ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΑΘ. ΚΕΧΑΓΙΑΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2019

Ελευθερη Χρηση

Εκδοση 0.1, Οκτωβριος 2019

Εκδοσεις Σφιγξ

Ελευθερη Χρηση

Εκδοση 0.1, Οκτωβριος 2019

Περιεχόμενα

Προλογος

Το ακούω, το ξεχνώ.
Το βλέπω, το θυμάμαι.
Το κάνω, το μαθαίνω.

Το παρον βιβλιο πραγματευεται τον *Απειροστικο Λογισμο Συναρτησεων μιας Μεταβλητης* και συγγενη θεματα. Πρακτικα, το κυριο θεμα του βιβλιου ειναι: *παραγωγοι* και *ολοκληρωματα* (συναρτησεων μιας μεταβλητης).

Το βιβλιο προοριζεται κυριως για τους φοιτητες της Πολυτεχνικης Σχολης του Αριστοτελειου Πανεπιστημιου Θεσσαλονικης. Συνεπως η εμφαση ειναι στις υπολογιστικες μεθοδους και οχι στην θεωρια. Ωστοσο το βιβλιο παρουσιαζει και ενα αρκετα πληρες θεωρητικο υποβαθρο· καποιες απαιτητικες αποδειξεις παρουσιαζονται σε Παραρτηματα ή δινονται ως ασκησεις.

Σε κάθε φοιτητή που θα χρησιμοποιήσει αυτό το τεύχος (και γενικότερα σε κάθε μελετητή των μαθηματικών) δίνω τρείς **βασικές συμβουλές**.

1. Λυσε οσο περισσοτερα προβληματα μπορεις.

2. Δειξε εμπιστοσυνη.

3. Μην κανεις την ζωη σου πιο δυσκολη απο οσο ειναι απολυτως απαραιτητο..

Η πρωτη συμβουλη εχει το εξης νοημα. Κατα την γνωμη μου, για τους περισσοτερους απο εμας, **ο μονος τροπος** εξοικειωσης με τα μαθηματικα ειναι **η επιλυση προβληματων: οσο περισσοτερα προβληματα λυσεις, τοσο καλυτερα**. Συμφωνα με αυτη την αποψη, στο παρον τευχος παρατιθεται μεγαλος αριθμος λυμενων και αλυτων προβληματων. Πρεπει να χρησιμοποιησεις τα λυμενα προβληματα ως οδηγο για την επιλυση των αλυτων. Με αλλα λογια, **δεν αρκει να μελετησεις μονο τα λυμενα προβληματα· αν δεν λυσεις ο ιδιος μεγαλο αριθμο αλυτων προβληματων δεν θα ωφεληθεις ιδαιτερα**.

Η δευτερη συμβουλη αφορα πολλες πλευρες της εκπαιδευτικης διαδικασιας, αλλα εδω σημειωνω την πρακτικα πιο σημαντικη: παρα την αντιθετη εντυπωση αρκετων φοιτητων, ο σκοπος του διδασκοντα **δεν** ειναι να απορριψει οσο γινεται περισσοτερους φοιτητες· συνηθως μαλιστα ακριβως το αντιθετο ειναι ενας απο τους στοχους του.

Το νοημα της τριτης συμβουλης ειναι το εξης: οταν προσπαθεις να λυσεις ενα προβλημα, ξεκινησε απο την πιο απλη δυνατη λυση που μπορεις να φανταστεις ... και μετα προσπαθησε να την απλοποιησεις ακομα περισσοτερο. Αν η απλη λυση δεν δουλευει, μπορεις παντα να δοκιμασεις μια πιο περιπλοκη. Αντιθετα ειναι δυσκολο, οταν εχεις δημιουργησεις ενα περιπλοκο νοητικο μοντελο, να αφαιρεσεις απο αυτο στοιχεια και να το κανεις απλουστερο. Ή, με αλλα λογια, ειναι ευκολοτερο να αρχισεις με λιγα συστατικα και να προσθετεις ακομα ενα καθε φορα που το χρειαζεσαι[1].

Θανασης Κεχαγιας
ΤΗΜΜΥ, Πολυτεχνικη Σχολη ΑΠΘ
Σεπτεμβρης 2019

[1] Η τριτη συμβουλη εχει γενικοτερη εφαρμογη σε ολες τις πτυχες της ζωης σου.

Εισαγωγη

Σε μια πρωτη προσεγγιση, ο ορος «*Απειροστικος Λογισμος*» (στα Αγγλικα «$Infinitesimal\ Calculus$») σημαινει την *παραγωγιση και ολοκληρωση συναρτησεων* $f(x)$. Και αυτο ειναι το κυριο αντικειμενο του παροντος βιβλιου.

Ωστοσο η βασικη εννοια του Απειροστικου Λογισμου ειναι το *οριο*, και κυριως ενας συγκεκριμενος τυπος οριου. Μας δινεται μια συναρτηση $f(x)$ και μελετουμε τον *ρυθμο μεταβλης* αυτης

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

οταν το x μεταβαλλεται και γινεται $x + \Delta x$· επιπλεον, μας ενδιαφερει η περιπτωση στην οποια το Δx ειναι *απειροστικα* μικρο, δηλ. τοσο μικρο ωστε *τεινει στο μηδεν*. Αυτη ειναι η *παραγωγιση*. Η δε *ολοκληρωση* ειναι η *αντιστροφη* διαδικασια της παραγωγισης.

Αυτες οι ιδεες ειναι πολυ χρησιμες σε διαφορα μαθηματικα προβληματα και, σε μια πρωιμη μορφη ηταν ηδη γνωστες στους αρχαιους Ελληνες. Ομως η χρηση αυτων καθιερωθηκε απο τους Ευρωπαιους μαθηματικους του 17ου αιωνα. Επιπλεον αυτοι ανεπτυξαν μεθοδους οι οποιες επιτρεπουν την χρηση των οριων σε πολλα διαφορετικα προβληματα με εναν ενοποιημενο και σχεδον μηχανικο τροπο ο οποιος μας επιτρεπει να επιλυουμε προβληματα (π.χ., υπολογισμο εμβαδων, μεγιστοποιηση και ελαχστοποιηση συναρτησεων) τα οποια πριν την αναπτυξη του Λογισμου ειχαν δυσκολεψει μερικους απο τους μεγαλυτερους μαθηματικους.

Αυτα ειναι μερικα απο τα θεματα με τα οποια θα ασχοληθουμε στο παρον τευχος. Με τον ορο «*συναρτηση μιας μεταβλητης*» εννοουμε μια συναρτηση $f(x)$ με πεδιο ορισμου και πεδιο τιμων το συνολο των πραγματικων αριθμων: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ο *Απειροστικος Λογισμος των Συναρτησεων μιας Μεταβλητης* ειναι η μελετη των μεθοδων παραγωγισης και ολοκληρωσης τετοιων συναρτησεων καθως και των σχετικων εφαρμογων. Χρησιμη, σχεδον απαραιτητη, ειναι και η μελετη των ακολουθιων, των *απειρων αθροισματων* και των *δυναμοσειρων* και θα αφιερωσουμε μερικα κεφαλαια σε αυτα τα θεματα. Στα τελευταια κεφαλαια του παροντος θα ασχοληθουμε και με τις *διαφορικες εξισωσεις* (εξισωσεις με παραγωγους).

Συμβολισμος

Χρησιμοποιουμε τον τυπικο μαθηματικο συμβολισμο, ο οποιος σου ειναι γνωστος απο το Λυκειο. Σημειωνουμε ιδιαιτερα τα εξης.

1. Η λεξη «*ανν*» σημαινει «αν και μονο αν».
2. $\mathbb{N}$ ειναι το συνολο των *φυσικων αριθμων*:
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}.$$
και $\mathbb{N}_0$ ειναι το συνολο:
$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}.$$
3. $\mathbb{Z}$ ειναι το συνολο των *ακεραιων αριθμων*:
$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}.$$
4. $\mathbb{Q}$ ειναι το συνολο των *ρητων αριθμων*:
$$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}\right\}$$
5. $\mathbb{R}$ ειναι το συνολο των πραγματικων αριθμων.
6. Τα *διαστηματα πραγματικων αριθμων* οριζονται ως εξης:
$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x : a \leq x \leq b\} \text{ (κλειστο διαστημα)}, \\
(a, b) &= \{x : a < x < b\} \text{ (ανοικτο διαστημα)}, \\
[a, b) &= \{x : a \leq x < b\}, \\
(a, b] &= \{x : a < x \leq b\}.
\end{aligned}$$
7. Θεωρουμε οτι υπαρχουν αριθμοι $-\infty$ (πλην απειρο), $+\infty$ (συν απειρο) για τους οποιους ισχυει
$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$$
οποτε ισχυει και οτι
$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty).$$

8. Το *επεκτεταμενο* συνολο των πραγματικων αριθμων οριζεται ως εξης:

$$\mathbb{R}^* : \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Γραφεται και ως

$$\mathbb{R}^* = [-\infty, +\infty].$$

9. Οριζουμε αριθμο i τετοιο ωστε $i^2 = -1$. Δηλ. $i = \sqrt{-1}$ (η *τετραγωνικη ριζα του* -1). $\mathbb{C}$ ειναι το συνολο των *μιγαδικων αριθμων*:

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

10. Ο *συμβολισμος αθροισματος* ειναι:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_N,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_N + ...$$

Η εννοια του $\lim_{N\to\infty}$ θα εξηγηθει στο Κεφαλαιο 11.

1 Οριο και Συνεχεια

Ο Λογισμος συναρτησεων μιας μεταβλητης βασιζεται στην εννοια του οριου.

1.1 Θεωρια και Παραδειγματα

1.1.1. Θεωρουμε γνωστη την εννοια της συναρτησης· για εναν αυστηρο ορισμο δες το Παραρτημα Α΄. Εδω δινουμε εναν απλουστευμενο ορισμο.

1.1.2. Ορισμος. Μια *συναρτηση* $F : A \to B$ ειναι ενας κανονας ο οποιος απεικονιζει σε *καθε* στοιχειο ενος συνολου A *ακριβως ενα* στοιχειο ενος συνολου B. Το συνολο A λεγεται *πεδιο ορισμου* και το συνολο B λεγεται *πεδιο τιμων*.

1.1.3. Συμβολισμος. Γραφουμε $y = F(x)$ για να δηλωσουμε οτι στο στοιχειο $x \in A$ η F αντιστοιχιζει το στοιχειο $y \in B$. Μας ενδιαφερουν κυριως συναρτησεις οπου $A, B \subseteq \mathbb{R}$· αυτες λεγονται *πραγματικες συναρτησεις μιας πραγματικης μεταβλητης* ή, απλουστερα, *συναρτησεις μιας μεταβλητης*.

1.1.4. Ορισμος. Λεμε οτι *το οριο της συναρτησης* $f(x)$ *οταν το* x *τεινει στο* x_0 *ειναι ο αριθμος* f_0 ανν ισχυει η εξης συνθηκη[1]

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon \tag{1.1}$$

Αν ισχυει η (1.1) λεμε και οτι η $f(x)$ *τεινει* στο f_0 οταν το x *τεινει* στο x_0 και γραφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0 \quad \text{ή} \quad f(x) \underset{x \to x_0}{\to} f_0.$$

Αν δεν ισχυει η (1.1), λεμε οτι το οριο (της $f(x)$ οταν το x τεινει στο x_0) δεν υπαρχει.

1.1.5. Η σημασια της (1.1) ειναι η εξης: *αν θελουμε να εξασφαλισουμε οτι η διαφορα των* $f(x)$ *και* f_0 *ειναι* οσο μικρη θελουμε (μικροτερη του τυχοντος ε), αρκει να εξασφαλισουμε οτι το x ειναι πολυ κοντα στο x_0 (συγκεκριμενα, οτι $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$). Προσεξε οτι το δ_ε γενικα θα εξαρταται απο το ε! Απο ποια αλλη ποσοτητα θα εξαρταται το δ_ε; Επισης προσεξε οτι στην (1.1) *δεν* εξεταζουμε τι συμβαινει οταν $x = x_0$ (δηλ. οταν. $|x - x_0| = 0$).

1.1.6. Παραδειγμα. Για να δειξουμε υπολογιστικα οτι $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$, κατασκευαζουμε τον παρακατω πινακα, οπου δινουμε ζευγη τιμων $\left(x, \frac{1}{x+2}\right)$.

[1] Με την σιωπηρη υποθεση οτι ζητουμε να ισχυει $|f(x) - f_0| < \varepsilon$ μονο για τιμες x στις οποιες ειναι ορισμενη η $f(x)$. Μια αναλογη υποθεση ισχυει σε πολλα απο τα επομενα επομενα εδαφια, στα οποια δεν θα επαναλαβουμε αυτη την διευκρινιση.

x	1.00000	0.10000	0.01000	0.00100	-0.10000	-0.01000	-0.00100
$\frac{1}{x+2}$	0.33333	0.47619	0.49751	0.49975	0.52632	0.50251	0.50025

Πίνακας 1.1: Αριθμητικη συγκλιση της $\frac{1}{x+2}$

Παρατηρουμε οτι οσο εγγυτερα βρισκεται το x στο 0, τοσο εγγυτερα βρισκεται το $\frac{1}{x+2}$ στο $\frac{1}{2}=0.5$, και οτι αυτο ισχυει για x ειτε μεγαλυτερο ειτε μικροτερο του 2. Αυτο διατυπωνεται μαθηματικα με την εκφραση «$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}$».

1.1.7. Παραδειγμα. Για να *αποδειξουμε* αυστηρα οτι $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}$, χρησιμοποιουμε τον ορισμο του οριου. Δεδομενου τυχοντος $\varepsilon>0$ θελουμε αντιστοιχο δ_ε τετοιο ωστε να ισχυει: $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f_0|<\varepsilon$, οπου $x_0=0$, $f(x)=\frac{1}{x+2}$ και $f_0=\frac{1}{2}$. Για να βρουμε το ζητουμενο δ_ε ας εξετασουμε τις παρακατω ισοδυναμιες:

$$\left|\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{2-x-2}{2(x+2)}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{|x|}{2|x+2|}<\varepsilon \Leftrightarrow |x|<2\varepsilon|x+2|$$

Και τωρα ας *υποθεσουμε* οτι $|x|<\min(2\varepsilon(2-|x|),2)$. Τοτε

$$|x|<2\varepsilon(2-|x|) \Leftrightarrow (1+2\varepsilon)|x|<4\varepsilon \Leftrightarrow |x|<\frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}.$$

Αυτο μας δινει την ιδεα να χρησιμοποιησουμε $\delta_\varepsilon=\frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon}$. Τοτε εχουμε

$$\begin{aligned}
&0<|x-0|<\delta_\varepsilon=\frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon} \Rightarrow 0<|x|(1+2\varepsilon)<4\varepsilon \Rightarrow 0<|x|<4\varepsilon-2\varepsilon|x| \\
&\Rightarrow 0<|x|<2\varepsilon(2-|x|)\le 2\varepsilon(|x+2|) \Rightarrow 0<\left|\frac{x}{x+2}\right|<2\varepsilon \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\left|\frac{x+2-2}{x+2}\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2}\left|1-\frac{2}{x+2}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{x+2}\right|<\varepsilon
\end{aligned}$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

1.1.8. Ασκηση. Δειξε υπολογιστικα οτι $\lim_{x\to 2}\left(x^2+1\right)=5$.

1.1.9. Ορισμος. Λεμε οτι *το οριο της συναρτησης $f(x)$ οταν το x τεινει στο $+\infty$* ειναι ο αριθμος f_0 ανν ισχυει η εξης συνθηκη:

$$\forall\varepsilon>0:\exists M_\varepsilon>0: M_\varepsilon<x \Rightarrow |f(x)-f_0|<\varepsilon. \tag{1.2}$$

Αντιστοιχα λεμε οτι *το οριο της συναρτησης $f(x)$ οταν το x τεινει στο $-\infty$ ειναι ο αριθμος f_0* ανν ισχυει η εξης συνθηκη:

$$\forall\varepsilon>0:\exists M_\varepsilon<0: x<M_\varepsilon \Rightarrow |f(x)-f_0|<\varepsilon. \tag{1.3}$$

Γραφουμε δε

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=f_0, \qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=f_0.$$

Αν δεν ισχυει η (1.2) (αντιστοιχα η (1.3)) λεμε οτι το οριο της $f(x)$ οταν το x τεινει στο $+\infty$ (αντιστοιχα το οριο της $f(x)$ οταν το x τεινει στο $-\infty$) δεν υπαρχει.

1.1.10. Η σημασια των (1.2) και (1.3) ειναι η εξης: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=f_0$ ανν ισχυει η (1.2) δηλ.

$$\forall\varepsilon>0:\exists M_\varepsilon>0: M_\varepsilon<x \Rightarrow |f(x)-f_0|<\varepsilon.$$

Με αλλα λογια, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=f_0$ ανν για καθε ε (οσο μικρο θελουμε) μπορουμε να βρουμε ενα M_ε τετοιο ωστε, οταν το x ειναι μεγαλυτερο του M_ε τοτε η διαφορα $f(x)$ και f_0 ειναι (κατ΄ απολυτη τιμη) μικροτερη του ε. Δηλ., ακομη πιο συντομα, μπορουμε να φερουμε την $f(x)$ οσο κοντα στο f_0 θελουμε, αρκει να παρουμε το x αρκετα μεγαλο. Η σημασια της (1.3) εξηγειται παρομοια.

1.1.11. Παραδειγμα. Για να δειξουμε υπολογιστικα οτι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, κατασκευαζουμε τον παρακατω πινακα, οπου δινονται ζευγη τιμων $\left(x,\frac{1}{x}\right)$.

x	1.0000	10.0000	100.0000	1000.0000	10000.0000
$\frac{1}{x}$	1.0000	0.1000	0.0100	0.0010	0.0001

Παρατηρουμε οτι οσο μεγαλυτερο γινεται το x, τοσο εγγυτερα βρισκεται το $\frac{1}{x}$ στο 0. Αυτο διατυπωνεται μαθηματικα με την εκφραση «$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$».

1.1.12. Παραδειγμα. Για να αποδειξουμε οτι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ χρησιμοποιουμε τον ορισμο του οριου. Δεδομενου τυχοντος $\varepsilon>0$ θελουμε να βρουμε αντιστοιχο $M_\varepsilon>0$ τετοιο ωστε:

$$x>M_\varepsilon\Rightarrow\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$$

Αλλα, θετοντας $M_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}>0$ εχουμε

$$x>M_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}>0\Rightarrow\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

1.1.13. Ασκηση. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to2}\left(x^2+1\right)=5$.

1.1.14. Ορισμος. Λεμε οτι *το οριο της συναρτησης* $f(x)$ *οταν το* x *τεινει στο* x_0 *ειναι το* $+\infty$ ανν ισχυει η εξης συνθηκη:

$$\forall M>0:\exists\delta_M>0:0<|x-x_0|<\delta_M\Rightarrow f(x)>M. \tag{1.4}$$

Αντιστοιχα, λεμε οτι *το οριο της συναρτησης* $f(x)$ *οταν το* x *τεινει στο* x_0 *ειναι το* $-\infty$ αν ισχυει η εξης συνθηκη:

$$\forall M<0:\exists\delta_M>0:0<|x-x_0|<\delta_M\Rightarrow f(x)<M. \tag{1.5}$$

Γραφουμε δε

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty,\qquad\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty.$$

Αν δεν ισχυει μια απο τις (1.4) και (1.5), λεμε οτι το αντιστοιχο οριο δεν υπαρχει.

1.1.15. Η σημασια των (1.4) και 1.5) ειναι η εξης: $\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ ανν για καθε M (οσο μεγαλο θελουμε) μπορουμε να βρουμε ενα δ_M τετοιο ωστε, οταν το x ειναι αρκετα κοντα στο x_0 (δηλ. οταν $|x-x_0|<\delta_M$) τοτε η $f(x)$ ειναι μεγαλυτερη του M. Δηλ., ακομη πιο συντομα, μπορουμε να κανουμε την $f(x)$ οσο μεγαλη θελουμε, αρκει να παρουμε x αρκετα κοντα στο x_0. Η σημασια της (1.5) εξηγειται παρομοια.

1.1.16. Ασκηση. Ορισε με παρομοιο τροπο τα ορια

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty,\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty,\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.$$

1.1.17. Παραδειγμα. Για να δειξουμε υπολογιστικα οτι $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ κατασκευαζουμε τον παρακατω πινακα, οπου δινονται ζευγη τιμων $\left(x,\frac{1}{x^2}\right)$.

x	1.0000	0.1000	0.0100	0.0010
$\frac{1}{x^2}$	1.0000	100.0000	1000.0000	1000000.0000

Παρατηρουμε οτι οσο μικροτερο γινεται το x, τοσο μεγαλυτερο γινεται το $\frac{1}{x^2}$.

1.1.18. Παραδειγμα. Για να αποδειξουμε οτι $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ χρησιμοποιουμε τον ορισμο. Δεδομενου τυχοντος $M>0$ ζητουμε αντιστοιχο δ_M τετοιο ωστε: $|x-0|<\delta_M\Rightarrow\frac{1}{x^2}>M$. Αν θεσουμε $\delta_M=\frac{1}{\sqrt{M}}>0$ τοτε εχουμε

$$|x-0|<\delta_M=\frac{1}{\sqrt{M}}\Leftrightarrow\left|\frac{1}{x}\right|>\sqrt{M}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}>M$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

1.1.19. Θεωρημα. Αν υπαρχει το οριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ τοτε αυτο ειναι μοναδικο.

Αποδειξη. Ας υποθεσουμε οτι

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f_1 \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = f_2 \in \mathbb{R}.$$

Απο τον ορισμο του οριου εχουμε

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon > 0 : \begin{array}{l} |x - x_0| < \delta'_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f_1| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |x - x_0| < \delta''_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f_2| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}.$$

Παιρνοντας $\delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon)$ εχουμε

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \begin{array}{l} |f(x) - f_1| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |f(x) - f_2| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$$

και προσθετοντας κατα μελη εχουμε

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 : |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f_1 - f_2| \leq |f(x) - f_1| + |f(x) - f_2| < \varepsilon$$

το οποιο σημαινει (δες Παραρτημα Β΄)

$$\forall \varepsilon > 0 : |f_1 - f_2| < \varepsilon$$

οποτε $f_1 = f_2$.

Η περιπτωση που $f_1 = \pm\infty$ ή/και $f_2 = \pm\infty$ αφηνεται στον αναγνωστη.

1.1.20. Ορισμος. Λεμε οτι *το εξ αριστερων οριο της $f(x)$ καθως το x τεινει στο x_0 ειναι ο αριθμος f_0* (και γραφουμε $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f_0$) ανν ισχυει η εξης:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < x_0 - x < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Λεμε οτι *το εκ δεξιων οριο της $f(x)$ καθως το x τεινει στο x_0 ειναι ο αριθμος f_0* (και γραφουμε $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f_0$) ανν ισχυει η εξης:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < x - x_0 < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Τα εξ αριστερων και εκ δεξιων ορια λεγονται και *πλευρικα* ορια.

1.1.21. Παρατηρηση. Αντιστοιχα μπορουμε να ορισουμε τα

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty.$$

1.1.22. Ασκηση. Αποδειξε οτι τα πλευρικα ορια, οταν υπαρχουν, ειναι μοναδικα.

1.1.23. Παραδειγμα. Για να δειξουμε υπολογιστικα οτι (α) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, (β) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ κατασκευαζουμε τον παρακατω πινακα.

x	0.10	0.01	0.001	-0.001	-0.01	-0.1
$\frac{1}{x}$	10.00	100.00	1000.000	-1000.0000	-10000.00	-10000.0

Παρατηρουμε οτι οσο μικροτερο γινεται το x, τοσο μεγαλυτερη ειναι η *απολυτη* τιμη του $\frac{1}{x}$, αλλα το προσημο εξαρταται απο αυτο του x.

1.1.24. Παραδειγμα. Για να *αποδειξουμε* οτι (α) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, (β) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ θεωρουμε τυχον $M > 0$ και παρατηρουμε οτι $0 < x < \delta_M = \frac{1}{M} \Rightarrow M < \frac{1}{x}$, το οποιο σημαινει οτι $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Παρομοια, θεωρουμε τυχον $M < 0$ και εχουμε $0 > x > -\delta_M = \frac{1}{M} \Rightarrow M > \frac{1}{x}$, το οποιο σημαινει οτι $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

1.1.25. Ασκηση. Βρες τα $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2}$, $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2}$.

1.1.26. Θεωρημα. Αν για μια συναρτηση $f(x)$ υπαρχουν τα πλευρικα ορια και ειναι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ τοτε υπαρχει και το οριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και ειναι

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Αντιστροφα, αν υπαρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ τοτε υπαρχουν και τα πλευρικα ορια και ειναι

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Αποδειξη. Απο την υποθεση εχουμε οτι

$$\forall\varepsilon_1 > 0 : \exists\delta_1 > 0 : 0 < x - x_0 < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon_1, \tag{1.8}$$
$$\forall\varepsilon_2 > 0 : \exists\delta_2 > 0 : -\delta_2 < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon_2. \tag{1.9}$$

Εστω τωρα τυχον ε. Στις (1.8)-(1.9) παιρνουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ και κατοπιν επιλεγουμε $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Τοτε λοιπον

$$\forall x : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon$$
$$\forall x : -\delta < x - x_0 < 0 \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon$$

οποτε

$$\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon$$

και εχουμε αποδειξει το πρωτο μερος του θεωρηματος. Το δευτερο μερος απδεικνυεται παρομοια (αποδειξε το!).

1.1.27. Παραδειγμα. Θα αποδειξουμε οτι δεν υπαρχει το οριο $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$. Εχουμε ηδη δει οτι $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$. Αρα δεν υπαρχει το $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

1.1.28. Ορισμος. Οριζουμε $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1.1.29. Παρατηρηση. Συνηθως δεν υπολογιζουμε το οριο μιας συναρτησης βασει των παραπανω ορισμων, αλλα χρησιμοποιωντας τα παρακατω θεωρηματα.

1.1.30. Θεωρημα. Για καθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = g_0$, τοτε

$$\forall\kappa, \lambda \in \mathbb{R} : \lim_{x\to x_0} (\kappa f(x) + \lambda g(x)) = \kappa f_0 + \lambda g_0,$$
$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = f_0 \cdot g_0$$
$$\forall g_0 \neq 0 : \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f_0}{g_0},$$
$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x\to x_0} (f(x))^n = f_0^n.$$

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε μονο την δευτερη σχεση (η αποδειξη των υπολοιπων αφηνεται στον αναγνωστη). Απο την υποθεση εχουμε οτι

$$\forall\varepsilon_1 > 0 : \exists\delta_1 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon_1, \tag{1.10}$$
$$\forall\varepsilon_2 > 0 : \exists\delta_2 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g_0| < \varepsilon_2. \tag{1.11}$$

Εστω τωρα τυχον ε. Στις (1.10)-(1.11) παιρνουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ και κατοπιν επιλεγουμε $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Τοτε λοιπον

$$0 < |x - x_0| < \delta < \min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow \begin{array}{l} |f(x) - f_0| < \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} \\ |g(x) - g_0| < \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} \end{array}$$
$$\Rightarrow |f(x) + g(x) - (f_0 + g_0)| \leq |f(x) - f_0| + |g(x) - g_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και εχουμε το ζητουμενο.

1.1.31. Θεωρημα. Για καθε $x_0 \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R} : \lim_{x\to x_0} x^a = x_0^a$.

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη. Η περιπτωση $a \in \mathbb{N}$ ειναι ευκολη, οι περιπτωσεις $a \in \mathbb{Z}$ και $a \in \mathbb{Q}$ οχι πολυ πιο δυσκολες, και η $a \in \mathbb{R}$ ειναι δυσκολη.

1.1.32. Θεωρημα. Για καθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, αν:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = g_0$, $\lim_{x\to x_0} h(x) = h_0$ και
2. είτε $\forall x : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ είτε $\forall x : f(x) < g(x) < h(x)$,

τοτε

$$f_0 \leq g_0 \leq h_0.$$

Αποδειξη. Εξεταζουμε μονο την περιπτωση $x_0, f_0, g_0, h_0 \in \mathbb{R}$ και των αυστηρων ανισοτητων (οι λοιπες περιπτωσεις αφηνονται στον αναγνωστη). Λαμβανουμε τυχον $\varepsilon > 0$ και βρισκουμε δ_ε^f, δ_ε^g, δ_ε^h τετοια ωστε

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta_\varepsilon^f &\Rightarrow |f(x) - f_0| < \varepsilon, \\ |x - x_0| < \delta_\varepsilon^g &\Rightarrow |g(x) - g_0| < \varepsilon, \\ |x - x_0| < \delta_\varepsilon^h &\Rightarrow |h(x) - h_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Θετουμε $\delta = \min\left(\delta_\varepsilon^f, \delta_\varepsilon^g, \delta_\varepsilon^h\right)$ και επιλεγουμε x_1 τετοιο ωστε $|x_1 - x_0| < \delta$. Τοτε εχουμε

$$\begin{aligned} f(x_1) - \varepsilon < f_0 < f(x_1) + \varepsilon, \\ g(x_1) - \varepsilon < g_0 < g(x_1) + \varepsilon, \\ h(x_1) - \varepsilon < h_0 < h(x_1) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Τοτε εχουμε

$$\begin{aligned} f_0 - 2\varepsilon < f(x_1) - \varepsilon < g(x_1) - \varepsilon < g_0 \\ g_0 < g(x_1) + \varepsilon < h(x_1) + \varepsilon < h_0 + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Δηλ. εχουμε

$$\forall \varepsilon > 0 : f_0 - 2\varepsilon < g_0 < h_0 + 2\varepsilon$$

απο το οποιο προκυπτει το ζητουμενο $f_0 \leq g_0 \leq h_0$ (γιατι;).

1.1.33. Ασκηση. Δειξε οτι: για καθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τοτε

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty, \qquad \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty.$$

1.1.34. Ασκηση. Δειξε οτι: για καθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τοτε

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty, \qquad \lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \infty.$$

1.1.35. Παραδειγμα. Υπολογιζουμε το $\lim_{x\to -1} \left(5x^2 + 3x - 4\right)$ ως εξης:

$$\lim_{x\to -1} \left(5x^2 + 3x - 4\right) = 5 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 4 = -2.$$

1.1.36. Παραδειγμα. Υπολογιζουμε το $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2}$ ως εξης:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-1} = -1.$$

1.1.37. Παραδειγμα. Υπολογιζουμε το $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+3}{x+4}$ ως εξης:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+3}{x+4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{4}{x}} = \frac{\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x}}{\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

επειδη: $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to +\infty} 1 = 1$· $\lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x} = 3 \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 3 \cdot 0$· παρομοια δειχνουμε οτι $\lim_{x\to +\infty} \frac{4}{x} = 0$.

1.1.38. Ορισμος. Η συναρτηση $f(x)$ λεγεται *συνεχης στο* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ανν*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1.12}$$

Η συναρτηση $f(x)$ λεγεται *ασυνεχης στο* x_0 ανν δεν ισχυει η (1.12).

1.1.39. Ορισμος. Η $f(x)$ λεγεται *συνεχης στο συνολο* $A \subseteq \mathbb{R}$ ανν ειναι συνεχης σε καθε $x_0 \in A$. Οταν λεμε απλα οτι η $f(x)$ ειναι συνεχης (χωρις να προσδιοριζουμε ενα σημειο x_0 ή ενα συνολο A), εννοουμε οτι η $f(x)$ ειναι συνεχης σε καθε σημειο του πεδιου ορισμου της.

1.1.40. Παρατηρηση. Η $f(x)$ μπορει να ειναι ασυνεχης στο x_0 (δηλ. να μην ισχυει η (1.12)) για οποιονδηποτε απο τους παρακατω λογους:

1. δεν υπαρχει το $\lim_{x \to x_0} f(x)$·
2. δεν οριζεται το $f(x_0)$·
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

1.1.41. Παραδειγμα. Βλεπουμε οτι η $f(x) = \frac{1}{x}$ ειναι ασυνεχης στο $x_0 = 0$, διοτι δεν υπαρχει το $\lim_{x \to 0} f(x)$.

1.1.42. Θεωρημα. Αν οι $f(x)$, $g(x)$ ειναι συνεχεις στο x_0, το ιδιο ισχυει και για τις

$$\kappa f(x) + \lambda g(x) \qquad (\kappa, \lambda \in \mathbb{R}), \qquad f(x) \cdot g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{οταν } f(x_0) \neq 0).$$

Αποδειξη. Θα δειξουμε μονο την πρωτη (οι λοιπες αφηνονται στον αναγνωστη). Απο την υποθεση εχουμε οτι $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$. Τοτε

$$\lim_{x \to x_0} (\kappa f(x) + g(x)) = \kappa \lim_{x \to x_0} (f(x)) + \lambda \lim_{x \to x_0} (g(x)) = \kappa f(x_0) + \lambda g(x_0).$$

που δινει το ζητουμενο.

1.1.43. Θεωρημα. Καθε πολυωνυμικη συναρτηση $\phi(x)$ (δηλ. της μορφης $\phi(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$) ειναι συνεχης.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

1.1.44. Ασκηση. Δειξε οτι οτι η $\phi(x) = x^2 + 2x$ ειναι συνεχης σε καθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.1.45. Παραδειγμα. Για να δειξουμε οτι η $f(x) = |x|$ ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$ παρατηρουμε οτι αυτη μπορει να γραφτει ισοδυναμα ως

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{οταν } x < 0 \\ x & \text{οταν } x \geq 0 \end{cases}.$$

Αρα για καθε $x_0 \in (0, \infty)$ εχουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0 = f(x_0)$$

και για καθε $x_0 \in (-\infty, 0)$ εχουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -x_0 = f(x_0)$$

Αρα η $f(x)$ ειναι σιγουρα συνεχης στο $\mathbb{R} - \{0\}$. Στο $x_0 = 0$ εχουμε

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

και αρα

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

Αρα η $f(x) = |x|$ ειναι συνεχης σε ολο το $\mathbb{R}$.

1.1.46. Ασκηση. Αποδειξε οτι ειναι συνεχεις οι συναρτησεις

1. $p(x) = 2x + 1$,
2. $q(x) = (x-1)(x+3)$,
3. $r(x) = \frac{x}{x^2+1}$,
4. $s(x) = x^3 + 5x + 1$.

1.1.47. Παραδειγμα. Για να βρουμε τα σημεια ασυνεχειας της $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ παρατηρουμε οτι αυτη ειναι πηλικο δυο πολυωνυμικων και αρα συνεχων συναρτησεων. Αρα και η $f(x)$ ειναι συνεχης παντου εκτος των σημειων στα οποια μηδενιζεται ο παρονομαστης, δηλ. των $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Σε αυτα τα σημεια η συναρτηση δεν οριζεται, αρα και δεν μπορει να ειναι συνεχης.

1.1.48. Θεωρημα. Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης στο x_0 και η $g(x)$ ειναι συνεχης στο $f(x_0)$, τοτε η $g(f(x))$ ειναι συνεχης στο x_0.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

1.1.49. Παραδειγμα. Εστω $f(x) = x^2$ και $g(x) = x + 1$. Τοτε $h(x) = x^2 + 1 = g(f(x))$. Η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $x_0 = 2$ και η $g(x) = x + 1$ ειναι συνεχης στο $f_0 = 4$. Οποτε η $g(f(x))$ ειναι συνεχης στο $x_0 = 2$.

1.1.50. Θεωρημα. Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης στο x_0 και $f(x_0) > 0$, τοτε

$$\exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > 0.$$

Αποδειξη. Αφου η $f(x)$ ειναι συνεχης στο x_0, για καθε ε υπαρχει δ τετοιο ωστε

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ή και

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Θετοντας $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, εχω

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow 0 < \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x).$$

1.1.51. Παραδειγμα. Η $f(x) = \frac{1}{100} - x^2$ ειναι συνεχης στο $x_0 = 0$ και ισχυει $f(x_0) = \frac{1}{100} > 0$. Το διαστημα $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$ περιεχει το x_0 και ικανοποιει: $\forall x \in \left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right) : 0 < f(x)$.

1.1.52. Στα επομενα εμφανιζονται οι εννοιες inf και sup· για τον ορισμο αυτων δες το Παραρτημα Β′.

1.1.53. Συμβολισμος. Δεδομενου συνολου $A \subseteq \mathbb{R}$, χρησιμοποιουμε τους εξης συμβολισμους (των οποιων η σημασια ειναι προφανης):

$$\max A, \quad \min A, \quad \sup A, \quad \inf A.$$

Επισης, δεδομενης συναρτησης f χρησιμοποιουμε του συμβολισμους

$$\max_{x\in A} f(x), \quad \min_{x\in A} f(x), \quad \sup_{x\in A} f(x), \quad \inf_{x\in A} f(x).$$

Τελος χρησιμοποιουμε τους συμβολισμους

$$x_1 = \arg\max_{x\in A} f(x) \Leftrightarrow f(x_1) = \max_{x\in A} f(x),$$
$$x_2 = \arg\min_{x\in A} f(x) \Leftrightarrow f(x_1) = \min_{x\in A} f(x),$$

1.1.54. Θεωρημα (Φραγματος Συνεχους Συναρτησης). Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης στο διαστημα $[a, b]$, τοτε ειναι *φραγμενη* στο $[a, b]$, δηλ. υπαρχει αριθμος $M \in \mathbb{R}$ τετοιος ωστε

$$\forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq M.$$

Αποδειξη. Ας υποθεσουμε οτι η $f(x)$ ειναι μη φραγμενη στο $[a, b]$. Τοτε, θετοντας $c_1 = \frac{a+b}{2}$, η $f(x)$ θα ειναι μη φραγμενη τουλαχιστον σε ενα απο τα $[a, c_1]$ και $[c_1, b]$. Εστω $[a_1, b_1]$ το ενα εκ των δυο διαστηματων, στο οποιο η $f(x)$ ειναι μη φραγμενη. Επαναλαμβανουμε την διαδικασια για $n \in \{1, 2, ...\}$. Δηλ. αν η $f(x)$ ειναι μη φραγμενη στο $[a_n, b_n]$

1. θετουμε $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$,
2. θετουμε το $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ να ειναι ενα διαστημα εκ των $[a_n, c_{n+1}]$, $[c_{n+1}, b_n]$, στο οποιο η $f(x)$ ειναι μη φραγμενη.

Παρατηρουμε οτι το μηκος του $[a_n, b_n]$ ειναι $\frac{b-a}{2^n}$. Τωρα θετουμε $A = \{a, a_1, a_2, ...\}$ και $\overline{a} = \sup A \in [a, b]$ (γιατι;). Αφου η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a, b] \ni \overline{a}$, υπαρχει $\delta > 0$ τετοιο ωστε

$$x \in (\overline{a} - \delta, \overline{a} + \delta) \Rightarrow |f(x) - f(\overline{a})| < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1 + f(\overline{a}),$$

δηλ. η f ειναι φραγμενη στο $(\overline{a} - \delta, \overline{a} + \delta)$. Αλλα, παιρνοντας αρκετα μεγαλο n, θα εχουμε $[a_n, b_n] \subset (\overline{a} - \delta, \overline{a} + \delta)$, οποτε η f ειναι φραγμενη και στο $[a_n, b_n]$. Αυτο ομως ειναι ατοπο διοτι, εκ κατασκευης, η f ειναι μη φραγμενη στο $[a_n, b_n]$. Ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

Αποσιωπησαμε μια λεπτομερεια: ειναι δυνατον να ισχυει $\overline{a} = a$ η $\overline{a} = b$· σε τετοια περιπτωση αντι του $(\overline{a} - \delta, \overline{a} + \delta)$ πρεπει να χρησιμοποιησουμε το $[a, a + \delta)$ ή το $(b - \delta, b]$. Συμπληρωσε την αποδειξη για αυτη την περιπτωση.

1.1.55. Παραδειγμα. Η $f(x) = x^2$ ειναι συνεχης στο $[-3, 3]$. Εχουμε $f(-3) = f(3) = 9$. Ισχυει οτι

$$\forall x \in [-3, 3] : |f(x)| = x^2 \leq M = 9.$$

1.1.56. Θεωρημα (Ακραιων Τιμων Συνεχους Συναρτησης). Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης στο διαστημα $[a, b]$, τοτε υπαρχουν $x_1, x_2 \in [a, b]$ τετοια ωστε

$$\forall x \in [a, b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Αποδειξη. Οριζουμε το συνολο

$$F = \{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Τοτε αρκει να δειξουμε οτι

$$\exists x_1 \in [a, b] : f(x_1) = \underline{f} = \inf F \text{ και } \exists x_2 \in [a, b] : f(x_2) = \overline{f} = \sup F.$$

Θα δειξουμε μονο το δευτερο. Εστω οτι $\nexists x \in [a, b] : f(x) = \overline{f}$. Οριζουμε στο $[a, b]$ την συναρτηση $g(x) = \overline{f} - f(x)$. Τοτε εχουμε

$$x \in [a, b] : g(x) > 0$$

και αρα και η $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ ειναι καλα ορισμενη και συνεχης στο $[a, b]$. Οποτε η $h(x)$ θα ειναι φραγμενη στο $[a, b]$. Δηλ. υπαρχει $c > 0$ τετοιο ωστε

$$\forall x \in [a, b] : \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\overline{f} - f(x)} < c$$
$$\forall x \in [a, b] : f(x) < \overline{f} - \frac{1}{c} < \overline{f}.$$

Αλλα αυτο ειναι ατοπο διοτι ειχαμε υποθεσει οτι $\overline{f} = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

1.1.57. Θεωρημα (Μηδενισμου Συνεχους Συναρτησης). Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a, b]$ και $f(a) f(b) < 0$, τοτε

$$\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0.$$

Αποδειξη. Χωρις βλαβη της γενικοτητας υποθετουμε $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$. Οριζουμε

$$A = \{x : x \in [a, b] \text{ και } f(x) \leq 0\}.$$

Το A δεν ειναι κενο (διοτι $a \in A$) και ειναι φραγμενο (διοτι η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a, b]$). Αρα υπαρχει (δες Παρατημα Β′) το $\overline{a} = \sup A$ και θα συμβαινει ενα εκ των τριων παρακατω.

1. Αν $f(\overline{a}) > 0$, τοτε υπαρχει $\delta > 0$ τετοιο ωστε (α) ειτε $x \in (\overline{a} - \delta, \overline{a} + \delta) \Rightarrow f(x) > 0$ (β) ειτε $x \in (\overline{a} - \delta, \overline{a}] \Rightarrow f(x) > 0$ (αυτο συμβαινει οταν $\overline{a} = b$). Σε καθε περιπτωση εχουμε

$$x > \overline{a} - \delta \Rightarrow x \notin A$$

   αλλα αυτο σημαινει οτι $\sup A \leq \overline{a} - \delta < \overline{a} = \sup A$ και εχουμε οδηγηθει σε ατοπο.

2. Με παρομοιο τροπο οδηγουμαστε σε ατοπο αν υποθεσουμε $f(\overline{a}) < 0$.

3. Αρα η μονη απομενουσα περιπτωση ειναι $f(\overline{a}) = 0$ και το $\overline{a}$ ειναι το ζητουμενο x_0.

1.1.58. Παραδειγμα. Η $f(x) = 2x + 5$ ειναι συνεχης στο $[-3, 3]$. Εχουμε $f(-3) = -1$, $f(3) = 11$. Η εξισωση $2x + 5 = 0$ εχει την λυση $x_0 = -\frac{5}{2} \in (-3, 3)$.

1.1.59. Θεωρημα (Ενδιαμεσης Τιμης Συνεχους Συναρτησης). Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a, b]$, τοτε για καθε $x_1, x_2 \in [a, b]$ τετοια ωστε $f(x_1) \neq f(x_2)$:

$$\forall f_0 \in (\min(f(x_1), f(x_2)), \max(f(x_1), f(x_2))) : \exists x_0 \in (x_1, x_2) : f(x_0) = f_0.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

1.1.60. Παραδειγμα. Η $f(x) = 2x + 5$ ειναι συνεχης στο $[1, 3]$. Εχουμε $f(1) = 7$, $f(3) = 11$. Για καθε $c \in (7, 11)$, η εξισωση $2x + 5 = c$ εχει την λυση $x_c = \frac{1}{2}c - \frac{5}{2} \in (1, 3)$.

1.1.61. Παραδειγμα. Η $f(x) = x^2$ ειναι συνεχης στο $[-3, 3]$. Εχουμε $\min\{f(x) : x \in [-3, 3]\} = 0$, $\max\{f(x) : x \in [-3, 3]\} = 9$. Για καθε $c \in [0, 9]$, η εξισωση $x^2 = c$ εχει την λυση $x_c = \sqrt{c} \in [-3, 3]$.

1.1.62. Ορισμος. Μια συναρτηση f λεγεται *αυξουσα* (αντ. *φθινουσα*) σε ενα συνολο A ανν για καθε $x_1, x_2 \in A$ ισχυει: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ (αντ. $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$)· αυτο συμβολιζεται και ως εξης: $f \uparrow$ (αντ. $f \downarrow$). Αν οι ανισοτητες ειναι αυστηρες η f λεγεται *αυστηρα αυξουσα* (αντ. *αυστηρα φθινουσα*). Μια συναρτηση λεγεται *μονοτονη* (αντ. *αυστηρα μονοτονη*) αν ειναι ειτε αυξουσα είτε φθινουσα (αντ. αν ειναι ειτε αυστηρα αυξουσα είτε αυστηρα φθινουσα).

1.1.63. Θεωρημα. Αν στο διαστημα $[a, b]$ η $f(x)$ εναι συνεχης και αυστηρα μονοτονη, τοτε στο $[a, b]$ η *αντιστροφη συναρτηση* $f^{-1}(x)$ ειναι καλως ορισμενη και αυστηρα μονοτονη.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη (για τον ορισμο της αντιστροφης συναρτησης δες το Παραρτημα Α΄).

1.1.64. Παραδειγμα. Η $f(x) = 2x + 5$ ειναι συνεχης και αυστηρα μονοτονη στο $[-3, 3]$. Η συναρτηση $g(x) = \frac{x-5}{2}$ ειναι η αντιστροφη συναρτηση της $f(x)$· δηλ.

$$f(g(x)) = 2\frac{x-5}{2} + 5 = x,$$
$$g(f(x)) = \frac{2x + 5 - 5}{2} = x.$$

1.1.65. Ορισμος. Μια συναρτηση $f(x)$ λεγεται *τμηματικα συνεχης στο διαστημα* $[a, b]$ ανν υπαρχουν αριθμοι

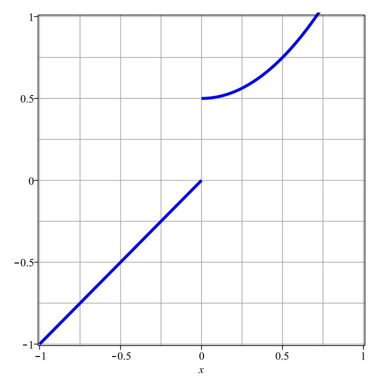
$$a = a_0 < a_1 < ... < a_N = b$$

τετοιοι ωστε

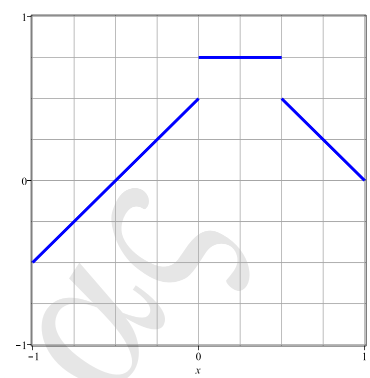
1. για καθε $n \in \{1, 2, ..., N\}$: η $f(x)$ ειναι συνεχης στο (a_{n-1}, a_n) και

2. η $f(x)$ εχει πεπερασμενα πλευρικα ορια στα $a_0, a_1, a_2, ..., a_N$.

1.1.66. Παραδειγμα. Στα Σχηματα 1.1.α και 1.1.β βλεπουμε δυο τμηματικα συνεχεις συναρτησεις.



Σχήμα 1.1



Σχήμα 1.2

1.1.67. Ορισμος. Μια συναρτηση $f(x)$ λεγεται *ομοιομορφα συνεχης στο συνολο* A ανν (για καθε $\varepsilon > 0$ υπαρχει $\delta_\varepsilon > 0$ τετοιο ωστε

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon : \forall x_1, x_2 \in A : |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

1.1.68. Παραδειγμα. Για να αποδειξουμε οτι η $f(x) = x^2$ ειναι ομοιομορφα συνεχης στο $[0,1]$ παρατηρουμε τα εξης. Για τυχοντα $x_1, x_2 \in [0,1]$ εχουμε

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|x_1^2 - x_2^2\right| = |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| \leq 2|x_1 - x_2|$$

αφου $x_1, x_2 \in [0,1]$. Οποτε, για καθε $\varepsilon > 0$ θετουμε $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ και εχουμε

$$\forall x_1, x_2 \in [0,1] : |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq 2|x_1 - x_2| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

1.1.69. Παραδειγμα. Για να αποδειξουμε οτι η $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν ειναι ομοιομορφα συνεχης στο $(0,1)$ λαμβανουμε τυχον $\varepsilon = 1 > 0$ και τυχον $\delta_\varepsilon > 0$· κατοπιν θετουμε $\overline{\delta}_\varepsilon = \min(\delta_\varepsilon, 1)$ και $x_1 = \frac{\overline{\delta}_\varepsilon}{3} \in (0,1)$, $x_2 = \frac{\overline{\delta}_\varepsilon}{6} \in (0,1)$. Τοτε

$$|x_1 - x_2| = \frac{\overline{\delta}_\varepsilon}{3} - \frac{\overline{\delta}_\varepsilon}{6} = \frac{\overline{\delta}_\varepsilon}{6} < \overline{\delta}_\varepsilon < \delta_\varepsilon$$

αλλα

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right| = \frac{\overline{\delta}_\varepsilon/6}{\overline{\delta}_\varepsilon^2/18} = \frac{3}{\overline{\delta}_\varepsilon} > 1 = \varepsilon.$$

Αρα για $\varepsilon = 1 > 0$ δεν μπορει να υπαρχει δ_ε τετοιο ωστε

$$\forall x_1, x_2 \in (0,1) : |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x2}\right| < \varepsilon.$$

Αρα η $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν ειναι ομοιομορφα συνεχης στο $(0,1)$.

1.1.70. Ασκηση. Αποδειξε οτι η $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ δεν ειναι ομοιομορφα συνεχης στο $[2,5]$.

1.1.71. Η διαφορα της ομοιομορφης συνεχειας απο την απλη συνεχεια ειναι η εξης. Λεμε οτι η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$ ανν για καθε $x_1 \in [a,b]$ εχουμε $\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$. Αυτο μπορει να γραφτει πιο αναλυτικα ως εξης: για καθε $\varepsilon > 0$ υπαρχει $\delta_\varepsilon > 0$ τετοιο ωστε

$$\forall x_1 \in [a,b], \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon(x_1) : |x_2 - x_1| < \delta_\varepsilon(x_1) \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Με αλλα λογια, το $\delta_\varepsilon(x_1)$ εξαρταται απο το ε *και απο το* x_1! Στην ομοιομορφη συνεχεια εχουμε

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon : \forall x_1, x_2 \in A : |x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

δηλ. το δ_ε *δεν* εξαρταται απο τα x_1, x_2 (δηλ. μπορουμε να χρησιμοποιησουμε το ιδιο δ_ε για *καθε* x_1, x_2). Ομως ισχυουν τα παρακατω.

1.1.72. Θεωρημα. Αν η $f(x)$ εναι ομοιομορφα συνεχης στο A, τοτε ειναι και συνεχης στο A.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

1.1.73. Θεωρημα. Αν η $f(x)$ εναι συνεχης στο $[a,b]$, τοτε ειναι και ομοιομορφα συνεχης στο $[a,b]$.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

1.2 Λυμενα Προβληματα

1.2.1. Δειξε αριθμητικα οτι $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}$.
Λυση. Στον πινακα βλεπουμε ζευγη τιμων $\left(x, \frac{1}{x+3}\right)$.

x	1.000	0.100	0.010	0.001	−0.100	−0.010	−0.001
$\frac{1}{x+3}$	0.25000	0.32258	0.33223	0.33322	0.34483	0.33445	0.33344

Παρατηρουμε οτι οσο εγγυτερα βρισκεται το x στο 0, τοσο εγγυτερα βρισκεται το $\frac{1}{x+3}$ στο $\frac{1}{3} = 0.333...$, και αυτο ισχυει για x ειτε μεγαλυτερο ειτε μικροτερο του 0.

1.2.2. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to 0} \left(x^2+1\right) = 1$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x-0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|x^2+1-1\right| < \varepsilon.$$

Εστω λοιπον τυχον $\varepsilon > 0$. Παιρνουμε $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$ οποτε για καθε x τετοιο ωστε $|x-0| = |x| < \delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$ εχουμε

$$\left|x^2+1-1\right| = \left|x^2\right| = |x|^2 < \delta_\varepsilon^2 = \left(\sqrt{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon$$

και ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

1.2.3. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to 2} (2x-1) = 3$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x-2| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |2x-1-3| < \varepsilon.$$

Εστω λοιπον τυχον $\varepsilon > 0$. Παιρνουμε $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ και για καθε x τετοιο ωστε $|x-2| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ εχουμε

$$|2x-1-3| = |2x-4| = 2|x-2| < 2\delta_\varepsilon = 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

και ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

1.2.4. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2} = 0$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x-1| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}\right| < \varepsilon.$$

Εστω λοιπον τυχον $\varepsilon > 0$. Παιρνουμε $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ και για καθε x τετοιο ωστε $|x-1| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ εχουμε

$$\left|\frac{x^2-3x+2}{(x-2)^2}\right| = \left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^2}\right| = \left|\frac{x-1}{x-2}\right|.$$

Τωρα, εχουμε $|x-1| < \delta$ και

$$|x-2| > ||x-1|-1| = |1-|x-1|| > 1-\delta_\varepsilon$$

(αφου $|x-1| < \delta_\varepsilon$) οποτε

$$\left|\frac{x-1}{x-2}\right| < \frac{\delta_\varepsilon}{1-\delta_\varepsilon}.$$

Αρκει, για να δειξουμε το ζητουμενο οριο, να δειξουμε οτι $\frac{\delta_\varepsilon}{1-\delta_\varepsilon} = \varepsilon$. Αλλα

$$\frac{\delta_\varepsilon}{1-\delta_\varepsilon} = \varepsilon \Leftrightarrow \delta_\varepsilon = \varepsilon \cdot (1-\delta_\varepsilon) \Leftrightarrow \delta_\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon\delta_\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \delta_\varepsilon + \varepsilon\delta_\varepsilon = \varepsilon \Leftrightarrow \delta_\varepsilon \cdot (1+\varepsilon) = \varepsilon \Leftrightarrow \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Η τελευταια ισοτητα ισχυει εξ υποθεσεως.

1.2.5. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3+1} = 0$ και οτι $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3+1} = 0$.
Λυση. Για το πρωτο οριο πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall \varepsilon < 0 : \exists M_\varepsilon > 0 : M_\varepsilon < x \Rightarrow \left|\frac{1}{x^3+1}\right| < \varepsilon.$$

Εστω λοιπον τυχον $\varepsilon > 0$. Παιρνουμε $M_\varepsilon = \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}-1}$ και για καθε x τετοιο ωστε $x > M_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}-1}} > 0$ εχουμε

$$\left|\frac{1}{x^3+1}\right| < \left|\frac{1}{M_\varepsilon^3+1}\right| = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}-1+1} = \varepsilon$$

και ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο. Το δευτερο οριο αποδεικνυεται παρομοια.

1.2.6. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall M > 0 : \exists x_M > 0 : x_M < x \Rightarrow M < x^2.$$

Ευκολα φαινεται οτι για τυχον M αρκει να παρουμε $x_M = \sqrt{M}$.

1.2.7. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall M < 0 : \exists x_M < 0 : x < x_M \Rightarrow x^3 < x_M.$$

Ευκολα φαινεται οτι για τυχον $M < 0$ αρκει να παρουμε $N_M = M^{1/3}$.

1.2.8. Δειξε αριθμητικα οτι (α) $\lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$, (β) $\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.
Λυση. Στον πινακα βλεπουμε ζευγη τιμων $\left(x, \frac{1}{x-2}\right)$. Παρατηρουμε οτι οσο το x προσεγγιζει το 2, τοσο μεγαλυτερη ειναι η απολυτη τιμη του $\frac{1}{x-2}$, αλλα το προσημο εξαρταται απο αυτο του x.

x	2.10	2.01	2.001	1.999	1.99	1.9
$\frac{1}{x-2}$	10.00	100.00	1000.000	−1000.0000	−100.00	−10.0

1.2.9. Αποδειξε οτι (α) $\lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$, (β) $\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.
Λυση. Θεωρουμε τυχον $M > 0$ και εχουμε: $0 < x-2 < \delta = \frac{1}{M} \Rightarrow M < \frac{1}{x-2}$ οποτε $\lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$. Παρομοια, με τυχον $M < 0$ εχουμε: $0 > x-2 > -\delta = \frac{1}{M} \Rightarrow M > \frac{1}{x-2}$ οποτε $\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

1.2.10. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall M < 0 : \exists \delta_M > 0 : 0 < 0-x < \delta_M \Rightarrow \frac{1}{x^3} < M.$$

Εστω λοιπον τυχον $M<0$. Παιρνουμε $\delta_M=\sqrt[3]{\frac{1}{M}}<0$ και για καθε x τετοιο ωστε $\delta_M<x<0$ εχουμε

$$\sqrt[3]{\frac{1}{M}}<x<0\Rightarrow\frac{1}{M}<x^3<0\Rightarrow\frac{1}{x^3}<M.$$

1.2.11. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{x^2-1}=+\infty$.
Λυση. Πρεπει να δειξουμε οτι

$$\forall M>0:\exists\delta_M>0:0<x-1<\delta_M\Rightarrow\frac{x+1}{x^2-1}>M.$$

Εστω λοιπον τυχον $M>0$. Παιρνουμε $\delta_M=\frac{1}{M}$ και για καθε x τετοιο ωστε $0<x-1<\delta_M=\frac{1}{M}$ εχουμε

$$\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{x+1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x-1}>\frac{1}{\frac{1}{M}}=M$$

και ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

1.2.12. Υπολογισε τα παρακατω ορια

1. $\lim_{x\to-1}\left(2x^3+3x^2-4\right)$.
2. $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-4x+4}$.
3. $\lim_{x\to2}\sqrt{x^4}$.
4. $\lim_{x\to1}\sqrt{x^2+x+1}$.

Λυση. Για το (1) εχουμε

$$\lim_{x\to-1}\left(2x^3+3x^2-4\right)=2\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)^2-4=-3.$$

Για το (2) εχουμε

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-4x+4}=\frac{\lim_{x\to1}(x-1)}{\lim_{x\to1}\left(x^2-4x+4\right)}=\frac{1-1}{1^2-4\cdot1+4}=0$$

οπου χρησιμοποιησαμε οτι ο παρονομαστης ειναι διαφορος του μηδενος. Για το (3) εχουμε $\lim_{x\to2}\sqrt{x^4}=\sqrt{2^4}=4$. Για το (4) θετουμε $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=5x^2+3x-4$ οποτε

$$\lim_{x\to1}\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{\lim_{x\to1}\left(x^2+x+1\right)}=\sqrt{3}.$$

1.2.13. Υπολογισε τα παρακατω ορια

1. $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-5x+4}$.
2. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^4-1}$.
3. $\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}$.
4. $\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$.

Λυση. Για το (1) εχουμε

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-4}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}.$$

Για το (2) εχουμε

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^4-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}.$$

Για το (3) εχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}} &= \lim_{x\to1}\left(\frac{1-x^2}{2-\sqrt{x^2+3}}\cdot\frac{2+\sqrt{x^2+3}}{2+\sqrt{x^2+3}}\right)\\ &= \lim_{x\to1}\left(\frac{\left(1-x^2\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{2^2-x^2-3}\right)\\ &= \lim_{x\to1}\left(\frac{\left(1-x^2\right)\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)}{1-x^2}\right)\\ &= \lim_{x\to1}\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)=4.\end{aligned}$$

Για το (4) εχουμε

$$\lim_{h\to0}\frac{\left(x+h\right)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(x^2+2xh+h^2\right)-x^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to0}\left(2x+h\right)=2x.$$

1.2.14. Υπολογισε τα παρακατω ορια

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+7}{x-1}$.
2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{5x-1}$.
3. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-4}{x^2-1}$.
4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x}$.

Λυση. Για το (1) εχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+7}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{7}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x}}{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

επειδη: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1=1$· $\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=3\cdot0$ (εχουμε ηδη δει οτι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$)· και, παρομοια, $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$.

Παρομοια, για το (2) εχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{5x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{4}{x}}{\frac{5x}{x}-\frac{1}{x}}=\frac{2+0}{5-0}=\frac{2}{5}.$$

Για το (3) εχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-4}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{0-0}{1-0}=0.$$

Για το (4) εχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x}\right)=\infty-0=\infty.$$

1.2.15. Αποδειξε οτι η συναρτηση $\phi\left(x\right)=x^3-x^2+2x$ ειναι συνεχης στο $x_0=3$.
Λυση. Αφου η $\phi\left(x\right)$ ειναι πολυωνυμικη εχουμε

$$\lim_{x\to x_0}\phi\left(x\right)=\phi\left(x_0\right)$$

δηλ. ειναι συνεχης στο $x_0=3$. Φυσικα το ιδιο ισχυει για καθε $x_0\in\mathbb{R}$.

1.2.16. Αποδειξε οτι η $f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}$ δεν ειναι συνεχης στο $x_0=0$.
Λυση. Αφου δεν οριζεται το $f\left(0\right)$, δεν μπορουμε να εχουμε $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=f\left(0\right)$.

1.2.17. Αποδειξε οτι η συναρτηση $f(x) = \frac{x^3+2x}{x^2+1}$ ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$.
Λυση. Για καθε $x_0 \in \mathbb{R}$ εχουμε οτι $\lim_{x \to x_0} = f(x_0)$· η μονη πιθανη εξαιρεση ειναι σημεια στα οποια μηδενιζεται ο παρονομαστης της $f(x)$. Αλλα αφου αυτος ειναι x^2+1 τετοια σημεια δεν υπαρχουν στο $\mathbb{R}$, δηλ. η $f(x)$ ειναι συνεχης παντου στο $\mathbb{R}$.

1.2.18. Αποδειξε οτι η συναρτηση $f(x) = |x-1|$ ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$.
Λυση. Η συναρτηση μπορει να γραφτει και ως

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{οταν } x<1 \\ x-1 & \text{οταν } x \geq 1 \end{cases}.$$

Αρα για καθε $x_0 \in (1,\infty)$ εχουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0 = f(x_0)$$

και για καθε $x_0 \in (-\infty, 1)$ εχουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -x_0 = f(x_0)$$

Αρα η $f(x)$ ειναι σιγουρα συνεχης στο $\mathbb{R} - \{1\}$. Στο $x_0 = 1$ βλεπουμε ευκολα οτι εχουμε

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$$

και αρα

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 = f(1).$$

Αρα η $f(x) = |x-1|$ ειναι συνεχση σε ολο το $\mathbb{R}$.

1.2.19. Βρες τα σημεια ασυνεχειας της $f(x) = \frac{x-1}{x^2-9}$.
Λυση. Η $f(x)$ ειναι πηλικο δυο πολυωνυμικων και αρα συνεχων συναρτησεων. Αρα και η $f(x)$ ειναι συνεχης παντου εκτος των σημειων στα οποια μηδενιζεται ο παρονομαστης, δηλ. των $-3, 3$. Σε αυτα τα σημεια η συναρτηση δεν οριζεται, αρα και δεν μπορει να ειναι συνεχης.

1.3 Αλυτα Προβληματα

1.3.1. Δειξε υπολογιστικα οτι $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$.

1.3.2. Δειξε υπολογιστικα οτι $\lim_{x \to 2} (2x-1) = 3$.

1.3.3. Αποδειξε βασει του ορισμου οτι $\lim_{x \to 2} (2x-1) = 3$.

1.3.4. Αποδειξε βασει του ορισμου τα εξης.

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$.
2. $\lim_{x \to 2} \sqrt{x-1} = 1$.
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3x^2+7} = 0$.
4. $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.
5. $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.
6. $\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x^2-1)^2} = +\infty$.
7. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x^3-8)^2} = +\infty$.
8. $\lim_{x \to 4^-} \frac{1}{(x-4)^3} = -\infty$, $\lim_{x \to 4^+} \frac{1}{(x-4)^3} = +\infty$.
9. $\lim_{x \to 1^+} \frac{x+1}{x^2-1} = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} \frac{x+1}{x^2-1} = -\infty$.

10. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{3^x-2^x} = 0.$

1.3.5. Υπολογισε τα παρακατω ορια.

1. $\lim_{x\to-2}\left(5x^2+3x-4\right)$. *Απ.* 10.
2. $\lim_{x\to1}\left(x^2+2x+12\right)$. *Απ.*15.
3. $\lim_{x\to8}\sqrt{x^4}$. *Απ.*64.
4. $\lim_{x\to3}\sqrt{5x^2+3x-4}$. *Απ.* $\sqrt{50}$.
5. $\lim_{x\to-1}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+16}$. *Απ.* $\frac{12}{25}$.
6. $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x+12}{x^2+x}$. *Απ.*$\frac{15}{2}$
7. $\lim_{x\to1}\frac{x^2-9}{x+3}$. *Απ.* -2
8. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^6}$. *Απ.* *0*.
9. $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^6}$. *Απ.*0.
10. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^6+1}$. *Απ.* 0.

1.3.6. Υπολογισε τα παρακατω ορια.

1. $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-5x+6}$. *Απ.* 1.
2. $\lim_{x\to1}\frac{x^5-1}{x^3-1}$. *Απ.* $\frac{5}{3}$.
3. $\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$. *Απ.* $4x^3$.
4. $\lim_{x\to1}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$. *Απ.* $-\frac{3}{\sqrt{6}-3}$.
5. $\lim_{x\to2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$. *Απ.* 6.

1.3.7. Υπολογισε τα παρακατω ορια.

1. $\lim_{x\to1^-}\frac{x-4}{x-1}$. *Απ.* $+\infty$.
2. $\lim_{x\to1^+}\frac{x-4}{x-1}$. *Απ.* $-\infty$.
3. $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2x^3}$. *Απ.* $+\infty$.
4. $\lim_{x\to0^-}\frac{3x^2+5}{x}$. *Απ.* $-\infty$.
5. $\lim_{x\to0^-}\frac{3x+5}{x^3}$. *Απ.* $-\infty$.

1.3.8. Υπολογισε τα παρακατω ορια.

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x+1}$. *Απ.* 1.
2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{7x-1}$. *Απ.* $\frac{3}{7}$.
3. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{7x^2-1}$. *Απ.* 0.
4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-4}{7x-1}$. *Απ.* ∞.
5. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-4}{7x-1}$. *Απ.* $-\infty$.

1.3.9. Αποδειξε οτι η $f(x) = x^2 + 5x + 9$ ειναι συνεχης στο $x_0 = 3$.

1.3.10. Αποδειξε οτι η $f(x) = \frac{x^3+2x}{x^2+5}$ ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$.

1.3.11. Αποδειξε οτι η $f(x) = |x+1|$ ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$.

1.3.12. Αν οι $f(x)$, $g(x)$ ειναι συνεχεις στο x_0, αποδειξε οτι η $f(x) \cdot g(x)$ ειναι επισης συνεχης στο x_0.

1.3.13. Αν οι $f(x)$, $g(x)$ ειναι συνεχεις στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, αποδειξε οτι η $\frac{f(x)}{g(x)}$ ειναι επισης συνεχης στο x_0.

1.3.14. Βρες τα σημεια ασυνεχειας των παρακατω συναρτησεων.

1. $f(x) = \frac{1}{x-2}$. *Απ.* 2.
2. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$. *Απ.* $-1, 1$.
3. $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$. *Απ.* $-2, 2$.

1.3.15. Εστω οτι η $f(x)$ εχει την ιδιοτητα

$$\forall x \in \mathbb{R} : |f(x)| < M \cdot |x|^2 .$$

Αποδειξε οτι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

1.3.16. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ συμβολιζουμε με $\lfloor x \rfloor$ τον μεγαλυτερο ακεραιο ο οποιος ειναι μικροτερος η ισος του x. Για καθε $x_0 \in \mathbb{R}$ υπολογισε το $\lim_{x\to x_0} \lfloor x \rfloor$. Βρες τα σημεια ασυνεχειας της $\lfloor x \rfloor$.

1.3.17. Βρες το $\lim_{x\to 1} \frac{x^k-1}{x-1}$ οταν $k \in \mathbb{N}$.

1.3.18. Καθε μονοτονη συναρτηση ειναι 1-προς-1. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

1.3.19. Καθε αυστηρα μονοτονη συναρτηση ειναι 1-προς-1. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

1.3.20. Εστω οτι η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ειναι συνεχης και 1-προς-1. Δειξε οτι η f ειναι αυστηρα μονοτονη.

1.3.21. Αποδειξε οτι η $f(x) = ax + b$ ειναι ομοιομορφα συνεχης.

1.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

1.4.1. Δωσε αυστηρους ορισμους των $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$..

1.4.2. Αποδειξε οτι: για καθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τοτε $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$.

1.4.3. Αποδειξε οτι: για καθε $x_0 \in \mathbb{R}^*$, αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, τοτε $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$, $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$.

1.4.4. Αποδειξε οτι: αν οι $f(x)$, $g(x)$ ειναι συνεχεις στο x_0, το ιδιο ισχυει και για την $\kappa f(x) + \lambda g(x)$.

1.4.5. Αποδειξε οτι: καθε πολυωνυμικη συναρτηση ειναι συνεχης.

1.4.6. Αποδειξε οτι: αν η $f(x)$ ειναι συνεχης στο x_0 και η $g(x)$ ειναι συνεχης στο $f(x_0)$, τοτε η $g(f(x))$ ειναι συνεχης στο x_0.

1.4.7. Αποδειξε οτι: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1.4.8. Αποδειξε οτι υπαρχει το $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$.

1.4.9. Οριζουμε την συναρτηση

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{οταν} \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{οταν} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}.$$

Αποδειξε οτι: η $f(x)$ ειναι ασυνεχης στο $\mathbb{R}$.

1.4.10. Οριζουμε την συναρτηση

$$g(x)=\begin{cases}x & \text{οταν} \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{οταν} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}.$$

Αποδειξε οτι: η $f(x)$ ειναι συνεχης στο 0 και ασυνεχης στο $(0,1]$.

1.4.11. Οριζουμε την συναρτηση

$$g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{οταν} \quad x\in\mathbb{Q}\\ -x^2 & \text{οταν} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}.$$

Αποδειξε οτι: η $g(x)$ ειναι ασυνεχης στο $\mathbb{R}-\{0\}$ και συνεχης στο 0.

1.4.12. Οριζουμε την συναρτηση

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{οταν} \quad x=\frac{m}{n} \text{ σε αναγωγη μορφη},\\ 0 & \text{οταν} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q},\\ 0 & \text{οταν} \quad x=0.\end{cases}.$$

Αποδειξε οτι: η $h(x)$ ειναι συνεχης στο συνολο των αρρητων αριθμων του $(0,1]$ και ασυνεχης στο συνολο των ρητων αριθμων του $(0,1]$.

1.4.13. Οριζουμε την συναρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{οταν} \quad x\in\mathbb{Q}\\ 1-x & \text{οταν} \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}.$$

Αποδειξε οτι: η $f(x)$ ειναι συνεχης στο 1 και ασυνεχης στο $[0,1)$.

1.4.14. Αποδειξε οτι η εξισωση $x^5-18x+2=0$ εχει τουλαχιστον μια ριζα στο $[-1,1]$.

1.4.15. Αποδειξε οτι καθε εξισωση της μορφης $a_0+a_1x+...+a_{2n+1}x^{2n+1}=0$ εχει τουλαχιστον μια πραγματικη ριζα.

1.4.16. Καθε συναρτηση της μορφης $f(x)=a_0+a_1x+...+a_{2n+1}x^{2n+1}$, οπου τα $a_0,a_1,...,a_{2n+1}$ ειναι θετικα, εχει αντιστροφη συναρτηση. Αν ειναι σωστο αποδειξε το, αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

1.4.17. Δινεται η $f(x)$ με πεδιο ορισμου το $\mathbb{R}$. Εστω οτι η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$ και $\forall x,y\in\mathbb{R}$ ισχυει

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Αποδειξε οτι υπαρχει σταθερα a τετοια ωστε $f(x)=ax$.

1.4.18. Βρες ολες τις συνεχεις συναρτησεις $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ τετοιες ωστε

$$\forall x,y>1: f(xy)=xf(y)+yf(x).$$

Απ. $f(x)=ax\ln x$.

1.4.19. Βρες ολες τις συνεχεις συναρτησεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τετοιες ωστε

$$\forall x: 2f(2x)=f(x)+x.$$

Απ. $f(x)=\frac{x}{3}$.

1.4.20. Δωσε παραδειγμα συναρτησης $f(x)$ η οποια ειναι συνεχης στο $(0,1)$ και απεικονιζει το $(0,1)$ στο $(0,1]$, ή αποδειξε οτι δεν μπορει να υπαρχει τετοια συναρτηση.

1.4.21. Δωσε παραδειγμα συναρτησης $f(x)$ η οποια ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$ και απεικονιζει το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{Q}$, ή αποδειξε οτι δεν μπορει να υπαρχει τετοια συναρτηση.

1.4.22. Αποδειξε οτι: αν η $f(x)$ ειναι ομοιομορφα συνεχης στο (a,b), τοτε θα ειναι φραγμενη. Δωσε παραδειγμα που δειχνει οτι αυτο δεν ισχυει αν η $f(x)$ ειναι απλα συνεχης στο (a,b).

1.4.23. Αν δεν υπαρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ τοτε δεν υπαρχει το $\lim_{x\to x_0} |f(x)|$. Σωστο ή λαθος;

1.4.24. Αν δεν υπαρχει τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$ τοτε δεν υπαρχει το $\lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x))$. Σωστο ή λαθος;

1.4.25. Αν υπαρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$ τοτε $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Σωστο ή λαθος;

1.4.26. Αν υπαρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ τοτε $\lim_{x\to x_0} f(x) g(x) = +\infty$ ή $-\infty$. Σωστο ή λαθος;

1.4.27. Αν υπαρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ αλλα οχι το $\lim_{x\to x_0} g(x)$ τοτε δεν υπαρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x) g(x)$. Σωστο ή λαθος;

1.4.28. Αν η $g(x) = (f(x))^2$ ειναι συνεχης στο x_0, τοτε και η $f(x)$ ειναι συνεχης στο x_0. Σωστο ή λαθος;

1.4.29. Αν η $g(x) = (f(x))^2$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$, τοτε και η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$. Σωστο ή λαθος;

1.4.30. Αν $\lim_{h\to 0} (f(x+h) - f(x-h)) = 0$, τοτε η $f(x)$ ειναι συνεχης στο x_0. Σωστο ή λαθος;

1.4.31. Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης και η $g(x)$ ειναι ασυνεχης στο x_0, τοτε και η $f(x)+g(x)$ ειναι ασυνεχης στο x_0. Σωστο ή λαθος;

1.4.32. Αν η $f(x)$ και η $g(x)$ ειναι ασυνεχεις στο x_0, τοτε και η $f(x)+g(x)$ ειναι ασυνεχης στο x_0. Σωστο ή λαθος;

1.4.33. Υπαρχει συναρτηση $f(x)$ με πεδιο ορισμου το $\mathbb{R}$ η οποια ειναι ασυνεχης σε ολο το $\mathbb{R}$. Σωστο ή λαθος;

1.4.34. Υπαρχει συναρτηση $f(x)$ με απειρα σημεια ασυνεχειας και απειρα σημεια συνεχειας. Σωστο ή λαθος;

1.4.35. Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης στα διαστηματα $[a,b]$ και $[c,d]$, τοτε ειναι συνεχης και στο $[a,b]\cup[c,d]$. Σωστο ή λαθος;

2 Παραγωγος

Η παραγωγος της συναρτησης $f(x)$ ειναι ο *στιγμιαιος* ρυθμος μεταβολης της f οταν μεταβαλλεται το x.

2.1 Θεωρια και Παραδειγματα

2.1.1. Ορισμος. Η *παραγωγος της συναρτησης* $f(x)$ *στο* x_0 συμβολιζεται με $f'(x_0)$ και οριζεται ως εξης:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{2.1}$$

Οταν υπαρχει το οριο της (2.1), λεμε οτι η $f(x)$ ειναι *παραγωγισιμη* στο x_0 η οτι υπαρχει η $f'(x)$ στο x_0. Οταν υπαρχει η $f'(x_0)$ για καθε $x_0 \in A$, λεμε οτι η $f(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο A· ετσι οριζεται η *παραγωγος συναρτηση* $f' : A \to \mathbb{R}$.

2.1.2. Συμβολισμος. Γραφουμε επισης την $f'(x)$ και με τους συμβολισμους $\frac{df}{dx}$ και $D_x f$.

1. Ο συμβολισμος $\frac{df}{dx}$ τονιζει οτι η παραγωγος ειναι ο *λογος* της μεταβολης Δf ως προς την μεταβολη Δx οταν τα Δx και Δf γινονται πολυ μικρα (*απειροστικα* μικρα).
2. Ο συμβολισμος $D_x f$ τονιζει οτι η παραγωγος ειναι ενας *γραμμικος τελεστης*, δηλαδη μια *γραμμικη* απεικονιση συναρτησεων σε συναρτησεις.

2.1.3. Παραδειγμα. Θα υπολογισουμε την παραγωγο της $f(x) = x$ βασει του ορισμου. Εχουμε

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

2.1.4. Παραδειγμα. Θα υπολογισουμε την παραγωγο της $f(x) = x^2$ βασει του ορισμου. Εχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x + \Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

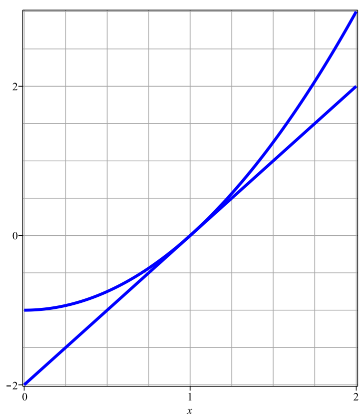
2.1.5. Ασκηση. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = x^2 + 4x - 3$ βασει του ορισμου.

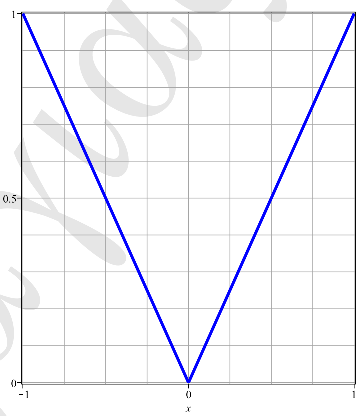
2.1.6. Ασκηση. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = \frac{1}{x+3}$ βασει του ορισμου.

2.1.7. Ορισμος. Οριζουμε επισης και τις *εκ δεξιων* και *εξ αριστερων παραγωγους της* $f(x)$ *στο* x_0 ως εξης:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

2.1.8. Εαν παραστησουμε γραφικα μια συναρτηση $f(x)$ με μια καμπυλη C, οπως στο Σχημα 2.1, τοτε η $f'(x)$ δινει την κλιση της ευθειας η οποια εφαπτεται στην C στο σημειο x.





Σχήμα 2.1 Σχήμα 2.2

Υπαρχουν περιπτωσεις οπου η C η οποια αντιστοιχει στην $f(x)$ *δεν* εχει εφαπτομενη σε καποιο σημειο x_0, οπως στο Σχημα 2.2, οποτε και η $f(x)$ *δεν* ειναι παραγωγισιμη στο x_0· π.χ. στο Σχημα 2.2, οπου εχουμε $\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ και αρα δεν υπαρχει η $f'(x)$.

2.1.9. Παραδειγμα. Θα αποδειξουμε οτι η

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{οταν} \quad x \geq 0 \\ x & \text{οταν} \quad x < 0 \end{cases}$$

δεν ειναι παραγωγισιμη στο $x_0 = 0$. Πραγματι, για να υπαρχει η $f'(x)$ θα πρεπει να ειναι

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}.$$

Αλλα

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$$

και

$$\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\Delta x - 0}{\Delta x} = 1.$$

Αρα δεν υπαρχει η $f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$.

2.1.10. Θεωρημα. *Αν η* $f(x)$ *ειναι παραγωγισιμη στο* x_0*, τοτε ειναι και συνεχης στο* x_0*. Το αντιστροφο δεν ισχυει υποχρεωτικα.*

Αποδειξη. Εχουμε

$$\begin{aligned}
f(x_0+\Delta x) &= f(x_0)+\Delta x\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow \\
\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0)+\Delta x\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right) \Rightarrow \\
\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) &= f(x_0)+\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right) \Rightarrow \\
\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) &= f(x_0)+0\cdot f'(x_0)=f(x_0)
\end{aligned}$$

το οποιο αποδεικνυει οτι η $f(x)$ ειναι συνεχης στο x_0. Το αντιστροφο δεν ισχυει, οπως βλεπουμε απο την συναρτηση $g(x)=|x|$, η οποια ειναι συνεχης αλλα οχι παραγωγισιμη (γιατι;).

2.1.11. Θεωρημα. Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ εχουν παραγωγους $f'(x)$ και $g'(x)$ αντιστοιχα, τοτε ισχυουν τα παρακατω.

$$\begin{aligned}
\forall\kappa,\lambda\in\mathbb{R}:(\kappa f(x)+\lambda g(x))' &= \kappa f'(x)+\lambda g'(x), \\
(f(x)\cdot g(x))' &= f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x), \\
\text{οταν } g(x)\neq 0:\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

2.1.12. Θεωρημα. Για καθε $a\in\mathbb{R}$, αν $(x^a)'=ax^{a-1}$.
Αποδειξη. Δινουμε την αποδειξη οταν $a\in\mathbb{N}$. Η αποδειξη ειναι επαγωγικη. Για $n=1$ εχουμε $(x)'=1=n\cdot x^{n-1}$. Εστω οτι για $n=1,2,...,k$ ισχυει $(x^n)'=nx^{n-1}$. Τοτε

$$\left(x^{k+1}\right)'=\left(x^k\cdot x\right)'=\left(x^k\right)'\cdot x+x^k\cdot(x)'=kx^{k-1}x+x^k=(k+1)\,x^k.$$

Η γενικευση στην περιπτωση περιπτωση $a\in\mathbb{Q}$ ειναι ευκολη· στην περιπτωση $a\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ δυσκολη.

2.1.13. Παραδειγμα. Υπολογιζουμε την $\left(x^2-4x+5\right)'$ βασει των παραπανω:

$$\left(x^2-4x+5\right)'=\left(x^2\right)'-4(x)'+(5)'=2x-4+0=2x-4.$$

2.1.14. Παραδειγμα. Υπολογιζουμε την $\left(\left(x^2-4x+5\right)\left(x^2+1\right)\right)'$ βασει των παραπανω:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x^2-4x+5\right)'\left(x^2+1\right)+\left(x^2-4x+5\right)\left(x^2+1\right)' \\
&= (2x-4)\left(x^2+1\right)+\left(x^2-4x+5\right)2x \\
&= 4x^3-12x^2+12x-4.
\end{aligned}$$

2.1.15. Παραδειγμα. Υπολογιζουμε την $\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2+1}\right)'$ βασει των παραπανω:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2+1}\right)' &= \frac{\left(x^2-4x+5\right)'\left(x^2+1\right)-\left(x^2-4x+5\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} \\
&= \frac{(2x-4)\left(x^2+1\right)-\left(x^2-4x+5\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4x^2-8x-4}{\left(x^2+1\right)^2}.
\end{aligned}$$

2.1.16. Παραδειγμα. Υπολογιζουμε την $\left(\sqrt[3]{x}\right)'$ βασει των παραπανω:

$$f'(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{1/3}\right)'=\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

2.1.17. Ασκηση. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = \frac{x^2+4x-3}{x^2+2}$.

2.1.18. Ορισμος. Η *δευτερη παραγωγος* μιας συναρτησης $f(x)$ συμβολιζεται με $f''(x)$ και οριζεται ως εξης: $f''(x) = (f'(x))'$. Η *παραγωγος n-στης ταξης* μια συναρτησης (για $n = 0, 1, 2, 3, ...$) συμβολιζεται με $f^{(n)}(x)$ και οριζεται ως εξης: για $n = 0 : f^{(0)}(x) = f(x)$· για $n = 1, 2, 3, .. : f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$. Δηλ. η $f^{(n)}(x)$ ειναι η παραγωγος της $f^{(n-1)}(x)$.

2.1.19. Συμβολισμος. Για την $f''(x)$ χρησιμοποιουμε και τους συμβολισμους $\frac{d^2 f}{dx^2}$ και $D_{xx} f$. Αντιστοιχοι συμβολισμοι χρησιμοποιουμται και για παραγωγους ανωτερης ταξης.

2.1.20. Παραδειγμα. Υπολογιζουμε την δευτερη παραγωγο της $f(x) = \frac{x^2-4x+5}{x^2+1}$:

$$\begin{aligned} f''(x) = (f'(x))' &= \left(\left(\frac{x^2-4x+5}{x^2+1}\right)'\right)' \\ &= \left(\frac{4x^2-8x-4}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{8\left(-x^3+3x^2+3x-1\right)}{(x^2+1)^3}. \end{aligned}$$

2.1.21. Ασκηση. Υπολογισε την δευτερη παραγωγο της $f(x) = \frac{x^2+4x}{x^2-2}$.

2.1.22. Θεωρημα (Συνθετη ή Αλυσσωτη Παραγωγιση). Αν υπαρχει η $f'(x)$ στο $g(x_0)$ και η $g'(x)$ στο x_0, τοτε.

$$(f(g(x_0)))' = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(g(x_0+\Delta x) - f(g(x_0))), \\ \Delta g &= g(x_0+\Delta x) - g(x_0). \end{aligned}$$

Τωρα, επειδη ολα τα παρακατω ορια υπαρχουν, εχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta g} \frac{\Delta g}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{f(g(x_0+\Delta x) - f(g(x_0)))}{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) \\ &= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x_0+\Delta x) - f(g(x_0)))}{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)} \right) \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0+\Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \right) \\ &= f'(g(x_0))\, g'(x_0). \end{aligned}$$

2.1.23. Παραδειγμα. Υπολογιζουμε την παραγωγο της $\left(x^2+1\right)^{100}$ ως εξης. Θετουμε $f(x) = x^{100}$, $g(x) = x^2+1$. Τοτε

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} = 100 g^{99}(2x) = \left(x^2+1\right)^{99} 2x.$$

2.1.24. Ασκηση. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+4x}{x^2-2}}$.

2.1.25. Μπορουμε να γραψουμε συνοπτικα το παραπανω θεωρημα και ως:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}.$$

Εδω φαινεται οτι τα $\frac{df}{dg}$, $\frac{dg}{dx}$ συμπεριφερονται ως κλασματα. Αν και αυτο δεν ειναι αυστηρα σωστο (τα $\frac{df}{dg}$, $\frac{dg}{dx}$ ειναι *συμβολα*) θα χρησιμοποιησουμε αυτη την ιδεα επανειλημμενα.

2.1.26. Ασκηση. Δειξε οτι: αν η $g(x)$ ειναι η αντιστροφη συναρτηση της $f(x)$ και οι παραγωγοι υπαρχουν, τοτε ισχυει $f'(x)\, g'(x) = 1$.

2.1.27. Θεωρημα. Εστω $f(x)$ αυστηρα μονοτονη και συνεχης στο $[a,b]$ και για καποιο $x_0 \in (a,b)$ (υπαρχει η) $f'(x_0) \neq 0$. Τοτε στο $[a,b]$ υπαρχει και η αντιστροφη συναρτηση $g(x) = f^{-1}(x)$ και στο $y_0 = f(x_0)$ ισχυει

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Αποδειξη. Θετουμε

$$\Delta g = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g(y_0 + \Delta y) - x_0.$$

Οποτε $x_0 + \Delta g = g(y_0 + \Delta y)$ και $f(x_0 + \Delta g) = y_0 + \Delta y$. Επειδη η $f(x)$ ειναι αυστηρα μονοτονη, το ιδιο ισχυει και για την $g(y)$ οποτε $\Delta y \neq 0 \Rightarrow \Delta g \neq 0$. Και οταν $\Delta y \neq 0$ ισχυει

$$\frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} = \frac{x_0 + \Delta g - x_0}{f(x_0 + \Delta g) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_0+\Delta g) - f(x_0)}{\Delta g}}.$$

Επειδη η $g(y)$ ειναι συνεχης εχουμε

$$\lim_{\Delta y \to 0} \left(g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) \right) = \lim_{\Delta y \to 0} \Delta g = 0.$$

Ετσι εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} &= \frac{1}{\frac{f(x_0+\Delta g) - f(x_0)}{\Delta g}} \\ &\Rightarrow \lim_{\Delta y \to 0} \frac{g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta g \to 0} \frac{1}{\frac{f(x_0+\Delta g) - f(x_0)}{\Delta g}} \Rightarrow g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

2.1.28. Μερικες φορες μια συναρτηση $y(x)$ οριζεται σε *πλεγμενη μορφη*, απο μια εκφραση $P(x,y) = 0$. Η εκφραση αυτη καθοριζει οτι οι x και y βρισκονται σε καποια (συναρτησιακη) σχεση, αλλα ισως δεν μπορουμε να λυσουμε $P(x,y) = 0$ και να βρουμε την $y(x)$ ως συναρτηση του x. Παρολα αυτα, πολλες φορες ειναι δυνατο να υπολογισουμε την $y'(x)$ ως συναρτηση των x και y.

2.1.29. Παραδειγμα. Θα βρουμε την y' οταν $y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0$. Θεωρουμε την συνθετη συναρτηση $g(x) = g(y(x)) = (y(x))^3$, δηλ. $g(y) = y^3$. Τοτε

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy}\frac{dy}{dx} = 3y^2 y'. \tag{2.2}$$

Αντιστοιχα,

$$\frac{d}{dx} y^2 = 2yy'. \tag{2.3}$$

Χρησιμοποιωντας τις (2.2) και (2.3) εχουμε

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4\right) = \frac{d}{dx}(0) \Rightarrow 3y^2 y' + 2yy' - 5y' - 2x + 0 = 0 \Rightarrow \\ &y' \cdot \left(3y^2 + 2y - 5\right) = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}. \end{aligned}$$

2.1.30. Θεωρημα. Αν (α) η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$, (β) παραγωγισιμη στο (a,b) και (γ) στο $x_0 \in (a,b)$ λαμβανει ειτε την μεγιστη ειτε την ελαχιστη τιμη της στο $[a,b]$, τοτε $f'(x_0) = 0$.
Αποδειξη. Χωρις βλαβη της γενικοτητας, υποθετουμε οτι η $f(x)$ λαμβανει στο x_0 την μεγιστη τιμη της στο $[a,b]$. Ας θεωρησουμε το $\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ με το $|\Delta x|$ αρκουντως μικρο ωστε $x_0 + \Delta x \in (a,b)$. Για καθε τετοιο Δx εχουμε $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ οποτε

$$\begin{aligned} \left(\Delta x < 0 \Rightarrow \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0 \right) &\Rightarrow f'\left(x_0^-\right) \geq 0, \\ \left(\Delta x > 0 \Rightarrow \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0 \right) &\Rightarrow f'\left(x_0^+\right) \leq 0. \end{aligned}$$

Επειδη

$$f'\left(x_0^-\right) = f'\left(x_0\right) = f'\left(x_0^+\right)$$

συμπεραινουμε οτι $f'\left(x_0\right) = 0$.

