές σύγκλισης των Z μετ/σμών.
(γ) Βρείτε εκφράσεις για ένα διαφορετικό σύστημα ελάχιστης φάσης $H_{2,min}(z)$ και ένα FIR σύστημα γενικευμένης γραμμικής φάσης $H_{lin}(z)$ έτσι ώστε

$$H(z) = H_{2,min}(z)H_{lin}(z).$$

Άσκηση 2.2: (Cepstrum)
(α) Να προσδιορίσετε την κρουστική απόκριση $h[n]$ του συστήματος που έχει τη συνάρτηση μεταφοράς $H(z)$ της Ασκησης 2.1.
(β) Να βρείτε αναλυτικά το complex cepstrum $\hat{h}[n]$ του σήματος $h[n]$ και στη συνέχεια το απλό cepstrum $c[n]$.
(γ) Εστω το LPC σύστημα μοντελοποίησης ακουστικού σήματος με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z^{-k}}$$

όπου $\{\alpha_k, k = 1, 2, \ldots, p\}$ είναι οι LPC συντελεστές. Υποθέτουμε ότι όλοι οι πόλοι του $H(z)$ βρίσκονται μέσα στο μοναδιαίο κύκλο. Αν $\hat{h}[n]$ είναι το complex cepstrum του σήματος $h[n]$, να αποδείξετε αναλυτικά ότι αυτό το cepstrum του LPC μοντέλου μπορεί να υπολογισθεί αναδρομικά με την σχέση

$$\hat{h}[n] = \alpha_n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right) \hat{h}[k]\alpha_{n-k}, \quad n \geq 1.$$

Άσκηση 2.3: (Γραμμική Πρόβλεψη, Αλγόριθμος Levinson)
Για το σχεδιασμό ενός βέλτιστου γραμμικού προβλέπτη τάξης $p = 3$ με τη μέθοδο της Αυτοσυσχέτισης, δίνεται ότι $r[0] = 1$ και οι τιμές των τριών πρώτων συντελεστών ανάκλασης είναι $\kappa_1 = 0.5, \kappa_2 = 0.5, \kappa_3 = 0.25$.

(α) Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Levinson-Durbin, βρείτε αναλυτικά τα $r[1], r[2], r[3]$ και τους βέλτιστους LPC συντελεστές $\{\alpha_i\}$.

(β) Επαληθεύσετε ότι ο 3×3 πίνακας αυτοσυσχέτισης $\mathbf{R}_x$ που σχηματίζεται από τις παραπάνω αριθμητικές τιμές των $r[k]$ είναι θετικά ορισμένος. Στη συνέχεια, με τη μέθοδο της απαλοιφής Gauss, υπολογίστε τους παράγοντες L,D και U της διάσπασης LDU του πίνακα αυτού. Ποιος είναι ο παράγοντας Cholesky του $\mathbf{R}_x$;

(γ) Με βάση την παραγοντοποίηση του $\mathbf{R}_x$ που προκύπτει από το ερώτημα (β), υπολογίστε πάλι τους βέλτιστους LPC συντελεστές $\{\alpha_i\}$ από το σχετικό σύστημα εξισώσεων με μπρος και πίσω αντικατάσταση και επαληθεύστε τη λύση που πήρατε στο ερώτημα (α).

Σημείωση: Ο αλγόριθμος Levinson-Durbin με τον ορθό συμβολισμό περιγράφεται στις συνοπτικές σημειώσεις (διαφάνειες) του μαθήματος.

***Άσκηση* 2.4**: (Μέθοδος Lattice): Στη μέθοδο Lattice, η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου σφάλματος πρόβλεψης i-οστής τάξης ορίζεται ως εξής:

$$A^{(i)}(z) = 1 - \sum_{k=1}^{i} \alpha_k^{(i)} z^{-k}.$$

(α) Αξιοποιώντας τις αναδρομικές σχέσεις για τους LPC συντελεστές που εμφανίζονται στο δεύτερο βήμα του αλγόριθμου Levinson-Durbin, να δείξετε ότι το $A^{(i)}(z)$ εκφράζεται αναδρομικά ως εξής:

$$A^{(i)}(z) = A^{(i-1)}(z) - \kappa_i z^{-i} A^{(i-1)}(z^{-1})$$

(β) Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση και τους ορισμούς των προς τα εμπρός και προς τα πίσω σφαλμάτων πρόβλεψης, $e^{(i)}[m], b^{(i)}[m]$, που δίνονται στη σελίδα 41 του σετ διαφανειών #11 του μαθήματος, να αποδείξετε αναλυτικά τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις της μεθόδου Lattice:

$$e^{(i)}[m] = e^{(i-1)}[m] - \kappa_i b^{(i-1)}[m-1]$$
$$b^{(i)}[m] = b^{(i-1)}[m-1] - \kappa_i e^{(i-1)}[m]$$

***Άσκηση* 2.5**: (Τυχαία διακριτά σήματα, Φάσμα Ισχύος)
Εστω ότι μας δίνεται μια στοχαστική ανέλιξη $x[n]$ με μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση:

$$r_x[k] = 17\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k|} + 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k-1|} + 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k+1|}$$

(α) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(z)$ ως συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας z.
(β) Να βρείτε το φάσμα ισχύος $P_x(e^{j\omega})$ ως πραγματική συνάρτηση της συχνότητας ω.
(γ) Με φασματική παραγοντοποίηση του $P_x(z)$, να βρείτε ένα αιτιατό και ευσταθές φίλτρο $H(z)$ το οποίο με είσοδο λευκό θόρυβο $v[n]$ μηδενικής μέσης τιμής και μοναδιαίας μεταβλητότητας θα δώσει μια στοχαστική ανέλιξη με τη δεδομένη αυτοσυσχέτιση.
Εξηγείστε την εργασία σας.

***Άσκηση* 2.6**: (Γραμμική πρόβλεψη παρουσία θορύβου με FIR φίλτρα Wiener)
Έστω μια στοχαστική ανέλιξη $x[n]$ τύπου AR(1) που δημιουργείται από την εξίσωση διαφορών:

$$x[n] = 0.8x[n-1] + \eta[n],$$

όπου $\eta[n]$ είναι λευκός θόρυβος μεταβλητότητας $\sigma_\eta^2 = 0.72$.
(α) Να βρεθεί το (μιγαδικό) φάσμα ισχύος $P_x(z)$ του $x[n]$.

(β) Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση $r_x[k]$ του $x[n]$ από το φάσμα ισχύος $P_x(z)$ και στη συνέχεια η μεταβλητότητα σ_x^2.
Παρατηρούμε το σήμα

$$y[n] = x[n] + v[n],$$

όπου $v[n]$ είναι λευκός θόρυβος μεταβλητότητας $\sigma_v^2 = 1$ και ασυσχέτιστος με το σήμα $x[n]$.
(γ) Να βρεθεί η αυτοσυσχέτιση $r_y[k]$. Στη συνέχεια επιθυμούμε να πραγματοποιήσουμε γραμμική πρόβλεψη του σήματος $x[n]$ από τη θορυβώδη εκδοχή του $y[n]$, δηλαδή το επιθυμητό σήμα είναι το $d[n] = x[n+1]$. Για το σκοπό αυτό:
(δ) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο FIR φίλτρο Wiener δεύτερης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς

$$W(z) = w(0) + w(1)z^{-1}.$$

Να βρείτε την κρουστική απόκριση $w[n]$ του βέλτιστου φίλτρου και το αντίστοιχο ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα $\xi = E\{|e[n]|^2\}$, όπου $e[n] = x[n+1] - y[n] * w[n]$.
(ε) Να σχεδιάσετε ένα βέλτιστο FIR φίλτρο Wiener τρίτης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς

$$W(z) = w(0) + w(1)z^{-1} + w(2)z^{-2}.$$

Να βρείτε την κρουστική απόκριση $w[n]$ του βέλτιστου φίλτρου και το αντίστοιχο ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Συγκρίνετε το σφάλμα αυτό με το σφάλμα του ερωτήματος (β) και αιτιολογήστε το αποτέλεσμα.
Σημείωση: Η θεωρία των φίλτρων Wiener εξηγείται στο Κεφ. 7 του [1].

---

[1] M. H. Hayes, Statistical Digital Processing and Modeling, Wiley, 1996