2.1.31. Θεωρημα (Rolle). Αν (α) η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$, (β) παραγωγισιμη στο (a,b) και (γ) $f(a) = f(b) = 0$, τοτε υπαρχει $x_0 \in (a,b)$ τετοιο ωστε $f'(x_0) = 0$.

Αποδειξη. Αν $x \in [a,b] \Rightarrow f(x) = 0$ το ζητουμενο προφανως ισχυει. Αν υπαρχει $x_1 \in (a,b)$ τετοιο ωστε $f(x_1) > 0$ τοτε η $f(x)$ λαμβανει την μεγιστη τιμη της στο $[a,b]$ σε καποιο $x_0 \in (a,b)$ (δηλ. $x_0 = \arg\max_{x\in[a,b]} f(x)$) και το ζητουμενο προκυπτει απο το προηγουμενο θεωρημα. Παρομοια αποδεικνυουμε το ζητουμενο αν υπαρχει $x_2 \in (a,b)$ τετοιο ωστε $f(x_2) < 0$.

2.1.32. Παραδειγμα. Η συναρτηση $f(x) = x^2 - 1$ ειναι συνεχης και παραγωγισιμη στο $(-1,1)$ και $f(-1) = f(1) = 0$. Παρατηρουμε οτι υπαρχει $x_0 = 0 \in (-1,1)$ τετοιο ωστε $f'(x_0) = 2x_0 = 0$.

2.1.33. Θεωρημα (Μεσης Τιμης): Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$ και παραγωγισιμη στο (a,b), τοτε υπαρχει $x_0 \in (a,b)$ τετοιο ωστε

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

2.1.34. Παραδειγμα. Η συναρτηση $f(x) = x^2 - 1$ ειναι συνεχης και παραγωγισιμη στο $(-1,2)$ και $f(-1) = 0$, $f(2) = 3$. Παρατηρουμε οτι υπαρχει $x_0 = \frac{1}{2} \in (-1,1)$ τετοιο ωστε $f'(x_0) = 2x_0 = 1 = \frac{3-0}{2-(-1)}$.

2.1.35. Τα επομενα δυο θεωρηματα δινουν διαφορετικες γενικευσεις του Θεωρηματος Μεσης Τιμης.

2.1.36. Θεωρημα (Cauchy). Αν οι $f(x), g(x)$ ειναι συνεχεις στο $[a,b]$ και παραγωγισιμες στο (a,b), τοτε υπαρχει $x_0 \in (a,b)$ τετοιο ωστε

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

2.1.37. Θεωρημα (Taylor). Για καθε N ισχυει το εξης: αν στο $[a,b]$ υπαρχουν και ειναι συνεχεις οι $f(x) = f^{(0)}(x)$, $f^{(1)}(x)$, ..., $f^{(N-1)}(x)$ και στο (a,b) υπαρχει η $f^{(N)}(x)$, τοτε υπαρχει $\xi \in (a,b)$ τετοιο ωστε

$$f(b) = f(a) + f^{(1)}(a)(b-a) + ... + \frac{f^{(N-1)}(a)}{(N-1)!}(b-a)^{N-1} + \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}(b-a)^N.$$

2.1.38. Παραδειγμα. Οι συναρτησεις $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^2$ ειναι συνεχεις και παραγωγισιμες στο $(-1,2)$. Εχουμε

$$\begin{gathered} f(-1) = 0, \quad f(2) = 3, \\ g(-1) = 1, \quad g(2) = 4, \\ \frac{f(2) - f(-1)}{g(2) - g(-1)} = \frac{3-0}{4-1} = 1. \end{gathered}$$

Επιπλεον $f'(x) = 2x = g'(x)$. Παρατηρουμε οτι υπαρχει $x_0 = 1 \in (-1,2)$ τετοιο ωστε

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{2}{2} = 1 = \frac{f(2) - f(-1)}{g(2) - g(-1)}.$$

Στην πραγματικοτητα εδω εχουμε

$$\forall x_0 \in (-1,2) : \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = 1 = \frac{f(2) - f(-1)}{g(2) - g(-1)}.$$

2.1.39. Θεωρημα. Αν στο $[a,b]$ ισχυει $f'(x)=0$, τοτε η $f(x)$ ειναι η σταθερη συναρτηση $f(x)=c$ (στο $[a,b]$).
Αποδειξη. Αν η $f(x)$ δεν ειναι σταθερη, υπαρχουν (διακριτα) σημεια $x_1,x_2\in[a,b]$ τετοια ωστε $f(x_1)\neq f(x_2)$. Απ το Θεωρημα Μεσης Τιμης θα υπαρχει $x_3\in(x_1,x_2)$

$$f'(x_3)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\neq 0$$

το οποιο αντικειται στην υποθεση.

2.1.40. Ασκηση. Δειξε οτι: αν $x\in[a,b]\Rightarrow f'(x)=g'(x)$, τοτε $f'(x)-g(x)=c\in\mathbb{R}$ (ενας σταθερος αριθμος).

2.1.41. Ορισμος. Λεμε οτι η $f(x)$ ειναι *αυξουσα* (αντ. *φθινουσα*) στο (a,b) ανν για καθε $x_1,x_2\in(a,b)$ ισχυει: $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\leq f(x_2)$ (αντ. $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$). Αν το $\leq$ (αντ. $\geq$) αντικατασταθει με $<$ (αντ. $>$) λεμε οτι η $f(x)$ ειναι *γνησιως αυξουσα* (αντ. *γνησιως φθινουσα*). Αντιστοιχοι ορισμοι ισχυουν και για το κλειστο διαστημα $[a,b]$.

2.1.42. Θεωρημα. Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$ και $x\in(a,b)\Rightarrow f'(x)\geq 0$ (αντ. $x\in(a,b)\Rightarrow f'(x)>0$) τοτε η $f(x)$ ειναι αυξουσα (αντ. φθινουσα). Αν το $\geq$ αντικατασταθει με $>$, τοτε η συναρτηση ειναι γνησιως αυξουσα (αντ. γνησιως φθινουσα).
Αποδειξη. Εστω οτι $x_1,x_2\in(a,b)$ και $x_1<x_2$. Τοτε, απο το Θεωρημα της Μεσης Τιμης υπαρχει $x_3\in(x_1,x_2)$ τετοιο ωστε

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(x_3)(x_2-x_1)$$

και το προσημο της $f(x_2)-f(x_1)$ ειναι ιδιο με αυτο της $f'(x_3)$. Ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

2.1.43. Παραδειγμα. Θα βρουμε τα διαστηματα στα οποια η $f(x)=x^3-x$ ειναι αυξουσα και φθινουσα. Εχουμε $f'(x)=3x^2-1$. Λυνοντας $3x^2-1>0$, παιρνουμε ως συνολο λυσεων το $A=\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$· αρα η $f(x)$ ειναι γνησιως αυξουσα στο A. Παρομοια, λυνοντας $3x^2-1<0$, παιρνουμε ως συνολο λυσεων το $B=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$· αρα η $f(x)$ ειναι γνησιως φθινουσα στο A.

2.1.44. Ορισμος. Λεμε οτι η $f(x)$ ειναι *κυρτη* στο $[a,b]$ (αντ. στο (a,b)) ανν για καθε $x_1,x_2\in[a,b]$ (αντ. $x_1,x_2\in(a,b)$) και $\kappa\in(0,1)$ ισχυει:

$$f(\kappa x_1+(1-\kappa)x_2)\leq\kappa f(x_1)+(1-\kappa)f(x_2)$$

Λεμε οτι η $f(x)$ ειναι *κοιλη* στο $[a,b]$ (αντ. στο (a,b)) ανν για καθε $x_1,x_2\in[a,b]$ (αντ. $x_1,x_2\in(a,b)$) και $\kappa\in(0,1)$ ισχυει:

$$f(\kappa x_1+(1-\kappa)x_2)\geq\kappa f(x_1)+(1-\kappa)f(x_2)$$

2.1.45. Θεωρημα. Η $f(x)$ ειναι κυρτη στο (a,b) ανν

$$\forall x\in(x_1,x_2)\subset(a,b):\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leq\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$

και ειναι κοιλη στο (a,b) ανν

$$\forall x\in(x_1,x_2)\subset(a,b):\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\geq\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη

2.1.46. Θεωρημα. Εστω $f(x)$ παραγωγισιμη στο (a,b). Τοτε

1. Η $f(x)$ ειναι *κυρτη* στο (a,b) ανν η $f'(x)$ ειναι αυξουσα (δηλ. μη φθινουσα) στο (a,b).
2. Η $f(x)$ ειναι *κοιλη* στο (a,b) ανν η $f'(x)$ ειναι φθινουσα (δηλ. μη αυξουσα) στο (a,b).

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε μονο το πρωτο. Εστω οτι η $f(x)$ ειναι κυρτη. Λαμβανουμε $x_1, x_2 \in (a,b)$ τετοια ωστε $x_1 < x_2$. Εχουμε (γιατι;)

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

Αρα η $f'(x)$ ειναι αυξουσα. Αντιστροφα, αν η $f'(x)$ ειναι αυξουσα εχουμε $\xi_1 \in (x_1, x)$ και $\xi_2 \in (x, x_2)$ τετοια ωστε

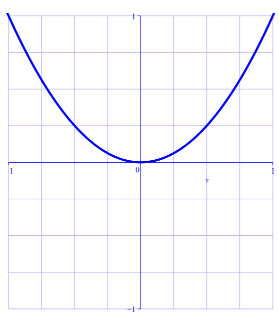
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

2.1.47. Πορισμα. Εστω $f(x)$ δις παραγωγισιμη στο (a,b). Τοτε

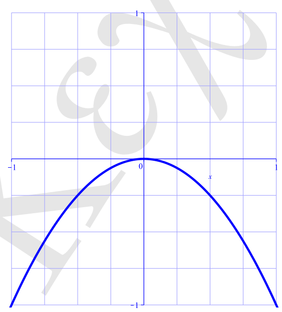
1. Η $f(x)$ ειναι *κυρτη* στο (a,b) ανν $f''(x) \geq 0$ για καθε $x \in (a,b)$.
2. Η $f(x)$ ειναι *κοιλη* στο (a,b) ανν $f''(x) \leq 0$ για καθε $x \in (a,b)$.

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

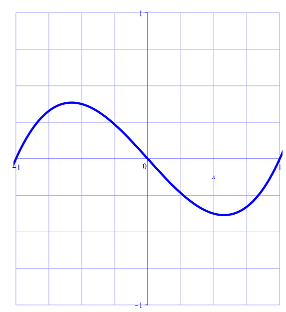
2.1.48. Παραδειγμα. Η $f(x) = x^2$ εχει $f''(x) = 2 > 0$ για καθε $x \in (-\infty, \infty)$ αρα ειναι κυρτη στο $(-\infty, \infty)$. Η $g(x) = 1 - x^2$ εχει $g''(x) = -2 < 0$ για καθε $x \in (-\infty, \infty)$ αρα ειναι κυρτη στο $(-\infty, \infty)$. Η $h(x) = x^3 - x$ εχει $h''(x) = 6x$, αρα ειναι κοιλη για $x < 0$ και κυρτη για $x > 0$. Οι γραφικες παραστασεις των συναρτησεων στα Σχηματα 2.3–2.5 δινουν την *οπτικη* σημασια της κυρτοτητας και κοιλοτητας.



Σχήμα 2.3



Σχήμα 2.4



Σχήμα 2.5

2.1.49. Παραδειγμα. Για να βρουμε τα διαστηματα κυρτοτητας και κοιλοτητας της $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, παιρνουμε $f''(x) = 6x - 12$ και συμπεραινουμε οτι η $f(x)$ ειναι κοιλη στο $(-\infty, 2)$ και κυρτη στο $(2, \infty)$.

2.1.50. Ασκηση. Βρες τα διαστηματα κυρτοτητας και κοιλοτητας της $f(x) = x^2 + x + 1$.

2.1.51. Ορισμος: Λεμε οτι το x_0 ειναι ενα *στασιμο σημειο* της $f(x)$ ανν $f'(x_0) = 0$. Λεμε οτι το x_0 ειναι ενα *σημειο καμπης* της $f(x)$ ανν $f''(x_0) = 0$..

2.1.52. Ορισμος: Λεμε οτι η συναρτηση $f(x)$ εχει *τοπικο μεγιστο* στο x_0 αν υπαρχει $\delta > 0$ τετοιο ωστε

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Αντιστοιχα λεμε οτι η συναρτηση $f(x)$ εχει *τοπικο ελαχιστο* στο x_0 αν υπαρχει $\delta > 0$ τετοιο ωστε

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

Και στις δυο περιπτωσεις (τοπικο μεγιστο και τοπικο ελαχιστο) λεμε οτι η $f(x)$ εχει *τοπικο ακροτατο* στο x_0.

2.1.53. Θεωρημα. Αν η $f(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο (a,b) και εχει *τοπικο μεγιστο* ή *τοπικο ελαχιστο* στο $x_0 \in (a,b)$ τοτε $f'(x_0) = 0$.
Αποδειξη. Ειναι αμεση συνεπεια θεωρηματος το οποιο εχουμε ηδη αποδειξει (ποιο ειναι αυτο το θεωρημα;).

2.1.54. Θεωρημα. Αν η $f(x)$ ειναι δις παραγωγισιμη στο (a,b) τοτε

1. Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, η $f(x)$ εχει τοπικο ελαχιστο στο x_0.
2. Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, η $f(x)$ εχει τοπικο μεγιστο στο x_0.

Αποδειξη. Αποδεικνυουμε μονο το πρωτο. Αν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, θα υπαρχει $\delta > 0$ τετοιο ωστε

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0.$$

Για καθε τετοιο $x \in (x_0 - \delta, x_0)$:

$$\exists \xi' \in (x, x_0) : f(x) - f(x_0) = f'(\xi')(x - x_0) > 0.$$

Ομοιως θα ισχυει

$$x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0.$$

Για καθε τετοιο $x \in (x_0, x_0 + \delta)$:

$$\exists \xi'' \in (x_0, x) : f(x_0) - f(x) = f'(\xi'')(x_0 - x) < 0.$$

Οποτε

$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > f(x_0).$$

2.1.55. Παραδειγμα. Για να βρουμε τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x) = x^3 - x$ λυνουμε την $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ οποτε εχουμε δυο στασιμα σημεια (υποψηφια για τοπικο ακροτατο) τα $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ και $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Αφου $f''(x) = 6x$ και $f''(x_1) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$, στο x_1 εχουμε τοπικο ελαχιστο. Αντιστοιχα, αφου $f''(x_2) = -\frac{6}{\sqrt{3}} < 0$, στο x_2 εχουμε τοπικο μεγιστο.

2.1.56. Ασκηση. Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x) = \frac{x^2+1}{2x^2+3}$.

2.1.57. Απο τον ορισμο της παραγωγου βλεπουμε οτι ισχυει *προσεγγιστικα* $f'(x) \simeq \frac{\Delta f}{\Delta x}$ και

$$\Delta f \simeq f'(x) \Delta x \tag{2.4}$$

και οτι η προσεγγιση ειναι τοσο καλυτερη οσο μικροτερο ειναι το $|\Delta x|$. Οπως εχουμε σημειωσει, το *συμβολο* $\frac{df}{dx}$ *δεν* ειναι κλασμα· ωστοσο πολλες φορες το μεταχειριζομαστε ως τετοιο· π.χ. γραφουμε

$$df = f'(x) dx. \tag{2.5}$$

Στην ουσια, η (2.5) ειναι μια συντομογραφια της εκφρασης «η Δf ειναι *περιπου* ιση με την $f'(x) \Delta x$ οταν το $|\Delta x|$ ειναι *αρκετα μικρο*»[1].

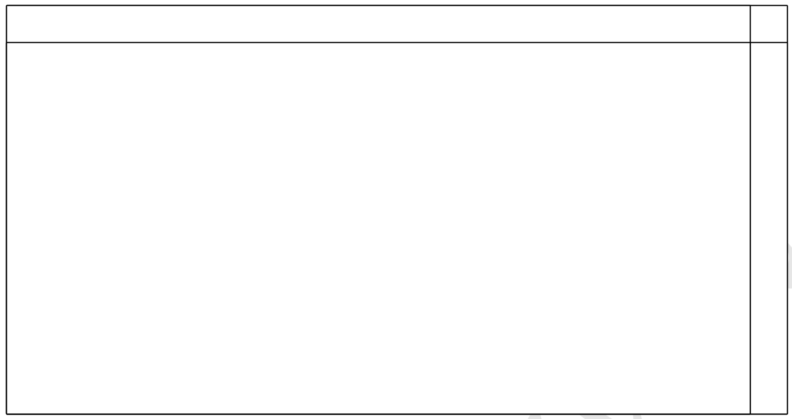
2.1.58. Ορισμος. Η ποσοτητα df στην (2.5) ονομαζεται *διαφορικο* της $f(x)$.

2.1.59. Παραδειγμα. Ευκολα υπολογιζουμε το διαφορικο της $f(x) = x^2$:

$$df = f'(x) dx = 2x dx.$$

Εστω τετραγωνο με πλευρα x και εμβαδον $f(x) = x^2$. Εστω τωρα οτι η πλευρα αυξανεται απο x σε $x + \Delta x$. Το εμβαδον αυξανεται οπως φαινεται στο Σχημα 2.6.

[1] Οπως θα δουμε στα επομενα κεφαλαια, ο συμβολισμος $df = f'(x) dx$ ειναι πολυ χρησιμος (π.χ. στον υπολογισμο *ολοκληρωματων*).



Σχήμα 2.6

Αν το Δx ειναι σχετικα μικρο, η μεγαλυτερη μεταβολη του εμβαδου δινεται απο τα δυο παραλληλογραμα με πλευρες x και Δx και ειναι $2x\Delta x$. Υπαρχει μια επιπλεον αυξηση του εμβαδου κατα $(\Delta x)^2$ απο το τετραγωνο με πλευρα Δx, αλλα αν το Δx ειναι μικρο, τοτε το $(\Delta x)^2$ ειναι πολυ μικρο σε σχεση με το $2x\Delta x$ και μπορουμε να το αγνοησουμε. Π.χ., αν $x = 2$ και $\Delta x = 0.1$, τοτε

$$\begin{aligned}(x+\Delta x)^2 &= 2.1^2 = 4.41, \qquad x^2 = 2^2 = 4,\\ (x+\Delta x)^2 - x^2 &= 4.41 - 4 = 0.41,\\ 2x\Delta x &= 2\cdot 2\cdot 0.1 = 0.4,\\ (\Delta x)^2 &= (0.1)^2 = 0.01,\end{aligned}$$

δηλ. το μεγαλυτερο μερος της μεταβολης $\Delta f = 0.41$ προκυπτει απο τον ορο $2x\Delta x = 0.4$.

2.1.60. Παραδειγμα. Θα βρουμε προσεγγιστικα την τιμη της $\sqrt{4.1}$ χρησιμοποιωντας το διαφορικο. Θετουμε $f(x) = \sqrt{x}$. Τοτε

$$\sqrt{x+\Delta x} = f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x.$$

Αν παρουμε τωρα $x = 4$, $x + \Delta x = 4.1$ και αρα $\Delta x = 0.1$, η παραπανω σχεση δινει

$$\sqrt{4.1} = \sqrt{4+0.1} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}0.1 = 2 + \frac{0.1}{4} = 2.025.$$

Η πραγματικη τιμη ειναι $\sqrt{4.1} = 2.0248$. Το *σχετικο* σφαλμα ειναι

$$\frac{|2.0248 - 2.025|}{2.048} = 9.7656 \times 10^{-5}$$

και η προσεγγιση ειναι πολυ καλη.

2.1.61. Ασκηση. Βρες προσεγγιστικα την τιμη της $\sqrt[3]{4.1}$ χρησιμοποιωντας το διαφορικο.

2.1.62. Θεωρημα (Κανονας L'Hospital). Εστω συναρτησεις $f(x), g(x)$, διαστημα (a,b) και $x_0 \in (a,b)$. Αν για καποιο x_0 ισχυουν τα εξης

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ (το x_0 μπορει να ειναι πραγματικος αριθμος ή $+\infty$ ή $-\infty$),
2. $g'(x_0) \neq 0$,
3. υπαρχει το $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (το L μπορει να ειναι πραγματικος αριθμος ή $+\infty$ ή $-\infty$),

τοτε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{2.6}$$

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε μονο την περιπτωση $x_0, L \in \mathbb{R}$ (οι λοιπες αφηνονται στον αναγνωστη). Εξεταζουμε πρωτα το πλευρικο οριο $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$. Θα εχουμε $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (ή, αν αυτο δεν ισχυει, επαναοριζουμε τις $f(x), g(x)$ στο x_0· αυτο δεν επηρεαζει το ζητουμενο οριο). Τοτε μπορουμε να επιλεξουμε $\delta > 0$ τετοιο ωστε

$$\text{οι} \quad f(x), g(x) \text{ ειναι συνεχεις στο } [x_0, x_0+\delta] \quad \text{και} \quad x \in [x_0, x_0+\delta] \Rightarrow g'(x) \neq 0.$$

Οποτε, απο το Θεωρημα του $Cauchy$, για καθε $x \in (x_0, x_0+\delta)$ υπαρχει $\xi \in (x_0, x)$ τετοιο ωστε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Εαν τωρα παρουμε ορια καθως $x \to x_0^+$, εχουμε $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Με ομοιο τροπο δειχνουμε οτι $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ και αρα τελικα εχουμε

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2.1.63. Παραδειγμα. Θα βρουμε τα ορια (α) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+x^8}$, (β) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x+x^8}$, (γ) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3+x^8}$. Και στις τρεις περιπτωσεις χρησιμοποιουμε τον κανονα $L'Hospital$. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+x^8} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x)'}{(x+x^8)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+8x^7} = 1. \\
\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x+x^8} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2)'}{(x+x^8)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1+8x^7} = 0. \\
\lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3+x^8} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x)'}{(x^3+x^8)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3x^2+8x^7} = +\infty.
\end{aligned}$$

2.1.64. Ασκηση. Βρες τα ορια (α) $\lim_{x\to 0} \frac{x^4+3x^2}{x+x^8}$, (β) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4+3x^2}{x+x^8}$.

2.2 Λυμενα Προβληματα

2.2.1. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = x^3$ βασει του ορισμου.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right)\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \left(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 3x^2.
\end{aligned}$$

2.2.2. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = \frac{1}{x}$ βασει του ορισμου.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1}{x^2}}{\Delta x}\right) \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\frac{\Delta x}{x^2}\frac{\Delta x+2x}{(a+x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\frac{\Delta x+2x}{(\Delta x+x)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{x^2}\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta x+2x}{(\Delta x+x)^2}\right) = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

2.2.3. Αποδειξε, βασει του ορισμου, οτι η $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{οταν} \quad x\geq 1 \\ -1 & \text{οταν} \quad x<1 \end{cases}$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο $x_0 = 0$.
Λυση. Θα πρεπει να ειναι

$$f'(1) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}.$$

Αλλα

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{1-1}{\Delta x} = 0$$

και

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-1-1}{\Delta x} = \infty.$$

Αρα δεν υπαρχει το $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x} = f'(1)$.

2.2.4. Αποδειξε οτι, για καθε $n\in\mathbb{N}$, αν $f(x)=\frac{1}{x^n}$, τοτε $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$.
Λυση. Η αποδειξη ειναι επαγωγικη. Για $n=1$ εχουμε $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ και ο τυπος επαληθευεται. Εστω οτι για $n=1,2,...,k$ ισχυει $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$. Τωρα θα εξετασουμε την $f(x)=\frac{1}{x^{k+1}}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)' &= \left(\frac{1}{x^k}\cdot\frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1}{x^k}\right)'\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= -\frac{k}{x^{k+1}}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^k}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{k+1}{x^{k+2}} \end{aligned}$$

και αρα η υποθεση επαληθευεται. Παρατηρησε οτι μπορουμε να γραψουμε $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ και ετσι ο παραπανω τυπος μπορει να ενοποιηθει με αυτον του προηγουμενου προβληματος και να γραψουμε

$$\forall n\in\mathbb{Z} : (x^n)' = nx^{n-1}.$$

2.2.5. Αποδειξε, βασει του ορισμου, οτι $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$.
Λυση. Εχουμε

$$(c\cdot f(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot f(x+\Delta x)-c\cdot f(x)}{\Delta x} = c\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = c\cdot f'(x).$$

2.2.6. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x)=x^2+x^3+5$.
Λυση. $\left(x^2+x^3+5\right)' = \left(x^2\right)' + \left(x^3\right)' + (5)' = 2x+3x^2+0 = 2x+3x^2$.

2.2.7. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = \left(x^2+x+2\right)\left(x^2+1\right)$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2+x+2\right)'\left(x^2+1\right) + \left(x^2+x+2\right)\left(x^2+1\right)' \\ &= (2x+1)\left(x^2+1\right) + \left(x^2+x+2\right)2x \\ &= 4x^3+3x^2+6x+1. \end{aligned}$$

2.2.8. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{\left(x^2+x+1\right)'\left(x^2+1\right) - \left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$= \frac{(2x+1)\left(x^2+1\right) - \left(x^2+x+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

2.2.9. Υπολογισε την δευτερη παραγωγο της $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)'\right)'$$
$$= \left(\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\right)' = \frac{2x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

2.2.10. Για $n = 0, 1, 2, ...$ υπολογισε την n-στης ταξης παραγωγο $f^{(n)}(x)$ οταν $f(x) = \frac{1}{x}$.
Λυση. Εχουμε

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)'' = \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^3}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)''' = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{6}{x^4}.$$

Τα παραπανω μας δινουν την ιδεα οτι

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Εχουμε ηδη δει οτι ο τυπος ισχυει για $n = 0, 1, 2, 3$. Ας υποθεσουμε οτι ισχυει για $n = 0, 1, ..., k$. Τοτε

$$f^{(k+1)}(x) = \left(f^{(k)}(x)\right)' = \left((-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}}\right)' = (-1)^k k! \left(\frac{1}{x^{k+1}}\right)'$$
$$= (-1)^k k! \left(-\frac{k+1}{x^{k+2}}\right) = (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{x^{k+2}}$$

και αρα η υποθεση επαληθευεται.

2.2.11. Βρες την y' αν $\left(x^2+y^2\right)x^2 = y^2$.
Λυση Εχουμε

$$\left(2x+2yy'\right)x^2 + \left(x^2+y^2\right)2x = 2yy' \Rightarrow y' \cdot \left(2yx^2 - 2y\right) = -2x^3 - \left(x^2+y^2\right) \cdot 2x \Rightarrow$$
$$y' = \frac{2x^3 + 2x \cdot \left(x^2+y^2\right)}{2y \cdot \left(x^2-1\right)} = \frac{x \cdot \left(2x^2+y^2\right)}{y \cdot \left(x^2-1\right)}.$$

2.2.12. Βρες την $y'(3)$ αν $3 \cdot \left(x^2+y^2\right)^2 = 100xy$.
Λυση Λυνοντας οπως και στην προηγουμενη παιρνουμε

$$y' = \frac{25y - 3x \cdot \left(x^2+y^2\right)}{-25x + 3y \cdot \left(x^2+y^2\right)}. \tag{2.7}$$

Εδω ζητειται η τιμη $y'(3)$. Δηλ. στην (2.7) θα θεσουμε $x = 3$. Ποια ειναι ομως η τιμη $y(3)$; Στην αρχικη $3 \cdot \left(x^2+y^2\right)^2 = 100xy$ θετουμε $x = 3$ και παιρνουμε

$$3 \cdot \left(3^2+y^2\right)^2 = 100 \cdot 3 \cdot y$$

και λυνουμε ως προς y. Μια λυση ειναι $y = 1$. Οποτε στο σημειο $(3, 1)$ εχουμε

$$y'(3) = \frac{25 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot \left(3^2+1^2\right)}{-25 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot \left(3^2+1^2\right)} = \frac{13}{9}. \tag{2.8}$$

2.2.13. Βρες την y'' αν $x^2+y^2=25$.
Λυση. Οπως και στις προηγουμενες ασκησεις, εδω εχουμε

$$2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}.$$

Παραγωγιζουμε και παλι και παιρνουμε

$$y''=-\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{(x)'\,y-xy'}{y^2}=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{y-x\cdot\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}=-\frac{x^2+y^2}{y^3}.$$

2.2.14. Βρες τα διαστηματα στα οποια η $f(x)=x^2-3x+4$ ειναι αυξουσα και φθινουσα.
Λυση. Εχουμε $f'(x)=2x-3$. Λυνοντας $2x-3>0$, παιρνουμε ως συνολο λυσεων το $A=\left(\frac{3}{2},\infty\right)$· αρα η $f(x)$ ειναι γνησιως αυξουσα στο A. Παρομοια, λυνοντας $2x-3<0$, παιρνουμε ως συνολο λυσεων το $B=\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$· αρα η $f(x)$ ειναι γνησιως φθινουσα στο A.

2.2.15. Βρες τα διαστηματα στα οποια η $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$ ειναι αυξουσα και φθινουσα.
Λυση. Εχουμε $f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$. Αρα $f'(x)<0$ για καθε $x\in A=(-\infty,2)\cup(2,\infty)$ και η $f(x)$ ειναι γνησιως φθινουσα στο A.

2.2.16. Βρες τα διαστηματα κυρτοτητας και κοιλοτητας της $f(x)=x^3-6x^2+3x+10$.
Λυση. Εχουμε $f''(x)=6x-12$. Αρα η $f(x)$ ειναι κοιλη στο $(-\infty,2)$ και κυρτη στο $(2,\infty)$.

2.2.17. Βρες τα διαστηματα κυρτοτητας και κοιλοτητας της $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$.
Λυση. Εχουμε $f''(x)=\frac{2}{(x-2)^3}$. Αρα η $f(x)$ ειναι κοιλη στο $(-\infty,2)$ και κυρτη στο $(2,\infty)$.

2.2.18. Αποδειξε οτι: *αν στο* $[a,b]$ *ισχυει* $f'(x)=0$, *τοτε η* $f(x)$ *ειναι η σταθερη συναρτηση* $f(x)=c$ (στο $[a,b]$).
Λυση. Παιρνουμε τυχον $x_0\in(a,b)$ και εφαρμοζουμε το Θεωρημα Μεσης Τιμης $f(x)$ στο $[a,x_0]$. Θα εχουμε καποιο x_1 τετοιο ωστε

$$\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}=f'(x_0)=0\Rightarrow\left[\forall x_0\in(a,b):f(x_0)=f(a)\right].$$

Δηλ. $f(x)=f(a)$ στο τυχον $[a,x_0]$. Με τον ιδιο τροπο δειχνουμε οτι $f(x)=f(b)$.

2.2.19. Αποδειξε το Θεωρημα Μεσης Τιμησ: για καθε N, αν στο $[a,b]$ υπαρχουν και ειναι συνεχεις οι $f(x)=f^{(0)}(x)$, $f^{(1)}(x)$, ..., $f^{(N-1)}(x)$ και στο (a,b) υπαρχει η $f^{(N)}(x)$, τοτε υπαρχει $\xi\in(a,b)$ τετοιο ωστε

$$f(b)=f(a)+f^{(1)}(a)(b-a)+...+\frac{f^{(N-1)}(a)}{(N-1)!}(b-a)^{N-1}+\frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}(b-a)^N.$$

Λυση. Οριζουμε σταθερα K ως λυση της εξισωσης

$$f(b)=f^{(0)}(a)+f^{(1)}(a)(b-a)+...+\frac{f^{(N-1)}(a)}{(N-1)!}(b-a)^{N-1}+\frac{K}{N!}(b-a)^N$$

και συναρτηση

$$g(x)=f(b)-f^{(0)}(x)-f^{(1)}(x)(b-x)-...-\frac{f^{(N-1)}(x)}{(N-1)!}(b-x)^{N-1}-\frac{K}{N!}(b-x)^N.$$

Παραγωγιζοντας παιρνουμε

$$\begin{aligned}g'(x)=&-f^{(1)}(x)+f^{(1)}(x)-...-\frac{f^{(N-1)}(x)}{(N-2)!}(b-x)^{N-2}+\frac{f^{(N-1)}(x)}{(N-2)!}(b-x)^{N-2}\\&-\frac{f^{(N)}(x)}{(N-1)!}(b-x)^{N-1}+\frac{K}{(N-1)!}(b-x)^{N-1}\\=&-\frac{f^{(N)}(x)}{(N-1)!}(b-x)^{N-1}+\frac{K}{(N-1)!}(b-x)^{N-1}.\end{aligned}$$

Η $g(x)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$, παραγωγισιμη στο (a,b) και $g(a)=g(b)=0$. Οποτε, απο το Θεωρημα του *Rolle*, υπαρχει $\xi\in(a,b)$ τετοιο ωστε $g'(\xi)=0$ και τοτε εχουμε

$$0=g'(\xi)=-\frac{f^{(N)}(\xi)}{(N-1)!}(b-\xi)^{N-1}+\frac{K}{(N-1)!}(b-\xi)^{N-1}\Rightarrow K=f^{(N)}(\xi)$$

που δινει το ζητουμενο.

2.2.20. Αποδειξε οτι: αν η $f(x)$ ειναι δις παραγωγισιμη και κοιλη, τοτε

$$\forall x,y\in\mathbb{R}:f'(y)(y-x)\leq f(y)-f(x).$$

Λυση. Ας υποθεσουμε οτι $x<y$. Τοτε

$$\exists z\in(x,y):f'(z)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Αφου η $f(x)$ ειναι κοιλη, η $f'(x)$ ειναι φθινουσα. Οποτε

$$z<y\Rightarrow f'(z)\geq f'(y)$$

και

$$f'(y)\leq\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

που δινει το ζητουμενο. Η περιπτωση $y<x$ αποδεικνυεται παρομοια.

2.2.21. Αποδειξε οτι: αν η $f(x)$ ειναι δις παραγωγισιμη, κοιλη και φραγμενη, τοτε η $f(x)$ ειναι σταθερη.
Λυση. Εστω οτι για καποιο $y\in\mathbb{R}$ εχουμε $f'(y)>0$. Τοτε, απο το προηγουμενο προβλημα:

$$\begin{aligned}\forall x,y\in\mathbb{R}&:f'(y)(y-x)\leq f(y)-f(x)\Rightarrow\\ \forall x,y\in\mathbb{R}&:f(x)\leq f(y)-f'(y)(y-x)\Rightarrow\\ \forall y\in\mathbb{R}&:\lim_{x\to-\infty}f(x)\leq\lim_{x\to-\infty}\left(f(y)-f'(y)(y-x)\right)=-\infty\end{aligned}$$

Αλλα αν $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ η $f(x)$ δεν ειναι φραγμενη και οδηγηθηκαμε σε ατοπο. Με αναλογο τροπο δειχνουμε οτι η υποθεση οτι $(\exists y:f'(y)<0)$ οδηγει σε ατοπο. Αρα

$$(\forall y\in\mathbb{R}:f'(y)=0)\Rightarrow(\forall y\in\mathbb{R}:f'(y)=c).$$

2.2.22. Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x)=x^4-3x^2+4$. $4x^3-6x=0$.
Λυση. Σε καθε τοπικο μεγιστο ή ελαχιστο θα εχουμε $f'(x)=4x^3-6x=0$ οποτε εχουμε τρια στασιμα σημεια (υποψηφια για τοπικο ακροτατο) τα $x_1=-\frac{\sqrt{6}}{2}$, $x_2=0$ και $x_3=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Εχουμε επισης $f''(x)=12x^2-6$. Τωρα, $f''(x_1)=f''(x_3)=12>0$, αρα στα x_1, x_3 εχουμε τοπικο ελαχιστο. Επισης $f''(x_2)=-6<0$, αρα στο x_2 εχουμε τοπικο μεγιστο.

2.2.23. Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x)=\frac{x^3+x-1}{x-1}$.
Λυση. Σε καθε τοπικο μεγιστο ή ελαχιστο θα εχουμε $f'(x)=x^2\frac{2x-3}{(x-1)^2}=0$ οποτε εχουμε δυο στασιμα σημεια τα $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=0$. Εχουμε επισης $f''(x)=\frac{2x\left(x^2-3x+3\right)}{(x-1)^3}$. Τωρα, $f''(x_1)=\frac{3}{4}>0$, αρα στο x_1 εχουμε τοπικο ελαχιστο. Επειδη $f''(x_2)=0$, δεν μπορουμε να ξερουμε αν στο x_2 εχουμε μεγιστο ή ελαχιστο (ή κανενα εκ των δυο).

2.2.24. Υπολογισε το διαφορικο της $f(x)=x^3$ βασει του ορισμου.
Λυση

$$df=f'(x)\,dx=3x^2dx.$$

2.2.25. Βρες προσεγγιστικα την τιμη $\sqrt{4.01}$ χρησιμοποιωνατς το διαφορικο.
Λυση Παιρνουμε $x = 4$, $x + \Delta x = 4.01$ και αρα $\Delta x = 0.01$, οποτε

$$\sqrt{4.01} = \sqrt{4 + 0.01} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} 0.01 = 2 + \frac{0.01}{4} = 2.0025.$$

Η πραγματικη τιμη ειναι $\sqrt{4.01} = 2.002498439$. Το σχετικο σφαλμα ειναι

$$\frac{|2.002498439 - 2.0025|}{2.002498439} = 7.7953 \times 10^{-7}$$

δηλ. δυο ταξεις μεγεθους μικροτερο απο το σφαλμα στον υπολογισμο της $\sqrt{4.1}$. Αυτο δειχνει οτι οσο μικροτερο γινεται το Δx, τοσο καλυτερη ειναι η προσεγγιση με διαφορικο.

2.2.26. Βρες τα ορια (α) $\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x + x^2}$, (β) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x + x^8}$.

Λυση. Χρησιμοποιουμε τον κανονα $L'Hospital$. Εχουμε

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{4x^3}{1 + 2x} = 0.$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x + x^8} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + 8x^7} = 1.$$

2.3 Αλυτα Προβληματα

2.3.1. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = x^3$ βασει του ορισμου. *Απ.* $3x^2$.

2.3.2. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ βασει του ορισμου. *Απ.* $\frac{2}{(x+1)^2}$.

2.3.3. Αποδειξε, βασει του ορσιμου, οτι η $f(x) = |x-3|\, x^2$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο $x_0 = 3$.

2.3.4. Σωστο η λαθος: αν οι $f(x), g(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμες στο x_0, η $f(x) \cdot g(x)$ επισης δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0. Δωσε παραδειγμα.
Απ. Λαθος· παρε $f(x) = g(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

2.3.5. Υπολογισε τις παραγωγους.

1. $\left(x^{10}\right)'$. *Απ.* $10x^9$.
2. $\left(x^3 - 4x + 1\right)'$. *Απ.* $3x^2 - 4$.
3. $\left(\frac{x^3-4x+1}{x^2}\right)'$. *Απ.* $\frac{x^3+4x-2}{x^3}$.
4. $\left(\frac{x^2+1}{2x-7}\right)'$. *Απ.* $\frac{x^2-7x-1}{(2x-7)^2}$.
5. $\left(\sqrt{x^3+1}\right)'$. *Απ.* $\frac{3}{2}\frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$.
6. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1}\right)'$. *Απ.* $-\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3x\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)^2}$.
7. $\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x}\right)'$. *Απ.* $\frac{\left(x\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x^2+1}\right)}{2x^2\sqrt{x^2+1}\sqrt{x+1}}$.
8. $\left(\frac{\sqrt{x^2+1}(x+1)}{x^3-1}\right)'$. *Απ.* $-\frac{x^5+2x^4+2x^3+5x^2+x+1}{\sqrt{x^2+1}(x^3-1)^2}$.

2.3.6. Υπολογισε τις δευτερες παραγωγους

1. $\left(x^{10}\right)''$. *Απ.* $90x^8$.

2. $\left(x^3-4x+1\right)''$. $6x$.

3. $\left(\frac{x^3-4x+1}{x^2}\right)''$. *Απ.* $-\frac{2(4x-3)}{x^4}$.

4. $\left(\frac{x^2+1}{2x-7}\right)''$. *Απ.* $\frac{196}{(2x-7)^3}$.

5. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+1}\right)''$. *Απ.* $\frac{2\left(5\sqrt[3]{x^2}+1\right)\sqrt[3]{x^2}}{9x^2\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)^3}$.

2.3.7. Αποδειξε οτι για καθε $n\in\mathbb{Q}$ ισχυει $(x^n)=nx^{n-1}$.

2.3.8. Υπολογισε , για καθε $n\in\mathbb{N}$, την n-στη παραγωγο της $f(x)=\frac{1}{1-x}$. *Απ.* $n!\,(1-x)^{-(n+1)}$.

2.3.9. Βρες τα σημεια στα οποια η $f(x)=x^{3/5}$ δεν ειναι παραγωγισιμη και δωσε μια γεωμετρικη ερμηνεια. *Απ.* $x_0=0$.

2.3.10. Εστω $y(x)=x^2$ και $x(y)=\sqrt{y}$. Αποδειξε οτι $\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}=1$.

2.3.11. Εστω $y(x)=\frac{x+1}{x-1}$ και $x(y)=\frac{y+1}{y-1}$. Αποδειξε οτι $\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy}=1$.

2.3.12. Βρες την y' για τις παρακατω πεπλεγμενες συναρτησεις.

1. $x^2+y^2=16$. *Απ.* $-x/y$.

2. $x^{1/2}+y^{1/2}=9$. *Απ.* $-\sqrt{y/x}$.

3. $x^3-xy+y^2=4$. *Απ.* $\frac{y-3x^2}{2y-x}$.

4. $x^3y^3-y=x$. *Απ.* $\frac{1-3x^2y^3}{3x^3y^2-1}$.

5. $x^3-2x^2y+3xy^2=38$. *Απ.* $\frac{4xy-3x^2-3y^2}{2x\cdot(3y-x)}$.

2.3.13. Βρες την y'' για τις παρακατω πεπλεγμενες συναρτησεις.

1. $x^2+xy=5$. *Απ.* $10/x^3$.

2. $x^2-y^2=16$. *Απ.* $-16/y^3$.

3. $y^2=x^3$. *Απ.* $3x/4y$.

2.3.14. Βρες τα διαστηματα στα οποια η $f(x)$ ειναι αυξουσα και φθινουσα.

1. $f(x)=(x-1)^2(x+2)$.

2. $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

3. $f(x)=\frac{8}{x\sqrt{x^2-4}}$.

4. $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

2.3.15. Βρες τα διαστηματα κυρτοτητας και κοιλοτητας της $f(x)$.

1. $f(x)=x^3-6x^2+12x$.

2. $f(x)=(x+1)^4$.

3. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$.

2.3.16. Βρες τα τοπικα μεγιστα και ελαχιστα της $f(x)$.

1. $f(x) = 1 - 4x - x^2$.
2. $f(x) = (x-3)\,x^2$.
3. $f(x) = \frac{x}{x^2-6x-16}$.
4. $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$.
5. $f(x) = \frac{(x-2)(x-8)}{x^2}$.

2.3.17. Βρες προσεγγιστικα τις παρακατω τιμες χρησιμοποιωντας το διαφορικο.

1. $\frac{1}{0.9}$ *Απ.* $\frac{1}{0.9} \simeq 1.1$.
2. $\frac{1}{0.873}$. *Απ.* $\frac{1}{0.873} \simeq 1.127$.
3. $\sqrt[5]{33}$. *Απ.* $\sqrt[5]{33} \simeq 2.0125$.

2.3.18. Βρες τα ορια

1. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x^6}{x^4+x^8}$. *Απ.* $+\infty$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x^4-x^6}{x^4+x^8}$. *Απ.* 1.
3. $\lim_{x\to 0} \frac{x^6-x^8}{x^4+x^{10}}$. *Απ.* 0.

2.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

2.4.1. Αποδειξε οτι $(f(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x)$.

2.4.2. Αποδειξε οτι $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)}{g^2(x)}$ (οταν $g(x) \neq 0$).

2.4.3. Αποδειξε οτι: αν (α) η συναρτηση $f(x)$ οριζεται στο (a,b) και (β) στο $x_0 \in (a,b)$ εχουμε $0 < f'(x_0) \in \mathbb{R}$, τοτε υπαρχει $\delta > 0$ τετοιο ωστε για καθε $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ ισχυουν (α) $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ και (β) $x_0 < x \Rightarrow f(x_0) < f(x)$.

2.4.4. Αποδειξε το Θεωρημα του *Cauchy*.

2.4.5. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ειναι συνεχης αλλα οχι παραγωγισιμη στο $x_0 = 2$.

2.4.6. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ειναι παραγωγισιμη στο $x_0 = 2$ αλλα η $f'(x)$ δεν ειναι συνεχης.

2.4.7. Εστω $f(x) = x^n$. Αποδειξε οτι

$$\frac{f(1)}{0!} + \frac{f'(1)}{1!}a + \frac{f''(1)}{2!}a^2 + ... + + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}n^2 = (1+a)^n .$$

2.4.8. Εστω $f(x)$ συναρτηση συνεχης στο $[a,b]$ και παραγωγισιμη στο (a,b). Αποδειξε οτι υπαρχει $x_0 \in (a,b)$ τετοιο ωστε

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a-b} = f(x_0) - x_0 f'(x_0) .$$

2.4.9. Εστω $f(x), g(x)$ συναρτησεις συνεχεις στο $[a,b]$ και παραγωγισιμες στο (a,b). Εστω επισης οτι οι $g(x), g'(x)$ δεν μηδενιζονται στο (a,b) και $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$. Αποδειξε οτι υπαρχει $x_0 \in (a,b)$ τετοιο ωστε

$$\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Δωσε γεωμετρικη ερμηνεια.

2.4.10. Λεμε οτι η $f(x)$ ικανοποιει την συνθηκη *Lipschitz* k ταξης στο x_0 ανν υπαρχουν M, ε τετοια ωστε

$$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < M \cdot |x - x_0|^k.$$

Εστω $f(x)$ η οποια ικανοποιει την συνθηκη *Lipschitz* k ταξης στο x_0. Δειξε οτι:

1. αν $k > 0$ τοτε η $f(x)$ ειναι συνεχης στο x_0.
2. αν $k > 1$ τοτε η $f(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο x_0.

2.4.11. Οριζουμε την συναρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^3} & \text{οταν} \quad x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{οταν} \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Αποδειξε οτι: η $f(x)$ ειναι παραγωγισιμη σε καθε $x = \sqrt{k}$ οπου το k δεν ειναι τετραγωνο ακεραιου.

2.4.12. Οριζουμε την συναρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{οταν} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{οταν} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Δειξε οτι η $f(x)$ εχει παραγωγους ολων το ταξεων (για καθε $x \in \mathbb{R}$).

2.4.13. Εστω συναρτηση $f(x)$ η οποια

1. Ειναι συνεχης στο $[a,b]$ και για καθε $x \in [a,b]$ ισχυει $a \leq f(x) \leq b$.
2. Ειναι παραγωγισιμη στο (a,b) και για καθε $x \in (a,b)$ ισχυει $f'(x) \leq k < 1$.

Δειξε οτι υπαρχει ακριβως ενα σημειο $x_0 \in [a,b]$ τετοιο ωστε $f(x_0) = x_0$.

2.4.14. Εστω παραγωγισιμη συναρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποια ικανοποιει

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f'(x)\frac{x}{2}.$$

Αποδειξε οτι $f(x) = ax + b$.

2.4.15. Αποδειξε οτι δεν υπαρχει πολυωνυμο $\pi(x)$ τετοιο ωστε

$$\forall x : \pi(x) > \pi''(x) \ \text{ και } \forall x : \pi'(x) > \pi''(x) \ .$$

2.4.16. Αν η $f(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0, τοτε η $(f(x))^2$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.17. Αν η $(f(x))^2$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0, τοτε η $f(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.18. Αν η $f(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0, τοτε και η $|f(x)|$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.19. Αν η $f(x)$ ειναι απειρα παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιει $0 = f(x_0) = f'(x_0) = f''(x_0) = ...$ τοτε η $f(x) = 0$ για καθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.20. Αν η $f(x)+g(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο x_0 τοτε οι $f(x), g(x)$ ειναι παραγωγισιμες στο x_0. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.21. Αν η $f(x)\cdot g(x)$ και η $f(x)$ ειναι παραγωγισιμες στο x_0 τοτε η $g(x)$ ειναι επισης παραγωγισιμη στο x_0. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.22. Υπαρχει συναρτηση η οποια ειναι παραγωγισιμη ακριβως σε ενα σημειο του πεδιου ορισμου της. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.23. Αν η $f(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο x_0 τοτε ειναι συνεχης σε καποιο διαστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.24. Αν η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$ και παραγωγισιμη στο (a,b), τοτε υπαρχει $x_0\in(a,b)$ τετοιο ωστε $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.25. Αν η $f(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο (a,b) και η $f'(x)$ δεν ειναι φραγμενη στο (a,b), τοτε η $f(x)$ δεν ειναι φραγμενη στο (a,b). Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.26. Εστω συνολο A και $f(x)$ τετοια ωστε $f'(x)=0$ για καθε $x\in A$· τοτε η $f(x)$ ειναι σταθερη στο A. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.27. Για καθε $x\in(a,b)$, οι συναρτησεις $f(x)$, $g(x)$ ειναι παραγωγισιμες και ικανοποιουν $f(x)<g(x)$. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.28. Αν $f'(x_0)=0$, τοτε η $f(x)$ δεν ειναι ουτε αυξουσα ουτε φθινουσα στο x_0. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.29. Αν για καθε $x\in(a,b)$ ισχυει $f'(x)>0$, τοτε η $f(x)$ ειναι αυξουσα για καθε $x\in(a,b)$. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.30. Αν η $f(x)g(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0, τοτε και η $f(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.31. Αν οι $f(x)$ και $g(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμες στο x_0, τοτε και η $f(x)g(x)$ δεν ειναι παραγωγισιμη στο x_0. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.32. Αν η $f'(x_0)>0$ τοτε η $f(x)$ ειναι αυξουσα σε καποιο διαστημα $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.33. Αν η $f(x)$ εχει τοπικο ακροτατο στο x_0 και ειναι δις παραγωγισιμη, τοτε $f''(x_0)\neq 0$. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.34. Αν η $f(x)$ ειναι αυστηρα αυξουσα στο (a,b), τοτε $f'(x)>0$ για καθε $x\in(a,b)$. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

2.4.35. Αν $f''(x)>0$ για καθε $x\in(a,b)$ και τα κ,λ ικανοποιουν $\kappa\geq 0$, $\lambda\geq 0$, $\kappa+\lambda=1$, τοτε για καθε $x_1,x_2\in(a,b)$ ισχυει $f(\kappa x_1+\lambda x_2)>\kappa f(x_1)+\lambda f(x_2)$. Αν ειναι σωστο αποδειξε το· αν ειναι λαθος δωσε αντιπαραδειγμα.

3 Εκθετικη και Λογαριθμικη Συναρτηση

Η εκθετικη ειναι ισως η πιο σημαντικη μαθηματικη συναρτηση. Στο παρον κεφαλαιο οριζουμε *καποια* εκθετικη συναρτηση μεσω ενος *απειρου αθροισματος*. Αφου αποδειξουμε διαφορες ιδιοτητες αυτης της συναρτησης και της αντιστροφης της, καταληγουμε στο συμπερασμα οτι ειναι οι «κλασικες» εκθετικη και λογαριθμικη συναρτηση[1].

3.1 Θεωρια και Παραδειγματα

3.1.1. Ορισμος. Για καθε $N \in \mathbb{N}$ οριζουμε την συναρτηση $E_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως εξης:

$$E_N(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^N}{N!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}. \tag{3.1}$$

Κατοπιν οριζουμε την συναρτηση $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ως εξης:

$$E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... = \lim_{N \to +\infty} E_N(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}. \tag{3.2}$$

3.1.2. Για καθε $N \in \mathbb{N}$, η E_N ειναι καλα ορισμενη: για να υπολογισουμε την τιμη της $E_N(x)$ εκτελουμε τις πραξεις στην (3.1) και λαμβανουμε εναν πραγματικο αριθμο, ο οποιος ειναι η ζητουμενη τιμη $E_N(x)$· μπορουμε να το κανουμε αυτο για καθε πραγματικο x.

Για την $E(x)$ τα πραγματα δεν ειναι τοσο απλα. Καταρχην, πρεπει να διευκρινισουμε τι εννοουμε με τον συμβολισμο $\lim_{N \to +\infty}$. Ας δεχθουμε οτι συμβολιζει το προφανες, δηλ. την τιμη την οποια προσεγγιζει το $E_N(x)$ λαμβανοντας ολο και περισσοτερους ορους στην (3.1)· τοτε πρεπει να εξετασουμε αν υπαρχει το οριο, δηλ. αν υπαρχει τετοια τιμη (και για ποιες τιμες του x συμβαινει αυτο). Θα εξετασουμε την γενικη μορφη αυτων των ερωτηματων (για τυχουσα συναρτηση, οχι μονο για την $E(x)$) στο Κεφαλαιο 14, οπου θα αποδειξουμε οτι οντως η $E(x)$ ειναι καλα ορισμενη για καθε $x \in \mathbb{C}$. Επιπλεον, στο Κεφαλαιο 14 θα αποδειξουμε οτι μπορουμε να παραγωγισουμε την $E(x)$ «*ορο-προς-ορο*» δηλ. οτι:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{dE(x)}{dx} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right). \tag{3.3}$$

Προς το παρον δεχομαστε και χρησιμοποιουμε αυτα τα συμπερασματα χωρις αποδειξη.

[1] Αυτες οι οποιες σου ειναι γνωστες απο το Λυκειο.

3.1.3. Θεωρημα. Η $E(x)$ ειναι συνεχης και παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυει οτι

$$\frac{dE(x)}{dx} = E(x). \tag{3.4}$$

Επιπλεον

$$E(0) = 1. \tag{3.5}$$

Αποδειξη. Εχουμε ηδη δεχθει οτι η $E(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο $\mathbb{R}$, αρα ειναι και συνεχης. Απο την (3.3) παιρνουμε

$$\frac{dE(x)}{dx} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = E(x).$$

Ετσι εχουμε αποδειξει την (3.4). Η (3.5) προκυπτει απο την αντικατασταση $x = 0$ στην (3.2).

3.1.4. Θεωρημα. Η $E(x)$ ειναι η *μοναδικη* συναρτηση η οποια ικανοποιει

$$E(0) = 1, \quad \forall x : \frac{dE}{dx} = E(x). \tag{3.6}$$

Αποδειξη. Η αποδειξη ειναι αμεση συνεπεια του *Θεωρηματος Υπαρξης και Μοναδικοτητας Λυσης Διαφορικης Εξισωσης*, το οποιο θα αποδειχθει στο Κεφαλαιο 15.

3.1.5. Θεωρημα. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυει

$$E(x)E(-x) = 1.$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$\begin{aligned}(E(x)E(-x))' &= E'(x)E(-x) + E(x)E'(-x)(-1)\\ &= E(x)E(-x) - E(x)E(-x) = 0\end{aligned}$$

αρα

$$\forall x : E(x) = c = E(0) = 1.$$

3.1.6. Θεωρημα. Η $E(x)$ απεικονιζει το $\mathbb{R}$ (πεδιο ορισμου) *επι* του $(0, +\infty)$ (πεδιο τιμων).

Αποδειξη. Οπως ηδη ειπαμε, θα αποδειξουμε οτι το πεδιο ορισμου της $E(x)$ ειναι το $\mathbb{R}$ στο Κεφαλαιο 14. Θα αποδειξουμε τωρα οτι το πεδιο τιμων ειναι το $(0, +\infty)$. Καταρχην θα δειξουμε οτι $E : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$. Πραγματι

$$\forall x \geq 0 : E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... \geq 1 + x.$$

Ετσι $E(0) = 1$ και απο το Θεωρημα Ενδιαμεσης Τιμης εχουμε οτι:

$$\forall y \in (1, \infty) : \exists x \in (1, y) : E(x) = y.$$

Αρα η E απεικονιζει το $[0, +\infty)$ *επι* του $[1, +\infty)$.

Εστω τωρα $x \in (-\infty, 0)$. Τοτε $-x \in (0, +\infty)$ και, αφου $E(-x) \in (1, +\infty)$, εχουμε

$$E(x)E(-x) = 1 \Rightarrow E(x) = \frac{1}{E(-x)} \in (0, 1).$$

Παρομοια με το πρηγουμενο δειχνουμε οτι η E απεικονιζει το $(-\infty, 0)$ *επι* του $(0, 1)$.

3.1.7. Θεωρημα. Για καθε $x \in \mathbb{R}$, η $E(x)$ ειναι αμφιμονοσημαντη, γνησιως αυξουσα και κυρτη.

Αποδειξη. Αυτα ειναι αμεσες συνεπειες των παρακατω:

$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R} : E'(x) = E(x) > 0,\\ &\forall x \in \mathbb{R} : E''(x) = E'(x) = E(x) > 0.\end{aligned}$$

3.1.8. Παραδειγμα. Θα κανουμε την γραφικη παρασταση της $E(x)$. Γνωριζουμε οτι το πεδιο ορισμου της $E(x)$ ειναι το $(-\infty,+\infty)$ και το πεδιο τιμων ειναι το $(0,+\infty)$. Επισης γνωριζουμε οτι $E(0)=1$ και οτι $E(1)>1$ (γιατι;). Τελος, γνωριζουμε οτι η $E(x)$ ειναι συνεχης, γνησιως αυξουσα και κυρτη. Με αυτα τα στοιχεια μπορουμε να κατασκευασουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.2.

3.1.9. Ασκηση. Κανε την γραφικη παρασταση της $E(-x)$.

3.1.10. Ασκηση. Κανε την γραφικη παρασταση της $E\left(-x^2\right)$.

3.1.11. Θεωρημα. Η $E(x)$ εχει αντιστροφη συναρτηση, την οποια ονομαζουμε $L(x)$. Ισχυει $L:(0,+\infty)\to(-\infty,+\infty)$ και η απεικονιση ειναι αμφιμονοσημαντη.

Αποδειξη. Εχουμε ηδη δει οτι η $E(x)$ ειναι αμφιμονοσημαντη. Αρα εχει αντιστροφη συναρτηση, η οποια εχει πεδιο ορισμου το πεδιο τιμων της $E(x)$ (δηλ. το $(0,+\infty)$) και πεδιο τιμων το πεδιο ορισμου της $E(x)$ (δηλ. το $(-\infty,+\infty)$). Αφου η E ειναι αμφιμονοσημαντη, το ιδιο ισχυει και για την αντιστροφη της, την L.

3.1.12. Αφου η $E(x)$ ειναι η αντιστροφη της $L(x)$, προφανως εχουμε $L(E(x))=E(L(x))=x$.

3.1.13. Θεωρημα: Η $L(x)$ ειναι ειναι παραγωγισιμη και συνεχης στο $(0,+\infty)$. Ειναι δε η μοναδικη συναρτηση η οποια ικανοποιει τα εξης:

$$L(1)=0, \quad \forall x\in(0,+\infty): \frac{dL}{dx}=\frac{1}{x}. \tag{3.7}$$

Αποδειξη. Αφου η $L(x)$ ειναι η αντιστροφη της $E(x)$ θα εχουμε

$$E(0)=1\Leftrightarrow L(1)=0.$$

Εστω τυχον $y\in(0,+\infty)$ και x το *μοναδικο* (γιατι;) τετοιο ωστε $y=E(x)>0$. Τοτε η παραγωγος της αντιστροφης συναρτησης ειναι

$$E(x)=E'(x)=\frac{1}{L'(E(x))}\Rightarrow y=\frac{1}{L'(y)}\Rightarrow L'(y)=\frac{1}{y}.$$

Ετσι εχουμε αποδειξει οτι η $L(x)$ ικανοποιει την (3.7). Αρα ειναι παραγωγισιμη και συνεχης στο $(0,+\infty)$. Η μοναδικοτητα της $L(x)$ προκυπτει (οπως και της $E(x)$) απο το Θεωρημα Υπαρξης και Μοναδικοτητας της λυσης διαφορικης εξισωσης (Κεφαλαιο 15).

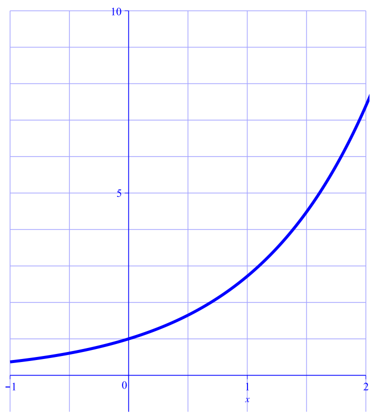
3.1.14. Θεωρημα. Για καθε $x\in(0,+\infty)$ η $L(x)$ ειναι γνησιως αυξουσα και κοιλη.

Αποδειξη. Για καθε $x\in(0,+\infty)$ η $L(x)$ εχει παραγωγο $L'(x)=\frac{1}{x}>0$ αρα ειναι γνησιως αυξουσα. Επισης $L''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ αρα η $L(x)$ ειναι κοιλη στο $x\in(0,+\infty)$.

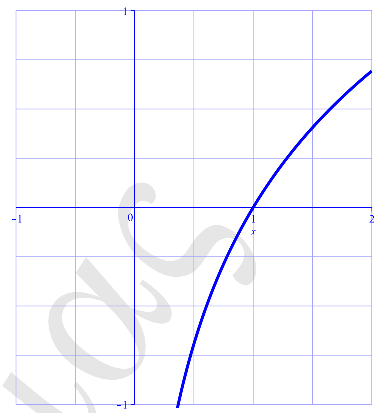
3.1.15. Θεωρημα. Η εξισωση $L(x)=1$ εχει μοναδικη ριζα, την οποια θα συμβολιζουμε με e.

Αποδειξη. Επειδη η $L(x)$ εχει εικονα το $(-\infty,+\infty)$, υπαρχει x_0 τετοιο ωστε $L(x_0)=1$. Αφου δε η $L(x)$ ειναι γνησιως αυξουσα, το x_0 ειναι μοναδικο.

3.1.16. Παραδειγμα. Θα κανουμε την γραφικη παρασταση της $L(x)$. Γνωριζουμε οτι το πεδιο ορισμου της $L(x)$ ειναι το $(0,+\infty)$ και το πεδιο τιμων ειναι το $(-\infty,+\infty)$. Επισης γνωριζουμε οτι $L(1)=0$ και οτι υπαρχει αριθμος $e>1$ τετοιος ωστε $L(e)=1$. Τελος, γνωριζουμε οτι η $L(x)$ ειναι συνεχης, γνησιως αυξουσα και κοιλη. Με αυτα τα στοιχεια μπορουμε να κατασκευασουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.2.



Σχήμα 3.1



Σχήμα 3.2

3.1.17. Ασκηση. Κανε την γραφικη παρασταση της $L\left(x^2+x+1\right)$.

3.1.18. Θεωρημα. Για καθε $x, y \in (0,+\infty)$ και $a \in \mathbb{R}$ εχουμε

1. $L(x)+L(y)=L(xy)$.
2. $L(x^a)=aL(x)$.

Αποδειξη. Θεωρουμε προς στιγμη το y σταθερο. Τοτε

$$\frac{d}{dx}(L(xy))=\frac{1}{xy}(xy)'=\frac{1}{xy}y=\frac{1}{x}$$

και

$$\frac{d}{dx}(L(x)+L(y))=\frac{d}{dx}(L(x))+\frac{d}{dx}(L(y))=\frac{1}{x}+0.$$

Με αλλα λογια

$$\frac{d}{dx}(L(x)+L(y))=\frac{d}{dx}(L(xy))$$

οποτε

$$L(x)+L(y)=L(xy)+c.$$

Παιρνοντας τωρα $y=1$ εχουμε

$$L(x)+L(1)=L(x)+c \Rightarrow c=L(1)=0$$

οποτε

$$L(x)+L(y)=L(xy).$$

Επισης εχουμε

$$(L(x^a))'=\frac{1}{x^a}(x^a)'=\frac{1}{x^a}ax^{a-1}=\frac{a}{x}=aL'(x),$$

οποτε

$$L(x^a)=aL(x)+c$$

και θετοντας $a=1$ βλεπουμε οτι $c=0$.

3.1.19. Ασκηση. Δειξε οτι: $\forall x \in (0,+\infty): L\left(\frac{1}{x}\right)=-L(x)$.

3.1.20. Θεωρημα. Για καθε $x, y \in (-\infty, +\infty)$ εχουμε

1. $E(x)\,E(y) = E(x+y)$.
2. $(E(x))^y = E(xy)$.

Αποδειξη. Αφου $L(x) = E^{-1}(x)$, εχουμε $L(E(x+y)) = x+y$. Επισης

$$L(E(x)\,E(y)) = L(E(x)) + L(E(y)) = x + y.$$

Δηλ. $L(E(x+y)) = L(E(x)\,E(y))$. Οποτε

$$E(L(E(x+y))) = E(L(E(x)\,E(y))) \Rightarrow E(x+y) = E(x)\,E(y)\,.$$

Εχουμε $L\left[(E(x))^y\right] = yL[E(x)] = yx$ και $L[E(xy)] = xy$. Οποτε $(E(x))^y = E(xy)$.

3.1.21. Θεωρημα. Για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ εχουμε $E(x) = e^x$ (δηλ. τον αριθμο e υψωμενο στην δυναμη x).

Αποδειξη. Θα δειξουμε επαγωγικα οτι

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : E(n) = e^n. \tag{3.8}$$

Για $n = 0$ η (3.8) γινεται οτι $E(0) = e^0 = 1$, το οποιο ισχυει. Εστω οτι η (3.8) ισχυει για $n \in \{0, 1, 2, ..., k\}$. Τοτε

$$E(k) = e^k \Rightarrow E(k+1) = E(k)\,E(1) = e^k e = e^{k+1}$$

και η αποδειξη ειναι πληρης για το συνολο $\mathbb{N}_0$. Η επεκταση στο $\mathbb{Q}$ ειναι ευκολη, για την επεκταση στο $\mathbb{R}$ απαιτειται περισσοτερη εργασια.

3.1.22. Παρατηρηση. Ανακεφαλαιωνοντας, εχουμε ορισει (α) μια συναρτηση $E(x)$ δια μεσου ενος απειρου αθροισματος και (β) μια συναρτηση $L(x)$ ως αντιστροφη της $E(x)$. Αποδειξαμε διαφορες ιδιοτητες των $E(x)$ και $L(x)$, οι οποιες ειναι ακριβως ιδιες με τις ιδιοτητες της «κλασσικης» εκθετικης και της «κλασσικης» λογαριθμικης συναρτησης[2]. *Προκειται λοιπον για τις ιδιες συναρτησεις* και δικαιουμαστε πλεον να συμβολιζουμε

$$\begin{aligned} &\text{την } E(x) \text{ ως } e^x, \\ &\text{την } L(x) \text{ ως } \ln x. \end{aligned}$$

Αυτες εχουν τις εξης βασικες ιδιοτητες (εδω απλα ξαναγραφουμε τα Θεωρηματα 3.1.18 και 3.1.20 με τον νεο συμβολισμο):

$$\begin{array}{ll} e^{x+y} & (e^x)^y = e^{xy} \\ \ln(xy) = \ln x + \ln y & \ln(x^a) = a \ln x \end{array}$$

3.1.23. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε τις παραγωγους των

1. $f(x) = e^{x^2+3x}$,
2. $f(x) = x^2 \ln(x^3)$,
3. $f(x) = \ln(x^3 - x + 1)$,
4. $f(x) = e^x(2x^3 + \ln x)$.

Εχουμε

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2+3x}\right) = \frac{d}{dh}\left(e^h\right)\frac{d}{dx}\left(x^2+3x\right) = e^{x^2+3x}(2x+3)\,,$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\left(2x^3+\ln x\right)\right) = e^x\left(2x^3+\ln x\right) + e^x \cdot \left(6x^2 + \frac{1}{x}\right) = \frac{x\ln x + 6x^3 + 2x^4 + 1}{x} e^x,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^2 \ln\left(x^3\right)\right) &= \frac{d}{dx}\left(3x^2 \ln(x)\right) = \left(3x^2\right)' \ln x + 3x^2 (\ln x)' \\ &= 6x \ln x + 3x^2 \frac{1}{x} = 3x(2\ln x + 1)\,, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\left(2x^3+\ln x\right)\right) = \frac{1}{x}e^x\left(x\ln x + 6x^3 + 2x^4 + 1\right).$$

[2] Δηλ. αυτων τις τις οποιες διδαχτηκες στο Λυκειο.

3.1.24. Ασκηση. Υπολογισε τις παραγωγους των

1. $f(x) = e^{x^3+x}$,
2. $f(x) = x^3 \ln\left(x^2+1\right)$,
3. $f(x) = \ln\left(x^2+x+1\right)$,
4. $f(x) = e^x\left(x^2+\ln x\right)$.

3.1.25. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το e και το e^2 προσεγγιστικα. Θετουμε στην (3.1) $x=1$ και λαμβανουμε

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}. \tag{3.9}$$

Στον παρακατω πινακα φαινεται η προσεγγιστικη τιμη του e για διαφορες τιμες του n.

N	0	1	2	3	4	5
$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}$	1.0000	2.0000	2.5000	2.6667	2.7083	2.7167

Φαινεται λοιπον οτι το $\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}$ τεινει σε καποια τιμη $e \simeq 2.71...$ · προσεξτε οτι το $\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!}$ ειναι αυξουσα συναρτηση του N (γιατι;). Για να υπολογισουμε το e^2 μπορουμε να θεσουμε στην (3.1) $x=2$ οποτε λαμβανουμε

$$e^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+...+\frac{2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

Στον παρακατω πινακα φαινεται η προσεγγιστικη τιμη του e^2 για διαφορες τιμες του n.

N	0	1	2	3	4	5
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$	1.0000	3.0000	5.0000	6.3333	7.0000	7.2667

Φαινεται λοιπον οτι το $\sum_{n=0}^{N}\frac{2^n}{n!}$ τεινει σε καποια τιμη $e^2 \simeq 7.2667...$. Εναλλακτικα, $e^2 \simeq (2.71)^2 = 7.3441$. Ποια απο τις δυο προσεγγισεις ειναι καλυτερη. Γιατι; Μπορεις να βρεις μια ακομη καλυτερη προσεγγιση;

3.1.26. Ασκηση. Υπολογισε το e^3 και το $e^{1/2}$.

3.1.27. Θεωρημα. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Αποδειξη. Το ζητουμενο ειναι ισοδυναμο (γιατι;) με τα

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = 1, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1. \tag{3.10}$$

Θα αποδειξουμε το (3.10) με τον κανονα $L'Hospital$. Πραγματι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{z\to0^+}\frac{\ln(1+z)}{z} = \frac{\lim_{z\to0^+}\left(\ln(1+z)\right)'}{\lim_{z\to0^+}(z)'} = \frac{\lim_{z\to0^+}\frac{1}{1+z}}{\lim_{z\to0^+}1} = 1.$$

3.1.28. Ασκηση. Υπολογισε το $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$ και το $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

3.1.29. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε προσεγγιστικα (με χρηση του διαφορικου) την $\ln(1.2)$. Ειναι

$$\ln(x+\Delta x) \simeq \ln x + (\ln x)'\cdot\Delta x$$

και

$$\ln(1.2) = \ln(1+0.2) \simeq \ln 1 + \frac{1}{1}\cdot 0.2 = 0.2$$

Η ακριβης τιμη ειναι $\ln 1.2 = 0.18232$.

3.1.30. Παραδειγμα. Ας βρουμε και χαρακτηρισουμε τα στασιμα σημεια της συναρτησης $x^4e^{-x^2}$. Εχουμε

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^4e^{-x^2}\right) = -2x^3e^{-x^2}\left(x^2-2\right) = 0$$

με ριζες (στασιμα σημεια) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{2}$. Επισης εχουμε

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^4e^{-x^2}\right) = 2e^{-x^2}x^2\left(-9x^2+2x^4+6\right)$$

οποτε

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= 4e^{-2}(-18+8+6) < 0, \\ f''(x_2) &= 0, \\ f''(x_3) &= 4e^{-2}(-18+8+6) < 0. \end{aligned}$$

Αρα η $f(x)$ εχει τοπικα ελαχιστα στα x_1, x_3 και δεν μπορουμε να πουμε τι συμβαινει στο x_2.

3.1.31. Ασκηση. Βρες και χαρακτηρισε τα στασιμα σημεια της συναρτησης x^2e^{-x}.

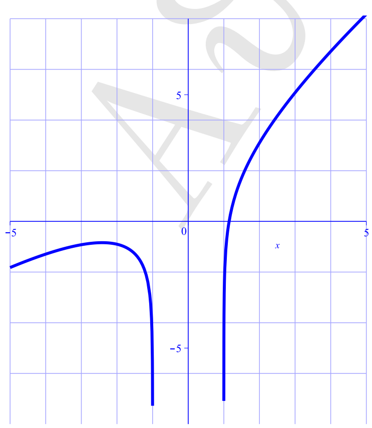
3.1.32. Παραδειγμα. Ας κανουμε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x + \ln\left(x^2-1\right)$. Αυτη ειναι ορισμενη και συνεχης για καθε x τετοιο ωστε $x^2-1>0$, δηλ. στο $A = (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. Εχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-1^-}\left(x+\ln\left(x^2-1\right)\right) &= -\infty, \\ \lim_{x\to1^+}\left(x+\ln\left(x^2-1\right)\right) &= -\infty. \end{aligned}$$

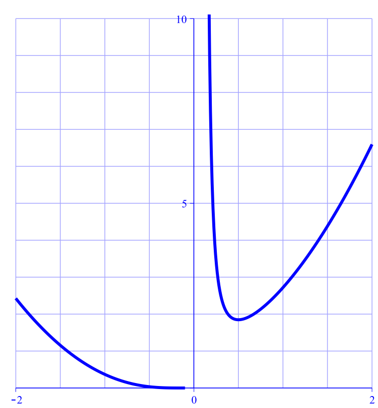
Επισης

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x+\ln\left(x^2-1\right)\right)' = 1+\frac{2x}{x^2-1}, \\ f''(x) &= \left(x+\ln\left(x^2-1\right)\right)'' = -\frac{2\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}. \end{aligned}$$

Θετοντας $f'(x) = 1+\frac{2x}{x^2-1} = 0$, βλεπουμε οτι τα στασιμα σημεια ειναι τα $x_1 = -1-\sqrt{2} \in A$ και $x_2 = -1+\sqrt{2} \notin A$. Αρα θα ασχοληθουμε μονο με το x_1, οπου εχουμε $f''(x_1) = \sqrt{2}-2 < 0$, οποτε εχουμε τοπικο μεγιστο στο x_1, συγκεκριμενα $f(x_1) =\simeq -0.84$. Γενικοτερα, $f''(x) < 0$ για καθε $x \in A$, οποτε η $f(x)$ ειναι κοιλη στο A. Με αυτα τα στοιχεια μπορουμε να κανουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.3.



Σχήμα 3.3



Σχήμα 3.4

3.1.33. Παραδειγμα. Ας κανουμε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x^2 e^{1/x}$. Αυτη ειναι ορισμενη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, οπου ειναι θετικη και συνεχης. Επειδη

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 e^{1/x} = 0 \neq +\infty = \lim_{x \to 0^+} x^2 e^{1/x},$$

το $x_0 = 0$ ειναι σημειο ασυνεχειας. Εχουμε

$$f'(x) = \left(x^2 e^{1/x}\right)' = e^{\frac{1}{x}} (2x - 1),$$
$$f''(x) = \left(x^2 e^{1/x}\right)'' = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(2x^2 - 2x + 1\right).$$

Θετοντας $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} (2x - 1) = 0$, βλεπουμε οτι το μοναδικο στασιμο σημειο ειναι το $x_1 = \frac{1}{2}$ και επειδη $f''(x_1) > 0$, εχουμε τοπικο ελαχιστο στο x_1, συγκεκριμενα $f(x_1) = \frac{e^2}{4} \simeq 1.847$. Γενικοτερα, $f''(x) > 0$ για καθε $x \in A$ (γιατι;) οποτε η $f(x)$ ειναι κυρτη στο A. Με αυτα τα στοιχεια μπορουμε να κανουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.4.

3.1.34. Ασκηση. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = xe^{-x^2}$.

3.2 Λυμενα Προβληματα

3.2.1. Αποδειξε οτι:

$$\forall x \in (0, +\infty) \ : e^x > 1 + x.$$

Λυση. Προκυπτει αμεσα απο τον ορισμο

$$e^x = E(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots .$$

3.2.2. Αποδειξε οτι:

$$x \in (0, +\infty) : 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x < x - 1.$$
$$x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) : 1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1.$$

Λυση. Θα αποδειξουμε το δευτερο (απο το οποιο προκυπτει αμεσα το πρωτο). Εαν $x > 1$ και αφου η $\ln x$ ειναι παραγωγισιμη, απο το Θεωρημα Μεσης Τιμης υπαρχει $z \in (1, x)$ τετοιο ωστε

$$1 > \frac{1}{z} = \frac{d}{dz} \ln z = \frac{\ln x - \ln 1}{x - 1} = \frac{\ln x}{x - 1}.$$

Εαν $x < 1$, τοτε υπαρξει $z \in (x, 1)$ τετοιο ωστε

$$1 < \frac{1}{z} = \frac{d}{dz} \ln z = \frac{\ln 1 - \ln x}{1 - x} = \frac{-\ln x}{1 - x}.$$

Ετσι εχουμε αποδειξει το ανω φραγμα του $L(x)$. Για το κατω φραγμα, θετουμε $x = \frac{1}{y}$ και εχουμε

$$\ln x < x - 1 \Rightarrow \ln \frac{1}{y} < \frac{1}{y} - 1 \Rightarrow -\ln y < \frac{1}{y} - 1$$

το οποιο δινει το κατω φραγμα.

3.2.3. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ τετοια ωστε $f'(x) = 2f(x)$
Λυση. Ζητουμε μια συναρτηση της οποιας η παραγωγος ειναι (*για καθε* x) ιση με το διπλασιο της αρχικης. Αυτη η συνθηκη μας θυμιζει την εκθετικη συναρτηση, για την οποια γνωριζουμε οτι εχει παραγωγο *ιση* με την αρχικη. Ισως ο συντελεστης 2 προερχεται απο μια αλυσωτη παραγωγιση. Οποτε σκεφτομαστε να χρησιμοποιησουμε τηνν συναρτηση $f(x) = e^{2x}$. Πραγματι τοτε εχουμε

$$\left(e^{2x}\right) = e^{2x} (2x)' = 2e^{2x}.$$

Υπαρχουν αλλες συναρτησεις οι οποιες να εχουν την ζητουμενη ιδιοτητα;

3.2.4. Αποδειξε οτι: $\forall x \in \mathbb{R} : E(x) > 0$, χρησιμοποιωντας *μονο* τον ορισμο της $E(x)$ και το οτι $E(x) = E'(x)$.

Λυση. Εδω θα δουμε μια αποδειξη η οποια βασιζεται σε μια απλη ιδεα: αν υπαρχουν a, b (με $a < b$) τετοια ωστε $E(a) < 0$ και $E(b) \geq 0$, τοτε θα υπαρχει και ενα *ελαχιστο* $c \in (a, b)$ τετοιο ωστε $x \geq c \Rightarrow E(x) \geq 0$· αλλα τοτε $x \in (a, c) \Rightarrow E(x) < 0$, οποτε η $E(x) = E'(x)$ θα ειναι φθινουσα και δεν θα μπορει να λαβει μη αρνητικη τιμη στο b.

Ας προσπαθησουμε να κανουμε το παραπανω επιχειρημα πιο ακριβες. Με $b = 0$ εχουμε $E(b) = 1 > 0$· εστω οτι υπαρχει $a < b$ τετοιο ωστε $E(a) < 0$. Τοτε, απο την συνεχεια της $E(x)$, θα υπαρχει $c \in (a, b)$ τετοιο ωστε $E(c) = 0$. Εστω οτι *ολες* οι ριζες της $E(x) = 0$ στο $[a, c)$ ειναι, σε αυξουσα σειρα, οι

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots .$$

Σε καθε διαστημα (x_k, x_{k+1}), η $E(x)$ εχει το ιδιο προσημο (αν αλλαζε προσημο, καπου στο (x_k, x_{k+1}) θα υπηρχε και αλλη ριζα της $E(x)$). Χωρις βλαβη της γενικοτητας, ας υποθεσουμε οτι για καποιο (x_k, x_{k+1}) ισχυει

$$\forall x \in (x_k, x_{k+1}) : E(x) < 0$$

και ας ορισουμε

$$\forall n \geq 2 : z_n = \frac{1}{n} x_k + \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_{k+1}.$$

Εχουμε

$$\forall n \geq 2 : z_n \in (x_k, x_{k+1})$$

και

$$\forall n \geq 2 : z_n < z_{n+1},$$

διοτι

$$z_n - z_{n+1} = \left(\frac{1}{n} x_k + \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_{k+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} x_k + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x_{k+1}\right) = \frac{1}{n^2 + n} (x_k - x_{k+1}) < 0.$$

Τοτε (αφου η $E'(z) = E(z) < 0$ η $E(z)$ ειναι φθινουσα στο (x_k, x_{k+1}))

$$\forall n \geq 2 : E(z_n) > E(z_{n+1}).$$

Επισης $\lim_{n \to +\infty} z_n = x_{k+1}$ οποτε (λογω συνεχειας)

$$\lim_{n \to +\infty} E(z_n) = E\left(\lim_{n \to +\infty} z_n\right) = E(x_{k+1}) = 0$$

Αλλα

$$\lim_{n \to +\infty} E(z_n) < E(z_1) < 0$$

και οδηγηθηκαμε σε ατοπο.

Υπαρχουν μερικα σημεια στην παραπανω αποδειξη τα οποια μπορει να μην σου ειναι σαφη (π.χ. οτι $\lim_{n \to +\infty} E(z_n) = E(\lim_{n \to +\infty} z_n)$). Ομως υπαρχει και ενα σημεια στο οποιο υπαρχει μια πραγματικα *αυθαιρετη* υποθεση. Μπορεις να βρεις πιο ειναι αυτο το σημειο και να συμπληρωσεις το κενο στην αποδειξη;

3.2.5. Αποδειξε οτι

$$\forall x, y \in R : E(x) E(y) = E(x + y)$$

χρησιμοποιωντας *μονο* τον ορισμο της $E(x)$.

Λυση. Θα δωσουμε μια *συνδυαστικη* αποδειξη η οποια βασιζεται στο αναπτυγμα του $(p + q)^N$. Αυτο ειναι (δες το Παραρτημα Γ')

$$(p + q)^N = p^N + N p^{N-1} q + N(N-1) p^{N-2} q^2 + \dots + N p q^{N-1} + q^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{p^{N-k} q^k}{(N-k)! k!}.$$

Τωρα θα εκτελεσουμε τον πολλαπλασιασμο

$$E(x)\,E(y) = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right).$$

Για να το πετυχουμε αυτο, θα τοποθετησουμε τους ορους των δυο απειρων αθροισματων σε ενα πινακα ως εξης:

	1	x	$\frac{x^2}{2!}$	$\frac{x^3}{3!}$	...
1	$1 \cdot 1$	$1 \cdot x$	$1 \cdot \frac{x^2}{2!}$	$1 \cdot \frac{x^2}{3!}$	...
y	$y \cdot 1$	$y \cdot x$	$y \cdot \frac{x^2}{2!}$	$y \cdot \frac{x^3}{3!}$	...
$\frac{y^2}{2!}$	$\frac{y^2}{2!} \cdot 1$	$\frac{y^2}{2!} \cdot x$	$\frac{y^2}{2!} \cdot \frac{x^2}{2!}$	$\frac{y^2}{2!} \cdot \frac{x^3}{3!}$	...
$\frac{y^3}{3!}$	$\frac{y^3}{3!} \cdot 1$	$\frac{y^3}{3!} \cdot x$	$\frac{y^3}{3!} \cdot \frac{x^2}{2!}$	$\frac{y^3}{3!} \cdot \frac{x^3}{3!}$	...
...	...	...	...	...	...

Φαινεται οτι, για να υπολογισουμε το αθροισμα πρεπει να εκτελεσουμε εναν απειρο αριθμο πολλαπλασιασμων (ενα για καθε κελι του πινακα) και να αθροισουμε τα απειρα αποτελεσματα. Θα διευκολυνθουμε σε αυτη την διαδικασια εαν πολλαπλασιαζουμε και προσθετουμε *κατα σειρα αυξουσων δυναμεων*· δηλ. πρωτα θα αθροισουμε ολους τους ορους με μηδενικη *συνολικη* δυναμη

$$1 \cdot 1,$$

κατοπιν θα αθροισουμε ολους τους ορους με πρωτη *συνολικη* δυναμη

$$1 \cdot x + y \cdot 1$$

και ουτω καθεξης. Αυτη η διαδικασια μπορει να γραφει ως εξης:

$$\begin{aligned}
E(x)\,E(y) &= \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{m-k}}{(m-k)!} \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!\,(m-k)!} x^k y^{m-k} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} (x+y)^m = E(x+y)
\end{aligned}$$

και εχουμε δειξει το ζητουμενο.

Παρατηρησε οτι απο την $E(x)\,E(y) = E(x+y)$ προκυπτει και η ειδικοτερη $E(x)\,E(-x) = 1$ την οποια χρησιμοποιησαμε για να δειξουμε οτι η $E(x) > 0$ (και εξ αυτου οτι η $E(x)$ απεικονιζει αμφιμονοσημαντα το $(-\infty, +\infty)$ στο $(0, +\infty)$). Προηγουμενως ειχαμε αποδειξει την $E(x)\,E(-x) = 1$ χρησιμποιωντας παραγωγιση, αλλα στην παρουσα αποδειξη του γενικοτερου αποτελεσματος αυτο δεν ηταν απαραιτητο.

3.2.6. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = \ln\left(x^2 + x + 1\right)$.

Λυση. Εχουμε

$$\left[\ln\left(x^2 + 2x + 4\right)\right]' = \frac{2x+2}{x^2+2x+4}.$$

3.2.7. Υπολογισε το $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$ *χωρις χρηση του κανονα* $l'Hospital$.

Λυση. Παρατηρουμε οτι το $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$ ειναι ακριβως (εκ του ορισμου) η $(\ln x)'$ υπολογισμενη στο $x = a$. Οποτε

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x} = \left[\frac{d}{dx}(\ln(x))\right]_{x=a} = \frac{1}{a}.$$

3.2.8. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = e^x\left(x^2 + 1\right)$.

Λυση. Εχουμε

$$\left(e^x\left(x^2+1\right)\right)' = e^x\left(x^2+1\right) + e^x 2x = e^x\left(x^2 + 2x + 1\right).$$

3.2.9. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = e^{x^2-4x+5}$.

Λυση. Εχουμε

$$\left(e^{x^2-4x+5}\right)' = (2x-4)\, e^{x^2-4x+5}.$$

3.2.10. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = a^x$.

Λυση. Εχουμε $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$ και, θετοντας $u = x \ln a$,

$$(a^x)' = \left(e^{\ln a^x}\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = (e^u)'\,(x\ln a)' = (e^u)\ln a = a^x \ln a$$

3.2.11. Υπολογισε προσεγγιστικα (με χρηση του διαφορικου) την $e^{1.1}$.

Λυση. Ειναι $e^{x+\Delta x} \simeq e^x + (e^x)'\,\Delta x$ και

$$e^{1.1} = e^{1+0.1} \simeq e^1 + e^1 \cdot 0.1 = e\,(1+0.1) \simeq 1.1 \cdot 2.718 = 2.989\,8.$$

Η ακριβης τιμη ειναι $e^{1.1} = 3.0042...$.

3.2.12. Υπολογισε προσεγγιστικα (με χρηση του διαφορικου) την $\ln(1.2)$.

Λυση. Ειναι $\ln(x+\Delta x) \simeq \ln x + (\ln x)'\,\Delta x$ και

$$\ln(1.2) = \ln(1+0.2) \simeq \ln 1 + \frac{1}{1}\cdot 0.2 = 0.2$$

Η ακριβης τιμη ειναι. $\ln 1.2 = 0.18232$.

3.2.13. Βρες και χαρακτηρισε τα στασιμα σημεια της συναρτησης $x^3 e^{-x^2}$.

Λυση. Εχουμε

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^3 e^{-x^2}\right) = -x^2 e^{-x^2}\left(2x^2-3\right) = 0$$

με ριζες (στασιμα σημεια) $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Επισης εχουμε

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^3 e^{-x^2}\right) = 2xe^{-x^2}\left(2x^4 - 7x^2 + 3\right)$$

οποτε

$$f''(x_1) > 0, \quad f''(x_2) = 0, \quad f''(x_3) < 0.$$

Αρα η $f(x)$ εχει τοπικο ελαχιστο στο x_1 και τοπικο μεγιστο στο x_3. Δεν μπορουμε να αποφανθουμε για το x_2.

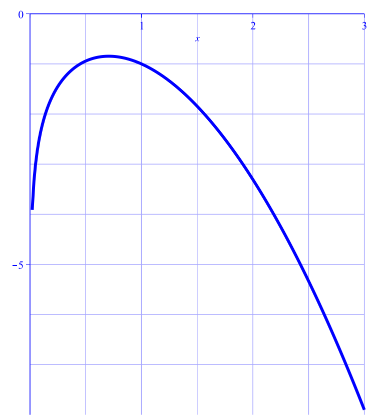
3.2.14. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = \ln(x) - x^2$.
Λυση. Η $f(x)$ ειναι ορισμενη και συνεχης στο $A = (0, +\infty)$. Εχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(x) - x^2\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\ln(x) - x^2\right) = +\infty.$$

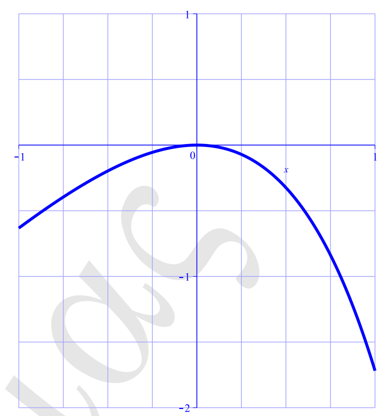
Επισης

$$f'(x) = \left(\ln(x) - x^2\right)' = \frac{1}{x} - 2x,$$
$$f''(x) = \left(\ln(x) - x^2\right)'' = -\frac{1}{x^2} - 2.$$

Θετοντας $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x = 0$, βλεπουμε οτι το μοναδικο στασιμο σημει0 στο $(0, +\infty)$ ειναι το $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Εχουμε $f''(x_1) = -\frac{1}{2} - 2 < 0$, οποτε εχουμε τοπικο ελαχιστο στο x_1, συγκεκριμενα $f(x_1) \simeq -0.846$. Γενικοτερα, $f''(x) < 0$ για καθε $x \in (0, +\infty)$, οποτε η $f(x)$ ειναι κοιλη στο $(0, +\infty)$. Με αυτα τα στοιχεια μπορουμε να κανουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.5.



Σχήμα 3.5



Σχήμα 3.6

3.2.15. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x(1 - e^x)$.

Λυση. Εχουμε

$$f'(x) = (x(1 - e^x))' = 1 - xe^x - e^x,$$
$$f''(x) = \left(x^2 e^{1/x}\right)'' = -e^x(x+2).$$

Θετοντας

$$f'(x) = 1 - xe^x - e^x = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{1+x}$$

βλεπουμε οτι το μοναδικο στασιμο σημειο ειναι το $x_1 = 0$ και επειδη $f''(x_1) < 0$, εχουμε τοπικο μεγιστο στο x_1, συγκεκριμενα $f(x_1) = 0$. Γενικοτερα, $f''(x) < 0$ για καθε $x \in \mathbb{R}$, οποτε η $f(x)$ ειναι κοιλη στο $\mathbb{R}$. Με αυτα τα στοιχεια μπορουμε να κανουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.6.

3.3 Αλυτα Προβληματα

3.3.1. Δειξε οτι $\lim_{x\to+\infty}(x)^{1/x} = 1$.

3.3.2. Δειξε οτι $\lim_{x\to e}\frac{\ln x - 1}{x - e} = \frac{1}{e}$.

3.3.3. Υπολογισε τα ορια.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{3^x - 1}$. *Απ.* $\frac{1}{\ln 3}$.
2. $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$. *Απ.* 1.
3. $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$. *Απ.* $+\infty$.
4. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$. *Απ.* e^{-8}.

3.3.4. Δειξε οτι $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/(2x)} = e^{\frac{1}{2}}$ *χωρις να χρησιμοποιησεις τον κανονα* $l'Hospital$.

3.3.5. Υπολογισε το $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$ *χωρις να χρησιμοποιησεις τον κανονα* $l'Hospital$.

3.3.6. Βρες τα σημεια ασυνεχειας της $f(x) = \frac{1}{1-e^{x/(1-x)}}$.

3.3.7. Βρες τα σημεια ασυνεχειας της $f(x) = 2^{-2^{1/(1-x)}}$.

3.3.8. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x)$.

1. $f(x) = e^x \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x}\right)$. *Απ.* $\frac{1}{x^2}e^x\left(x^5+3x^4+x-1\right)$.
2. $f(x) = \frac{e^x}{x^2-1}$. *Απ.* $-\frac{e^x}{(x^2-1)^2}\left(-x^2+2x+1\right)$.
3. $f(x) = e^{-1/x^2}$. *Απ.* $\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$.
4. $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$. *Απ.* $2\frac{x}{x^2+1}$.
5. $f(x) = \sqrt[4]{e^x+3^x+2}$. *Απ.* $\frac{1}{4}\sqrt[4]{e^x+3^x+2}\frac{e^x+3^x\ln 3}{e^x+3^x+2}$.

3.3.9. Υπολογισε την $\frac{dy}{dx}$ οταν $e^{-y/x}+\ln x = c$.

3.3.10. Υπολογισε τις $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ οταν $x+y=e^{x-y}$.

3.3.11. Υπολογισε την παραγωγο της $f(x) = 5^x$. *Απ.* $5^x\ln 5$.

3.3.12. Υπολογισε προσεγγιστικα (με χρηση του διαφορικου) την $e^{0.9}$. *Απ.* $2.4351...$.

3.3.13. Υπολογισε προσεγγιστικα (με χρηση του διαφορικου) την $\ln(0.9)$. *Απ.* $= -0.1042...$.

3.3.14. Εξετασε την μονοτονια της $f(x)$.

1. $f(x) = \ln|x|$.
2. $f(x) = \ln\left(1-x^2\right)$.
3. $f(x) = 2x^2 - \ln x$.
4. $f(x) = e^x + 5x$.

3.3.15. Βρες και χαρακτηρισε τα στασιμα σημεια της $f(x)$.

1. $f(x) = \left(x^2-1\right)\ln x$.
2. $f(x) = x^2e^{-x}$.
3. $f(x) = x^3e^{-x}$.

3.3.16. Εξετασε την κυρτοτητα / κοιλοτητα της $f(x)$.

1. $f(x) = \ln|x|$.
2. $f(x) = x^2e^{-x}$.
3. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

3.3.17. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x^2\ln(x+2)$.

3.3.18. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x^2e^{-4x}$.

3.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

3.4.1. Αποδειξε οτι:

1. $\forall x : 1 + x + \frac{x^2}{2} < e^x$.
2. $\forall x : x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
3. $\forall x : x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
4. $x < 1 \Rightarrow 1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$.
5. $x > -1 \Rightarrow \frac{x}{1+x} < 1 - e^{-x} < x$.
6. $x < 1 \Rightarrow e^{-\frac{x}{1-x}} < 1 - x < e^{-x}$.
7. $x, y > 0 \Rightarrow e^{\frac{xy}{x+y}} < \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y < e^x$.
8. $x > -1 \Rightarrow \frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x . x < 1 \Rightarrow x < -\ln(1-x) < \frac{x}{1-x}$.

3.4.2. Αποδειξε οτι $x \in [0, 1/2] \Rightarrow -\frac{3}{2}x < \ln(1-x) < \frac{3}{2}x$. Μπορεις να βελτιωσεις το ανω φραγμα;

3.4.3. Αποδειξε οτι $x \in (-1, 1) \Rightarrow \ln(1 - |x|) \leq \ln(1+x) \leq -\ln(1 - |x|)$.

3.4.4. Αποδειξε οτι:

1. $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$.
2. $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ *χωρις να χρησιμοποιησεις τον κανονα l'Hospital*.

3.4.5. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x \ln(2x)$.

3.4.6. Για ποιες τιμες της c εχει λυσεις η εξισωση $\ln x = cx^2$;

3.4.7. Λυσε την εξισωση.

1. $\ln\left(x^3 + 1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 2x + 1\right) = \ln 3$.
2. $5^x + 12^x = 13^x$.
3. $2^x = 1 - x$.

3.4.8. Αποδειξε οτι

$$(\forall x : f'(x) < f(x)) \Rightarrow (\forall x : f(x) < f(0) \cdot e^x).$$

3.4.9. Βρες μια συναρτηση $f(x)$τετοια ωστε $f'(x) = 3f(x)$ και $f(0) = 5$. *Απ.* $5e^{3x}$.

3.4.10. Βρες δυο *διαφορετικες* συναρτησεις $f_1(x), f_2(x)$ τετοιες ωστε $f_i'(x) = -f_i(x)$. *Απ.* $f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = 4e^{-x}$.

3.4.11. Βρες δυο συναρτησεις $f_1(x), f_2(x)$ τετοιες ωστε

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= f_2(x) \\ f_2'(x) &= f_1(x). \end{aligned}$$

Απ. $f_1(x) = e^x + e^{-x}$, $f_2(x) = e^x - e^{-x}$.

3.4.12. Βρες δυο συναρτησεις $f_1(x), f_2(x)$ τετοιες ωστε

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= f_1(x) + f_2(x) \\ f_2'(x) &= f_1(x) - f_2(x). \end{aligned}$$

Απ. $f_1(x) = e^{\sqrt{2x}} + e^{-\sqrt{2x}}$, $f_2(x) = e^{\sqrt{2x}} - e^{-\sqrt{2x}}$.

3.4.13. Βρες δυο συναρτησεις $f_1(x), f_2(x)$ τετοιες ωστε

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= f_2(x) \\ f_2'(x) &= -f_1(x). \end{aligned}$$

Απ. $f_1(x) = e^{ix} + e^{-ix}$, $f_2(x) = e^{ix} - e^{-ix}$.

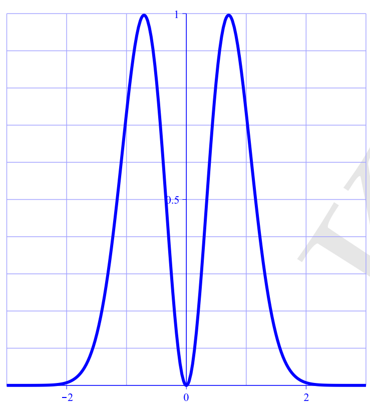
3.4.14. Εστω συναρτηση $f(x)$ η οποια ικανοποιει (α) $\forall x \in [0, +\infty) : f'(x) < k \cdot f$ και (β) $f(0) = 1$. Δειξε οτι $\forall x \in [0, +\infty) : f(x) \leq e^{kx}$.

3.4.15. Εστω $\lambda \in (1, \infty)$ και $r(\lambda)$ η μοναδικη πραγματικη λυση της εξισωσης $x(1 + \ln x) = \lambda$. Αποδειξε οτι

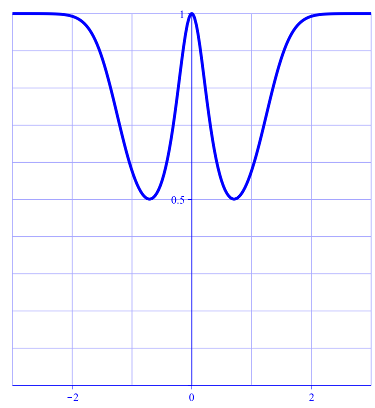
$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{r(\lambda) \ln \lambda}{\lambda} = 1.$$

3.4.16. Βρες την συναρτηση η οποια εχει την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.7

3.4.17. Βρες την συναρτηση η οποια εχει την γραφικη παρασταση του Σχηματος 3.8.



Σχήμα 3.7



Σχήμα 3.8

3.4.18. Βρες ολες τις πραγματικες ριζες των εξισωσεων (α) $4^x + 6^{x^2} = 5^x + 5^{x^2}$, (β) $6^x + 1 = 8^x - 27^{x-1}$.

4 Κυκλικες Συναρτησεις

Οι *κυκλικες τριγωνομετρικες* συναρτησεις ειναι το ημιτονο, το συνημιτονο, η εφαπτομενη, η συνεφαπτομενη, η τεμνουσα και η συντεμνουσα. Οι ορισμοι και οι ιδιοτητες αυτων σου ειναι γνωστα απο το Λυκειο. Ομως τωρα θα ορισουμε το ημιτονο και το συνημιτονο μεσω απειρων αθροισματων (οπως καναμε και για την εκθετικη συναρτηση) και θα δειξουμε οτι οι νεοι ορισμοι ειναι ισοδυναμοι με τους παλαιους.

4.1 Θεωρια και Παραδειγματα

4.1.1. Ορισμος. Οριζουμε στο $(-\infty, +\infty)$ τις συναρτησεις

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \tag{4.1}$$

$$S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{4.2}$$

4.1.2. Οπως και στο προηγουμενο κεφαλαιο, απαιτειται διερευνηση της ορθοτητας του Ορισμου 4.1.1 και, συγκεκριμενα, της υπαρξης των απειρων αθροισματων (4.1)-(4.2). Αυτη η διερευνηση θα γινει στο Κεφαλαιο 14.

4.1.3. Θεωρημα. Για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν τα εξης:

$$C(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad S(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Αποδειξη. Απο τον ορισμο της e^x εχουμε

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + ... \tag{4.3}$$

$$e^{-ix} = 1 - ix + \frac{(-ix)^2}{2!} + \frac{(-ix)^3}{3!} + \frac{(-ix)^4}{4!} + \frac{(-ix)^5}{5!} + ... \tag{4.4}$$

τα οποια δινουν

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + ...$$
$$e^{-ix} = 1 - ix - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{ix^5}{5!} + ...$$

Προσθετοντας κατα μελη παιρνουμε

$$e^{ix}+e^{-ix}=2\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...\right)\Rightarrow\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=C\left(x\right)$$

και αφαιρωντας κατα μελη παιρνουμε

$$e^{ix}-e^{-ix}=2i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\right)\Rightarrow\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=S\left(x\right).$$

4.1.4. Εχουμε ορισει

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+... \tag{4.5}$$

για πραγματικα $x\in(-\infty,+\infty)$. Παρολα αυτα, εαν θεσουμε στην (4.5) στην θεση του x το ix παιρνουμε την (4.3) και εαν θεσουμε $-ix$ παιρνουμε την (4.4) και οι εκφρασεις (τα ορια) αυτες ειναι καλως ορισμενες, αφου εχουμε υποθεσει την συγκλιση των απειρων αθροισματων. Οποτε μπορουμε να θεωρησουμε τις (4.3) και (4.4) ως ορισμους των e^{ix} και e^{-ix} αντιστοιχα (για $x\in(-\infty,+\infty)$).

4.1.5. Θεωρημα. Για καθε $x\in(-\infty,+\infty)$ ισχυουν

$$C\left(x\right)=\operatorname{Re}\left(e^{ix}\right)\ \text{(το \textit{πραγματικο} μερος της } e^{ix}\text{)}$$
$$S\left(x\right)=\operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)\ \text{(το \textit{φανταστικο} μερος της } e^{ix}\text{)}.$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$\begin{aligned}e^{ix}&=1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}+...\\ e^{-ix}&=1-ix-\frac{x^2}{2!}+\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{ix^5}{5!}+...=\overline{1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{ix^5}{5!}+...}=\overline{e^{ix}}\end{aligned}$$

(οπου $\overline{a+ib}=a-ib$). Ξερουμε οτι για καθε μιγαδικο αριθμο $z=a+ib$ ισχυει

$$\frac{z+\overline{z}}{2}=\operatorname{Re}\left(z\right),\qquad\frac{z-\overline{z}}{2i}=\operatorname{Im}\left(z\right).$$

Οποτε εχουμε

$$C\left(x\right)=\frac{e^{ix}+\overline{e^{ix}}}{2}=\operatorname{Re}\left(e^{ix}\right),\qquad S\left(x\right)=\frac{e^{ix}-\overline{e^{ix}}}{2i}=\operatorname{Im}\left(e^{ix}\right).$$

4.1.6. Θεωρημα. Για καθε $x\in(-\infty,+\infty)$ ισχυει

$$e^{ix}=C\left(x\right)+iS\left(x\right) \tag{4.6}$$

Αποδειξη. Εχουμε $e^{ix}=\operatorname{Re}\left(e^{ix}\right)+i\operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)=C\left(x\right)+iS\left(x\right)$.

4.1.7. Θεωρημα. Για καθε $x\in(-\infty,+\infty)$ ισχυουν

$$C'\left(x\right)=-S\left(x\right),\qquad S'\left(x\right)=C\left(x\right). \tag{4.7}$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$\begin{aligned}C'\left(x\right)&=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...\right)'=0-\frac{2x}{2!}+\frac{4x^3}{4!}-...=-x+\frac{x^3}{3!}-...=-S\left(x\right),\\ S'\left(x\right)&=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\right)'=1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}-...=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...=C\left(x\right).\end{aligned}$$

4.1.8. Θεωρημα. Οι συναρτησεις $C\left(x\right)$, $S\left(x\right)$ ειναι συνεχεις και παραγωγισιμες στο $(-\infty,+\infty)$.
Αποδειξη. Προκυπτει αμεσα απο την υπαρξη των $C'\left(x\right)$ και $S'\left(x\right)$.

4.1.9. Θεωρημα. Η $C(x)$ ικανοποιει τις

$$C''(x) + C(x) = 0, \quad C(0) = 1, \quad C'(0) = 0 \tag{4.8}$$

και η $S(x)$ ικανοποιει τις

$$S''(x) + S(x) = 0, \quad S(0) = 1, \quad S'(0) = 1. \tag{4.9}$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$C''(x) = \left(C'(x)\right)' = \left(-S(x)\right)' = -S'(x) = -C(x).$$

Επισης, θετοντας $x = 0$ στην $C(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + ...$ παιρνουμε $C(0) = 1$ και θετοντας $x = 0$ στην $S(x) = x - \frac{x^3}{3!} + ...$ παιρνουμε $C'(0) = S(0) = 0$. Οποτε εχουμε αποδειξει την (4.8). Η (4.9) αποδεικνυεται παρομοια.

Τι αλλο παρατηρειτε για την $C'(x)$; Αποδειξτε το αντιστοιχο για την $S'(x)$.

4.1.10. Θεωρημα. Για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ισχυει

$$C^2(x) + S^2(x) = 1. \tag{4.10}$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$C^2(x) + S^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{i2x} + e^{-i2x} + 2}{4} - \frac{e^{i2x} + e^{-i2x} - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

4.1.11. Θεωρημα. Για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν

$$C(-x) = C(x), \qquad S(-x) = -S(x). \tag{4.11}$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$\begin{aligned}
C(-x) &= \frac{e^{i(-x)} + e^{-i(-x)}}{2} = \frac{e^{-ix} + e^{ix}}{2} = C(x), \\
S(-x) &= \frac{e^{i(-x)} - e^{-i(-x)}}{2i} = \frac{e^{-ix} - e^{ix}}{2i} = S(x).
\end{aligned}$$

4.1.12. Θεωρημα. Για καθε $x, y \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\begin{aligned}
C(x+y) &= C(x)C(y) - S(x)S(y), \\
S(x+y) &= S(x)C(y) + C(x)S(y), \\
C(x-y) &= C(x)C(y) + S(x)S(y), \\
S(x-y) &= S(x)C(y) - C(x)S(y).
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε μονο το πρωτο. Εχουμε

$$\begin{aligned}
C(x)C(y) - S(x)S(y) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} - \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \\
&= \frac{e^{i(x+y)} + e^{i(x-y)} + e^{i(-x+y)} + e^{-i(x+y)}}{4} + \frac{e^{i(x+y)} - e^{i(x-y)} - e^{i(-x+y)} + e^{-i(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{4} = C(x+y).
\end{aligned}$$

4.1.13. Ασκηση. Αποδειξε οτι: για καθε $x, y \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\begin{aligned}
C(x-y) &= C(x)C(y) + S(x)S(y), \\
S(x-y) &= S(x)C(y) - C(x)S(y).
\end{aligned}$$

4.1.14. Θεωρημα. Υπαρχει ελαχιστος θετικος αριθμος $\underline{p}$ τετοιος ωστε $C\left(\underline{p}\right) = 0$.
Λυση. Απο το Θεωρημα Μεσης Τιμης υπαρχει $z \in (0, 2)$ τετοιο ωστε

$$S'(z) = \frac{S(2) - S(0)}{2}$$

δηλ.

$$S(2) - S(0) = 2C(z).$$

Εχουμε $S(0) = 0$ και, αφου $C^2(z) + S^2(z) = 1$, εχουμε και $|S(z)| \leq 1$. Αρα

$$|2C(z)| \leq 1.$$

Επισης εχουμε

$$C(2z) = C(z + z) = C^2(z) - S^2(z) = 2C^2(z) - 1 \leq 0.$$

Αφου $C(0) = 1 > 0$ και $C(2z) \leq 0$, απο το Θεωρημα της Ενδιαμεσης Τιμης υπαρχει $p \in (0, 2z)$ (και αρα $p \in (0, 4)$) τετοιο ωστε $C(p) = 0$. Εστω τωρα

$$P = \{x : x \in [0, 4], \quad C(x) = 0\}.$$

Οπως ειδαμε το P δεν ειναι κενο και σαφως ειναι φραγμενο. Αρα υπαρχει το

$$\underline{p} = \inf P$$

και, λογω της συνεχειας της $C(x)$, ισχυει $C\left(\underline{p}\right) = 0$. Δηλ. $\underline{p}$ ειναι η μικροτερη αυστηρα θετικη ριζα της $C(x) = 0$.

4.1.15. Ορισμος. Εστω $\underline{p}$ η μικροτερη αυστηρα θετικη ριζα της $C(x) = 0$. Οριζουμε τον αριθμο

$$\pi = 2p.$$

Δηλ. η μικροτερη αυστηρα θετικη ριζα του $C(x)$ ειναι η $\frac{\pi}{2}$.

4.1.16. Θεωρημα. Ισχυει το εξης:

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$1 = C^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + S^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = S^2\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Αρα $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ή $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Αλλα $S'(x) = C(x) > 0$ οταν $x \in \left(0.\frac{\pi}{2}\right)$. Οποτε η $S(x)$ ειναι αυξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$· αφου ειναι και συνεχης στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ εχουμε $S\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$· οποτε $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

4.1.17. Θεωρημα. Ισχυουν τα παρακατω

$$C(\pi) = -1, \quad S(\pi) = 0, \quad C(2\pi) = 1, \quad S(2\pi) = 0.$$

Αποδειξη. Αφου

$$C(x + y) = C(x)C(y) - S(y)S(x)$$

εχουμε

$$C(\pi) = C\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = C\left(\frac{\pi}{2}\right)C\left(\frac{\pi}{2}\right) - S\left(\frac{\pi}{2}\right)S\left(\frac{\pi}{2}\right) = -S^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Και αφου

$$S(x + y) = S(x)C(y) + S(y)C(x)$$

εχουμε

$$S(\pi) = S\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = S\left(\frac{\pi}{2}\right)C\left(\frac{\pi}{2}\right) + S\left(\frac{\pi}{2}\right)C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - 0 = 0.$$

Τελος

$$0 = S(\pi) = \frac{e^{i\pi} - e^{-i\pi}}{2i} = 0 \Rightarrow 1 = e^{i2\pi} = C(2\pi) + iS(2\pi) \Rightarrow (C(2\pi) = 1, S(2\pi) = 0).$$

4.1.18. Θεωρημα. Οι $C(x)$, $S(x)$ εχουν περιοδο 2π, δηλ.

$$\forall x \in (-\infty, +\infty) : C(x + 2\pi) = C(x) \text{ και } S(x + 2\pi) = S(x).$$

Αποδειξη. Για τυχον $x \in (-\infty, +\infty)$ εχουμε

$$\begin{aligned} C(x + 2\pi) &= C(x) C(2\pi) + S(x) S(2\pi) = C(x), \\ S(x + 2\pi) &= S(x) C(2)\pi + C(x) S(2\pi) = S(x). \end{aligned}$$

4.1.19. Θεωρημα. Για καθε $n \in \mathbb{N}$ ισχυουν τα εξης:

$$C(n\pi) = (-1)^n, \quad S(n\pi) = 0, \quad C\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad S\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n.$$

Αποδειξη. Δειχνουμε μονο τα δυο πρωτα. Η αποδειξη ειναι επαγωγικη. Για $n = 0$ ισχυει οτι

$$C(0\pi) = C(0) = 1 = (-1)^0, \qquad S(0\pi) = S(0) = 0.$$

Εστω οτι για $n = \{0, 1, 2, ..., 2k\}$ ισχυουν

$$C(n\pi) = (-1)^n, \quad S(n\pi) = 0.$$

Τοτε

$$\begin{aligned} C((2k+1)\pi) &= C(2k\pi) C(\pi) - S(2k\pi) S(\pi) = C(\pi) = -1 = (-1)^{2k+1}, \\ C((2k+2)\pi) &= C(2k\pi) C(2\pi) - S(2k\pi) S(2\pi) = C(2\pi) = 1 = (-1)^{2k+2}, \\ S((2k+1)\pi) &= S(2k\pi) C(\pi) + C(2k\pi) S(\pi) = 0, \\ S((2k+2)\pi) &= S(2k\pi) C(2\pi) + C(2k\pi) S(2\pi) = 0 \end{aligned}$$

και η αποδειξη ειναι πληρης.

4.1.20. Παραπανω εχουμε δει οτι η $C(x)$ (αντιστοιχα η $S(x)$) εχει ολες τις βασικες ιδιοτητες της γνωστης μας συναρτησης $\cos x$ (αντιστοιχα $\sin x$). Κατανοουμε λοιπον οτι

$$C(x) = \cos x \text{ και } S(x) = \sin x$$

και απο εδω και περα θα χρησιμοποιουμε τους συμβολισμους $\cos x$ και $\sin x$ αντι των $C(x)$ και $S(x)$. Στο εξης δε θεωρουμε δεδομενα τα παρακατω

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \text{ (εξ ορισμου)}, \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \text{ (εξ ορισμου)}, \\ e^{ix} &= \cos x + i \sin x, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \\ 1 &= \cos^2 x + \sin^2 x \end{aligned} \tag{4.12}$$

και ολες τις αλλες ιδιοτητες τις οποιες εχουμε αποδειξει παραπανω.

4.1.21. Σχετικα με την ταυτοτητα (4.12) αξιζει να σημειωθει και το εξης. Αν ορισουμε δυο μεταβλητες $x = \cos\phi$ και $y = \sin\phi$, απο την (4.12) εχουμε

$$\forall \phi : x^2 + y^2 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1.$$

Δηλαδη το συνολο σημειων

$$C = \{(x, y) : x = \cos\phi, y = \sin\phi, \phi \in [0, 2\pi)\}$$

ειναι ενας *κυκλος*. Σε αυτη την ιδιοτητα οφειλεται και η ονομασια «κυκλικες συναρτησεις» την οποια χρησιμοποιουμε για τις cos και sin.

4.1.22. Ορισμος. Οριζουμε στο $(-\infty, +\infty)$ (εκτος των σημειων στα οποια μηδενιζονται παρονομαστες) τις συναρτησεις

$$\begin{aligned} \textit{εφαπτομενη}\colon \ \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}, \\ \textit{συνεφαπτομενη}\colon \ \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x}, \\ \textit{τεμνουσα}\colon \sec x &= \frac{1}{\cos x}, \\ \textit{συντεμνουσα}\colon \ \csc x &= \frac{1}{\sin x}. \end{aligned}$$

4.1.23. Θεωρημα. Για καθε $x, y \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \qquad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε μονο το πρωτο. Εχουμε

$$\frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}\frac{\sin y}{\cos y}} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \tan(x+y).$$

4.1.24. Ασκηση. Αποδειξε οτι: για καθε $x, y \in (-\infty, +\infty)$ ισχυει:

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

4.1.25. Θεωρημα. Για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \\ \sin(2x) &= 2\sin x \cos y, \\ \cos(3x) &= 4\cos^3 x - 3\cos x, \\ \sin(3x) &= 3\sin x - 4\sin^3 x. \end{aligned}$$

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε μονο το πρωτο. Εχουμε

$$\begin{aligned} \cos(2x) = \cos(x+x) &= \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) = 2\cos^2 x - 1 \\ &= \left(1 - \sin^2 x\right) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x. \end{aligned}$$

4.1.26. Ασκηση. Αποδειξε οτι: για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x, \quad \sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

4.1.27. Θεωρημα. Για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε μονο το πρωτο. Ειναι αμεση συνεπεια του οτι $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$.

4.1.28. Ασκηση. Αποδειξε οτι: για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ισχυει:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

4.1.29. Θεωρημα. Για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\sin x = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}.$$

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε μονο το πρωτο. Εχουμε

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} = \sin x.$$

4.1.30. Θεωρημα. Για καθε $x, y \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} 2\cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y), \\ 2\sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y), \\ 2\sin x \cos y &= \sin(x+y) - \sin(x-y). \end{aligned}$$

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε μονο το πρωτο. Εχουμε

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y + \cos x \cos y - \sin x \sin y = 2\cos x \cos y.$$

4.1.31. Ασκηση. Αποδειξε οτι: για καθε $x, y \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} 2\sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\ 2\sin x \cos y &= \sin(x+y) - \sin(x-y) \end{aligned}$$

4.1.32. Θεωρημα. Για καθε $x, y \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ \sin x - \sin y &= 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right), \\ \cos x + \cos y &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ \cos x - \cos y &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε μονο το πρωτο. Θετουμε $A = \frac{x+y}{2}$, $B = \frac{x-y}{2}$. Τοτε εχουμε

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) &= \sin(A+B) + \sin(A-B) \\ &= \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \sin(x) + \sin(y). \end{aligned}$$

4.1.33. Ασκηση. Αποδειξε οτι: για καθε $x, y \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ \cos x - \cos y &= -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

4.1.34. Θεωρημα. Για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}.$$

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε μονο το πρωτο. Εχουμε

$$\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1+\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = \sin x.$$

4.1.35. Ασκηση. Αποδειξε οτι: για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ισχυει:

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}.$$

4.1.36. Ορισμος. Οριζουμε τις *αντιστροφες τριγωνομετρικες συναρτησεις* ως εξης

$$\begin{aligned}
&\forall x \in [-1,1] : \arcsin(x) = y \Leftrightarrow x = \sin(y) \text{ και } y \in [0,\pi]\,,\\
&\forall x \in [-1,1] : \arccos(x) = y \Leftrightarrow x = \cos(y) \text{ και } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\\
&\forall x \in (-\infty,+\infty) : \arctan(x) = y \Leftrightarrow x = \tan(y) \text{ και } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\\
&\forall x \in (-\infty,+\infty) : \operatorname{arccot}(x) = y \Leftrightarrow x = \cot(y) \text{ και } y \in (0,\pi)\,,\\
&\forall x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) : \operatorname{arcsec}(x) = y \Leftrightarrow x = \sec(y) \text{ και } y \in [0, \frac{\pi}{2}),\\
&\forall x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty) : \operatorname{arccsc}(x) = y \Leftrightarrow x = \csc(y) \text{ και } y \in (0, \frac{\pi}{2}].
\end{aligned}$$

4.1.37. Θεωρημα. Ισχυουν τα εξης:

$$\begin{aligned}
&\forall x \in (-1,1) : (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
&\forall x \in (-1,1) : (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
&\forall x \in (-\infty,+\infty) : (\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1},\\
&\forall x \in (-\infty,+\infty) : (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{x^2+1},\\
&\forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) : (\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\ ,\\
&\forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) : (\operatorname{arccsc} x)' = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.
\end{aligned}$$

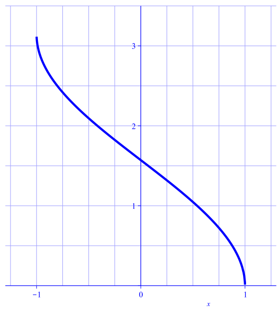
Αποδειξη. Αποδεικνυουμε μονο το πρωτο. Θετουμε $y = \arcsin x$ οποτε $x = \sin y$ και $\sqrt{1-x^2} = \cos y$. Τοτε

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx}\sin y = \cos y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

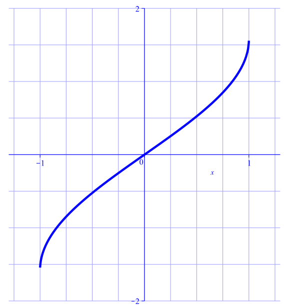
4.1.38. Ασκηση. Αποδειξε οτι ισχυουν τα εξης:

$$\begin{aligned}
&\forall x \in (-\infty,+\infty) : (\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1},\\
&\forall x \in (-\infty,+\infty) : (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{x^2+1},\\
&\forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) : (\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\ ,\\
&\forall x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) : (\operatorname{arccsc} x)' = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.
\end{aligned}$$

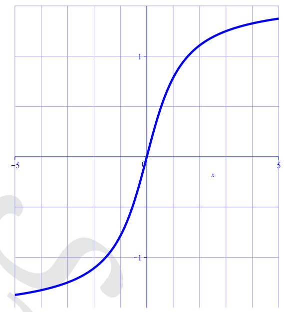
4.1.39. Παραδειγμα. Ας σχεδιασουμε την συναρτηση $\arccos x$. Παρατηρουμε οτι το πεδιο ορισμου της $\arccos x$ ειναι το $[-1,1]$ (γιατι;). Οποτε η γραφικη παρασταση της $\arccos x$ ειναι αυτη μιας *ημιπεριοδου* της $\cos x$ (γιατι;), καθρεφτισμενη γυρω απο την $y = x$ (γιατι;) οπως φαινεται στο Σχημα 4.1. Το πεδιο τιμων ειναι $[0,\pi]$.



Σχήμα 4.1



Σχήμα 4.2



Σχήμα 4.3

4.1.40. Παραδειγμα. Ας σχεδιασουμε την συναρτηση $\arcsin x$. Παρατηρουμε οτι το πεδιο ορισμου της $\arcsin x$ ειναι το $[-1,1]$ (γιατι;). Οποτε η γραφικη παρασταση της $\arcsin x$ ειναι αυτη μιας *ημιπεριοδου* της $\sin x$ (γιατι;), καθρεφτισμενη γυρω απο την $y = x$ (γιατι;) οπως φαινεται στο Σχημα 4.2. Το πεδιο τιμων ειναι $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4.1.41. Παραδειγμα. Ας σχεδιασουμε την συναρτηση $\arctan x$. Παρατηρουμε οτι το πεδιο ορισμου της $\arctan x$ ειναι το $(-\infty, \infty)$ (γιατι;). Οποτε η γραφικη παρασταση της $\arctan x$ ειναι αυτη της $\tan x$ (γιατι;), καθρεφτισμενη γυρω απο την $y = x$ (γιατι;) οπως φαινεται στο Σχημα 4.3. Το πεδιο τιμων ειναι $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4.1.42. Θεωρημα. Δειξε οτι ισχυουν:

$$\begin{aligned}
&\forall x \in [-1,1] : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \\
&\forall x \in [-1,1] : \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, \\
&\forall x \in (-\infty, +\infty) : \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε μονο το πρωτο. Εχουμε

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x + \arccos x) = 0$$

οποτε

$$\forall x : \arcsin x + \arccos x = c.$$

Θετοντας $x = 0$ παιρνουμε

$$c = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2}.$$

4.1.43. Ασκηση. Δειξε οτι ισχυει:

$$\forall x \in (-\infty, +\infty) : \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases} .$$

4.1.44. Θεωρημα: Ισχυουν τα εξης:

$$\begin{aligned}
&\forall x \in [-1,1] : \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \\
&\forall x \in [-1,1] : \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \\
&\forall x \in (-1,1) : \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \\
&\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\} : \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Θα δειξουμε μονο το πρωτο. Εχουμε

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y.$$

Τοτε $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$ και

$$\sin(\arccos x) = \sin y = \sqrt{1 - x^2}.$$

4.1.45. Ασκηση: Αποδειξε οτι

$$\forall x \in (-1, 1) : \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

4.1.46. Θεωρημα: Ισχυουν τα εξης:

$$x \in (-\infty, \infty) : \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$
$$x \in (-\infty, \infty) : \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Αποδειξη. Θα δειξουμε μονο το πρωτο. Εχουμε

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y.$$

Τοτε $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$ και

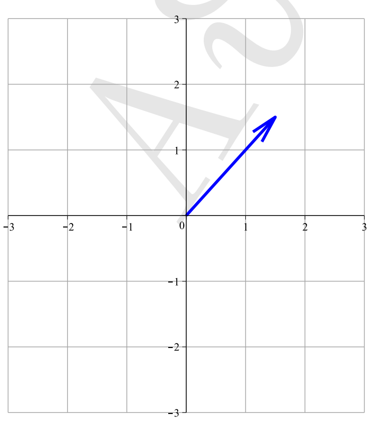
$$\sin(\arccos x) = \sin y = \sqrt{1 - x^2}.$$

4.1.47. Ασκηση. Δειξε οτι:

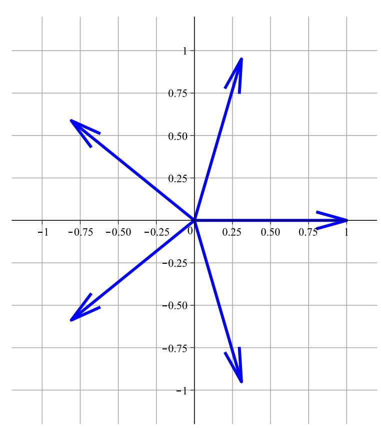
$$x \in (-\infty, \infty) : \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

4.1.48. *Οι κυκλικες συναρτησεις μπορουν να χρησιμοποιηθουν για να αποδειχθουν διαφορες ιδιοτητες των μιγαδικων αριθμων.*

4.1.49. Μια πολυ χρησιμη αναπαρασταση των μιγαδικων αριθμων ειναι σε *πολικη μορφη*. Πριν ορισουμε αυτη αυστηρα, δινουμε την γεωμετρικη της ερμηνεια. Ξερουμε ηδη οτι καθε μιγαδικος αριθμος $z = x + iy$ αντιστοιχει στο σημειο (x, y) του επιπεδου. Μπορουμε λοιπον να περιγραψουμε το (x, y) και αρα και τον $x + iy$ με δυο στοιχεια: (α) την αποσταση $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ απο την αρχη των αξονων και (β) την γωνια που σχηματιζει το ευθυγραμμο τμημα $0z$ με τον αξονα των x. Αυτα φαινονται στο Σχημα 4.4 και περιγραφονται απο το επομενο θεωρημα.



Σχήμα 4.4



Σχήμα 4.5

4.1.50. Θεωρημα. Ο μιγαδικος αριθμος $z = x + iy$ με $|z| \neq 0$ μπορει να γραφτει σε *πολικη μορφη* ως εξης:

$$z = \rho e^{i\phi}$$

οπου

$$\rho = |z| \text{ και } \quad \phi \text{ τετοιο ωστε } \begin{array}{l} \cos\phi = \frac{x}{|z|}, \\ \sin\phi = \frac{y}{|z|}. \end{array}$$

Το ρ ειναι το *μετρο* του z και το ϕ λεγεται *ορισμα* του z.
Αποδειξη. Η αποδειξη ειναι απλη αλλα χρειαζεται να εξετασουμε ξεχωριστα τους εξης συνδυασμους περιπτωσεων:

$x > 0$	$y \geq 0$
$x = 0$	$y \geq 0$
$x < 0$	$y \geq 0$
$x > 0$	$y < 0$
$x = 0$	$y < 0$
$x < 0$	$y < 0$

Θα δουμε μερικους εξ αυτων· οι υπολοιποι αφηνονται στον αναγνωστη.

1. Αν $z = x + iy$, $x > 0$ και $y \geq 0$ θετουμε $\phi = \arccos\frac{x}{|z|}$. Θα ισχυει $\phi \in [0, \frac{\pi}{2})$ οποτε θα εχουμε $\cos\phi = \frac{x}{|z|}$ και $\sin\phi = \frac{y}{|z|}$ και θα εχουμε
$$z = x + iy = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = \rho e^{i\phi}.$$

2. Αν $z = iy$, $x = 0$ και $y \geq 0$ θετουμε $\phi = \frac{\pi}{2}$. Τοτε εχουμε
$$z = iy = |y|\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = |z|\,e^{i\frac{\pi}{2}} = \rho e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

3. Αν $z = x + iy$, $x < 0$ και $y < 0$ θετουμε $\phi = \arcsin\frac{y}{|z|}$. Θα ισχυει $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ και
$$\phi = \arccos\frac{x}{|z|} - \pi.$$
Οποτε θα εχουμε $\sin\phi = \frac{y}{|z|}$ και
$$\cos\phi = \cos\left(\arccos\frac{x}{|z|} - \pi\right) = \cos\left(\arccos\frac{x}{|z|}\right) = \frac{x}{|z|}.$$
Και ετσι θα ειναι
$$z = x + iy = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) = |z|(\cos\phi + i\sin\phi) = \rho e^{i\phi}.$$

4. Με παρομοιο τροπο εξεταζουμε τους υπολοιπους συνδυασμους.

4.1.51. Παραδειγμα. Ο μιγαδικος αριθμος $z = 1 + i$ γραφεται σε πολικη μορφη ως εξης:

$$1 + i = \sqrt{1 + 1^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} + i\frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}.$$

Δηλ. $1 + i = \rho e^{i\phi}$ με $\rho = \sqrt{2}$ και $\phi = \frac{\pi}{4}$.

4.1.52. Ασκηση. Γραψε τον $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ σε πολικη μορφη.

4.1.53. Θεωρημα. Αν $z_1 = \rho_1 e^{i\phi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\phi_2}$ τοτε

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}, \quad z_1^n = \rho_1^n e^{in\phi_1}.$$

Αποδειξη. Αποδεικνυουμε μονο το πρωτο.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\phi_1} \rho_2 e^{i\phi_2} &= \rho_1 \rho_2 \left(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1\right)\left(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2\right) \\ &= \rho_1\rho_2 \left(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 + i\cos\phi_1\sin\phi_2 + i\cos\phi_2\sin\phi_1\right) \\ &= \rho_1\rho_2\left(\cos\left(\phi_1+\phi_2\right) + i\sin\left(\phi_1+\phi_2\right)\right) = \rho_1\rho_2 e^{i(\phi_1+\phi_2)}. \end{aligned}$$

4.1.54. Ασκηση. Δειξε οτι: αν $z = \rho e^{i\phi}$ τοτε $z^n = \rho^n e^{in\phi}$.

4.1.55. Απο τα παραπανω προκυπτει ενας πολυ χρησιμος τυπος για τον υπολογισμο τριγωνομετρικων αριθμων πολλαπλασιων τοξων.

4.1.56. Θεωρημα. Για καθε $\phi \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ισχυει

$$\cos(n\phi) + i\sin(n\phi) = (\cos\phi + i\sin\phi)^n.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

4.1.57. Παραδειγμα. Για να υπολογισουμε τυπους για τα $\cos 3\phi$ και $\sin 3\phi$ παιρνουμε

$$\cos 3\phi + i\sin 3\phi = (\cos\phi + i\sin\phi)^3 = \cos^3\phi + 3i\cos^2\phi\sin\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi - i\sin^3\phi$$

οποτε, διαχωριζοντας το πραγματικο και φανταστικο μερος της ισοτητας, εχουμε

$$\cos 3\phi = \cos^3\phi - 3\cos\phi\sin^2\phi, \quad \sin 3\phi = 3\cos^2\phi\sin\phi - \sin^3\phi.$$

4.1.58. Ασκηση. Βρες τυπους για τα $\cos 5\phi$ και $\sin 5\phi$.

4.1.59. Ολοκληρωνουμε το παρον κεφαλαιο με ενα θεωρημα σχετικα με τις N-στες *ριζες της μοναδας.*

4.1.60. Θεωρημα. Για $n \in \mathbb{N}$ η εξισωση

$$z^N = 1$$

εχει ακριβως τις εξης N διακριτες ριζες:

$$z_n = e^{i\frac{2n\pi}{N}}, \quad n \in \{0, 1, ..., N-1\}.$$

Αποδειξη. Καταρχην, επαληθευεται ευκολα οτι:

$$\forall n \in \{0, 1, ..., N-1\} : \left(e^{i\frac{2n\pi}{N}}\right)^N = e^{i2n\pi} = \cos(2n\pi) + i\sin(2n\pi) = 1 + 0i = 1.$$

Γενικοτερα, για καθε $n \in \mathbb{N}$, εχουμε

$$z^N = 1 = e^{i2n\pi} \Rightarrow z = \left(e^{i2n\pi}\right)^{1/N} = \left(\cos(2n\pi) + i\sin(2n\pi)\right)^{1/N} = \cos\left(2\frac{n}{N}\pi\right) + i\sin\left(2\frac{n}{N}\pi\right).$$

Φαινεται οτι εχουμε απειρια λυσεων. Αλλα παρατηρουμε οτι

$$\forall n' \in \mathbb{N} : \exists n \in \{0, 1, ..., N-1\}, k \in \mathbb{N} : n' - n = kN$$

οποτε

$$\forall n' \in \mathbb{N} : \exists n \in \{0, 1, ..., N-1\}, k \in \mathbb{N} : e^{i\frac{2n'\pi}{N}} = e^{i\frac{(n+kN)2\pi}{N}} = e^{i\frac{2n\pi}{N}} e^{i\frac{kN2\pi}{N}} = e^{i\frac{2n\pi}{N}} e^{i2k\pi} = e^{i\frac{2n\pi}{N}}.$$

Δηλαδη καθε μια απο τις απειρες ριζες ειναι ιση με μια απο τις ριζες που ανηκουν στο συνολο

$$\left\{e^{i\frac{n2\pi}{N}}\right\}_{n\in\{0,1,...,N-1\}}$$

και αρα υπαρχουν ακριβως N διακριτες ριζες της $z^N = 1$.

4.1.61. Παραδειγμα. Η εξισωση $z^3 = 1$ εχει ριζες

$$\begin{aligned}
z_0 &= e^{i\frac{2\cdot 0\cdot \pi}{3}} = \cos(0) + i\sin(0) = 1,\\
z_1 &= e^{i\frac{2\cdot 1\cdot \pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
z_2 &= e^{i\frac{2\cdot 2\cdot \pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Αυτο προκυπτει αμεσα απο το προηγουμενο θεωρημα και μπορει να επαληθευθει εκτελωντας τις πραξεις. Μπορουμε επισης να το λαβουμε χωρις χρηση του θεωρηματος. Διοτι

$$z^3 = 1 \Rightarrow z^3 - 1 = 0 \Rightarrow (z-1)\left(z^2 + z + 1\right) = 0$$

της οποιας οι λυσεις ειναι αυτες των

$$z - 1 = 0 \text{ και } z^2 + z + 1 = 0.$$

Η $z - 1 = 0$ εχει μοναδικη ριζα την $z_0 = 1$. Για την $z^2 + z + 1 = 0$ εφαρμοζουμε τους τυπους της διωνυμικης εξισωσης:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3$$

και

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-b+\Delta}{2a} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
z_2 &= \frac{-b-\Delta}{2a} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Μπορουμε να σχεδιασουμε τις τρεις ριζες, οπως φαινεται στο Σχημα 4.5.

Επειδη

$$z^3 = 1 \ \Rightarrow |z|^3 = \left|z^3\right| = |1| = 1$$

οι ριζες εχουν μετρο $|z_0| = |z_1| = |z_2| = 1$, οποτε ολες βρισκονται επι του μοναδιαιου κυκλου. Επειδη

$$z_1 = e^{i2\pi/3} = z_0 e^{i2\pi/3}$$

το ευθυγραμμο τμημα $0z_1$ ειναι το $0z_0$ περιστραμμενο αντιωρολογιακα κατα $\frac{2\pi}{3}$· ομοιως το ευθυγραμμο τμημα $0z_2$ ειναι το $0z_1$ περιστραμμενο αντιωρολογιακα κατα $\frac{2\pi}{3}$· τελος, επειδη

$$z_0 = e^{i2\pi} = e^{i2\pi/3}e^{i4\pi/3} = e^{i2\pi/3}z_2$$

το ευθυγραμμο τμημα $0z_0$ ειναι το $0z_2$ περιστραμμενο αντιωρολογιακα κατα $\frac{2\pi}{3}$. Δηλαδη οι τρεις ριζες ειναι οι κορυφες ενος ισοπλευρου τριγωνου εγγεγραμμενου στον μοναδιαιο κυκλο!

4.1.62. Ασκηση. Υπολογισε και σχεδιασε τις ριζες της εξισωσης $z^5 = 1$.

4.2 Λυμενα Προβληματα

4.2.1. Αποδειξε οτι $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\sin x\cos y + \cos x\sin y &= \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\cdot\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\\
&= \frac{e^{i(x+y)} - e^{i(-x+y)} + e^{i(x-y)} - e^{-i(x+y)}}{4i} + \frac{e^{i(x+y)} + e^{i(-x+y)} - e^{i(x-y)} - e^{-i(x+y)}}{4i}\\
&= \frac{2e^{i(x+y)} - 2e^{-i(x+y)}}{4i} = \sin(x+y).
\end{aligned}$$

4.2.2. Αποδειξε οτι $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
2\sin x\cos x &= 2\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\
&= \frac{e^{ix+ix}-e^{-ix}e^{ix}+e^{ix-ix}-e^{-ix-ix}}{2i}\\
&= \frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i} = \sin 2x.
\end{aligned}$$

4.2.3. Αποδειξε οτι $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
e^{i3x} &= \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos x + i\sin x)^3\\
&= \cos^3 x + 3\cos^2 x\,(i\sin x) + 3\cos x\,(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3\\
&= \left(\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x\right) + i\left(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\right).
\end{aligned}$$

Οποτε

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left(e^{i3x}\right) = \operatorname{Im}(\cos 3x + i\sin 3x) &= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x \Rightarrow\\
\sin 3x = 3\left(1-\sin^2 x\right)\sin x - \sin^3 x &= 3\sin x - 4\sin^3 x.
\end{aligned}$$

4.2.4. Αποδειξε οτι $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$.
Λυση. Ειναι αμεση συνεπεια του $\cos 2x = 1 - \sin^2 x$.

4.2.5. Αποδειξε οτι $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$.
Λυση. Εχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos x}} = \cos x.$$

4.2.6. Αποδειξε οτι $2\sin x\cos y = \sin(x-y) + \sin(x-y)$.
Λυση. Εχουμε

$$\sin(x-y)+\sin(x-y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y + \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y.$$

4.2.7. Αποδειξε οτι $\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
Λυση. Θετουμε $A = \frac{x+y}{2}$, $B = \frac{x-y}{2}$, οποτε

$$\begin{aligned}
A+B &= x,\\
A-B &= y.
\end{aligned}$$

Τοτε

$$\begin{aligned}
\sin x - \sin y &= \sin(A+B) - \sin(A-B)\\
&= \sin A\cos B + \cos A\sin B - (\sin A\cos B - \cos A\sin B)\\
&= 2\cos A\sin B = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).
\end{aligned}$$

4.2.8. Αποδειξε οτι $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\cos x &= \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}\\
&= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos x.
\end{aligned}$$

4.2.9. Υπολογισε τις παραγωγους.

1. $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}x\right).$
2. $\frac{d}{dx}\left(\sin\left(x^3+7e^x\right)\right).$
3. $\frac{d}{dx}(\cot x).$
4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^3 x}{\ln x}\right).$

Λυση. Εχουμε

1. $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}x\right)=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}.$
2. $\frac{d}{dx}\left(\sin\left(x^3+7e^x\right)\right)=\left(\cos\left(7e^x+x^3\right)\right)\left(7e^x+3x^2\right).$
3. $\frac{d}{dx}(\cot x)=-\cot^2 x-1.$
4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^3 x}{\ln x}\right)=\frac{1}{4x\ln^2 x}\left(-12x\ln x\cos^3 x+12x\ln x\cos x-3\sin x+\sin 3x\right).$

4.2.10. Υπολογισε τα ορια

1. $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}.$
2. $\lim_{x\to1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right).$
3. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$
4. $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}.$

Λυση. Εχουμε

1. $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\frac{\lim_{x\to0}(\tan x)'}{\lim_{x\to0}(x)'}=\frac{\lim_{x\to0}\left(\tan^2 x+1\right)}{\lim_{x\to0}(1)}=1.$
2. $\lim_{x\to1}(1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\frac{\lim_{x\to0}(1-x)'}{\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right)'}=\frac{\lim_{x\to0}(-1)}{\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\frac{\pi}{\tan^2\frac{1}{2}\pi x}\left(\tan^2\frac{1}{2}\pi x+1\right)\right)}=\frac{2}{\pi}.$
3. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\lim_{x\to0}(1-\cos x)'}{\lim_{x\to0}(x^2)'}=\frac{\lim_{x\to0}(\sin x)}{\lim_{x\to0}(2x)}=\frac{\lim_{x\to0}(\cos x)}{\lim_{x\to0}(2)}=\frac{1}{2}.$
4. $\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}=\frac{\lim_{x\to0}(\tan x-\sin x)'}{\lim_{x\to0}(x^2)'}=\frac{\lim_{x\to0}\left(\tan^2 x+1-\cos x\right)}{\lim_{x\to0}(2x)}=\frac{\lim_{x\to0}\left(\tan^2 x+1-\cos x\right)'}{\lim_{x\to0}(2x)'}=0.$

4.2.11. Βρες προσεγγιστικα την τιμη του $\sin\left(1^0\right)$ χρησιμοποιωντας το διαφορικο. Το ιδιο και για την τιμη του $\cos\left(61^0\right)$ και του $\cos\left(44^0\right)$.
Λυση. Καταρχην τονιζουμε οτι στις τριγωνομετρικες συναρτησεις το ορισμα x μετραται σε *ακτινια*. Αρα πρεπει να μετατρεψουμε την 1^0 σε ακτινια. Εχουμε

$$\frac{x}{\pi}=\frac{1^0}{180^0}\Rightarrow x=1.7453\times10^{-2}.$$

Οποτε

$$\begin{aligned}\sin\left(1^0\right)&=\sin\left(1.745\,3\times10^{-2}\right)\approx\sin(0)+\sin'(0)\cdot1.745\,3\times10^{-2}\\&=\sin(0)+\cos(0)\cdot1.745\,3\times10^{-2}\approx1.7453\times10^{-2}.\end{aligned}$$

Αντιστοιχα

$$\cos\left(61^0\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 1.745\,3\times 10^{-2}\right) \approx \cos(\pi/3) - \sin(\pi/3)\cdot 1.745\,3\times 10^{-2}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1.745\,3\times 10^{-2} \approx 0.48489.$$

Τελος

$$\cos\left(44^0\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 1.745\,3\times 10^{-2}\right) \approx \cos(\pi/4) - \sin(\pi/4)\cdot 1.745\,3\times 10^{-2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1.745\,3\times 10^{-2} \approx 0.69477.$$

4.2.12. Αποδειξε οτι, για $x \in [0, \pi/2]$, ισχυει $\sin x \le x$.
Λυση. Θετουμε $f(x) = \sin x - x$. Εχουμε

$$f'(x) = (\sin x - x)' = \cos x - 1.$$

Τοτε για καθε $x \in [0, \pi/2]$ εχουμε $f'(x) \le 0$ και η $f(x)$ ειναι φθινουσα, οποτε

$$\forall x \in [0, \pi/2] : \sin x - x = f(x) \le f(0) = 0 \Rightarrow \sin x \le x.$$

4.2.13. Βρες τα διαστηματα στα οποια ειναι μονοτονη η $f(x) = \sin x + \cos x$.
Λυση. Παρατηρουμε οτι

$$f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\sin x + \sqrt{2}\cos x}{2}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Οποτε η $f(x)$ εχει μεγιστο το $\sqrt{2}$, στα σημεια $\overline{x}_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ και ελαχιστο το $-\sqrt{2}$, στα σημεια $\widehat{x}_n = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (οπου $n \in \mathbb{Z}$).

4.2.14. Βρες και χαρακτηρισε τα στασιμα σημεια της $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$.
Λυση. Εχουμε $f'(x) = \frac{d}{dx}(2\sin x + \cos 2x) = 2\cos x - 2\sin 2x$. Για να βρουμε τις ριζες της $f'(x)$ λυνουμε την

$$2\cos x - 2\sin 2x = 0 \Rightarrow \cos x = \sin 2x = 2\sin x\cos x \Rightarrow \begin{matrix}\cos x = 0\\ \text{η}\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{matrix}.$$

Αρα οι λυσεις ειναι της μορφης

$$\overline{x}_k = \frac{1}{2}\pi + \pi k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$
$$\widehat{x}_k = \frac{1}{6}\pi + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z},$$
$$\widetilde{x}_k = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Η δευτερη παραγωγος ειναι

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(2\cos x - 2\sin 2x) = -2\sin x - 4\cos 2x.$$

Οποτε εχουμε

$$f''(\overline{x}_k) = -2\sin\left(\frac{1}{2}\pi + \pi k\right) - 4\cos(\pi + 2k\pi)$$
$$= \pm 2 + 4 > 0$$

το οποιο σημαινει οτι στα $\overline{x}_k$ εχουμε τοπικο ελαχιστο. Επισης

$$\begin{aligned} f''\left(\widehat{x}_k\right) &= -2\sin\left(\frac{1}{6}\pi + 2\pi k\right) - 4\cos\left(\frac{1}{3}\pi + 4\pi k\right) \\ &= -2\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) - 4\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) < 0 \end{aligned}$$

το οποιο σημαινει οτι στα $\widehat{x}_k$ εχουμε τοπικο μεγιστο. Τελος

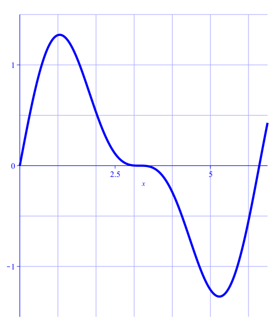
$$f''\left(\widetilde{x}_k\right) = -2\sin\left(\frac{5}{6}\pi + 2\pi k\right) - 4\cos\left(\frac{5}{3}\pi + 4\pi k\right) = -2\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) - 4\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -3 < 0$$

το οποιο σημαινει οτι στα $\widetilde{x}_k$ εχουμε τοπικο μεγιστο.

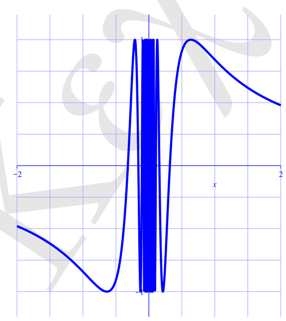
4.2.15. Κανε την γραφικη παρασταση της $f\left(x\right) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$.
Λυση. Προφανως η $f\left(x\right)$ εχει περιοδο 2π. Θα κανουμε την γραφικη παρασταση για το διαστημα $[0, 2\pi]$. Εχουμε $f'\left(x\right) = \cos x + \cos 2x$ με τρεις ριζες $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{5\pi}{3}$ στο διαστημα $[0, 2\pi]$. Η μονοτονια της συναρτησης ειναι ως εξης.

x	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$
$f'\left(x\right)$	θετικη	αρνητικη	αρνητικη	θετικη
$f\left(x\right)$	αυξουσα	φθινουσα	φθινουσα	αυξουσα

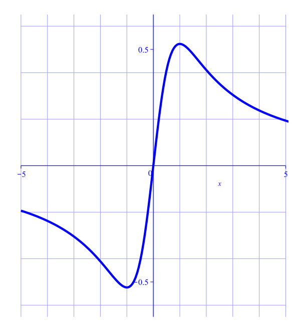
Κατα συνεπεια η γραφικη παρασταση εχει τη μορφη του Σχηματος 4.6.



Σχήμα 4.6



Σχήμα 4.7



Σχήμα 4.8

4.2.16. Κανε την γραφικη παρασταση της $f\left(x\right) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Λυση. Προφανως η γραφικη παρασταση εχει την μορφη του Σχηματος 4.5.

4.2.17. Υπολογισε την $(\arcsin x)'$.
Λυση. Εχουμε

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y,$$

Απο το οποιο εχουμε επισης $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. Τωρα

$$\frac{dx}{dy} = \cos y \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4.2.18. Υπολογισε την $(\arctan x)'$.
Λυση. Εχουμε

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y,$$

Απο το οποιο εχουμε επισης $\cos y = \sqrt{1+x^2}$. Τωρα

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} \Rightarrow (\arctan x)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+x^2}.$$

4.2.19. Υπολογισε τις $\left(\arcsin^3 x\right)'$, $\left(\arcsin\left(x^3\right)\right)'$, $\left(\ln\left(\arctan x\right)\right)'$.
Λυση. Εχουμε

1. $\frac{d}{dx}\left(\arcsin^3 x\right) = 3\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $\frac{d}{dx}\left(\arcsin\left(x^3\right)\right) = 3\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$.
3. $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\arctan x\right)\right) = \frac{1}{(\arctan x)(x^2+1)}$.

4.2.20. Υπολογισε το $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{\sin x - x}$.
Λυση. Εχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x - x}{\sin x - x} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\arctan x - x\right)'}{\lim_{x\to 0}\left(\sin x - x\right)'} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right)'}{\lim_{x\to 0}\left(\cos x - 1\right)'}$$
$$= \frac{\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(-\sin x\right)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\right)\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x} = 2.$$

4.2.21. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = \arcsin\frac{x}{1+x^2}$.
Λυση. Εχουμε

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^4+x^2+1}}.$$

Λυνοντας την εξισωση $f'(x) = 0$ βρισκουμε δυο ριζες $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Η μονοτονια της συναρτησης ειναι ως εξης.

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	αρνητικη	θετικη	αρνητικη
$f(x)$	φθινουσα	αυξουσα	φθινουσα

Κατα συνεπεια η γραφικη παρασταση εχει τη μορφη του Σχηματος ;;.

4.2.22. Βρες την πολικη μορφη του $z = \sqrt{3} - i$.
Λυση. Εχουμε $\rho = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$ και $\phi = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}\pi$. Οποτε $z = 2e^{i(-\pi/6)} = \sqrt{3} - i$.

4.2.23. Εστω z_1, z_2, z_3 οι κορυφες ενος ισοπλευρου τριγωνου. Δειξε οτι

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1\left(z_2 + z_3\right).$$

Λυση. Επειδη τα z_1, z_2, z_3 οι κορυφες ενος ισοπλευρου τριγωνου ικανοποιουν

$$z_3 - z_1 = e^{i\pi/3}\left(z_2 - z_1\right),$$
$$z_1 - z_2 = e^{i\pi/3}\left(z_3 - z_2\right).$$

Διαιρωντας κατα μελη παιρνουμε

$$\frac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} \Rightarrow \left(z_3 - z_1\right)\left(z_3 - z_2\right) = \left(z_1 - z_2\right)\left(z_2 - z_1\right)$$

και εκτελωντας τις πραξεις παιρνουμε το ζητουμενο.

4.2.24. Δειξε οτι

$$\cos\frac{2\pi}{N} + \cos\frac{4\pi}{N} + ... + \cos\frac{2\left(N-1\right)\pi}{N} = -1.$$

Λυση. Η εξισωση $z^N - 1 = 0$ εχει ριζες $z_n = e^{i\frac{2n\pi}{N}}$ $(n \in \{0, ..., N-1\})$. Τοτε

$$z^N - 1 = \left(z - z_0\right)\left(z - z_1\right)...\left(z - z_{N-21}\right) = z^N - \left(z_0 + z_1 + ... + z_{N-1}\right)z^{N-1} + ...$$

Αρα

$$
\begin{aligned}
&0 = z_0 + z_1 + ... + z_{N-1} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{N}} + e^{i\frac{4\pi}{N}} + ... + e^{i\frac{(N-1)\pi}{N}} \Rightarrow \\
&0 = \mathrm{Re}\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{N}} + e^{i\frac{4\pi}{N}} + ... + e^{i\frac{(N-1)\pi}{N}}\right) \Rightarrow \\
&0 = 1 + \cos\frac{2\pi}{N} + \cos\frac{4\pi}{N} + ... + \cos\frac{2(N-1)\pi}{N}
\end{aligned}
$$

το οποιο δινει το ζητουμενο.

4.2.25. Δειξε οτι

$$\left|\sin\frac{\pi}{N}\sin\frac{2\pi}{N}...\sin\frac{(N-1)\pi}{N}\right| = \frac{N}{2^{N-1}}.$$

Λυση. Με z_n να ειναι οι N-στες ριζες της μοναδας, και παρομοια με το προηγουμενο προβλημα, παιρνουμε

$$1 + z + ... + z^{N-1} = (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_{N-1}).$$

Θετοντας $z = 1$ λαμβανουμε

$$
\begin{aligned}
N &= (1 - z_1)(1 - z_2)...(1 - z_{N-1}), \\
\overline{N} &= \overline{(1 - z_1)(1 - z_2)...(1 - z_{N-1})}.
\end{aligned}
$$

Πολλαπλασιαζοντας κατα μελη λαμβανουμε

$$N^2 = |1 - z_1|^2 |1 - z_2|^2 ... |1 - z_{N-1}|^2.$$

Ομως, για τυχον n ισχυει

$$|1 - z_n|^2 = \left|1 - e^{i\frac{2n\pi}{N}}\right|^2 = \left|1 - \cos\frac{2n\pi}{N} - i\sin\frac{2n\pi}{N}\right|^2 = ... = 2\left(1 - \cos\frac{2n\pi}{N}\right) = 2\sin^2\frac{n\pi}{N}$$

οποτε

$$N^2 = 2^{2(N-2)}\sin^2\frac{\pi}{N}\sin^2\frac{2\pi}{N}...\sin^2\frac{(N-1)\pi}{N}$$

το οποιο δινει το ζητουμενο.

4.3 Αλυτα Προβληματα

4.3.1. Αποδειξε τους παρακατω τυπους.

1. $\sec x = \frac{\csc x}{\sqrt{\csc^2 x - 1}}$.
2. $\sec x = \frac{\sqrt{1+\cot^2 x}}{\cot x}$.
3. $\csc x = \frac{\sec x}{\sqrt{\sec^2 x - 1}}$.
4. $\csc x = \sqrt{1 + \cot^2 x}$.

4.3.2. Αποδειξε τους παρακατω τυπους.

1. $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$.
2. $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$.

4.3.3. Αποδειξε τους παρακατω τυπους.

1. $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$.

2. $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

4.3.4. Υπολογισε τις παραγωγους.

1. $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\sin x\right)$. *Απ.* $e^{x^2}\left(\cos x + 2x\sin x\right)$.

2. $\frac{d}{dx}\left(\tan\left(x^3+7e^x\right)\right)$. *Απ.* $\left(7e^x+3x^2\right)\left(\tan^2\left(7e^x+x^3\right)+1\right)$.

3. $\frac{d}{dx}\left(\cot\frac{x}{x^2+1}\right)$. *Απ.* $\left(\cot^2\frac{x}{x^2+1}+1\right)\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

4. $\frac{d}{dx}\left(\cos\left(\ln\left(x+1\right)\right)\right)$. *Απ.* $-\frac{\sin(\ln(x+1))}{x+1}$.

5. $\frac{d}{dx}\left(\sin^3\left(x^2+1\right)\right)$. *Απ.* $-6x\left(\cos\left(x^2+1\right)\right)\left(\frac{1}{2}\cos\left(2x^2+2\right)-\frac{1}{2}\right)$.

4.3.5. Υπολογισε τα ορια

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^2}{x^4}$. *Απ.* $+\infty$.

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^4}{x^2}$. *Απ.* 0.

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ *Απ.* $-\frac{1}{2}$.

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^2-\sin x^2}{x^6}$. *Απ.* $\frac{1}{2}$.

5. $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin x}}{x}$. *Απ.* -1.

4.3.6. Υπολογισε προσεγγιστικα (με χρηση του διαφορικου, χωρις χρηση υπολογιστη) την $\tan\left(46^0\right)$ και την $\tan\left(44^0\right)$. (*Απ.* 1.0354 και 0.96567).

4.3.7. Υπολογισε το $\sin\left(10^0\right)$ και την $\tan\left(5^0\right)$ με ακριβεια 10^{-3} χωρις χρηση υπολογιστη.

4.3.8. Εξετασε την συνεχεια της συναρτησης $f(x) = \cot\left(\frac{1}{x}\right)$.

4.3.9. Εξετασε την συνεχεια της συναρτησης $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

4.3.10. Βρες και χαρακτηρισε τα στασιμα σημεια της $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ στο $[-\pi,\pi]$.

4.3.11. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = \sin x\cos x$.

4.3.12. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = \sin x + \cos 3x$.

4.3.13. Βρες την $\frac{dy}{dx}$ οταν $y = f\left(\cos^2 x\right) + f\left(\sin^2 x\right)$.

4.3.14. Αποδειξε οτι $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ και $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$.

4.3.15. Υπολογισε τις παραγωγους.

1. $\frac{d}{dx}\left(\arcsin^2 x\right)$. *Απ.* $2\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. $\frac{d}{dx}\left(\arcsin\left(x^3+1\right)\right)$. *Απ.* $3\frac{x^2}{\sqrt{-x^3(x^3+2)}}$.

3. $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\arccos x\right)\right)$. *Απ.* $-\frac{1}{(\arccos x)\sqrt{1-x^2}}$.

4.3.16. Υπολογισε το $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x^2-x^2}{\sin x - x}$. *Απ.* 0.

4.3.17. Βρες τις $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ οταν $x - y + \arctan y = 0$.

4.3.18. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

4.3.19. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = \frac{1}{x} \arctan x$.

4.3.20. Αποδειξε οτι η $\arcsin x + \arccos x$ ειναι σταθερη και βρες την τιμη της.

4.3.21. Αποδειξε οτι η $\arcsin x + \arcsin(-x)$ ειναι σταθερη και βρες την τιμη της.

4.3.22. Υπολογισε την ακριβη τιμη της $\tan(\operatorname{arccot} 5)$.

4.3.23. Αποδειξε οτι, με $x \in [0,1]$, ισχυει $\arcsin x = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\right)$. .

4.3.24. Υπολογισε την ακριβη τιμη της $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

4.3.25. Εστω οτι $x > 0$ και $y > 0$. Τοτε $\arcsin x + \arcsin y = \arccos(A)$. Βρες το A.

4.3.26. Αποδειξε οτι:

$$\forall x, y \in (0,1) : \arcsin x + \arcsin y = \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right).$$

4.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

4.4.1. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ χωρις χρηση του κανονα $l'Hospital$.

4.4.2. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ και $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ χωρις χρηση του κανονα $l'Hospital$.

4.4.3. Αποδειξε οτι, για $x \in (0, \pi/2)$, ισχυει $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$.

4.4.4. Εστω οτι $x + y + z + u = \pi$. Αποδειξε οτι

$$\sin(x+y)\sin(x+u) = \sin x \sin z + \sin u \sin y = \sin(x+y)\sin(y+z).$$

4.4.5. Βρες τα διαστηματα στα οποια ειναι μονοτονη η $f(x) = \cos x - x$.

4.4.6. Βρες τα διαστηματα στα οποια ειναι μονοτονη η $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

4.4.7. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x \arctan \frac{1}{x}$.

4.4.8. Κανε την γραφικη παρασταση της

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2 \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

4.4.9. Αποδειξε οτι η συναρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

δεν ειναι μονοτονη σε κανενα διαστημα $[a,b]$ με $a < 0 < b$.

4.4.10. Αποδειξε οτι η συναρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \left(2 - \sin \frac{1}{x}\right)|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

εχει ελαχιστο στο $x = 0$, αλλα δεν ειναι μονοτονη σε κανενα διαστημα $[a,b]$ με $0 < a < b$ ή $a < b < 0$.

4.4.11. Βρες και χαρακτηρισε τα στασιμα σημεια της $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ στο $[-\pi, \pi]$.

4.4.12. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ τετοια ωστε $f''(x) + f(x) = 0$.

4.4.13. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ εχουμε $(\sin x)^{\sin x} < (\cos x)^{\cos x}$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

4.4.14. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ εχουμε $(\sin x)^{\sin x} > (\cos x)^{\cos x}$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

4.4.15. Δειξε οτι $\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x-y)\sin(x+y)$.

4.4.16. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση

$$\forall x, y \in (0,1) : f\left(xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\right) = f(x) + f(y).$$

4.4.17. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση

$$\forall x, y \in (0,1) : f\left(x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2}\right) = f(x) + f(y).$$

4.4.18. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση

$$\forall x, y \in (0,+\infty) : f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = f(x) + f(y).$$

4.4.19. Η εξισωση $\sin(\cos x) = \cos(\sin x)$ δεν εχει καμμια λυση. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

4.4.20. Δειξε οτι $|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|$.

4.4.21. Υπαρχει ακριβως μια συνεχης συναρτηση $x(y)$ η οποια ικανοποιει την εξισωση $x - \varepsilon \sin x = y$ (οπου $\varepsilon \in (0,1)$). Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

4.4.22. Αποδειξε οτι: αν για καποιο θ ισχυει $\sin\theta + \cos\theta \leq 0$, τοτε ισχυει και $\sin^{2015}\theta + \cos^{2015}\theta \leq 0$. Ισχυει και $\sin^{2014}\theta + \cos^{2014}\theta \leq 0$;

4.4.23. Αποδειξε οτι: αν η $f(x) = \sin x + \cos \kappa x$ ειναι περιοδικη, τοτε $\kappa \in \mathbb{Q}$.

4.4.24. Αποδειξε οτι: αν για καποιο θ ο αριθμος $\sin\theta + \cos\theta$ ειναι ρητος, τοτε το ιδιο ισχυει και για τον $\sin^n\theta + \cos^n\theta$ (για καθε $n \in \mathbb{N}$).

4.4.25. Ισχυει οτι $\cos(1^o) \in \mathbb{Q}$;

4.4.26. Αν $\sin x \cos y = -\frac{1}{2}$ τι τιμες μπορει να παρει το $\cos x \sin y$;

4.4.27. Ποια ειναι η μεγιστη τιμη του $(\sin x + a\cos x)(\sin x + b\cos x)$;

4.4.28. Βρες ολα τα x για τα οποια $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x\} = \{\cos x, \cos 2x, \cos 3x\}$.

4.4.29. Εστω τριγωνο με πλευρες a, b, c και απεναντι γωνιες A, B, C. Βρες τα x για τα οποια $a^x \cos A + b^x \cos B + c^x \cos C \leq \frac{1}{2}(a^x + b^x + c^x)$.

4.4.30. Εστω τριγωνο με γωνιες A, B, C. Δειξε οτι

$$-2 \leq \sin(3A) + \sin(3B) + \sin(3C) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Ποτε ισχυουν οι ισοτητες;

4.4.31. Δειξε οτι

$$\sin 25^o + \sin 35^o = \sin 85^o$$

(οι γωνιες μετρουνται σε μοιρες).

4.4.32. Δειξε οτι

$$\cos 5^o + \cos 67^o + \cos 77^o = \cos 31^o + \cos 41^o$$

(οι γωνιες μετρουνται σε μοιρες).

5 Υπερβολικες Συναρτησεις

Οι υπερβολικες τριγωνομετρικες συναρτησεις οριζονται παρομοια με τις κυκλικες και εχουν πολλες αναλογες ιδιοτητες.

5.1 Θεωρια και Παραδειγματα

5.1.1. Ορισμος. Οριζουμε (κατ΄ αντιστοιχια των κυκλικων) στο $(-\infty,+\infty)$ τις *υπερβολικες συναρτησεις*:

$$\textit{Υπερβολικο συνημιτονο}: \cosh x = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\textit{Υπερβολικο ημιτονο}: \sinh x = x+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{5!}+... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\textit{Υπερβολικη εφαπτομενη}: \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

$$\textit{Υπερβολικη συνεφαπτομενη}: \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x},$$

$$\textit{Υπερβολικη τεμνουσα}: \sec hx = \frac{1}{\cosh x},$$

$$\textit{Υπερβολικη συντεμνουσα}: \cos echx = \frac{1}{\sinh x}.$$

5.1.2. Θεωρημα. Για καθε $x\in(-\infty,+\infty)$ ισχυουν

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \qquad \coth(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},$$

$$\sec h(x)=\frac{2}{e^x+e^{-x}}, \qquad \csc h(x)=\frac{2}{e^x-e^{-x}}.$$

Αποδειξη. Αποδεικνυουμε μονο το πρωτο. Εχουμε

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-...$$

$$e^{-x} = 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-...$$

Με προσθεση κατα μελη παιρνουμε

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \cosh(x).$$

5.1.3. Ασκηση. Δειξε οτι

$$\forall x \in (-\infty, +\infty) : \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

5.1.4. Θεωρημα. Για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ισχυει

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \tag{5.1}$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$\cosh^2(x) - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \frac{2+2}{4} = 1.$$

5.1.5. Σχετικα με την ταυτοτητα (5.1) αξιζει να σημειωθει και το εξης. Αν ορισουμε δυο μεταβλητες $x = \cosh\phi$ και $y = \sinh\phi$, απο την (5.1) εχουμε

$$\forall \phi : x^2 - y^2 = \cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1.$$

Δηλαδη το συνολο σημειων

$$C = \{(x, y) : x = \cosh\phi, y = \sinh\phi, \phi \in (-\infty, +\infty)\}$$

ειναι μια *υπερβολη*. Σε αυτη την ιδιοτητα οφειλεται και η ονομασια «υπερβολικες συναρτησεις» την οποια χρησιμοποιουμε για τις cosh και sinh.

5.1.6. Θεωρημα. Για καθε $x \in (-\infty, \infty)$ ισχυει

$$(\cosh x)' = \sinh x, \quad (\sinh x)' = \cosh x.$$

Αποδειξη. Για το πρωτο εχουμε

$$(\cosh(x))' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

Το δευτερο αποδεικνυεται παρομοια.

5.1.7. Ασκηση. Αποδειξε οτι $(\sinh(x))' = \cosh x$.

5.1.8. Θεωρημα. Για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$:

$$\cosh(-x) = \cosh x, \quad \sinh(-x) = -\sinh x.$$

Αποδειξη. Για το πρωτο εχουμε $\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x$. Το δευτερο αποδεικνυεται παρομοια.

5.1.9. Θεωρημα. Οι συναρτησεις $\cosh x$, $\sinh x$ ειναι συνεχεις και παραγωγισιμες στο $(-\infty, +\infty)$.
Αποδειξη. Προκυπτει αμεσα απο το οτι $(\cosh(x))' = \sinh x$, $(\sinh(x))' = \cosh x$.

5.1.10. Παραδειγμα. Ας σχεδιασουμε την συναρτηση $\cosh x$. Εχουμε

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} \geq 1.$$

Η ελαχιστη τιμη της $\cosh x$ ειναι το $\cosh 0 = 1$. Επισης φαινεται αμεσα οτι

$$\lim_{x \to \pm\infty} \cosh x = +\infty.$$

Επειδη

$$(\cosh x)' = \sinh x = \frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}$$

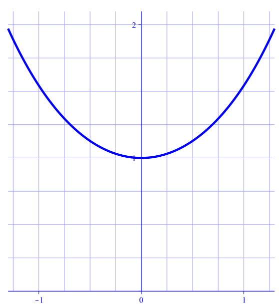
εχουμε

$$x < 0 \Rightarrow \sinh x < 0,$$
$$x > 0 \Rightarrow \sinh x > 0.$$

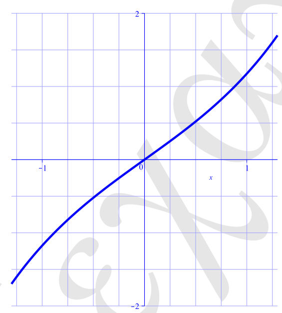
Οποτε η $\cosh x$ ειναι φθινουσα στο $(-\infty, 0)$ και αυξουσα στο $(0, +\infty)$. Επειδη για καθε x

$$(\cosh x)'' = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0,$$

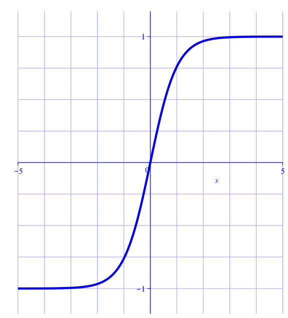
βλεπουμε οτι η $\cosh x$ ειναι κυρτη στο $(-\infty, +\infty)$. Χρησιμοποιωντας τα παραπανω παιρνουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 5.1.



Σχήμα 5.1



Σχήμα 5.2



Σχήμα 5.3

5.1.11. Παραδειγμα. Ας σχεδιασουμε την συναρτηση $\sinh x$. Επειδη $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, εχουμε

$$x < 0 \Rightarrow \sinh x < 0,$$
$$x > 0 \Rightarrow \sinh x > 0.$$

Επισης φαινεται αμεσα οτι

$$\lim_{x \to -\infty} \sinh x = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \sinh x = +\infty.$$

Επειδη για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ εχουμε

$$(\sinh x)' = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0,$$

βλεπουμε οτι η $\sinh x$ ειναι αυξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Επειδη $(\sinh x)'' = \sinh x$, βλεπουμε οτι η $\sinh x$ ειναι κοιλη στο $(-\infty, 0)$ και κυρτη στο $(0, +\infty)$. Χρησιμοποιωντας τα παραπανω παιρνουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 5.2.

5.1.12. Παραδειγμα. Ας σχεδιασουμε την συναρτηση $\tanh x$. Εχουμε

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Οποτε

$$\lim_{x \to \infty} \tanh x = \lim_{x \to \infty} \tanh x = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

Με αντιστοιχο τροπο βρισκουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\tanh x=-1$$

Επισης φαινεται ευκολα οτι η μονη ριζα της $\tanh x=0$ ειναι η $x=0$. Εχουμε

$$(\tanh x)'=\frac{4e^{-2x}}{\left(e^{-2x}+1\right)^2}>0$$

οποτε η $\tanh x$ ειναι αυξουσα στο $(-\infty,+\infty)$. Τελος

$$(\tanh x)''=\frac{\left(e^{-2x}-1\right)8e^{-2x}}{\left(e^{-2x}+1\right)^3}$$

οποτε η $\tanh x$ ειναι κυρτη στο $(-\infty,0)$ και κοιλη στο $(0,+\infty)$. Χρησιμοποιωντας τα παραπανω παιρνουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 5.3.

5.1.13. Θεωρημα. Για καθε $x,y\in(-\infty,+\infty)$ ισχυουν:

$$\begin{aligned}
\cosh(x+y)&=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y,\\
\sinh(x+y)&=\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y,\\
\cosh(x-y)&=\cosh x\cosh y-\sinh x\sinh y,\\
\sinh(x-y)&=\sinh x\cosh y-\cosh x\sinh y.
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Για το δευτερο εχουμε

$$\begin{aligned}
\sinh x\cosh y+\cosh x\sinh y&=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}\\
&=\frac{e^{x+y}-e^{-x+y}+e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}\\
&+\frac{e^{x+y}+e^{-x+y}-e^{x-y}-e^{-(x+y)}}{4}\\
&=\frac{2e^{x+y}-2e^{-(x+y)}}{4}=\sinh(x+y)\,.
\end{aligned}$$

Τα υπολοιπα αποδεικνυονται παρομοια.

5.1.14. Ασκηση. Αποδειξε οτι $\cosh(x+y)=\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y$.

5.1.15. Θεωρημα: Για καθε $x,y\in(-\infty,+\infty)$ ισχυουν

$$\tanh(x+y)=\frac{\tanh x+\tanh y}{1-\tanh x\tanh y},\qquad \tan(x-y)=\frac{\tanh x-\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}.$$

Αποδειξη. Για το πρωτο εχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\tanh x+\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}&=\frac{\frac{\sinh x}{\cosh x}+\frac{\sinh y}{\cosh y}}{1+\frac{\sinh x}{\cosh x}\frac{\sinh y}{\cosh y}}=\frac{\frac{\sinh x\cosh y+\sinh y\cosh x}{\cosh x\cosh y}}{\frac{\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y}{\cosh x\cosh y}}\\
&=\frac{\sinh x\cosh y+\sinh y\cosh x}{\cosh x\cosh y+\sinh x\sinh y}=\frac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)}=\tanh(x+y)\,.
\end{aligned}$$

Το δευτερο αποδεικνυεται παρομοια.

5.1.16. Ασκηση. Αποδειξε οτι $\tan(x-y)=\frac{\tanh x-\tanh y}{1+\tanh x\tanh y}$.

5.1.17. Θεωρημα. Για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1, \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh y. \end{aligned}$$

Αποδειξη. Για το πρωτο εχουμε

$$\begin{aligned} \cosh 2x = \cosh(x + x) &= \cosh x \cosh x + \sinh x \sinh x \\ &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ &= \cosh^2 x + \cosh^2 x - 1 = 2\cosh^2 x - 1 \\ &= 1 + \sinh^2 x + \sinh^2 x = 2\sinh^2 x + 1. \end{aligned}$$

Το δευτερο αποδεικνυεται παρομοια.

5.1.18. Ασκηση. Αποδειξε οτι: $\sinh 2x = \cosh x \sinh x$.

5.1.19. Θεωρημα. Οι παρακατω τυποι *αποτετραγωνισμου* ειναι χρησιμοι στον υπολογισμο ολοκληρωματων.

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}, \qquad \sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}.$$

Αποδειξη. Το πρωτο προκυπτει αμεσα απο το $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$.

5.1.20. Ασκηση. Αποδειξε οτι $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.

5.1.21. Θεωρημα. Για καθε $x \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\cosh x = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}, \qquad \sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}.$$

Αποδειξη. Για το πρωτο εχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}}} = \frac{|\cosh x|}{\sqrt{\cosh^2 x - \sinh^2 x}} = \frac{|\cosh x|}{1} = \cosh x.$$

Το δευτερο αποδεικνυεται παρομοια.

5.1.22. Ασκηση. Αποδειξε οτι $\sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$.

5.1.23. Θεωρημα. Για καθε $x, y \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} 2\cosh x \cosh y &= \cosh(x + y) + \cosh(x - y), \\ 2\sinh x \sinh y &= \cosh(x + y) - \cosh(x - y), \\ 2\sinh x \cosh y &= \sinh(x + y) + \sinh(x - y). \end{aligned}$$

Αποδειξη. Για το πρωτο εχουμε

$$\cosh(x + y) + \cosh(x - y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y + \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y = 2\cosh x \cosh y.$$

Τα υπολοιπα αποδεικνυονται παρομοια.

5.1.24. Θεωρημα. Για καθε $x, y \in (-\infty, +\infty)$ ισχυουν:

$$\begin{aligned} \sinh x + \sinh y &= 2\sinh\left(\frac{x + y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x - y}{2}\right), \\ \sinh x - \sinh y &= 2\sinh\left(\frac{x - y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x + y}{2}\right), \\ \cosh x + \cosh y &= 2\cosh\left(\frac{x + y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x - y}{2}\right), \\ \cosh x - \cosh y &= 2\sinh\left(\frac{x + y}{2}\right)\sinh\left(\frac{x - y}{2}\right). \end{aligned}$$

Αποδειξη. Για το πρωτο εχουμε

$$\begin{aligned} 2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right) &= 2\cdot\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}}+e^{-\frac{x-y}{2}}}{2} \\ &= \frac{e^{\frac{x+y+x-y}{2}}-e^{\frac{-x-y+x-y}{2}}+e^{\frac{x+y-x+y}{2}}-e^{\frac{-x-y-x+y}{2}}}{2} \\ &= \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}+\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}=\sinh x+\sinh y. \end{aligned}$$

Τα υπολοιπα αποδεικνυονται παρομοια.

5.1.25. Ασκηση. Αποδειξε οτι $\sinh x-\sinh y=2\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

5.1.26. Θεωρημα. Για καθε $x\in(-\infty,+\infty)$ ισχυουν:

$$\sinh x=\frac{2\tanh\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}},\qquad \cosh x=\frac{1+\tanh^2\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}}.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

5.1.27. Θεωρημα. Για καθε $x\in(-\infty,+\infty)$ ισχυουν:

$$\sinh\frac{x}{2}=\frac{\sinh x}{\sqrt{2\cosh x+1}},\qquad \cosh\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{\cosh x+1}{2}}.$$

Αποδειξη. Για το πρωτο εχουμε

$$\frac{2\tanh\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}}=\frac{2\frac{\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}}}{1-\frac{\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}}}=\frac{2\cosh\frac{x}{2}\sinh\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}}=\frac{\sinh x}{1}=\sinh x.$$

Το δευτερο αποδεικνυεται παρομοια.

5.1.28. Θεωρημα. Για καθε $x\in(-\infty,+\infty)$ ισχυουν

$$\cosh(ix)=\cos x,\qquad \sinh(ix)=i\sin x,\quad \cos(ix)=\cosh x,\qquad \sin(ix)=i\sinh x.$$

Αποδειξη. Για το πρωτο εχουμε

$$\cosh(ix)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos x$$

και για το δευτερο

$$\sinh(ix)=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=i\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=i\sin x.$$

Τα υπολοιπα αποδεικνυονται παρομοια.

5.1.29. Ασκηση. Αποδειξε οτι $\cos(ix)=\cosh x$, $\sin(ix)=i\sinh x$.

5.1.30. Ορισμος. Οριζουμε τις *αντιστροφες υπερβολικες συναρτησεις* ως εξης

$$\begin{array}{ll} \forall x\in(-\infty,+\infty): & y=arc\sinh(x)\Leftrightarrow x=\sinh(y), \\ \forall x\in[1,+\infty): & y=arc\cosh(x)\Leftrightarrow x=\cosh(y)\ \text{και}\ y\geq 0, \\ \forall x\in(-1,1): & y=arc\tanh(x)\Leftrightarrow x=\tanh(y), \\ \forall x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty): & y=arc\coth(x)\Leftrightarrow x=\coth(y), \\ \forall x\in(0,1]: & y=arc\sec h(x)\Leftrightarrow x=\sec h(y), \\ \forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty): & y=arc\csc h(x)\Leftrightarrow x=\csc h(y). \end{array}$$

5.1.31. Θεωρημα. Για τις παραγωγους των αντιστροφων υπερβολικων συναρτησεων ισχυουν τα εξης.

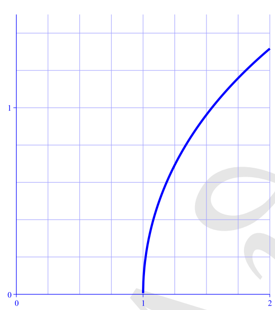
$$\begin{aligned}
&\forall x \in (-\infty,+\infty) : (\arcsin hx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\\
&\forall x \in [1,+\infty) : (\arccos hx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\\
&\forall x \in (-1,1) : (\arctan hx)' = \frac{1}{1-x^2},\\
&\forall x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) : (\operatorname{arccot} hx)' = \frac{1}{1-x^2},\\
&\forall x \in (0,1) : (\operatorname{arcsec} hx)' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\ ,\\
&\forall x \in (-\infty,+\infty)\setminus\{0\} : (\operatorname{arccsc} hx)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}.
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Δειχνουμε μονο το πρωτο (τα υπολοιπα αφηνονται στον αναγνωστη). Εστω $y = \arcsin hx$, τοτε $x = \sinh y$, $\sqrt{x^2+1} = \cosh y$. Οποτε

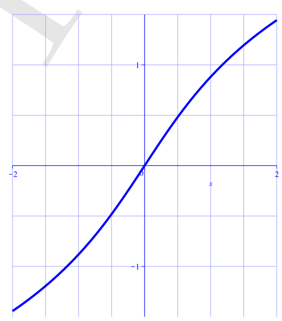
$$\frac{dx}{dy} = (\sinh y)' = \cosh y = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow (\arcsin hx)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

5.1.32. Ασκηση. Αποδειξε οτι $(\arccos hx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $(\arctan hx)' = \frac{1}{1-x^2}$.

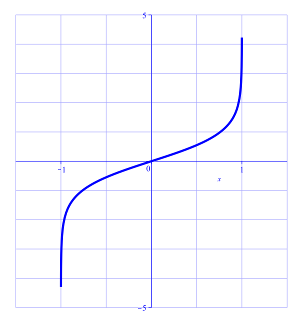
5.1.33. Παραδειγμα. Για να σχεδιασουμε την συναρτηση $f(x) = \arccos hx$, καταρχην παρατηρουμε οτι το πεδιο ορισμου της $\arccos hx$ ειναι το $(1,+\infty)$. Η πρωτη παραγωγος ειναι $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} > 0$ και η δευτερη παραγωγος ειναι $f''(x) = -\frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} < 0$. Οποτε, για καθε $x \in (1,+\infty)$, η $\arccos hx$ ειναι αυξουσα και κοιλη. Τελος, $f(1) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ (γιατι;). Οποτε η γραφικη παρασταση εχει την μορφη που φαινεται στο Σχημα 5.4.



Σχήμα 5.4



Σχήμα 5.5



Σχήμα 5.6

5.1.34. Παραδειγμα. Για να σχεδιασουμε την συναρτηση $f(x) = \arcsin hx$, καταρχην παρατηρουμε οτι το πεδιο ορισμου της $\arcsin hx$ ειναι το $(-\infty,+\infty)$. Η πρωτη παραγωγος ειναι $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ οποτε, για καθε $x \in (-\infty,+\infty)$, η $\arcsin hx$ ειναι αυξουσα. Η δευτερη παραγωγος ειναι $f''(x) = -\frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, οποτε για $x \in (-\infty,0)$, η $\arcsin hx$ ειναι κυρτη και για $x \in (0,+\infty)$, η $\arcsin hx$ ειναι κοιλη. Τελος, $f(0) = 0$, $\lim_{x\to-+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (γιατι;). Οποτε η γραφικη παρασταση εχει την μορφη που φαινεται στο Σχημα 5.5.

5.1.35. Παραδειγμα. Για να σχεδιασουμε την συναρτηση $\arctan hx$ παρατηρουμε οτι η $\arctan hx$ ειναι η αντιστροφη της $\tanh x$, οποτε το πεδιο ορισμου της ειναι το $[-1,1]$ και η γραφικη παρασταση της $\arctan hx$ ειναι αυτη της $\tanh x$ καθρεφιτσμενη απο την ευθεια $y = x$ (γιατι;) οπως φαινεται στο Σχημα 5.6.

5.1.36. Θεωρημα. Ισχυουν τα εξης:

$$\begin{array}{ll}
\forall x \in (-\infty, +\infty): & \operatorname{arcsin} h\left(x\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \\
\forall x \in [1, +\infty): & \operatorname{arccos} h\left(x\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \\
\forall x \in (-1, 1): & \operatorname{arctan} h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \\
\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty): & \operatorname{arccot} h(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \\
\forall x \in (0, 1]: & \operatorname{arcsec} h(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \\
\forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty): & \operatorname{arccsc} h(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right).
\end{array}$$

Αποδειξη. Δειχνουμε μονο το πρωτο (τα υπολοιπα αφηνονται στον αναγνωστη). Εστω $z = arc\sinh(x)$. Τοτε

$$x = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \Rightarrow e^z - 2x - e^{-z} = 0.$$

Θετουμε $a = e^z$, οποτε εχουμε $a - 2x - a^{-1} = 0$ και πολλαπλασιαζουμε με a, οποτε παιρνουμε

$$a^2 - 2xa - 1 = 0.$$

Λυνουμε ως προς a και παιρνουμε

$$e^z = a = x \pm \sqrt{x^2+1}.$$

Αλλα η ριζα $a = x - \sqrt{x^2+1}$ ειναι αρνητικη και απορριπτεται (αφου $a = e^z > 0$). Οποτε

$$a = e^z = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow arc\sinh(x) = z = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

5.1.37. Ασκηση. Δειξε οτι $\operatorname{arccos} h\left(x\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

5.1.38. Θεωρημα. Ισχυουν τα εξης:

$$\begin{aligned}
\arcsin(x) &= -i\ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right), \\
\arccos(x) &= -i\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \\
\arctan(x) &= \frac{i}{2}\ln\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right).
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

5.2 Λυμενα Προβληματα

5.2.1. Αποδειξε οτι $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \\
e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - ...
\end{aligned}$$

Με αφαιρεση κατα μελη παιρνουμε

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... .$$

5.2.2. Αποδειξε οτι $(\sinh x)' = \cosh x$.
Λυση. Εχουμε

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

5.2.3. Αποδειξε οτι $\cosh(-x) = \cosh x$.
Λυση. Εχουμε

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

5.2.4. Αποδειξε οτι $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y &= \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{e^{x+y} + e^{-x+y} + e^{x-y} + e^{-(x+y)}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{-x+y} - e^{x-y} - e^{-(x+y)}}{4} \\
&= \frac{2e^{x+y} + 2e^{-(x+y)}}{4} = \cosh(x+y).
\end{aligned}$$

5.2.5. Αποδειξε οτι: $\tanh(x-y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y} &= \frac{\frac{\sinh x}{\cosh x} - \frac{\sinh y}{\cosh y}}{1 - \frac{\sinh x}{\cosh x}\frac{\sinh y}{\cosh y}} = \frac{\frac{\sinh x \cosh y - \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y}}{\frac{\cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y}{\cosh x \cosh y}} \\
&= \frac{\sinh x \cosh y - \sinh y \cosh x}{\cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y} = \frac{\sinh(x-y)}{\cosh(x-y)} = \tanh(x-y).
\end{aligned}$$

5.2.6. Αποδειξε οτι: $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$.
Λυση. Εχουμε

$$\sinh 2x = \sinh(x+x) = \cosh x \sinh x + \cosh x \sinh x = 2 \sinh x \cosh x.$$

5.2.7. Αποδειξε οτι $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$.
Λυση. Προκυπτει αμεσα απο το $\cosh 2x = 2\sinh^2 x + 1$.

5.2.8. Αποδειξε οτι $\sinh x = \frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}}$.
Λυση. Εχουμε

$$\frac{\tanh x}{\sqrt{1 - \tanh^2 x}} = \frac{\frac{\sinh x}{\cosh x}}{\sqrt{1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x}}} = \frac{\frac{\sinh x}{\cosh x}}{\sqrt{\frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x}}} = \frac{|\cosh x| \frac{\sinh x}{\cosh x}}{\sqrt{\cosh^2 x - \sinh^2 x}} = \sinh x.$$

5.2.9. Αποδειξε οτι

$$2 \sinh x \cosh y = \sinh(x+y) + \sinh(x-y).$$

Λυση. Εχουμε

$$\sinh(x+y) + \sinh(x-y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y = 2 \sinh x \cosh y.$$

5.2.10. Αποδειξε οτι $\sinh x - \sinh y = 2 \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
2 \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) &= 2 \cdot \frac{e^{\frac{x-y}{2}} - e^{-\frac{x-y}{2}}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x+y}{2}} + e^{-\frac{x+y}{2}}}{2} \\
&= \frac{e^{\frac{x-y+x+y}{2}} - e^{\frac{-x+y+x+y}{2}} + e^{\frac{x-y-x-y}{2}} + e^{\frac{-x+y-x-y}{2}}}{2} \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2} = \sinh x - \sinh y.
\end{aligned}$$

5.2.11. Αποδειξε οτι $\cosh x = \frac{1+\tanh^2\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}}$.
Λυση. Εχουμε

$$\frac{1+\tanh^2\frac{x}{2}}{1-\tanh^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\frac{\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}}}{1-\frac{\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}}} = \frac{\cosh^2\frac{x}{2}+\sinh^2\frac{x}{2}}{\cosh^2\frac{x}{2}-\sinh^2\frac{x}{2}} = \frac{\cosh x}{1} = \cosh x.$$

5.2.12. Αποδειξε οτι $\cos(ix) = \cosh x$, $\sin(ix) = i\sinh x$.
Λυση. Εχουμε

$$\cos(ix) = \frac{e^{iix}+e^{-iix}}{2} = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \cosh x$$

και

$$\sin(ix) = \frac{e^{iix}-e^{-iix}}{2i} = -i\frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = i\sinh x.$$

5.2.13. Αποδειξε οτι $(\operatorname{arccos} hx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (για $x>1$).
Λυση. Εστω $y = \operatorname{arccos} hx$, τοτε $x = \cosh y$, $\sqrt{x^2-1} = \sinh y > 0$. Οποτε

$$\frac{dx}{dy} = (\cosh y)' = \sinh y = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow (\operatorname{arccos} hx)' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

5.2.14. Υπολογισε τις παραγωγους των

1. $\sinh\left(x^2+1\right)$,
2. $\cosh\frac{x-1}{x+1}$,
3. $\tanh\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)$,
4. $\frac{\sinh(x+1)}{\cosh(x^2-2)}$.

Λυση. Εχουμε

1. $\left(\sinh\left(x^2+1\right)\right)' = 2x\cosh\left(x^2+1\right)$,
2. $\left(\cosh\frac{x-1}{x+1}\right)' = 2\frac{\sinh\frac{x-1}{x+1}}{(x+1)^2}$,
3. $\left(\tanh\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)\right)' = 2x\left(\cos\left(x^2+1\right)\right)\left(1-\tanh^2\left(\sin\left(x^2+1\right)\right)\right)$,
4. $\left(\frac{\sinh(x+1)}{\cosh(x^2-2)}\right)' = \frac{\left(\cosh\left(x^2-x-3\right)+\cosh\left(x^2+x-1\right)-2x\cosh\left(x^2+x-1\right)+2x\cosh\left(x^2-x-3\right)\right)}{2\cosh^2(x^2-2)}$

5.2.15. Υπολογισε τα

1. $\lim_{x\to0}\frac{\sinh x}{\cos x}$,
2. $\lim_{x\to0}\frac{\sinh x^2}{\sin x^2}$,
3. $\lim_{x\to0}\frac{\tanh x}{1+e^{-x}}$,
4. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sinh x}$.

Λυση. Εχουμε

1. $\lim_{x\to0}\frac{\sinh x}{\cos x} = \frac{\sinh 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$,
2. $\lim_{x\to0}\frac{\sinh x^2}{\sin x^2} = \lim_{x\to0}\frac{2x\cosh x^2}{2x\cos x^2} = \frac{1}{1} = 1$,
3. $\lim_{x\to0}\frac{\tanh x}{1+e^{-x}} = \frac{\tanh 0}{1+e^0} = 0$,

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\sinh x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}==\lim_{x\to\infty}2\left(\frac{1}{1+e^{-2x}}\right)=2.$

5.2.16. Βρες και χαρακτηρισε τα στασιμα σημεια της $f(x)=\sinh\left(x^2\right)$.
Λυση. Εχουμε $f'(x)=2x\cosh x^2$ το οποιο ειναι αρνητικο στο $(-\infty,0)$, θετικο στο $(0,\infty)$ και $f'(0)=0$. Αρα η $f(x)$ ειναι φθινουσα στο $(-\infty,0)$, αυξουσα στο $(0,\infty)$ και εχει τοπικο ελαχιστο στο $x_0=0$.

5.2.17. Βρες και χαρακτηρισε τα στασιμα σημεια της $f(x)=\tanh\left(x^2+1\right)$.
Λυση. Εχουμε

$$f'(x)=2x\left(1-\tanh^2\left(x^2+1\right)\right).$$

Αφου για καθε $z\in(-\infty,\infty)$ ισχυει $|\tanh(z)|\leq 1$, εχουμε

$$x<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f(x)\ \text{φθινουσα},$$
$$x>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)\ \text{αυξουσα}.$$

Στο $x_0=0$ εχουμε $f'(x_0)=0$. Οποτε στο $x_0=0$ εχουμε τοπικο ελαχιστο.

5.2.18. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x)=\cosh\frac{x}{x^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\lim_{x\to-\infty}\cosh\frac{x}{x^2+1}=1,\ \lim_{x\to+\infty}\cosh\frac{x}{x^2+1}=1.$$

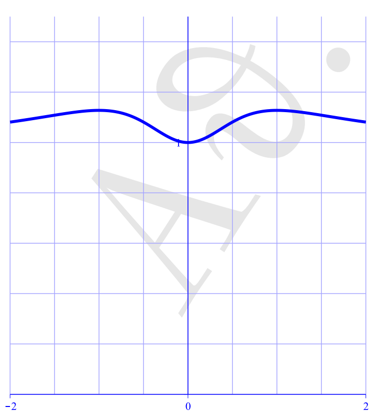
Επισης εχουμε

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\cosh\frac{x}{x^2+1}=\left(\sinh\frac{x}{x^2+1}\right)\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

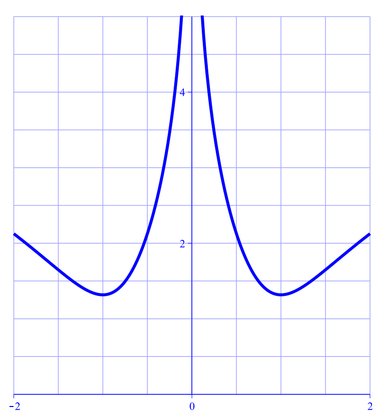
Θετοντας $f'(x)=0$ παιρνουμε τις ριζες $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. Η μονοτονια της συναρτησης ειναι η εξης

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	θετικη	αρνητικη	θετικη	αρνητικη
$f(x)$	αυξουσα	φθινουσα	αυξουσα	φθινουσα

Συνδυαζοντας τα παραπανω παιρνουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 5.7.



Σχήμα 5.7



Σχήμα 5.8

5.2.19. Υπολογισε τις παραγωγους των

1. $\arcsin h\left(x^2+1\right)$,

2. $\arctan h\left(x^2+1\right)$,

3. $\arccos h\frac{x-1}{x+1}$.

Λυση. Εχουμε

1. $\frac{d}{dx}\arcsin h\left(x^2+1\right)=\frac{2x}{\sqrt{(1+x^2)^2+1}}$,

2. $\frac{d}{dx}\arctan h\left(x^2+1\right)=\frac{2x}{1-(x^2+1)^2}$,

3. $\frac{d}{dx}\arccos h\frac{x-1}{x+1}=\frac{2}{(x+1)^2\sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2-1}}$.

5.2.20. Βρες και χαρακτηρισε τα στασιμα σημεια της $f(x)=\arcsin h\left(x+\frac{1}{x}\right)$.
Λυση. Εχουμε

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\arcsin h\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{1+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}}.$$

Θετοντας $f'(x)=0$ παιρνουμε τις ριζες $x_1=-1$, $x_2=1$. Η μονοτονια της συναρτησης ειναι η εξης

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	θετικη	αρνητικη	αρνητικη
$f(x)$	αυξουσα	φθινουσα	φθινουσα

Αρα εχουμε τοπικο μεγιστο στο $x_1=-1$ και τοπικο ελαχιστο στο $x_2=1$.

5.2.21. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x)=\arccos h\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$.
Λυση. Εχουμε $\lim_{x\to+\infty}\arccos h\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$. Επισης εχουμε

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\arccos h\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-1}\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}}\frac{x^4-1}{x^3}.$$

Θετοντας $f'(x)=0$ παιρνουμε τις ριζες $x_1=-1$, $x_2=1$. Η μονοτονια της συναρτησης ειναι η εξης

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	αρνητικη	θετικη	αρνητικη	θετικη
$f(x)$	φθινουσα	αυξουσα	φθινουσα	αυξουσα

Αρα εχουμε τοπικα ελαχιστα στα $x_1=-1$ και $x_2=1$. Συνδυαζοντας τα παραπανω παιρνουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 5.8.

5.2.22. Αποδειξε οτι

$$\arcsin(x)=-i\ln\left(ix+\sqrt{1-x^2}\right).$$

Λυση. Εστω $z=\arcsin(x)$. Τοτε

$$x=\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\Rightarrow e^{iz}-2ix-e^{-iz}=0.$$

Θετουμε $a=e^{iz}$, οποτε εχουμε $a-2ix-a^{-1}=0$ και πολλαπλασιαζουμε με a, οποτε παιρνουμε

$$a^2-2ixa-1=0.$$

Λυνουμε ως προς a και παιρνουμε

$$e^{iz}=a=ix\pm\sqrt{1-x^2}.$$

Υποθετουμε οτι $a = ix + \sqrt{1-x^2}$ οποτε

$$a = e^{iz} = ix + \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \arcsin x = z = -i \ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right).$$

Εδω αξιζει να σημειωθει οτι θα μπορεσουμε εξισου δικαιολογημενα να υποθεσουμε οτι $a = ix - \sqrt{1-x^2}$ και τοτε θα παιρναμε $\arcsin x = -i \ln\left(-ix + \sqrt{1-x^2}\right)$. Η αληθεια ειναι οτι η συναρτηση $\arcsin x$ ειναι *πλειοτιμη*, δηλ. σε καθε x_1 αντιστοιχουν περισσοτερες της μιας τιμες $\arcsin x_1$. Το ζητημα της πλειοτιμιας εξεταζεται σε βαθος στην Θεωρια Μιγαδικων Συναρτησεων.

5.3 Αλυτα Προβληματα

5.3.1. Αποδειξε οτι

1. $\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$,
2. $\cosh(x-y) = \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y$.

5.3.2. Αποδειξε οτι

1. $\cosh 3x = 4\cosh^3 x - 3\cosh x$,
2. $\sinh 3x = 3\sinh x + 4\sinh^3 x$.

5.3.3. Αποδειξε οτι $2\sinh x \cosh y = \sinh(x+y) + \sinh(x-y)$.

5.3.4. Αποδειξε οτι

1. $\cosh x + \cosh y = 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$,
2. $\cosh x - \cosh y = 2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right)\sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

5.3.5. Αποδειξε οτι $1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$.

5.3.6. Αποδειξε οτι

1. $(\tanh(x))' = \sec h^2(x)$,
2. $(\coth(x))' = -\csc h^2(x)$,
3. $(\sec h(x))' = -\sec h(x) \cdot \tanh(x)$,
4. $(\csc h(x))' = -\csc h(x) \cdot \coth(x)$.

5.3.7. Σχεδιασε την συναρτηση $\tanh\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$.

5.3.8. Σχεδιασε την συναρτηση $\cosh(\sinh(x))$.

5.3.9. Σχεδιασε την συναρτηση $\tanh(\frac{x^2+1}{x^2})$.

5.3.10. Σχεδιασε την συναρτηση $\tanh(\frac{x+1}{x^2})$.

5.3.11. Αποδειξε οτι

1. $(arc\tanh(x))' = \frac{1}{1-x^2}$,
2. $(arc\coth(x))' = \frac{1}{1-x^2}$,
3. $(arc\sec h(x))' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$,

4. $(arc\csc h(x))' = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$.

5.3.12. Σχεδιασε την συναρτηση $\operatorname{arccot} hx$.

5.3.13. Σχεδιασε την συναρτηση $\operatorname{arcsec} hx$.

5.3.14. Σχεδιασε την συναρτηση $\operatorname{arccsc} hx$.

5.3.15. Αποδειξε οτι

1. $arc\cosh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad (1 \le x)$,
2. $arc\tanh(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad (-1 < x < 1)$,
3. $arc\coth(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad (x > 1$ ή $x < -1)$,
4. $arc\sec h(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad (0 < x \le 1)$,
5. $arc\csc h(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \quad (x \neq 0)$.

5.3.16. Υπολογισε τις παραγωγους.

1. $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\cosh 5x\right)\right)$. *Απ.* $\frac{5\sinh 5x}{\cosh 5x}$.
2. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\cosh x - 1}\right)$. *Απ.* $\frac{1}{2}\frac{\sinh x}{\sqrt{\cosh x - 1}}$.
3. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\sinh^2 5x}\right)$. *Απ.* $\frac{5\sqrt{2}\sinh 10x}{2\sqrt{\cosh 10x+1}}$.
4. $\frac{d}{dx}\left(\sinh\left(x^3\right)\right)$. *Απ.* $3x^2\cosh x^3$.

5.3.17. Υπολογισε τα ορια.

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\tanh x}{x}$. *Απ.* 1.
2. $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sinh x}$. *Απ.* 1.
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{\sin x}$. *Απ.* 1.
4. $\lim_{x\to 0}\frac{\cosh x}{\cos x}$. *Απ.* 1.

5.3.18. Υπολογισε τις παραγωγους

1. $\frac{d}{dx}\left(\arctan\left(\tanh x\right)\right)$. *Απ.* $-\frac{\tanh^2 x-1}{\tanh^2 x+1}$.
2. $\frac{d}{dx}\left(\cosh\left(\sinh x\right)\right)$. *Απ.* $\frac{1}{2}\sinh\left(\sinh x - x\right) + \frac{1}{2}\sinh\left(x + \sinh x\right)$.
3. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1+\tanh^2 x}\right)$. *Απ.* $-\left(\tanh x\right)\frac{\tanh^2 x-1}{\sqrt{\tanh^2 x+1}}$.
4. $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}}\right)$. *Απ.* $-\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{\tanh x-1}(\tanh x+1)}(\tanh x-1)}\left(\tanh x+1\right)$.

5.3.19. Σχεδιασε την συναρτηση $\arccos h(\sinh x))$.

5.3.20. Σχεδιασε την συναρτηση $\cosh(\arcsin hx)$.

5.3.21. Σχεδιασε την συναρτηση $\arctan h(\frac{x}{x^4+1})$.

5.3.22. Δειξε οτι οι συναρτησεις $\frac{e^{2x}}{2}$, $e^x\sinh x$ και $e^x\cosh x$ διαφερουν κατα μια σταθερα.

5.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

5.4.1. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{2x} = \frac{1}{2}$ χωρις χρηση του κανονα $l'Hospital$.

5.4.2. Αποδειξε οτι $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{x^2} = -\frac{1}{2}$ και $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh x^2}{x^2} = 0$ χωρις χρηση του κανονα $l'Hospital$.

5.4.3. Αποδειξε οτι, για $x > 0$, ισχυει $\sinh x > x + \frac{x^3}{6}$. Τι μπορεις να πεις για το $\sinh x$ οταν $x < 0$;

5.4.4. Αποδειξε οτι $\arcsin(\tanh x) = \arctan(\sinh x)$.

5.4.5. Αποδειξε οτι

$$\arccos(x) = -i \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right),$$
$$\arctan(x) = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{1-ix}{1+ix}\right).$$

5.4.6. Βρες τα διαστηματα στα οποια ειναι μονοτονη η $f(x) = \cosh x - x$.

5.4.7. Κανε την γραφικη παρασταση της $f(x) = x \arctan h \frac{1}{x}$.

5.4.8. Βρες τα *ολικα* μεγιστα και ελαχιστα της $f(x) = \cosh x - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ για $N = 1, 2, 3, 4$.

5.4.9. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ τετοια ωστε

$$f''(x) - f(x) = 0.$$

5.4.10. Βρες *ολες* τις συναρτησεις $f(x)$ τετοιες ωστε

$$f''(x) - f(x) = 0.$$

5.4.11. Βρες *ολα* τα ζευγη συναρτησεων $(f(x), g(x))$ τετοια ωστε

$$f'(x) = g(x), \quad g'(x) = f(x).$$

5.4.12. Αποδειξε οτι

$$\cosh(y-z) + \cosh(z-x) + \cosh(x-y) \geq \cosh x + \cosh y + \cosh z.$$

5.4.13. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f\left(xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\right) = f(x) + f(y).$$

5.4.14. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f\left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\right) = f(x) + f(y).$$

5.4.15. Βρες μια συναρτηση $f(x)$ η οποια ικανοποιει την συναρτησιακη εξισωση

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = f(x) + f(y).$$

5.4.16. Εστω ϕ και Φ οι ριζες της εξισωσης $x^2 - x - 1 = 0$. Τοτε $\sinh(\ln\phi) = \frac{1}{2}$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

6 Αοριστο Ολοκληρωμα

Η αοριστη ολοκληρωση ειναι η *αντιστροφη* διαδικασια της παραγωγισης.

6.1 Θεωρια και Παραδειγματα

6.1.1. Ορισμος. Εστω $[a,b] \subseteq (-\infty,+\infty)$ και δυο συναρτησεις $f(x)$ και $F(x)$ ορισμενες στο $[a,b]$. Λεμε οτι η $F(x)$ *ειναι* ***ενα*** *αοριστο ολοκληρωμα της* $f(x)$ *στο* $[a,b]$ αnn ισχυει

$$F'(x) = f(x) \tag{6.1}$$

και τοτε γραφουμε ισοδυναμα

$$F(x) = \int f(x)dx. \tag{6.2}$$

6.1.2. Παραδειγμα. Ισχυει

$$\int e^x dx = e^x$$

διοτι $(e^x)' = e^x$. Επισης ισχυει

$$\int e^x dx = e^x + 1$$

διοτι $(e^x + 1)' = e^x$.

6.1.3. Παραδειγμα. Ισχυει

$$\int \cos x dx = \sin x$$

διοτι $(\sin x)' = \cos x$. Ισχυει επισης

$$\int \cos x dx = \sin x + 66$$

διοτι $(\sin x + 66)' = \cos x$.

6.1.4. Απο τα παραπανω βλεπουμε οτι

$$\left(\int f(x)\, dx \right)' = f(x)$$

και, για καθε $F(x)$ τετοια ωστε $F'(x) = f(x)$, ισχυει

$$\int F'(x)\, dx = f(x) + c$$

(οπου c ειναι αυθαιρετη σταθερα). Δηλ. το αοριστο ολοκληρωμα της $f(x)$ δεν ειναι μοναδικο: εαν η $F_1(x)$ ειναι τετοια ωστε $F_1'(x) = f(x)$, τοτε και η $F_2(x) = F_1(x) + c$ (οπου η c ειναι μια αυθαιρετη σταθερα) επισης ικανοποιει $F_2'(x) = f(x)$. Με αλλα λογια, το συμβολο $\int f(x)dx$ δεν δηλωνει μια συναρτηση, αλλα *μια οικογενεια συναρτησεων* (γι΄ αυτο και χρησιμοποιουμε τον ορο *αοριστο* ολοκληρωμα).

6.1.5. Επισης αξιζει να τονισουμε οτι, συμφωνα με τα παραπανω, *η αοριστη ολοκληρωση ειναι η αντιστροφη διαδικασια της παραγωγισης*. Χρησιμοποιουμε και τις εκφρασεις «η $F(x)$ ειναι *παραγουσα* της $f(x)$» και «η $F(x)$ ειναι *αντιπαραγωγος* της $f(x)$».

6.1.6. Θεωρημα. Εαν οι $f(x), g(x)$ ειναι τετοιες ωστε να υπαρχουν τα $\int f(x)dx$, $\int g(x)dx$ τοτε

$$\forall \kappa, \lambda \in (-\infty, +\infty) : \int (\kappa f(x) + \lambda g(x))\, dx = \kappa \int f(x)dx + \lambda \int g(x)dx.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

6.1.7. Παραδειγμα. Το $\int (2e^x + 3\sin x)\, dx$ υπολογιζεται ως εξης:

$$\int (2e^x + 3\sin x)\, dx = 2\int e^x dx + 3\int \sin x dx = 2e^x + 3\cos x + c.$$

6.1.8. Θεωρημα. Ισχυουν τα παρακατω *βασικα* αοριστα ολοκληρωματα.

$$\begin{aligned}
&\int 1dx = x + c, \\
&\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + c \qquad (m \neq -1), \\
&\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, \\
&\int e^x dx = e^x + c, \\
&\int \sin x dx = -\cos x + c, \\
&\int \cos x dx = \sin x + c, \\
&\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c, \\
&\int \sinh x dx = \cosh x + c, \\
&\int \cosh x dx = \sinh x + c, \\
&\int \tanh x dx = \ln|\cosh x| + c.
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη να επαληθευσει τα παραπανω με παραγωγιση του δεξιου μελους καθε ισοτητας.

6.1.9. Παραδειγμα. Το $\int x^2 dx$ υπολογιζεται ως εξης:

$$\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{x^3}{3} + c.$$

6.1.10. Θεωρημα. Ισχυουν τα παρακατω *σημαντικα* αοριστα ολοκληρωματα.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c,\\
&\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+c,\\
&\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c,\\
&\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \arccos h(\frac{x}{a})+c = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c,\\
&\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \arcsin h(\frac{x}{a})+c = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c.
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη να επαληθευσει τα παραπανω με παραγωγιση του δεξιου μελους καθε ισοτητας.

6.1.11. Παραδειγμα. Το $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$ υπολογιζεται ως εξης:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-x^2}}dx = \arcsin(\frac{x}{2})+c.$$

6.1.12. Ασκηση. Υπολογισε το $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}dx$.

6.1.13. Θεωρημα. Ισχυουν τα παρακατω αοριστα ολοκληρωματα.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\cos(x)}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c\\
&\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+c\\
&\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+c\\
&\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin h\left(\frac{x}{a}\right)+c\\
&\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\arccos h\left(\frac{x}{a}\right)+c\\
&\int \sqrt{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c\\
&\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη να επαληθευσει τα παραπανω με παραγωγιση του δεξιου μελους καθε ισοτητας.

6.1.14. Παραδειγμα. Το $\int \sqrt{9-x^2}dx$ υπολογιζεται ως εξης:

$$\int \sqrt{9-x^2}dx = \int \sqrt{3^2-x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{9}\right)+c.$$

6.1.15. Παραδειγμα. Το $\int \sqrt{4^2+9x^2}dx$ υπολογιζεται ως εξης:

$$\int \sqrt{4^2+9x^2}dx = 3\int \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2+x^2}dx = \frac{8}{27}\ln\left(x+\frac{1}{9}\sqrt{81x^2+16}\right)+\frac{1}{6}x\sqrt{81x^2+16}+c.$$

6.1.16. Ασκηση. Υπολογισε το $\int \sqrt{25x^2-9}dx$.

6.1.17. Ασκηση. Υπολογισε το $\int \sqrt{25x^2+9}dx$.

6.1.18. Θεωρημα (Ολοκληρωση με Αντικατασταση). Εστω $f(x)$ συνεχης συναρτηση και $g(x)$ παραγωγισιμη συναρτηση. Τοτε

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \left(\int f(u)du\right)_{u=g(x)} + c. \tag{6.3}$$

Αποδειξη. Εστω οτι $F(u) = \int f(u)du$. Τοτε, απο τον κανονα αλυσωτης παραγωγισης εχουμε

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))\,g'(x)$$

που ειναι ισοδυναμο με το

$$F(g(x)) + c = \int F'(g(x))\,g'(x)\,dx. \tag{6.4}$$

Αλλα

$$F(u) = \int f(u)du \Rightarrow F(g(x)) = \left(\int f(u)du\right)_{u=g(x)}. \tag{6.5}$$

Συνδυαζοντας τις (6.4)-(6.5) παιρνουμε το ζητουμενο:

$$\int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = \left(\int f(u)du\right)_{u=g(x)} + c.$$

6.1.19. Παραδειγμα. Για να υπολογισουμε το $\int \left(\sqrt{x^3+1}\right)3x^2dx$ δουλευουμε ως εξης. Θετουμε $u(x) = x^3+1$, $f(u) = \sqrt{u}$ και παρατηρουμε οτι $u'(x) = 3x^2$ και οτι

$$\left(\sqrt{x^3+1}\right)3x^2 = f(u(x))\,u'(x).$$

Οποτε

$$\int \left(\sqrt{x^3+1}\right)3x^2dx = \int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du = \int u^{1/2}du = \frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{2\left(x^3+1\right)^{3/2}}{3} + c.$$

6.1.20. Συνηθως ειναι πιο ευκολο να δουλευουμε με τον συμβολισμο $\frac{du}{dx}$ αντι του $u'(x)$. Με αυτο τον συμβολισμο η βασικη ιδιοτητα γραφεται

$$\int f(u(x))\frac{du}{dx}dx = \int f(u)\,du.$$

Το δε προηγουμενο παραδειγμα γραφεται ως εξης: $u = x^3+1$, $f(u) = \sqrt{u}$ και παρατηρουμε οτι $\frac{du}{dx} = 3x^2$ και

$$\int f(u(x))\frac{du}{dx}dx = \int f(u)\,du = \int u^{1/2}du = \frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{2\left(x^3+1\right)^{3/2}}{3} + c.$$

6.1.21. Παραδειγμα. Για να υπολογισουμε το $\int \sin\left(x^3+1\right)3x^2dx$ θετουμε $u = x^3+1$, $\frac{du}{dx} = 3x^2$ και εχουμε

$$\int \sin\left(x^3+1\right)3x^2dx = \int \sin(u)\frac{du}{dx}dx = \int \sin(u)\,du = -\cos(u) + c = -\cos\left(x^3+1\right) + c.$$

6.1.22. Παραδειγμα. Για να υπολογισουμε το $\int \cos^5 x \sin x dx$ θετουμε $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$, οποτε

$$\int \cos^5 x \sin x dx = -\int u^5 du = -\frac{1}{6}u^6 = -\frac{1}{6}\cos^6 x.$$

6.1.23. Ασκηση. Υπολογισε το $\int x\sqrt{x^2+1}dx$.

6.1.24. Ασκηση. Υπολογισε το $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$.

6.1.25. Θεωρημα (Παραγοντικη Ολοκληρωση). Εστω $f(x)$, $g(x)$ παραγωγισιμες συναρτησεις. Τοτε

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx. \tag{6.6}$$

Αποδειξη. Εχουμε

$$f(x)\,g(x) = \int (f(x)g(x))'\,dx = \int (f(x)g'(x) + g(x)\,f'(x))\,dx = \int f(x)g'(x)dx + \int g(x)\,f'(x)\,dx$$

απο το οποιο προκυπτει η ζητουμενη (6.6).

6.1.26. Παραδειγμα. Για να υπολογισουμε το $\int xe^x dx$ θετουμε $f = e^x$, $g = x$, οποτε εχουμε

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

6.1.27. Παραδειγμα. Για να υπολογισουμε το $\int x\cos x dx$ θετουμε $f = \sin x$, $g = x$, οποτε εχουμε

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c.$$

6.1.28. Ασκηση. Υπολογισε το $\int x\sin x dx$.

6.1.29. Συνηθως θα ειναι πιο ευκολο να δουλευουμε με τον συμβολισμο $\frac{du}{dx}$ αντι του $u'(x)$. Με αυτο τον συμβολισμο ο τυπος της παραγοντικης ολοκληρωσης γραφεται

$$\int fdg = fg - \int gdf.$$

Η «αποδειξη» ειναι η εξης:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} \Rightarrow d(fg) = gdf + fdg \Rightarrow fg = \int d(fg) = \int gdf + \int fdg.$$

6.1.30. Ορισμος. Με τον ορο «*στοιχειωδες κλασμα*» εννοουμε οποιοδηποτε απο τα παρακατω

$$\frac{A}{x-x_0}, \quad \frac{A}{(x-x_0)^2}, \quad ..., \quad \frac{A}{ax^2+bx+c}, \quad \frac{A}{(ax^2+bx+c)^2}, \quad ..., \quad \frac{Ax+b}{ax^2+bx+c}, \quad .... \tag{6.7}$$

Προσοχη: Οταν $b^2 - 4ac \geq 0$ αναγομαστε στην περιπτωση $\frac{A}{(x-x_0)^n}$. Αρα μας ενδιαφερει κυριως η περιπτωση $b^2 - 4ac < 0$.

6.1.31. Μπορουμε να υπολογισουμε το ολοκληρωμα *καθε* στοιχειωδους κλασματος. Δινουμε μερικα παραδειγματα (παρακατω θετουμε $E = \sqrt{4ac - b^2}$):

$$\begin{aligned}
&\int \frac{A}{x-x_0}dx = A\ln|x-x_1|, \\
&\int \frac{A}{(x-x_0)^2}dx = -\frac{A}{x-x_0}, \\
&\int \frac{A}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2A}{E}\arctan\frac{2ax+b}{E}, \\
&\int \frac{A}{(ax^2+bx+c)^2}dx = \frac{A(2ax+b)}{E^2(ax^2+bx+c)} + \frac{4Aa}{E^3}\arctan\frac{2ax+b}{E}, \\
&\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\ln\left(ax^2+bx+c\right) + \frac{2B}{E}\left(\arctan\frac{2ax+b}{E}\right) - \frac{A}{E}\cdot\frac{b}{a}\left(\arctan\frac{2ax+b}{E}\right).
\end{aligned}$$

6.1.32. Ορισμος. Η συναρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ λεγεται *ρητη* ανν τα $P(x)$ και $Q(x)$ ειναι πολυωνυμα.

6.1.33. Μπορουμε να υπολογισουμε το ολοκληρωμα καθε ρητης συναρτησης με αναγωγη αυτης σε αθροισμα στοιχειωδων κλασματων. Ας υποθεσουμε οτι στην ρητη συναρτηση $P(x)/Q(x)$ ο βαθμος του $P(x)$ ειναι μικροτερος απο τον βαθμο του $Q(x)$. Εστω μια ριζα x_0 του $Q(x)$. Διακρινουμε τις εξης περιπτωσεις.

1. Αν η ριζα ειναι πραγματικη και απλη, τοτε στην αναπτυξη της $P(x)/Q(x)$ θα εμφανιζεται *ενα* κλασμα της μορφης
$$\frac{A}{x-x_0}.$$
2. Αν η ριζα ειναι πραγματικη και πολλαπλοτητας n, τοτε στην αναπτυξη της $P(x)/Q(x)$ θα εμφανιζονται n κλασματα της μορφης
$$\frac{A_1}{x-x_0}, \quad \frac{A_2}{(x-x_0)^2}, \quad ..., \quad \frac{A_n}{(x-x_0)^n}.$$
3. Αν η ριζα x_0 ειναι μιγαδικη και απλη, τοτε η συζυγης $\overline{x}_0$ ειναι επισης ριζα του $Q(x)$ και το γινομενο $(x-x_0)(x-\overline{x}_0)$ θα ισουται με ax^2+bx+c οπου τα a,b,c θα ειναι πραγματικοι αριθμοι. Στην αναπτυξη της $P(x)/Q(x)$ θα εμφανιζεται *ενα* κλασμα της μορφης
$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}.$$
4. Τελος, αν η ριζα x_0 ειναι μιγαδικη και πολλαπλοτητας n, στην αναπτυξη της $P(x)/Q(x)$ θα εμφανιζονται n κλασματα της μορφης
$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^2}, ..., \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Ετσι, οποιαδηποτε ρητη συναρτηση $f(x)$ με βαθμο του $P(x)$ μικροτερο απο αυτο του $Q(x)$ μπορει να ολοκληρωθει με αναπτυξη σε στοιχειωδη κλασματα. Αν παλι ο βαθμος του $P(x)$ ειναι μεγαλυτερος του βαθμου του $Q(x)$, με *πολυωνυμικη διαιρεση* παιρνουμε
$$f(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$$
οπου τα $P_1(x)$, $P_2(x)$ ειναι πολυωνυμα και ο βαθμος του $P_2(x)$ μικροτερος απο αυτο του $Q(x)$. Ετσι μπορουμε και παλι να ολοκληρωσουμε την $f(x)$.

6.1.34. Παραδειγμα. Για να υπολογισουμε το $\int \frac{1}{x^2-1}dx$ θετουμε
$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)\cdot x + (A-B)}{x^2-1}.$$
Αρα
$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{A=\frac{1}{2}, B=-\frac{1}{2}\right\}$$
και εχουμε
$$\int \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c.$$

6.1.35. Παραδειγμα. Για να υπολογισουμε το $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$ θετουμε
$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}$$

απο το οποιο προκυπτει το συστημα

$$\begin{aligned} A+C&=1 \\ A+B+D&=1 \\ A+B+C&=0 \\ B+D&=0 \end{aligned}$$

με λυση, $A=1, B=0, C=-1, D=0$, δηλ.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx &= \int \frac{x}{x^2+1}dx - \int \frac{x}{x^2+x+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}\right)+c. \end{aligned}$$

6.1.36. Ασκηση. Υπολογισε το $\int \frac{1}{x^2-4}dx$.

6.1.37. Ασκηση. Υπολογισε το $\int \frac{x}{x^2-4}dx$.

6.1.38. Ασκηση. Υπολογισε το $\int \frac{1}{x^3-1}dx$.

6.1.39. Ασκηση. Υπολογισε το $\int \frac{x+3}{x^2+x+1}dx$.

6.2 Λυμενα Προβληματα

6.2.1. Αποδειξε οτι $\int xdx = \frac{1}{2}x^2+c$.
Λυση. Πραγματι $\left(\frac{1}{2}x^2+c\right)' = \frac{1}{2}2x+0 = x$.

6.2.2. Αποδειξε οτι $\int \cos x dx = \sin x + c$.
Λυση. Πραγματι $(\sin x + c)' = \cos x + 0 = \cos x$.

6.2.3. Υπολογισε το $\int x^4 dx$ και επαληθευσε την απαντηση.
Λυση. Εχουμε $\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5+c$. Παρατηρουμε δε οτι $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x^5+c\right) = x^4$.

6.2.4. Υπολογισε το $\int (2-5\sin x+e^x)\,dx$ και επαληθευσε την απαντηση.
Λυση. Εχουμε

$$\int (2-5\sin x+e^x)\,dx = \int 2dx - 5\int \sin x dx + \int e^x dx = 2x+5\cos x+e^x+c.$$

Παρατηρουμε δε οτι

$$\frac{d}{dx}(2x+5\cos x+e^x+c) = e^x - 5\sin x + 2.$$

6.2.5. Υπολογισε το $\int \frac{2x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx$ και επαληθευσε την απαντηση.
Λυση. Εχουμε

$$\int \frac{2x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx = \int 2x^{1/2}dx + \int dx + \int x^{-1/2}dx = 2\frac{x^{3/2}}{3/2}+x+\frac{x^{1/2}}{1/2} = \frac{4}{3}x^{3/2}+x+2x^{1/2}+c.$$

Παρατηρουμε δε οτι

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^{3/2}+x+2x^{1/2}+c\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(2x+\sqrt{x}+1\right).$$

6.2.6. Υπολογισε το $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$ και επαληθευσε την απαντηση.
Λυση. Εχουμε

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx = \int \sqrt{x\sqrt{x \cdot x^{1/2}}}dx = \int \sqrt{x\sqrt{x^{3/2}}}dx$$
$$= \int \sqrt{x \cdot x^{3/4}}dx = \int x^{7/8}dx = \frac{8}{15}x^{15/8} + c.$$

Παρατηρουμε δε οτι

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{8}{15}x^{15/8} + c\right) = x^{\frac{7}{8}}\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}.$$

6.2.7. Υπολογισε το $\int \frac{2x+\frac{3}{5}\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$ και επαληθευσε την απαντηση.
Λυση. Εχουμε

$$\int \frac{2x+\frac{3}{5}\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}dx = \frac{2}{3}\int \frac{x}{x^{2/3}}dx + \frac{1}{5}\int \frac{x^{1/2}}{x^{2/3}}dx = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{6}{5}x^{5/6} = \frac{1}{2}x^{4/3} + \frac{6}{25}x^{5/6} + c.$$

Παρατηρουμε δε οτι

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^{4/3} + \frac{6}{25}x^{5/6} + c\right) = \frac{1}{15\sqrt[6]{x}}\left(10\sqrt{x} + 3\right) = \frac{2x+\frac{3}{5}\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

6.2.8. Υπολογισε το $\int \left(\sqrt{x}-1\right)^2 \sqrt[3]{x}dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int \left(\sqrt{x}-1\right)^2 \sqrt[3]{x}dx = \int \left(x - 2x^{1/2} + 1\right)\cdot x^{1/3}dx$$
$$= \int \left(x^{4/3} - 2x^{2/3} + x^{1/3}\right)dx = \frac{3}{7}x^{7/3} - \frac{6}{5}x^{5/3} + \frac{3}{4}x^{4/3} + c.$$

6.2.9. Υπολογισε το $\int \cot^2 x dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int \cot^2 x dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx - \int dx = -\cot x - x + c.$$

6.2.10. Υπολογισε το $\int (1-2x)^{100}dx$.
Λυση. Θετοντας $u = 1-2x$, $du = -2dx$ εχουμε

$$\int (1-2x)^{100}dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{100}d(1-2x) = -\frac{1}{202}u^{101} + c = -\frac{1}{202}(1-2x)^{101} + c.$$

6.2.11. Υπολογισε το $\int \sqrt{16-x^2}dx$.
Λυση. Θετουμε $\sin u = \frac{x}{4}$, $\cos u du = \frac{dx}{4}$. Τοτε

$$\int \sqrt{16-x^2}dx = 4\int \sqrt{1-\sin^2 x}4\cos u du = 16\int \cos^2 u du = 16\int \frac{1+\cos 2u}{2}du$$
$$= 8\int du + 8\int \cos 2u du = 8u + 4\sin(2u).$$

Τωρα, $u = \arcsin\frac{x}{4}$. Επισης, $\sin(2u) = 2\sin u\cos u = 2\frac{x}{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{16}}$. Οποτε τελικα

$$\int \sqrt{16-x^2}dx = 8\arcsin\frac{x}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + c.$$

6.2.12. Υπολογισε το $\int \frac{dx}{3x^2-8x+5}$.
Λυση. Με συμπληρωση τετραγωνου εχουμε

$$3x^2 - 8x + 5 = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}.$$

Οποτε (με $u = x - \frac{4}{3}$) εχουμε

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 8x + 5} = \int \frac{du}{3u^2 - \frac{1}{3}} = \int \frac{\frac{1}{3}}{u^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} du = \frac{3}{2} \int \left(\frac{1}{3u-1} - \frac{1}{3u+1}\right) dt$$
$$= \frac{1}{2} \ln\left|u - \frac{1}{3}\right| - \frac{1}{2} \ln\left|u + \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{3x-5}{3x-3}\right| + c$$

6.2.13. Υπολογισε το $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx$.
Λυση. Θετουμε $u = e^x$, $du = e^x dx$ και εχουμε

$$\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx = \int \frac{1+u}{1-u} \cdot \frac{1}{u} du = \int \left(\frac{2}{1-u} - \frac{1}{u}\right) du = -2\ln|1-u| + \ln|u|$$
$$= -2\ln|1-e^x| + \ln e^x = -2\ln|1-e^x| + x + c.$$

6.2.14. Υπολογισε το $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+1} dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int \frac{2x-7}{x^2-7x+1} dx = \int \frac{\left(x^2-7x+1\right)'}{x^2-7x+1} dx == \int \frac{d\left(x^2-7x+1\right)}{x^2-7x+1} = \ln\left|x^2-7x+1\right| + c.$$

6.2.15. Υπολογισε το $\int \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x} dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int \frac{2x\sin x - x^2\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\left(x^2\right)'\sin x - x^2\left(\sin x\right)'}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{x^2}{\sin x}\right)' dx = \frac{x^2}{\sin x} + c$$

6.2.16. Υπολογισε το $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x)}$.
Λυση. Θετουμε $\cos u = x$, $-\sin u du = dx$. Τοτε

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\left(1+x\right)} = \int \frac{-\sin u du}{\sin u\left(1+\cos u\right)} = -\int \frac{du}{1+\cos u} = -\int \frac{du}{2\cos^2\frac{u}{2}} = -\frac{1}{2}\tan\frac{u}{2}$$
$$= \sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + c.$$

6.2.17. Υπολογισε το $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.
Λυση. Θετουμε $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$. Τοτε

$$\int \sin^3 x\cos^2 x dx = \int \sin^2 x\cos^2 x\sin x dx = -\int \left(1-u^2\right)u^2 du$$
$$= -\int \left(u^2 - u^4\right) du = -\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5}$$
$$= -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c.$$

6.2.18. Υπολογισε το $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int \sin^2 x\cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \left(\sin^2\left(2x\right)\right) dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos\left(4x\right)}{2} dx$$
$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}\int \cos\left(4x\right) dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin\left(4x\right) + c.$$

6.2.19. Υπολογισε το $\int \sin x \cos^3 x dx$.
Λυση. Θετω $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$. Τοτε

$$\int \sin x \cos^3 x dx = -\int \cos^3 x d(\cos x) = -\int u^3 du = -\frac{1}{4}u^4 = -\frac{1}{4}\cos^4 x + c.$$

6.2.20. Υπολογισε το $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\int \sin^2 \cos^4 x dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \frac{1}{4}(\sin 2x)^2 \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\, dx + \frac{1}{8}\int \sin^2(2x)\cos(2x)\, dx \\ &= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos(4x)}{2} dx + \frac{1}{16}\int \sin^2(2x)\, d(\sin(2x)) \\ &= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin(4x) + \frac{1}{48}\sin^3(2x) + c.\end{aligned}$$

6.2.21. Υπολογισε το $\int \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x} dx$.
Λυση. Θετουμε $u = x\sin x + \cos x$, $du = (\sin x + x\cos x - \sin x)\, dx$. Τοτε

$$\int \frac{x\cos x}{x\sin x + \cos x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(x\sin x + \cos x) + c.$$

6.2.22. Υπολογισε το $\int \sin^7 x dx$.
Λυση Με $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$ εχουμε

$$\begin{aligned}\int \sin^7 x dx &= \int \sin^6 x \sin x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^3 d(\cos x) = -\int \left(1-u^2\right)^3 du \\ &= -\int \left(1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6\right) du = -u + u^3 - \frac{3}{5}u^5 + \frac{u^7}{7} \\ &= \cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \cos^7 x + c.\end{aligned}$$

6.2.23. Υπολογισε το $\int \sin^4 x dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos(2x)}{2} + \frac{\cos^2(2x)}{4}\right) dx \\ &= \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2} dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{x}{8} + \frac{1}{32}\sin(4x) + c.\end{aligned}$$

6.2.24. Υπολογισε το $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}$.
Λυση. Θετοντας $u = (x+1)^{1/6}$ εχουμε $u^6 = x+1$, $6u^5 du = dx$. Τοτε

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{x+1}} &= 6\int \frac{\left(u^6-1\right)u^5}{u^3-u^2} du = 6\int \frac{\left(u^6-1\right)u^5}{u^2(u-1)} du \\ &= 6\int u^3\left(u^5+u^4+u^3+u^2+u+1\right) du \\ &= 6\left(\frac{u^9}{9} + \frac{u^8}{8} + \frac{u^7}{7} + \frac{u^6}{6} + \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4}\right)\end{aligned}$$

$$= 6\left(\frac{(x+1)^{9/6}}{9} + \frac{(x+1)^{8/6}}{8} + \frac{(x+1)^{7/6}}{7} + \frac{(x+1)}{6} + \frac{(x+1)^{5/6}}{5} + \frac{(x+1)^{4/6}}{4}\right)$$

6.2.25. Υπολογισε το $\int \sqrt[3]{1-2x}dx$.
Λυση. Θετοντας $u = 1-2x$, $du = -2dx$, εχουμε

$$\int \sqrt[3]{1-2x}dx = -\frac{1}{2}\int u^{1/3}du = -\frac{3}{8}u^{4/3} = -\frac{3}{8}(1-2x)^{4/3} + c.$$

6.2.26. Υπολογισε το $\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx$.
Λυση. Θετοντας $u = x^2+1$, $du = 2xdx$, εχουμε

$$\int \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{1}{2}\int u^{-3/2}du = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{1}u^{-1/2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + c.$$

6.2.27. Υπολογισε το $\int e^{3x+2}dx$
Λυση. Θετοντας $u = 3x+2$, $du = 3dx$, εχουμε

$$\int e^{3x+2}dx = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u = \frac{1}{3}e^{3x+2} + c.$$

6.2.28. Υπολογισε το $\int \frac{x}{(2x+5)^2}dx$.
Λυση. Θετοντας $u = 2x+5$, $du = 2dx$, εχουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(2x+5)^2}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(u-5)/2}{u^2}du = \frac{1}{4}\int \frac{u-5}{u^2}du = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} - \frac{5}{4}\int \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{1}{4}\ln|u| - \frac{5}{4}\cdot\frac{u^{-1}}{-1} = \frac{1}{4}\ln|2x+5| + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2x+5} + c.\end{aligned}$$

6.2.29. Υπολογισε το $\int x\sqrt{x-3}dx$.
Λυση. Θετοντας $u = x-3$, $du = dx$, εχουμε

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-3}dx &= \int (u+3)\,u^{1/2}du = \int \left(u^{3/2} + 3u^{1/2}\right)du \\ &= \frac{2}{5}u^{5/2} + 3\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{3/2} = \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + c.\end{aligned}$$

6.2.30. Υπολογισε το $\int \frac{\ln x}{x}dx$.
Λυση. Θετουμε $u = \ln x$, $du = dx/x$, οποτε

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int udu = \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c.$$

6.2.31. Υπολογισε το $\int \frac{x+1/2}{x^2+x+3}dx$.
Λυση. Θετουμε $u = x^2+x+3$, οποτε $du = (2x+1)\,dx$. Ετσι

$$\int \frac{x+1/2}{x^2+x+3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+3\right| + c.$$

6.2.32. Υπολογισε το $\int \frac{dx}{x+\sqrt{2x+3}}$.
Λυση. Θετουμε $u = \sqrt{2x+3}$, $udu = 2dx$. Τοτε

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x+\sqrt{2x+3}} &= \frac{1}{2}\int \frac{udu}{\frac{u^2-3}{2}+u} = \int \frac{u}{u^2+2u-3}du \\ &= \int \left(\frac{1}{2(u-1)} + \frac{3}{2(u+3)}\right)du = \frac{1}{2}\ln|u-1| + \frac{3}{2}\ln|u+3| \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2x+3}-1\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{2x+3}+3\right) + c.\end{aligned}$$

6.2.33. Υπολογισε το $\int x^3 e^x dx$.
Λυση. Θετοντας $f = x^3$, $g = e^x$, εχουμε

$$
\begin{aligned}
\int x^2 e^x dx &= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 \left(x^2 e^x - \int e^x dx^2 \right) \\
&= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 3 \int 2xe^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6 \left(xe^x - \int e^x dx \right) \\
&= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + c.
\end{aligned}
$$

6.2.34. Υπολογισε το $\int x \ln\left(1 + x^2\right)$.
Λυση. Θετοντας $f = x^2/2$, $g = \ln\left(1 + x^2\right)$, εχουμε

$$
\begin{aligned}
\int x \ln\left(1 + x^2\right) dx &= \frac{x^2}{2} \ln\left(1 + x^2\right) - \int \frac{x^2}{2} \frac{2x}{1 + x^2} dx = \frac{x^2}{2} \ln\left(1 + x^2\right) - \int \frac{x^2/2}{1 + x^2} d\left(x^2\right) \\
&= \frac{x^2}{2} \ln\left(1 + x^2\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right) + c.
\end{aligned}
$$

6.2.35. Υπολογισε το $\int \sin^2 x dx$.
Λυση. Εχουμε

$$
\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx = &- \int \sin(x) d(\cos(x)) \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int \cos(x) d(\sin(x)) = -\sin(x)\cos(x) + \int \cos^2(x) dx \\
&= -\sin(x)\cos(x) + \int (1 - \sin^2(x)) dx = -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x) dx.
\end{aligned}
$$

Δηλαδη

$$
\begin{aligned}
&\int \sin^2(x) = -\sin(x)\cos(x) + x - \int \sin^2(x) dx \Rightarrow 2 \int \sin^2(x) = -\sin(x)\cos(x) + x \Rightarrow \\
&\int \sin^2(x) = \frac{-\sin(x)\cos(x) + x}{2}.
\end{aligned}
$$

6.2.36. Υπολογισε το $\int x \arctan x dx$.
Λυση. Θετοντας $f = \frac{x^2}{2}$, $g = \arctan x$, εχουμε

$$
\begin{aligned}
\int x \arctan x dx &= \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} d\left(\arctan x\right) = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1 + x^2} dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\
&= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + c.
\end{aligned}
$$

6.2.37. Υπολογισε το $\int e^{ax} \sin\left(bx\right) dx$.
Λυση. Θα υπολογισουμε ταυτοχρονως τα $J_1 = \int e^{ax} \sin\left(bx\right) dx$ και $J_2 = \int e^{ax} \cos\left(bx\right) dx$.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \int e^{ax} \sin\left(bx\right) dx = \frac{1}{2} e^{ax} \sin\left(bx\right) x - \frac{1}{a} \int e^{ax} \left(\sin\left(bx\right)\right)' dx \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \sin\left(bx\right) - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos\left(bx\right) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin\left(bx\right) - \frac{b}{a} J_2. \\
J_2 &= \int e^{ax} \cos\left(bx\right) dx = \frac{1}{2} e^{ax} \cos\left(bx\right) x + \frac{1}{a} \int e^{ax} \left(\cos\left(bx\right)\right)' dx \\
&= \frac{1}{a} e^{ax} \cos\left(bx\right) + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin\left(bx\right) dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos\left(bx\right) + \frac{b}{a} J_1.
\end{aligned}
$$

Δηλ. εχουμε

$$J_1 + \frac{b}{a} J_2 = \frac{e^{ax}}{a} \sin(bx), \qquad -\frac{b}{a} J_1 + J_2 = \frac{e^{ax}}{a} \cos(bx).$$

Λυνοντας το συστημα ως προς J_1, J_2 παιρνουμε

$$J_1 = -\frac{be^{ax}\cos bx - ae^{ax}\sin bx}{a^2+b^2}, \qquad J_2 = \frac{ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx}{a^2+b^2}$$

6.2.38. Υπολογισε το $\int (\ln x)^2 \, dx$.
Λυση. Θετοντας $f = x$, $g = (\ln x)^2$, εχουμε

$$\begin{aligned}
\int (\ln x)^2 \, dx &= x \cdot (\ln x)^2 - \int x d\left((\ln x)^2\right) = x \cdot (\ln x)^2 - \int 2x \cdot (\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= x \cdot (\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx = x \cdot (\ln x)^2 - 2 \cdot \left(x \cdot \ln x - \int x d(\ln x)\right) \\
&= x \cdot (\ln x)^2 - 2 \cdot \left(x \cdot \ln x - \int x \frac{1}{x} dx\right) = x \cdot (\ln x)^2 - 2x \cdot \ln x + 2x + c.
\end{aligned}$$

6.2.39. Υπολογισε το $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.
Λυση. Εχουμε, με συμπληρωση τετραγωνου, οτι

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 + 1 = (x+2)^2 + 1.$$

Οποτε

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1} = \arctan(x+2) + c.$$

6.2.40. Υπολογισε το $\int \frac{x^2-10x+13}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$.
Λυση. Θετουμε

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-10x+13}{(x-1)(x-2)(x-3)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \\
&= \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
&= \frac{(A+B+C)x^2 - (5A+4B+3C)x + (6A+3B+2c)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.
\end{aligned}$$

Αρα

$$\begin{aligned}
A+B+C &= 1 \\
5A+4B+3C &= 10 \\
6A+3B+2C &= 13
\end{aligned}$$

Η λυση ειναι $A = 2$, $B = 3$, $C = -4$ και ετσι

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2-10x+13}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx &= \int \frac{2dx}{x-1} + \int \frac{3dx}{x-2} - \int \frac{4dx}{x-3} \\
&= 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| - 4\ln|x-3| + c.
\end{aligned}$$

6.2.41. Υπολογισε το $\int \frac{x^2-x-2}{x^3+x^2-6x} dx$.
Λυση. Εχουμε $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ και $x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2)$. Οποτε

$$\int \frac{x^2-x-2}{x^3+x^2-6x} dx = \int \frac{x+1}{x(x+3)} dx.$$

Εχουμε επισης

$$\frac{x+1}{x\,(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)\,x + 3A}{x\,(x+3)}$$

οποτε $A+B=1$, $3A=1$ και $A=1/3, B=2/3$ και

$$\int \frac{x^2-x-2}{x^3+x^2-6x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{1}{3}\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x+3| + c.$$

6.2.42. Υπολογισε το $\int \frac{dx}{x^4-x^3+x^2}$.
Λυση. Εχουμε

$$x^4-x^3+x^2 = x^2\cdot\left(x^2-x+1\right)$$

και ο ορος x^2-x+1 δεν εχει πραγματικες ριζες. Οποτε θετουμε

$$\frac{1}{x^4-x^3+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} = \frac{(A+C)\,x^3 + (-A+B+D)\,x^2 + (A-B)\,x + B}{x^2\,(x^2-x+1)}.$$

Οποτε εχουμε

$$\begin{aligned} A+C&=0\\ -A+B+D&=0\\ A-B&=0\\ B&=1 \end{aligned}$$

που εχει λυση $A=1$, $B=1$, $C=-1$, $D=0$. Ετσι

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^4-x^3+x^2} &= \int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x^2} - \int\frac{xdx}{x^2-x+1}\\ &= \ln x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right) + c.\end{aligned}$$

6.2.43. Υπολογισε το $\int \frac{x^4-3x^3-3x^2+10}{(x+1)^2(x-3)}dx$.
Λυση. Αφου $(x+1)^2\,(x-3) = x^3-x^2-5x-3$, ο βαθμος του αριθμητη ειναι υψηλοτερος αυτου του παρονομαστη, αρα πρεπει να εκτελεσουμε πολυωνυμικη διαιρεση. Εχουμε

$$\begin{array}{rrrrr|l} x^4 & -3x^3 & -3x^2 & +0x & +10 & x^3-x^2-5x-3 \\ \cline{6-6} x^4 & -x^3 & -5x^2 & -3x & & x-2 \\ \cline{1-5} & -2x^3 & +2x^2 & +3x & +10 & \\ & -2x^3 & +2x^2 & +10x & +6 & \\ \cline{2-5} & & & -7x & +4 & \end{array}$$

που δινει πηλικο $x-2$ και υπολοιπο $-7x+4$, δηλ.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-3x^3-3x^2+10}{(x+1)^2\,(x-3)}dx &= \int\left(x-2+\frac{-7x+4}{(x+1)^2\,(x-3)}\right)dx\\ &= \frac{x^2}{2} - 2x - \int\frac{7x-4}{(x+1)^2\,(x-3)}dx.\end{aligned}$$

Για το τελευταιο ολοκληρωμα εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{7x-4}{(x+1)^2\,(x-3)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x-3)}\\ &= \frac{(A+C)\,x^2 + (-2A+B+2C)\,x + (-3A-3B+C)}{(x-3)\,(x+1)^2}\end{aligned}$$

οποτε

$$\begin{aligned} A+C&=0\\ -2A+B+2C&=7\\ -3A-3B+C&=-4 \end{aligned}$$

με λυση $A=-\frac{17}{16}$, $B=\frac{11}{4}$, $C=\frac{17}{16}$ και ετσι

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-4}{(x+1)^2(x-3)}dx &= \int \left(\frac{-17/16}{x+1}+\frac{11/4}{(x+1)^2}+\frac{17/16}{x-3}\right)dx \\ &= -\frac{11}{4(x+1)}-\frac{17}{16}\ln(x+1)+\frac{17}{16}\ln(x-3). \end{aligned}$$

Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ισουται με

$$\frac{x^2}{2}-2x+\frac{11}{4(x+1)}+\frac{17}{16}\ln(x+1)-\frac{17}{16}\ln(x-3).$$

6.2.44. Υπολογισε το $\int \frac{2x^3-5x^2-12x+5}{2x+3}dx$.
Λυση. Εδω απαιτειται η χρηση πολυωνυμικης διαιρεσης του $2x^3-5x^2-12x+5$ με το $2x+3$. Εχουμε

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -5x^2 & -12x & +5 & 2x+3 \\ \cline{5-5} 2x^3 & +3x^2 & & & x^2-4x \\ \hline & -8x^2 & -12x & +5 & \\ & -8x^2 & -12x & & \\ \cline{2-4} & & & +5 & \end{array}$$

που δινει πηλικο x^2-4x και υπολοιπο 5, δηλ.

$$\frac{2x^3-5x^2-12x+5}{2x+3}=x^2-4x+\frac{5}{2x+3}.$$

Οποτε εχουμε

$$\int \frac{2x^3-5x^2-12x+5}{2x+3}dx=\int\left(x^2-4x+\frac{5}{2x+3}\right)dx=\frac{x^3}{3}-2x^2+\frac{5}{2}\ln|2x+3|+c.$$

6.2.45. Υπολογισε το $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-4}}dx$.
Λυση. Πολλαπλασιαζω με $\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-4}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-4}}$ και εχω

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-4}}dx &= \int \frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-4}}{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-4}}dx \\ &= \int \frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-4}}{(3x+1)+(3x-4)}dx \\ &= \int \frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-4}}{(3x+1)-(3x-4)}dx \\ &= \frac{1}{5}\int\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-4}\right)dx \\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{3}\frac{2}{3}(3x+1)^{3/2}+\frac{1}{5}\frac{1}{3}\frac{2}{3}(3x-4)^{3/2} \\ &= \frac{2}{45}\left((3x+1)^{3/2}+(3x-4)^{3/2}\right). \end{aligned}$$

6.2.46. Υπολογισε το $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-4x+1)}}dx$.

Λυση. Ειναι

$$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2-4x+1)}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(2-x)^2-3}}dx.$$

Θετω $t = 2-x$ και εχω

$$\int \frac{1}{\sqrt{(2-x)^2-3}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-3}}dt = -\log\left|t+\sqrt{t^2-3}\right| = -\log\left|(2-x)+\sqrt{(2-x)^2-3}\right|.$$

6.2.47. Υπολογισε το $\int \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{1/2} dx$.

Λυση. Θετω $x = t^2$ και εχω

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{1/2} dx &= \int \left(\frac{1-t}{1+t}\right)^{1/2} \frac{2t}{t^2}dt = 2\int \frac{1-t}{t\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= 2\int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}dt - 2\int \frac{t}{t\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= -2\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right) - 2\arcsin\sqrt{x}.\end{aligned}$$

6.2.48. Υπολογισε το $\int \sqrt{1+\sin\left(\frac{x}{4}\right)}dx$.

Λυση. Ειναι

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+\sin\left(\frac{x}{4}\right)}dx &= \int \sqrt{\sin^2\left(\frac{x}{8}\right) + \cos^2\frac{x}{8} + 2\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}}dx \\ &= \int \left(\sin\frac{x}{8} + \cos\frac{x}{8}\right) dx = -8\cos\frac{x}{8} + 8\sin\frac{x}{8}.\end{aligned}$$

6.2.49. Υπολογισε το $\int \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}dx$.

Λυση. Θετω $t = \frac{1}{x}$ και εχω

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}dx &= \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\left(\left(\frac{1}{t}\right)^2-1\right)\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+1}}dt \\ &= -\int \frac{t}{(1-t^2)\sqrt{1+t^2}}dt.\end{aligned}$$

Τωρα θετω $y = \sqrt{1+t^2}$ και εχω

$$-\int \frac{t}{(1-t^2)\sqrt{1+t^2}}dt = \int \frac{y}{(1-(y^2-1))\,y}dy = -\int \frac{dy}{2-y^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{y-\sqrt{2}}{y+\sqrt{2}}\right|$$

και με διαδοχικες αντικαταστασεις τελικα παιρνω

$$\int \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}x}\right|.$$

6.2.50. Υπολογισε το $\int \frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}dx$.

Λυση. Θετω και $x = \sin^2 t$ και εχω

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}dx &= \int \frac{2\sin t\cos t}{(1+\sin t)\sqrt{\sin^2 t - \sin^4 t}}dt \\
&= \int \frac{2\sin t\cos t}{(1+\sin t)\sin t\cos t}dt \\
&= \int \frac{2}{1+\sin t}dt = 2\int \frac{1-\sin t}{1-\sin^2 t}dt = 2\int \frac{1-\sin t}{\cos^2 t}dt \\
&= 2\int \sec^2 t dt - 2\int \sec t\tan t dt = (2\tan t - \sec t) \\
&= 2\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).
\end{aligned}$$

6.2.51. Υπολογισε το $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^4-1}}dx$.
Λυση. Θετω $\sin t = \frac{1}{x^2}$ και εχω

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^4-1}}dx = -\int \frac{1}{x\sqrt[4]{1-\frac{1}{x^4}}}dx = -\frac{1}{2}\int \csc t dt = \frac{1}{2}\ln|\csc t - \cot t| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + \sqrt{x^4-1}\right|$$

6.2.52. Υπολογισε το $\int \frac{\cos 5x + \cos 4x}{1-2\cos 3x}dx$.
Λυση. Ειναι

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos 5x + \cos 4x}{1-2\cos 3x}dx &= \int \frac{\sin 3x\,(\cos 5x + \cos 4x)}{\sin 3x\,(1-2\cos 3x)}dx \\
&= \int \frac{\sin 3x\,(\cos 5x + \cos 4x)}{\sin 3x - \sin 6x}dx \\
&= \int \frac{2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}2\cos\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}}{-2\cos\frac{9x}{2}\sin\frac{3x}{2}}dx \\
&= -2\int 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}dx \\
&= -\int (\cos 2x + \cos x)\,dx = -\frac{\sin 2x}{2} - \sin x.
\end{aligned}$$

6.2.53. Υπολογισε το $\int x^2 \ln|x|\,dx$.
Λυση. Ειναι

$$\int x^2 dx = \int x^3 \frac{1}{x}dx$$

και αρα

$$\begin{aligned}
\int x^2 dx = x^3\ln|x| - \int 3x^2\ln|x|\,dx &\Rightarrow \\
3\int x^2\ln|x| = x^3\ln|x| - \int x^2 dx = x^3\ln|x| - \frac{x^3}{3} &\Rightarrow \\
\int x^2\ln|x| = \frac{1}{3}x^3\ln|x| - \frac{x^3}{9}.
\end{aligned}$$

6.2.54. Υπολογισε το $\int \cos(\ln|x|)\,dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\int \cos(\ln|x|)\,dx &= x\cos(\ln|x|) - \int x\left(-\frac{\sin(\ln|x|)}{x}\right)dx \\
&= x\cos(\ln|x|) + \int \sin(\ln|x|)\,dx \\
&= x\cos(\ln|x|) + x\sin(\ln|x|) - \int \frac{\cos(\ln|x|)}{x}x dx.
\end{aligned}$$

Οποτε

$$\int \cos(\ln|x|)\,dx = \frac{x}{2}\left(\cos(\ln|x|) + \sin(\ln|x|)\right).$$

6.3 Αλυτα Προβληματα

6.3.1. Αποδειξε οτι:

1. $\int 3dx = 3x + c$.
2. $\int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6 + c$.
3. $\int \sqrt{x}dx = \frac{3}{2}x^{3/2} + c$.
4. $\int x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2}\cos x^2 + c$.
5. $\int \frac{x^2+1}{x^3}dx = \frac{1}{2x^2}\left(2x^2 \ln x - 1\right)$.

6.3.2. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int x^3 dx$. *Απ.* $\frac{1}{4}x^4 + c$.
2. $\int (2x+4)dx$. *Απ.* $x^2 + 4x$, με $u = 2x+4$, $du = 2dx$).
3. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+5}}dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}\sqrt{(x^4+5)}$, με $u = x^4$ $du = 4x^3dx$).
4. $\int \frac{x^2+2}{(x^3+6x+1)}dx$. *Απ.* $\frac{1}{3}\ln\left(x^3+6x+1\right)$, με $u = x^3+6x+1$, $du = (3x^2+6)dx$).
5. $\int \frac{dx}{4x-1}$. *Απ.* $\frac{1}{4}\ln(4x-1)$, με $u = 4x-1$, $du = 4dx$.
6. $\int (e^x+2)^2 e^x dx$. *Απ.* $\frac{1}{3}\left(e^x+2\right)^3$, με $u = e^x$, $du = e^x dx$.
7. $\int \frac{\sin(2x)+\cos(2x)}{\cos(2x)}dx$. *Απ.* $\int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}dx + \int \frac{\cos(2x)}{\cos(2x)}dx = -\frac{1}{2}\ln(\cos 2x) + x$.
8. $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$. *Απ.* $\arcsin \frac{1}{3}x$, με $u = \frac{x}{3}$, $du = \frac{1}{3}dx$.
9. $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}\arcsin \frac{2}{3}x$, με $u = \frac{2}{3}x$, $du = \frac{2}{3}dx$.
10. $\int \frac{1}{4x^2+25}dx$. *Απ.* $\frac{1}{10}\arctan \frac{2}{5}x$, με $u = \frac{2}{5}x$, $du = \frac{2}{5}dx$.
11. $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$. *Απ.* $-e^{\frac{1}{x}}$, με $u = \frac{1}{x}$.
12. Υπολογισε το $\int \frac{1}{e^{2x}+1}dx$. *Απ.* $-\frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right) + \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}\right)$, με $u = e^{2x}+1, du = 2e^x dx$.

6.3.3. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int e^{2x}\cos(e^{2x})dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}\sin\left(e^{2x}\right)$, με $u = e^{2x}, du = 2e^{2x}dx$.
2. $\int \frac{1}{\sqrt{4-(x+2)^2}}dx$. *Απ.* $\arcsin\left(\frac{1}{2}x+1\right)$, με $u = \frac{1}{2}x, du = \frac{1}{2}dx$.
3. $\int \frac{1}{\sqrt{-4x-x^2}}dx$. *Απ.* $\arcsin\left(\frac{1}{2}x+1\right)$, δες το παραπανω.
4. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^{-2x}}$. *Απ.* $\frac{1}{2}\arctan\left(e^{2x}\right)$, με $u = e^{2x}, du = 2e^{2x}dx$.
5. $\int \frac{1}{9x^2-4}dx$. *Απ.* $\frac{1}{12}\ln(3x-2) - \frac{1}{12}\ln(3x+2)$.
6. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4}}dx$. *Απ.* $\sqrt{x^2+4} + 3\,\mathrm{arcsinh}\,\frac{1}{2}x$, με $u = x^2+4$, και διασπωντας το ολοκληρωμα σε δυο μερη.

7. $\int \frac{1}{\sqrt{10+4x-x^2}}dx$. *Απ.* $\arcsin \frac{1}{14}\sqrt{14}\,(x-2)$, με συμπληρωση του τετραγωνου.

8. $\int \frac{x+4}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$. *Απ.* $-\sqrt{(5-4x-x^2)}+2\arcsin\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)$, με $u=x+3$, συμπληρωση του τετραγωνου και διασπαση του ολοκληρωματος σε δυο μερη.

6.3.4. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int \cos^3 x dx$. *Απ.* $\frac{1}{3}\cos^2 x \sin x+\frac{2}{3}\sin x$, με $u=\sin x$.

2. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$. *Απ.* $-\frac{1}{4}\sin x \cos^3 x+\frac{1}{8}\cos x \sin x+\frac{1}{8}x$, με $\sin^2 x \cos^2 x=\sin^2 2x$.

3. $\int \cos^2(x)\sin(x)dx$. *Απ.* $-\frac{1}{3}\cos^3 x$, με $u=\cos x, du=-\sin x dx$.

4. $\int \frac{1}{1+\cos(x)}dx$. *Απ.* $\tan\frac{1}{2}x$, με αντικαταсταση $\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$.

5. $\int \sin 2x \cos 4x dx$. *Απ.* $-\frac{1}{12}\cos 6x+\frac{1}{4}\cos 2x$, με $\sin 2x\cos 4x=\frac{1}{2}\sin 6x-\frac{1}{2}\sin 2x$.

6.3.5. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int \sinh\frac{x}{2}dx$. *Απ.* $2\cosh\frac{1}{2}x$.

2. $\int e^x \sinh x dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}\cosh x\sinh x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\cosh^2 x$, με $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

3. $\int \frac{1}{\sqrt{9x^2-4}}dx$. *Απ.* $\frac{1}{3}\ln\left(3x+\sqrt{(9x^2-4)}\right)$, με $u=\frac{3}{2}x$.

4. $\int \sqrt{4x^2+9}dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}x\sqrt{(4x^2+9)}+\frac{9}{4}\operatorname{arcsinh}\frac{2}{3}x$, με $u=\operatorname{arcsinh}\frac{2}{3}x$.

5. $\int \frac{1}{9x^2-4}dx$. *Απ.* $\frac{1}{12}\ln(3x-2)-\frac{1}{12}\ln(3x+2)$, με $u=\frac{3}{2}x$.

6. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{9+x^2}}dx$. *Απ.* $-\frac{1}{9x}\sqrt{(9+x^2)}$, με $x=3\tan u, dx=(1+\frac{x^2}{9})du$.

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-9)}+\frac{9}{2}\ln\left(x+\sqrt{(x^2-9)}\right)$, με $x=\frac{2}{\cos(z)}, dx=\frac{1}{3}\frac{\tan(z)}{\cos(z)}dz$.

8. $\int \frac{\sqrt{4-9x^2}}{x}dx$. *Απ.* $\sqrt{(4-9x^2)}-2\operatorname{arctanh}\frac{1}{2}\sqrt{(4-9x^2)}$, με $x=\frac{2}{3}\sin(z), dx=\frac{2}{3}\cos z dz$.

9. $\int \frac{1}{x\sqrt{9+4x^2}}dx$. *Απ.* $-\frac{1}{3}\operatorname{arctanh}\frac{1}{3}\sqrt{(9+4x^2)}$, με $x=\frac{3}{2}\tan(u), dx=\frac{3}{2\cos^2(z)}dz)$.

10. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx$.
Απ. $-\frac{1}{2}x\sqrt{(2x-x^2)}-\frac{3}{2}\sqrt{(2x-x^2)}+\frac{3}{2}\arcsin(x-1)$, με $x-1=\sin(z), dx=\cos(z)dz$.

11. $\int \frac{1}{x\sqrt{4-2x}}dx$. *Απ.* $-\operatorname{arctanh}\frac{1}{2}\sqrt{(4-2x)}$, με $4-2x=z^2, dx=-\frac{1}{2}zdz$.

12. $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x+3}}dx$. *Απ.* $-\operatorname{arctanh}\frac{1}{2}\sqrt{(x+3)}$, με $x+3=u^2, dx=2udu$.

13. $\int \frac{1}{(9+x^2)^{3/2}}dx$. *Απ.* $\frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{(9+x^2)}}$.

14. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx$. *Απ.* $\frac{2}{5}\left(\sqrt{x+1}\right)^5-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3+2\sqrt{x+1}$.

6.3.6. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int \frac{1}{x^{1/3}-x^{2/3}}dx$.
Απ. $-3\sqrt[3]{x}-2\ln(\sqrt[3]{x}-1)+\ln\left((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1\right)-\ln(x-1)$, με $x=u^3, dx=3u^2du$.

2. $\int \frac{1}{1+\sin(x)-\cos(x)}dx$. *Απ.* $\ln\left(\tan\frac{1}{2}x\right)-\ln\left(\tan\frac{1}{2}x+1\right)$, με $\sin(x)=\frac{2u}{1+u^2}, dx=\frac{2}{1+u^2}dz$.

3. $\int \frac{1}{3+\sin(x)} dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}\sqrt{2} \arctan \frac{1}{8}\left(6 \tan \frac{1}{2}x + 2\right)\sqrt{2}$.

4. $\int x \sin x dx$. *Απ.* $\sin x - x \cos x$.

5. $\int x^3 \ln x dx$.
Απ. $\int \ln(x) d(\frac{1}{4}x^4) = \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{4}\int x^4 d(\ln(x)) = \frac{1}{4}x^4 \ln(x) - \frac{1}{4}\int x^4 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4$.

6. $\int \arcsin x dx$. *Απ.* $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

7. $\int x^2 \sin x dx$. *Απ.* $-x^2 \cos x + 2\cos x + 2x \sin x$.

8. $\int \tan^{-1} x dx$. *Απ.* $x \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

9. $\int x^2 e^{-2x} dx$. *Απ.* $-\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$.

10. $\int \cos(\ln(x)) dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}x\left(\sin(\ln x) + \cos(\ln x)\right)$.

6.3.7. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int \frac{1}{x^2-9} dx$. *Απ.* $\left(\frac{1}{6}\ln(x-3) - \frac{1}{6}\ln(x+3)\right)$.

2. $\int \frac{x+1}{x^2+5x+6} dx$. *Απ.* $\int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+2}\right) dx = 2\ln(x+3) - \ln(x+2)$.

3. $\int \frac{x+2}{x^3-x^2-x+1} dx$. *Απ.* $\int \left(\frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)}\right) dx = \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{3}{2(x-1)} - \frac{1}{4}\ln(x-1)$.

4. $\int \frac{x+1}{(x+2)^3} dx$. *Απ.* $\int \left(-\frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x+2)^2}\right) dx = \frac{1}{2(x+2)^2} - \frac{1}{x+2}$.

5. $\int \frac{x^2+x+3}{x-2+x^3-2x^2} dx$. *Απ.* $\int \left(\frac{9}{5(x-2)} - \frac{1}{5}\frac{3+4x}{1+x^2}\right) dx = \frac{9}{5}\ln(x-2) - \frac{2}{5}\ln\left(1+x^2\right) - \frac{3}{5}\arctan x$.

6. $\int \frac{1}{x^2+7x+6} dx$. *Απ.* $-\frac{1}{5}\ln(x+6) + \frac{1}{5}\ln(x+1)$.

7. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx$. *Απ.* $x + \ln(x+2) + 4\ln(x-4)$.

8. $\int \frac{1}{x^3+x} dx$. *Απ.* $\ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$.

9. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2} dx$. *Απ.* $-\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)$.

10. $\int \frac{1}{e^{2x}-4e^x} dx$. *Απ.* $\frac{1}{4e^x} - \frac{1}{16}\ln(e^x) + \frac{1}{16}\ln(e^x-4)$.

6.3.8. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int \tan^2 x dx$. *Απ.* $\tan x - x$.

2. $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$. *Απ.* $-4\frac{\sin 2x}{\cos 4x - 1}$.

3. $\int \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$. *Απ.* $-\frac{1}{\cos 4x - 1}\left(2\cos x + 2\sin x - 2\cos 3x + 2\sin 3x\right)$.

4. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1+\sin 2x}} dx$.
Απ.$-\frac{1}{4\sin^2 x}\left(\ln\left(\frac{2-2\cos x}{2+2\cos x}\right) + 4\sin x + \ln(2-2\cos x)\cos 2x - \ln(2\cos x+2)\cos 2x\right)$.

6.3.9. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} dx$. *Απ.* $\sqrt{x^3+1}\left(\frac{2}{9}x^3 - \frac{4}{9}\right)$.

2. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-2}} dx$. *Απ.* $\frac{1}{3}x\sqrt{x-2} - \frac{2}{3}\sqrt{x-2} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

3. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$. *Απ.* $\arcsin\left(e^x\right)$.

4. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$. *Απ.* $\arctan\left(e^x\right)-\frac{1}{2}\pi$.

6.3.10. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int \frac{1}{x(x^2-1)}dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)-\ln x$.

2. $\int \frac{x}{x^4+2x^2+1}dx$. *Απ.* $-\frac{1}{2(x^2+1)}$.

3. $\int \frac{x^2}{x^4+2x^2+1}dx$. *Απ.* $-\frac{1}{4(x^2+1)}\left(\pi+2x-2\arctan x+\pi x^2-2x^2\arctan x\right)$.

4. $\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}dx$. *Απ.* $\ln\left(e^x-2\right)-\ln\left(e^x-1\right)$.

6.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

6.4.1. Υπολογισε το $\int \left(1+2x^2\right)e^{x^2}dx$. *Απ.* xe^{x^2}.

6.4.2. Υπολογισε το $\int \frac{x^2+1}{x^4-x^2+1}dx$. *Απ.* $\arctan x^3-\frac{1}{2}\pi+\arctan x$.

6.4.3. Υπολογισε το $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}dx$. *Απ.* $\frac{1}{3}\arctan x^3-\frac{1}{2}\pi+\arctan x$.

6.4.4. Υπολογισε το $\int \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$.

6.4.5. Υπολογισε το $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$.

6.4.6. Υπολογισε το $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}dx$.

6.4.7. Υπολογισε το $\int x^x\left(1+\ln x\right)dx$.

6.4.8. Υπολογισε το $\int \sin\left(\arccos x\right)dx$.

6.4.9. Υπολογισε το $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x-x^2}}dx$.

6.4.10. Υπολογισε το $\int \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}dx$.

6.4.11. Υπολογισε το $\int \frac{1}{1-\sin^4 x}dx$.

6.4.12. Υπολογισε το $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx$.

6.4.13. Υπολογισε το $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

6.4.14. Υπολογισε το $\int \frac{1+\cos 2x}{1+\cos^2 x}dx$.

6.4.15. Υπολογισε το $\int \frac{\cos 4x+1}{\cot x-\tan x}dx$.

6.4.16. Υπολογισε το $\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}dx$.

6.4.17. Υπολογισε το $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

6.4.18. Υπολογισε το $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$.

6.4.19. Υπολογισε το $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{(x-1)^3}}dx$.

6.4.20. Υπολογισε το $\int \sqrt{x^3\sqrt{x^4\sqrt{x^5\sqrt{\ldots}}}}dx$.

7 Ορισμενο Ολοκληρωμα και Εμβαδον

Το ορισμενο ολοκληρωμα ειναι ενα *απειρο αθροισμα απειροστικα μικρων ποσοτητων*. Γεωμετρικα μπορει να ερμηνευθει ως *εμβαδον*.

7.1 Θεωρια και Παραδειγματα

7.1.1. Θα ορισουμε το ορισμενο ολοκληρωμα (της συναρτησης f πανω στο διαστημα $[a,b]$) ως το οριο ενος αθροισματος. Γεωμετρικα, το οριο αυτο ερμηνευεται ως το εμβαδον του σχηματος το οποιο οριζεται απο την καμπυλη (συνολο σημειων)

$$\{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$$

και τις ευθειες $x = a, x = b$ και $y = 0$ (η οποια ειναι ο αξονας των x). Για να διατυπωθουν τα ανωτερω, πρεπει πρωτα να ορισουμε καποιες βοηθητικες εννοιες. Η γεωμετρικη ερμηνεια των ορισμων οι οποιοι ακολουθουν μπορει να γινει ευκολα κατανοητη απο τα Σχηματα 7.1 και 7.2.

7.1.2. Ορισμος. Μια *διαμεριση* του $[a,b] \subseteq (-\infty, +\infty)$ ειναι ενα διατεταγμενο συνολο σημειων $P_{[a,b]} = (x_0, x_1, x_2, ..., x_{N-1}, x_N)$ τετοιων ωστε

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{N-1} < x_N = b.$$

Το *πλατος* της διαμερισης οριζεται ως:

$$w\left(P_{[a,b]}\right) = \max_{n \in \{1,...,N\}} \left(x_{N-1} - x_N\right).$$

7.1.3. Ορισμος. Η *ενωση* των $P_{[a,b]} = (x_0, x_1, ..., x_{M-1}, x_M)$ και $Q_{[a,b]} = (y_0, y_1, , ..., y_{N-1}, y_N)$ συμβολιζεται με $P_{[a,b]} \cup Q_{[a,b]}$ και οριζεται να ειναι το διατεταγμενο συνολο σημειων το οποιο εχει στοιχεια αυτα του συνολου

$$\{x_0, x_1, ..., x_{M-1}, x_M\} \cup \{y_0, y_1, ..., y_{N-1}, y_N\}.$$

Δηλ.

$$P_{[a,b]} \cup Q_{[a,b]} = (z_0, z_1, ..., z_{K-1}, z_K)$$

οπου καθε z_k ανηκει ειτε στην $P_{[a,b]}$ ειτε στην $Q_{[a,b]}$ (ειτε και στις δυο) και

$$a = z_0 < z_1 < ... < z_{K-1} < z_K = b.$$

Προφανως η $P_{[a,b]} \cup Q_{[a,b]}$ ειναι επισης μια διαμεριση του $[a,b]$.

7.1.4. Συμβολισμος. Δεδομενης διαμερισης $P_{[a,b]}$ του $[a,b]$, οριζουμε

$$\forall n \in \{1, ..., N\} : \delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

7.1.5. Ορισμος. Δεδομενων: (α) διαστηματος $[a,b] \subseteq (-\infty, +\infty)$, (β) συναρτησης $f : [a,b] \to (-\infty, +\infty)$ και (γ) διαμερισης $P_{[a.b]}$, ενα *αθροισμα Riemann* εχει την μορφη

$$\mathbf{I}\left(P_{[a.b]}|f\right) = \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n)\, \delta x_n = \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})$$

οπου

$$\forall n \in \{1, 2, ..., N\} : \xi_n \in [x_{n-1}, x_n].$$

7.1.6. Ορισμος. Λεμε οτι «*τα αθροισματα Riemann* $\mathbf{I}\left(P_{[a.b]}|f\right)$ *εχουν οριο το* $\mathbf{I}(a,b|f)$ *οταν το πλατος της διαμερισης τεινει στο 0*» και γραφουμε

$$\lim_{w\left(P_{[a,b]}\right)\to 0} \mathbf{I}\left(P_{[a.b]}|f\right) = \mathbf{I}(a,b|f).$$

ανν

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : w\left(P_{[a,b)}\right) < \delta \Rightarrow \left|\mathbf{I}\left(P_{[a.b]}|f\right) - \mathbf{I}(a,b|f)\right| < \varepsilon.$$

7.1.7. Συμβολισμος. Αν $\lim_{w\left(P_{[a,b]}\right)\to 0} \mathbf{I}\left(P_{[a.b]}|f\right) = \mathbf{I}(a,b|f)$ τοτε συμβολιζουμε το $\mathbf{I}(a,b|f)$ και ως εξης:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mathbf{I}(a,b|f).$$

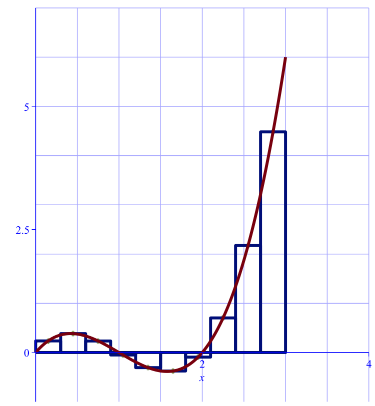
7.1.8. Πιο απλα μπορουμε να γραψουμε ολα τα παραπανω ως εξης:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{w\left(P_{[a,b]}\right)\to 0} \sum_{n=1}^{N} f(\xi_n)\, \delta x_n.$$

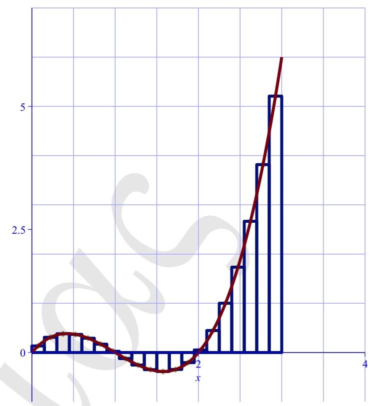
Απο το Σχημα 7.1 παιρνουμε την ιδεα να ερμηνευσουμε το $\int_a^b f(x)\, dx$ ως το εμβαδον το οποιο περικλειεται απο την καμπυλη $\{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$ και τις ευθειες $x = a, x = b$ και $y = 0$. Δηλαδη το συνολικο εμβαδον ειναι το αθροισμα των εμβαδων $f(\xi_n)\,\delta x_n$ τα οποια αντιστοιχουν στα μικρα παραλληλογραμμα στα οποια αποσυνθετουμε το συνολικο σχημα· καθως το μηκος της βασης των παραλληλογραμμων τεινει στο 0, η *προσεγγιση* του αρχικου σχηματος απο την ενωση ολων των παραλληλογραμμων γινεται ολο και καλυτερη. Μπορουμε μαλιστα να πουμε οτι το συνολικο εμβαδον E ισουται με το αθροισμα των στοιχειωδων εμβαδων $dE = f(x)\, dx$:

$$E = \int_a^b dE = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Δηλαδη το συμβολο $\int_a^b$ συμβολιζει αθροιση και *το ορισμενο ολοκληρωμα* $\int_a^b f(x)\, dx$ *ειναι ενα απειρο αθροισμα*. Αυτη η ερμηνεια θα φανει χρησιμη στον υπολογισμο και αλλων μεγεθων (εκτος του εμβαδου) οπως θα δουμε στο Κεφαλαιο 8. Η γενικη ιδεα ειναι οτι διασπουμε μια ποσοτητα σε *απειροστα* μικρες συνιστωσες τις οποιες κατοπιν αθροιζουμε με ορισμενη ολοκληρωση.



Σχήμα 7.1



Σχήμα 7.2

7.1.9. Επιστρεφοντας στο εμβαδο, η παραπανω αναλυση δεν ειναι απολυτα αυστηρη, διοτι *δεν εχουμε ορισει τι ειναι το εμβαδον*. Θα παρουσιασουμε στο τελος του παροντος κεφαλαιου μια εναλλακτικη προσεγγιση, η οποια ξεκινα με τον *αξιωματικο* ορισμο του εμβαδου.

7.1.10. Συμβολισμος. Αν υπαρχει το $\int_a^b f(x)\,dx$ (οπου $a \leq b$) οριζουμε

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

7.1.11. Θεωρημα. *Αν η $f:[a,b]\to(-\infty,+\infty)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$ τοτε υπαρχει το $\int_a^b f(x)\,dx$.*
Αποδειξη. Αφου η f ειναι συνεχης στο *κλειστο διαστημα* $[a,b]$ ειναι και *ομοιομορφα συνεχης* στο $[a,b]$. Οποτε επιλεγουμε $\delta>0$ τετοιο ωστε

$$|s-t|<\delta \Rightarrow |f(s)-f(t)|<\varepsilon.$$

Εστω $P_{[a,b]}$ και $Q_{[a,b]}$ διαμερισεις με $w\left(P_{[a,b]}\right)<\delta$ και $w\left(Q_{[a,b]}\right)<\delta$. Εστω

$$R_{[a,b]} = P_{[a,b]} \cup Q_{[a,b]} = (z_0, z_1, ..., z_K);$$

προφανως $w\left(R_{[a,b]}\right)<\delta$. Τελος, εστω

$$\forall n \in \{1,...,N\} : \delta x_n = x_n - x_{n-1},$$
$$\forall n \in \{1,...,N\} : \delta z_n = z_n - z_{n-1}.$$

Τοτε

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbf{I}\left(P_{[a.b]}|f\right)-\mathbf{I}\left(R_{[a.b]}|f\right)\right| &= \left|\sum_{n=1}^{N} f\left(\xi_n\right)\delta x_n-\sum_{k=1}^{K} f\left(\zeta_k\right)\delta z_k\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{N} f\left(\xi_n\right)\delta x_n-\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{[z_{k-1},z_k]\subseteq[x_{n-1},x_n]} f\left(\zeta_k\right)\delta z_k\right)\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{N} f\left(\xi_n\right)\left(\sum_{[z_{k-1},z_k]\subseteq[x_{n-1},x_n]}\delta z_k\right)-\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{[z_{k-1},z_k]\subseteq[x_{n-1},x_n]} f\left(\zeta_k\right)\delta z_k\right)\right| \\
&\leq \left|\sum_{n=1}^{N}\sum_{[z_{k-1},z_k]\subseteq[x_{n-1},x_n]}\left|f\left(\xi_n\right)-f\left(\zeta_k\right)\right|\delta z_n\right| \\
&\leq (b-a)\,\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ομοιως βλεπουμε οτι

$$\left|\mathbf{I}\left(P_{[a.b]}|f\right)-\mathbf{I}\left(R_{[a.b]}|f\right)\right|<(b-a)\,\varepsilon.$$

Οποτε

$$\forall\varepsilon>0:\left|\mathbf{I}\left(P_{[a.b]}|f\right)-\mathbf{I}\left(Q_{[a.b]}|f\right)\right|\leq\left|\mathbf{I}\left(P_{[a.b]}|f\right)-\mathbf{I}\left(R_{[a.b]}|f\right)\right|+\left|\mathbf{I}\left(Q_{[a.b]}|f\right)-\mathbf{I}\left(R_{[a.b]}|f\right)\right|<(b-a)\,2\varepsilon$$

και εχουμε δειξει το ζητουμενο.

7.1.12. Θεωρημα. Αν η $f:[a,b]\to(-\infty,+\infty)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$ τοτε

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int_a^b\left|f(x)\right|dx.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

7.1.13. Θεωρημα. Αν οι $f:[a,b]\to(-\infty,+\infty)$ και $g:[a,b]\to(-\infty,+\infty)$ ειναι συνεχεις στο $[a,b]$ τοτε

$$\forall\kappa,\lambda\in(-\infty,+\infty):\int_a^b\left(\kappa f(x)+\lambda g(x)\right)dx=\kappa\int_a^b f(x)\,dx+\lambda\int_a^b g(x)\,dx.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

7.1.14. Θεωρημα. Αν οι $f:[a,b]\to(-\infty,+\infty)$ και $g:[a,b]\to(-\infty,+\infty)$ ειναι συνεχεις στο $[a,b]$ τοτε

$$\left(\forall x\in[a,b]:f(x)\leq g(x)\right)\Rightarrow\int_a^b f(x)\leq\int_a^b g(x)\,dx.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

7.1.15. Θεωρημα. Αν η $f:[a,b]\to(-\infty,+\infty)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$ και $c\in[a,b]$, τοτε

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Αποδειξη. Εστω οτι $P_{[a,b]}=(x_0,x_1,...,x_{N-1},x_N)$ ειναι μια διαμεριση του $[a,b]$ και

$$\exists\widetilde{n}:c\in\left(x_{\widetilde{n}-1},x_{\widetilde{n}}\right).$$

Τοτε οι

$$
\begin{aligned}
P'_{[a,c]} &= \left(x_0,x_1,...,x_{\widetilde{n}-1},c\right), \\
P''_{[c,b]} &= \left(c,x_{\widetilde{n}},...,x_{N-1},x_N\right)
\end{aligned}
$$

ειναι διαμερισεις των $[a, c]$, $[c, b]$ αντιστοιχα και η

$$P'''_{[a,b]} = (x_0, x_1, ..., x_{\widetilde{n}-1}, c, x_{\widetilde{n}}, ..., x_{N-1}, x_N)$$

ειναι διαμεριση του $[a, b]$ και ισχυει οτι

$$\mathbf{I}\left(P'''_{[a.b]}|f\right) = \mathbf{I}\left(P'_{[a.c]}|f\right) + \mathbf{I}\left(P''_{[c.b]}|f\right).$$

Παιρνοντας το οριο οταν το $w\left(P_{[a,b]}\right)$ τεινει στο 0 [1] λαμβανουμε το ζητουμενο.

Αφηνεται στον αναγνωστη η αποδειξη οταν το c ειναι απο τα σημεια της $P_{[a,b]}$.

7.1.16. Θεωρημα. Αν για καθε $n \in \{1, 2, ..., N\}$ η $f_n : [a, b] \to (-\infty, +\infty)$ ειναι *ομοιομορφα* συνεχης στο $[a, b]$, τοτε

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f(x)\, dx.$$

Αποδειξη. Η αποδειξη θα δοθει στο Κεφαλαιο 15.

7.1.17. Θεωρημα (Θεμελιωδες Θεωρημα του Λογισμου). Εστω οτι η $f : [a, b] \to (-\infty, +\infty)$ ειναι συνεχης στο $[a, b]$. Οριζουμε για καθε $x \in [a, b]$ την $F : [a, b] \to (-\infty, +\infty)$ ως εξης:

$$F(x) = \int_a^x f(z)\, dz.$$

Τοτε η $F(x)$ ειναι η *μοναδικη* συναρτηση η οποια ικανοποιει τα εξης:

$$F(0) = 0 \text{ και } F'(x) = f(x). \tag{7.1}$$

Αποδειξη. Αφου η f ειναι συνεχης στο *κλειστο διαστημα* $[a, b]$ ειναι και *ομοιομορφα συνεχης* στο $[a, b]$. Οποτε επιλεγουμε τυχον ε και $\delta > 0$ τετοιο ωστε

$$|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Τοτε για καθε h τετοιο ωστε $|h| < \delta$ εχουμε

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\, dt}{h} \le \frac{\int_x^{x+h} f(x)\, dt + \varepsilon h}{h} = f(x) + \varepsilon.$$

Ομοιως δειχνουμε

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \ge f(x) - \varepsilon.$$

Εν ολιγοις

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta : |h| < \delta \Rightarrow \left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h}\right| \le f(x) + \varepsilon$$

οποτε, παιρνοντας το οριο οταν $h \to 0$ εχουμε

$$\forall \varepsilon > 0 : F'(x) \le f(x) + \varepsilon$$

απο το οποιο προκυπτει $F'(x) = f(x)$. Προφανως δε, $F(0) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$.

Η μοναδικοτητα προκυπτει απο το Θεωρημα υπαρξης και μοναδικοτητας λυσης της διαφορικης εξισωσης (7.1).

[1] Και αρα το ιδιο ισχυει για τα $w\left(P'_{[a,c]}\right)$, $w\left(P''_{[a.c]}\right)$, $w\left(P'''_{[b,c]}\right)$.

7.1.18. Θεωρημα (Μεσης Τιμης). Εστω οτι η $f(x)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$. Τοτε

$$\exists x_0 \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(x_0)\,.$$

Αποδειξη . Συμφωνα με το προηγουμενο Θεωρημα, στο διαστημα $[a,b]$ ειναι καλως ορισμενη η

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

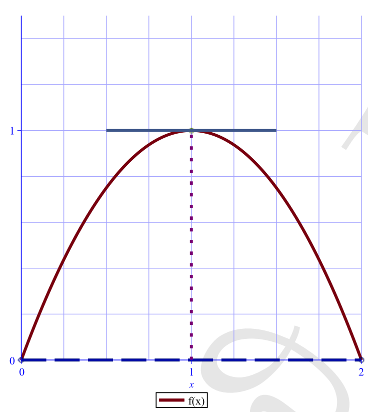
η οποια ικανοποιει

$$\forall x \in [a,b] : F'(x) = f(x)\,.$$

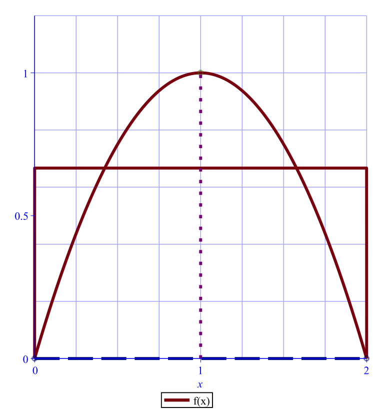
Αρα η $F(x)$ ειναι συμνεχης και παραγωγισιμη στο $[a,b]$ και, συμφωνα με το Θεωρημα Μεσης Τιμης του Κεφαλαιου 2, ικανοποιει τα εξης:

$$\begin{aligned}
&\exists x_0 \in [a,b] : F(b) - F(a) = (b-a)\,F'(x_0) \Rightarrow \\
&\exists x_0 \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^a f(x)\,dx = (b-a)\,f(x_0) \Rightarrow \\
&\exists x_0 \in [a,b] : \int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(x_0)\,.
\end{aligned}$$

7.1.19. Το ανωτερω Θεωρημα Μεσης Τιμης και εκεινο του Κεφαλαιου 2 ειναι ισοδυναμα αλλα εχουν διαφορετικη γεωμετρικη ερμηνεια. Δες τα Σχηματα 7.3 και 7.4.



Σχήμα 7.3



Σχήμα 7.4

1. Το θεωρημα του Κεφαλαιου 2 αντιστοιχει στο Σχημα 7.3 και λεει οτι υπαρχει σημειο x_0 τετοιο ωστε η εφαπτομενη της f στο σημειο $(x_0, f(x_0))$ ειναι παραλληλη στο ευθυγραμμο τμημα με ακρα τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.
2. Το θεωρημα του παροντος κεφαλαιου αντιστοιχει στο Σχημα 7.4 και λεει οτι υπαρχει σημειο x_0 τετοιο ωστε το παραλληλογραμμο με βαση $b-a$ και υψος $f(x_0)$ εχει εμβαδον ισο με αυτο κατω απο την καμπυλη της f.

7.1.20. Παραδειγμα. Υπολογιζουμε το $\int_1^2 x dx$. Ξερουμε οτι

$$F(x) = \frac{x^2}{2} = \int x dx.$$

Θετοντας $a = 1$, $b = 2$, παιρνουμε

$$\int_1^2 x dx = F(2) - F(1) = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

7.1.21. Συμβολισμος. Στον υπολογισμο του ορισμενου ολοκληρωματος, πολλες φορες θα γραφουμε $F(x)|_{x=a}^{x=b}$ ως συντομογραφια του $F(b) - F(a)$.

7.1.22. Παραδειγμα. Υπολογιζουμε το $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$. Εχουμε

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin(x)|_{x=0}^{x=\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$$

7.1.23. Ασκηση. Υπολογισε το $\int_2^0 x^3 dx$.

7.1.24. Ασκηση. Επαληθευσε οτι

$$\int_a^c x^2 dx + \int_c^b x^2 dx = \int_a^b x^2 dx.$$

7.1.25. Παραδειγμα. Θα αποδειξουμε οτι

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx \leq 1.$$

Πραγματι

$$x \in [1, 2] \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \leq \sin x \leq 1$$

οποτε

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x} dx \leq \int_1^2 1 dx = 1.$$

7.1.26. Στα παραπανω εχουμε ορισει το ορισμενο ολοκληρωμα $\int_a^b f(x) dx$ οταν το $[a, b]$ ειναι ενα πεπερασμενο διαστημα στο οποιο η $f(x)$ ειναι συνεχης. Στα επομενα εδαφια επεκετεινουμε τον ορισμο ετσι ωστε να μπορουμε (σε ορισμενες περιπτωσεις) να αντιμετωπισουμε απειρα διαστηματα ή/και ασυνεχεις συναρτησεις.

7.1.27. Ορισμος. *Γενικευμενα Ολοκληρωματα 1ου τυπου* ειναι αυτα οπου ενα η και τα δυο ορια ολοκληρωσης ειναι απειρα.

1. *Οταν το $a = -\infty$ και το $b < +\infty$ οριζουμε $\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to -\infty} \int_u^b f(x)dx$.*
2. *Οταν το $-\infty < a$ και το $b = +\infty$ οριζουμε $\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to +\infty} \int_a^u f(x)dx$.*
3. *Οταν το $a = -\infty$ και το $b = +\infty$ οριζουμε*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to -\infty} \int_u^c f(x)dx + \lim_{v \to +\infty} \int_c^v f(x)dx,$$

οπου το c μπορει να ειναι οποιοσδηποτε αριθμος που ανηκει στο $\mathbb{R}$.

7.1.28. Παραδειγμα. Θα υπολογισουμε το $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(4x+1)(4x+3)}$. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(4x+1)(4x+3)} &= \lim_{M \to \infty} \frac{1}{2} \int_1^M \left(\frac{1}{4x+1} - \frac{1}{4x+3} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{M \to \infty} \left[\frac{1}{4} \ln|4x+1| - \frac{1}{4} \ln|4x+3| \right]_{x=1}^{x=M} dx \\
&= \frac{1}{8} \lim_{M \to \infty} \left(\ln \frac{4M+1}{4M+3} - \ln \frac{5}{7} \right) = \frac{1}{8} \ln\left(\frac{7}{5}\right).
\end{aligned}$$

7.1.29. Παραδειγμα. Θα υπολογισουμε το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5}$. Εχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2x+5} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(x-1)^2+4} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2+4} \\ &= \lim_{M\to-\infty} \int_{M}^{0} \frac{dx}{(x-1)^2+4} + \lim_{M\to\infty} \int_{0}^{M} \frac{dx}{(x-1)^2+4} \\ &= \lim_{M\to-\infty} \frac{1}{2}\arctan\frac{M-1}{2} + \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2}\arctan\frac{M-1}{2} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

7.1.30. Ασκηση. Υπολογισε το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$.

7.1.31. Ασκηση. Υπολογισε το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$.

7.1.32. Ορισμος. *Γενικευμενα Ολοκληρωματα 2ου τυπου* ειναι αυτα οπου η ολοκληρωτεα συναρτηση παρουσιαζει καποια ασυνεχεια στο διαστημα ολοκληρωσης.

1. Εστω οτι η συναρτηση $f(x)$ παρουσιαζει ασυνεχεια στο a· τοτε

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx.$$

2. Εστω οτι η συναρτηση $f(x)$ παρουσιαζει ασυνεχεια στο b· τοτε

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_{a}^{b-\epsilon} f(x)dx.$$

3. Εστω οτι υπαρχει c με $a < c < b$ και στο οποιο η συναρτηση $f(x)$ παρουσιαζει. Τοτε μπορουμε να ορισουμε

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0^+} \int_{a}^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon\to0^+} \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)dx.$$

Σημειωσε οτι το παραπανω αποτελεσμα μπορει να ειναι *διαφορετικο* απο το

$$\lim_{\epsilon\to0^+} \left(\int_{a}^{c-\epsilon} f(x)dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)dx \right).$$

7.1.33. Παραδειγμα. Θα υπολογισουμε το $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$. Με απλη ολοκληρωση θα παιρναμε

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[-\frac{1}{x-1} \right]_{x=0}^{x=2} = 0.$$

Αλλα αυτο ειναι λαθος. Στο σημειο $x=1$ η $\frac{1}{(x-1)^2}$ ειναι ασυνεχης και απαιτειται η χρηση γενικευμενου ολοκληρωματος. Εχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_{x=0}^{x=1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_{x=1+\varepsilon}^{x=2} \\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[-\frac{1}{1-\varepsilon-1} + \frac{1}{0-1} \right] + \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[-\frac{1}{1} + \frac{1}{1+\varepsilon-1} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right] + \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right] = \infty.\end{aligned}$$

7.1.34. Παραδειγμα. Θα υπολογισουμε το $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$. Υπαρχει ασυνεχεια στο $x=1$. Οποτε

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} \\
&= 3 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[(x-1)^{1/3} \right]_{x=-1}^{x=1-\varepsilon} + 3 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[(x-1)^{1/3} \right]_{x=1+\varepsilon}^{x=2} \\
&= 3 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\varepsilon^{1/3} - (-2)^{1/3} \right] + 3 \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[1^{1/3} - \varepsilon^{1/3} \right]_{x=1+\varepsilon}^{x=2} = 3 \left(\sqrt[3]{2} + 1 \right).
\end{aligned}$$

7.1.35. Ασκηση. Υπολογισε το $\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

7.1.36. Ασκηση. Υπολογισε το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$.

7.1.37. Συμφωνα με οσα ειπαμε παραπανω, γεωμετρικα το $\int_a^b f(x)\,dx$ ερμηνευεται ως εμβαδον ενος σχηματος. Αλλα οπως ήδη αναφεραμε, αυτη η ερμηνεια δεν ειναι αυστηρη, αφου δεν εχουμε δωσει αυστηρο ορισμο του εμβαδου. Παρακατω θα δωσουμε εναν τετοιο ορισμο και θα δικαιολογησουμε αυστηρα την γεωμετρικη ερμηνεια του $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ο ορισμος που θα δεσουμε ειναι *αξιωματικος*, δηλ. το εμβαδον οριζεται ως μια συναρτηση η οποια ικανοποιει τρεις βασικες ιδιοτητες (αξιωματα). Καταρχην ομως χρειαζομαστε καποιες βοηθητικες εννοιες.

7.1.38. Ορισμος. Οριζουμε την οικογενεια συναρτησεων $\mathcal{C}_{a,b}$ ως εξης:

$$\mathcal{C}_{a,b} = \{ f : f \text{ ειναι συνεχης στο } [a,b] \ \}.$$

7.1.39. Για καθε $a,b \in \mathbb{R}$ και συναρτησεις $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ οριζουμε τις σχεσεις $\leq_{[a,b]}$ και $=_{[a,b]}$ ως εξης:

$$\begin{aligned}
f \leq_{[a,b]} g \text{ ανν } (\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x)), \\
f =_{[a,b]} g \text{ ανν } (\forall x \in [a,b] : f(x) = g(x)).
\end{aligned}$$

7.1.40. Ορισμος. Για καθε $a,b,c \in \mathbb{R}$ οριζουμε την συναρτηση $\widetilde{c} : [a,b] \to \mathbb{R}$ ως εξης:

$$\forall x \in [a,b] : \widetilde{c}(x) = c.$$

7.1.41. Ορισμος. Μια συναρτηση $\mathbf{E}(x_1,x_2|f) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathcal{C}_{a,b} \to R$ λεγεται *συναρτηση εμβαδου στο* $[a,b]$ αν ικανοποιει τα παρακατω για καθε $f,g \in C_{a,b}$ και καθε $x_1,x_2,x_3 \in [a,b]$.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A1} : \forall c \in \mathbb{R} : \mathbf{E}(x_1,x_2|\widetilde{c}) = c(x_2-x_1) \\
&\mathbf{A2} : \forall f,g \in \mathcal{C}_{a,b} : f \leq_{[x_1,x_2]} g \Rightarrow \mathbf{E}(x_1,x_2|f) \leq \mathbf{E}(x_1,x_2|g) \\
&\mathbf{A3} : \mathbf{E}(x_1,x_2|f) + \mathbf{E}(x_2,x_3|f) = \mathbf{E}(x_1,x_3|f)
\end{aligned}$$

7.1.42. Η $\mathbf{E}(x_1,x_2|f)$ θα δινει το εμβαδον το οποιο περικλειεται απο την καμπυλη μιας συνεχους συναρτησης $f(x)$ και τις ευθειες: $y=0$ (ο αξονας των x), $x=a$, $x=b$. Αυτο το εμβαδον, για συντομια, θα το λεμε: «*το εμβαδον κατω απο την* $f(x)$». Αν υποθεσουμε οτι $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ και οτι $0 \leq_{[a,b]} f$, οι **A1**-**A3** αντιπροσωπευουν τις ελαχιστες ιδιοτητες που περιμενουμε να εχει μια συναρτηση εμβαδου περικλειομενου απο την καμπυλη της f και τις $y=0$, $x=x'$, $x=x''$:

1. η **A1** λεει οτι: ενα ορθογωνιο παραλληλογραμο με πλευρες c και x_2-x_1 εχει εμβαδον ισο με $c(x_2-x_1)$·
2. η **A2** λεει οτι: αν σε καθε σημειο του $[x_1,x_2]$ η (καμπυλη της) f βρισκεται κατω απο την (καμπυλη της) g, τοτε το εμβαδον κατω απο την (καμπυλη της) f ειναι μικροτερο απο το εμβαδον κατω απο την (καμπυλη της) g·
3. η **A3** λεει οτι: για δεδομενη f, το εμβαδον απο το x_1 ως το x_3 ισουται με το αθροισμα των εμβαδων απο το x_1 ως το x_2 και απο το x_2 ως το x_3.

Παρατηρησε ομως οτι η $\mathbf{E}(x_1, x_2|f)$ μπορει να ειναι ορισμενη και οταν $x_1 > x_2$ ή/και $f \leq_{[a,b]} 0$· και στις δυο περιπτωσεις θα εχουμε *αρνητικο εμβαδον*.

7.1.43. Το βασικο ερωτημα ειναι *αν υπαρχει* (μια ή περισσοτερες) συναρτησεις εμβαδου, και απανταται απο τα επομενα θεωρηματα.

7.1.44. Θεωρημα. Εστω οτι η $\mathbf{E}(x_1, x_2|f)$ ειναι συναρτηση εμβαδου στο $[a, b]$. Τοτε

$$\mathbf{E}'(a, x|f) = f(x), \quad \mathbf{E}(a, a|f) = 0. \tag{7.2}$$

Αποδειξη. Για καθε $x \in [a, b]$ και $h > 0$ εχουμε (απο την **A3**)

$$\mathbf{E}(a, x+h|f) - \mathbf{E}(a, x|f) = \mathbf{E}(x, x+h|f)$$

Θετουμε

$$p_h = \inf_{x \in [x, x+h]} f(x), \quad q_h = \sup_{x \in [x, x+h]} f(x).$$

Απο την συνεχεια της f εχουμε $\lim_{h \to 0} p_h = \lim_{h \to 0} q_h = f(x)$. Απο τις **A1** και **A2** εχουμε

$$\begin{aligned} p_h h = \mathbf{E}(x+h, x|\widetilde{p}_h) \leq \mathbf{E}(x+h, x|f) \leq \mathbf{E}(x+h, x|\widetilde{q}_h) = q_h h \Rightarrow \\ p_h \leq \frac{\mathbf{E}(a, x+h|f) - \mathbf{E}(a, x|f)}{h} \leq q_h \Rightarrow f(x) \leq \mathbf{E}'^{,+}(a, x|f) \leq f(x) \Rightarrow \mathbf{E}'^{,+}(a, x|f) = f(x) \end{aligned}$$

Με ομοιο τροπο παιρνουμε, για καθε $x \in [a, b]$ και $h < 0$, $\mathbf{E}'^{,-}(a, x|f) = f(x)$. Οποτε

$$\mathbf{E}'(a, x|f) = \mathbf{E}'^{,-}(a, x|f) = \mathbf{E}'^{,+}(a, x|f) = f(x).$$

Τελος

$$\mathbf{E}(a, a|f) = f(a)(a - a) = 0.$$

7.1.45. Θεωρημα. Η *μοναδικη* συναρτηση εμβαδου $\mathbf{E}(x_1, x_2|f)$ στο $[a, b]$ ειναι η

$$\mathbf{E}(x_1, x_2|f) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx.$$

Αποδειξη. Αφου $\mathbf{E}'(a, x|f) = f(x)$, εχουμε

$$\mathbf{E}(a, x|f) = \int f(x)\, dx + c' = \int_a^x f(x)\, dx + c.$$

Αφου $\mathbf{E}(a, a|f) = 0$ εχουμε

$$0 = \mathbf{E}(a, a|f) = \int_a^a f(x)\, dx + c = 0 + c \Rightarrow c = 0.$$

Δηλ.

$$\mathbf{E}(a, x|f) = \int_a^x f(x)\, dx.$$

Με αλλαγη μεταβλητων παιρνουμε το ζητουμενο (αν η $\mathbf{E}(x_1, x_2|f)$ ειναι συναρτηση εμβαδου στο $[a, b]$ ειναι συναρτηση εμβαδου και σε καθε $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$). Η $\int_a^x f(x)\, dx$ ειναι η *μοναδικη* συναρτηση διοτι η (7.2) εχει ακριβως μια λυση.

7.1.46. Παρατηρησε οτι το εμβαδον κατω απο την $f(x)$ [2] εχει οριστει μονο για πεπερασμενα διαστηματα $[a, b]$ και συνεχεις στο $[a, b]$ συναρτησεις f. Μπορουμε να επεκτεινουμε τον ορισμο ετσι ωστε να καλυπτονται απειρα διαστηματα ή/και ασυνεχεις συναρτησεις χρησιμοποιωντας την οριακη προσεγγιση των γενικευμενων ολοκληρωματων.

[2] Ακριβεστερα: η $\mathbf{E}(x_1, x_2|f)$, συναρτηση εμβαδου στο $[a, b]$.

7.1.47. Μπορουμε να ξαναγραψουμε την (7.2) στις συντομοτερες μορφες

$$\frac{dE}{dx} = f'(x) \text{ και } dE = f'(x)\,dx. \tag{7.3}$$

Η ποσοτητα dE στην (7.3) λεγεται *στοιχειωδες εμβαδον*. Ειναι το εμβαδον ενος εκ των παραλληλογραμων με απειροστα μικρη βαση, στα οποια υποδιαιρουμε το χωριο του οποιου ζητουμε το εμβαδον. Απο την (7.3) μπορουμε να γραψουμε και

$$dE = f'(x)\,dx \Rightarrow E = \int_a^b dE = \int_a^b f(x)\,dx \tag{7.4}$$

και η (7.4) μπορει να θεωρηθει ως μια εξαιρετικα συντομη «αποδειξη» του Θεωρηματος 7.1.45. Παρακατω θα χρησιμοποιησουμε επανειλημμενα παρομοιους συλλογισμους, για τον υπολογισμο εμβαδων, μηκων και ογκων.

7.2 Λυμενα Προβληματα

7.2.1. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_1^2 xdx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=2} = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

7.2.2. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 x}dx = \int_0^\pi |\cos x|\,dx$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} \cos xdx = 2 \cdot [\sin x]_{x=0}^{x=\pi/2} = 2.$$

7.2.3. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^7 \sqrt{49-x^2}dx$.
Λυση. Θετουμε $x = 7\sin u$, $dx = 7\cos udu$, οποτε

$$\int_0^7 \sqrt{49-x^2}dx = 7\int_0^7 \sqrt{49-49\sin^2 u}\cos udu$$
$$= 49\int_{u=0}^{u=\pi/2} \cos udu = 49 \cdot \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right]_{u=0}^{u=\pi/2} = \frac{49}{4}\pi.$$

7.2.4. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^2 |1-x|\,dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x=1}^{x=2} = 1.$$

7.2.5. Υπολογισε το $\int_{-3}^{-1} \left|4-x^2\right| dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_{-3}^{-1} \left|4-x^2\right| dx = \int_{-3}^{-2} \left(x^2-4\right) dx + \int_{-2}^{-1} \left(4-x^2\right) dx = 4.$$

7.2.6. Υπολογισε το $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$.

Λυση. Εχουμε

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}}dx$$
$$= \left(\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^1+2}\right|\right)_{x=0}^{x=4}$$
$$= \ln\frac{5+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

7.2.7. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3+\cos 2x}dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_0^{\pi/2}\frac{1}{3+\cos 2x}dx = \int_0^{\pi/2}\frac{1}{3+2\left(\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\right)}dx$$
$$= \int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{3\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+2\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}dx$$
$$= \int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{5+\tan^2\frac{x}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

7.2.8. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^1\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.
Λυση. Θετοντας $t=e^x$ εχουμε

$$\int_0^1\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_1^e\frac{t}{1+t^2}dt = \arctan(t)_{t=1}^{t=e} = \arctan e - \frac{\pi}{4}.$$

7.2.9. Υπολογισε την

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{3x^2}\left(t^2+1\right)dt\right)$$

Λυση. Εχουμε

$$\int_1^{3x^2}\left(t^2+1\right)dt = 9x^6+3x^2-\frac{4}{3}$$

και

$$\frac{d}{dx}\left(9x^6+3x^2-\frac{4}{3}\right) = 54x^5+6x.$$

7.2.10. Υπολογισε την

$$\frac{d}{dx}\left(\int_1^{3x^2}\sqrt{t^2+1}dt\right)$$

Λυση. Εχουμε

$$\int_1^{3x^2}\sqrt{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{9x^4+1}+3x^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\frac{3}{2}x^2\sqrt{9x^4+1}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

και

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{9x^4+1}+3x^2\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+\frac{3}{2}x^2\sqrt{9x^4+1}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 6x\sqrt{9x^4+1}$$

7.2.11. Υπολογισε το $\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2}$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty}\int_0^M\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{M\to\infty}\left[\arctan x\right]_0^M$$
$$= \lim_{M\to\infty}\arctan M - \arctan 0 = \pi/2 - 0 = \pi/2.$$

7.2.12. Υπολογισε το $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \int_{x=0}^{x=\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \int_{u=0}^{u=\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{2\pi}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M\to\infty} \int_{u=0}^{u=M} e^{-u} du$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M\to\infty} \left[-e^{-u}\right]_{u=0}^{u=M} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{M\to\infty} \left[1-e^{-M}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

7.2.13. Υπολογισε το $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.
Λυση. Θετοντας $x=\frac{1}{u}$, $dx=-\frac{du}{u^2}$, εχουμε

$$\int_{x=1}^{x=\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = -\int_{u=1}^{u=0} \frac{u}{\sqrt{\frac{1}{u^2}+1}} \cdot \frac{du}{u^2}$$
$$= \int_{u=0}^{u=1} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \left[\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|\right]_{u=0}^{u=1} = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

7.2.14. Υπολογισε το $\int_0^2 \frac{2dx}{x^2-1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_0^2 \frac{2dx}{x^2-1} = \int_0^2 \frac{dx}{x-1} - \int_0^2 \frac{dx}{x+1}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x-1} - \int_0^2 \frac{dx}{x+1}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\ln|x-1|\right]_{x=0}^{x=1-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\ln|x-1|\right]_{x=1+\varepsilon}^{x=2} - \ln 3$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\ln\varepsilon - \ln 1\right] + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\ln 1 - \ln\varepsilon\right] - \ln 3$$
$$= \infty - 0 + 0 - \infty - \ln 3$$

το οποιο ειναι απροσδιοριστο. Αρα το ολοκληρωμα $\int_0^2 \frac{2dx}{x^2-1}$ δεν ειναι ορισμενο.

7.2.15. Υπολογισε το $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-x\right]_{x=-1}^{x=-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-x\right]_{x=\varepsilon}^{x=1}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\varepsilon-1\right] + \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[-1+\varepsilon\right] = \infty + \infty = \infty.$$

7.2.16. Δειξε οτι $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$.
Λυση. Αφου η $\sin x$ ειναι περιττη συναρτηση εχουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = \int_{-\pi}^{0} \sin x dx + \int_0^{\pi} \sin x dx$$
$$= \int_0^{\pi} \sin(-x)\, d(-x) + \int_0^{\pi} \sin x dx$$
$$= -\int_0^{\pi} \sin z dz + \int_0^{\pi} \sin x dx = 0.$$

7.2.17. Υπολογισε το $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$.
Λυση. Εχουμε

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\sin 2x}{2} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2x dx = \pi + 0$$

αφου η $\sin 2x$ ειναι περιττη συναρτηση.

7.2.18. Εστω οτι $f(x) = \int_1^x \sqrt{2-t^2}dt$. Βρες τις πραγματικες ριζες της εξισωσης $f'(x) = x^2$.
Λυση. Θα ειναι $f'(x) = \sqrt{2-x^2}$. Οποτε εχουμε

$$x^2 = \sqrt{2-x^2} \Rightarrow x^4 = 2 - x^2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow \left(x^2+2\right)\left(x^2-1\right) = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

7.2.19. Αποδειξε οτι

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx < \int_0^{\pi/2} \cos(\sin x)\, dx.$$

Λυση. Εχουμε

$$\left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : x < \sin x\right) \Rightarrow \left(\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : \cos x < \cos(\sin x)\right)$$
$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos x dx < \int_0^{\pi/2} \cos(\sin x)\, dx.$$

7.2.20. Βρες την ελαχιστη τιμη της $f(x) = \int_0^x (1-\cos t)\, dt$ στο $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
Λυση. Εχουμε

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] : f'(x) = 1 - \cos(x) > 0.$$

Οποτε

$$\min_{x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos t)\, dt = \frac{\pi}{2} - 1.$$

7.3 Αλυτα Προβληματα

7.3.1. Υπολογισε τα παρακατω ολοκληρωματα.

1. $\int_0^{\pi} \sin 2x \sin 3x dx$. *Απ.* 0.
2. $\int_0^{\pi} \sin^2 2x dx$. *Απ.* $\frac{1}{2}\pi$.
3. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx$. *Απ.* $\frac{1}{4}\pi$.
4. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$. *Απ.* $\frac{3}{16}\pi$.
5. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{2-\sin x} dx$. *Απ.* $\ln 2$.
6. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+2\sin x} dx$. *Απ.* $\frac{2}{5}\sqrt{5}\pi$.
7. $\int_0^{\pi} \frac{1}{(3+2\sin x)^2} dx$. *Απ.* $\frac{6}{25}\sqrt{5}\arctan\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{4}{15}$.
8. $\int_0^{\pi} \ln(2+\cos x)\, dx$. *Απ.* $\pi \ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+1\right)$.
9. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3+2\sin x} dx$. *Απ.* $\frac{2}{5}\sqrt{5}\arctan\sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{5}\arctan\frac{2}{5}\sqrt{5}$.
10. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3+2\cos x} dx dx$. *Απ.* $-\frac{1}{5}i\sqrt{5}\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}-i\right) - \frac{1}{5}i\sqrt{5}\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{5}+\frac{1}{3}i\right)$.

7.3.2. Υπολογισε τα παρακατω γενικευμενα ολοκληρωματα (ή δειξε οτι δεν ειναι καλως ορισμενα).

1. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$. *Απ.* 1.
2. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$. *Απ.* ∞.
3. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n} dx$. *Απ.* $\frac{1}{n-1}$ οταν $n > 1$, ∞ οταν $n \leq 1$.

4. $\int_0^\infty e^{-x} dx$. Απ. 1.

5. $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$. Απ. $\frac{1}{2}$.

6. $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$. Απ. $\pi/4$.

7. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x} dx$. Απ. $\ln 2$.

8. $\int_0^\infty x^2 e^{-x/2} dx$. Απ. 16.

9. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx$. Απ. $\frac{1}{2} \frac{\pi}{\sqrt{a^2}}$.

10. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{-1/2}}{1+x} dx$. Απ. π.

7.3.3. Υπολογισε τα παρακατω γενικευμενα ολοκληρωματα (ή δειξε οτι δεν ειναι καλως ορισμενα).

1. $\int_2^6 \left(\frac{1}{(4-x)^2} \right)^{1/3} dx$. Απ. $6 \cdot 2^{1/3}$.

2. $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx$. Απ. ∞.

3. $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^3} dx$. Απ. Δεν υπαρχει.

4. $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)^3} dx$. Απ. $\frac{3}{8}$.

5. $\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}} dx$. Απ. $\frac{\pi}{4}$.

6. $\int_0^\infty e^{-x} \cos x dx$. Απ. $\frac{1}{2}$.

7. $\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$. Απ. $2e^{-1}$.

8. $\int_1^4 \frac{1}{(x-1)^3} dx$. Απ. $+\infty$.

9. $\int_0^1 \ln x dx$. Απ. -1.

10. $\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^3} dx$. Απ. $-\infty$.

7.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

7.4.1. Υπολογισε τα ολοκληρωματα.

1. $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\sin^2 x} dx$.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

3. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

4. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx$.

5. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(px)}{x} dx$.

6. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(px)}{x^2} dx$.

7. $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(px)}{x^2+a^2} dx$.

8. $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a \cos x+a^2} dx$.

9. $\int_0^{+\infty} \sin\left(ax^2\right) dx$.

10. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(bx)\, dx$.

11. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} x^n dx$.

12. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x+1} dx$.

7.4.2. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x} \ln\left(\frac{1+x^2}{(1-x)^2}\right) dx$.

7.4.3. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^{+\infty} \tanh(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+\pi^2}\right) dx$.

7.4.4. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^1 \frac{1}{(1+ax)\sqrt{1-x^2}} dx$.

7.4.5. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^1 x^m (\ln(x))^n dx$.

7.4.6. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^1 \frac{\arctan x \ln x}{1+x} dx$.

7.4.7. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2} dx$.

7.4.8. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^\infty \frac{\cos x}{(1+x^2)^2} dx$.

7.4.9. Υπολογισε το ολοκληρωμα $\int_0^\infty \frac{x \sin x}{1+x^2} dx$.

7.4.10. $\lim_{p\to+\infty} \int_a^b f\left(\frac{x}{p}\right) dx = \int_a^b \lim_{p\to\infty} f\left(\frac{x}{p}\right) dx$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

7.4.11. Αν η $f(x)$ ειναι (α) θετικη για καθε x και (β) μη φραγμενη, τοτε $\int_1^\infty f(x)\, dx = +\infty$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

7.4.12. Αν η $f(x)$ ειναι φραγμενη και $\int_1^{+\infty} g(x)\, dx < +\infty$, τοτε $\int_1^{+\infty} f(x)\, g(x)\, dx < +\infty$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

7.4.13. (**Cauchy-Schwarz**) Εστω συνεχεις συναρτησεις $f(x), g(x)$. Δειξε οτι

$$\int_0^1 |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2\, dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2\, dx}.$$

7.4.14. (**Hölder**) Εστω συνεχεις συναρτησεις $f(x), g(x)$ και αριθμοι $p, q \in [1, +\infty)$ τετοιοι ωστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Δειξε οτι

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\, dx\right)^{1/q}.$$

7.4.15. (**Minkowski**) Εστω συνεχεις $f(x), g(x)$ και αριθμος $p \in [1, +\infty)$. Δειξε οτι

$$\left(\int_0^1 |f(x) + g(x)|^p\right)^{1/p} dx = \left(\int_0^1 [f(x)]^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 [g(x)]^p\, dx\right)^{1/p}.$$

7.4.16. (**Gronwall**) Εστω παραγωγισιμες συναρτησεις $f(x), g(x)$ οι οποιες ικανοποιουν

$$\forall x \in [a, b) : \frac{df}{dx} \leq f(x)\, g(x).$$

Δειξε οτι

$$\forall x \in [a, b) : f(x) \leq f(a)\, e^{\int_a^x g(u) du}.$$

7.4.17. Εστω $f(x)$ συνεχης στο $[0,1]$. Δειξε οτι

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x)\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x)\, dx.$$

7.4.18. Βρες ολες τις $f(x)$ συνεχεις στο $[0,1]$ οι οποιες ικανοποιουν

$$\int_0^{\pi} f(x)(x - f(x))\, dx = \frac{1}{12}.$$

7.4.19. Βρες την ελαχιστη τιμη της

$$\int_a^b \left([f(x)]^2 - 2x f(x) \right) dx$$

οπου η $f(x)$ ειναι τυχουσα συνεχης συναρτηση.

7.4.20. Εστω $f(x)$ συνεχης στο $[a,b]$. Δειξε οτι

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

7.4.21. Εστω $f(x)$ μη αυξουσα στο $[0,1]$. Δειξε οτι, για καθε $a \in (0,1)$, ισχυει

$$a \int_0^1 f(x)\, dx \leq \int_0^a f(x)\, dx.$$

7.4.22. Εστω $f(x)$ συνεχης στο $[0,1]$. Δειξε οτι

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2 \leq \pi \int_0^1 (f(x))^2\, dx.$$

7.4.23. Εστω συνεχης συναρτηση $f(x)$ τετοια ωστε

$$\forall \lambda \in [0,1], \forall x, y \in (-\infty, +\infty) : f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Δειξε οτι

$$\forall a, b \in (-\infty, +\infty) : f\left(\frac{a+b}{2} \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

7.4.24. Εστω συνεχης συναρτηση $f(x)$ τετοια ωστε

$$\forall x \in (-\infty, +\infty) : |f(x)| \leq \left| \int_0^x f(u)\, du \right|.$$

Δειξε οτι

$$\forall x \in (-\infty, +\infty) : f(x) = 0.$$

7.4.25. Βρες ολες τις συνεχεις συναρτησεις $f : [-1,1] \to (-\infty, +\infty)$ τετοιες ωστε

$$\forall x \leq y : \int_x^y f(u)\, du = \frac{1}{2}(y f(y) - x f(x)).$$

7.4.26. Εστω παραγωγισιμη συναρτηση $f : [0,1] \to (-\infty, +\infty)$ με (α) συνεχη παραγωγο, (β) $f(0) = 0$ και (γ) ικανοποιει

$$\forall x \in [0,1] : 0 < \frac{df}{dx} \leq 1.$$

Δειξε οτι

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2 \geq \int_0^1 (f(x))^3\, dx.$$

8 Εμβαδον, Μηκος και Ογκος

Στο παρον κεφαλαιο παραθετουμε περαιτερω παραδειγματα εφαρμογης της μεθοδου υπολογισμου του *εμβαδον* που περικλειουν μια ή περισσοτερες καμπυλες. Κατοπιν γενικευουμε την μεθοδο και εφαρμοζουμε αυτην στον ορισμο και υπολογισμο του *μηκους* μιας καμπυλης και του *ογκου* και της *επιφανειας* του στερεου το οποιο δημιουργειται απο την *περιστροφη* καμπυλης γυρω απο ευθεια.

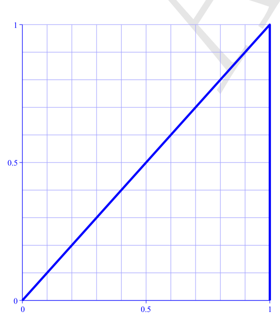
8.1 Θεωρια και Παραδειγματα

8.1.1. Στο Κεφαλαιο 7 εχουμε ηδη παρουσιασει την μεθοδο υπολογισμου του εμβαδου που περικλειει η (καμπυλη C που αντιστοιχει στην) $f(x)$ και οι ευθειες $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Ας δουμε μερικα ακομη παραδειγματα της μεθοδου.

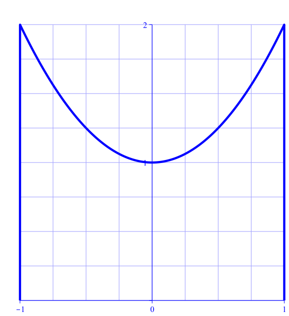
8.1.2. Παραδειγμα. Το εμβαδον το οποιο περικλειεται απο την $f(x) = x$, τον αξονα των x και τις ευθειες $x = 0$, $x = 1$ (δες το Σχημα 8.1) δινεται απο το ολοκληρωμα

$$E = \int_0^1 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{x=0}^{x=1} = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

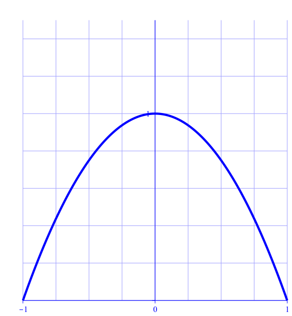
Παρατηρουμε οτι αυτο ισουται με το εμβαδον οπως υπολογιζεται με στοιχειωδεις μεθοδους (εμβαδον ορθογωνιου τριγωνου).



Σχήμα 8.1



Σχήμα 8.2



Σχήμα 8.3

8.1.3. Παραδειγμα. Το εμβαδον το οποιο περικλειεται απο την $f(x) = x^2 + 1$, τον αξονα των x και τις ευθειες $x = -1$, $x = 1$ (δες το Σχημα 8.2) δινεται απο το ολοκληρωμα

$$E = \int_{-1}^{1} \left(x^2 + 1\right) dx = \frac{8}{3}.$$

8.1.4. Συνεχιζουμε με παραδειγματα στα οποια απαιτειται καποια παραλλαγη της βασικης μεθοδου. Ενδέχεται το χωρίο του οποιου ζητειται το εμβαδον να περιγραφεται με τροπο διαφορετικο απο αυτον του Θεωρηματος ;; αλλα συνηθως ειναι ευκολο να αναγουμε την εναλλακτικη περιγραφη στην βασικη.

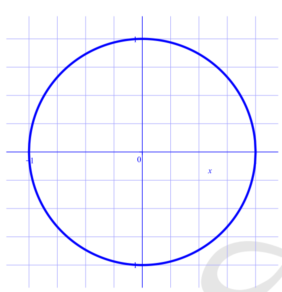
8.1.5. Παραδειγμα. Για να υπολογισουμε το εμβαδον το οποιο περικλειεται απο την $f(x) = 1 - x^2$ και τον αξονα των x (δες το Σχημα 8.3) παρατηρουμε οτι το ζητουμενο εμβαδον περικλειεται απο την $f(x) = 1 - x^2$, τον αξονα των x και τις ευθειες $x = -1$, $x = 1$ (γιατι;) και αρα ειναι

$$E = \int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right) dx = \frac{4}{3}.$$

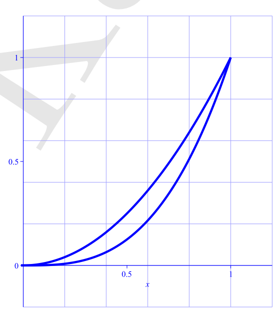
8.1.6. Παραδειγμα. Για να υπολογισουμε το εμβαδον του κυκλου με κεντρο το σημειο $(x_0, y_0) = (0, 0)$ και ακτινα $R = 1$ (δες το Σχημα 8.5) εργαζομαστε ως εξης. Προφανως το ζητουμενο εμβαδον ειναι διπλασιο του εμβαδου του ανω ημικυκλιου του Σχηματος, το οποιο ειναι το χωριο που περικλειεται απο την καμπυλη $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, τον αξονα των x και τις ευθειες $x = -1$ και $x = 1$ (γιατι;). Οποτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$E = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx = \pi,$$

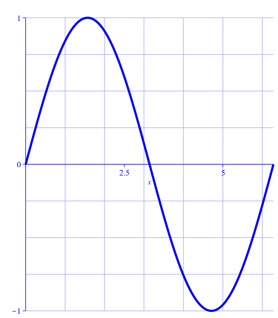
οπως ηταν αναμενομενο.



Σχήμα 8.4



Σχήμα 8.5



Σχήμα 8.6

8.1.7. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το εμβαδον το οποιο περικλειεται απο τις (καμπυλες οι οποιες αντιστοιχουν στις) $f_1(x) = x^2$ και $f_1(x) = x^3$. Απο το Σχημα παρατηρουμε οτι οι αντιστοιχες καμπυλες τεμνονται σε δυο σημεια, τα οποια υπολογιζονται λυνοντας την εξισωση

$$f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow x^2 = x^3 \Leftrightarrow x^2(1 - x) = 0.$$

Αυτη εχει ριζες $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$. Οποτε το ζητουμενο εμβαδον E ειναι

$$E = E_1 - E_2 = \int_0^1 f_1(x)\, dx - \int_0^1 f_2(x)\, dx = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Μπορουμε να γενικευσουμε το παραπανω ως εξης.

8.1.8. Θεωρημα. Εστω οτι οι $f_1(x)$, $f_2(x)$ ειναι τετοιες ωστε

1. οι αντιστοιχες καμπυλες τεμνονται στα σημεια a και b (με $a < b$) και

2. $\forall x \in [a,b] : f_1(x) \geq f_2(x)$.

Τοτε το εμβαδον το οποιο περιεχεται μεταξυ των $f_1(x)$ και $f_2(x)$ ισουται με

$$E = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\, dx.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

8.1.9. Το $\int_a^b f(x)\, dx$ μπορει να παιρνει αρνητικες τιμες, οποτε γενναται το ερωτημα: ποια ειναι η σημασια του αρνητικου εμβαδου; Χρησιμοποιουμε την συμβαση οτι το τμημα του σχηματος που βρισκεται κατω απο τον αξονα των x εχει *αρνητικο* εμβαδον (δηλαδη το εμβαδον ενος χωριου ειναι *προσημασμενη*, αρνητικη η θετικη ποσοτητα). Επισης, κατα τον υπολογισμο του εμβαδου με ολοκληρωση, τα θετικα και αρνητικα εμβαδα αθροιζονται *αλγεβρικα*. Τελος, αρνητικο ειναι το εμβαδον $\int_a^b f(x)\, dx$ οταν $a > b$ και $f(x) \geq 0$ για καθε $x \in [b,a]$. Ετσι ειναι δυνατον μια μη μηδενικη συναρτηση $f(x)$ να περικλειει αρνητικο ή μηδενικο εμβαδον. Εαν θελουμε να υπολογισουμε το «πραγματικο» (απολυτο) εμβαδον χρησιμοποιουμε τον τυπο

$$E = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

8.1.10. Παραδειγμα. Το εμβαδον το οποιο περικλειεται απο την συναρτηση $\sin x$, τον αξονα των x και τα σημεια $(0,0)$, $(2\pi,0)$ (δες το Σχημα 8.6) ειναι

$$E_1 = \int_0^{2\pi} \sin x dx = [\cos x]_{x=0}^{x=2\pi} = \cos(2\pi) - \cos(0) = 1 - 1 = 0.$$

Εναλλακτικα μπορουμε να υπολογισουμε το *απολυτο* εμβαδο ως εξης:

$$E_2 = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\, dx = 4.$$

8.1.11. Επισης αξιζει να σημειωθει οτι η συναρτηση $f(x)$ μπορει να ειναι τετοια ωστε να μην δημιουργει ενα γεωμετρικο σχημα με καλως ορισμενο εμβαδον. Σε αυτη την περιπτωση δεν ειναι σαφες οτι το $\int_a^b f(x)\, dx$ αντιστοιχει σε γεωμετρικο εμβαδον.

8.1.12. Παραδειγμα. Οριζω την συναρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{οταν } x \text{ ρητος,} \\ 0 & \text{οταν } x \text{ αρρητος.} \end{cases}$$

Η συναρτηση ειναι καλως ορισμενη στο $(-\infty-,\infty)$ αλλα

1. δεν μπορουμε να δωσουμε την γραφικη της παρασταση·

2. η $f(x)$ δεν ειναι ασυνεχης (και αρα και μη παραγωγισιμη) για καθε x, οποτε το ολοκληρωμα $\int_a^b f(x)\, dx$ δεν ειναι καλως ορισμενο[1].

Συμφωνα με τις παραπανω παρατηρησεις το $\int_a^b f(x)\, dx$ δεν αντιστοιχει στο εμβαδον καποιου γεωμετρικου σχηματος.

8.1.13. Ορισμος. Εστω συναρτηση $f(x)$ συνεχης στο $[a,b]$. Οριζουμε την *καμπυλη της $f(x)$ απο το $x = a$ ως το $x = b$*, ως εξης:

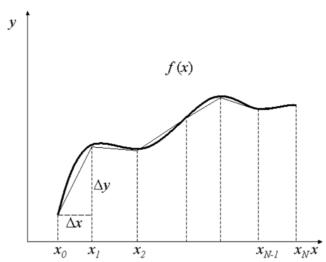
$$C := \{(x, f(x) : x \in [a,b])\}$$

[1] Με βαση τον ορισμο του Κεφαλαιου 6. Μπορουμε να δωσουμε εναν διαφορετικο ορισμο του ολοκληρωματος (ολοκληρωμα *Lebesgue*) συμφωνα με τον οποιο $\int_a^b f(x)\, dx = 0$ για καθε a, b, αλλα αυτο ξεφευγει απο τους στοχους του παροντος τευχους.

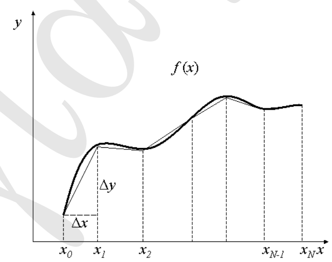
8.1.14. Δινουμε τωρα εναν ορισμο του *μηκους* της καμπυλης της $f(x)$ απο το a ως το b, ως ενα ορισμενο ολοκληρωμα.

8.1.15. Ορισμος. Εστω συναρτηση $f(x)$ παραγωγισιμη στο $[a,b]$ και C η καμπυλη της $f(x)$ απο το $x=a$ και $x=b$. Τοτε το μηκος της καμπυλης (ή του *τοξου*) C οριζεται ως

$$s := \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}dx. \tag{8.1}$$



Σχήμα 8.7



Σχήμα 8.8

8.1.16. Ας δικαιολογησουμε τον παραπανω ορισμο. Δες το σχημα 8.7. Εστω οτι το $\mathcal{P}=(x_0,x_1,...,x_N)$ ειναι μια διαμεριση του $[a,b]$, δηλ.

$$a=x_0<x_1<...<x_N=b.$$

Οριζουμε τα σημεια

$$A_0=(x_0,f(x_0)), \quad ..., \quad A_N=(x_N,f(x_N)).$$

Διασθητικα, το μηκος της καμπυλης μπορει να προσεγγιστει απο το μηκος της τεθλασμενης γραμμης $A_0A_1...A_N$ και η προσεγιση θα ειναι τοσο καλυτερη οσο μικροτερο ειναι το πλατος της διαμερισης

$$w(\mathcal{P})=\max_{n\in\{1,2,...,N\}}(x_n-x_{n-1})=\max_{n\in\{1,2,...,N\}}\Delta x_n.$$

Το n-στο ευθυγραμμο τμημα της $A_0A_1...A_N$, δηλ. το $A_{n-1}A_n$, εχει μηκος

$$\Delta s_n=\sqrt{\Delta x_n^2+\Delta f_n^2}=\Delta x_n\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f_n}{\Delta x_n}\right)^2}. \tag{8.2}$$

Το ζητουμενο μηκος θα ειναι

$$s=\lim_{w(\mathcal{P})\to 0}\sum_n\sqrt{1+\left(\frac{\Delta f_n}{\Delta x_n}\right)^2}\Delta x_n=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}dx$$

(οπου εχουμε εκμεταλλευθει τον Ορισμο ;;; του ορισμενου ολοκληρωματος). Μπορουμε επισης να ορισουμε το *στοιχειωδες μηκος* ως

$$ds:=\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}dx$$

οποτε και το συνολικο μηκος της καμπυλης (παρομοια με τον υπολογισμο του εμβαδου απο το στοιχειωδες εμβαδον) ειναι

$$s=\int_a^b ds=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}dx.$$

8.1.17. Παραδειγμα. Το μηκος της καμπυλης $f(x) = x$ για $x \in [0,1]$ ειναι

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+1} dx = \sqrt{2},$$

οπως μπορουμε να εξακριβωσουμε και με στοιχειωδεις γεωμετρικους υπολογισμους.

8.1.18. Παραδειγμα. Το μηκος της καμπυλης $f(x) = x^2$ για $x \in [0,1]$ ειναι

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{4} \ln\left(\sqrt{5}+2\right) + \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

8.1.19. Παραδειγμα. Το μηκος της καμπυλης $f(x) = x^{3/2}$ για $x \in [0,1]$ ειναι

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x dx} = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx.$$

8.1.20. Μπρουμε να ορισουμε τον *ογκο* παρομοια με το μηκος και το εμβαδον. Ο γενικος ορισμος απαιτει την χρηση *διπλων ή τριπλων* ολοκληρωματων, οπως θα δεις στον *Λογισμο Συναρτησεων Πολλων Μεταβλητων*. Ομως υπαρχουν καποιες κατηγοριες στερεων των οποιων ο ογκος μπορει να οριστει και υπολογιστει με χρηση απλου ολοκληρωματος.

8.1.21. Ορισμος. Εστω συναρτηση $f(x)$ τετοια ωστε

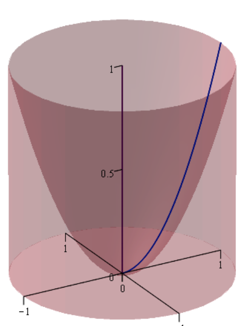
$$\forall x \in [a,b] : f(x) \geq 0 \text{ και συνεχης}$$

και C η αντιστοιχη καμπυλη. Εαν η C περιστραφει γυρω απο τον αξονα των x σχηματιζεται ενα στερεο σωμα· ομοιως και εαν περιστραφει γυρω απο τον αξονα των y (δες τα Σχηματα 8.9 και 8.10). Αυτα τα σωματα λεγονται *στερεα εκ περιστροφης* (της $f(x)$ γυρω απο τον αντιστοιχο αξονα). *Ο ογκος του στερεου εκ περιστροφης της C γυρω απο τον αξονα των x* οριζεται ως

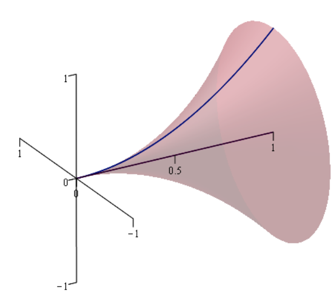
$$V_1 := \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx. \tag{8.3}$$

Ο ογκος του στερεου εκ περιστροφης της C γυρω απο τον αξονα των y οριζεται ως

$$V_2 := 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx. \tag{8.4}$$



Σχήμα 8.9



Σχήμα 8.10

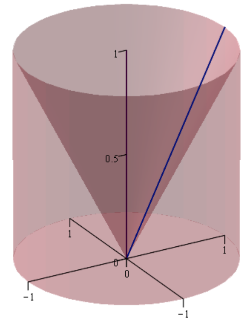
8.1.22. Η δικαιολογηση των παραπανω ορισμων αφηνεται στον αναγνωστη. *Προσοχη*, ο τυπος (8.4) δινει τον ογκο του στερεου το οποιο φρασσεται εκ των *ανω* απο την καμπυλη $f(x)$ και εκ των *κατω* απο τον αξονα των x.

8.1.23. Παραδειγμα. Δινεται η $f(x) = 2x$, $x \in [0,1]$. Ο ογκος του στερεου το οποιο σχηματιζεται οταν η αντιστοιχη καμπυλη περιστραφει γυρω απο τον αξονα των x ειναι (δες το Σχημα 8.11)

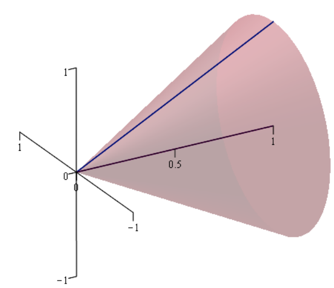
$$V_1 = \pi \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4\pi}{3} \tag{8.5}$$

Ο ογκος του στερεου το οποιο σχηματιζεται οταν η αντιστοιχη καμπυλη περιστραφει γυρω απο τον αξονα των y ειναι (δες το Σχημα 8.12)

$$V_2 = 2\pi \int_0^1 2x^2 dx = \frac{4\pi}{3}. \tag{8.6}$$



Σχήμα 8.11



Σχήμα 8.12

8.1.24. Παραδειγμα. Δινεται η $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [1,4]$. Ο ογκος του στερεου το οποιο σχηματιζεται οταν η αντιστοιχη καμπυλη περιστραφει γυρω απο τον αξονα των x ειναι

$$V = \pi \int_1^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^4 x dx = \frac{15\pi}{2}.$$

8.1.25. Παραδειγμα. Δινεται η $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $x \in [0,6]$. Ο ογκος του στερεου το οποιο σχηματιζεται οταν η αντιστοιχη καμπυλη περιστραφει γυρω απο τον αξονα των y ειναι

$$V = 2\pi \int_0^6 x \frac{x^2}{4} dx = 162\pi.$$

8.1.26. Παρομοια μπορουμε να ορισουμε την *επιφανεια* ενος στερεου εκ περιστροφης ως ενα ορισμενο ολοκληρωμα.

8.1.27. Ορισμος. Εστω συναρτηση $f(x)$ τετοια ωστε

$$\forall x \in [a,b] : f(x) \geq 0 \text{ και συνεχης}$$

και C η αντιστοιχη καμπυλη. *Το στερεο εκ περιστροφης της C γυρω απο τον αξονα των x εχει επιφανεια*

$$S_1 := 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx. \tag{8.7}$$

Το στερεο εκ περιστροφης της C γυρω απο τον αξονα των y εχει επιφανεια

$$S_2 := 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx. \tag{8.8}$$

8.1.28. Η δικαιολογηση των παραπανω ορισμων αφηνεται στον αναγνωστη.

8.1.29. Παραδειγμα. Δινεται η $f(x) = 2x$, $x \in [0,1]$. Η επιφανεια του στερεου το οποιο σηχματιζεται οταν η αντιστοιχη καμπυλη περιστραφει γυρω απο τον αξονα των x (δες το Σχημα 8.11) ειναι

$$S_1 = 2\pi \int_0^1 f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^1 2x\sqrt{1+4}dx = 2\sqrt{5}\pi.$$

Η επιφανεια του στερεου το οποιο σηχματιζεται οταν η αντιστοιχη καμπυλη περιστραφει γυρω απο τον αξονα των y (δες το Σχημα 8.12) ειναι

$$S_2 = 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+4}dx = \sqrt{5}\pi.$$

8.1.30. Παραδειγμα. Δινεται η $f(x) = x^3$, $x \in [0,1]$. Η επιφανεια του στερεου το οποιο σηχματιζεται οταν η αντιστοιχη καμπυλη περιστραφει γυρω απο τον αξονα των x. ειναι

$$S = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1+9x^4}dx = 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{5^3}}{27} - \frac{1}{54}\right).$$

8.1.31. Παραδειγμα. Δινεται η $f(x) = x^2$, $x \in [1,2]$. Η επιφανεια του στερεου το οποιο σηχματιζεται οταν η αντιστοιχη καμπυλη περιστραφει γυρω απο τον αξονα των y ειναι

$$S = 2\pi \int_1^4 \sqrt{f} \sqrt{1 + \frac{1}{4f}} df = 2\pi \left(\frac{\sqrt{17^3}}{12} - \frac{\sqrt{5^3}}{12}\right).$$

8.2 Λυμενα Προβληματα

8.2.1. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειεται απο την καμπυλη $y = e^x \sin x$, την ευθεια $x = 0$ και τον αξονα των x.
Λυση. Θα υπολογισουμε το εμβαδον για $x \in [0, \pi]$ (υπαρχουν και αλλα σημεια στα οποια η $y(x)$ τεμνει τον αξονα των x αλλα δεν θα τα μελετησουμε). Ειναι γνωστο (δες Κεφαλαιο 6) οτι

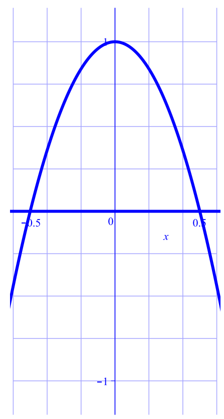
$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x = \frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x).$$

Οποτε

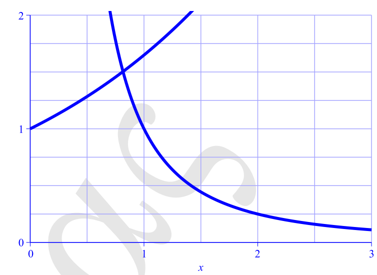
$$\int_0^\pi e^x \sin x dx = \left[\frac{e^x}{2} \cdot (\sin x - \cos x)\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{e^\pi + 1}{2}.$$

8.2.2. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειεται απο την καμπυλη $y = 1 - 4x^2$ και τον αξονα των x.
Λυση. Δες το σχημα 8.13. Η $y = 1 - 4x^2$ τεμνει το αξονα των x στα σημεια οπου $0 = 1 - 4x^2$, δηλ. $x = \pm\frac{1}{2}$. Το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(1 - 4x^2\right) dx = \left[x - \frac{4x^3}{3}\right]_{x=-1/2}^{x=1/2} = \frac{2}{3}.$$



Σχήμα 8.13



Σχήμα 8.14

8.2.3. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειεται απο τις καμπυλες $y = e^{x/2}$, $y = \frac{1}{x^2}$ και τις ευθειες $x = 2$, $x = 3$.
Λυση. Δες το Σχημα 8,14. Το ζητουμενο εμβαδον ειναι $E = E_1 - E_2$, οπου

$$E_1 = \int_2^3 e^{x/2} dx, \qquad E_2 = \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx.$$

(γιατι;). Οποτε

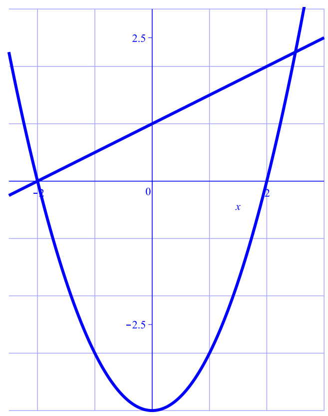
$$E = E_1 - E_2 = \int_2^3 \left(e^{x/2} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_2^3 e^{x/2} dx - \int_2^3 \frac{1}{x^2} dx$$
$$= \left[2e^{x/2} + \frac{1}{x} \right]_{x=2}^{x=3} = 2e^{3/2} + \frac{1}{3} - 2e - \frac{1}{2} = 2e \cdot \left(e^{1/2} - 1 \right) - \frac{1}{6}.$$

8.2.4. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειεται απο τις καμπυλες $y = x^2 - 4$, $y = \frac{1}{2}x + 1$.
Λυση. Δες το σχημα 8.15. Οι δυο καμπυλες τεμνονται στα σημεια οπου

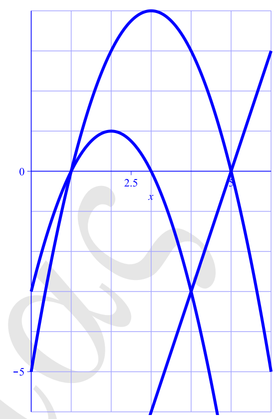
$$x^2 - 4 = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow \left(x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = -2 \right)$$

Οποτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$E = \int_{-2}^{5/2} \left(\frac{1}{2}x + 1 - \left(x^2 - 4 \right) \right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 5x \right]_{x=-2}^{x=5/2} = \frac{729}{48}.$$



Σχήμα 8.15



Σχήμα 8.16

8.2.5. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειεται απο τις καμπυλες $y_1(x) = -x^2 + 6x - 5$, $y_2(x) = -x^2 + 4x - 3$ και $y_3(x) = 3x - 15$.
Λυση. Δες το σχημα 8.16. Η $y_1(x)$ και η $y_2(x)$ τεμνονται στα x που ικανοποιουν

$$-x^2 + 6x - 5 = -x^2 + 4x - 3$$

δηλ. στο $x_1 = 1$. Η $y_1(x)$ και η $y_3(x)$ τεμνονται στα x που ικανοποιουν

$$-x^2 + 6x - 5 = 3x - 15$$

δηλ. στο $x_2 = 5$ και στο -3 που απορριπτεται (γιατι;). Τελος, η $y_2(x)$ και η $y_3(x)$ τεμνονται στα x που ικανοποιουν

$$3x - 15 = -x^2 + 4x - 3$$

δηλ. στο $x_3 = 4$ και στο -3 που απορριπτεται (γιατι;). Οποτε το ζητουμενο εμβαδον δινεται απο

$$\begin{aligned}
E_1 &= \int_1^4 (y_1(x) - y_2(x))\, dx = \int_1^4 \left(-x^2 + 6x - 5 - \left(-x^2 + 4x - 3\right)\right) dx = 9, \\
E_2 &= \int_4^5 (y_1(x) - y_3(x))\, dx = \int_4^5 \left(-x^2 + 6x - 5 - (3x - 15)\right) dx = \frac{19}{6}, \\
E &= E_1 + E_2 = 9 + \frac{19}{6} = \frac{73}{6}.
\end{aligned}$$

8.2.6. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειεται απο τις καμπυλες $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.
Λυση. Τα σημεια τομης δινονται απο

$$x^2 = 4y \Rightarrow x^4 = 16y^2 = 64x \Rightarrow (x = 0, x = 4).$$

Οποτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{12}\right]_{x=0}^{x=4} = \frac{16}{3}.$$

8.2.7. Υπολογισε το εμβαδον που οριζεται απο τις καμπυλες $y = \cos x$, $y = \sin x$ και τις ευθειες $x = 0$, $x = 2\pi$.

Λυση. Το ζητουμενο εμβαδο ειναι

$$
\begin{aligned}
E &= \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x| \, dx \\
&= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) \, dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) \, dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x) \, dx \\
&= [\sin x + \cos x]_{x=0}^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{x=\pi/4}^{5\pi/4} + [\sin x + \cos x]_{x=5\pi/4}^{2\pi} \\
&= \left(\sqrt{2} - 1\right) + \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

8.2.8. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$, $a = 0$, $b = 1$.
Λυση. Το ζητουμενο μηκος ειναι

$$
\begin{aligned}
s &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \log\left(1 + \sqrt{2}\right).
\end{aligned}
$$

8.2.9. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $f(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.
Λυση. Εδω εχουμε

$$
\frac{df}{dx} = \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x^3}
$$

οποτε

$$
\begin{aligned}
s &= \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x^3}\right)^2} dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{x^6}{4} + \frac{1}{4x^6} - \frac{1}{2}} dx = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3}\right)^2} dx \\
&= \int_1^4 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3}\right) dx = \frac{2055}{64}.
\end{aligned}
$$

8.2.10. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $f(y) = \frac{y^4}{2} + \frac{1}{16y^2}$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.
Λυση. Εδω η καμπυλη δινεται με ανεξαρτητη μεταβλητη την y. Οποτε εχουμε

$$
\frac{df}{dy} = 2y^3 - \frac{1}{8y^3}
$$

και

$$
s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2} = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(2y^3 - \frac{1}{8y^3}\right)^2} dy = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(2y^3 + \frac{1}{8y^3}\right)^2} dy = \frac{483}{64}
$$

8.2.11. Υπολογισε το μηκος της *κλειστης* καμπυλης που δινεται σε πεπλεγμενη μορφη: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
Λυση. Θεωρωντας την x ως ανεξαρτητη μεταβλητη εχουμε

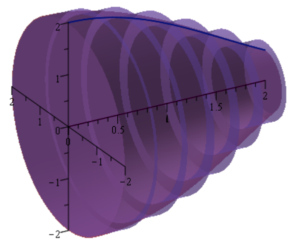
$$
\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{1/3}}{y^{1/3}}.
$$

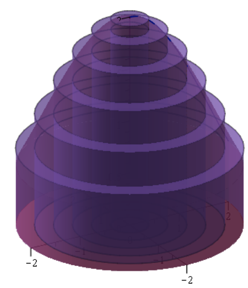
Παρατηρησε επισης στο σχημα οτι το x μεταβαλλεται απο το $-a$ ως το a. Οποτε

$$
\begin{aligned}
s &= \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \left(\frac{x^{1/3}}{y^{1/3}}\right)^2} dx = \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}} dy = \int_{-a}^{a} \sqrt{\frac{a^{2/3}}{x^{2/3}}} dy \\
&= a^{1/3} \int_{-a}^{a} x^{-1/3} dy = \frac{3}{2}a^{1/3} \left[x^{2/3}\right]_{x=-a}^{x=a} = 3a.
\end{aligned}
$$

Αυτο ομως ειναι το μηκος του ανω μισου της καμπυλης. Το ζητουμενο μηκος ειναι διπλασιο, δηλ. $6a$.

8.2.12. Δικαιολογησε τον Ορισμο 8.1.21 του ογκου στερεου εκ περιστροφης.





Σχήμα 8.17 Σχήμα 8.18

Λυση. Θα δικαιολογησουμε μονο τον ορισμο του ογκου στερεου εκ περιστροφης γυρω απο τον αξονα των x. Δες το σχημα 8.17. Ο ζητουμενος ογκος V μπορει να προσεγγιστει απο το αθροισμα των *στοιχειωδων ογκων* των κυλινδρων οι οποιοι αντιστοιχουν στην διαμεριση $\mathcal{P} = (x_0, x_1, x_2, ..., x_N)$, με $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Ο n-στος εξ αυτων των κυλινδρων εχει ογκο $\Delta V_n = \pi \left(f\left(x_n\right)\right)^2 \cdot \Delta x_n$ και ο συνολικος ογκος ειναι

$$\sum_{n=1}^{N} \pi \left(f\left(x_n\right)\right)^2 \cdot \Delta x_n. \tag{8.9}$$

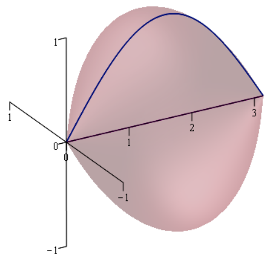
Η προσεγγιση γινεται ακριβεστερη καθως το πλατος $w(\mathcal{P}) = \max_n \Delta x_n$ τεινει στο μηδεν. Παρομοια με τον υπολογισμο μηκους και εμβαδου, θεωρουμε οτι ο στοιχειωδης ογκος ειναι

$$dV = \pi \left(f\left(x\right)\right)^2 dx$$

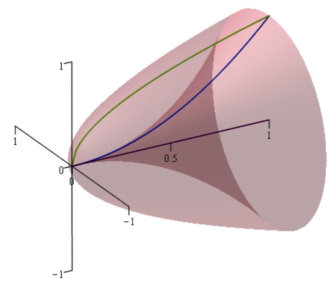
οποτε

$$V = \int_a^b dV = \pi \int_a^b \left(f\left(x\right)\right)^2 dx.$$

Ο ογκος για την περιστροφη γυρω απο τον αξονα των x δικαιολογειται με παρομοιοους συλλογισμους (δες το Σχημα 8.18).



Σχήμα 8.19



Σχήμα 8.20

8.2.13. Βρες τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = \sqrt{\sin x}$, $x \in [0, \pi]$, γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση. Δες το Σχημα 8.19. Συμφωνα με την (8.3) εχουμε

$$V = \pi \int_0^\pi \left(\sqrt{\sin x}\right)^2 dx = \int_0^\pi \sin x dx = -\pi \left[\cos x\right]_{x=0}^{x=\pi} = 2\pi.$$

8.2.14. Βρες τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της ελλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση. Αρκει να υπολογισουμε τον ογκο που προκυπτει απο την περιστροφη της $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, $x \in [-a, a]$, γυρω απο τον αξονα των x. Ετσι εχουμε

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \left(b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx = \pi b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{x=-a}^{x=a} = \frac{4\pi a b^2}{3}.$$

8.2.15. Βρες τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [0, 1]$, γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση. Απο την (8.3) εχουμε

$$V = \pi \int_0^1 \left(x^2 + 1\right)^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{28\pi}{15}.$$

8.2.16. Βρες τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη γυρω απο τον αξονα των x των καμπυλων $y = x^2$ και $x = y^2$.
Λυση. Δες το σχημα 8.20. Ο ζητουμενος ογκος ειναι $V = V_2 - V_1$, οπου V_1 ειναι ο ογκος που σχηματιζει η $x = y^2$ και V_2 ειναι ο ογκος που σχηματιζει η $y = x^2$. Τα ορια ολοκληρωσης ειναι τα σημεια τομης των δυο καμπυλων, στα $x = 0$ και $x = 1$. Εχουμε

$$V_1 = \pi \int_0^1 \left(x^2\right)^2 dx = \frac{\pi}{5}$$
$$V_2 = \pi \int_0^1 \left(x^{1/2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$
$$V = V_2 - V_1 = \frac{\pi}{10}.$$

8.2.17. Βρες τον ογκο του στερεου που σχηματιζεται απο την περιστροφη γυρω απο τον αξονα των x των καμπυλων $y = x^2\sqrt{2}/a$ και $x^2 + y^2 = a^2$.
Λυση. Παρομοια με την προηγουμενη Ασκηση, ο ζητουμενος ογκος ειναι $V = V_2 - V_1$, οπου V_1 ειναι ο ογκος που σχηματιζει η $y = x^2\sqrt{2}/a$ και V_2 ειναι ο ογκος που σχηματιζει η $x^2 + y^2 = a^2$. Τα ορια ολοκληρωσης ειναι τα σημεια τομης των δυο καμπυλων, στα $x = -a/\sqrt{2}$ και $x = a/\sqrt{2}$. Εχουμε

$$V_1 = 2\pi \int_{-a/\sqrt{2}}^{a/\sqrt{2}} \left(x^2 \frac{\sqrt{2}}{a} \right)^2 dx = \frac{1}{5}\sqrt{2}\pi a^3,$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi a^3 \text{ επειδη το σχηματιζομενο στερεο ειναι σφαιρα,}$$

$$V = V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{\sqrt{2}}{5}a^3.$$

8.2.18. Βρες τον ογκο του στερεου που οριζεται απο την περιστροφη της $f(x) = x^2 + 1$, $x \in [0,1]$ γυρω απο τον αξονα των y και απο τον κυλινδρο που φαινεται στο σχημα 8.21.
Λυση. Δες το Σχημα 8.21. Το προβλημα μπορει να λυθει με δυο τροπους.

1. Εφαρμοζοντας κατευθειαν τον τυπο (8.4) εχουμε:

$$V = 2\pi \int_0^1 x \left(x^2 + 1 \right) dx = \frac{3}{2}\pi.$$

2. Εναλλακτικα, ο ζητουμενος ογκος ειναι $V = V_1 - V_2$, οπου

$$V_1 = \pi \cdot 1^2 \cdot 2 = 2\pi$$

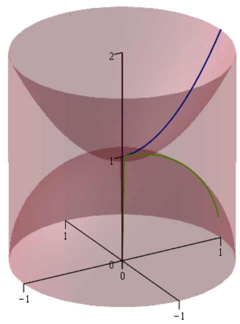
   ειναι ο ογκος του εξωτερικου κυλινδρου και V_2 ειναι ο ογκος του εσωτερικου στερεου (αυτο ειναι ενα *παραβολοειδες*). Εδω θελουμε τον ογκο που η $f(x) = x^2 + 1$ φρασσει εκ των *κατω*, αρα δεν μπορουμε να εφαρμοσουμε τον (8.3). Αν ομως θεσουμε $x = g(y) = \sqrt{y-1}$ τοτε, αντιστρεφοντας τους ρολους των x και y στον (8.3) εχουμε.

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow x$$

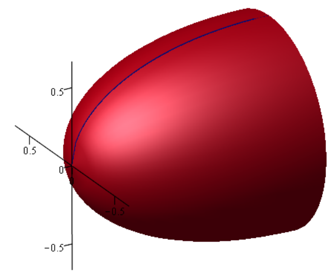
   οποτε

$$V_2 = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{y-1} \right)^2 dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - 2y \right]_{y=1}^{y=2} = \frac{\pi}{2}.$$

   Τελικα ο ζητουμενος ογκος ειναι $V = V_1 - V_2 = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$, ισος με το αποτελεσμα του πρωτου τροπου επιλυσης.



Σχήμα 8.21



Σχήμα 8.22

8.2.19. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της καμπυλης $f(x) = x^3$, $x \in [0,1]$, γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση. Συμφωνα με την (8.7) εχουμε

$$S = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = \frac{2\pi}{36} \int_0^1 \left(1 + 9x^4\right)^{1/2} d\left(x^4\right)$$
$$= \frac{\pi}{18} \left[\frac{\left(1+9x^4\right)^{3/2}}{3/2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{27} \left(10^{3/2} - 1\right).$$

8.2.20. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της καμπυλης $f(x) = x^2$, $x \in \left[0, \sqrt{2}\right]$, γυρω απο τον αξονα των y.
Λυση. Εδω η περιστροφη γινεται γυρω απο τον αξονα των y, οποτε

$$S = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2} dx = \frac{13}{3}\pi.$$

8.2.21. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της καμπυλης $9y^2 = x(3-x)^2$, γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση. Η καμπυλη τεμνει τον αξονα των x στα σημεια $a = 0$ και $b = 3$. Επισης εχουμε

$$y = \frac{\sqrt{x}(3-x)}{3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}.$$

Οποτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$S = 2\pi \int_0^3 \frac{\sqrt{x}(3-x)}{3} \sqrt{1 + \left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^3 -\frac{1}{6}(x+1)(x-3)\, dx$$
$$= \frac{\pi}{3} \int_0^3 \left(2x + 3 - x^2\right) dx = \frac{\pi}{3} \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=3} = 3\pi.$$

8.2.22. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της καμπυλης $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$, γυρω απο τον αξονα των x.

Λυση. Δες το Σχημα 8.22. Η $f(x)$ δεν τεμνει τον αξονα των x, ετσι θα χρειαστει να υπολογισουμε ενα γενικευμενο ολοκληρωμα. Εχουμε $\frac{df}{dx} = -e^{-x}$ και

$$\begin{aligned} V_M &= 2\pi \int_0^M e^{-x}\sqrt{1+\left(-e^{-x}\right)^2}dx = -2\pi \int_{x=0}^{x=M} \left(1+e^{-2x}\right)^{1/2} d\left(e^{-x}\right) \\ &= -2\pi \int_{u=1}^{u=e^{-M}} \left(1+u^2\right)^{1/2} du = 2\pi \left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_{u=e^{-M}}^{u=1}. \end{aligned}$$

Το ζητουμενο εμβαδον ειναι $V = \lim_{M\to\infty} V_M$, οποτε

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \lim_{M\to\infty} \left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_{u=e^{-M}}^{u=1} \\ &= 2\pi \left[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_{u=0}^{u=1} = 2\pi\left[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

8.2.23. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = \cosh x$, $x \in [-1,1]$, γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση. Ειναι

$$E = 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh x\sqrt{1+\sinh^2 x}dx.$$

Αλλα $1+\sinh^2 x = \cosh^2 x$ οποτε

$$E = 2\pi \int_{-1}^{1} \cosh^2 x dx = 2\pi\left(\frac{1}{2}\sinh 2 + 1\right).$$

8.3 Αλυτα Προβληματα

8.3.1. Σχεδιασε το χωριο το οποιο οριζουν οι $y_1(x) = x^2 + x$, $x = 1$, $x = 3$ και υπολογισε το προσημασμενο εμβαδον E_s και το απολυτο εμβαδον E_a.

Απ. $\int_1^3 (x^2+x)dx = \frac{38}{3}$, $\int_1^3 \left|x^2+x\right| dx = \frac{38}{3}$.

8.3.2. Σχεδιασε το χωριο το οποιο οριζουν οι $y_1(x) = x^2 + x$, $x = -2$, $x = 0$ και υπολογισε το προσημασμενο εμβαδον E_s και το απολυτο εμβαδον E_a.

Απ. $\int_{-2}^0 (x^2+x)dx = \frac{2}{3}$, $\int_{-2}^0 \left|x^2+x\right| dx = \int_{-2}^{-1}(x^2+x)dx - \int_{-1}^0 (x^2+x)dx = 1$.

8.3.3. Σχεδιασε το χωριο το οποιο οριζουν οι $y_1(x) = x^3$, $x = 0$, $x = 5$ και υπολογισε το προσημασμενο εμβαδον E_s και το απολυτο εμβαδον E_a.

Απ. $\int_0^5 x^3 dx = \frac{625}{4}$, $\int_0^5 \left|x^3\right| dx = \frac{625}{4}$.

8.3.4. Σχεδιασε το χωριο το οποιο οριζουν οι $y_1(x) = x^3$, $x = -1$, $x = 1$ και υπολογισε το προσημασμενο εμβαδον E_s και το απολυτο εμβαδον E_a.

Απ. $\int_{-1}^1 x^3 dx = 0$, $\int_{-1}^1 \left|x^3\right| dx = 2\int_0^1 x^3\, dx = \frac{1}{2}$.

8.3.5. Σχεδιασε το χωριο το οποιο οριζουν οι $y_1(x) = e^x$, $x = 0$, $x = 2$ και υπολογισε το προσημασμενο εμβαδον E_s και το απολυτο εμβαδον E_a.

Απ. $\int_0^2 e^x dx = \int_0^2 \left|e^x\right| dx = e^2 - 1$.

8.3.6. Σχεδιασε το χωριο το οποιο οριζουν οι $y_1(x) = x + 2$, $y_1(x) = x^3 + 2x^2$ και υπολογισε το προσημασμενο εμβαδον E_s και το απολυτο εμβαδον E_a.

Απ. Ριζες: $x = 1, -2, -1$. $\int_{-2}^1 (x^3+2x^2-x-2)dx = \frac{9}{4}$. $\int_{-2}^1 \left|x^3+2x^2-x-2\right| dx =$ $\int_{-2}^{-1}(x^3+2x^2-x-2)dx - \int_{-1}^1 (x^3+2x^2-x-2)dx = \frac{37}{12}$.

8.3.7. Σχεδιασε το χωριο το οποιο οριζουν οι $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = x$ και υπολογισε το προσημασμενο εμβαδον E_s και το απολυτο εμβαδον E_a.

Απ. Ριζες: $x = 0, 1, -1$. $\int_{-1}^{1} \left(x^3 - x\right) dx = 0$. $\int_{-1}^{1} \left|x^3 - x\right| dx = \int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx + \int_{0}^{1}(x - x^3)dx = \frac{1}{2}$.

8.3.8. Σχεδιασε το χωριο το οποιο οριζουν οι $y_1(x) = x^3$, $y_2(x) = x^2$ και υπολογισε το προσημασμενο εμβαδον E_s και το απολυτο εμβαδον E_a.

Απ. Ριζες: $x = 0, 1$. $\int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \int_0^1 \left|x^2 - x^3\right| dx = \frac{1}{12}$.

8.3.9. Σχεδιασε το χωριο το οποιο οριζουν οι $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = 6x - 2$ και υπολογισε το προσημασμενο εμβαδον E_s και το απολυτο εμβαδον E_a.

Απ. Ριζες: $x = 3 \pm \sqrt{7}$, $\int_{3-\sqrt{7}}^{3+\sqrt{7}} (x^2 - 6x + 2)dx = -\frac{28}{3}\sqrt{7}$, $\int_{3-\sqrt{7}}^{3+\sqrt{7}} \left|x^2 - 6x + 2\right| dx = \frac{28}{3}\sqrt{7}$.

8.3.10. Σχεδιασε το χωριο το οποιο οριζουν οι $y_1(x) = \sqrt{x^3}$, $y_2(x) = x^2$ και υπολογισε το προσημασμενο εμβαδον E_s και το απολυτο εμβαδον E_a.

Απ. Ριζες: $x = 0, 1$, $\int_0^1 (\sqrt{x}^3 - x^2)dx = \int_0^1 \left|\sqrt{x}^3 - x^2\right| dx = \frac{1}{15}$.

8.3.11. Σχεδιασε το χωριο το οποιο οριζουν οι $x_1(y) = y^2 + 2$, $y_2(x) = x - 8$ και υπολογισε το προσημασμενο εμβαδον E_s και το απολυτο εμβαδον E_a.

Απ. Η $y^2 + 2 = y + 8$ εχει ριζες $y = 3, -2$. Οποτε $\int_{-2}^{3} \left|y^2 + 2 - (y + 8)\right| dy = \frac{125}{6}$.

8.3.12. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειεται μεταξυ της ελλειψης $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ και της υπερβολης $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

Απ. $\sqrt{2}\ln 3 + 4 \arcsin \sqrt{2/3}$.

8.3.13. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $y = \ln(1 - x^2)$, μεταξυ των $x = 1/2$, $x = -1/2$.

Απ. $2 \cdot \ln(3) - 1$.

8.3.14. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $y^3 = 8x^2$, μεταξυ των $x = 1$, $x = 8$.

Απ. $\frac{1}{27}\left(104\sqrt{13} - 125\right)$.

8.3.15. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $y = \frac{x^4+3}{6x}$, μεταξυ των $x = 1$, $x = 2$.

Απ. 17/12.

8.3.16. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $y = \frac{2}{3}\left(1 + x^2\right)^{3/2}$, μεταξυ των $x = 0$, $x = 3$.

Απ. 21.

8.3.17. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $y = \frac{x^4+48}{24x}$, μεταξυ των $x = 2$, $x = 4$.

Απ. 17/6.

8.3.18. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $y = x^{3/2}$ μεταξυ των $x = 0, x = 1$.

Απ. $-\frac{8}{27} + \frac{13^{3/2}}{27}$.

8.3.19. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $y = \frac{x^2}{2} - 1$, μεταξυ των σημειων τομης με την ευθεια $y = -1/2$.

Απ. $2^{1/2} - \ln(2^{1/2} - 1)$.

8.3.20. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $y = a\cosh(\frac{x}{a})$ μεταξυ των $x = a$, $x = -a$.

Απ. $2a\sinh(1)$.

8.3.21. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $9y^2 = x(x-3)^2$ μεταξυ των σημειων τομης με τον αξονα των x.

Απ. $4\sqrt{3}$.

8.3.22. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$, μεταξυ των σημειων τομης απο την ευθεια $x = -1$.

Απ. 28/3.

8.3.23. Σχεδιασε και υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = 1/\sqrt{x+1}$, $x \in [0,3]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $\pi \ln 4$.

8.3.24. Σχεδιασε και υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $64\pi/15$.

8.3.25. Σχεδιασε και υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = e^{-x}$, $x \in [0,1]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $\frac{\pi}{2}\left(1-e^{-2}\right)$.

8.3.26. Σχεδιασε και υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = \sqrt{\cos x}$, $x \in [0, \pi/2]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. π.

8.3.27. Σχεδιασε και υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = 8x$, $x \in [0,2]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $512\pi/3$.

8.3.28. Σχεδιασε και υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = \sin x$, $x \in [0,\pi]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $\pi^2/2$.

8.3.29. Σχεδιασε και υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = e^x$, $x \in [0,1]$, γυρω απο τον αξονα y.

Απ. 2π.

8.3.30. Σχεδιασε και υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = x^3$, $x \in [0,2]$, γυρω απο τον αξονα y.

Απ. $64\pi/5$.

8.3.31. Σχεδιασε και υπολογισε τον ογκο του στερεου η οποια σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $x \in [1,2]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $\frac{47\pi}{16}$.

8.3.32. Σχεδιασε και υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας η οποια σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $x \in [1,4]$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $\frac{315\pi}{16} - 8\pi \ln(2) - \pi \ln(2)^2$.

8.3.33. Σχεδιασε και υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας η οποια σχηματιζεται απο την περιστροφη της $x^2 + (y-2)^2 = 1$, γυρω απο τον αξονα x.

Απ. $8\pi^2$.

8.3.34. Σχεδιασε και υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας η οποια σχηματιζεται απο την περιστροφη της $f(x) = x^{1/3} + 2$, $x \in [1,8]$, γυρω απο τον αξονα y.

Απ. $\frac{\pi}{27}\left(145^{3/2} - 10^{3/2}\right)$.

8.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

8.4.1. Υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο προκυπτει απο την περιστροφη της $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (με $-b \leq y \leq b$) γυρω απο τον αξονα x.

8.4.2. Υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο προκυπτει απο την περιστροφη της $y^2=(x+4)^3$ γυρω απο τον αξονα y.

8.4.3. Υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο προκυπτει απο την περιστροφη της $y=\frac{1}{1+x^2}$ (με $-1 \leq x \leq 1$) γυρω απο τον αξονα y.

8.4.4. Υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο προκυπτει απο την περιστροφη της $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ γυρω απο (α) τον αξονα x, (β) τον αξονα y.

8.4.5. Υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο προκυπτει απο την περιστροφη του χωριου που οριζεται απο τις $y=4ax$ και $x=a$ γυρω απο την ευθεια $y=-2a$.

8.4.6. Υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο προκυπτει απο την περιστροφη του χωριου που περικλειεται απο την $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2-y^2\right)$ γυρω απο (α) τον αξονα των x και (β) γυρω απο τον αξονα των y.

8.4.7. Υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο προκυπτει απο την περιστροφη του χωριου που οριζεται απο τις $y_1=x^2$ και $y^2=8^{3/2}\sqrt{x}$ γυρω απο τον αξονα y.

8.4.8. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας η οποια προκυπτει απο την περιστροφη της $4x^2+y^2=4$ γυρω απο τον αξονα των y.

8.4.9. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας η οποια προκυπτει απο την περιστροφη ενος βροχου της $9ax^2=y\left(3a-y^2\right)$ γυρω απο τον αξονα των y.

8.4.10. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας η οποια προκυπτει απο την περιστροφη της $8y^2=x^2-x^4$ γυρω απο τον αξονα των x.

8.4.11. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας η οποια προκυπτει απο την περιστροφη της $x^2+(y-b)^2=r^2$ γυρω απο τον αξονα των x.

8.4.12. Δικαιολογησε τον Ορισμο 8.1.27 της επιφανειας στερεου εκ περιστροφης.

8.4.13. Απο ολες τος κλειστες επιπεδες καμπυλες δεδομενου μηκους S, ποια περικλειει το μεγιστο και ποια το ελαχιστο εμβαδον;

8.4.14. Εστω τυχουσα κλειστη επιπεδη καμπυλη με μηκος S, η οποια περικλειει εμβαδον A. Δειξε οτι $4\pi A \leq S^2$. Ποτε ισχυει η ισοτητα;

8.4.15. Εστω $f(x)$ συνεχης στο $[a,b]$. Δειξε οτι

$$\sqrt{(b-a)^2+(f(b)-f(a))^2} \leq \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}dx.$$

8.4.16. Εστω $f(x)$ παραγωγισιμη στο $[0,2\pi]$. Δειξε οτι

$$\int_0^{2\pi}[f(x)]^2\,dx \leq \int_0^{2\pi}\left[\frac{df}{dx}\right]^2dx.$$

9 Παραμετρικες Συναρτησεις

Στο προηγουμενο κεφαλαιο εχουμε ορισει μια *καμπυλη* με την αναπαρασταση $(x, f(x))$. Ομως υπαρχουν καμπυλες για τις οποιες αυτη η αναπαρασταση δεν ειναι καταλληλη ή ευχρηστη. Για αυτο τον λογο στο παρον κεφαλαιο εισαγουμε μια γενικευση: την *παραμετρικη αναπαρασταση* μιας καμπυλης στην μορφη $(x(t), y(t))$ (με την ανεξαρτητη μεταβλητη t να παιρνει τιμες σε ενα καταλληλο συνολο).

9.1 Θεωρια και Παραδειγματα

9.1.1. Ορισμος. Μια (επιπεδη) *παραμετρικη καμπυλη* C ειναι το συνολο των σημειων

$$C := \{(x(t), y(t)) : t \in [t_1, t_2]\}.$$

Οι $x(t), y(t)$ λεγονται *παραμετρικες εξισωσεις της καμπυλης*. Η ιδια καμπυλη μπορει να εχει *περισσοτερες απο μια* παραμετρικες παραστασεις.

9.1.2. Μια ερμηνεια του παραπανω ορισμου ειναι η εξης: η μεταβλητη t συμβολιζει τον *χρονο* και $(x(t), y(t))$ ειναι οι συντεταγμενες ενος σημειου (το οποιο διατρεχει την καμπυλη) στην χρονικη στιγμη t. Με αλλα λογια, η καμπυλη ειναι η τροχια ενος κινουμενου σημειου. Αξιζει να σημειωσουμε οτι συμφωνα με την παραπανω ερμηνεια, μια παραμετρικη καμπυλη ειναι εφοδιασμενη με μια *φορα* συμφωνα με την οποια το κινουμενο σημειο διερχεται απο τα σημεια της καμπυλης.

9.1.3. Παραδειγμα. Θεωρησε τον κυκλο

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Αυτος επιδεχεται πολλες παραμετρικες αναπαραστασεις. Γενικα ζητουμε ενα ζευγος συναρτησεων $(x(t), y(t))$ οι οποιες ικανοποιουν

$$\forall t : (x(t))^2 + (y(t))^2 = R^2.$$

Ενα τετοιο ζευγος ειναι το

$$x(t) = R\cos t, \quad y(t) = R\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{9.1}$$

Πραγματι

$$\forall t : (x(t))^2 + (y(t))^2 = (R\cos t)^2 + (R\sin t)^2 = R^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = R^2.$$

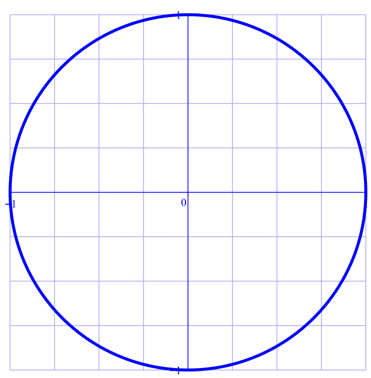
Η γεωμετρικη ερμηνεια της (9.1) φαινεται στο Σχημα 9.1, οπου βλεπουμε και οτι αρκει να λαβουμε $t \in [0, 2\pi]$. Υπαρχουν και αλλα ζευγη $(x(t), y(t))$ τα οποια παριστανουν τον ιδιο κυκλο. Ας θεωρησουμε την παραμετροποιηση

$$x(t) = R\cos(-t), \quad y(t) = R\sin(-t), \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{9.2}$$

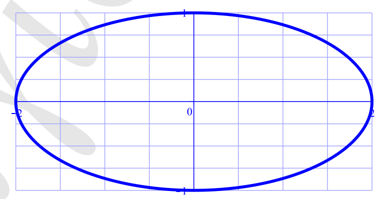
Αυτη παριστανει τον ιδιο κυκλο (ελεγξε το) ο οποιος ομως διαγραφεται κατα *ωρολογιακη* φορα (ενω με την παραμετροποιηση της (;;) διαγραφεται με *αντιωρολογιακη* φορα). Αλλες παραμετροποιησεις του κυκλου ειναι οι

$$x(t) = R\cos 2t, \quad y(t) = R\sin 2t, \quad t \in [0, \pi],$$
$$x(t) = R\sin t, \quad y(t) = R\cos t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Βρες αλλα δυο ζευγη $(x(t), y(t))$ τα οποια παριστανουν τον ιδιο κυκλο.



Σχήμα 9.1



Σχήμα 9.2

9.1.4. Παραδειγμα. Θεωρησε το ημικυκλιο

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad y \geq 0.$$

Μια παραμετρικη αναπαρασταση αυτου ειναι (γιατι;) η

$$x(t) = R\cos t, \quad y(t) = R\sin t, \quad t \in [0, \pi]. \tag{9.3}$$

9.1.5. Η παραμετρικη αναπαρασταση μιας καμπυλης C ειναι γενικευση της αναπαραστασης $(x, f(x))$ υπο την εννοια οτι μπορουμε παντα να θεσουμε $x(t) = t$ και $y(t) = f(t) = f(x)$ (εαν βεβαιως υπαρχει καταλληλη συναρτηση $f(x)$).

9.1.6. Υπαρχουν τρεις βασικες μεθοδοι για να κανουμε την γραφικη παρασταση μιας παραμετρικης καμπυλης.

1. Με απαλοιφη της μεταβλητης t απο τις $x(t)$ και $y(t)$ παιρνουμε εξισωση της μορφης $F(x, y) = 0$ και αναγνωριζουμε το ειδος της καμπυλης.
2. Με καταγραφη σε ενα πινακα των σημειων $(x(t), y(t))$ για διαφορες τιμες του t και σχεδιαση αυτων.
3. Με χρηση μαθηματικου λογισμικου.

9.1.7. Παραδειγμα. Η παραμετρικη καμπυλη

$$x(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

ειναι μια ελλειψη, διοτι

$$\frac{(x(t))^2}{a^2} + \frac{(y(t))^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = 1.$$

Εχει την γραφικη παρασταση του Σχηματος 9.2.

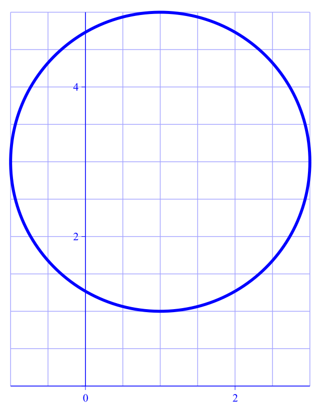
9.1.8. Παραδειγμα. Η παραμετρικη καμπυλη

$$x(t) = 1 + 2\cos t, \quad y(t) = 3 + 2\sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

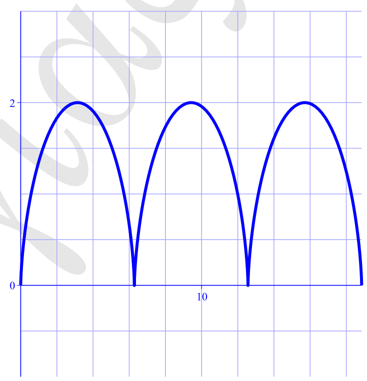
ειναι ενας κυκλος, διοτι

$$(x(t) - 1)^2 + (y(t) - 3)^2 = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t = 4.$$

Εχει την γραφικη παρασταση του Σχηματος 9.3.



Σχήμα 9.3



Σχήμα 9.4

9.1.9. Παραδειγμα. Για να κανουμε την γραφικη παρασταση της παραμετρικης καμπυλης

$$x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t, \quad t \in [0, 4\pi]$$

κατασκευαζουμε τον παρακατω πινακα.

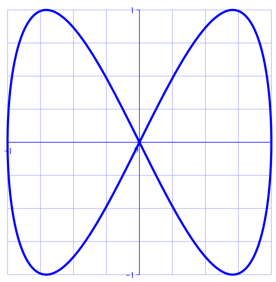
t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	3π	$\frac{13\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{15\pi}{4}$	4π
$x(t)$	0																
$y(t)$	0																

Συνδεοντας τα σημεια παιρνουμε την γραφικη παρασταση του Σχηματος 9.4.

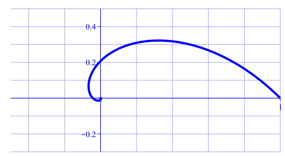
9.1.10. Παραδειγμα. Η γραφικη παρασταση της παραμετρικης καμπυλης

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin 2t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

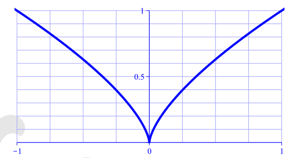
ειναι αυτη του Σχηματος 9.5 οπως την κατασκευασε το μαθηματικο λογισμικο *Wolphram Alpha*.



Σχήμα 9.5



Σχήμα 9.6



Σχήμα 9.7

9.1.11. Ασκηση. Δειξε οτι η γραφικη παρασταση της

$$x\left(t\right)=e^{-t}\cos t,\quad y\left(t\right)=e^{-t}\sin t,\quad t\in\left[0,3\pi\right]$$

ειναι αυτη του Σχηματος 9.6.

9.1.12. Μπορουμε να μελετησουμε τη παραμετρικη καμπυλη $\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$ και να κατασκευασουμε μια πιο λεπτομερη γραφικη παρασταση αυτης υπολογιζοντας τις παραγωγους $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

9.1.13. Παραδειγμα. Θα βρουμε τις $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ οταν

$$x\left(t\right)=t-\sin t,\quad y\left(t\right)=1-\cos t.$$

Εχουμε

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)}{1-\cos t}=-\frac{1}{\left(1-\cos t\right)^2}.$$

9.1.14. Ασκηση. Βρες τις $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ οταν $x\left(t\right)=e^t\cos t$, $y\left(t\right)=e^t\sin t$.

9.1.15. Παραδειγμα. Θα μελετησουμε την παραμετρικη καμπυλη

$$x\left(t\right)=t^3,\quad y\left(t\right)=t^2,\quad t\in\left(-\infty,\infty\right).$$

Καταρχην απαλειφουμε το t και εχουμε

$$x=t^{1/3}\Rightarrow y=x^{2/3}.$$

Τωρα υπολογιζουμε τις

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}x^{-1/3},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{9x^{\frac{4}{3}}}.$$

και με τις συνηθεις μεθοδους κατασκευαζουμε τον πινακα

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{dy}{dx}=f'\left(x\right)$		$-$		$+$	
$\frac{d^2y}{dx^2}=f''\left(x\right)$		$-$		$-$	
$y=f\left(x\right)$		φθινουσα και κοιλη		αυξουσα και κοιλη	

οποτε η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχηματος 9.7.

9.1.16. Ασκηση. Μελετησε την παραμετρικη καμπυλη

$$x(t) = t + 1, \quad y(t) = t^2 + t, \quad t \in (-\infty, \infty).$$

9.1.17. Μπορουμε να υπολογισουμε το εμβαδον που περικλειει η παραμετρικη καμπυλη $(x(t), y(t))$ χρησιμοποιωντας την σχεση $dx = \frac{dx}{dt}dt$ ή την $dy = \frac{dy}{dt}dt$.

9.1.18. Θεωρημα. Εστω οτι μια καμπυλη δινεται σε παραμετρικη μορφη $(x(t), y(t))$ και οταν το t παιρνει τιμες απο t_1 ως t_2, η καμπυλη περικλειει ενα *χωριο*. Τοτε το εμβαδο του χωριου δινεται απο τους τυπους

$$A = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \frac{dy}{dt} dt.$$

Αποδειξη. Αυτο προκυπτει αμεσα με αλλαγη μεταβλητης ολοκληρωσης:

$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} y(x)\, dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \frac{dx}{dt} dt, \\ &= \int_{y_1}^{y_2} x(y)\, dy = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \frac{dy}{dt} dt. \end{aligned}$$

9.1.19. Παραδειγμα. Θα υπολογισουμε το εμβαδον του κυκλου $x^2 + y^2 = R^2$. Μια παραμετρικη εξισωση αυτου του κυκλου ειναι

$$x(t) = R\cos t, y(t) = R\sin t, t \in [0, 2\pi].$$

Τοτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{2\pi} y(t) \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{2\pi} R\sin t \cdot (-R\sin t)\, dt = -R^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \\ &= -R^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \left[-R^2 \frac{t}{2}\right]_{t=0}^{2\pi} + \left[R^2 \frac{\sin 2t}{4}\right]_{t=0}^{2\pi} = -\pi R^2 + 0 = -\pi R^2. \end{aligned}$$

Στην προκειμενη περιπτωση το εμβαδον προεκυψε σωστο κατ' απολυτη τιμη αλλα *αρνητικο*. Θυμησου οτι ο κυκλος $x^2 + y^2 = R^2$ μπορει να παραμετροποιηθει και με αλλους τροπους. Π.χ. η παραμετροποιηση

$$x(t) = R\sin t, y(t) = R\cos t, t \in [0, 2\pi]$$

δινει τον ιδιο κυκλο και υπολογιζοντας το εμβαδον παιρνουμε θετικο αριθμο:

$$E = \int_0^{2\pi} y(t) \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{2\pi} R\cos t \cdot (R\cos t)\, dt = R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi R^2.$$

9.1.20. Παραδειγμα. Θα υπολογισουμε το εμβαδον της ελλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Οπως εχουμε δει, μια παραμετροποιηση της ελλειψης ειναι η

$$x(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Τοτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

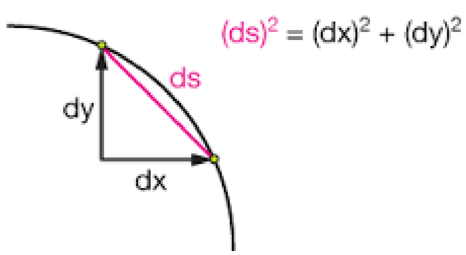
$$\begin{aligned} E &= \int_0^{2\pi} y(t) \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{2\pi} b\sin t \cdot (-a\sin t)\, dt = -ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \\ &= -ab \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \left[-ab \frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{2\pi} + \left[ab \frac{\sin 2t}{4}\right]_{t=0}^{2\pi} = -\pi ab. \end{aligned}$$

9.1.21. Ασκηση. Υπολογισε το εμβαδον το οποιο περικλειει η καμπυλη

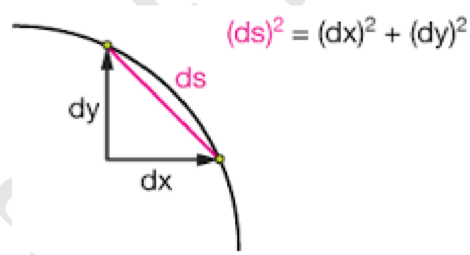
$$x(t) = \cos^3 t, \quad y(t) = \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

9.1.22. Ορισμος. Εστω οτι μια καμπυλη δινεται σε παραμετρικη μορφη $(x(t), y(t))$ και το t παιρνει τιμες απο t_1 ως t_2. Το μηκος της καμπυλης οριζεται ως

$$s := \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$



Σχήμα 9.8



Σχήμα 9.9

9.1.23. Δικαιολογουμε τον παραπανω ορισμο ως εξης. Ας συμβολισουμε με $s(t)$ το μηκος του τμηματος της καμπυλης το οποιο περιεχεται μεταξυ των τιμων $t_0 = 0$ και τυχοντος t. Ας υποθεσουμε οτι το t μεταβαλλεται και γινεται $t + \Delta t$. Προσεγγιζουμε το προστιθεμενο μηκος με αυτο ενος ορθογωνιου τριγωνου με πλευρες dx, dy, ds. Δες τα Σχηματα 9.8 και 9.9. Τοτε η μεταβολη του μηκους ειναι προσεγγιστικα

$$s(t + \Delta t) - s(t) \simeq \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \Delta t.$$

Οποτε

$$\begin{aligned}
\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} &\simeq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \Rightarrow \\
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \Rightarrow \\
\frac{ds}{dt} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \Rightarrow \\
s(t) &= \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} + c \\
&= \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} + c.
\end{aligned}$$

Επειδη $s(0) = 0$ (γιατι;) θα ειναι $c = 0$. Εστω s_1 το μηκος απο $t_0 = 0$ εως $t = t_1$ και s_2 αυτο απο $s_0 = 0$ εως $t = t_2$. Θα εχουμε

$$s_1 = \int_0^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad s_2 = \int_0^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Οποτε το ζητουμενο μηκος ειναι

$$s = s_2 - s_1 = \int_0^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt - \int_0^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

9.1.24. Ο παραπανω ορισμος ειναι γενικευση του Ορισμου 8.1.15 για το μηκος καμπυλης $(x, f(x))$. Πραγματι, σε αυτη την περιπτωση θετουμε $x(t) = t$ και εχουμε

$$y(t) = f(t) = f(x), \quad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}$$

και

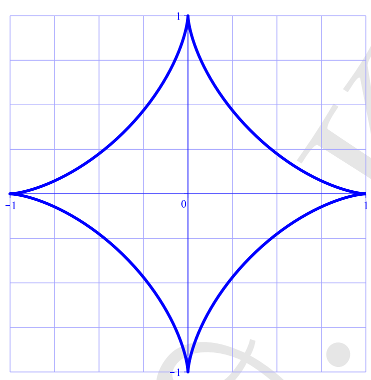
$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

9.1.25. Παραδειγμα. Θα υπολογισουμε το μηκος της καμπυλης

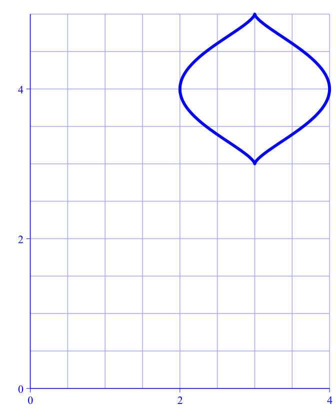
$$x(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = a\sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Ειναι μια κλειστη καμπυλη (δες το σχημα 9.10) της οποιας το μηκος ειναι

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(-3a\cos^2 t \sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t\cos t\right)^2} dt \\ &= 3a \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t} dt = 3a \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t \sin^2 t \cdot \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} dt \\ &= 3a \int_0^{2\pi} |\cos t \sin t| \, dt = 12a \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2t)}{2} dt = 6a. \end{aligned}$$



Σχήμα 9.10



Σχήμα 9.11

9.1.26. Παραδειγμα. Θα υπολογισουμε το μηκος της *κυκλοειδους* καμπυλης

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 6\pi].$$

Δες το σχημα 9.1. Ειναι

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)} dt = \int_0^{6\pi} \sqrt{a^2 \cdot (1 - \cos t)^2 + a^2 \cdot \sin^2 t} dt \\ &= a \int_0^{6\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = a \int_0^{6\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt \\ &= a \int_0^{6\pi} 2\left|\sin\frac{t}{2}\right| dt = 6a \int_0^{\pi} 2\sin\frac{t}{2} dt = 24a. \end{aligned}$$

9.1.27. Παραδειγμα. Θα υπολογισουμε το μηκος της καμπυλης

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^{3/2}, \quad t \in [0, 4].$$

Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2} t^{1/2}$$

και

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} t^{1/2}\right)^2} dt = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} t} dt = -\frac{8 + 80\sqrt{10}}{27}.$$

9.1.28. Παραδειγμα. Θα υπολογισουμε το μηκος της καμπυλης

$$x(t) = \frac{t^2}{2}, \quad y(t) = (2t+3)(6t+9)^{3/2}, \quad t \in [0, 4].$$

Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = t, \quad \frac{dy}{dt} = (6t+9)^{1/2}$$

και

$$\begin{aligned} s &= \int_0^4 \sqrt{t^2 + \left((6t+9)^{1/2}\right)^2} dt = \int_0^4 \sqrt{t^2 + 6t + 9} dt \\ &= \int_0^4 (t+3)\, dt = \left(\frac{t^2}{2} + 3t\right)_{t=0}^{t=4} = 20. \end{aligned}$$

9.1.29. Ασκηση. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = t^3, \quad t \in [0, 4].$$

9.1.30. Αναλογες γενικευσεις ισχυουν και για τον υπολογισμο ογκου και επιφανειας στερεων εκ περιστροφης, οπως θα δουμε σε επομενα παραδειγματα.

9.2 Λυμενα Προβληματα

9.2.1. Δωσε παραμετρικες εξισωσεις της υπερβολης

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Λυση. Ευκολα επαληθευεται οτι ενα ζευγος συναρτησεων $x(t)$, $y(t)$ οι οποιες ικανοποιουν την εξισωση $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ειναι το

$$x(t) = a \cosh t, \qquad y(t) = b \sinh t.$$

9.2.2. Βρες τις $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ αν

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t.$$

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{-\sin t} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right)}{\sin t} = \frac{-\frac{1}{\sin^2 t}}{\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}. \end{aligned}$$

9.2.3. Βρες τις $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ αν

$$x(t) = t^3 + t, \quad y(t) = t^7 + t + 1.$$

Λυση. Εχουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{7t^6+1}{3t^2+1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{42t^5\left(3t^2+1\right)-\left(7t^6+1\right)6t}{\left(3t^2+1\right)^2}}{3t^2+1} = \frac{6t\left(14t^6+7t^4-1\right)}{\left(3t^2+1\right)^3}.$$

9.2.4. Υπολογισε το εμβαδον το οποιο περικλειει η καμπυλη

$$x(t) = 6(t - \sin t), \quad y(t) = 6(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Λυση. Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(6(t - \sin t)) = 6(1 - \cos t)$$

και το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} y(t)\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{2\pi} 6(1-\cos t)\,6(1-\cos t)\,dt = 36\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt \\ &= 36\int_0^{2\pi}\left(1+\cos^2 t - 2\cos t\right)dt = 36\left(\int_0^{2\pi}dt + \int_0^{2\pi}\cos^2 tdt + \int_0^{2\pi}\cos 2tdt\right) \\ &= 36\left(\int_0^{2\pi}dt + \int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt + \int_0^{2\pi}\cos 2tdt\right) = 36\cdot 3\pi = 108\pi. \end{aligned}$$

9.2.5. Υπολογισε το εμβαδον μεταξυ της

$$x(t) = 4t^3 - t^2, \quad y(t) = t^4 + 2t^2, \quad t \in [0, 1],$$

του αξονα των x και της $y = 3$.
Λυση. Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4t^3 - t^2\right) = 12t^2 - 2t.$$

Το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 y(t)\frac{dx}{dt}dt = \int_0^1\left(t^4+2t^2\right)\left(12t^2-2t\right)dt \\ &= \int_0^1\left(12t^6 - 2t^5 + 24t^4 - 4t^3\right)dt \\ &= \left(\frac{12}{7}t^7 - \frac{1}{3}t^6 + \frac{24}{5}t^5 - t^4\right)_{t=0}^1 = \frac{544}{105}. \end{aligned}$$

9.2.6. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειει η καμπυλη

$$x(t) = 3 - \cos^3 t, \quad y(t) = 4 + \sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

Λυση. Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3 - \cos^3 t\right) = 3\cos^2 t \sin t.$$

και το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} y(t)\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\pi}(4+\sin t)\,3\cos^2 t\sin tdt \\ &= \int_0^1\left(12t^6 - 2t^5 + 24t^4 - 4t^3\right)dt = \frac{3\pi}{8} + 8. \end{aligned}$$

9.2.7. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειει η καμπυλη

$$x(t) = a\sin t, \quad y(t) = b\sin 2t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Λυση. Η καμπυλη ειναι συμμετρικη ως προς τον αξονα των x διοτι, αντικαθιστωντας το t με $\pi - t$, παιρνουμε $(x(\pi - t), y(\pi - t)) = (x(t), -y(t))$. Ομοιως, αντικαθιστωντας το t με $\pi + t$, παιρνουμε $(x(\pi + t), y(\pi + t)) = (-x(t), y(t))$, οποτε η καμπυλη ειναι συμμετρικη ως προς τον αξονα των y. Κατα συνεπεια, το ζητουμενο εμβαδον ειναι το διπλασιο αυτου που περικλειεται μεταξυ της

$$x(t) = a\sin t, \quad y(t) = b\sin 2t, \quad t \in [0, \pi]$$

και του αξονα των x. Οποτε εχουμε

$$E = \int_0^{\pi} b\sin(2t)\, a\cos(t)\, dt = \frac{8}{3}ab.$$

9.2.8. Υπολογισε το εμβαδον που περικλειει *ο βροχος* της καμπυλης

$$x(t) = \frac{t}{3}(6 - t), \quad y(t) = \frac{t^2}{8}(6 - t).$$

Λυση. Η καμπυλη σχηματιζει βροχο οταν τεμνει τον εαυτο της. Δηλ. θα πρεπει να βρουμε $a \neq 0$ τετοια ωστε

$$x(t) = x(t + a), \qquad y(t) = y(t + a)$$

ή και

$$\begin{aligned} \frac{t}{3}(6 - t) &= \frac{(t + a)}{3}(6 - t - a) \\ \frac{t^2}{8}(6 - t) &= \frac{(t + a)^2}{8}(6 - t - a). \end{aligned}$$

Το συστημα εχει τις λυσεις $(t_1, a_1) = (0, 6)$, $(t_2, a_2) = (6, -6)$. Αρα η καμπυλη τεμνει τον εαυτο τις στο σημειο

$$(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2)) = (0, 0).$$

Οποτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\int_0^6 \frac{t^2}{8}(6 - t)\left(2 - \frac{2}{3}t\right) dt = \frac{27}{5}.$$

9.2.9. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης

$$x(t) = 1 + 2\cos t + \cos 2t, \quad y(t) = 2\sin t + \sin 2t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2\sin t - 2\sin 2t \\ \frac{dy}{dt} &= 2\cos t + 2\cos 2t \end{aligned}$$

Το μηκος της καμπυλης ειναι

$$\begin{aligned} s &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin t - 2\sin 2t)^2 + (2\cos t + 2\cos 2t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + 4\sin^2 2t + 8\sin t\sin 2t + 4\cos^2 t + 4\cos^2 2t + 8\cos t\cos 2t} dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos t} dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{4\cos^2 \frac{t}{2}} dt = 4\int_0^{2\pi} \left|\cos\frac{t}{2}\right| dt = 16 \end{aligned}$$

9.2.10. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης

$$x(t) = \ln(\sin t), \quad y(t) = t, \quad t \in [\pi/4, \pi/2].$$

Λυση. Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \frac{dy}{dt} = 1.$$

Το μηκος της καμπυλης ειναι

$$\begin{aligned} s &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)} dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + 1} dt \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin t} dt = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right)_{t=\pi/4}^{t=\pi/2} = -\frac{1}{2} \ln\left(-\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}-1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}\right) \end{aligned}$$

9.2.11. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης

$$x(t) = e^t \cos t, \quad y(t) = e^t \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Λυση. Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t), \quad \frac{dy}{dt} = e^t(\cos t + \sin t).$$

Το μηκος της καμπυλης ειναι

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} e^t \sqrt{2 - 2\cos t \sin t + 2\cos t \sin t} dt = \int_0^{2\pi} e^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2}\left(e^{2\pi} - 1\right) \end{aligned}$$

9.2.12. Υπολογισε το μηκος της καμπυλης

$$x(t) = 3t + 1, \quad y(t) = 4 - t^2, \quad t \in [0, 1].$$

Λυση. Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = 3, \quad \frac{dy}{dt} = -2t$$

και

$$s = \int_0^1 \sqrt{9 + 4t^2} dt = \left[\frac{9}{4} \ln\left(2t + \sqrt{4t^2 + 9}\right) + \frac{1}{2} t \sqrt{4t^2 + 9}\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{9}{4} \ln \frac{\sqrt{13} + 2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

9.2.13. Υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο προκυπτει απο την περιστροφη γυρω απο τον αξονα των x της καμπυλης

$$x(t) = a\cos^3 t, \quad y(t) = a\sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Λυση. Ο ζητουμενος ογκος ειναι

$$V = 2\pi \int_{-a}^{a} y^2 dx$$

οπου

$$y^2 = a^2 \sin^6 t, \quad dx = -3a\cos^2 t \sin t dt.$$

Οποτε

$$V = -6\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^7 t \cos^2 t dt = \frac{64}{105}\pi a^3.$$

9.2.14. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης

$$x(t) = a\,(t - \sin t)\,, \quad y(t) = a\,(1 - \cos t)\,, \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

γυρω απο τον αξονα των x.
Λυση. Το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned}
E &= 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\,(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} a \cdot (1 - \cos t) \sqrt{a^2 \cdot (1 - \cos t)^2 + a^2 \cdot \sin^2 t} \\
&= 2\pi a^2 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt \\
&= 2\pi a^2 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2\,(1 - \cos t)} dt \\
&= 4\pi a^2 \cdot \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt = \frac{64\pi a^2}{3}.
\end{aligned}$$

9.2.15. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη, γυρω απο τον αξονα των x, του τμηματος του κυκλου $x^2 + y^2 = 9$ που αντιστοιχει στα σημεια $(3, 0)$ και $\left(3/2, 3\sqrt{3}/2\right)$.
Λυση. Τα σημεια $(3, 0)$ και $\left(3/2, 3\sqrt{3}/2\right)$ ανηκουν στον κυκλο, οπως μπορει ευκολα να επαληθευτει με αντικατασταση στην εξισωση $x^2 + y^2 = 9$. Αν θεωρησουμε την παραμετροποιηση του κυκλου: $x\,(t) = 3\cos t$ και $y\,(t) = 3\sin t$, βλεπουμε οτι οι αντιστοιχες τιμες του t ειναι $t_1 = 0$ και $t_2 = \pi/3$. Ο τυπος για το εμβαδον επιφανειας εκ περιστροφης γυρω απο τον αξονα x, ειναι

$$E = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\,(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Οποτε στο συγκεκριμενο προβλημα εχουμε

$$E = 2\pi \int_0^{\pi/3} 3\sin t \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2} dt = 2\pi \int_0^{\pi/3} 3\sin t dt = 9\pi.$$

9.3 Αλυτα Προβληματα

9.3.1. Βρες παραμετρικες εξισωσεις της ευθειας $y = x + 3$.

9.3.2. Βρες παραμετρικες εξισωσεις του αξονα των y.

9.3.3. Βρες την μορφη $y = f\,(x)$ της καμπυλης $x(t) = t + 1$, $y(t) = 2t + 3$.
Απ. $y = 2x + 1$.

9.3.4. Βρες την μορφη $f\,(x, y) = 0$ της καμπυλης $x(t) = \cosh t$, $y(t) = 3\sinh t$.
Απ. $x^2 - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

9.3.5. Βρες τα σημεια τομης των παραμετρικων καμπυλων $(x_1\,(t)\,, y_1\,(t)) = (t + 1, 2t - 3)$ και $(x_2\,(t)\,, y_2\,(t)) = (3t, t + 2)$.

9.3.6. Βρες τα σημεια στα οποια η $(x\,(t)\,, y\,(t)) = \left(t^2, t^3 - 4t\right)$ τεμνει τον εαυτο της.

9.3.7. Βρες τα σημεια στα οποια η $(x\,(t)\,, y\,(t)) = \left(t^2 - 3t + 5, t^3 + t^2 - 10t + 9\right)$ τεμνει τον εαυτο της.

9.3.8. Βρες τις $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ οταν $x(t) = t - 1$, $y(t) = 2 + t$.

9.3.9. Βρες τις $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ οταν $x(t) = 3 + \cos t$, $y(t) = 2 - \sin t$.

9.3.10. Βρες τις $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ οταν $x(t) = \cos 2t$, $y(t) = \sin t$.

9.3.11. Μελετησε την καμπυλη $x(t) = t^2$, $y(t) = t^4$ και κανε την γραφικη της παρασταση.

9.3.12. Μελετησε την καμπυλη $x(t) = t - \frac{1}{2}t^2$, $y(t) = 1 + t^2$ και κανε την γραφικη της παρασταση.

9.3.13. Μελετησε την καμπυλη $x(t) = \frac{3t}{1+t^3}$, $y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$ και κανε την γραφικη της παρασταση.

9.3.14. Κανε την γραφικη της παρασταση της καμπυλης $x(t) = \sin 7t$, $y(t) = \sin 5t$.

9.3.15. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. $3\pi/8$.

9.3.16. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. πab.

9.3.17. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = 2\cos t - \cos 2t$, $y(t) = 2\sin t - \sin 2t$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. 6π.

9.3.18. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 3t - t^3$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. $72\sqrt{3}/5$.

9.3.19. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t\cos^2 t$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. $\frac{\pi ab}{4}$.

9.3.20. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = t^2 - 1$, $y(t) = t^3 - t$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει ενας βροχος της.
Απ. $8/15$.

9.3.21. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = 2t - t^2$, $y(t) = 2t^2 - t^3$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει ενας βροχος της.
Απ. $\frac{8}{15}$.

9.3.22. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{t}{3}\left(3 - t^2\right)$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει ενας βροχος της.
Απ. $\frac{8\sqrt{3}}{5}$.

9.3.23. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = t^6/6$, $y(t) = 2 - t^4/4$ και υπολογισε το μηκος του τμηματος της μεταξυ των αξονων x και y.
Απ. $\frac{13}{3}$.

9.3.24. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = t^2$, $y(t) = \frac{t^3}{3} - t$ και υπολογισε το μηκος της.
Απ. $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

9.3.25. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = e^t\cos t$, $y(t) = e^t\sin t$ $(0 \le t \le \pi)$ και υπολογισε το μηκος της.
Απ. $\sqrt{2}(e^\pi - 1)$.

9.3.26. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$, $y(t) = \tan^{-1} t$ $(0 \le t \le 1)$ και υπολογισε το μηκος της.
Απ. $\ln(\sqrt{2}+1)$.

9.3.27. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) + 1$, $y(t) = 2\sin t + \sin 2t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ και υπολογισε το μηκος της.
Απ. 16.

9.3.28. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = \frac{t^2}{2}$, $y(t) = \frac{1}{9}(6t+9)^{3/2}$ $(0 \le t \le 4)$ και υπολογισε το μηκος της.
Απ. 20.

9.3.29. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = \cos^3(t)$, $y(t) = \sin^3(t)$ $(0 \le t \le \pi/2)$ και υπολογισε το μηκος της.
Απ. $3/2$.

9.3.30. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = \cos(t) + t\sin(t)$, $y(t) = \sin t - t\cos t$ $(\pi/6 \leq t \leq \pi/4)$ και υπολογισε το μηκος της.
Απ. $\frac{5\pi^2}{288}$.

9.3.31. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = \ln(\sin(t))$, $y(t) = t$ $(\pi/6 \leq t \leq \pi/2)$. και υπολογισε το μηκος της.
Απ. $\ln(2+\sqrt{3})$.

9.3.32. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = 4\sqrt{2}a\sin t$, $y(t) = a\sin 2t$ και υπολογισε το μηκος της.
Απ. $8\pi a$.

9.3.33. Σχεδιασε την καμπυλη $x(t) = \left(t^2-2\right)\sin t + 2t\cos t$, $y(t) = \left(2-t^2\right)\cos t + 2t\sin t$ και υπολογισε το μηκος της.
Απ. $\frac{\pi^3}{3}$.

9.3.34. Υπολογισε τον ογκο του στερεου που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $t \in [0,\pi]$, γυρω απο τον αξονα των x.

9.3.35. Υπολογισε τον ογκο του στερεου που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης $x(t) = a \cdot (t - \sin t)$, $y(t) = a \cdot (1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ γυρω απο τον αξονα των x.
Απ. $5\pi^2 a^3$.

9.3.36. Υπολογισε τον ογκο του στερεου που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης $x(t) = a\cdot\cos^3(t)$, $y(t) = a \cdot \cos^3(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ γυρω απο τον αξονα των x.
Απ. $\frac{32}{105}\pi a^3$.

9.3.37. Υπολογισε τον ογκο του στερεου που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης $x(t) = a\,(t - \sin t)$, $y(t) = a\,(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ γυρω απο τον αξονα των x.
Απ. $5\pi^2 a^3$

9.3.38. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης $x(t) = t$, $y(t) = 2t$, $t \in [0, 4]$ γυρω απο τον αξονα των x.
Απ. $32\pi\sqrt{5}$.

9.3.39. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης $x(t) = e^t \sin t$, $y(t) = e^t \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$ γυρω απο τον αξονα των x.
Απ. $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}\left(e^\pi - 2\right)$.

9.3.40. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης $x(t) = a \cdot \cos^3(t)$, $y(t) = a \cdot \cos^3(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ γυρω απο τον αξονα των x.
Απ. $\frac{12}{5}\pi a^2$.

9.3.41. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, $t \in [0, 5]$ γυρω απο τον αξονα των x.

9.3.42. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης $x(t) = 3 + 2t$, $y(t) = 9 - 3t$, $t \in [1, 4]$. γυρω απο τον αξονα των y.

9.3.43. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης $x(t) = 3\cos(\pi t)$, $y(t) = 5t + 2$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ γυρω απο τον αξονα των y.

9.3.44. Υπολογισε το εμβαδον της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της καμπυλης $x(t) = t^2 + 3$, $y(t) = t^2 + 2$, $t \in [0, 5]$ γυρω απο τον αξονα των y.

9.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

9.4.1. Δινεται η καμπυλη με παραμετρικη αναπαρασταση $x(t) = \frac{1}{\cosh t}$, $y(t) = t - \tanh t$. Κανε την γραφικη της παρασταση.

9.4.2. Δινεται η καμπυλη με παραμετρικη αναπαρασταση $x(t) = at$, $y(t) = \frac{a}{1+t^2}$, $a > 0$. Κανε την γραφικη της παρασταση. Τι παρατηρεις για τις διαφορες τιμες του a;

9.4.3. Δινεται η καμπυλη με παραμετρικη αναπαρασταση $x(t) = \sin(mt + \theta)$, $y(t) = \sin(nt)$, $m, n \in \mathbb{N}$. Κανε την γραφικη της παρασταση για διαφορες τιμες των m, n. (Μαλλον θα ειναι απαραιτητη η χρηση μαθηματικου λογισμικου.) Τι παρατηρεις για τις διαφορες τιμες των m, n;

9.4.4. Δινεται η καμπυλη με εξισωση $x^3 + y^3 = 3xy$.

1. Βρες μια παραμετρικη αναπαρασταση αυτης $(x(t), y(t))$.
2. Κανε την γραφικη της παρασταση.

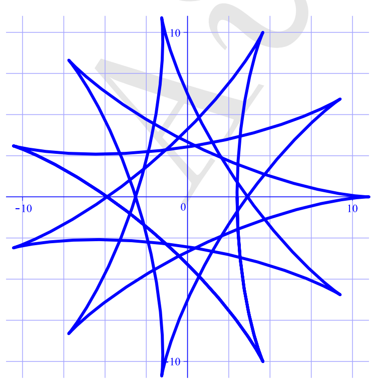
9.4.5. Δινεται η καμπυλη με εξισωση $x^n + y^n = 1$, $n = 2k \in \mathbb{N}$.

1. Βρες μια παραμετρικη αναπαρασταση αυτης $(x(t), y(t))$.
2. Κανε την γραφικη της παρασταση για διαφορες τιμες του n.
3. Τι παρατηρεις καθως $n \to \infty$;
4. Τι συμβαινει οταν $n = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$;

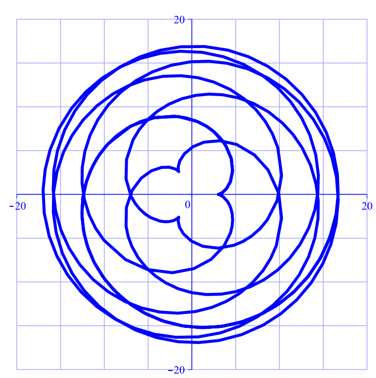
9.4.6. Δινονται δυο καμπυλες με παραμετρικες εξισωσεις:

1. $x(t) = (a-b)\cos t + b\cos\left(\frac{a-b}{b}t\right)$, $y(t) = (a-b)\sin t - b\sin\left(\frac{a-b}{b}t\right)$.
2. $x(t) = (a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right)$, $y(t) = (a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right)$.

Οι γραφικες των παραστασεις οταν ($a = 3$, $b = 7$) δινονται στα Σχηματα 9.12 και 9.13. Ποια ειναι η γραφικη παρασταση καθε καμπυλης; Ποια ειναι η γεωμετρικη σημασια των a, b; Χρησιμοποιησε μαθηματικο λογισμικο για να κανετε την γραφικη παρασταση των καμπυλων για διαφορες τιμες $a, b \in \mathbb{N}$.



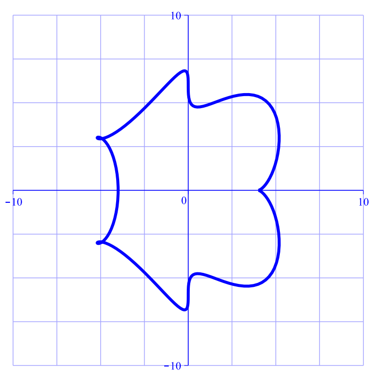
Σχήμα 9.12



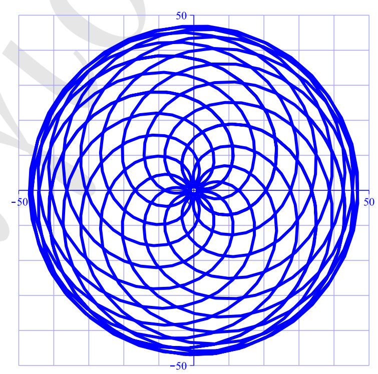
Σχήμα 9.13

9.4.7. Αντιστοιχισε τις παρακατω γραφικες παραστασεις των Σχηματων 9.14-9.17 στις συναρτησεις – μπορεις χωρις χρηση μαθηματικου *λογισμικου*;

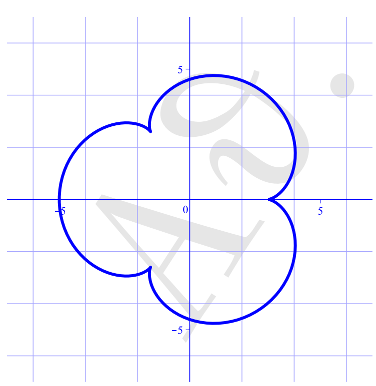
1. $x(t) = 24\cos t - 23\cos\frac{24t}{13},\ y(t) = 24\sin t - 23\sin\frac{24t}{13}$.
2. $x(t) = 5\cos t - \cos 5t,\ y(t) = 6\sin t - \sin 6t$.
3. $x(t) = 4\cos t - \cos 4t,\ y(t) = 4\sin t - \sin 4t$.
4. $x(t) = \cos 3t,\ y(t) = \sin 7t$.



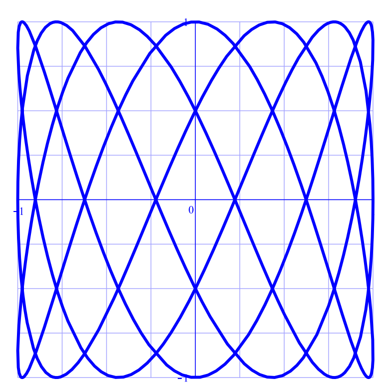
Σχήμα 9.14



Σχήμα 9.15



Σχήμα 9.16



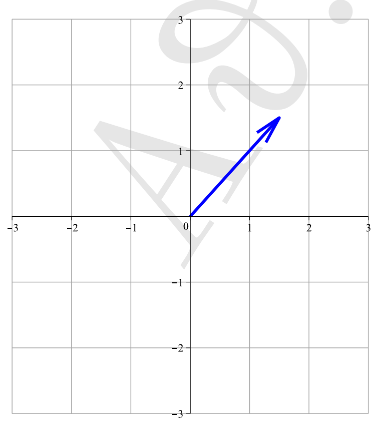
Σχήμα 9.17

10 Πολικες Συντεταγμενες

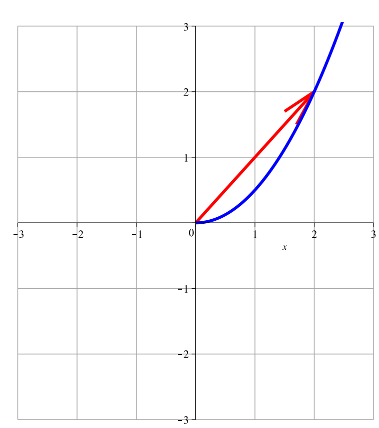
Ειναι γνωστο οτι μπορουμε να προσδιορισουμε την θεση ενος σημειου στο επιπεδου με χρηση *Καρτεσιανων συντεταγμενων* (x, y). Ομως υπαρχουν και αλλα εναλλακτικα *συστηματα συντεταγμενων*. Στο παρον κεφαλαιο θα ασχοληθουμε με το συστημα των *πολικων συντεταγμενων*.

10.1 Θεωρια και Παραδειγματα

10.1.1. Ορισμος: Το σημειο του επιπεδου με *πολικες συντεταγμενες* (ρ, ϕ) οριζεται ως εξης. Εστω ενα ευθυγραμμο τμημα μηκους ρ το οποιο εχει ακρα O (την αρχη των αξονων) και A και σχηματιζει γωνια ϕ με την ημιευθεια Ox. Τοτε το A ειναι το σημειο με πολικες συντεταγμενες (ρ, ϕ). Δες το Σχημα 10.1. Για να αντιμετωπισουμε το γεγονος οτι το ιδιο σημειο μπορει να προσδιοριστει απο διαφορετικες γωνιες ϕ_1, $\phi_2 = \phi_1 + 2k\pi$, επιλεγουμε μια συγκεκριμενη περιοχη τιμων για το ϕ. Συνηθως χρησιμοποιουμε ειτε $[0, 2\pi)$ ειτε $[-\pi, \pi)$ αλλα σε συγκεκριμενα προβληματα καποια αλλη επιλογη μπορει να ειναι καταλληλοτερη.



Σχήμα 10.1



Σχήμα 10.2

10.1.2. Παραδειγμα. Στο Σχημα ;;; βλεπεις τα σημεια με πολικες συντεταγμενες $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ και $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$.

10.1.3. Θεωρημα: Η σχεση που υπαρχει μεταξυ των *καρτεσιανων* συντεταγμενων (x, y) και των πολικων συντεταγμενων (ϕ, ρ) ειναι η εξης:

$$x = \rho \cos \phi, \qquad y = \rho \sin \phi$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Αποδειξη. Αμεση απο το Σχημα ;;.

10.1.4. Παραδειγμα.Για να βρουμε τις πολικες συντεταγμενες του σημειου με Καρτεσιανες συντεταγμενες $(x, y) = (1, 1)$ και αυτες του σημειου $(1, 0)$ δουλευουμε ως εξης. Για το (x, y)=$(1, 1)$ εχουμε

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \phi = \arctan \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4},$$

δηλ. $(\rho, \phi) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$. Για το (x, y)=$(1, 0)$ εχουμε

$$\rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1}, \quad \phi = \arctan \frac{0}{1} = 0,$$

δηλ. $(\rho, \phi) = (1, 0)$.

10.1.5. Παραδειγμα. Για να βρουμε τις Καρτεσιανες συντεταγμενες του σημειου με πολικες συντεταγμενες $(\rho, \phi) = (2, \pi/3)$ και αυτες του σημειου $(1, 0)$ δουλευουμε ως εξης. Για το (ρ, ϕ)=$(2, \pi/3)$ εχουμε

$$x = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1,$$
$$y = \rho \sin \phi = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

δηλ. $(x, y) = \left(1, \sqrt{3}\right)$. Για το (ρ, ϕ)=$(1, 0)$ εχουμε

$$x = \rho \cos \phi = 1 \cos 0 = 1,$$
$$y = \rho \sin \phi = 1 \sin 0 = 0,$$

δηλ. $(x, y) = (1, 0)$.

10.1.6. Μια καμπυλη μπορει να αναπαρασταθει απο μια συναρτηση $\rho = \rho(\phi)$. Σε καθε ϕ αντιστοιχει τιμη $\rho(\phi)$ και σημειο $(\phi, \rho(\phi))$ (δες το Σχημα ;;). Συνολικα, η καμπυλη ειναι το συνολο σημειων

$$C := \{(\phi, \rho(\phi)) : \phi \in \Phi\}$$

οπου το Φ ειναι καταλληλη περιοχη τιμων της ϕ.

10.1.7. Υπαρχουν τρεις βασικες μεθοδοι για να κανουμε την γραφικη παρασταση μιας καμπυλης δοσμενης σε πολικες συντεταγμενες.

1. Με καταγραφη σε ενα πινακα των σημειων $(\rho(\phi), \phi)$ για διαφορες τιμες του ϕ και σχεδιαση αυτων.

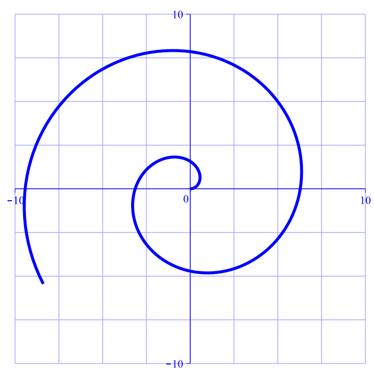
2. Με αναγνωριση καποιας «βασικης» μορφης της οποιας ηδη γνωριζουμε την γραφικη παρασταση.

3. Με χρηση μαθηματικου λογισμικου.

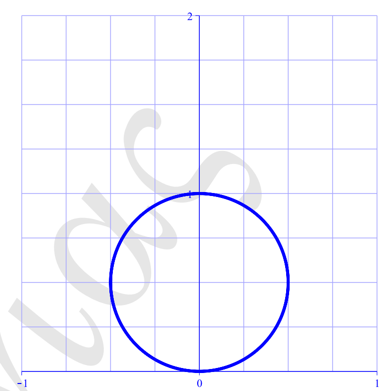
10.1.8. Παραδειγμα: Θα κατασκευασουμε την γραφικη παρασταση της καμπυλης $\rho(\phi) = \phi$. Κατασκευαζουμε τον πινακα τιμων

ϕ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\rho(\phi)$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

και ενωνοντας τα σημεια, λαμβανουμε την *σπειρα* του Σχηματος 10.3.



Σχήμα 10.3



Σχήμα 10.4

10.1.9. Παραδειγμα: Θα κατασκευασουμε την γραφικη παρασταση της καμπυλης $\rho(\phi) = \sin\phi$. Κατασκευαζουμε τον πινακα τιμων

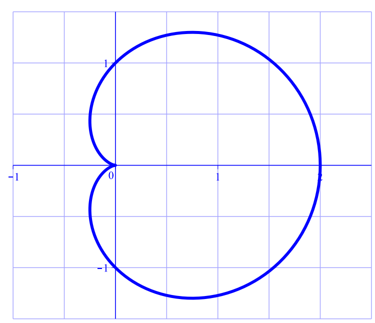
ϕ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\rho(\phi)$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π

και ενωνοντας τα σημεια, λαμβανουμε τον *κυκλο* του Σχηματος 10.4.

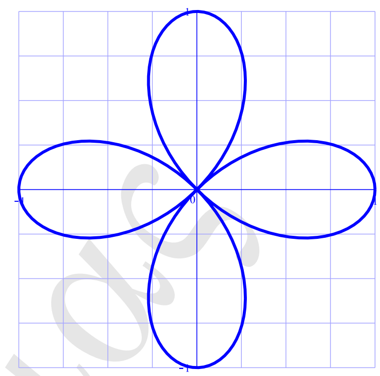
10.1.10. Παραδειγμα. Θα σχεδιασουμε την καμπυλη $\rho(\phi) = 1 + \cos\phi$. Συμπληρωνουμε τον παρακατω πινακα.

ϕ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$\rho(\phi) = 1 + \cos\phi$	2.000	1.707	1.000	0.292	0.000	0.292	1.000	1.707	2.000

Τοποθετωντας αυτα τα σημεια στο επιπεδο παιρνουμε την καμπυλη του Σχηματος 10.5. Η καμπυλη αυτη λεγεται *καρδιοειδης*.



Σχήμα 10.5



Σχήμα 10.6

10.1.11. Παραδειγμα. Θα σχεδιασουμε την καμπυλη $\rho(\phi) = \cos 2\phi$. Συμπληρωνουμε τον παρακατω πινακα.

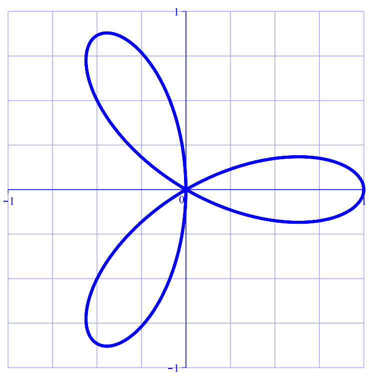
ϕ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$\rho(\phi) = \cos 2\phi$	1	0.707	0	-0.707	-1	-0.707	0	0.707	1

Μπορουμε να συμπληρωσουμε επιπλεον σημεια στο διαστημα $(\pi, 2\pi)$, τα οποια θα ειναι συμμετρικα των παραπανω ως προς τον αξονα των x. Τοποθετωντας αυτα τα σημεια στο επιπεδο παιρνουμε την καμπυλη του Σχηματος 10.6. Η καμπυλη αυτη λεγεται *τετραφυλλο*.

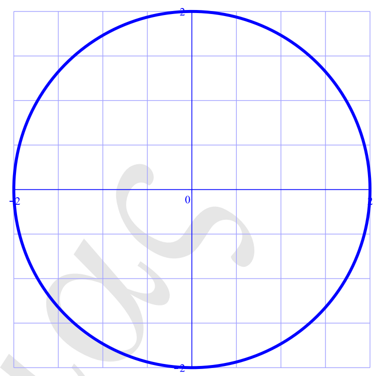
10.1.12. Παραδειγμα. Θα σχεδιασουμε την καμπυλη $\rho(\phi) = \cos 3\phi$. Συμπληρωνουμε τον παρακατω πινακα.

ϕ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/4$	π
$\rho(\phi) = \cos 3\phi$	1	0.382	-0.707	-0.923	0	0.923	0.707	-0.382	-1

Παρατηρησε οτι εμφανιζονται στον πινακα *αρνητικες* τιμες του ρ. Αυτες τις ερμηνευουμε ως εξης: το σημειο με πολικες συντεταγμενες (ρ, ϕ) και $\rho < 0$ προκυπτει προχωρωντας κατα αποσταση $|\rho|$ στην κατευθυνση $\phi + \pi$. Τοποθετωντας τα σημεια στο επιπεδο παιρνουμε την καμπυλη του Σχηματος 10.7. Η καμπυλη αυτη λεγεται *τριφυλλο*.



Σχήμα 10.7



Σχήμα 10.8

10.1.13. Ασκηση. Σχεδιασε την καμπυλη $\rho(\phi) = 3 + 2\sin\phi$.

10.1.14. Ασκηση. Σχεδιασε την καμπυλη $\rho(\phi) = 2 + 3\sin\phi$.

10.1.15. Παραδειγμα: Η καμπυλη με $\rho(\phi) = 2$ ειναι ο κυκλος με κεντρο το $(0, 0)$ και ακτινα $R = 2$. Αυτο ισχυει διοτι τυχον σημειο της καμπυλης εχει συντεταγμενες

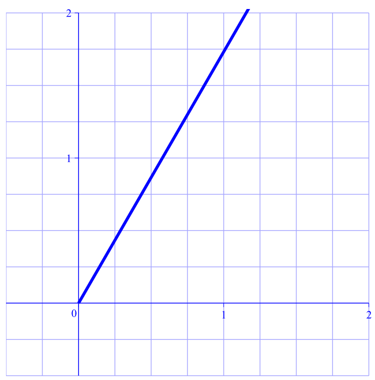
$$x = 2\cos\phi, \quad y = 2\sin\phi,$$

οποτε

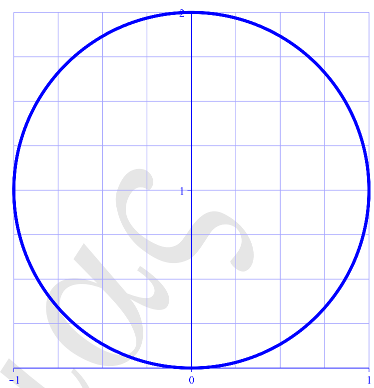
$$x^2 + y^2 = 4\cos^2\phi + 4\sin^2\phi = 4.$$

Δες και το Σχημα 10.8.

10.1.16. Παραδειγμα. Σχεδιαζουμε την καμπυλη $\phi(\rho) = \pi/3$. Οποιοδηποτε σημειο A της καμπυλης εχει την μορφη $(\rho, \pi/3)$, δηλ. η η γωνια AOx ειναι παντα ιση με $\pi/3$. Αρα η καμπυλη ειναι μια ημιευθεια, οπως φαινεται στο Σχημα 10.9.



Σχήμα 10.9

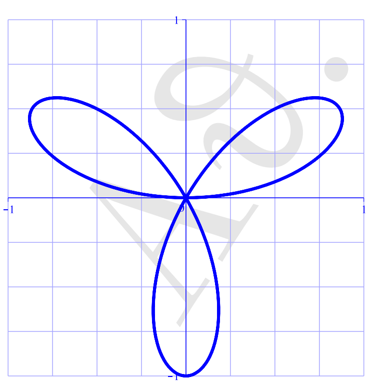


Σχήμα 10.10

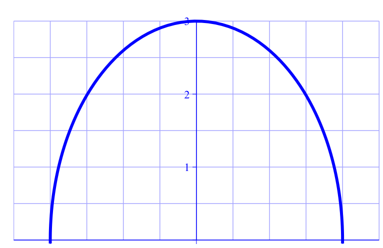
10.1.17. Παραδειγμα. Σχεδιαζουμε την καμπυλη $\rho(\phi) = 2\sin\phi$. Παρατηρουμε οτι $x = \rho\cos\phi = 2\sin\phi\cos\phi$, $y - 1 = \rho\sin\phi - 1 = 2\sin^2\phi - 1$ και

$$\begin{aligned} x^2 + (y-1)^2 &= (2\sin\phi\cos\phi)^2 + \left(2\sin^2\phi - 1\right)^2 \\ &= 4\cos^2\phi\sin^2\phi + 4\sin^4\phi - 4\sin^2\phi + 1 \\ &= 4\left(1 - \sin^2\phi\right)\sin^2\phi + 4\sin^4\phi - 4\sin^2\phi + 1 = 1 \end{aligned}$$

Οποτε η καμπυλη ειναι κυκλος με κεντρο το (0,1) και ακτινα 1, οπως φαινεται στο Σχημα 10.11.



Σχήμα 10.11



Σχήμα 10.12

10.1.18. Παραδειγμα. Για να σχεδιασουμε την καμπυλη $\rho(\phi) = \sin 3\phi$ παρατηρουμε οτι αυτη ειναι η $\rho(\phi) = \cos\left(3\phi - \frac{\pi}{2}\right)$, οποτε η γραφικη της παρασταση ειναι η ιδια με αυτη της $\rho(\phi) = \cos(3\phi)$ αλλα περιστραμμενη κατα γωνια $\frac{\pi}{2}$, οπως φαινεται και στο Σχημα 10.11.

10.1.19. Παραδειγμα. Για να σχεδιασουμε την καμπυλη με εξισωση

$$\rho = \frac{6}{\sqrt{9 - 5\sin^2\phi}}$$

παρατηρουμε οτι

$$\begin{aligned}\rho^2 = \frac{36}{9 - 5\sin^2\phi} &\Rightarrow \rho^2\left(9 - 5\sin^2\phi\right) = 36\\ &\Rightarrow 9\rho^2 - 5\rho^2\sin^2\phi = 36 \Rightarrow 9\left(x^2 + y^2\right) - 5y^2 = 36\\ &\Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.\end{aligned}$$

Οποτε η καμπυλη ειναι μια ελλειψη, δες το Σχημα 10.12.

10.1.20. Παραδειγμα. Για να σχεδιασουμε την καμπυλη με εξισωση

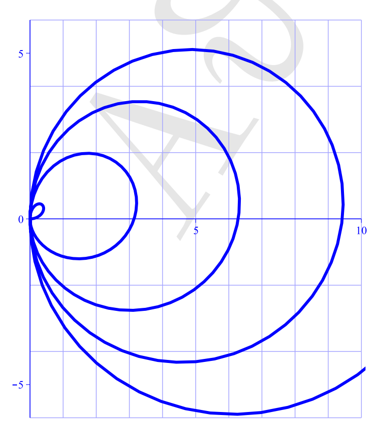
$$\rho = \cos\phi + \sin\phi.$$

παρατηρουμε οτι

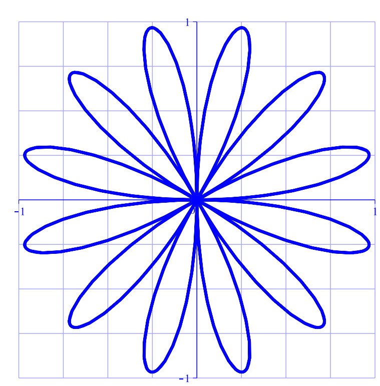
$$\begin{aligned}&\rho = \cos\phi + \sin\phi\\ &\quad\Rightarrow \rho^2 = \rho\cos\phi + \rho\sin\phi\\ &\quad\Rightarrow x^2 + y^2 = x + y\\ &\quad\Rightarrow \left(x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - 2\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\\ &\quad\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Οποτε η καμπυλη ειναι ενας κυκλος με κεντρο $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και ακτινα $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

10.1.21. Παραδειγμα. Σχεδιαζουμε την καμπυλη $\rho(\phi) = \phi\cos\phi$ με χρηση του μαθηματικου λογισμικου $Wolfram\ Alpha$ και παιρνουμε το 10.13.



Σχήμα 10.13



Σχήμα 10.14

10.1.22. Παραδειγμα. Σχεδιαζουμε την καμπυλη $\rho(\phi) = \sin 6\phi$ με χρηση του μαθηματικου λογισμικου *Wolfram Alpha* και παιρνουμε το Σχημα 10.14.

10.1.23. Ασκηση. Σχεδιασε την καμπυλη $\rho(\phi) = \sin\frac{\phi}{2}$.

10.1.24. Ασκηση. Σχεδιασε την καμπυλη $\rho(\phi) = 3 + 2\sin 4\phi$.

10.1.25. Ασκηση. Σχεδιασε την καμπυλη $\rho(\phi) = \sin\frac{\phi}{2} + \sin^2 3\phi$.

10.1.26. Παραδειγμα. Για να βρουμε την εξισωση της παραβολης $y = x^2$ σε πολικες συντεταγμενες παρατηρουμε οτι

$$y = x^2 \Rightarrow \rho\sin\phi = \rho^2\cos^2\phi \Rightarrow \rho = \frac{\sin\phi}{\cos^2\phi}.$$

Αυτη ειναι η ζητουμενη εξισωση.

10.1.27. Ασκηση. Βρες την εξισωση της ελλειψης $x^2 - y^2 = 1$ σε πολικες συντεταγμενες.

10.1.28. Παραδειγμα. Για να βρουμε τα σημεια τομης των καμπυλων

$$\rho_1 = 1 + \sin^2\phi, \quad \rho_2 = 1 - \sin^2\phi.$$

θετουμε

$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow 1 + \sin^2\phi = 1 - \sin^2\phi \Rightarrow 2\sin^2\phi = 0 \Rightarrow \sin\phi = 0.$$

Οποτε $\phi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ και τα σημεια τομης ειναι

$$\begin{aligned}(x_0, y_0) &= \left(\left(1 + \sin^2(0)\right)\cos(0), \left(1 + \sin^2(0)\right)\sin(0)\right) = (1, 0), \\ (x_1, y_1) &= \left(\left(1 + \sin^2(\pi)\right)\cos(\pi), \left(1 + \sin^2(\pi)\right)\sin(\pi)\right) = (-1, 0).\end{aligned}$$

(Για ολες τις αλλες τιμες του k παιρνουμε τα ιδια σημεια.)

10.1.29. Ασκηση. Βρες τα σημεια τομης των καμπυλων

$$\rho_1 = 1 + \cos^2\phi, \quad \rho_2 = 1 - \cos^2\phi.$$

10.1.30. Ασκηση. Βρες τα σημεια τομης των καμπυλων

$$\rho_1 = R, \quad \rho_2 = \cos\phi.$$

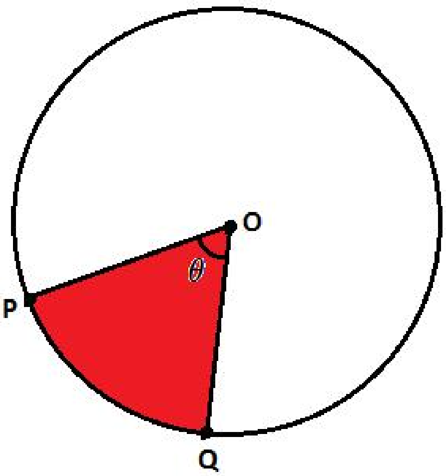
10.1.31. Ορισμος. Εστω οτι μια καμπυλη δινεται σε σε πολικες συντεταγμνες $(\phi, \rho(\phi))$ και οταν το ϕ παιρνει τιμες απο ϕ_1 ως ϕ_2, η καμπυλη περικλειει ενα *χωριο*. Τοτε το εμβαδο του χωριου οριζεται ως

$$A := \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho^2(\phi)d\phi. \tag{10.1}$$

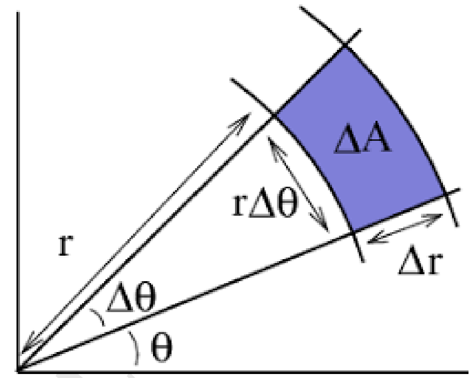
10.1.32. Ας διακαιολογησουμε τον παραπανω ορισμο. Καταρχην, χρειαζομαστε τον τυπο που δινει το *εμβαδον κυκλικου τομεα* γωνιας ϕ. Οπως φαινεται στο Σχημα 10.15 για κυκλο ακτινας R, ειναι λογικο να ορισουμε αυτο το εμβαδον να ειναι ισο με

$$E = \frac{\phi}{2}R^2.$$

Ετσι, π.χ., ο κυκλος ειναι κυκλικος τομεας γωνιας $\phi = 2\pi$ και εχει εμβαδον $E = \frac{2\pi}{2}R^2 = \pi^2 R\cdot$ το ημικυκλιο ειναι κυκλικος τομεας γωνιας $\phi = \pi$ και εχει εμβαδον $E = \frac{\pi}{2}R^2$ κ.τ.λ. Αυτα συμφωνουν με οσα μας ειναι γνωστα απο την στοιχειωδη Ευκλειδεια γεωμετρια.



Σχήμα 10.15



Σχήμα 10.16

Τωρα ας συμβολισουμε με $A(\phi)$ το εμβαδον που περιεχεται μεταξυ της καμπυλης $\rho(\phi)$ και τον ημιευθειων με γωνιες $\phi_0 = 0$ και τυχουσα ϕ. Δες το σχημα 10.16. Ας υποθεσουμε οτι το ϕ μεταβαλλεται και γινεται $\phi + \Delta\phi$. Αν *προσεγγισουμε* το προστιθεμενο κομματι εμβαδου με ενα κυκλικο τομεα ακτινας $\rho(\phi)$ και γωνιας $\Delta\phi$ (δες το Σχημα 10.16) τοτε η μεταβολη του εμβαδου ειναι προσεγγιστικα

$$A(\phi + \Delta\phi) - A(\phi) \simeq \frac{1}{2}\rho^2(\phi)\,\Delta\phi.$$

Οποτε

$$\frac{A(\phi + \Delta\phi) - A(\phi)}{\Delta\phi} \simeq \frac{1}{2}\rho^2(\phi) \Rightarrow \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{A(\phi + \Delta\phi) - A(\phi)}{\Delta\phi} = \lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{1}{2}\rho^2(\phi) \Rightarrow$$
$$\frac{dA}{d\phi} = \frac{1}{2}\rho^2(\phi) \Rightarrow A(\phi) = \int \frac{1}{2}\rho^2(\phi)\,d\phi + c = \int_0^{\phi}\frac{1}{2}\rho^2(\theta)\,d\theta + c.$$

Ετσι και το στοιχειωδες εμβαδον ειναι

$$dA = \frac{1}{2}\rho^2(\phi)d\phi.$$

Επειδη $A(0) = 0$ (γιατι;) θα ειναι $c = 0$. Εστω A_1 το εμβαδον που περικλειεται μεταξυ των ημιευθειων $\phi_0 = 0$ και $\phi = \phi_1$ και A_2 αυτο που περικλειεται μεταξυ των ημιευθειων $\phi_0 = 0$ και $\phi = \phi_2$. Θα εχουμε

$$A_1 = \int_0^{\phi_1}\frac{1}{2}\rho^2(\phi)\,d\phi, \quad A_2 = \int_0^{\phi_2}\frac{1}{2}\rho^2(\phi)\,d\phi$$

Οποτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$A = A_2 - A_1 = \int_0^{\phi_2}\frac{1}{2}\rho^2(\phi)\,d\phi - \int_0^{\phi_1}\frac{1}{2}\rho^2(\phi)\,d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2}\frac{1}{2}\rho^2(\phi)\,d\phi.$$

10.1.33. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το εμβαδον του σχηματος που περικλειει η καμπυλη με εξισωση

$$\rho(\phi) = \cos 2\phi, \qquad \phi \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Η καμπυλη ειναι ενα τετραφυλλο. Το εμβαδον ειναι

$$E = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\rho^2 d\phi = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 2\phi d\phi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1 + \cos 4\phi}{2}d\phi = \frac{\pi}{2}.$$

10.1.34. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το εμβαδον του σχηματος που περικλειει η καμπυλη με εξισωση

$$\rho\left(\phi\right)=a\left(1+\cos\phi\right),\phi\in\left[-\pi,\pi\right].$$

Αυτη ειναι η *καρδιοειδης* καμπυλη, συμμετρικη ως προς τον αξονα των x, οποτε θα υπολογισουμε το εμβαδον για $\phi\in[0,\pi]$ και θα το διπλασιασουμε για να παρουμε το τελικο αποτελεσμα. Εχουμε

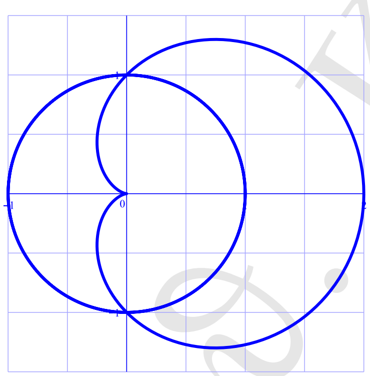
$$\begin{aligned}E&=2\cdot\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1+\cos\phi\right)^2d\phi=a^2\int_0^{\pi}\left(1+2\cos\phi+\cos^2\phi\right)d\phi\\&=a^2\cdot\left(\int_0^{\pi}d\phi+\int_0^{\pi}2\cos\phi d\phi+\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2\phi}{2}d\phi\right)=a^2\cdot\left(\pi+0+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi a^2}{2}.\end{aligned}$$

10.1.35. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το εμβαδον εκτος του κυκλου $\rho_1=1$ και εντος της καρδιοειδους $\rho_2=1+\cos\phi$. Δες το σχημα 10.17. Το ζητουμενο εμβαδον ειναι $A=A_1-A_2$ οπου

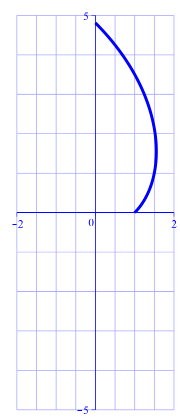
$$\begin{aligned}A_1&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(1+\cos\phi\right)^2d\phi=\frac{3}{4}\pi+2,\\A_2&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{2}d\phi=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Αρα το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\frac{3\pi}{4}+2-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+2$$



Σχήμα 10.17



Σχήμα 10.18

10.1.36. Ορισμος. Εστω καμπυλη (σε πολικες συντεταγμενες)

$$\rho(\phi),\qquad\phi\in\left[\phi_1,\phi_2\right].$$

Οριζουμε το μηκος της καμπυλης ως

$$s:=\int_{\phi_1}^{\phi_2}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2}d\phi. \tag{10.2}$$

10.1.37. Δικαιολογουμε τον παραπανω ορισμο ως εξης. Μπορουμε να γραψουμε την καμπυλη σε παραμετρικη μορφη, με παραμετρο το ϕ, ως εξης:

$$x(\phi) = \rho(\phi)\cos(\phi),$$
$$y(\phi) = \rho(\phi)\sin(\phi).$$

Γνωριζουμε οτι το μηκος τοξου παραμετρικης καμπυλης δινεται απο τον τυπο

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2} d\phi.$$

Μπορουμε να απλοποιησουμε τον τυπο αυτο ως εξης. Εχουμε

$$\frac{dx}{d\phi} = \frac{d\rho}{d\phi}\cos\phi - \rho(\phi)\sin\phi$$
$$\frac{dy}{d\phi} = \frac{d\rho}{d\phi}\sin\phi + \rho(\phi)\cos\phi$$

οποτε

$$\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\phi}\cos\phi - \rho(\phi)\sin\phi\right)^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\sin\phi + \rho(\phi)\cos\phi\right)^2$$
$$= \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 \left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) + \rho^2\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) - 2\frac{d\rho}{d\phi}\rho\cos\phi\sin\cos\phi + 2\frac{d\rho}{d\phi}\rho\cos\phi\sin\cos\phi$$
$$= \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \rho^2.$$

Αρα το ζητουμενο μηκος ισουται με

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \rho^2 d\phi}.$$

10.1.38. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το μηκος της περιφερειας κυκλου με ακτινα R. Αυτος ο κυκλος εχει εξισωση

$$\rho(\phi) = R, \qquad \phi \in [0, 2\pi].$$

Οποτε το μηκος του ειναι (οπως και περιμεναμε):

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} d\phi = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + (0)^2} d\phi = \int_0^{2\pi} R d\phi = 2\pi R.$$

10.1.39. Παραδειγμα. Το μηκος του τμηματος της *εκθετικης σπειρας* (δες το Σχημα 10.18)

$$\rho(\phi) = e^{\phi}, \qquad \phi \in [0, \pi/2].$$

ειναι

$$s = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} d\phi = \int_0^{\pi/2} \sqrt{e^{4\phi} + 4e^{4\phi}} d\phi = \frac{1}{2}\sqrt{5}\left(e^{\pi} - 1\right).$$

10.1.40. Παραδειγμα. Το μηκος της καμπυλης

$$\rho(\phi) = \frac{1}{\phi}, \qquad \phi \in [1/2, 2]$$

ειναι

$$s = \int_{1/2}^{2} \sqrt{\frac{1}{\phi^2} + \left(-\frac{1}{\phi^2}\right)^2} d\phi = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{\phi}\sqrt{\frac{1+\phi^2}{\phi^2}} d\phi = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+2\right)}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-2\right)}\right|.$$

10.1.41. Ασκηση. Υπολογισε το μηκος της

$$\rho\,(\phi) = a\cos\phi, \qquad \phi \in [0,\pi]\,.$$

10.1.42. Ασκηση. Υπολογισε το μηκος της

$$\rho\,(\phi) = a + a\cos\phi, \qquad \phi \in [0,\pi]\,.$$

10.1.43. Ασκηση. Υπολογισε το μηκος της

$$\rho\,(\phi) = \phi, \qquad \phi \in [0,\pi]\,.$$

10.2 Λυμενα Προβληματα

10.2.1. Ασκηση. Βρες τις πολικες συντεταγμενες των σημειων με Καρτεσιανες συντεταγμενες $(x,y) = \left(1,\sqrt{3}\right)$ και $(x,y) = \left(-1,-\sqrt{3}\right)$ και
Λυση. Για το $(x,y){=}\left(1,\sqrt{3}\right)$ εχουμε

$$\rho = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2, \quad \phi = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \pi/3,$$

δηλ. $(\rho,\phi) = (2,\pi/3)$. Για το $(x,y){=}\left(-1,-\sqrt{3}\right)$ εχουμε

$$\rho = \sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2,$$
$$\phi = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \arctan\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Αυτο ομως δεν ειναι σωστο, επειδη το $\left(-1,-\sqrt{3}\right)$ ανηκει στο 3ο τεταρτημοριο. Το σωστο αποτελεσμα ειναι $\phi = \frac{\pi}{3}+\pi$, δηλ. $(\rho,\phi) = \left(2,\frac{4\pi}{3}\right)$.

10.2.2. Ασκηση. Βρες τις Καρτεσιανες συντεταγμενες του σημειου με πολικες συντεταγμενες $(\rho,\phi) = (1,\pi/4)$. Το ιδιο για το σημειο $\left(\frac{1}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$.
Λυση. Για το $(\rho,\phi){=}(1,\pi/4)$ εχουμε

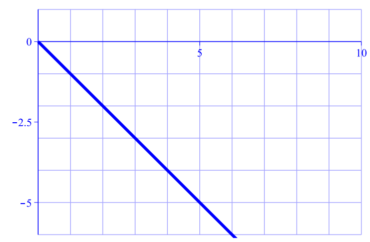
$$x = \rho\cos\phi = 1\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$y = \rho\sin\phi = 1\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

δηλ. $(x,y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Για το $(\rho,\phi){=}\left(\frac{1}{2},\frac{2\pi}{3}\right)$ εχουμε

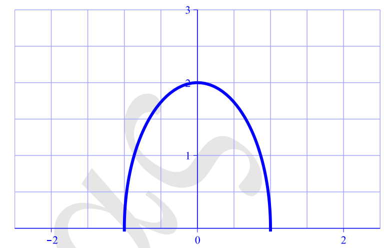
$$x = \rho\cos\phi = \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4},$$
$$y = \rho\sin\phi = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

δηλ. $(x,y) = \left(-\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

10.2.3. Ασκηση. Σχεδιασε την καμπυλη $\phi\,(\rho) = -\pi/4$.
Λυση. Οποιοδηποτε σημειο A της καμπυλης εχει την μορφη $(\rho,\pi/3)$, δηλ. η γωνια AOx ειναι παντα ιση με $-\pi/4$. Αρα η καμπυλη ειναι μια ημιευθεια, οπως φαινεται στο Σχημα 10.19.



Σχήμα 10.19



Σχήμα 10.20

10.2.4. Ασκηση. Σχεδιασε την καμπυλη $\rho(\phi) = \frac{2}{\sqrt{4-3\cos^2\phi}}$.

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\rho^2 = \frac{4}{4-3\cos^2\phi} &\Rightarrow 4\rho^2 - 3\rho^2\cos^2\phi = 4\\ &\Rightarrow 4\rho^2\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) - 3\rho^2\cos^2\phi = 4\\ &\Rightarrow 4\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi = 4\\ &\Rightarrow \rho^2\cos^2\phi + \frac{1}{4}\rho^2\sin^2\phi = 1\\ &\Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{4} = 1.\end{aligned}$$

Οποτε η καμπυλη ειναι η ελλειψη του Σχηματος 10.20.

10.2.5. Ασκηση. Σχεδιασε την καμπυλη $\rho(\phi) = \frac{3}{\cos\phi + 2\sin\phi}$.

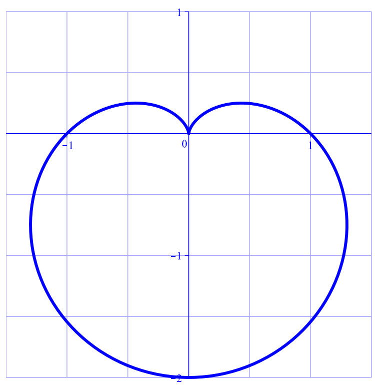
Λυση. Εχουμε $\rho(\cos\phi + 2\sin\phi) = 3 \Rightarrow x + 2y = 3$, η οποια ειναι η ευθεια του Σχηματος 10.20.

10.2.6. Ασκηση. Σχεδιασε την καμπυλη $\rho(\phi) = 1 - \sin\phi$.

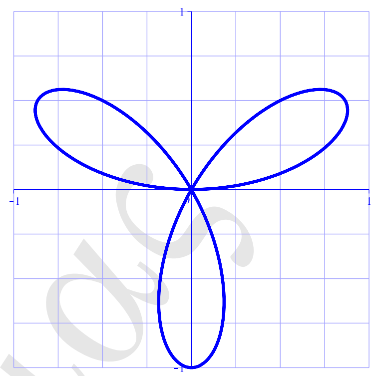
Λυση. Συμπληρωνουμε τον παρακατω πινακα.

ϕ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$\rho(\phi) = 1 - \sin\phi$	1.000	0.292	0.000	0.292	1.000	1. 707	2.000	1.707	1.000

Τοποθετωντας αυτα τα σημεια στο επιπεδο παιρνουμε το Σχημα 10.21, μια παραλλαγη της *καρδιοειδους*.



Σχήμα 10.21



Σχήμα 10.22

10.2.7. Ασκηση. Σχεδιασε την καμπυλη $\rho(\phi) = \cos 2\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)$.
Λυση. Ειναι μια παραλλαγη του τετραφυλλου, στραμμενη αντιωρολογιακα κατα $\frac{\pi}{4}$.

10.2.8. Ασκηση. Σχεδιασε την καμπυλη $\rho(\phi) = \sin 3\phi$.
Λυση. Συμπληρωνουμε τον παρακατω πινακα

ϕ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$	π
$\rho(\phi) = \cos 3\phi$	0.000	0.382	0.707	0.923	1.000	0.923	0.707	0.382	0.000

Τοποθετωντας αυτα τα σημεια στο επιπεδο παιρνουμε το Σχημα 10.22, ενα τριφυλλο.

10.2.9. Ασκηση. Βρες την εξισωση της υπερβολης $x^2 - y^2 = 1$ σε πολικες συντεταγμενες.
Λυση. Εχουμε

$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \phi - \rho^2 \sin^2 \phi = 1 \Rightarrow \rho^2 = \frac{1}{\cos^2 \phi - \sin^2 \phi}.$$

Αυτη ειναι η ζητουμενη εξισωση.

10.2.10. Ασκηση. Περιγραψε την καμπυλη με εξισωση

$$\rho^2 = \frac{1}{\cos\phi \sin\phi}.$$

Λυση. Εχουμε

$$\rho^2 \cos\phi \sin\phi = 1 \Rightarrow xy = 1.$$

Οποτε η καμπυλη ειναι μια υπερβολη.

10.2.11. Ασκηση. Βρες τα σημεια τομης των καμπυλων

$$\rho_1 = 4\sin 2\phi, \quad \rho_2 = 4\cos 2\phi.$$

Λυση. Θα εχουμε

$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow 4\sin 2\phi = 4\cos 2\phi \Rightarrow \tan 2\phi = 1 \Rightarrow 2\phi = \pm\frac{\pi}{4}.$$

Ομως η τιμη $\phi = -\frac{\pi}{4}$ απορριπτεται, διοτι θα εδινε $0 \leq \rho_1 = 4\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Οποτε ενα σημειο τομης ειναι το $(\rho, \phi) = \left(4, \frac{\pi}{4}\right)$, δηλ. το $(x, y) = \left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$. Με γεωμετρικη αναλυση μπορουμε να καταλαβουμε οτι υπαρχει ενα ακομη σημειο τομης. Ποιο ειναι αυτο και γιατι δεν το ανακαλυψαμε με την παραπανω αναλυση;

10.2.12. Ασκηση. Υπολογισε το εμβαδον του σχηματος που περικλειει η καμπυλη $\rho(\phi) = R(1+\sin\phi)$, $\phi \in [-\pi, \pi]$.

Λυση. Εχουμε

$$A = \frac{R^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\sin\phi)^2 d\phi = \frac{R^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+2\sin\phi+\sin^2\phi\right)d\phi$$
$$= R^2\cdot\left(\int_{-\pi}^{\pi}d\phi + \int_{-\pi}^{\pi}2\sin\phi d\phi + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 2\phi}{2}d\phi\right) = R^2\cdot\left(\pi+0+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi R^2}{2}.$$

10.2.13. Ασκηση. Υπολογισε το εμβαδον του σχηματος που περικλειει η καμπυλη με εξισωση $\rho(\phi) = \cos^2\frac{\phi}{2}$, $\phi \in [0, 2\pi]$.

Λυση. Το εμβαδον ειναι

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2 d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^4\frac{\phi}{2}d\phi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos\phi}{2}\right)^2 d\phi = \frac{3\pi}{8}.$$

10.2.14. Ασκηση. Υπολογισε το εμβαδον της κοινης επιφανειας του κυκλου $\rho_1 = 3\cos\phi$ και της καρδιοειδους $\rho_2 = 1+\cos\phi$.

Λυση. Δες το Σχημα 10.23. Τα σημεια τομης δινονται απο

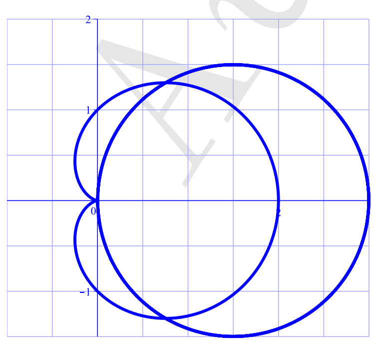
$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow 3\cos\phi = 1+\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \pm\frac{\pi}{3}.$$

Το ζητουμενο εμβαδον ειναι $A = A_1 + A_2$ οπου A_1 ειναι το εμβαδον του κυκλου $\rho_1 = 3\cos\phi$ για $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ και A_2 ειναι το εμβαδον της καρδιοειδους $\rho_2 = 1+\cos\phi$ για $\phi \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$. Εχουμε

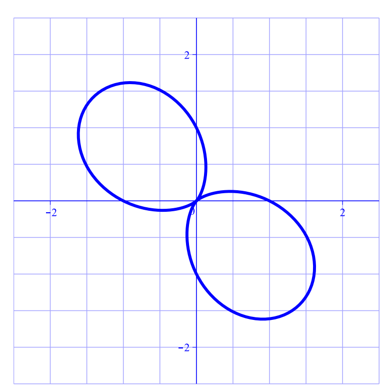
$$A_1 = 2\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{2}(3\cos\phi)^2 d\phi = \frac{3}{4}\pi - \frac{9}{8}\sqrt{3}$$
$$A_2 = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{1}{2}(1+\cos\phi)^2 d\phi = \frac{1}{2}\pi + \frac{9}{8}\sqrt{3}.$$

Αρα το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$A = A_1 + A_2 = \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{9}{8}\sqrt{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{9}{8}\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{4}.$$



Σχήμα 10.23



Σχήμα 10.24

10.2.15. Ασκηση. Υπολογισε το εμβαδον εκτος του κυκλου $\rho_1 = R$ και εντος του τριφυλλου $\rho_2 = 2R\cos(3\phi)$.

Λυση. Το τριφυλλο εχει τρεις «λοβους»· ο πρωτος αντιστοιχει σε $\phi \in [-\pi/6, \pi/6]$. Θα υπολογισουμε το εμβαδον εντος αυτου το λοβου και εκτος του κυκλου (και κατοπιν θα τριπλασιασουμε για να βρουμε το ζητουμενο εμβαδον). Πρεπει λοιπον καταρχην να βρουμε τα σημεια τομης των δυο καμπυλων. Θα πρεπει να εχουμε $\rho_1(\phi) = \rho_2(\phi)$, δηλ.

$$2R\cos(3\phi) = R \to \phi = \pm\frac{\pi}{9}.$$

Οποτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\frac{3}{2}\int_{-\pi/9}^{\pi/9}(2R\cos(3\phi))^2 d\phi - \frac{3}{2}\int_{-\pi/9}^{\pi/9} R^2 d\phi = \frac{3}{2}\int_{-\pi/9}^{\pi/9} 4R^2\cos^2(3\phi)\phi - \frac{3}{2}\int_{-\pi/9}^{\pi/9} R^2 d\phi = R^2\frac{6\pi + 9\sqrt{3}}{18}.$$

10.2.16. Ασκηση. Υπολογισε το εμβαδον το οποιο περικλειει ενας βροχος της

$$\rho(\phi) = \frac{3R\sin\phi\cos\phi}{\sin^3\phi + \cos^3\phi}.$$

Λυση. Η καμπυλη σχηματιζει βροχο μεταξυ των τιμων του ϕ στις οποιες τεμνει τον εαυτο της. Θα ειναι δηλ. $\rho(\phi_1) = \rho(\phi_2)$ οποτε

$$\frac{3R\sin\phi_1\cos\phi_1}{\sin^3\phi_1 + \cos^3\phi_1} = \frac{3R\sin\phi_2\cos\phi_2}{\sin^3\phi_2 + \cos^3\phi_2}$$

Ευκολα φαινεται οτι, στο διαστημ $[0, 2\pi]$ η μονη λυση της εξισωσης ειναι $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi/2$. Οποτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{9R^2\sin^2\phi\cos^2\phi}{(\sin^3\phi + \cos^3\phi)^2}d\phi = \frac{9R^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{z^2}{(1+z^3)^2}dz = \frac{3R}{2}$$

(για τον υπολογισμο του ολοκληρωματος χρησιμοποιησαμε την αντικατασταση $z = \tan\phi$, $dz = \cos^2\phi d\phi$).

10.2.17. Ασκηση. Υπολογισε το μηκος του κυκλου $\rho(\phi) = 3\sin\phi$.

Λυση. Εχουμε

$$\rho = 3\sin\phi, \quad \frac{d\rho}{d\phi} = 3\cos\phi, \quad \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} = 9.$$

Οποτε το μηκος της περιφερειας ειναι

$$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2}d\phi = \int_0^{2\pi} 9d\phi = 18\pi.$$

10.2.18. Ασκηση. Υπολογισε το μηκος της $\rho(\phi) = 1 - \sin 2\phi$ που αντιστοιχει σε $\phi \in [0, 2\pi]$.

Λυση. Εχουμε

$$\rho = 1 - \sin\phi, \quad \frac{d\rho}{d\phi} = -\cos\phi,$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} &= \sqrt{(1-\sin\phi)^2 + (-\cos\phi)^2} \\
&= \sqrt{1 - 2\sin\phi + \sin^2\phi + \cos^2\phi} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{1-\sin\phi} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)} \\
&= \sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)} = 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right|.
\end{aligned}$$

Το ζητουμενο μηκος ειναι

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2} d\phi = 2\int_0^{2\pi} \left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)\right| d\phi$$
$$= 4\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) d\phi = 9.$$

10.3 Αλυτα Προβληματα

10.3.1. Βρες τις Καρτεσιανες συντεταγμενες των σημειων με πολικες συντεταγμενες $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(6, -\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(4, \frac{5\pi}{4}\right)$.

10.3.2. Βρες τις πολικες συντεταγμενες των σημειων με Καρτεσιανες συντεταγμενες $(2,2)$, $(5,0)$, $(1,2)$.

10.3.3. Γραψε τις παρακατω καμπυλες σε πολικες συντεταγμενες.

1. $\rho = 3$.
2. $\rho = 4\sin\phi$.
3. $\rho = \frac{4}{\sin\phi}$.
4. $\rho = \sin\phi + \cos\phi$.

10.3.4. Γραψε τις παρακατω καμπυλες σε Καρτεσιανες συντεταγμενες.

1. $x = 2$.
2. $x^2 + (y-1)^2 = 4$.
3. $x^2 + y^2 + 6y = 0$.
4. $2xy = 5$.

10.3.5. Σχεδιασε την καμπυλη $\rho(\phi) = \phi$, $0 \le \phi \le 2\pi$ και υπολογισε το αντιστοιχο εμβαδον.
Απ. $\frac{4}{3}\pi^3$.

10.3.6. Σχεδιασε την καμπυλη $\rho(\phi) = e^{\phi}$, $0 \le \phi \le 2\pi$ και υπολογισε το αντιστοιχο εμβαδον.
Απ. $\frac{e^{\pi}-1}{4}$.

10.3.7. Σχεδιασε την καμπυλη $\rho(\phi) = 1/\phi$, $\frac{\pi}{4} \le \phi \le 2\pi$ και υπολογισε το αντιστοιχο εμβαδον.
Απ. $\pi/2$.

10.3.8. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = 1 - \cos(2\phi)$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. 1.

10.3.9. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = 3 + \sin 2\phi$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. $19\pi/8$.

10.3.10. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = 2 - \cos 3\phi$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. $3\pi/4$.

10.3.11. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = \sin 2\phi$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. $\pi/2$.

10.3.12. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = |\cos 2\phi|$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. $\pi/2$.

10.3.13. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = |\sin 3\phi|$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. $\pi/4$.

10.3.14. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = \sin\phi + \cos\phi$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. $7\pi/4$.

10.3.15. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = \frac{3R\sin\phi\cos\phi}{\sin^3\phi+\cos^3\phi}$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. $\frac{3}{2}R^2$.

10.3.16. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = R\sin\phi\cos^2\phi$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. $\frac{\pi R^2}{32}$.

10.3.17. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = R\cos^3\phi$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.
Απ. $\frac{5\pi R^2}{32}$.

10.3.18. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = 1 + 2\cos\phi$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.

10.3.19. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = 3 + 2\cos\phi$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.

10.3.20. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = 1 + 2\sin\phi$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.

10.3.21. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = 3 + 2\sin\phi$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.

10.3.22. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη της $\rho(\phi) = \sqrt{\frac{\pi}{\phi}}$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.

10.3.23. Σχεδιασε την κλειστη καμπυλη $\rho(\phi) = \arctan\frac{\phi}{\pi}$ και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει.

10.3.24. Σχεδιασε τις καμπυλες $\rho = R(1-\cos\phi)$ και $\rho = R$ και υπολογισε το μεταξυ τους εμβαδον.
Απ. $2a^2\left(\frac{5\pi}{8} - 1\right)$.

10.3.25. Σχεδιασε τις καμπυλες $\rho = R\sqrt{\cos 2\phi}$ και $\rho = \frac{R}{\sqrt{2}}$ και υπολογισε το μεταξυ τους εμβαδον.
Απ. $R^2\left(1 + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10.3.26. Σχεδιασε τις καμπυλες $\rho^2 = 1 + \cos\phi$ και $\rho = R\cos\phi$ και υπολογισε το μεταξυ τους εμβαδον.
Απ. 4.

10.3.27. Σχεδιασε και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει το τμημα της καμπυλης $\rho = R(1-\cos\phi)$ και βρισκεται εντος του κυκλου $\rho = R\cos\phi$.
Απ. $R^2\left(\frac{7\pi}{12} - \sqrt{3}\right)$.

10.3.28. Σχεδιασε και υπολογισε το μηκος της καμπυλης $\rho = 1/\phi,\ \ 3/4 \le \phi \le 4/3$.
Απ. $\ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{12}$.

10.3.29. Σχεδιασε και υπολογισε το μηκος της καμπυλης $\rho = e^{\phi}$, $0 \le \phi \le \ln 4$.
Απ. $3\sqrt{2}$.

10.3.30. Σχεδιασε και υπολογισε το μηκος της καμπυλης $\rho = \phi^2$, $0 \le \phi \le \sqrt{5}$.
Απ. $\frac{19}{3}$.

10.3.31. Σχεδιασε και υπολογισε το μηκος της καμπυλης $\rho = \frac{1}{\phi}$, $\frac{3}{4} \le \phi \le \frac{4}{3}$.
Απ. $\frac{5}{12} + \ln\frac{3}{2}$.

10.3.32. Σχεδιασε και υπολογισε το μηκος της καμπυλης $\rho = \frac{1}{1+\cos\phi}$, $-\frac{\pi}{2} \le \phi \le \frac{\pi}{2}$.
Απ. $\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$.

10.3.33. Σχεδιασε και υπολογισε το μηκος της πρωτης περιελιξης της $\rho = \phi$.
Απ. $\pi \cdot \sqrt{1+4\pi^2} \cdot \ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)$.

10.3.34. Σχεδιασε και υπολογισε το μηκος της κλειστης καμπυλης $\rho = 1 - \cos\phi$.
Απ. 8.

10.3.35. Σχεδιασε και υπολογισε το μηκος της κλειστης καμπυλης $\rho = \cos^2(\phi)$.
Απ. $\frac{3\pi}{2}$.

10.3.36. Σχεδιασε και υπολογισε το μηκος της κλειστης καμπυλης $\rho = \sin^3(\phi/3)$.
Απ. $\frac{3\pi}{2}$.

10.3.37. Σχεδιασε και υπολογισε το μηκος της κλειστης καμπυλης $\rho = R\sin^3\frac{\phi}{3}$.
Απ. $\frac{3}{2}\pi R$.

10.3.38. Σχεδιασε και υπολογισε το μηκος της κλειστης καμπυλης $\rho = R\sin^4\frac{\phi}{4}$.
Απ. $\frac{4}{3}\pi R$.

10.3.39. Σχεδιασε και υπολογισε το μηκος της καμπυλης $\phi = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ με $2 \le \rho \le 4$.
Απ. $\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{19}+4\right) - \frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{7}+2\right) - \sqrt{7} + 2\sqrt{19}$.

10.3.40. Δινεται καμπυλη η οποια εχει εξισωση (σε πολικες συντεταγμενες) $\rho(\phi)$, $\phi_1 \le \phi \le \phi_2$. Εστω οτι αυτη περιστρεφεται γυρω απο τον αξονα των x. Αποδειξε οτι ο ογκος του σχηματιζομενου στερεου ειναι

$$V = \frac{2}{3}\int_{\phi_1}^{\phi_2} \rho^3 \sin\phi d\phi.$$

10.3.41. Υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο σχηματιζεται απο την περιστροφη της καμπυλης $\rho = R$ γυρω απο τον αξονα των x.
Απ. $\frac{4}{3}\pi R^3$.

10.3.42. Υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο σχηματιζεται απο την περιστροφη της καμπυλης $\rho = R\sin(2\phi)$ γυρω απο τον αξονα των x.
Απ. $\frac{64}{105}\pi R^3$.

10.3.43. Υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο σχηματιζεται απο την περιστροφη της καμπυλης $\rho = R(1+\cos(\phi)$ γυρω απο τον αξονα των x.
Απ. $\frac{8}{3}\pi R^3$.

10.3.44. Υπολογισε τον ογκο του στερεου το οποιο σχηματιζεται απο την περιστροφη της καμπυλης $\rho = R\cos^2\phi$ γυρω απο τον αξονα των x.
Απ. $\frac{4}{21}\pi R^3$.

10.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

10.4.1. Σχεδιασε την $\rho = \sin(6\phi)$.

10.4.2. Σχεδιασε την $\rho = \sin(7\phi)$.

10.4.3. Σχεδιασε την $\rho = 1 + \frac{1}{10}\sin(10\phi)$.

10.4.4. Μετατρεψε την εξισωση σε πολικες συντεταγμενες, σχεδιασε την καμπυλη και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει: $\left(x^2+y^2\right)^2 = \left(x^2-y^2\right)$.
Απ. 1.

10.4.5. Μετατρεψε την εξισωση σε πολικες συντεταγμενες, σχεδιασε την καμπυλη και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει: $\left(x^2+y^2\right)^2 = 4x^2 + 9y^2$.
Απ. $\frac{13\pi}{2}$.

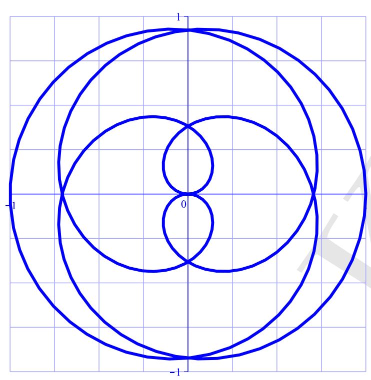
10.4.6. Μετατρεψε την εξισωση σε πολικες συντεταγμενες, σχεδιασε την καμπυλη και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει: $\left(x^2+y^2\right)^3 = 4xy\left(x^2-y^2\right)$.
Απ. 1.

10.4.7. Μετατρεψε την εξισωση σε πολικες συντεταγμενες, σχεδιασε την καμπυλη και υπολογισε το εμβαδον που περικλειει: $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.
Απ. $\pi\sqrt{2}$.

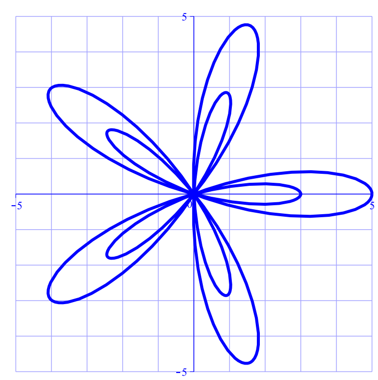
10.4.8. Αντιστοιχισε (*χωρις* χρηση μαθηματικου λογισμικου) τις συναρτησεις

1. $\rho = \sin \frac{\phi}{2}$.
2. $\rho = \cos \frac{\phi}{4}$.
3. $\rho = \sin \phi + \sin^3 \frac{5\phi}{2}$.
4. $\rho = \phi \cos \phi$.
5. $\rho = \frac{1}{\sqrt{\phi}}$.
6. $\rho = 1 + 4 \cos 5\phi$.

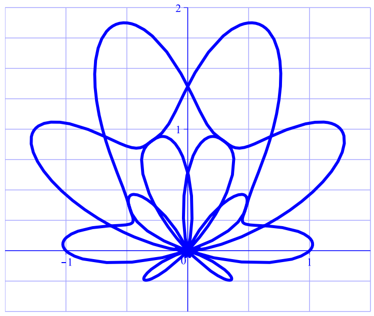
στις γραφικες παραστασεις των Σχηματων 10.25 – 10.30.



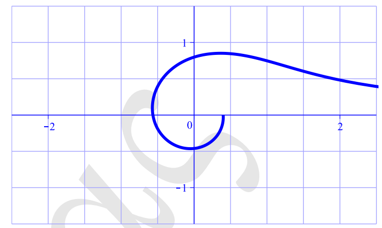
Σχήμα 10.25



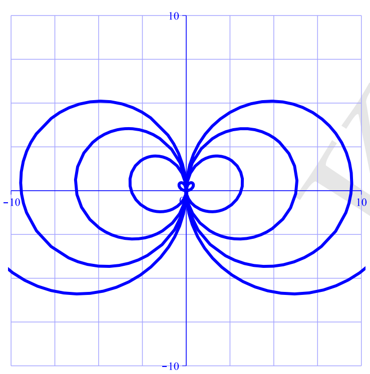
Σχήμα 10.26



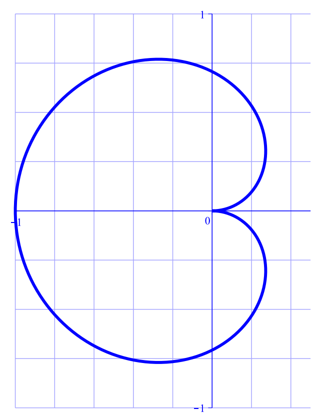
Σχήμα 10.27



Σχήμα 10.28



Σχήμα 10.29



Σχήμα 10.30

11 Ακολουθιες

Μια *ακολουθια* ειναι μια συναρτηση με πεδιο ορισμου τους φυσικους αριθμους $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Πολλες εννοιες που αφορουν συναρτησεις με πεδιο ορισμου το $\mathbb{R}$ (π.χ., μονοτονια, συγκλιση κ.τ.λ.) εφαρμοζονται και στις ακολουθιες.

11.1 Θεωρια και Παραδειγματα

11.1.1. Ορισμος. Μια συναρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (δηλ. τετοια ωστε για $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, $f(n) \in \mathbb{R}$) λεγεται *ακολουθια*.

11.1.2. Συμβολισμος. Ο n-στος ορος της ακολουθιας γραφεται $f(n)$ ή συνηθεστερα f_n. Για να δηλωσουμε ολοκληρη την ακολουθια γραφουμε $\mathbf{f}$ ή $(f_1, f_2, ...)$ ή $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ή απλα (f_n).[1]

11.1.3. Ορισμος. Μια ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ λεγεται *φραγμενη ανν*

$$\exists A, B \in \mathbb{R} : \forall n : A \leq f_n \leq B$$

ή, ισοδυναμα, ανν

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n : |f_n| \leq M.$$

11.1.4. Παραδειγμα. Θα δειξουμε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{2n^2+1}{3n^2}$ ειναι φραγμενη. Συγκεκριμενα θα δειξουμε οτι, για καθε $n \geq 1$, ισχυει

$$0 \leq f_n = \frac{2n^2+1}{3n^2} \leq 1.$$

Το κατω φραγμα ειναι προφανες. Για το ανω φραγμα εχουμε

$$\left(\frac{2n^2+1}{3n^2} - 1 \leq 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{-3n^2+2n^2+1}{3n^2} \leq 0\right) \Leftrightarrow \left(-3n^2+2n^2+1 \leq 0\right).$$

Αλλα

$$-3n^2+2n^2+1 = 1-n^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq n^2$$

το οποιο προφανως ισχυει για καθε $n \in \mathbb{N}$.

[1] Στα Κεφαλαια 11 – 15 θα συμβολιζουμε το $+\infty$ και με την μορφη ∞.

11.1.5. Παραδειγμα. Θα δειξουμε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = (-1)^n n$ δεν ειναι φραγμενη. Πραγματι, εστω οτι υπηρχαν A, B τετοια ωστε

$$\forall n : A \leq f_n \leq B.$$

Παιρνουμε n_B τετοιο ωστε $n_B > B$ και n'_B τετοιο ωστε $2n'_B \geq n_B$. Τοτε

$$n \geq n'_B \Rightarrow 2n \geq 2n'_B \geq n_B > B \Rightarrow f_{2n} = (-1)^{2n} 2n > B.$$

Αρα κανενα $B \in \mathbb{R}$ δεν μπορει να ειναι ανω φραγμα της (f_n). Ομοιως αποδεικνυουμε οτι η (f_n) δεν εχει κατω φραγμα.

11.1.6. Ασκηση. Δειξε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{2n+1}{3n^2}$ ειναι φραγμενη.

11.1.7. Ασκηση. Ειναι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{2n(-1)^n+1}{3n^2}$ φραγμενη;

11.1.8. Ορισμος. Μια ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ λεγεται *αυξουσα* (αντ. *φθινουσα*) ανν $\forall n : f_n \leq f_{n+1}$ (αντ. $\forall n : f_n \geq f_{n+1}$). Αν μια ακολουθια ειναι ειτε αυξουσα ειτε φθινουσα, λεγεται *μονοτονη*.

11.1.9. Ορισμος. Μια ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ λεγεται *γνησιως αυξουσα* (αντ. *γνησιως φθινουσα*) ανν $\forall n : f_n < f_{n+1}$ (αντ. $\forall n : f_n > f_{n+1}$). Αν μια ακολουθια ειναι ειτε γνησιως αυξουσα ειτε γνησιως φθινουσα, λεγεται *γνησιως μονοτονη*.

11.1.10. Παραδειγμα. Θα δειξουμε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{n}$ ειναι γνησιως φθινουσα. Εχουμε

$$(\forall n \in \mathbb{N} : n < n+1) \Rightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}\right) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N} : f_{n+1} < f_n)$$

οποτε οντως η (f_n) ειναι γνησιως φθινουσα.

11.1.11. Παραδειγμα. Θα δειξουμε οτι η ακολουθια με $f_n = \frac{n}{3^n}$ ειναι φραγμενη και μονοτονη. Ας δειξουμε πρωτα οτι

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n > f_{n+1}.$$

Αρκει να δειξουμε

$$\left(\forall \in \mathbb{N} : \frac{n}{3^n} \ > \frac{n+1}{3^{n+1}}\right) \Leftrightarrow \left(\forall \in \mathbb{N} : n \ > \frac{n+1}{3}\right) \Leftrightarrow (\forall \in \mathbb{N} : 2n \ > 1)\,.$$

Η τελευταια ανισοτητα προφανως ισχυει για καθε $n \in \mathbb{N}$. Αρα η ακολουθια ειναι γνησιως φθινουσα. Επισης, για καθε $n \in \mathbb{N}$, ισχυει $f_n > 0$. Αρα

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < f_n < f_1 = \frac{1}{3}$$

και η ακολουθια ειναι φραγμενη.

11.1.12. Ασκηση. Ειναι η ακολουθια με $f_n = \frac{1}{3n^2}$ μονοτονη;

11.1.13. Ασκηση. Ειναι η ακολουθια με $f_n = \frac{(-1)^n}{3n^2}$ μονοτονη;

11.1.14. Ασκηση. Ειναι οτι η ακολουθια με $f_n = \frac{n^3+(-1)^n+1}{3n^2}$ μονοτονη;

11.1.15. Ορισμος. Λεμε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *συγκλινει* (ή *τεινει*) στον αριθμο $\phi \in \mathbb{R}$ ανν

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_{\varepsilon} : n \geq n_{\varepsilon} \Rightarrow |f_n - \phi| < \varepsilon.$$

Τοτε γραφουμε «$\lim_{n\to\infty} f_n = \phi$» και λεμε οτι «*το οριο της* f_n *ειναι το* ϕ».

11.1.16. Ορισμος. Αν ισχυει $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi \in \mathbb{R}$, λεμε οτι η (f_n) ειναι *συγκλινουσα*· αλλιως λεμε οτι η (f_n) ειναι *αποκλινουσα*.

11.1.17. Παραδειγμα. Δινεται η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{n}$. Στον παρακατω πινακα δινουμε ζευγη τιμων (n, f_n). Παρατηρουμε οτι οσο μεγαλυτερο γινεται το n, τοσο εγγυτερα βρισκεται το f_n στο 0. Αρα *εικαζουμε* οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

n	1	10	100	1000	10000
$f_n = \frac{1}{n}$	1.0000	0.1000	0.0100	0.0010	0.0001

Ειναι φανερη η ομοιοτητα του παραπανω πινακα με αυτον του Προβληματος ;; (η εννοια της συγκλιση *ακολουθιων* f_n.ειναι αρκετα παρομοια με αυτην της συγκλισης *συναρτησεων* $f(x)$).

11.1.18. Παραδειγμα. Δινεται η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{n}$. Θα *αποδειξουμε* (με χρηση του ορισμου) οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Πραγματι, εστω τυχον $\varepsilon > 0$. Λαμβανω $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$ οποτε $\varepsilon > \frac{1}{n_\varepsilon} > \frac{1}{n}$ για καθε $n \geq n_\varepsilon$. Οποτε

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \varepsilon > \frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n}\right| = |f_n - 0| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = 0.$$

11.1.19. Για να καταλαβουμε καλυτερα την σημασια της συνθηκης

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n - \phi| < \varepsilon.$$

ας δουμε το Σχημα 11.1. Παρατηρουμε οτι, για καθε $n \geq n_\varepsilon$, οι τιμες f_n βρισκονται μεσα σε μια «ζωνη» πλατους 2ε, γυρω απο την τιμη ϕ. Αυτο διατυπωνεται με την συνθηκη

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n - \phi| < \varepsilon.$$

Επειδη εμεις επιλεγουμε την τιμη του ε, μπορουμε να κανουμε τη ζωνη οσο στενη θελουμε (αφου η παραπανω συνθηκη πρεπει να ισχυει για καθε $\varepsilon > 0$). Αλλα το n_ε για το οποιο θα ισχυει η παραπανω συνθηκη θα εξαρταται απο το ε, δηλ. για μικροτερο ε μπορει να χρειαστει να χρησιμοποιησουμε μεγαλυτερο n_ε.

11.1.20. Θεωρημα. Αν η (f_n) ειναι συγκλινουσα, τοτε ειναι και φραγμενη.
Αποδειξη. Αφου η (f_n) ειναι συγκλινουσα, υπαρχει n_0 τετοιο ωστε

$$(\forall n \geq n_0 : |f_n - \phi| < 1) \Rightarrow (\forall n \geq n_0 : |f_n| = |f_n - \phi + \phi| \leq |f_n - \phi| + |\phi| < 1 + |\phi|).$$

Τωρα, αν θεσουμε

$$M := \max\left(\{f_1, f_2, ..., f_{n_0-1}, 1 + |\phi|\}\right)$$

θα εχουμε

$$\forall n : |f_n| \leq M$$

δηλ. η (f_n) ειναι φραγμενη.

11.1.21. Ορισμος. Λεμε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *τεινει* στο $+\infty$ (ή οτι *το οριο της* f_n *ειναι το* $+\infty$) και γραφουμε $\lim_{n\to\infty} f_n = +\infty$ *ανν*

$$\forall M > 0 : \exists n_M : n \geq n_M \Rightarrow f_n > M$$

Λεμε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *τεινει* στο $-\infty$ (ή οτι *το οριο της* f_n *ειναι το* $-\infty$) και γραφουμε $\lim_{n\to\infty} f_n = -\infty$ *ανν*

$$\forall M < 0 : \exists n_M : n \geq n_M \Rightarrow f_n < M$$

11.1.22. Παραδειγμα. Δινεται η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = n^2$. Στον παρακατω πινακα δινουμε ζευγη τιμων (n, f_n). Παρατηρουμε οτι οσο μεγαλυτερο γινεται το n, τοσο μεγαλυτερο γινεται το f_n. Οποτε εικαζουμε οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \infty$.

n	1	10	100	1000
$f_n = n^2$	1	100	10000	100000

11.1.23. Παραδειγμα. Δινεται η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = n^2$. Θα αποδειξουμε (με χρηση του ορισμου) οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \infty$. Πραγματι, εστω τυχον $M > 0$. Λαμβανω $n_M > \sqrt{M}$ οποτε $n_M^2 > M$ για καθε $n \geq n_M$· δηλ.

$$\forall n \geq n_M : f_n = n^2 > M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = \infty.$$

11.1.24. Ορισμος. Αν η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ δεν τεινει ουτε στο $\phi \in \mathbb{R}$, ουτε στο $+\infty$, ουτε στο $-\infty$, λεμε οτι *ταλαντευεται*.

11.1.25. Παραδειγμα. Η ακολουθια (f_n) με $f_n = (-1)^n$ ταλαντευεται. Πραγματι, η (f_n) ειναι φραγμενη (γιατι;) και αρα δεν μπορει να τεινει ουτε στο ∞ ουτε στο $-\infty$. Ας υποθεσουμε οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi \in \mathbb{R}$. Τοτε, αν επιλεξουμε $\varepsilon = \frac{1}{10}$, υπαρχει n_1 τετοιο ωστε

$$n \geq n_1 \Rightarrow |f_n - \phi| < \frac{1}{10}.$$

Τοτε θα εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} + \frac{1}{10} &> |f_{n_1} - \phi| + |f_{n_1+1} - \phi| = |f_{n_1} - \phi| + |\phi - f_{n_1+1}| \\ &\geq |f_{n_1} - \phi + \phi - f_{n_1+1}| = |f_{n_1} - f_{n_1+1}| = \left|(-1)^{n_1} - (-1)^{n_1+1}\right| = 2 \end{aligned}$$

που ειναι ατοπο. Αρα δεν μπορει να ισχυει $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi \in \mathbb{R}^*$, οποτε η (f_n) οντως ταλαντευεται.

11.1.26. Θεωρημα. Αν το οριο μιας ακολουθιας υπαρχει, ειναι μοναδικο.
Αποδειξη. Εστω οτι

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \phi_1 \text{ και } \lim_{n\to\infty} f_n = \phi_2.$$

Θα εξετασουμε μονο την περιπτωση στην οποια $\phi_1 \in \mathbb{R}$ και $\phi_2 \in \mathbb{R}$. Συμφωνα με τον ορισμο, για καθε $\varepsilon > 0$ υπαρχουν $n_{\varepsilon,1}, n_{\varepsilon,2}$ τετοια ωστε

$$n \geq n_{\varepsilon,1} \Rightarrow |f_n - \phi_1| < \varepsilon \text{ και } n \geq n_{\varepsilon,2} \Rightarrow |f_n - \phi_2| < \varepsilon.$$

Θετουμε $n_\varepsilon = \max(n_{\varepsilon,1}, n_{\varepsilon,2})$ οποτε

$$\begin{aligned} &[n \geq n_\varepsilon \Rightarrow (|f_n - \phi_1| < \varepsilon \text{ και } |f_n - \phi_2| < \varepsilon)] \\ &\Rightarrow [n \geq n_\varepsilon, \Rightarrow (|f_n - \phi_1| + |f_n - \phi_2| < 2\varepsilon)] \\ &\Rightarrow [n \geq n_\varepsilon \Rightarrow (|f_n - \phi_1 - f_n + \phi_2| < 2\varepsilon)] \\ &\Rightarrow [n \geq n_\varepsilon \Rightarrow (|\phi_2 - \phi_1| < 2\varepsilon)] \\ &\Rightarrow |\phi_2 - \phi_1| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Αλλα αν $|\phi_2 - \phi_1| < 2\varepsilon$ για καθε $\varepsilon > 0$, τοτε $|\phi_2 - \phi_1| = 0$, δηλ. $\phi_1 = \phi_2$ ή, με αλλα λογια, το οριο $\lim_{n\to\infty} f_n$ ειναι ορισμενο μονοσημαντα.

Αφηνεται στον αναγνωστη να αποδειξει το ιδιο αν ενα ή και τα δυο εκ των ϕ_1, ϕ_2 δεν ανηκει στο $\mathbb{R}$.

11.1.27. Θεωρημα. Αν η (f_n) ειναι μονοτονη και φραγμενη τοτε ειναι και συγκλινουσα (σε πραγματικο αριθμο).
Αποδειξη. Οριζουμε το συνολο

$$\Phi = \{f_1, f_2, f_3, ...\}.$$

Αφου η (f_n) ειναι φραγμενη, το συνολο Φ ειναι επισης φραγμενο και τοτε (δες το Παραρτημα Β΄) υπαρχει το $\phi = \sup \Phi \in \mathbb{R}$. Εχουμε λοιπον

$$\forall n : f_n \leq \phi. \tag{11.1}$$

Επισης παρατηρουμε οτι

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow f_n > \phi - \varepsilon. \tag{11.2}$$

Διοτι σε αντιθετη περιπτωση θα ειχαμε

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n : f_n \leq \phi - \varepsilon < \phi$$

και το $\phi - \varepsilon$ θα ηταν ενα ανω φραγμα του Φ· αλλα εξ ορισμου το ϕ ειναι το *ελαχιστο* ανω φραγμα του Φ.

Συνδυαζοντας τις (11.1) και (11.2) εχουμε

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow (0 < \phi - f_n < \varepsilon)$$

ή, με αλλα λογια,

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow (|f_n - \phi| < \varepsilon)$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

11.1.28. Παραδειγμα. Η (f_n) με $f_n = 1 + \frac{1}{n}$ ειναι φραγμενη (γιατι;) και γνησιως φθινουσα (γιατι;) και ισχυει $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$.

11.1.29. Παραδειγμα. Η ακολουθια (f_n) με $f_n = 1 + \frac{1}{n!}$ συγκλινει σε καποιο οριο. Πραγματι, εχουμε

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < 1 + \frac{1}{n!} \leq 2$$

και

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n = 1 + \frac{1}{n!} > 1 + \frac{1}{(n+1)!} = f_{n+1}.$$

Αφου η (f_n) ειναι φραγμενη και φθινουσα, υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} f_n$.

11.1.30. Ορισμος. Εστω ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και *γνησιως αυξουσα* ακολουθια *φυσικων αριθμων* $(n_k)_{k=1}^{\infty}$. Σχηματιζουμε την ακολουθια $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ οριζοντας:

$$\forall k \in \mathbb{N} : g_k = f_{n_k}.$$

Τοτε λεμε οτι η $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι μια *υποακολουθια* της $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Με αλλα λογια, μια υποακολουθια της $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι μια ακολουθια $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ που σχηματιζεται λαμβανοντας ορους απο την $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

11.1.31. Παραδειγμα. Εστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = (-1)^n$. Οριζουμε την ακολουθια $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ με $g_n = f_{2n}$. Αρα η $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι μια *υποακολουθια* της $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Συγκεκριμενα εχουμε

$$(f_n) = (-1, 1, -1, 1, ...)$$
$$(g_n) = (1, 1, 1, 1, ...)$$

11.1.32. Θεωρημα. Αν η (g_n) ειναι υποακολουθια της (f_n) και $\lim_{n\to\phi} f_n = \phi$, τοτε ειναι και $\lim_{n\to\infty} g_n = \phi$.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

11.1.33. Θεωρημα. Καθε φραγμενη ακολουθια εχει μια συγκλινουσα υποακολουθια.
Αποδειξη. Οριζουμε την (g_n) ως εξης:

$$\forall n : g_n := \max\left(\{f_1, ..., f_n\}\right).$$

Προφανως (ελεγξε το!) η (g_n) ειναι (α) υποακολουθια της (f_n), (β) αρα και φραγμενη και (γ) αυξουσα. Αρα, συμφωνα με το Θεωρημα 11.1.27 ειναι και συγκλινουσα.

11.1.34. Παραδειγμα. Εστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = (-1)^n$. Οριζουμε την ακολουθια $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ με $g_n = f_{2n}$. Αρα η $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι μια *υποακολουθια της* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Η

$$(f_n) = (-1, 1, -1, 1, ...)$$

ειναι ταλαντευομενη. Αλλα για την

$$(g_n) = (f_{2n}) = (1, 1, 1, 1, ...)$$

ισχυει $\lim_{n\to\infty} g_n = 1$.

11.1.35. Θεωρημα. Δινονται ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$. Εστω οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} g_n = \gamma \in \mathbb{R}$. Τοτε ισχυουν τα εξης.

$$\forall \kappa, \lambda \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} (\kappa f_n + \lambda g_n) = \kappa\phi + \lambda\gamma,$$

$$\lim_{n\to\infty} (f_n g_n) = \phi\gamma,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f_n}{g_n}\right) = \frac{\phi}{\gamma}, \text{ αν } \gamma \neq 0.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

11.1.36. Παραδειγμα. Εστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = 1 + \frac{1}{n}$. Τοτε $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$. Οριζω την $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ με $g_n = 2f_n = 2 + \frac{2}{n}$. τοτε $\lim_{n\to\infty} g_n = 2\lim_{n\to\infty} f_n = 2$.

11.1.37. Παραδειγμα. Εστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = 1 + \frac{1}{n}$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ με $g_n = \frac{1}{n^2}$ Τοτε $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ και $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$. Οριζω την $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ με $h_n = f_n + g_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$. τοτε

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} f_n + \lim_{n\to\infty} g_n = 1.$$

11.1.38. Παραδειγμα. Εστω $f_n = 2n + 1$ και $g_n = 3n + 2$ Τοτε

$$\frac{f_n}{g_n} = \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}.$$

Θετουμε

$$p_n = 2 + \frac{1}{n} \text{ και } q_n = 3 + \frac{2}{n}$$

και παρατηρουμε οτι

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 2 \text{ και } \lim_{n\to\infty} q_n = 3.$$

Οποτε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} p_n}{\lim_{n\to\infty} q_n} = \frac{2}{3}.$$

11.1.39. Ασκηση. Βρες το οριο $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{n} + 2\right)$.

11.1.40. Ασκηση. Βρες το οριο $\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n+4}$.

11.1.41. Ασκηση. Βρες το οριο $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n^2+4}$.

11.1.42. Θεωρημα. Δινονται ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(h_n)_{n=1}^{\infty}$. Εστω οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi$, $\lim_{n\to\infty} g_n = \gamma$. Αν

$$\forall n : f_n \leq h_n \leq g_n$$

και υπαρχει το $\eta = \lim_{n\to\infty} h_n$, τοτε

$$\phi \leq \eta \leq \gamma.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

11.1.43. Θεωρημα: Δινονται ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(h_n)_{n=1}^{\infty}$. Εστω οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \phi$. Αν

$$\forall n : f_n \leq h_n \leq g_n$$

τοτε υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} h_n$ και

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \eta.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

11.1.44. Θεωρημα. Εστω $a \in \mathbb{R}$. Σχηματιζουμε την ακολουθια (f) με $f_n = a^n$. Τοτε

$$|a| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = 0,$$
$$a > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n = \infty.$$

Αποδειξη. Θα δειξουμε μονο την περιπτωση $|a| < 1$ (η περιπτωση $a > 1$ αφηνεται στον αναγνωστη). Οριζουμε την (g_n) με

$$\forall n : g_n = |a^n|.$$

Εχουμε

$$\forall n : |g_n - 0| = ||a^n| - 0| = |a^n| = |a|^n.$$

Τοτε (λαμβανοντας υποψη οτι $\ln|a| < 0$) εχουμε

$$|a|^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln|a| < \ln\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}$$

και αρα

$$\forall \varepsilon > 0 : n > n_\varepsilon = \frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|} \Rightarrow |g_n - 0| < \varepsilon.$$

Δηλ. $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$. Τωρα διακρινουμε δυο περιπτωσεις.

1. Αν $a \in [0,1)$, τοτε

   $$\forall n : f_n = g_n$$

   και αρα $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

2. Αν $a \in (-1,0)$, τοτε οριζουμε δυο υποακολουθιες (p_n), (q_n):

   $$\forall n : p_{2n-1} = p_{2n} = f_{2n-1} = -g_{2n-1},$$
   $$\forall n : q_{2n-1} = q_{2n} = f_{2n} = g_{2n}.$$

   Προφανως (γιατι;)

   $$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = 0$$

   και, αφου

   $$(f_1, f_2, f_3, f_4, ...) = (p_1, q_2, p_3, q_4, ...)$$

   ισχυει και

   $$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = 0.$$

11.1.45. Πολλες φορες αποδεικνυουμε την υπαρξη του οριου μιας ακολουθιας χρησιμοποιωντας τα παραπανω θεωρηματα και / ή *τεχνασματα*, οπως θα δειξουμε στα επομενα παραδειγματα.

11.1.46. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το οριο $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$. Εχουμε ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = 1$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ με $g_n = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Τοτε και $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$ και $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ (αφου $|a| = \left|\frac{1}{3}\right| < 1$). Οποτε

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} f_n + \lim_{n\to\infty} g_n = 1 + 0 = 1.$$

11.1.47. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το οριο $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n}$. Ειναι ευκολο να δειξουμε (επαγωγικα) οτι

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 < 3^n.$$

Οποτε

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{n}{3^n} < \frac{n}{n^2} < \frac{1}{n}$$

και

$$0 = \lim_{n\to 0} 0 \le \lim_{n\to 0} \frac{n}{3^n} \le \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} = 0.$$

Αρα $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} = 0$.

11.1.48. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το οριο $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n^2}$. Εχουμε

$$\forall n\in\mathbb{N}: -\frac{1}{n^2}\leq\frac{\sin n}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}$$

οποτε

$$0=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\right)\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n^2}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0.$$

Αρα $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n^2}=0$.

11.1.49. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\lim_{n\to\infty}1\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{0+0}{1+0}=0.$$

11.1.50. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+1}$. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=\frac{1+0+0}{1+0}=1.$$

11.1.51. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το οριο $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2-1}$. Ειναι

$$\frac{n^3-1}{n^2-1}=\frac{n^3\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}=n\frac{\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\left(n\frac{\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right)=\left(\lim_{n\to\infty}n\right)\left(\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\right)=\infty\cdot 1=\infty.$$

11.1.52. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}$. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\left(\lim_{n\to\infty}1\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{0}{1+0}=0.$$

11.1.53. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$. Εχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=0.\end{aligned}$$

11.1.54. Ενας αλλος τροπος υπολογισμου του οριου ακολουθιας δινεται απο το παρακατω θεωρημα.

11.1.55. Θεωρημα: Εστω συναρτηση $F(x)$ και ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n=F(n)$. Τοτε

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=\phi\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f_n=\phi.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

11.1.56. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το οριο $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$. Θετουμε $F(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$ και εχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2+1}=\frac{\lim_{x\to\infty}(x+1)'}{\lim_{x\to\infty}(x^2+1)'}=\frac{\lim_{x\to\infty}1}{\lim_{x\to\infty}2x}=0.$$

Οποτε και $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=0$.

11.1.57. Θεωρημα.

$$\forall a\in\mathbb{R}:\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

11.2 Λυμενα Προβληματα

11.2.1. Ειναι η ακολουθια με $f_n = \frac{2n+1}{3n}$ φραγμενη;
Λυση. Θα δειξουμε οτι, για καθε $n \geq 1$, ισχυει

$$0 < f_n = \frac{2n+1}{3n} \leq 1.$$

Το κατω φραγμα ειναι προφανες. Το ανω φραγμα ισχυει ανν, για $n > 1$, εχουμε

$$\left(\frac{2n+1}{3n} \leq 1\right) \Leftrightarrow (2n+1 \leq 3n) \Leftrightarrow (1 \leq n).$$

Η τελευταια ανισοτητα ισχυει εξ υποθεσεως.

11.2.2. Ειναι η ακολουθια με $f_n = \frac{2n+1}{3n^2}$ φραγμενη;
Λυση. Θα δειξουμε οτι, για καθε $n \geq 1$, ισχυει

$$0 < f_n = \frac{2n+1}{3n^2} \leq 1.$$

Το κατω φραγμα ειναι προφανες. Το ανω φραγμα ισχυει ανν, για $n \geq 1$, εχουμε

$$\left(\frac{2n+1}{3n^2} - 1 \leq 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{-3n^2+2n+1}{3n^2} \leq 0\right) \Leftrightarrow \left(-3n^2+2n+1 \leq 0\right).$$

Αλλα το $-3n^2+2n+1$ ειναι δευτεροβαθμιο πολυωνυμο με ριζες $1, -\frac{1}{3}$ και αρνητικο συντελεστη του δευτεροβαθμιου ορου. Αρα λαμβανει αρνητικες τιμες για καθε n εκτος αυτων που ανηκουν στο $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$, αρα και για $n \geq 1$.

11.2.3. Δειξε οτι η ακολουθια με $f_n = \frac{2n^2+1}{3n}$ δεν ειναι φραγμενη.
Λυση. Θα δειξουμε οτι για καθε $M > 0$ υπαρχει n τετοιο ωστε

$$f_n = \frac{2n^2+1}{3n} > M.$$

Πραγματι, αν θεσουμε $n = 2M$ εχουμε

$$f_n = \frac{2 \cdot 4M^2 + 1}{3 \cdot 2M} > \frac{2 \cdot 4M^2}{3 \cdot 2M} = \frac{8}{6}M > M$$

το οποιο ισχυει.

11.2.4. Ειναι η ακολουθια με $f_n = \frac{(-1)^n}{3n}$ φραγμενη;
Λυση. Εχουμε $\forall n \in \mathbb{N} : |f_n| = \left|\frac{(-1)^n}{3n}\right| = \frac{1}{3n} < 1$, οποτε

$$\forall n \in \mathbb{N} : -1 < f_n < 1.$$

11.2.5. Ειναι η ακολουθια με $f_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ μονοτονη;
Λυση. Θα δειξουμε οτι, για καθε $n \in \mathbb{N}$, ισχυει $f_n > f_{n+1}$. Αρκει να δειξουμε

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{n+1}{n^2+1} > \frac{n+2}{(n+1)^2+1}.$$

Η παραπανω ανισοτητα ειναι ισοδυναμη με την

$$\forall \in \mathbb{N} : (n+1)(n+1)^2 + 1 = n^3 + 3n^2 + 3n + 2 > n^3 + 2n^2 + n + 2 = (n+2)\left(n^2+1\right)$$

δηλ. με την

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 2n > 0$$

η οποια προφανως ισχυει. Αρα η ακολουθια ειναι γνησιως φθινουσα.

11.2.6. Ειναι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{\sin n}{n}$ μονοτονη;
Λυση. Εχουμε:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sin n$	0.841	0.454	0.047	−0.189	−0.191	−0.04 6	−0.09 3	0.123

Αρα η ακολουθια δεν ειναι μονοτονη.

11.2.7. Ειναι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ μονοτονη;

Λυση. Εχουμε:

$$\begin{aligned} f_{n+1} - f_n &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \ - \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} \ + \sqrt{n} \ . \end{aligned}$$

Θα εξετασουμε την ανισοτητα $\sqrt{n+2} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}$. Εχουμε

$$\begin{aligned} \sqrt{n+2} + \sqrt{n} &< 2\sqrt{n+1} \Leftrightarrow \\ \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)^2 &< 4\left(n+1\right) \Leftrightarrow \\ n + 2 + n + 2\sqrt{n+2}\sqrt{n} &< 4\left(n+1\right) \Leftrightarrow \\ \sqrt{n+2}\sqrt{n} &< n+1 \Leftrightarrow \\ \left(n+2\right) n &< \left(n+1\right)^2 \Leftrightarrow 0 < 1. \end{aligned}$$

Αρα για καθε n εχουμε $f_{n+1} < f_n$ και η ακολουθια ειναι γνησιως φθινουσα.

11.2.8. Ειναι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{2^n}{n!}$ μονοτονη;
Λυση. Εχουμε:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \leq 1.$$

Αρα η ακολουθια ειναι φθινουσα.

11.2.9. Αποδειξε οτι η ακολουθια με $f_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$ ειναι γνησιως αυξουσα.
Λυση. Εξεταζουμε την διαφορα

$$\begin{aligned} f_n - f_{n+1} &= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\ \right) - \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + ... + \frac{1}{2n+2}\ \right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = -\frac{1}{4n^2 + 6n + 2}. \end{aligned}$$

Το τριωνυμο $4n^2 + 6n + 2$ εχει τις ριζες $-\frac{1}{2}, -1$. Αρα στο διαστημα $(-1, \infty)$ εχει σταθερο προσημο, το ιδιο με αυτο του δευτεροβαθμιου ορου $4n^2$, δηλ. θετικο. Με αλλα λογια

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n - f_{n+1} = 4n^2 + 6n + 2 > 0$$

δηλ. η ακολουθια ειναι γνησιως φθινουσα.

11.2.10. (**Ανισοτητα Bernoulli**) Εστω $a \neq 0$. Δειξε οτι

$$\begin{aligned} \forall n \in \{1, 2, 3, ...\} : (1 + a)^n \geq 1 + na, \\ \forall n \in \{2, 3, ...\} : (1 + a)^n > 1 + na. \end{aligned}$$

Λυση. Οριζουμε ακολουθιες (f_n) και (g_n) ως εξης:

$$f_n := (1 + a)^n \ \text{ και } g_n := 1 + na,$$

Για $n = 1$ ισχυει

$$f_1 = (1+a)^1 = 1 + 1 \cdot a = g_1.$$

Για $n = 2$ ισχυει

$$f_2 = (1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a = g_2.$$

Εστω οτι $(1+a)^k > 1 + ka$. Τωρα

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= (1+a)^{k+1} = (1+a)^k (1+a) > (1+ka)(1+a) \\ &= 1 + (k+1)a + a^2 > 1 + (k+1)a = g_{k+1}. \end{aligned}$$

Αρα ισχυει το ζητουμενο.

11.2.11. Δειξε με ενα αριθμητικο επιχειρημα οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Λυση. Στον παρακατω πινακα δινουμε ζευγη τιμων $\left(n, \frac{1}{n+1}\right)$. Παρατηρουμε οτι οσο μεγαλυτερο γινεται το n, τοσο εγγυτερα βρισκεται το $\frac{1}{n+1}$ στο 0. Δηλ. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+} = 0$. $\frac{1}{1001.} = 9.99 \times 10^{-4}$

n	1	10	100	1000
$\frac{1}{n+1}$	0.50000000	0.09090909	0.00990099	0.00099900

11.2.12. Αποδειξε (με χρηση του ορισμου) οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Λυση. Εστω τυχον $\varepsilon > 0$. Λαμβανω $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ οποτε $\varepsilon > \frac{1}{n_\varepsilon + 1} > \frac{1}{n+1}$ για καθε $n \geq n_\varepsilon$. Οποτε

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \varepsilon > \frac{1}{n+1} = \left|\frac{1}{n+1}\right| > |f_n - 0|.$$

Αρα $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$.

11.2.13. Αποδειξε (με χρηση του ορισμου) οτι $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + 1\right) = 1$.

Λυση. Εστω τυχον $\varepsilon > 0$. Λαμβανω $n_\varepsilon > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$ οποτε $\varepsilon > \left(\frac{1}{n_\varepsilon}\right)^2 > \left(\frac{1}{n}\right)^2$ για καθε $n \geq n_\varepsilon$. Οποτε

$$\forall n \geq n_\varepsilon : \varepsilon > \frac{1}{n^2} = \left|\frac{1}{n^2} + 1 - 1\right| > |f_n - 1|.$$

Αρα $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$.

11.2.14. Υπαρχει το οριο της ακολουθιας $(f_n)_{n=1}^\infty$ με $f_n = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}$;

Λυση. Εχουμε

$$f_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)\cdot(2n+2)} = f_n \frac{2n+1}{2n+2} \Rightarrow \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

οποτε η (f_n) ειναι γνησιως φθινουσα. Τοτε (γιατι;) εχουμε

$$\forall n : 0 < f_n \leq \frac{1}{2}$$

Αρα η (f_n) ειναι μονοτονη και φραγμενη, οποτε υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} f_n$.

11.2.15. Υπαρχει το οριο της ακολουθιας $(f_n)_{n=1}^\infty$ με $f_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}$;

Λυση. Εχουμε

$$\forall n : 0 < f_n < \frac{n+1}{n^2} < 2.$$

Επισης εχουμε

$$\begin{aligned} f_{n+1} - f_n &= \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+2)^2} - \frac{1}{n^2} \\ &< \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2n^2} < 0. \end{aligned}$$

οποτε η (f_n) ειναι γνησιως φθινουσα. Αρα η (f_n) ειναι μονοτονη και φραγμενη, οποτε υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} f_n$.

11.2.16. Αποδειξε οτι: αν $\phi, \kappa \in \mathbb{R}$ και $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi$, τοτε $\lim_{n\to\infty} (\kappa f_n) = \kappa\phi$.
Λυση. Αν $\kappa = 0$, τοτε για καθε n εχουμε $\kappa f_n = 0$ και προφανως $\lim_{n\to\infty} (\kappa f_n) = 0 = \kappa\phi$. Αν $\kappa \neq 0$, λαμβανουμε τυχον $\varepsilon > 0$· υπαρχει n_ε τετοιο ωστε

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n - \phi| < \frac{\varepsilon}{\kappa} \Rightarrow \kappa |f_n - \phi| < \kappa \frac{\varepsilon}{\kappa} \Rightarrow |\kappa f_n - \kappa\phi| < \varepsilon$$

Οποτε $\lim_{n\to\infty} (\kappa f_n) = \kappa\phi$.

11.2.17. Αποδειξε: αν $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} g_n = \gamma \in \mathbb{R}$, τοτε $\lim_{n\to\infty} (f_n + g_n) = \phi + \gamma$.
Λυση. Λαμβανουμε τυχον $\varepsilon > 0$. Υπαρχουν $n_{\varepsilon,1}$, $n_{\varepsilon,2}$ τετοια ωστε

$$n \geq n_{\varepsilon,1} \Rightarrow |f_n - \phi| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$n \geq n_{\varepsilon,2} \Rightarrow |g_n - \gamma| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θετουμε $n_\varepsilon = \max(n_{\varepsilon,1}, n_{\varepsilon,2})$. Τοτε

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n - \phi| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |g_n - \gamma| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

και

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \varepsilon > |f_n - \phi| + |g_n - \gamma| = |f_n - \phi + g_n - \gamma| = |(f_n + g_n) - (\phi + \gamma)|.$$

Οποτε $\lim_{n\to\infty} (f_n + g_n) = \phi + \gamma$.

11.2.18. Αποδειξε οτι υπαρχει το οριο $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$.
Λυση. Παρατηρουμε οτι $0 \leq \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} \leq \frac{n^2+2n+1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$. Οποτε

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} \leq \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 0.$$

11.2.19. Αποδειξε οτι υπαρχει το οριο $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^2}$.
Λυση. Εχουμε

$$\forall n \in \mathbb{N} : -\frac{1}{n^2} \leq \frac{\sin n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

οποτε

$$0 = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

11.2.20. Αποδειξε οτι υπαρχει το οριο $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{n^2-1}$.
Λυση. Ειναι

$$\frac{n^3-1}{n^2-1} = \frac{n^3\left(1 - \frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = n\frac{\left(1 - \frac{1}{n^3}\right)}{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \left(n\frac{\left(1 - \frac{1}{n^3}\right)}{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} n\right)\left(\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}\right) = \infty \cdot 1 = \infty.$$

11.2.21. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\left(\lim_{n\to\infty} 1\right) + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

11.2.22. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\lim_{n\to\infty}1\right)+\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

11.2.23. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{1+0+0}{1+0} = 1.$$

11.2.24. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n^2+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$-\frac{1}{n^2+1} < \frac{\sin(n)}{n^2+1} < \frac{1}{n^2+1}.$$

Οποτε $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n^2+1}$, τοτε θα εχουμε

$$0 = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^2+1}\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin(n)}{n^2+1}\right| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1} = 0.$$

Και αρα και $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n^2+1} = 0$ (γιατι;).

11.2.25. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = 0.\end{aligned}$$

11.2.26. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} f_n$ αν ειναι γνωστο οτι για καθε n ισχυει $\frac{n}{n+1} < f_n < \frac{n+1}{n+2}$.
Λυση. Εχουμε

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} \leq \lim_{n\to\infty} f_n \leq \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1$$

οποτε $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$.

11.2.27. Στα επομενα προβληματα θα αποδειξουμε οτι

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

χωρις να χρησιμοποιησουμε τον κανονα του $L'Hospital$.

11.2.28. Αποδειξε οτι η ακολουθια με $f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ειναι γνησιως αυξουσα.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{f_{n+1}}{f_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Απο την ανισοτητα *Bernoulli* με $a = -\frac{1}{(n+1)^2}$ εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{f_{n+1}}{f_n} &= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \left(1-\frac{1}{(n+1)}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1.\end{aligned}$$

Με αλλα λογια, για καθε $n \in \mathbb{N}$, ισχυει $\frac{f_{n+1}}{f_n} > 1$, δηλ. η ακολουθια ειναι γνησιως αυξουσα.

11.2.29. Αποδειξε οτι η ακολουθια με $g_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ ειναι γνησιως φθινουσα.
Λυση. Αποδεικνυεται παρομοια με το προηγουμενο.

11.2.30. Αποδειξε οτι οι ακολουθιες με $f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ και $g_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ εχουν κοινο οριο.
Λυση. Πρωτα θα δειξουμε οτι, για καθε $n \in \mathbb{N}$, ισχυει $f_n < g_n$. Πραγματι

$$f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = g_n.$$

Συνδυαζοντας με την μονοτονια που αποδειξαμε στα προηγουμενα προβληματα, εχουμε

$$2 = f_1 < f_2 < f_3 < .... < g_3 < g_2 < g_1 = 4.$$

Αρα η f_n ειναι φραγμενη και γνησιως αυξουσα, οποτε εχει οριο, εστω ϕ. Ομοιως, η g_n ειναι φραγμενη και γνησιως φθινουσα, αρα εχει οριο, εστω γ. Ομως

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_n}{f_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g_n}{f_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} g_n}{\lim_{n\to\infty} f_n} = \frac{\gamma}{\phi}.$$

Οποτε $\frac{\gamma}{\phi} = 1$ δηλ. $\lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} f_n = \phi$. Επισης $2 < \phi < 4$ (γιατι;).

11.2.31. Αποδειξε οτι $\phi = \varepsilon$.
Λυση. Απο την διωνυμικη ταυτοτητα εχουμε

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n!}{1!\,(n-1)!}\frac{1}{n} + \frac{n!}{2!\,(n-2)!}\frac{1}{n^2} + \frac{n!}{3!\,(n-3)!}\frac{1}{n^3} + ...\\ &= 1 + 1 + \frac{n\,(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + ...\\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ...\end{aligned}$$

οποτε

$$\begin{aligned}\phi &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ...\right)\\ &= 1^0 + 1^1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + ... = e^1 = e.\end{aligned}$$

11.2.32. Θεωρημα (Cauchy). Η ακολουθια (f_n) συγκλινει (στο $\phi \in \mathbb{R}$) ανν

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists n_0 : (n, m \geq n_0 \Rightarrow |s_n - s_m| < \varepsilon)\,.$$

11.3 Αλυτα Προβληματα

11.3.1. Αποδειξε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{3n+4}{n^3}$ ειναι φραγμενη.

11.3.2. Αποδειξε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{n^2+5}{3n}$ δεν ειναι φραγμενη.

11.3.3. Αποδειξε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = (-2)^n$ δεν ειναι φραγμενη.

11.3.4. Ειναι η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ φραγμενη;

1. Οταν $f_n = \frac{4n+5}{6n}$; *Απ.* Ναι.
2. Οταν $f_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$; *Απ.* Ναι.
3. Οταν $f_n = \frac{n}{3^n}$; *Απ.* Ναι.
4. Οταν $f_n = \frac{n!}{n^n}$; *Απ.* Ναι.

11.3.5. Ειναι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ μονοτονη;

1. Οταν $f_n = \frac{n}{n+1}$ *Απ.* Ναι.
2. Οταν $f_n = \frac{n+2}{n^3+5}$; *Απ.* Ναι.
3. Οταν $f_n = \frac{1-\cos(n)}{n}$; *Απ.* Οχι.
4. Οταν $f_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$; *Απ.* Οχι.

11.3.6. Ειναι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$ φραγμενη; Μονοτονη;

Απ. Ειναι φραγμενη αλλα οχι μονοτονη.

11.3.7. Αποδειξε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}$ ειναι γνησιως φθινουσα.

11.3.8. Αποδειξε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$ ειναι γνησιως αυξουσα.

11.3.9. Αποδειξε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^n$ ειναι γνησιως αυξουσα.

11.3.10. Να μελετηθει ως προς την μονοτονια η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

1. Οταν $f_n = \sqrt{n^2+1} - n$.
2. Οταν $f_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n}$.
3. Οταν $f_n = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^{2n+1} (n+2)^{-n}$.
4. Οταν $f_n = \sqrt[n]{n}$.
5. Οταν $f_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n}}$.

11.3.11. Δειξε με ενα αριθμητικο επιχειρημα οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$.

11.3.12. Αποδειξε με χρηση του ορισμου οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$.

11.3.13. Αποδειξε με χρηση του ορισμου οτι :

1. $\lim_{n\to} \frac{2}{n^3} + 1 = 2\cdot$
2. $\lim_{n\to} \frac{2}{n+1} + 1 = 2\cdot$

3. $\lim_{n\to} n^4 = \infty$·
4. η $f_n = (-2)^n$ δεν εχει οριο·
5. $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ οταν $a > 1$.

11.3.14. Υπολογισε το οριο.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+12n}{(n+2)^3}$.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4-1}{n^2-1}$.

11.3.15. Αποδειξε οτι οι ακολουθιες (f_n) και (g_n), οπου $f_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^n$ και $g_n = \left(1+\frac{5}{n}\right)^{n+1}$, εχουν κοινο οριο.

11.3.16. Υπολογισε το οριο.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+2n}{n^5+6n^2}$. *Απ.* 0.
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{n^2+1}$. *Απ.* 2.
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n+6^n}$. *Απ.* 0.
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n^2+1}$. *Απ.* 0.
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{5n^2+\sin n}$. *Απ.* 1/5.
6. $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n+\sin n}{n^2+1}$. *Απ.* 0.
7. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. *Απ.* 0.
8. $\lim_{n\to\infty} 3^{-n}$. *Απ.* 0.
9. $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!}$. *Απ.* 0.
10. $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n^n}$. *Απ.* 0.
11. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$. *Απ.* 0.
12. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$. *Απ.* ∞.

11.3.17. Υπολογισε το οριο.

1. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$. *Απ.* 0.
2. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)$. *Απ.* 0.
3. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$. *Απ.* 0.
4. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+n}-n\right)$. *Απ.* ∞.
5. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+n}-\sqrt[3]{n^2-n}\right)$. *Απ.* 0.
6. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$. *Απ.* $\frac{3}{2}$.
7. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{2n}}$. *Απ.* 0.
8. $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right)^n$. *Απ.* e^{-2}.

9. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+2}\right)^{n+2}$. *Απ.* e^2.

10. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+2}\right)^{n+2}$. *Απ.* 0

11. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$. *Απ.* e^4.

11.3.18. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\left(1+e^{-n}\right)^{e^n}$. *Απ.* e

11.3.19. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} f_n$ αν για καθε n ισχυει $\frac{n^2}{n^4+2} < f_n < \frac{n^2}{n^3+2}$. *Απ.* 0.

11.3.20. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$. *Απ.* 3.

11.3.21. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$. *Απ.* $\frac{15}{17}$.

11.3.22. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$. *Απ.* 1.

11.3.23. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$. *Απ.* 0.

11.3.24. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$. *Απ.* 4.

11.3.25. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$. *Απ.* 0.

11.3.26. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$. *Απ.* 0.

11.3.27. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$. *Απ.* 1.

11.3.28. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$. *Απ.* 0.

11.3.29. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n+1}$. *Απ.* 1.

11.3.30. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{1/n}-1}{2^{1/n}+1}$. *Απ.* 0.

11.3.31. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{1/n}-1}{3^{1/n}+1}$. *Απ.* 0.

11.3.32. Αποδειξε οτι: (α) αν $\lim_{n\to\infty} f_n=\phi$, (β) $\lim_{n\to\infty} g_n=\gamma$, (γ) για καθε n ισχυει $f_n\leq h_n\leq g_n$ και (δ) υπαρχει το $\eta=\lim_{n\to\infty} h_n$, τοτε ισχυει $\phi\leq\eta\leq\gamma$.

11.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

11.4.1. Αποδειξε το **Θεωρημα του Cauchy**: η ακολουθια (f_n) συγκλινει (στο $\phi\in\mathbb{R}$) ανν

$$\forall\varepsilon>0:\exists n_0:\left(n,m\geq n_0\Rightarrow |s_n-s_m|<\varepsilon\right).$$

11.4.2. Ειναι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+...+\frac{1}{(2^n-1)n}$ φραγμενη;

11.4.3. Ειναι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$ φραγμενη;

11.4.4. Ειναι η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n=\frac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{n}$ φραγμενη; Μονοτονη;

11.4.5. Εστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n=\frac{r^n}{1+r^{2n}}$. Βρες το $\lim_{n\to\infty} f_n$ για διαφορες τιμες του r.

11.4.6. Βρες το $\lim_{n\to\infty} f_n$ οταν:

1. $f_n=\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{1+n+n^2+n^3}$.

2. $f_n = \frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n(1+2+...+n)}$.

3. $f_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}$.

4. $f_n = \frac{1\cdot 2+2\cdot 3+...+n(n+1)}{n^2}$.

5. $f_n = \left(1+\frac{2}{3}\right)\left(1+\frac{2}{5}\right)...\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)$.

6. $f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)...\left(1+\frac{1}{n^{2^{n-1}}}\right)$.

7. $f_n = \frac{1^k+2^k+....+n^k}{n^{k+1}}$.

8. $f_n = \sqrt[n]{3^n + 2^{-n}}$.

9. $f_n = \sqrt[n]{2^{n^2} - 1}$.

10. $f_n = \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...(2n)}}$.

11.4.7. Εστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθια με θετικους ορους και $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + ... + a_n^n}$. Βρες το $\lim_{n\to\infty} f_n$.

11.4.8. Εστω ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ με θετικους ορους και $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} g_n$. Βρες το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n^2 + g_n^2}{f_n + g_n}.$$

11.4.9. Εστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθια τετοια ωστε $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in \mathbb{R}$ και $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \sqrt[n]{a_n}$. Βρες το $\lim_{n\to\infty} f_n$.

11.4.10. Αποδειξε οτι καθε φραγμενη και μονοτονη ακολουθια συγκλινει.

11.4.11. Αποδειξε οτι για καθε $a \in \mathbb{R}$ εχουμε $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

11.4.12. Αποδειξε οτι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ανν $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$.

11.4.13. Για ποιες τιμες a ειναι η ακολουθια με $f_n = \sin(an)$ συγκλινουσα;

11.4.14. Εστω ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοια ωστε υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi$. Αποδειξε οτι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{f_1 + f_2 + ... + f_N}{N} = \phi,$$
$$\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{f_1 f_2 ... f_N} = \phi.$$

11.4.15. Αποδειξε οτι

$$\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

11.4.16. (Μαθ. Ολυμπιαδα) Εστω ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοιες ωστε

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n + g_n\sqrt{2} = \left(2 + \sqrt{2}\right)^n.$$

Αποδειξε οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} = \sqrt{2}$.

11.4.17. (Μαθ. Ολυμπιαδα) Δινεται ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με θετικους ορους, η οποια ικανοποιει

$$\forall n \in \mathbb{N} : (f_n)^2 \leq f_n - f_{n+1}.$$

Αποδειξε οτι $\forall n \in \mathbb{N} : f_n < \frac{1}{n}$.

11.4.18. (Μαθ. Ολυμπιαδα) Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

11.4.19. (Μαθ. Ολυμπιαδα) Εστω ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοια ωστε

$$\forall m,n : f_{m+n} \leq f_m + f_n.$$

Αποδειξε οτι υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{n}$.

11.4.20. (Μαθ. Ολυμπιαδα) Εστω ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{...+\sqrt{1}}}}$ (με n ριζες). Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} f_n$.

11.4.21. (Μαθ. Ολυμπιαδα) Υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{...+\sqrt{n}}}}$;

11.4.22. (Μαθ. Ολυμπιαδα) Εστω ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με θετικους ορους και τετοια ωστε $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \rho > 0$. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n}$.

11.4.23. (Μαθ. Ολυμπιαδα) Εστω $p \neq 1$. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}$ για διαφορες τιμες του p.

12 Αναδρομικες Ακολουθιες

Μια *αναδρομικη ακολουθια* οριζεται δινοντας εναν πεπερασμενο αριθμο *αρχικων ορων* και μια σχεση (*εξισωση διαφορων*) με την οποια υπολογιζονται οι υπολοιποι οροι αυτης.

12.1 Θεωρια και Παραδειγματα

12.1.1. Στο παρον κεφαλαιο θα τροποποιησουμε τον Ορισμο 11.1.1 της ακολουθιας σε δυο σημεια.

1. Το πεδιο ορισμου μιας ακολουθιας θα ειναι πλεον το $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$. Δηλαδη θα εχουμε
$$\mathbf{f} = (f_n)_{n=0}^{\infty} = (f_0, f_1, f_2, ...) .$$
Αυτη η τροποποιηση δεν επιφερει καμμια σημαντικη αλλαγη στα αποτελεσματα του Κεφαλαιου 13.
2. Το πεδιο τιμων μιας ακολουθιας θα ειναι πλεον το $\mathbb{C}$. Δηλαδη μια ακολουθια θα εχει, γενικα, μιγαδικους ορους και θα ειναι
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}.$$

Αυτη ειναι μια γενικευση του προηγουμενου ορισμου. Πολλες εννοιες του Κεφαλαιου 11 εξακολουθουν να ισχυουν με προφανεις τροποποιησεις. Π.χ. ειναι πολυ σημαντικο οτι ο ορισμος της συγκλισης ακολουθιας (σε μιγαδικο, γενικα, αριθμο) εξακολουθει να ισχυει, αρκει να ερμηνευσουμε το $|f_n - \phi|$ ως *μετρο* μιγαδικου (αντι για *απολυτη τιμη* πραγματικου) αριθμου. Αλλες εννοιες ομως δεν εφαρμοζονται στις μιγαδικες ακολουθιες, π.χ., αυτη της μονοτονιας (αφου δεν υπαρχει σχεση διαταξης στο συνολο $\mathbb{C}$).

12.1.2. Ορισμος. *Εξισωση διαφορων πρωτης ταξης* λεγεται μια σχεση (μεταξυ ορων τυχουσης ακολουθιας $\mathbf{f} = (f_n)_{n=0}^{\infty}$) της μορφης
$$\forall n \geq 1 : f_n = A(f_{n-1}) .$$
Γενικοτερα, μια σχεση της μορφης
$$\forall n \geq K : f_n = A(f_{n-1}, f_{n-2}, ..., f_{n-K})$$
λεγεται *εξισωση διαφορων K ταξης*.

12.1.3. Ορισμος. Εστω ακολουθια $\mathbf{f} = (f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει την εξισωση διαφορων
$$\forall n \geq K : f_n = A(f_{n-1}, f_{n-2}, ..., f_{n-K}) . \tag{12.1}$$
Τοτε η $\mathbf{f} = (f_n)_{n=0}^{\infty}$ λεγεται *λυση* της (12.1).

12.1.4. Παραδειγμα. Μια εξισωση διαφορων πρωτης ταξης ειναι η

$$\forall n \geq 1 : f_n = \frac{1}{2} f_{n-1}. \tag{12.2}$$

Μπορεις ευκολα να ελεγξεις οτι οποιαδηποτε $\mathbf{f}$ της μορφης

$$f_n = c_0 2^{-n}$$

ειναι μια λυση της (12.2).

12.1.5. Παραδειγμα. Μια εξισωση διαφορων πρωτης ταξης ειναι η

$$\forall n \geq 1 : f_n = \frac{1}{2} f_{n-1} + 2. \tag{12.3}$$

Μπορεις να βρεις μια λυση της (12.3);

12.1.6. Ορισμος. Μια $\mathbf{f} = (f_n)_{n=0}^{\infty}$ λεγεται *αναδρομικη ακολουθια* ανν οριζεται απο:

1. τις *αρχικες συνθηκες*
$$f_0 = c_0, f_1 = c_1, ..., f_{K-1} = c_{K-1} \tag{12.4}$$
2. και μια εξισωση διαφορων K ταξης
$$\forall n \geq K : f_n = A\left(f_{n-1}, ..., f_{n-K}\right). \tag{12.5}$$

Με αλλα λογια, μια αναδρομικη ακολουθια ειναι μια λυση της εξισωσης διαφορων (12.5) η οποια ικανοποιει τις αρχικες συνθηκες (12.4).

12.1.7. Μια εξισωση διαφορων της μορφης

$$n \geq K : f_n = A\left(f_{n-1}, f_{n-2}, ..., f_{n-K}\right)$$

θα εχει, γενικα, περισσοτερες απο μια λυσεις. Αλλα μια εξισωση διαφορων *με αρχικες συνθηκες* της μορφης

$$f_0 = c_1, \qquad f_1 = c_2, ..., f_{K-1} = c_K, \quad n \geq K : f_n = A\left(f_{n-1}, f_{n-2}, ..., f_{n-K}\right)$$

θα εχει *ακριβως μια λυση* (γιατι;).

12.1.8. *Καθε* λυση μιας εξισωσης διαφορων ειναι αναδρομικη ακολουθια με *καταλληλες αρχικες συνθηκες* (γιατι;).

12.1.9. Παραδειγμα. Μια αναδρομικη ακολουθια ειναι αυτη που οριζεται ως εξης:

$$f_0 = 5, \qquad \forall n \geq 1 : f_n = \frac{1}{2} f_{n-1} + 2. \tag{12.6}$$

Επαληθευσε οτι η *μοναδικη* λυση της (12.6) ειναι η

$$\forall n \geq 0 : f_n = 2^{-n} + 4.$$

12.1.10. Ορισμος. Η *μηδενικη ακολουθια* συμβολιζεται ως $\mathbf{0}$ και οριζεται ως εξης:

$$\forall n : 0_n := 0.$$

12.1.11. Ορισμος. Μια εξισωση διαφορων της μορφης

$$\forall n \geq K : f_n + a_1 f_{n-1} + ... + a_K f_{n-K} = 0$$

(με $a_K \neq 0$) λεγεται *ομογενης γραμμικη εξισωση διαφορων K ταξης με σταθερους συντελεστες*. Παρομοια, μια εξισωση διαφορων της μορφης

$$\forall n \geq K : f_n + a_1 f_{n-1} + ... + a_K f_{n-K} = u_n$$

(οπου $a_K \neq 0$ και η (u_n) δεν ειναι η μηδενικη ακολουθια) λεγεται *μη ομογενης γραμμικη εξισωση διαφορων K ταξης με σταθερους συντελεστες*.

12.1.12. Θεωρημα. Η (γραμμικη μη ομογενης 1ης ταξης με σταθερους συντελεστες) εξισωση διαφορων με αρχικη συνθηκη:

$$f_0 = A, \quad \forall n \geq 1 : f_n - a_1 f_{n-1} = b. \tag{12.7}$$

εχει μοναδικη λυση την αναδρομικη ακολουθια

$$\forall n : f_n = \begin{cases} A & \text{οταν } n = 0, \\ Aa_1^n + \left(1 + a_1 + a_1^2 + ... + a_1^{n-1}\right) b & \text{οταν } n \geq 0. \end{cases} \tag{12.8}$$

Απο την (12.8) προκυπτει η απλουστερη μορφη

$$\forall n : f_n = Aa_1^n + \frac{1 - a_1^n}{1 - a_1} b \tag{12.9}$$

Αποδειξη. Ξαναγραφουμε την (12.7) στην μορφη

$$f_n = a_1 f_{n-1} + b. \tag{12.10}$$

Εχουμε $f_0 = A$. Απο την (12.10) παιρνουμε

$$\begin{aligned} &f_0 = A \\ &f_1 = Aa_1 + b \\ &f_2 = a_1 (Aa_1 + b) + b = Aa_1^2 ba_1 + b = Aa_1^2 + b (1 + a_1) \\ &f_3 = a_1 \left(Aa_1^2 + ba_1 + b\right) + b = Aa_1^3 + b \left(1 + a_1 + a_1^2\right) \\ &\quad ... \end{aligned}$$

τα οποια συμφωνουν με την (12.8). Για *να αποδειξουμε* την (12.8) δουλευουμε επαγωγικα. Οντως αυτη ισχυει για $n = 1$· εστω οτι ισχυει για $n \in \{1, 2, 3, ..., k\}$. Τοτε

$$\begin{aligned} f_{k+1} &= a_1 f_k + b \\ &= a_1 \left(Aa_1^k + b \left(1 + a_1 + a_1^2 + ... + a_1^{k-1}\right)\right) + b \\ &= Aa_1^{k+1} + a_1 b \left(1 + a_1 + a_1^2 + ... + a_1^{k-1}\right) + b \\ &= Aa_1^{k+1} + b \left(1 + a_1 + a_1^2 + ... + a_1^k\right) \end{aligned}$$

και εχουμε αποδειξει την (12.8).

12.1.13. Παραδειγμα. Ο n-στος ορος της ακολουθιας με

$$f_0 = 6, \qquad \forall n \geq 1 : f_n - \frac{1}{3} f_{n-1} = 0.$$

δινεται, συμφωνα με την (12.8), απο την ,

$$\forall n \geq 0 : f_n = f_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n + 0 = 6 \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

12.1.14. Παραδειγμα. Ο n-στος ορος της ακολουθιας με

$$f_0 = 6, \qquad \forall n \geq 1 : f_n - \frac{1}{3} f_{n-1} = 2$$

δινεται, συμφωνα με την (12.9), απο την

$$\forall n \geq 0 : f_n = 6a_1^n + \frac{1 - 3^{-n}}{1 - 3^{-1}} 2 = 3 \cdot 3^{-n} + 3. \tag{12.11}$$

12.1.15. Παραδειγμα. Μια ομογενης εξισωση διαφορων 2ης ταξης ειναι η

$$\forall n \geq 2 : f_n + \frac{5}{6} f_{n-1} + \frac{1}{6} f_{n-2} = 0.$$

Αποδειξε οτι τρεις λυσεις αυτης ειναι οι $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, $(q_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ οπου

$$\begin{aligned} \forall n \geq 0 : p_n &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \\ \forall n \geq 0 : q_n &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \\ \forall n \geq 0 : g_n &= c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

(στην τελευταια οι c_1, c_2 ειναι αυθαιρετες σταθερες).

12.1.16. Παραδειγμα. Μια μη ομογενης εξισωση διαφορων 2ης ταξης *με αρχικες συνθηκες* ειναι η

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad \forall n \geq 2 : f_n + \frac{5}{6} f_{n-1} + \frac{1}{6} f_{n-2} = 1.$$

Η μοναδικη λυση αυτης (αποδειξε το!) ειναι η

$$\forall n \geq 0 : f_n = \frac{9}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 4 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}.$$

12.1.17. Παρακατω θα αναπτυξουμε μια μεθοδο για την επιλυση *οποιασδηποτε* ομογενους γραμμικης εξισωσης διαφορων K ταξης με σταθερους συντελεστες.

12.1.18. Ορισμος. Η *χαρακτηριστικη εξισωση* της

$$\forall n \geq 2 : f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} = 0$$

ειναι η

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0. \tag{12.12}$$

12.1.19. Θεωρημα. Εστω (γραμμικη ομογενης 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες) εξισωση διαφορων:

$$n \geq 2 : f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} = 0 \tag{12.13}$$

(με $a_2 \neq 0$) και r_1, r_2 οι ριζες της *χαρακτηριστικης εξισωσης*

$$r^2 + a_1 r + a_2 = 0. \tag{12.14}$$

Οριζουμε τις ακολουθιες $\mathbf{p} = (p_n)_{n=0}^{\infty}$ και $\mathbf{q} = (q_n)_{n=0}^{\infty}$ ως εξης:

$$\begin{aligned} &\text{ανν } r_1 \neq r_2 : (\forall n : p_n = r_1^n \text{ και } q_n = r_2^n), \\ &\text{ανν } r_1 = r_2 : (\forall n : p_n = r_1^n \text{ και } q_n = n r_1^n). \end{aligned}$$

Τοτε *ολες* οι λυσεις της (12.13) εχουν την *γενικη* μορφη

$$f_n = c_1 p_n + c_2 q_n \tag{12.15}$$

οπου οι c_1, c_2 ειναι αυθαιρετες σταθερες.
Αποδειξη. Η αποδειξη αποτελειται απο τρια βηματα.
Βημα 1ο. Καταρχην θα αποδειξουμε οτι καθε ακολουθια με $f_n = r_i^n$ (με $i \in \{1, 2\}$) ειναι λυση της (12.13). Πραγματι εχουμε

$$r_i^n + a_1 r_i^{n-1} + a_2 r_i^{n-2} = r_i^{n-2} \left(r_i^2 + a_1 r_i + a_2\right) = 0$$

αφου η r_i ειναι ριζα της (12.14). Τωρα θα δειξουμε οτι, οταν $r_1 = r_2$, και καθε ακολουθια με $f_n = nr_1^n$ ειναι επισης λυση της (12.13). Πραγματι εχουμε

$$\begin{aligned} &nr_1^n + a_1 (n-1) r_1^{n-1} + a_2 (n-2) r_1^{n-2} \\ &= nr_1^{n-2} \left(r_1^2 + a_1 r_1 + a_2 \right) - r_1^{n-2} \left(a_1 r_1 + 2a_2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Εδω εκμεταλλευτηκαμε το γεγονος οτι το $r_1 = r_2$ συνεπαγεται

$$a_1^2 - 4a_2 = 0, \qquad r_1 = r_2 = -\frac{a_1}{2}$$

οποτε

$$a_1 r_1 + 2a_2 = -a_1 \frac{a_1}{2} + 2a_2 = -\frac{a_1^2 - 4a_2}{2} = 0.$$

<u>*Βημα 2ο*</u>. Τωρα θα δειξουμε οτι καθε $\mathbf{g} = (g_n)_{n=0}^{\infty}$ που δινεται απο την σχεση

$$\forall n \geq 2 : g_n = c_1 p_n + c_2 q_n$$

(με c_1, c_2 αυθαιρετες σταθερες) ειναι επισης λυση της (12.13). Πραγματι, εχουμε

$$\forall n \geq 2 : p_n + a_1 p_{n-1} + a_2 p_{n-2} = 0 \tag{12.16}$$

$$\forall n \geq 2 : q_n + a_1 q_{n-1} + a_2 q_{n-2} = 0 \tag{12.17}$$

Πολλαπλασιαζοντας την (12.16) με αυθαιρετη σταθερα c_1, την (12.17) με αυθαιρετη σταθερα c_2 και προσθετοντας κατα μελη, παιρνουμε:

$$\begin{aligned} &\forall n \geq 2 : c_1 \left(p_n + a_1 p_{n-1} + a_2 p_{n-2} \right) + c_2 \left(q_n + a_1 q_{n-1} + a_2 q_{n-2} \right) = 0 \Rightarrow \\ &\forall n \geq 2 : \left(c_1 p_n + c_2 q_n \right) + a_1 \left(c_1 p_{n-1} + c_2 q_{n-1} \right) + a_2 \left(c_1 p_{n-2} + c_2 q_{n-2} \right) = 0 \end{aligned}$$

το οποιο δειχνει οτι η $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι λυση της (12.13).
<u>*Βημα 3ο*</u>. Εχουμε δειξει ως εδω οτι καθε $\mathbf{g} = (g_n)_{n=0}^{\infty}$ της μορφης

$$g_n = c_1 p_n + c_2 q_n$$

ειναι λυση της (12.13).Τωρα θα δειξουμε οτι αυτες ειναι οι *μονες* λυσεις της (12.13).

Πραγματι, ας παρουμε τυχουσα λυση $\mathbf{h} = (h_n)_{n=0}^{\infty}$ της (12.13). Προφανως αυτη ικανοποιει

$$h_0 = h_0, \qquad h_1 = h_1, \qquad \forall n \geq 2 : h_n + a_1 h_{n-1} + a_2 h_{n-2} = 0. \tag{12.18}$$

Επισης, αν θεωρησουμε την εξισωση διαφορων

$$\forall n \geq 2 : f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} = 0,$$

μπορουμε να παρουμε μια λυση $\mathbf{f}$ η οποια ικανοποιει

$$\forall n \geq 2 : f_n = \kappa p_n + \lambda q_n$$

και να επιλεξουμε κ και λ τετοια ωστε

$$\forall n \in \{0, 1\} : \kappa p_n + \lambda q_n = h_n$$

Τοτε λοιπον η $\mathbf{f}$ ειναι της μορφης

$$\forall n \geq 0 : f_n = \kappa p_n + \lambda q_n$$

Αλλα επισης η $\mathbf{f}$ ικανοποιει

$$f_0 = h_0, \qquad f_1 = h_1, \qquad \forall n \geq 2 : f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} = 0. \tag{12.19}$$

Αλλα, προφανως, οι (12.18) και (12.19) οριζουν την ιδια ακολουθια, δηλ. $\mathbf{h} = \mathbf{f}$. Οποτε και

$$\forall n \geq 0 : h_n = \kappa p_n + \lambda q_n$$

και η αποδειξη ειναι πληρης.

12.1.20. Ορισμος. Οι ακολουθιες $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$ του παραπανω θεωρηματος λεγονται *θεμελιωδεις λυσεις* της (12.13), διοτι καθε αλλη λυση $\mathbf{f}$ γραφεται ως συνδυασμος αυτων των δυο:

$$f_n = c_1 p_n + c_2 q_n. \tag{12.20}$$

Η (12.20) λεγεται *γενικη* λυση της (12.13).

12.1.21. Παραδειγμα. Ας βρουμε την αναδρομικη ακολουθια η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 2, \quad f_1 = 1, \quad \forall n \geq 2 : f_n + f_{n-1} + \frac{1}{4} f_{n-2} = 0. \tag{12.21}$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση της (12.21) ειναι

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$$

με ριζες $r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$\forall n \geq 2 : c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + c_2 n \left(-\frac{1}{2}\right)^n. \tag{12.22}$$

Για να ικανοποιειται η (12.21) και για $n \in \{0, 1\}$ πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned} 2 = f_0 &= c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + c_2 0 \left(-\frac{1}{2}\right)^0 = c_1, \\ 1 = f_1 &= c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + c_2 1 \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2}. \end{aligned}$$

Λυνοντας το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 &= 2 \\ \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2} &= -1 \end{aligned}$$

παιρνουμε τις λυσεις $c_1 = 2$, $c_2 = -4$ οποτε η λυση της (12.21) ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 4n \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

12.1.22. Παραδειγμα. Ας βρουμε την αναδρομικη ακολουθια η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 2, \quad \forall n \geq 2 : f_n + f_{n-2} = 0. \tag{12.23}$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση της (12.23) ειναι

$$x^2 + 1 = 0$$

με φανταστικες ριζες $r_1 = i$, $r_2 = -i$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$\forall n \geq 2 : c_1 i^n + c_2 (-i)^n. \tag{12.24}$$

Για να ικανοποιειται η (12.23) και για $n \in \{0, 1\}$ πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned} 1 = f_0 &= c_1 i^0 + c_2 (-i)^0 = c_1 + c_2, \\ 2 = f_1 &= c_1 i^1 + c_2 (-i)^1 = c_1 i - c_2 i. \end{aligned}$$

Λυνοντας το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ i c_1 - i c_2 &= 2 \end{aligned}$$

παιρνουμε τις λυσεις $c_1 = \frac{1}{2} - i$, $c_2 = \frac{1}{2} + i$ οποτε η λυση της (12.23) ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = \left(\frac{1}{2} - i\right) i^n + \left(\frac{1}{2} + i\right) (-i)^n .$$

Τιθεται το ερωτημα: πως ειναι δυνατον να εχουμε *μιγαδικο* ορο f_n σε μια ακολουθια που οριστηκε μονο με τις πραγματικες εξισωσεις (12.23). Η απαντηση ειναι η εξης: επειδη $\overline{\left(\frac{1}{2} - i\right) i^n} = \left(\frac{1}{2} + i\right) (-i)^n$, η λυση μπορει να γραφτει

$$\forall n \geq 0 : f_n = \left(\frac{1}{2} - i\right) i^n + \overline{\left(\frac{1}{2} - i\right) i^n} \Rightarrow$$

$$\forall n \geq 0 : f_n = \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{2} - i\right) i^n\right) \in \mathbb{R}.$$

12.1.23. Ασκηση. Βρες την αναδρομικη ακολουθια η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad \forall n \geq 2 : f_n + 3f_{n-1} + 2f_{n-2} = 0.$$

12.1.24. Ασκηση. Βρες την αναδρομικη ακολουθια η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 3, \quad f_1 = -1, \quad \forall n \geq 2 : f_n + 4f_{n-1} + 4f_{n-2} = 0.$$

12.1.25. Ασκηση. Βρες την αναδρομικη ακολουθια η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = -1, \quad \forall n \geq 2 : f_n + f_{n-1} + f_{n-2} = 0.$$

12.1.26. Παραδειγμα. Ας βρουμε τον n-στο ορο και το οριο της *ακολουθιας Fibonacci*, η οποια οριζεται ως εξης:

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 1, \quad \forall n \geq 2 : f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 = r + 1$$

και εχει ριζες

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}, \qquad r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Οποτε ο n-στος ορος ειναι

$$f_n = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \tag{12.25}$$

και για να ικανοποιουνται οι αρχικες συνθηκες θα πρεπει να εχουμε

$$1 = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1 = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 .$$

Η λυση του συστηματος ειναι $c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Οποτε ο n-στος ορος ειναι

$$f_n = \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n . \tag{12.26}$$

Ο αναδρομικος τυπος (12.26) δινει

$$(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, ...) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) \tag{12.27}$$

και μπορουμε να ελεγξουμε την ορθοτητα αυτων των ορων εκτελωντας τους υπολογισμους

$$
\begin{aligned}
&f_0 = 1 \\
&f_1 = 1 \\
&f_2 = f_0 + f_1 = 2 \\
&f_3 = f_1 + f_2 = 3 \\
&f_4 = f_2 + f_3 = 5 \\
&f_5 = f_3 + f_4 = 8 \\
&\quad ...
\end{aligned}
$$

Αυτη ειναι η περιφημη ακολουθια *Fibonacci*, η οποια εχει πολλες αξιοσημειωτες ιδιοτητες.

12.1.27. Συμβολισμος. Παρακατω θα χρησιμοποιουμε τους συμβολισμους

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618... \qquad \Psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618... \ .$$

12.1.28. Παραδειγμα. Εστω οτι $\mathbf{f} = (f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι η ακολουθια *Fibonacci*· θα δειξουμε οτι

$$\forall n : f_0 + f_1 + ... + f_{n-1} = f_{n+1} - 1. \tag{12.28}$$

Θα αποδειξουμε την (12.28) επαγωγικα. Για $n = 0$ εχουμε

$$f_0 = f_2 - 1 \Leftrightarrow f_0 + 1 = f_2 \Leftrightarrow f_0 + f_1 = f_2$$

αρα η (12.28) ισχυει. Εστω οτι ισχυει για $n \in \{0, 1, ..., k\}$. Τοτε εχουμε

$$f_0 + f_1 + ... + f_{k-1} = f_{k+1} - 1 \Rightarrow f_0 + f_1 + ... + f_{k-1} + f_k = f_k + f_{k+1} - 1 = f_{k+2} - 1$$

και η αποδειξη ειναι πληρης.

12.1.29. Θεωρημα: Εστω οτι $\overline{\mathbf{f}} = \left(\overline{f}_n\right)_{n=0}^{\infty}$ ειναι *καποια* λυση της μη ομογενους γραμμικης εξισωσης διαφορων 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες

$$\forall n \geq 2 : f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} = b_n \tag{12.29}$$

και $\widehat{\mathbf{f}} = \left(\widehat{f}_n\right)_{n=0}^{\infty}$ ειναι η γενικη λυση της *προσαρτημενης* ομογενους γραμμικης εξισωσης διαφορων 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες

$$\forall n \geq 2 : f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} = 0. \tag{12.30}$$

Τοτε η *γενικη* λυση $\mathbf{f}$ της (12.29) ικανοποιει την:

$$\forall n \geq 2 : f_n = \widehat{f}_n + \overline{f}_n = \begin{cases} c_1 r_1^n + c_2 r_2^n + \overline{f}_n & \text{οταν η χ.ε. εχει δυο απλες ριζες,} \\ c_1 r_1^n + c_2 n r_1^n + \overline{f}_n & \text{οταν η χ.ε. εχει διπλη ριζα,} \end{cases}$$

με c_1, c_2 αυθαιρετες σταθερες.

Αποδειξη. Θα εξετασουμε μονο την περιπτωση οπου $\widehat{f}_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ (η περιπτωση $\widehat{f}_n = c_1 r_1^n + c_2 n r_1^n$ αποδεικνυεται παρομοια). Ξερουμε οτι η $\widehat{f}_n$ ικανοποιει την

$$\widehat{f}_n + a_1 \widehat{f}_{n-1} + a_2 \widehat{f}_{n-2} = 0 \tag{12.31}$$

και η $\overline{f}_n$ ικανοποιει την

$$\overline{f}_n + a_1 \overline{f}_{n-1} + a_2 \overline{f}_{n-2} = b_n \tag{12.32}$$

Προσθετοντας τις (12.31) και (12.32) και θετοντας $f_n = \widehat{f}_n + \overline{f}_n$ παιρνουμε

$$
\begin{aligned}
\left(\widehat{f}_n + \overline{f}_n\right) + a_1 \left(\widehat{f}_{n-1} + \overline{f}_{n-1}\right) + a_2 \left(\widehat{f}_{n-2} + \overline{f}_{n-2}\right) &= 0 + b_n = b_n \Rightarrow \\
f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 \overline{f}_{n-2} &= b_n
\end{aligned}
$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

12.1.30. Συνεπεια της παραπανω προτασης ειναι οτι: για να βρουμε την γενικη λυση της μη ομογενους εξισωσης διαφορων, αρκει να επιλυσουμε την προσαρτημενη ομογενη και να *ανακαλυψουμε* μια ειδικη λυση της ομογενους.

12.1.31. Παραδειγμα. Ας βρουμε τον n-στο ορο f_n της $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ που ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 1, \quad \forall n \geq 2 : f_n + 2f_{n-1} - 3f_{n-2} = 2^n. \tag{12.33}$$

Η εξισωση ειναι *μη ομογενης*. Καταρχην βρισκουμε την γενικη λυση της αντιστοιχης ομογενους:

$$g_n + 2g_{n-1} - 3g_{n-2} = 2^n. \tag{12.34}$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

η οποια εχει ριζες $r_1 = 1$, $r_2 = -3$, οποτε η γενικη λυση θα ειναι

$$g_n = c_1 + c_2 (-3)^n .$$

Τωρα *υποθετουμε* οτι η μη ομογενης εχει *καποια* λυση h_n της μορφης

$$h_n = c_3 2^n.$$

Αν αυτο ισχυει, τοτε εχουμε

$$\begin{aligned} &\forall n \geq 2 : h_n + 2h_{n-1} - 3h_{n-2} = 2^n \Rightarrow \\ &\forall n \geq 2 : c_3 2^n + 2c_3 2^{n-1} - 3c_3 2^{n-2} = 2^n \Rightarrow \\ &\forall n \geq 2 : 4c_3 + 4c_3 - 3c_3 = 1 \Rightarrow 5c_3 = 4 \Rightarrow c_3 = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Τωρα, μπορουμε να ελεγξουμε ευκολα, οτι *η γενικη λυση της (12.33) ισουται με την γενικη λυση της (12.34)*. Δηλ. θετοντας

$$g_n + h_n = c_1 + c_2 (-3)^n + \frac{4}{5} 2^n$$

φαινεται ευκολα (*ελεγξε το*) οτι

$$\forall n \geq 2 : (g_n + h_n) + 2 (g_{n-1} + h_{n-1}) - 3 (g_{n-2} + h_{n-}) = 2^n. \tag{12.35}$$

Για να ισχυει η (12.35) και για $n \in \{0, 1\}$ απαιτουμε:

$$\begin{aligned} 1 = g_0 + h_0 = c_1 + c_2 (-3)^0 + \frac{4}{5} 2^0 = c_1 + c_2 + \frac{4}{5}, \\ 1 = g_1 + h_1 = c_1 + c_2 (-3)^1 + \frac{4}{5} 2^1 = c_1 - 3c_2 + \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Λυνοντας το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= \frac{1}{5} \\ c_1 - 3c_2 &= -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

παιρνουμε $c_1 = 0$ και $c_2 = \frac{1}{5}$, οποτε $f_n + 2f_{n-1} - 3f_{n-2} = 2^n$

$$\forall n \geq 0 : f_n = \frac{1}{5} (-3)^n + \frac{4}{5} 2^n$$

ειναι η ζητουμενη λυση της (12.33).

12.1.32. Ασκηση. Βρες την αναδρομικη ακολουθια η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad \forall n \geq 2 : f_n + 3f_{n-1} + 2f_{n-2} = 1.$$

12.1.33. Ασκηση. Βρες την αναδρομικη ακολουθια η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 3, \quad f_1 = -1, \quad \forall n \geq 2 : f_n + 4f_{n-1} + 4f_{n-2} = 3.$$

12.1.34. Ασκηση. Βρες την αναδρομικη ακολουθια η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = -1, \quad \forall n \geq 2 : f_n + f_{n-1} + f_{n-2} = 2^n.$$

12.1.35. Πιθανον τα τελευταια αποτελεσματα να σου θυμιζουν παρομοια απο την επιλυση συστηματων γραμμικων εξισωσεων στην *Γραμμικη Αλγεβρα*. Τα επομενα εδαφια δειχνουν οτι πραγματι υπαρχει μια σχεση μεταξυ της Γραμμικης Αλγεβρας και των εξισωσεων διαφορων.

12.1.36. Ορισμος. Εστω $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ δυο ακολουθιες. Ενας *γραμμικος συνδυασμος των* $\mathbf{g}, \mathbf{h}$ ειναι μια ακολουθια της μορφης

$$\kappa\mathbf{g} + \lambda\mathbf{h}$$

οπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$.

12.1.37. Ορισμος. Εστω $\mathcal{X}$ ενα συνολο ακολουθιων. Λεμε οτι το $\mathcal{X}$ ειναι *διανυσματικος χωρος* ανν

$$\forall \kappa, \lambda \in \mathbb{C} : (\mathbf{g}, \mathbf{h} \in \mathcal{X}) \Rightarrow (\kappa\mathbf{g} + \lambda\mathbf{h} \in \mathcal{X}).$$

Δηλ. ο διανυσματικος χωρος (ακολουθιων) ειναι ενα συνολο (ακολουθιων) το οποιο ειναι κλειστο ως προς γραμμικους συνδυασμους.

12.1.38. Ορισμος. Εστω ακολουθιες $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_M$. Λεμε οτι το συνολο $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_M\}$ ειναι *γραμμικα ανεξαρτητο ανν*

$$c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2 + ... + c_M\mathbf{f}_M = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_M = 0 \tag{12.36}$$

δηλ. *ανν*

$$(\forall n : c_1 f_{1,n} + c_2 f_{2,n} + ... + c_M f_{M,n} = 0) \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_M = 0.$$

Λεμε οτι το $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_M\}$ ειναι *γραμμικα εξαρτημενο* ανν δεν ισχυει η (12.36).

12.1.39. Παραδειγμα. Το $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, οπου $f_1, n = 1$, $f_{2,n} = n$, $f_{3,n} = n^2$, ειναι γραμμικα ανεξαρτητο. Διοτι εαν για καποια c_1, c_2, c_3 ισχυει

$$\forall n : c_1 1 + c_2 n + c_3 n^2 = 0$$

τοτε θα εχουμε (με $n = 0, 1, 2$)

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \\ 0 &= c_1 + c_2 + c_3 \\ 0 &= c_1 + 2c_2 + 4c_3 \end{aligned}$$

Ειναι ευκολο να λυσουμε αυτο το συστημα και να δουμε οτι η μοναδικη του λυση ειναι

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

12.1.40. Παραδειγμα. Το $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, οπου $f_{1,n} = 1$, $f_{2,n} = n$, $f_{3,n} = 2 + 3n$, ειναι γραμμικα εξαρτημενο. Διοτι παιρνοντας $c_1 = 2, c_2 = 3$ και $c_3 = -1$, εχουμε

$$(\forall n : c_1 1 + c_2 n + c_3 (2 + 3n) = 0) \Rightarrow \left(\forall n : \begin{array}{c} c_1 + 2c_3 = 0 \\ n (c_2 + 3c_3) = 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} c_1 + 2c_3 = 0 \\ c_2 + 3c_3 = 0 \end{array}\right).$$

Οποτε αν λαβουμε, π.χ., $c_1 = 6$, $c_2 = -3$, $c_3 = -2$, βλεπουμε οτι

$$\forall n : 6f_{1,n} - 3f_{2,n} - 2f_{3,n} = 0.$$

12.1.41. Ορισμος. Εστω διανυσματικος χωρος (ακολουθιων) $\mathcal{X}$ και ακολουθιες $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, ..., $\mathbf{f}_M$ τετοιες ωστε

1. το συνολο $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_M\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο και
2. καθε $\mathbf{g} \in \mathcal{X}$ μπορει να γραφτει ως γραμμικος συνδυασμος των $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_M$ δηλ.

$$\mathbf{g} = c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2 + ... + c_M\mathbf{f}_M.$$

Τοτε λεμε οτι το $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_M\}$ ειναι μια *βαση* του $\mathcal{X}$.

12.1.42. Συμβολισμος. Στα παρακατω θα γραφουμε την εκφραση

$$\forall n \geq 2 : f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2}$$

και στην μορφη

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{f}\right)$$

οπου

$$\mathbf{L}\left(\cdot\right) = 1\left(\cdot\right) + a_1\left(\cdot\right)_{-1} + a_2\left(\cdot\right)_{-2}.$$

12.1.43. Παραδειγμα. Θετοντας

$$\mathbf{L}\left(\cdot\right) = 1\left(\cdot\right) + 3\left(\cdot\right)_{-1} + 2\left(\cdot\right)_{-2}$$

εχουμε

$$\left(\mathbf{L}\left(\mathbf{f}\right) = \mathbf{0}\right) \Leftrightarrow \left(\forall n \geq 2 : f_n + 3f_{n-1} + 2f_{n-2} = 0\right).$$

Θετοντας

$$\mathbf{L}\left(\cdot\right) = 1\left(\cdot\right) + 1\left(\cdot\right)_{-1} + 1\left(\cdot\right)_{-2}$$

εχουμε

$$\left(\mathbf{L}\left(\mathbf{f}\right) = \mathbf{1}\right) \Leftrightarrow \left(\forall n \geq 2 : f_n + 3f_{n-1} + 2f_{n-2} = 1\right).$$

12.1.44. Θεωρημα. Ο $\mathbf{L}\left(\mathbf{f}\right)$ ειναι ενας *γραμμικος τελεστης*, δηλ. μια συναρτηση $\mathbf{L} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ (οπου το $\mathcal{X}$ ειναι το συνολο ολων των ακολουθιων) και

$$\forall \kappa, \lambda \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{X} : \kappa\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q} \in \mathcal{X}.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

12.1.45. Θεωρημα. Εστω $\mathcal{X}$ το συνολο των λυσεων της

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{f}\right) = \mathbf{0}$$

δηλ. της

$$\forall n \geq 2 : f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} = 0 \tag{12.37}$$

Τοτε το $\mathcal{X}$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος.
Αποδειξη. Εστω οτι $\mathbf{g}$, $\mathbf{h} \in \mathcal{X}$, δηλ. ειναι λυσεις της (12.37). Τοτε εχουμε

$$\forall \kappa, \lambda \in \mathbb{C} : \mathbf{L}\left(\kappa\mathbf{f} + \lambda\mathbf{g}\right) = \mathbf{L}\left(\kappa\mathbf{f}\right) + \mathbf{L}\left(\lambda\mathbf{g}\right) = \kappa\mathbf{L}\left(\mathbf{f}\right) + \lambda\mathbf{L}\left(\mathbf{g}\right) = \kappa\mathbf{0} + \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

το οποιο σημαινει οτι $\kappa\mathbf{f} + \lambda\mathbf{g} \in \mathcal{X}$. Αρα το $\mathcal{X}$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος.

12.1.46. Θεωρημα. Δινεται η ομογενης γραμμικη εξισωση διαφορων 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{f}\right) = \mathbf{0} \tag{12.38}$$

δηλ. η

$$\forall n \geq 2 : f_n + a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} = 0. \tag{12.39}$$

Εστω $\mathcal{X}$ το συνολο των λυσεων της (12.38) και $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ οι θεμελιωδεις λυσεις της (12.38). Τοτε το συνολο $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ ειναι μια βαση του $\mathcal{X}$.
Αποδειξη. Αυτο ειναι αμεση συνεπεια

1. του Θεωρηματος ;;, συμφωνα με το οποιο οτι καθε λυση της $\mathbf{L}(\mathbf{f}) = \mathbf{0}$ μπορφει να γραφτει ως γραμμικος συνδυασμος των θεμελιωδων λυσεων $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$·
2. και του (ευκολα αποδειξιμου) γεγονοτος οτι το $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ ειναι ενα γραμμικα ανεξαρτητο συνολο.

12.1.47. *Ολα τα παραπανω μπορουν να γενικευτουν για την περιπτωση των γραμμικων εξισωσεων διαφορων N-στης ταξης.*

12.1.48. Υπαρχουν τυποι εξισωσεων διαφορων για τις οποιους δεν υπαρχει (ή δεν θα παραθεσουμε εδω) τυποποιημενη μεθοδολογια επιλυσης. Για να υπολογισουμε τις λυσεις τετοιων χρησιμοποιουμε διαφορα τεχνασματα. Αξιζει να σημειωθει οτι ακομη και αν δεν μπορουμε να επιλυσουμε μια εξισωση διαφορων, μπορει να ειμαστε σε θεση να προσδιορισουμε διαφορες ιδιοτητες των λυσεων αυτης. Η σημασια αυτων των παρατηρησεων θα ξεκαθαριστει απο τα επομενα παραδειγματα.

12.1.49. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 1, \qquad f_2 = 2, \quad \forall n \geq 3 : f_n - 6f_{n-1} + 11f_{n-2} - 6f_{n-3} = 0.$$

Η μεθοδολογια επιλυσης ειναι παρομοια με αυτη των γραμμικων εξισωσεων δευτερης ταξης. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

η οποια εχει ριζες $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$. Οποτε η γενικη λυση θα ειναι

$$f_n = c_1 1^n + c_2 3^n + c_3 2^n.$$

Θετοντας $n = 0, 1, 2$ παιρνουμε

$$\begin{aligned} 1 = f_0 = c_1 1^0 + c_2 3^n + c_3 2^n, \\ 1 = f_1 = c_1 1^1 + c_2 3^1 + c_3 2^1, \\ 2 = f_2 = c_1 1^2 + c_2 3^2 + c_3 2^2. \end{aligned}$$

Λυνοντας το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 + 3c_2 + 2c_3 = 1 \\ c_1 + 9c_2 + 4c_3 = 2 \end{aligned}$$

η οποια εχει λυση $c_1 = \frac{3}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = -1$. Οποτε η λυση ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} 3^n - 2^n.$$

12.1.50. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την

$$f_0 = 2, \quad \forall n \geq 1 : f_{n+1} - f_n + n f_{n+1} f_n = 0. \tag{12.40}$$

Η εξισωση ειναι *μη γραμμικη*. Διαιρουμε την (12.40) με $f_{n+1} f_n$ και εχουμε

$$\frac{1}{f_{n+1}} - \frac{1}{f_n} + n = 0. \tag{12.41}$$

Θετουμε $g_n = \frac{1}{f_n}$ και η (12.41) γινεται

$$g_{n+1} - g_n = n.$$

Οποτε

$$\begin{aligned} g_1 - g_0 = 0 \\ g_2 - g_1 = 1 \\ \ldots \\ g_n - g_{n-1} = n - 1. \end{aligned} \tag{12.42}$$

Θετοντας $g_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{2}$ και προσθετοντας κατα μελη τις (12.42) εχουμε

$$g_n = \frac{1}{2} + 1 + 2 + ... + (n-1) = \frac{1}{2} + \frac{(n-1)\,n}{2} = \frac{n^2 - n + 1}{2}.$$

Οποτε

$$\forall n \geq 0 : f_n = \frac{2}{n^2 - n + 1}.$$

12.1.51. Παραδειγμα. Ας βρουμε το οριο της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{2}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = c \in (0,1)\,, \quad \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{\frac{f_n + 1}{2}}.$$

Παρατηρουμε οτι *εαν υπηρχε* το $\lim_{n\to\infty} f_n = \phi$, θα ειχαμε $\phi = \sqrt{\frac{\phi+1}{2}}$ και θα επρεπε να ισχυει $\phi^2 = \frac{\phi+1}{2}$. Αυτη η εξισωση εχει ριζες 1 και $-\frac{1}{2}$. Επειδη η ακολουθια εχει αυστηρα θετικους ορους (γιατι;) υποψιαζομαστε οτι το ζητουμενο οριο ειναι το 1. Για να δειξουμε οτι το οριο οντως υπαρχει θα δειξουμε οτι η ακολουθια ειναι φραγμενη και μονοτονη. Προφανως, για καθε $n \in \mathbb{N}$ ισχυει $f_n > 0$. Θα δειξουμε και οτι για καθε $n \in \mathbb{N}$ ισχυει $f_{n+1} > f_n$. Αυτο ισχυει για $n = 1$, αφου

$$f_1 = \sqrt{\frac{1+c}{2}} > \frac{1+c}{2} > \frac{c+c}{2} = c = f_0$$

(χρησιμοποιησαμε οτι $b \in (0,1) \Rightarrow b < \sqrt{b}$). Εστω οτι ισχυει για καθε $n \in \{1, 2, ..., k\}$. Τοτε

$$f_{k+2} = \sqrt{\frac{f_{k+1} + 1}{2}} > \sqrt{\frac{f_k + 1}{2}} = f_{k+1}$$

οποτε για καθε $n \in \mathbb{N}$ ισχυει $f_{n+1} > f_n$. Αρα η ακολουθια ειναι γνησιως αυξουσα. Μενει να βρουμε ενα ανω φραγμα. Πραγματι

$$f_k < 1 \Rightarrow \frac{f_k + 1}{2} < 1 \Rightarrow f_{k+1} = \sqrt{\frac{f_k + 1}{2}} < \sqrt{1} = 1.$$

Αυτο, σε συνδυασμο με το $f_1 = c < 1$, δειχνει οτι για καθε $n \in \mathbb{N}$ ισχυει$f_n < 1$. Τελικα λοιπον η ακολουθια ειναι φραγμενη και γνησιως αυξουσα οποτε εχει οριο $\lim f_n = \phi$ το οποιο ικανοποιει

$$\lim f_n = \lim \sqrt{\frac{f_{n-1} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\lim f_{n-1} + 1}{2}} \Rightarrow$$
$$\phi = \sqrt{\frac{\phi + 1}{2}} \Rightarrow 2\phi^2 = \phi + 1 \Rightarrow \phi = 1.$$

12.1.52. Παραδειγμα. Ας βρουμε το οριο της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{2}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = 2, \quad \forall n \geq 0 : f_{n+1} = 2 - \frac{1}{f_n}.$$

Πρωτα θα δειξουμε επαγωγικα οτι ισχυει

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n > 1.$$

Αυτο ισχυει για $n = 1$ και εστω οτι ισχυει και για καθε $n \in \{1, 2, ..., k\}$. Τοτε

$$f_k > 1 \Rightarrow \frac{1}{f_k} < 1 \Rightarrow -\frac{1}{f_k} > -1 \Rightarrow f_{k+1} = 2 - \frac{1}{f_k} > 2 - 1 = 1.$$

Τωρα θα δειξουμε επαγωγικα οτι για καθε $n \in \mathbb{N}$ ισχυει $f_n > f_{n+1}$. Εχουμε

$$f_1 = 2 > \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2} = f_2,$$

αρα ισχυει για $n = 1$. Εστω οτι ισχυει και για καθε $n \in \{1, 2, ..., k\}$. Τοτε

$$f_{k+1} < f_k \Rightarrow \frac{1}{f_{k+1}} > \frac{1}{f_k} \Rightarrow f_{k+2} = 2 - \frac{1}{f_{k+1}} < 2 - \frac{1}{f_k} = f_{k+1}.$$

Αρα, η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι γνησιως φθινουσα και φραγμενη (γιατι;):

$$\forall n \geq 0 : 1 < f_n < 2.$$

Οποτε η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι και συγκλινουσα. Θετω $\phi = \lim_{n\to\infty} f_n$. Τοτε

$$\lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{f_n}\right) \Rightarrow \phi = 2 - \frac{1}{\phi} \Rightarrow \phi^2 = 2\phi - 1.$$

Λυνοντας την εξισωση $\phi^2 = 2\phi - 1$ βλεπουμε οτι εχει μοναδικη ριζα την $\phi = 1$. Αρα $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$.

12.1.53. Παραδειγμα. Θα μελετησουμε την ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = \frac{1}{4}, \quad \forall n \geq 1 : f_n = \frac{1}{2} f_{n-1}^2 + \frac{1}{8}.$$

Προφανως για καθε $n \geq 0$ ισχυει $f_n > 0$. Θα δειξουμε επαγωγικα οτι για καθε $n \geq 0$

$$f_{n+1} < f_n. \tag{12.43}$$

Εχουμε

$$f_1 = \frac{1}{2} f_0^2 + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} < \frac{1}{4} = f_0$$

οποτε η (12.43) ισχυει για $n = 0$. Εστω οτι ισχυει για $n \in \{0, 1, ..., k\}$. Οποτε

$$f_k < f_{k-1} \Rightarrow \frac{1}{2} f_k^2 + \frac{1}{8} < \frac{1}{2} f_{k-1}^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow f_{k+1} < f_k.$$

Αρα η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι γνησιως φθινουσα. Αφου ειναι και θετικη, συμπεραινουμε οτι για καθε $n \geq 0$

$$0 < f_n \leq \frac{1}{4}. \tag{12.44}$$

Αφου η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι φραγμενη και μονοτονη, η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι συγκλινουσα. Εστω

$$\phi = \lim_{n\to\infty} f_n \in \left[0, \frac{1}{4}\right]. \tag{12.45}$$

Τοτε

$$f_{n+1} = \frac{1}{2} f_n^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} f_n^2 + \frac{1}{8}\right) \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{2}\phi^2 - \phi + \frac{1}{8} = 0.$$

Οι ριζες της $\frac{1}{2}\phi^2 - \phi + \frac{1}{8} = 0$

$$\phi_1 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} > \frac{1}{4},$$
$$\phi_2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} < \frac{1}{4}.$$

Λογω της (12.45) συμπεραινουμε οτι

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}.$$

12.2 Λυμενα Προβληματα

12.2.1. Αποδειξε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = 2, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{2}{3} f_n$$

ειναι γνησιως φθινουσα.
Λυση. Προφανως, για καθε $n \in \mathbb{N}$, ισχυει $f_{n+1} = \frac{2}{3} f_n < f_n$.

12.2.2. Βρες τον n-στο ορο της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$f_0 = 5, \quad \forall n \geq 0 : f_{n+1} + 2 f_n = 0.$$

Λυση. Εχουμε

$$\forall n \geq 1 : f_n = c \left(-2\right)^n .$$

Για $n = 0$ πρεπει να εχουμε

$$5 = f_0 = c \left(-2\right)^0 \Rightarrow c = 5.$$

Ωστε ο n-στος ορος της ακολουθιας ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = 5 \cdot \left(-2\right)^n .$$

12.2.3. Βρες τον n-στο ορο της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$f_0 = 6, \quad \forall n \geq 0 : f_{n+1} + f_n = 2.$$

Λυση. Εχουμε τον γενικο τυπο της λυσης

$$\forall n \geq 1 : f_n = c \left(-1\right)^n + 2 \left(1 - 1 + 1 - ... + \left(-1\right)^{n-1}\right) \Rightarrow$$

$$\forall n \geq 1 : f_n = c \left(-1\right)^n + 2 \frac{1 - \left(-1\right)^n}{2} = c \left(-1\right)^n + \left(1 - \left(-1\right)^n\right).$$

Για να ισχυει ο τυπος και για $n = 0$ πρεπει να εχουμε

$$6 = f_0 = c \left(-1\right)^0 + 3 \left(1 - \left(-1\right)^0\right) \Rightarrow 6 = c.$$

Οποτε ο n-στος ορος της ακολουθιας ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = 5 \left(-1\right)^n + 1.$$

12.2.4. Βρες τον n-στο ορο της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \quad \forall n \geq 2 : f_{n+2} - \frac{3}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n = 0. \tag{12.46}$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 - \frac{3}{2} r + \frac{1}{2}$$

με ριζες $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{1}{2}$. Ο n-στος ορος ειναι

$$f_n = c_1 1^n + c_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

και για να ικανοποιουνται οι αρχικες συνθηκες θα πρεπει να εχουμε

$$1 = c_1 + c_2$$
$$1 = c_1 + \frac{c_2}{2}$$

οποτε $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ και

$$\forall n \geq 0 : f_n = 1.$$

12.2.5. Βρες τον n-στο ορο της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = -1, \quad f_1 = 2, \quad \forall n \geq 2 : f_n + 2f_{n-1} + f_{n-2} = 0. \tag{12.47}$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση της (12.47) ειναι

$$r^2 + 2r + 1 = 0$$

με διπλη ριζα $r_1 = r_2 = -1$. Η γενικη λυση ειναι

$$\forall n \geq 2 : c_1 (-1)^n + c_2 n (-1)^n \tag{12.48}$$

και για $n \in \{0, 1\}$ θελουμε

$$\begin{aligned} -1 = f_0 = c_1 (-1)^0 + c_2 0 (-1)^0 = c_1, \\ 2 = f_1 = c_1 (-1)^1 + c_2 (-1)^2 = -c_1 - c_2 \end{aligned}$$

οποτε $c_1 = -1$, $c_2 = -1$ και

$$\forall n \geq 0 : f_n = -(1 + n)(-1)^n .$$

12.2.6. Βρες τον n-στο ορο της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 0, \quad \forall n \geq 2 : f_n + f_{n-1} + f_{n-2} = 1. \tag{12.49}$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση της αντιστοιχης ομογενους

$$g_n + g_{n-1} + g_{n-2} = 0$$

ειναι

$$r^2 + r + 1 = 0$$

με ριζες $r_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $r_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ και η γενικη λυση ειναι

$$\forall n \geq 2 : g_n = c_1 \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^n . \tag{12.50}$$

Για την ειδικη λυση της μη ομογενους υποθετουμε $h_n = c_3$ και εχουμε

$$h_n + h_{n-1} + h_{n-2} = 1 \Rightarrow 3c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = \frac{1}{3}$$

Οποτε η γενικη λυση της μη ομογενους θα ειναι

$$f_n = g_n + h_n = c_1 \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^n + \frac{1}{3}$$

και οι αρχικες συνθηκες δινουν

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = 1 \\ c_1 \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^1 + \frac{1}{3} = 0 \end{aligned}$$

με λυση $c_1 = c_2 = \frac{1}{3}$, οποτε

$$\forall n \geq 0 : f_n = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^n + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \right)^n + 1 \right).$$

12.2.7. Βρες τον n-στο ορο f_n της $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 1, \qquad f_2 = 2, \quad \forall n \geq 3 : f_n - 7f_{n-1} + 16f_{n-2} - 12f_{n-3} = 0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$$

η οποια εχει ριζες $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. Οποτε η γενικη λυση θα ειναι

$$f_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3 3^n.$$

Θετοντας $n = 0, 1, 2$ παιρνουμε

$$\begin{aligned} 1 = f_0 &= c_1 2^0 + c_2 \cdot 0 \cdot 2^0 + c_3 3^0, \\ 1 = f_1 &= c_1 2^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 2^1 + c_3 3^1, \\ 2 = f_2 &= c_1 2^2 + c_2 \cdot 2 \cdot 2^2 + c_3 3^2. \end{aligned}$$

Λυνοντας το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 1 \\ 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 1 \\ 4c_1 + 8c_2 + 9c_3 &= 2 \end{aligned}$$

η οποια εχει λυση $c_1 = -1$, $c_2 = -\frac{3}{2}$, $c_3 = 2$. Οποτε η λυση ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = -2^n - \frac{3}{2} n 2^n + 2 \cdot 3^n.$$

12.2.8. Βρες τον n-στο ορο f_n της $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \quad \forall n \geq 3 : f_n + \frac{4}{3} f_{n-1} + \frac{7}{12} f_{n-2} + \frac{1}{12} f_{n-3} = 0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^3 + \frac{4}{3} r^2 + \frac{7}{12} r + \frac{1}{12} = 0$$

η οποια εχει ριζες $r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$, $r_3 = -\frac{1}{3}$. Οποτε η γενικη λυση θα ειναι

$$f_n = c_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + c_2 n \left(-\frac{1}{2}\right)^n + c_3 \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Θετοντας $n = 0, 1, 2$ παιρνουμε το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 1 \\ -\frac{1}{2} c_1 - \frac{1}{2} c_2 - \frac{1}{3} c_3 &= 0 \\ \frac{1}{4} c_1 + \frac{1}{2} c_2 + \frac{1}{9} c_3 &= 0 \end{aligned}$$

με λυση $c_1 = -8$, $c_2 = 2$, $c_3 = 9$. Οποτε η λυση ειναι

$$\forall n \geq 0 : f_n = -8 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2n \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 9 \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

12.2.9. Βρες τον n-στο ορο f_n της $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 1, \quad \forall n \geq 2 : f_n - 5f_{n-1} + 6f_{n-2} = n. \tag{12.51}$$

Λυση. Η αντιστοιχη ομογενης ειναι

$$g_n - 5g_{n-1} + 6g_{n-2} = 0. \tag{12.52}$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

με ριζες $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, οποτε η γενικη λυση θα ειναι

$$g_n = c_1 2^n + c_2 3^n.$$

Τωρα υποθετουμε οτι η μη ομογενης εχει *καποια* λυση h_n της μορφης

$$h_n = c_3 n + c_4.$$

Αν αυτο ισχυει, τοτε εχουμε

$$\begin{aligned}
&\forall n \geq 2 : h_n - 5h_{n-1} + 6h_{n-2} = n \Rightarrow \\
&\forall n \geq 2 : c_3 n + c_4 - 5\left(c_3\left(n-1\right) + c_4\right) + 6\left(c_3\left(n-2\right) + c_4\right) = n \Rightarrow \\
&\forall n \geq 2 : \left(c_3 - 5c_3 + 6c_3\right) n + \left(c_4 + 5c_3 - 5c_4 - 12c_3 + 6c_4\right) = n
\end{aligned}$$

που δινει το συστημα

$$\begin{aligned}
2c_3 &= 1 \\
-7c_3 + 2c_4 &= 0
\end{aligned}$$

με λυσεις $c_3 = \frac{1}{2}$, $c_4 = \frac{7}{4}$. Οποτε της μη ομογενους ειναι

$$f_n = c_1 2^n + c_2 3^n + \frac{n}{2} + \frac{7}{4}.$$

Χρησιμοποιωντας και τις αρχικες συνθηκες $f_0 = f = 1$ τελικα παιρνουμε

$$\forall n \geq 0 : f_n = -2^n + \frac{1}{4} 3^n + \frac{n}{2} + \frac{7}{4}.$$

12.2.10. Βρες τον n-στο ορο f_n της $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ που ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 2, \quad \forall n \geq 2 : f_{n+2} = \frac{f_{n+1}^3}{f_n^2}. \tag{12.53}$$

Λυση. Η εξισωση ειναι μη γραμμικη. Επειδη $f_0 > 0$, $f_1 > 0$ ισχυει

$$\forall n \geq 0 : f_n > 0.$$

Λογαριθμιζουμε την (12.53) ως προς 2 και θετουμε $g_n = \log_2 f_n$ οποτε εχουμε

$$g_0 = 0, \qquad g_1 = 1, \quad \forall n \geq 2 : g_{n+2} - 3g_{n+1} + 2g_n = 0.$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι $r^2 - 3r + 2 = 0$ με ριζες $r_1 = 2$, $r_2 = 1$. Χρησιμοποιωντας και τις αρχικες συνθηκες παιρνουμε

$$\begin{aligned}
&\forall n \geq 0 : g_n = 2^n - 1 \Rightarrow \\
&\forall n \geq 0 : f_n = 2^{2^n - 1}.
\end{aligned}$$

12.2.11. Μελετησε την ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = 1, \quad \forall n \geq 1 : f_n = \sqrt{1 + f_{n-1}}.$$

Λυση. Προφανως για καθε $n \geq 0$ ισχυει $f_n > 0$. Θα δειξουμε επαγωγικα οτι για καθε $n \geq 0$

$$f_{n+1} > f_n. \tag{12.54}$$

Εχουμε

$$f_1 = \sqrt{1 + f_0} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} > 1 = f_0$$

οποτε η (12.54) ισχυει για $n = 0$. Εστω οτι ισχυει για $n \in \{0, 1, ..., k\}$. Οποτε

$$f_k > f_{k-1} \Rightarrow \sqrt{1 + f_k} > \sqrt{1 + f_{k-1}} \Rightarrow f_{k+1} > f_k.$$

Αρα η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι γνησιως αυξουσα. Κατοπιν θα δειξουμε επαγωγικα οτι για καθε $n \geq 0$

$$0 < f_n < 2. \tag{12.55}$$

Αυτο προφανως ισχυει για $n = 0$. Εστω οτι ισχυει για $n \in \{0, 1, ..., k\}$. Οποτε

$$0 < f_{k+1} = \sqrt{1 + f_k} < \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3} < 2.$$

Αρα η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι φραγμενη απο το 0 και το 2. Αφου ειναι φραγμενη και μονοτονη, η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι συγκλινουσα. Εστω

$$\phi = \lim_{n\to\infty} f_n \in [0, 2]. \tag{12.56}$$

Τοτε

$$f_{n+1} = \sqrt{1 + f_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + f_n} \Rightarrow \phi = \sqrt{1 + \phi} \Rightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Οι ριζες της $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ ειναι

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} > 0, \qquad \phi_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} < 0.$$

Λογω της (12.56) συμπεραινουμε οτι

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

12.2.12. Μελετησε την ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = 3, \quad \forall n \geq 1 : f_n = \frac{1}{2} f_{n-1} + \frac{3}{2 f_{n-1}}.$$

Λυση. Καταρχην θα δειξουμε οτι για καθε $n \geq 0$ ισχυει $f_n \geq \sqrt{3}$. Προφανως $f_n > 0$ και

$$\left(f_{n-1} - \sqrt{3}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow f_{n-1}^2 + 3 \geq 2 f_{n-1}\sqrt{3} \Rightarrow f_n = \frac{f_{n-1}^2 + 3}{2 f_{n-1}} \geq \sqrt{3}.$$

Κατοπιν δειχνουμε επαγωγικα οτι $f_n - f_{n-1} < 0$. Για $n = 0$ εχουμε

$$f_1 - f_0 = \frac{3}{2} + \frac{3}{6} - 3 = -1 < 0.$$

Εστω οτι ισχυει και για $n \in \{0, 1, 2..., k\}$. Τωρα

$$f_{k+1} - f_k = \frac{f_k^2 + 3}{2 f_k} - f_k = \frac{3 - f_k^2}{2 f_k} \leq \frac{3 - \sqrt{3}^2}{2 f_k} \leq 0$$

και απεδειχθη το ζητουμενο. Οποτε η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι φθινουσα και φραγμενη, αρα εχει οριο $\phi = \lim_{n\to\infty} f_n$, το οποιο θα ικανοποιει

$$\phi = \frac{\phi^2 + 3}{2\phi}.$$

Οποτε θα εχουμε $2\phi^2 = \phi^2 + 3 \Rightarrow \phi = \pm\sqrt{3}$, αλλα η αρνητικη τιμη απορριπτεται. Οποτε τελικα $\lim_{n\to\infty} f_n = \sqrt{3}$.

12.2.13. Μελετησε την ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = 1, \quad \forall n \geq 1 : f_n = \sqrt{2 + 3f_{n-1}}.$$

Λυση. Προφανως $f_n > 0$. Επισης θα δειξουμε οτι επαγωγικα οτι για καθε $n \geq 0$ ισχυει $f_n < 6$. Πραγματι ισχυει για $n = 0$ και εστω οτι ισχυει και για $n \in \{0, 1, 2..., k\}$. Τωρα εχουμε

$$f_k < 6 \Rightarrow 2 + 3f_k < 20 \Rightarrow f_{k+1} = \sqrt{2 + 3f_k} < \sqrt{20} < 6.$$

Ειναι ευκολο να δειξουμε επαγωγικα οτι $f_n < f_{n+1}$. Αυτο ισχυει για $n = 0$ (αφου $1 < \sqrt{5}$) και εστω οτι ισχυει για $n \in \{0, 1, 2..., k\}$. Τοτε εχουμε

$$f_k < f_{k+1} \Rightarrow 2 + 3f_k < 2 + 3f_{k+1} \Rightarrow f_{k+1} = \sqrt{2 + 3f}_k < \sqrt{2 + 3f_{k+1}} = f_{k+2}.$$

Οποτε η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι αυξουσα και φραγμενη, αρα εχει οριο $\phi = \lim_{n\to\infty} f_n$, το οποιο θα ικανοποιει

$$\phi = \sqrt{2 + 3\phi}.$$

Οποτε θα εχουμε $\phi^2 = 2+3\phi$, με ριζες $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{17}$ αλλα η αρνητικη ριζα απορριπτεται. Οποτε τελικα $\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{3+\sqrt{17}}{3}$.

12.2.14. Μελετησε την ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = \frac{1}{4}, \quad \forall n \geq 1 : f_n = \frac{1}{2}f_{n-1}^2 + \frac{1}{8}.$$

Λυση. Προφανως για καθε $n \geq 0$ ισχυει $f_n > 0$. Θα δειξουμε επαγωγικα οτι για καθε $n \geq 0$

$$f_{n+1} < f_n. \tag{12.57}$$

Εχουμε

$$f_1 = \frac{1}{2}f_0^2 + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} = \frac{3}{16} < \frac{1}{4} = f_0$$

οποτε η (12.57) ισχυει για $n = 0$. Εστω οτι ισχυει για $n \in \{0, 1, ..., k\}$. Οποτε

$$f_k < f_{k-1} \Rightarrow \frac{1}{2}f_k^2 + \frac{1}{8} < \frac{1}{2}f_{k-1}^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow f_{k+1} < f_k.$$

Αρα η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι γνησιως φθινουσα. Αφου ειναι και θετικη, συμπεραινουμε οτι για καθε $n \geq 0$

$$0 < f_n \leq \frac{1}{4}. \tag{12.58}$$

Αφου η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι φραγμενη και μονοτονη, η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι συγκλινουσα. Εστω

$$\phi = \lim_{n\to\infty} f_n \in \left[0, \frac{1}{4}\right]. \tag{12.59}$$

Τοτε

$$f_{n+1} = \frac{1}{2}f_n^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}f_n^2 + \frac{1}{8}\right) \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{2}\phi^2 - \phi + \frac{1}{8} = 0.$$

Οι ριζες της $\frac{1}{2}\phi^2 - \phi + \frac{1}{8} = 0$

$$\phi_1 = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} > \frac{1}{4},$$
$$\phi_2 = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} < \frac{1}{4}.$$

Λογω της (12.59) συμπεραινουμε οτι

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}.$$

12.2.15. Αποδειξε οτι η ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$f_0 = 6, \quad \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{3 + f_n}$$

ειναι γνησιως φθινουσα ενω η $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$g_0 = 1, \quad \forall n \geq 0 : g_{n+1} = \sqrt{3 + g_n}$$

ειναι γνησιως αυξουσα. Κατοπιν αποδειξε οτι οι δυο ακολουθιες συγκλινουν στο ιδιο οριο.
Λυση. Ισχυουν τα εξης.

1. Προφανως καθε ορος της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι θετικος. Θα δειξουμε επαγωγικα οτι, για καθε $n \in \mathbb{N}$, ισχυει $f_{n+1} < f_n$. Εχουμε για $n = 0$

$$f_1 = \sqrt{3+6} = 3 < 6 = f_0.$$

Εστω οτι για καθε $n \in \{0, 1, ..., k\}$ εχουμε $f_{n+1} < f_n$. Τοτε

$$3 + f_{k+1} < 3 + f_k \Rightarrow \sqrt{3 + f_{k+1}} < \sqrt{3 + f_k} \Rightarrow f_{k+2} < f_{k+1}.$$

Αρα η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι γνησιως φθινουσα.

2. Επομενως εχουμε

$$0 < .... < f_3 < f_2 < f_1.$$

Αρα υπαρχει το $\phi = \lim_{n\to\infty} f_n$. Εχουμε

$$f_{n+1} = \sqrt{3 + f_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{3 + f_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_{n+1} = \sqrt{3 + \lim_{n\to\infty} f_n}$$
$$\Rightarrow \phi = \sqrt{3 + \phi} \Rightarrow \phi^2 = 3 + \phi.$$

Η εξισωση $\phi^2 = 3 + \phi$ εχει ριζες $\phi_1 = \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}$, $\phi_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$. Η αρνητικη ριζα ϕ_2 απορριπτεται και τελικα συμπεραινουμε οτι

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}.$$

3. Προφανως καθε ορος της $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι θετικος. Θα δειξουμε επαγωγικα οτι, για καθε $n \in \mathbb{N}$, ισχυει $g_{n+1} > g_n$. Εχουμε για $n = 0$

$$g_1 = \sqrt{3+1} = 2 > 1 = g_0.$$

Εστω οτι για καθε $n \in \{0, 1, ..., k\}$ εχουμε $g_{n+1} > g_n$. Τοτε

$$3 + g_{k+1} > 3 + g_k \Rightarrow \sqrt{3 + g_{k+1}} > \sqrt{3 + g_k} \Rightarrow g_{k+2} > g_{k+1}.$$

Αρα η $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι γνησιως αυξουσα. Επισης αποδεικνυεται ευκολα οτι

$$\forall n \geq 0 : g_n \leq 5.$$

4. Επομενως εχουμε

$$0 < g_1 < g_2 < g_3 < .... < 5.$$

Αρα υπαρχει το $\gamma = \lim_{n\to\infty} g_n$. Εχουμε, οπως και για το ϕ, οτι

$$\lim_{n\to\infty} g_{n+1} = \sqrt{3 + \lim_{n\to\infty} g_n} \Rightarrow \gamma = \sqrt{3 + \gamma} \Rightarrow \gamma^2 = 3 + \gamma.$$

Η εξισωση $\gamma^2 = 3 + \gamma$ εχει ριζες $\gamma_1 = \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2}$, $\gamma_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$. Η αρνητικη ριζα γ_2 απορριπτεται και τελικα συμπεραινουμε οτι

$$\lim_{n\to\infty} g_n = \frac{1}{2}\sqrt{13} + \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

12.3 Αλυτα Προβληματα

12.3.1. Εξετασε εαν η ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι μονοτονη.

1. $f_0 = 5,\ \forall n \geq 1 : f_n = \frac{1}{2} f_{n-1}$.
2. $f_0 = 5,\ \forall n \geq 1 : f_n = \frac{1}{2} f_{n-1} + 3$.
3. $f_0 = 3,\ \forall n \geq 1 : f_n = 2 f_{n-1}$.
4. $f_0 = 5,\ f_1 = 2,\ \forall n \geq 2 : f_{n+2} + 3f_{n+1} + 2f_n = 0$.
5. $f_0 = 5,\ f_1 = 2,\ \forall n \geq 2 : f_{n+2} + 3f_{n+1} + 2f_n = 1$.

12.3.2. Να βρεθει ο ορος f_n της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$.

1. $f_0 = -3, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = 8f_n$. *Απ.* $f_n = -3 \cdot 8^n$.
2. $f_0 = 7, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = 5f_n - 6$. *Απ.* $f_n = \frac{17}{2} 5^n - \frac{3}{2}$.
3. $f_0 = 3, f_1 = -1, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = 3f_{n+1} - 2f_n$. *Απ.* $f_n = 7 - 2^{n+2}$.
4. $f_0 = 1, f_2 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = -f_n$. *Απ.* $f_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right) i^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\right) (-i)^n$.
5. $f_0 = 1, f_1 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = -2f_{n+1} - 2f_n$. *Απ.* $f_n = \left(\frac{1}{2} + i\right) (-1 - i)^n + \left(\frac{1}{2} - i\right) (-1 + i)^n$.
6. $f_0 = 3, f_1 = 5, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = 2f_{n+1} - f_n$.*Απ.* $f_n = 3 + 2n$.
7. $f_0 = 3, f_1 = -1, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = 3f_{n+1} - 2f_n + 1$. *Απ.* $f_n = 6 - 3 \cdot 2^n - n$.
8. $f_0 = 1, f_2 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = 1 - f_n$. *Απ.* $f_n = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} i\right) i^{n^2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} i\right) (-i)^n + \frac{1}{2}$.
9. $f_0 = 3, f_1 = 5, \forall n \geq 0 : f_{n+2} = 2f_{n+1} - f_n + 2^n$. *Απ.* $f_n = 2 + n + 2^n$.
10. $f_0 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt[3]{3f_n}$. *Απ.* $f_n = 3^{\left(\frac{1-3^{(-n)}}{2}\right)}$.

12.3.3. Να βρεθει ο ορος f_n της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$.

1. $\forall n \geq 0 : f_{n+2} = \frac{f_{n+1} + f_n}{2}$. .
2. $\forall n \geq 0 : f_{n+2} = \frac{f_{n+1} + f_n}{2} + 1$.
3. $\forall n \geq 0 : f_{n+1} + f_n = f_n f_{n+1}$.
4. $\forall n \geq 0 : f_{n+1} f_n = 2f_n + 1$.
5. $\forall n \geq 0 : f_{n+2} = f_n f_{n+1}$.
6. $\forall n \geq 0 : f_{n+1} = 2f_n^2 - 1$.
7. $\forall n \geq 1 : f_n^2 = \frac{1}{f_{n-1} f_{n+1}}$.
8. $\forall n \geq 0 : f_{n+1}^2 - 5f_n f_{n+1} + 6f_n^2 = 0$.
9. $\forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{1 - f_n^2}$.

12.3.4. Να βρεθει (αν υπαρχει) το οριο $\lim_{n \to \infty} f_n$ της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$.

1. $f_0 = \sqrt{2}, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{2 + f_n}$. *Απ.* 2.
2. $f_0 = \sqrt{2}, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{2 f_n}$. *Απ.* 2.

3. $f_0 = 2, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{f_n^2 - f_n + 1}{f_n}$. *Απ.* 1.

4. Με $\theta \in \left(0, \frac{1}{4}\right) : f_0 = \frac{2}{3}$, $\forall n \geq 0 : f_{n+1} = f_n^2 + \theta$. *Απ.* $\frac{1-\sqrt{1-4\theta}}{2}$.

5. Με $\theta \in (-1, 0) : f_0 = \theta, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = f_n + f_n^2$.

6. $f_0 = c, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = f_n + \frac{2 - f_n^2}{2 f_n}$. *Απ.* $\sqrt{2}$.

7. $f_0 = 2, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{4}{3 + f_n^2}$. *Απ.* 1.

8. $f_0 = c > 0, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + f_n^2}$. *Απ.* $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. $f_0 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f_n^4 + 16 f_n}{4 + f_n^3}$. *Απ.* 2.

10. $f_0 = \frac{1}{2}, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = (1 - f_n)^2$.*Απ.* Το οριο δεν υπαρχει.

12.3.5. Να βρεθει (αν υπαρχει, για διαφορες τιμες του $\xi > 1$) το οριο $\lim_{n\to\infty} f_n$ της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = \xi, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = f_n^2 - 2 f_n + 2.$$

Απ. (α) Για $\xi < 2$: $\lim_{n\to\infty} f_n = 1$, (β) για $\xi \geq 2$: $\lim_{n\to\infty} f_n = 2$.

12.3.6. Δινονται a, b τετοιοι ωστε $\frac{b-a}{b+a} \in (-1, 1)$. Να βρεθει (αν υπαρχει) το οριο $\lim_{n\to\infty} f_n$ της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{a + b f_n}{b + a f_n}.$$

Απ. 1.

12.3.7. Εστω ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$f_0 = a, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{A}{f_n(a)}\right).$$

Μελετησε την συγκλιση της $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ σε σχεση με τις τιμες των a και A.

12.3.8. Εστω ακολουθια $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει

$$h_0 = a, \forall n \geq 0 : h_{n+1} = \sqrt{A + h_n}.$$

Μελετησε την συγκλιση της $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ σε σχεση με τις τιμες των a και A.

12.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

12.4.1. Βρες τον ορο f_n της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$.

1. $f_0 = 1, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = n + (n+1) f_n$.

2. $f_0 = 2, \forall n \geq 0 : f_{n+1}^3 = 3 f_n$.

3. $\forall n \geq 0 : f_n + 2 f_{n+1} = f_n f_{n+1}$.

4. $\forall n \geq 0 : f_n f_{n+1} = f_n + 1$.

5. $f_0 = a > 0, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{b}{f_n}\right)$.

6. $f_0 = 0, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = \sqrt{2 + f_n}$.

12.4.2. Υπολογισε (αν υπαρχει) το $\lim_{n\to\infty} f_n$ της ακολουθιας $(f_n)_{n=0}^{\infty}$.

1. $\forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{a}{f_n} - 1 \quad$ (με $a > 0$).

2. $f_0 = a > 0, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt[n+2]{1 + (f_n)^{n+1}} \quad$ (με $a > 0$).

3. $f_0 = 1, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = \frac{(n-1)}{(n+1) f_n + 1}$.

4. $f_0 = 1, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = \frac{(n-1)}{(n+1) f_n + 1}$.

5. $f_0 = 2, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = \frac{f_n^2 - f_n + 1}{f_n}$. *Απ.* 1.

6. $f_0 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = f_n + \frac{2+f_n}{1+3f_n}$. *Απ.* -2.

7. $f_0 = c \in (0,1), \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{2+f_n}{3+4f_n}$.*Απ.* $1/2$.

8. $f_0 = a > 0, f_1 = b > 0, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = \sqrt{f_n f_{n-1}}$.

9. $f_0 = a > 0, f_1 = b > 0, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{f_n} + \frac{1}{f_{n-1}}}$.

10. $f_0 = c_1, \quad f_1 = c_2, \forall n \geq 1 : f_{n+2} + a_1 f_{n+1} + a_0 f_n = b$.

12.4.3. Η ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ικανοποιει

$$\forall n \geq 1 : f_{n+1} = (n+2) f_n - n f_{n-1}.$$

Δειξε οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{n!} = f_2 (e-2) - f_1 (e-5)$.

12.4.4. Οι ακολουθιες $(f_n)_{n=0}^{\infty}$, $(g_n)_{n=0}^{\infty}$, $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ ικανοποιουν

$$f_0 = a > 0, \qquad g_0 = b > 0, \qquad h_0 = c > 0,$$

$$f_{n+1} = \frac{f_n + g_n + h_n}{3}, \quad g_{n+1} = \sqrt[3]{f_n g_n h_n}, \quad h_{n+1} = \frac{3}{\frac{1}{f_n} + \frac{1}{g_n} + \frac{1}{h_n}}.$$

Δειξε οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} h_n$.

12.4.5. Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = c > 0, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{a f_n + b}.$$

Δειξε οτι υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} f_n$ και ισουται με την θετικη ριζα της εξισωσης $x^2 - ax - b = 0$.

12.4.6. Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = c > 0, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \sqrt{a f_n^2 + b},$$

οπου $a \in (0,1)$. Δειξε οτι $\lim_{n\to\infty} f_n = \sqrt{\frac{b}{1-a}}$.

12.4.7. Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \quad f_{n+1} = 1 + \frac{1}{f_n}.$$

Δηλαδη

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1 + \frac{1}{1}, \quad f_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}, \quad ..., \quad f_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{f_n}}, \quad ... .$$

Δειξε οτι υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} f_n$, υπολογισε την τιμη του και σχολιασε την σχεση αυτου με την ακολουθια *Fibonacci*.

12.4.8. Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η ακολουθια *Fibonacci*. Αποδειξε τα παρακατω.

1. $f_{n+2} + f_{n-2} = 3f_n$.
2. $f_{m+1}f_n + f_m f_{n-1} = f_{m+n}$.
3. $f_{2n-1} = f_n^2 + f_{n-1}^2$.
4. $f_0 + f_1 + ... + f_n = f_{n+2} - 1$.
5. $\Phi^n = f_{n-1} + \Phi f_n$.
6. $f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n$.
7. $(f_n)^2 - f_{n+1}f_{n-1} = (-1)^{n-1}$.
8. $(f_n)^2 - f_{n+k}f_{n-k} = (-1)^{n-k}$.

12.4.9. Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η ακολουθια *Fibonacci*. Αποδειξε οτι

$$\frac{x}{1-x-x^2} = f_0 x + f_1 x^2 + f_2 x^3 + ...$$

12.4.10. **(Μαθ. Ολυμπιαδα)** Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1}{f_0 + f_1 + ... + f_n}.$$

Αποδειξε οτι $\lim_{n\to\infty} f_0 + f_1 + ... + f_n = \infty$.

12.4.11. **(Μαθ. Ολυμπιαδα)** Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$\forall n \geq 0 : f_{n+1} = 1 + f_n - \frac{1}{2}(f_n)^2.$$

Αποδειξε οτι, για καθε $n \geq 3$, $\left|x_n - \sqrt{2}\right| < 2^{-n}$.

12.4.12. **(Μαθ. Ολυμπιαδα)** Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 3, \quad f_1 = 4, \quad \forall n \geq 2 : (n+1)(n+2) f_n = 4(n+1)(n+3) f_{n-1} - 4(n+2)(n+3).$$

Υπολογισε τον ορο f_n.

12.4.13. **(Μαθ. Ολυμπιαδα)** Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 0, \forall n \geq 1 : f_{n+1} = af_n + bf_{n-1}.$$

Δειξε οτι η ποσοτητα $f_n^2 - f_{n+1}f_{n-1}$ δεν εξαρταται απο το a.

12.4.14. **(Μαθ. Ολυμπιαδα)** Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$f_0 = 1, \forall n \geq 0 : f_{n+1} = \frac{1 + 4f_n + \sqrt{1 + 24f_n}}{16}.$$

Υπολογισε τον ορο f_n.

12.4.15. **(Μαθ. Ολυμπιαδα)** Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει:

$$\forall m, n \geq 0 : f_{n+m} \leq f_m + f_n.$$

Αποδειξε οτι υπαρχει το $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{n}$.

12.4.16. **(Μαθ. Ολυμπιαδα)** Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποια ικανοποιει: $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi > 0$. Αποδειξε οτι $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n} = \phi$.

13 Σειρες

Μια *σειρα* ειναι το αθροισμα των *απειρων* ορων μιας ακολουθιας. Η σειρα παιζει στην θεωρια των ακολουθιων τον ρολο που παιζει το *ολοκληρωμα* στην θεωρια των συναρτησεων μιας συνεχους μεταβλητης.

13.1 Θεωρια και Παραδειγματα

13.1.1. Ορισμος. Εστω μια ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Σχηματιζουμε μια νεα ακολουθια $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ως εξης:

$$\begin{aligned}
s_1 &= f_1,\\
s_2 &= f_1 + f_2,\\
s_3 &= f_1 + f_2 + f_3,\\
&...,\\
s_N &= f_1 + ... + f_N,\\
&...
\end{aligned}$$

Τα στοιχεια s_1, s_2, s_3, ..., $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$, ... λεγονται *μερικα αθροισματα* (της (f_n)). Το *απειρο αθροισμα* ή *σειρα* οριζεται να ειναι το

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n := \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n$$

Καταχρηστικα, χρησιμοποιουμε τον συμβολισμο $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ακομη και οταν το οριο δεν υπαρχει.

13.1.2. Παραδειγμα. Εστω η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{2^n}$. Σε αυτην αντιστοιχει η σειρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... \,.$$

Με ποιον αριθμο ισουται η παραπανω σειρα;

13.1.3. Ορισμος. Η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ λεγεται *συγκλινουσα* οταν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$. Σε αντιθετη περιπτωση η σειρα λεγεται *αποκλινουσα*. Επισης χρησιμοποιουμε τις εκφρασεις «*η σειρα συγκλινει*» και «*η σειρα αποκλινει*».

13.1.4. Παραδειγμα. Ας εξετασουμε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Αν $a \neq 1$ εχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} a^n = a + a^2 + ... + a^N = a\left(1 + a^2 + ... + a^{N-1}\right) = a\frac{1-a^N}{1-a} \Rightarrow$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \lim_{N\to\infty} a\frac{1-a^N}{1-a}$$

υπο την προυποθεση οτι το οριο υπαρχει. Διακρινουμε τις εξης περιπτωσεις.

1. Αν $a \in (-1,1)$, τοτε $\lim_{N\to\infty} a\frac{1-a^N}{1-a} = \frac{a}{1-a}$ οποτε και $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$.
2. Αν $a = 1$, τοτε $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = (1+1+1+...) = +\infty$.
3. Αν $a \in (1,+\infty)$, τοτε $\lim_{N\to\infty} a\frac{1-a^N}{1-a} = \infty$ οποτε και $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = +\infty$.
4. Αν $a \in (-\infty,-1]$ η $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$ τοτε λεμε οτι η σειρα *ταλαντευεται* (γιατι;).

13.1.5. Παραδειγμα. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

13.1.6. Συμβολισμος. Ο συμβολισμος αθροισματος μπορει να επεκταθει με προφανεις τροπους. Π.χ., αν εχουμε ακολουθια $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ μπορουμε να ορισουμε την σειρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \lim_{N\to\infty} \left(f_0 + f_1 + ... + f_N\right).$$

Γενικοτερα, για καθε συνολο $A \subseteq \mathbb{N}_0$, μπορουμε να ορισουμε την σειρα

$$\sum_{n\in A} f_n$$

εαν οι οροι f_n ειναι ορισμενοι για καθε $n \in A$.

13.1.7. Παραδειγμα. Εστω $A = \{1,3,5,...\}$. Τοτε

$$\sum_{n\in A} f_n = f_1 + f_3 + f_5 + ... \quad .$$

13.1.8. Θεωρημα. Η συγκλιση ή αποκλιση μιας σειρας δεν επηρεαζεται αν πολλαπλασιασουμε ολους τους ορους της με $\kappa \in \mathbb{R}$.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

13.1.9. Θεωρημα. Η συγκλιση ή αποκλιση μιας σειρας δεν επηρεαζεται αν μεταβαλουμε τις τιμες οποιουδηποτε πεπερασμενου αριθμου ορων.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

13.1.10. Θεωρημα. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in \mathbb{R}$, τοτε

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0.$$

Αποδειξη. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = a \in \mathbb{R}$, τοτε

$$f_N = \sum_{n=1}^{N+1} f_n - \sum_{n=1}^{N} f_n \Rightarrow \lim_{N\to\infty} f_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N+1} f_n - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n - \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f - f = 0.$$

13.1.11. Παραδειγμα. Ας δειξουμε οτι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ δεν συγκλινει. Πραγματι, αν αυτη συνεκλινε, θα ειχαμε $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 0$. Αλλα ξερουμε οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

13.1.12. Θεωρημα. Εστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοιες ωστε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in \mathbb{R}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = g \in \mathbb{R}$. Τοτε, για καθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\kappa f_n + c_2 \lambda g_n) = \kappa f + \lambda g.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

13.1.13. Παραδειγμα. Δινεται οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$. Τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{-7}{3^n} \right) = 3 \cdot 1 + (-7) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

13.1.14. Ασκηση. Επεκτεινε το Θεωρημα 13.1.12 οταν καποια απο τα κ, λ, f, g δεν ανηκουν στο $\mathbb{R}$.

13.1.15. Παραδειγμα. Ας εξετασουμε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} n + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \infty + 1 = \infty.$$

13.1.16. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε το $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-n)$. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-n) = \infty - \infty$$

το οποιο ειναι απροσδιοριστο. Παρατηρησε οτι

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(n^2 - n\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n\,(n-1) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} n\,(n-1) = \infty.$$

Αρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} n + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \neq \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 - n\right).$$

13.1.17. Θεωρημα. Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ και $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ τετοιες ωστε

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} g_n = g \in \mathbb{R}.$$

Τοτε

$$fg = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} \right).$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

13.1.18. Θεωρημα. Εστω *μη αρνητικη* ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ (δηλ. $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \geq 0$). Τοτε

$$\text{ειτε } \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in \mathbb{R} \qquad \text{ειτε } \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in +\infty.$$

Αποδειξη. Θεωρησε τα μερικα αθροισματα $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$. Προφανως η $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ ειναι αυξουσα (γιατι;). Υπαρχουν δυο ενδεχομενα.

1. Αν $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ ειναι αυξουσα και φραγμενη, τοτε συγκλινει σε πραγματικο αριθμο.

2. Αν $(s_N)_{N=1}^{\infty}$ ειναι αυξουσα και μη φραγμενη, τοτε αποκλινει (συγκλινει στο $+\infty$).

13.1.19. Παραδειγμα. Θα εξετασουμε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+....$$

Οριζουμε

$$\forall n\in\mathbb{N}: s_n=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}.$$

Προφανως η $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι γνησιως αυξουσα. Επισης εχουμε

$$\begin{aligned}
s_4&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\\
s_8&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{2}+\frac{2}{2}\\
s_{16}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{16}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{16}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Και γενικοτερα

$$s_{2^{m+1}}=\sum_{m=1}^{2^{m+1}}\frac{1}{m}>\frac{3}{2}+\frac{m}{2}.$$

Αρα η υποακολουθια $(s_{2^{m+1}})_{m=1}^{\infty}$ δεν ειναι φραγμενη, οποτε και η ακολουθια $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι αυξουσα και μη φραγμενη. Τελικα λοιπον

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty.$$

13.1.20. Θεωρημα. Εστω ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοιες ωστε

$$\forall n\in\mathbb{N}: 0\le f_n\le g_n.$$

Τοτε:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}g_n<\infty&\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}f_n<\infty,\\
\sum_{n=1}^{\infty}f_n=\infty&\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}g_n=\infty.
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

13.1.21. Παραδειγμα. Θα δειξουμε οτι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}<\infty$. Πραγματι

$$\left(\forall n\ge 1:\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}\right)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1<\infty.$$

13.1.22. Παραδειγμα. Θα δειξουμε οτι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\infty$. Πραγματι

$$\left(\forall n\ge 1:\frac{1}{n+1}\ge\frac{1}{2n}\right)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}\ge\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\infty=\infty.$$

13.1.23. Θεωρημα (Κριτηριο Λογου). Εστω *μη αρνητικη* ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $a = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$. Τοτε ισχυουν τα εξης:

$$a < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty,$$
$$a > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty.$$

Αποδειξη. Εστω οτι $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = a < 1$· θετουμε $\varepsilon = 1 - a > 0$. Τοτε υπαρχει n_ε τετοιο ωστε

$$\begin{aligned}
\forall n \geq n_\varepsilon &: \left| \frac{f_{n+1}}{f_n} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \\
\forall n \geq n_\varepsilon &: f_{n+1} - a f_n < \frac{\varepsilon}{2} f_n \Rightarrow \\
\forall n \geq n_\varepsilon &: f_{n+1} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2} \right) f_n \Rightarrow \\
\forall m \geq 1 &: f_{n+m} < \left(a + \frac{\varepsilon}{2} \right)^m f_{n_\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Οποτε εχουμε

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} f_n < \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{n_\varepsilon} \left(a + \frac{\varepsilon}{2} \right)^n = f_n^{n_\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \left(a + \frac{\varepsilon}{2} \right)^n = A < \infty$$

(αφου $0 < \left(a + \frac{\varepsilon}{2} \right) < 1$). Τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{n_\varepsilon - 1} f_n + \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{n_\varepsilon - 1} f_n + A < \infty.$$

13.1.24. Προσεξε οτι οταν $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = a = 1$, το κριτηριο του λογου δεν οδηγει σε συμπερασμα σχετικα μετην συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

13.1.25. Παραδειγμα. Ας εξετασουμε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$. Εχουμε $f_n = \frac{5^n}{n!}$ και

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{5^{n+1}/(n+1)!}{5^n/n!} = \frac{5}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+1} = 0.$$

Αρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} < \infty$.

13.1.26. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$.

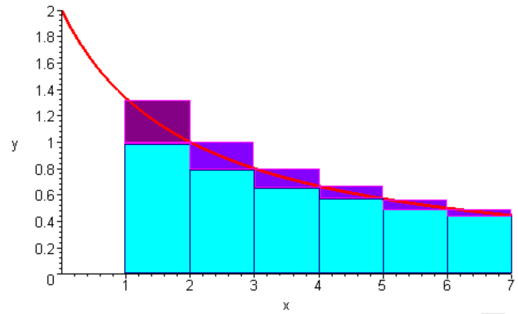
13.1.27. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$.

13.1.28. Θεωρημα (Κριτηριο Ριζας). Εστω *μη αρνητικη* ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $a = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n}$. Τοτε ισχυουν τα εξης:

$$a < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty,$$
$$a > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αγανωστη.

13.1.29. Και παλι, οταν $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n} = a = 1$, το κριτηριο της ριζας δεν οδηγει σε συμπερασμα σχετικα μετην συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.



Σχήμα 13.1: Το κριτηριο ολοκληρωματος.

13.1.30. Παραδειγμα. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n}$.
Λυση. Εχουμε $f_n = \frac{5^n}{n^n}$ και

$$\sqrt[n]{f_n} = \sqrt[n]{\frac{5^n}{n^n}} = \frac{5}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} = 0.$$

Αρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^n} < \infty$.

13.1.31. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+3)^n}$.

13.1.32. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.

13.1.33. Θεωρημα (Κριτηριο Ολοκληρωματος). Εστω οτι η $F(x)$ ειναι θετικη και φθινουσα στο διαστημα $[N, \infty)$ (για καποιο $N \geq 1$). Οριζουμε την ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = F(n)$. Τοτε

$$\int_N^{\infty} F(x)dx < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty, \tag{13.1}$$

$$\int_N^{\infty} F(x)dx = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty. \tag{13.2}$$

Αποδειξη. Μας ειναι δοσμενη η συναρτηση $F(x) \geq 0$. Οριζουμε δυο ακομη συναρτησεις:

$$\forall n \in \{1, 2, ...\}, \forall x \in [n, n+1) : \overline{F}(x) = F(n+1)$$
$$\forall n \in \{1, 2, ...\}, \forall x \in [n, n+1) : \underline{F}(x) = F(n)$$

Στο Σχημα 12.1 φαινεται οτι για καθε $x \in \mathbb{R}$ εχουμε $\underline{F} \leq F(x) \leq \overline{F}(x)$. Οποτε εχουμε και

$$\int_1^{\infty} \underline{F}(x)\,dx \leq \int_1^{\infty} F(x)\,dx \leq \int_1^{\infty} \overline{F}(x)\,dx.$$

Αλλα

$$\int_1^{\infty} \underline{F}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \underline{F}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} F(n+1) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n$$
$$\int_1^{\infty} \overline{F}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \overline{F}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Οποτε εχουμε

$$\int_1^{\infty} F(x)\,dx = \infty \Rightarrow \int_1^{\infty} \overline{F}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty$$

και

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int_1^{\infty} F(x)\,dx < \infty \Rightarrow 0 \leq \int_1^{\infty} \underline{F}(x)\,dx = \sum_{n=2}^{\infty} f_n < 0 \Rightarrow \\
0 &\leq f_1 \leq f_1 + \sum_{n=2}^{\infty} f_n < \infty \Rightarrow 0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty.
\end{aligned}
$$

13.1.34. Παραδειγμα. Ας εξετασουμε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Εχουμε $f_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$· αν θεσουμε $F(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}$ τοτε $f_n = F(n)$. Επειδη

$$
\int \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx = \int \frac{1}{\ln(x+1)} \frac{d(x+1)}{\ln(x+1)} = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(\ln(x+1))
$$

και

$$
\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx = \ln(\ln(x+1))|_{x=1}^{\infty} = \ln(\ln\infty) - \ln(\ln 2) = \ln(\infty) - \ln(\ln 2) = \infty
$$

συμπεραινουμε οτι

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = \infty.
$$

13.1.35. Θεωρημα. Η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ εχει την εξης συμπεριφορα.

$$
k \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \infty,
$$

$$
k > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \infty.
$$

Αποδειξη. Εχουμε $f_n = n^k$, $F(x) = x^k$ και

$$
\int \frac{1}{x^k}dx = \int x^{-k}dx = \begin{cases} \frac{x^{1-k}}{1-k} & \text{για} \quad k \neq 1 \\ \ln x & \text{για} \quad k = 1 \end{cases}.
$$

Θα εξετασουμε τρεις διαφορετικες περιπτωσεις.

1. $k > 1$. Τοτε
$$
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}dx = \left[\frac{1}{1-k}x^{1-k}\right]_{x=1}^{x=\infty} = \frac{1}{k-1} < \infty
$$
αρα για $k > 1$ εχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} < \infty$, δηλ. η σειρα συγκλινει.

2. $k = 1$. Τοτε
$$
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}dx = [\ln x]_{x=a}^{x=\infty} = \ln\infty - \ln 1 = \infty.
$$
Αρα για $k = 1$ εχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, δηλ. η σειρα αποκλινει.

3. $k < 1$. Τοτε
$$
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}dx = \left[\frac{1}{1-k}x^{1-k}\right]_{x=1}^{x=\infty} = \frac{1}{1-k}\lim_{M\to\infty}\left(M^{1-k} - 1^{1-k}\right) = \infty
$$
(αφου $1 - k > 0$). Αρα για $k < 1$ εχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \infty$, δηλ. η σειρα αποκλινει.

13.1.36. Παραδειγμα. Ας εξετασουμε την συγκλιση των

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}.$$

Συμφωνα με το Θεωρημα 13.1.35:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} < \infty.$$

13.1.37. Ορισμος. Εστω μη αρνητικη ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Η σειρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n = f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ...$$

λεγεται *εναλασσουσα*.

13.1.38. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)^2}$.

13.1.39. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+4}$.

13.1.40. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$.

13.1.41. Θεωρημα. Εστω μη αρνητικη και φθινουσα ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοια ωστε $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Τοτε η εναλασσουσα σειρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n = f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + ...$$

συγκλινει στο $f \in \mathbb{R}$. Επιπλεον, οριζοντας $s_N = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} f_n$, εχουμε

$$\forall N \geq 1 : |f - s_N| < f_{N+1}. \tag{13.3}$$

Αποδειξη. Δινουμε περιληπτικα τα βηματα της αποδειξης (συμπληρωσε τα κενα).

1. Για καθε $N \geq 1$ τα μερικα αθροισματα s_{2N-1} σχηματιζουν μια φθινουσα ακολουθια.
2. Για καθε $N \geq 1$ τα μερικα αθροισματα s_{2N} σχηματιζουν μια αυξουσα ακολουθια.
3. Για καθε $N \geq 1$ εχουμε $0 \leq s_{2N} < s_{2N-1}$.
4. Αρα $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f_n = f \in \mathbb{R}$.
5. Για καθε $N \geq 1$ εχουμε: $s_{2N} < f < s_{2N-1}$.
6. Οποτε ισχυει και η (13.3).

13.1.42. Παραδειγμα. Ας εξετασουμε την συγκλιση της

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... \quad .$$

Αφου η ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{n}$ ειναι μη αρνητικη, φθινουσα και $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, συμφωνα με το Θεωρημα 13.1.41 εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = f < \infty$$

Επισης $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} > 0$ (γιατι;).

13.1.43. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{2n+3}$.

13.1.44. Ασκηση. Δειξε οτι η $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{n}$ συγκλινει.

13.1.45. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos n\theta}{n^2}$ για διαφορες τιμες του θ.

13.1.46. Ορισμος. Λεμε οτι η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειναι *απολυτως συγκλινουσα* ανν $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n| < \infty$.

13.1.47. Θεωρημα. Εστω ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in \mathbb{R}.$$

Δηλ., αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειναι απολυτως συγκλινουσα, ειναι και συγκλινουσα.
Αποδειξη. Οριζουμε δυο συνολα φυσικων αριθμων

$$A_+ = \{n : f_n \geq 0\} \text{ και } A_- = \{n : f_n < 0\}.$$

Τοτε

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty}|f_n| = \sum_{n\in A_+}|f_n| + \sum_{n\in A_-}|f_n| = \sum_{n\in A_+} f_n + \left(-\sum_{n\in A_-} f_n\right) < \infty.$$

Επειδη τα αθροισματα $\sum_{n\in A_+} f_n$ και $\left(-\sum_{n\in A_-} f_n\right)$ ειναι μη αρνητικα, συμπεραινουμε οτι

$$\sum_{n\in A_+} f_n = a_1 \in \mathbb{R}, \qquad -\sum_{n\in A_-} f_n = a_2 \in \mathbb{R}$$

(δηλ. τα a_1, a_2 ειναι πεπερασμενα). Αλλα τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n\in A_+} f_n + \sum_{n\in A_-} f_n = a_1 - a_2 = f \in \mathbb{R}.$$

13.1.48. Με αλλα λογια, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειναι απολυτως συγκλινουσα τοτε ειναι και συγκλινουσα.

13.1.49. Παραδειγμα. Ας εξετασουμε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$. Εχουμε

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n)}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = a < \infty.$$

Αφου η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$ συγκλινει απολυτως, τοτε συγκλινει (σε πραγματικο αριθμο).

13.1.50. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+5}$.

13.1.51. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n+5}$.

13.1.52. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+5}}{\sqrt[4]{n^3+n+1}}$.

13.1.53. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^4}{n!}$.

13.1.54. Θεωρημα. Εστω απολυτως συγκλινουσες $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in \mathbb{R}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = g \in \mathbb{R}$. Τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f_n + g_n) = f - g \in \mathbb{R},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_n g_n = fg \in \mathbb{R}.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

13.1.55. Σε αρκετες περιπτωσεις η συγκλιση μιας ακολουθιας αποδεικνυεται χρησιμοποιωντας ενα συνδυασμο των παραπανω θεωρηματων και επιπλεον *τεχνασματων* οπως αυτα των επομενων παραδειγματων.

13.1.56. Παραδειγμα. Ας εξετασουμε την $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+4}{n^2+3n+5}$. Οριζουμε την συναρτηση $F(x)=F(x)$ και την ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$f_n=F(n)=\frac{3n+4}{n^2+3n+5}.$$

Τωρα,

$$F'(x)=-\frac{3x^2+8x-3}{(x^2+3x+5)^2}$$

και οι ριζες της $F'(x)=0$ ειναι οι $-3,\frac{1}{3}$. Στο διαστημα $[1,\infty)$ η $F(x)$ ειναι φθινουσα, οποτε η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι φθινουσα ακολουθια. Επιπλεον η

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+4}{n^2+3n+5}$$

ειναι εναλασσουσα, αρα συγκλινει σε πραγματικο αριθμο.

13.1.57. Παραδειγμα. Ας εξετασουμε την $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n+5^n}$. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n+5^n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n}=\frac{3/5}{1-3/5}=\frac{3}{2}.$$

13.1.58. Παραδειγμα. Ας εξετασουμε την $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n+5^n}$. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2^n+5^n}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{2\cdot 5^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{5^n}=\infty.$$

13.1.59. Παραδειγμα. Ας εξετασουμε την $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...$. Ο n-στος ορος της σειρας ειναι

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Οποτε

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{N\cdot(N+1)}\\&=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}=1-\frac{1}{N+1}.\end{aligned}$$

Δηλ.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....&=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+....+\frac{1}{N\cdot(N+1)}\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{1}{N+1}\right)=1.\end{aligned}$$

13.1.60. Παραδειγμα. Ας εξετασουμε την $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$. Ειναι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\geq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n+1}}\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}=\infty\end{aligned}$$

13.1.61. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$.

13.1.62. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$.

13.1.63. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(\ln n)^2}$.

13.1.64. Ασκηση. Εξετασε την συγκλιση της $\left(\frac{1}{2}\right)^p - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p - ...$ για διαφορες τιμες του p.

13.2 Λυμενα Προβληματα

13.2.1. Υπολογισε το αθροισμα $\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + ...$.
Λυση. Συμφωνα με την Ασκηση 13.1.4 ειναι

$$\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + ... = \frac{1/5}{1-1/5} = \frac{1}{4}.$$

13.2.2. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + ...$
Λυση. Οριζουμε την ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{n}{2n+1}$. Τοτε η ζητουμενη σειρα ειναι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Αφου $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} > 0$, η σειρα αποκλινει.

13.2.3. Υπολογισε το αθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{5}{n(n+1)}\right)$.
Λυση. Συμφωνα με την Ασκηση 13.1.4 ειναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

και συμφωνα με την Ασκηση 13.1.59 ειναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 1$$

Οποτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{5}{n\,(n+1)}\right) = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} = 3\cdot 1 + 5\cdot 1 = 8.$$

13.2.4. Δειξε οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2} < \infty$.
Λυση. Εχουμε

$$\left(\forall n \geq 1 : \frac{1}{3^n+2} < \frac{1}{3^n}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} < \infty.$$

13.2.5. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\,(2n+1)$.
Λυση. Εχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\,(2n+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(4n^2-1\right) > \sum_{n=1}^{\infty} 3n^2 = \infty$.

13.2.6. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.
Λυση. Χρησιμοποιουμε το κριτηριο του λογου. Ο n-στος ορος της σειρας ειναι $f_n = \frac{1}{n2^n}$. Το οριο του λογου $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ ειναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2\,(n+1)} = \frac{1}{2} < 1$$

επομενως η σειρα συγκλινει.

13.2.7. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.
Λυση. Χρησιμοποιουμε το κριτηριο του λογου. Ο n-στος ορος της σειρας ειναι $f_n = \frac{n}{2^n}$. Το οριο του λογου $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ ειναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,/2^{n+1}}{n2^n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

επομενως η σειρα συγκλινει.

13.2.8. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$.
Λυση. Χρησιμοποιουμε το κριτηριο του λογου. Εχουμε $\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!/5^{n+1}}{n!5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{5} = \infty$. Αρα η σειρα αποκλινει.

13.2.9. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.
Λυση. Χρησιμοποιουμε το κριτηριο του λογου. Ο n-στος ορος της σειρας ειναι $f_n = \frac{1}{n!}$. Το οριο του λογου $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ ειναι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n\cdot (n+1))}{1/(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

επομενως η σειρα συγκλινει.

13.2.10. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$.
Λυση. Χρησιμοποιουμε το κριτηριο της ριζας. Ο n-στος ορος της σειρας ειναι $f_n = \frac{1}{n^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

επομενως η σειρα συγκλινει.

13.2.11. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$.
Λυση. Χρησιμοποιουμε το κριτηριο της ριζας. Ο n-στος ορος της σειρας ειναι $f_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 < 1$$

επομενως η σειρα συγκλινει.

13.2.12. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.
Λυση. Η σειρα συγκλινει συμφωνα με το Θεωρημα 13.1.35.

13.2.13. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Λυση. Η σειρα αποκλινει συμφωνα με το Θεωρημα 13.1.35.

13.2.14. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$.
Λυση. Εχουμε

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

αρα η σειρα συγκλινει.

13.2.15. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ...$.
Λυση. Οριζουμε την ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με $f_n = \frac{1}{n^n}$. Τοτε η ζητουμενη σειρα ειναι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Εχουμε

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n = \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

αρα η σειρα συγκλινει.

13.2.16. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + ...$$

Λυση. Ο n-στος ορος ειναι $g_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = (-1)^{n+1} f_n$, οπου $f_n = \frac{1}{n^2}$. Η σειρα ειναι εναλασσουσα και για καθε n ισχυει $f_n > f_{n+1}$ και $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Αρα η σειρα συγκλινει.

13.2.17. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-n}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \\
&< \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(\sqrt{n}+\sqrt{n}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} < \infty
\end{aligned}$$

Αρα η σειρα συγκλινει.

13.2.18. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}}$, οταν $|a|<1$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1+a^{2^{n-1}}-1}{1-a^{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}}-\frac{1}{1-a^{2^n}}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1+a^{2^{n-1}}}{\left(1-a^{2^{n-1}}\right)\left(1+a^{2^{n-1}}\right)}-\frac{1}{1-a^{2^n}}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{1-a^{2^{n-1}}}-\frac{1}{1-a^{2^n}}\right).
\end{aligned}$$

Οποτε

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}} &= \left(\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^2}\right)+\left(\frac{1}{1-a^2}-\frac{1}{1-a^3}\right)+...+\left(\frac{1}{1-a^{2^{N-1}}}-\frac{1}{1-a^{2^N}}\right) \\
&= \frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^{2^N}}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}} = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1-a^{2^N}}\right) \\
&= \frac{1}{1-a}-\lim_{N\to\infty}\frac{1}{1-a^{2^N}} = \frac{1}{1-a}-1 = \frac{a}{1-a}.
\end{aligned}$$

13.2.19. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{n}$.
Λυση. Εχουμε $|\sin x|\leq|x|$ (γιατι;). Οποτε

$$0\leq\left|\frac{\sin(\pi/n)}{n}\right| = \frac{1}{n}\left|\sin(\pi/n)\right| \leq \frac{\pi}{n^2}$$

και

$$0\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(\pi/n)}{n}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n^2}<\infty.$$

Αφου η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi/n)}{n}$ ειναι απολυτως συγκλινουσα, ειναι και συγκλινουσα.

13.2.20. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\theta}{2^n}$, οταν $\theta\in[0,\pi/2]$.
Λυση. Εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\theta}{2^n} = \theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} = \theta\sum_{n=1}^{\infty}f_n$$

οπου $f_n = \frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}$. Αλλα, αφου $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, θα εχουμε και $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} = 1$. Αφου λοιπον $\lim_{n\to\infty} f_n > 0$, θα ειναι και $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\theta}{2^n} = \theta\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty$.

13.2.21. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$.
Λυση. Προσεξε οτι το αθροισμα αρχιζει απο $n = 0$. Εχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + ... = e^a,$$

οπως ειδαμε στο Κεφαλαιο 3.

13.2.22. Εξετασε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ οταν $a > 0$.
Λυση. Χρησιμοποιωντας το κριτηριο του λογου εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right]\cdot\frac{n^n}{a^n n!} = \lim_{n\to\infty}\left[a\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right] = \frac{a}{e}.$$

Οποτε, η σειρα συγκλινει οταν $a < e$ και αποκλινει οταν $a > e$.

13.2.23. Υπολογισε το $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$.
Λυση. Εχουμε

$$\frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{A}{n+2} - \frac{B}{n+3} = \frac{(A-B)\,n + (3A-2B)}{n^2+5n+6}.$$

Ευκολα βρισκουμε οτι $A = B = 1$, οποτε

$$\frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}.$$

Τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + ... = \frac{1}{3}.$$

13.2.24. Εστω θετικη ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$. Οριζουμε την $F(x)$ οπως στο Θεωρημα 13.1.33. Επισης οριζουμε $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$, $s = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ και το *σφαλμα προσεγγισης* n-στης ταξης

$$r_N = |s - s_N|.$$

Αποδειξε οτι, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειναι συγκλινουσα, τοτε

$$\forall n\in\mathbb{N} : \int_{n+1}^{\infty} F(x)\,dx < r_n < \int_{n}^{\infty} F(x)\,dx.$$

Λυση. Οριζουμε και τις $\underline{F}(x)$, $\overline{F}(x)$ οπως στο Θεωρημα 13.1.33. Χρησιμοποιωντας αυτες, βλεπουμε οτι για καθε n εχουμε

$$\sum_{m=n+1}^{\infty}\int_{m}^{m+1} F(x)\,dx < r_n = \sum_{m=1}^{\infty} f_{n+m} < \sum_{m=n}^{\infty}\int_{m}^{m+1} F(x)\,dx \Rightarrow \int_{n+1}^{\infty} F(x)\,dx < r_n < \int_{n}^{\infty} F(x)\,dx.$$

13.2.25. Εστω $s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, $s_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^4}$. Ποιο ειναι το σφαλμα προσεγγισης r_{10} του s απο το s_{10};
Λυση. Απο την προηγουμενη ασκηση εχουμε

$$2.5044\times 10^{-4} = \frac{1}{3993} = \int_{11}^{\infty}\frac{1}{x^4}dx < r_{10} < \int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^4}dx = \frac{1}{3000} = 3.3333\times 10^{-4}.$$

13.2.26. Εστω $s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $s_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$. Ποιας ταξης προσεγγιση N πρεπει να παρουμε ωστε το σφαλμα προσεγγισης r_N να ειναι μικροτερο του 10^{-2};
Λυση. Εχουμε

$$|r_N|<\int_N^{\infty}\frac{1}{x^4}dx=\frac{1}{3N^3}.$$

Θελουμε

$$10^{-2}>\frac{1}{3N^3}\Rightarrow N^3>\frac{100}{3}\Rightarrow N>\sqrt[3]{\frac{100}{3}}=3.2183.$$

Οποτε χρειαζομαστε προσεγγιση ταξεως τουλαχιστον $N_{\min}=4$.

13.2.27. Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η λυση της

$$f_0=5,\quad \forall n\geq 0: f_{n+1}=\frac{1}{2}f_n.$$

Υπολογισε το $\sum_{n=0}^{\infty}f_n$.
Λυση. Θα μπορουσαμε να επιλυσουμε την εξισωση διαφορων και να αθροισουμε τα f_n. Αλλα αυτο δεν ειναι απαραιτητο. Εχουμε

$$\begin{aligned}
f_0&=5\\
f_1&=\frac{1}{2}f_0\\
f_2&=\frac{1}{2}f_1\\
&\dots
\end{aligned}$$

Αθροιζοντας τα αριστερα και δεξια μελη παιρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_n=5+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}f_n\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}f_n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}f_n=5\Rightarrow\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}f_n=5\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}f_n=10.$$

13.2.28. Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η λυση της

$$f_0=5,\quad \forall n\geq 0: f_{n+1}=\frac{1}{2}f_n+3.$$

Υπολογισε το $\sum_{n=0}^{\infty}f_n$.
Λυση. Παιρνοντας το οριο εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}f_{n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}f_n+3\Rightarrow\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}f_n=3\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f_n=6\neq 0.$$

Οποτε $\sum_{n=0}^{\infty}f_n=\infty$.

13.2.29. Εστω $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ η λυση της

$$f_0=1,\quad f_1=1,\quad \forall n\geq 0: f_{n+2}=\frac{5}{6}f_{n+1}-\frac{1}{6}f_n.$$

Υπολογισε το $\sum_{n=0}^{\infty}f_n$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}
f_0&=1\\
f_1&=1\\
f_2&=\frac{5}{6}f_1-\frac{1}{6}f_0\\
f_3&=\frac{5}{6}f_2-\frac{1}{6}f_1\\
f_4&=\frac{5}{6}f_3-\frac{1}{6}f_2\\
&\dots
\end{aligned}$$

Αθροιζοντας τα αριστερα και δεξια μελη παιρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = 1 + 1 + \frac{5}{6}\sum_{n=1}^{\infty} f_n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} f_n \Rightarrow$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = 2 + \frac{5}{6}\sum_{n=0}^{\infty} f_n - \frac{5}{6} - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty} f_n \Rightarrow$$
$$\frac{2}{6}\sum_{n=0}^{\infty} f_n = \frac{7}{6} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \frac{7}{2}.$$

13.2.30. Υπολογισε την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$.
Λυση. Ειναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Ομως

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} - 1 = e - 1$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = e.$$

Τελικα λοιπον

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} = 2e - 1.$$

13.2.31. Υπολογισε την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n!}$.
Λυση. Ειναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!}.$$

Απο την προηγουμενη ασκηση εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$$

οποτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n!} = 2e - 2$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = 2e.$$

Τελικα λοιπον

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n!} = 4e - 2$$

13.3 Αλυτα Προβληματα

13.3.1. Μελετησε τις παρακατω σειρες ως προς την συγκλιση.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^5+2n^3+1}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n\ln n}{n^5+2n^3-1}$.

13.3.2. Μελετησε τις παρακατω σειρες ως προς την συγκλιση.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^5+1}}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}}{n}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n$.
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)-\ln(n+1)}$.
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1}\right)$.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{n-1}{n+1}$.

13.3.3. Μελετησε τις παρακατω σειρες ως προς την συγκλιση.

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots$.
2. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\ldots$.
3. $1+\frac{3}{5}+\frac{4}{10}+\ \ldots$.
4. $\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{24}+\ \ldots$.
5. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{6}+\ \ldots$.
6. $\sin\pi+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{9}+\ \ldots$.
7. $\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\sin 3\theta}{9}+\ \ldots$.
8. $\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{8}+\tan\frac{\pi}{12}+\ \ldots$.

13.3.4. Μελετησε τις παρακατω σειρες ως προς την συγκλιση.

1. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\frac{2\cdot5\cdot8\cdot11}{1\cdot5\cdot9\cdot13}+\ldots$.
2. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1\cdot5\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot10}+\ldots.$

3. $\frac{1}{1!}+\frac{1\cdot 11}{3!}+\frac{1\cdot 11\cdot 21}{5!}+\ldots$.

4. $1+\frac{1\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 16}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13}+\ldots$.

13.3.5. Μελετησε ως προς την συγκλιση την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ οπου

$$f_{2k-1}=\frac{2^{k-1}}{3^{k-1}}, \quad f_{2k}=\frac{2^{k-1}}{3^k}.$$

13.3.6. Μελετησε τις παρακατω σειρες ως προς την συγκλιση.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(i+2)^n}{2^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+i)^n}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(n+i)^n}$.

13.3.7. Υπολογισε τα παρακατω αθροισματα.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$. *Απ.* $\frac{1}{2}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. *Απ.* $-\frac{1}{4}$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. *Απ.* $\frac{3}{4}$.
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. *Απ.* $\frac{3}{4}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. *Απ.* $\frac{1}{4}$.

13.3.8. Υπολογισε τα παρακατω αθροισματα.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{e}\right)^n$. *Απ.* ∞.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$. *Απ.* ∞.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{3/2}$. *Απ.* ∞.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$. *Απ.* 1.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. *Απ.* $\frac{1}{6}\pi^2$.

13.3.9. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}}$. *Απ.* 2.

13.3.10. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n^2}$. *Απ.* $\frac{1}{2}$.

13.3.11. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} k}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$. *Απ.* $-\frac{1}{2}$.

13.3.12. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)}$. *Απ.* 1.

13.3.13. Υπολογισε το $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$. *Απ.* $\frac{1}{2}$.

13.3.14. Υπολογισε τα παρακατω αθροισματα.

1. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$.
2. $\frac{5}{16}+\frac{13}{36}+\frac{35}{216}+\ldots$.

3. $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \ldots$.

4. $1 + \frac{4}{2} + \frac{9}{6} + \frac{16}{24} + \ldots$.

13.3.15. Εστω $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$, $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+1}$. Ποιο ειναι το σφαλμα προσεγγισης r_5 του s απο το s_5;

13.3.16. Εστω $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+1}$, $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2+n+1}$. Ποιας ταξης προσεγγιση N πρεπει να παρουμε ωστε το σφαλμα προσεγγισης r_N να ειναι μικροτερο του 10^{-2};

13.3.17. Εστω $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$, $s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2 n}{n^2}$. Ποιας ταξης προσεγγιση N πρεπει να παρουμε ωστε το σφαλμα προσεγγισης r_N να ειναι μικροτερο του 10^{-2};

13.3.18. Βρες τις τιμες του a για τις οποιες συγκλινει η $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln a)^n$.

13.3.19. Υπολογισε την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n!}$. *Απ.* $7e - 4$.

13.3.20. Υπολογισε την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n+1}{n!}$. *Απ.* $5e - 1$.

13.3.21. Υπολογισε την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$. *Απ.* $5e$.

13.3.22. Αποδειξε οτι

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right) < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|b_n| < \infty.$$

13.3.23. Αποδειξε οτι, οταν για καθε n ισχυει $a_n \geq 0$, εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} a_n < \infty.$$

13.3.24. Αποδειξε οτι, οταν για καθε n ισχυει $a_n \geq 0$, εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} a_n < \infty.$$

13.3.25. Αποδειξε οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

13.3.26. Αποδειξε οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

13.3.27. Αποδειξε οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

13.3.28. Αποδειξε οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \frac{\pi-1}{2}$.

13.3.29. Αποδειξε οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln 2$.

13.3.30. Αποδειξε οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$.

13.3.31. Αποδειξε οτι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n} = \infty$.

13.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

13.4.1. Αποδειξε οτι: αν $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοιες ωστε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \in \mathbb{R}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = g \in \mathbb{R}$, τοτε για καθε $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ εχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_1 f_n + c_2 g_n) = c_1 f + c_2 g.$$

13.4.2. Αποδειξε οτι: αν οι $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι τετοιες ωστε

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq f_n \leq g_n$$

τοτε

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \infty.$$

13.4.3. Αποδειξε το Κριτηριο της Ριζας.

13.4.4. Αποδειξε οτι: για καθε $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ και καθε $m, n \in \mathbb{N}$ ισχυει:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k \left(b_{k+1} - b_k\right) + \sum_{k=m}^{n} b_{k+1} \left(a_{k+1} - a_k\right) = a_{n+1} b_{n+1} - a_m b_m.$$

Ποιον ολοκληρωτικο τυπο σου θυμιζει αυτο;

13.4.5. Υπολογισε το αθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n^2+3n+2)^2}$.

13.4.6. Υπολογισε το αθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. *Απ.* $\frac{\pi^4}{90}$.

13.4.7. Υπολογισε το αθροισμα $1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots$.

13.4.8. Υπολογισε το αθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{1+x^{2^n}}$ για καθε $x \in (1, \infty)$.

13.4.9. Υπολογισε το *απειρογινομενο* $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \dots \cdot \frac{n^2-1}{n^2} \right)$.

13.4.10. Υπολογισε το οριο $\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\dots+n^p}{n^{p+1}}$ για διαφορες τιμες του p.

13.4.11. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{2n+1}$.

13.4.12. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.

13.4.13. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi \sqrt{n^2+1}\right)$.

13.4.14. Εξετασε την συγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n(\theta)$ για διαφορες τιμες του θ.

13.4.15. Δινεται ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με μη αρνητικους ορους. Αποδειξε οτι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} f_n < \infty.$$

13.4.16. Δινεται ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με μη αρνητικους ορους. Αποδειξε οτι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{f_n f_{n+1}} < \infty.$$

13.4.17. Βρες ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοιες ωστε

$$f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq ... \geq 0,$$
$$g_1 \geq g_2 \geq g_3 \geq ... \geq 0,$$

και

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} g_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \min(f_n, g_n) < \infty$$

ή αποδειξε οτι δεν μπορουν να υπαρχουν τετοιες ακολουθιες.

13.4.18. Αν η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιει: (α) $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ και (β) η ακολουθια των μερικων αθροισματων $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι φραγμενη, τοτε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

13.4.19. Αν η θετικη $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιει: $\lim_{n\to\infty} nf_n = 0$, τοτε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

13.4.20. Αν η θετικη $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιει: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$, τοτε $\lim_{n\to\infty} nf_n = 0$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

13.4.21. Αν η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι φθινουσα και η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει, τοτε $\lim_{n\to\infty} nf_n = 0$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

13.4.22. Αν οι θετικες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιουν: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} g_n < \infty$ τοτε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n < \infty$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

13.4.23. Γενικευσε το παραπανω για ακολουθιες οι οποιες εχουν και αρνητικους ορους.

13.4.24. Αν οι θετικες $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιουν: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = \infty$ τοτε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n = \infty$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

13.4.25. Εστω οι $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ τετοιες ωστε

$$\forall n : g_n = f_{2n-1} + f_{2n}.$$

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ συγκλινει, το ιδιο θα ισχυει για την $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

13.4.26. Δινεται ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με μη αρνητικους ορους. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$ τοτε και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{f_n}}{n} < \infty$. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

13.4.27. Αν η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειναι εναλασσουσα και $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, τοτε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

13.4.28. Αν η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ειναι εναλασσουσα και η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ειναι φθινουσα, τοτε η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

13.4.29. Αν η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει και $\lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{f_n} = 1$, τοτε η $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ συγκλινει. Σωστο ή λαθος; Δωσε παραδειγμα.

13.4.30. Δινεται *γνησιως φθινουσα* ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ με μη αρνητικους ορους. Αποδειξε οτι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n < \infty$ τοτε και $\lim_{n\to\infty} nf_n = 0$.

13.4.31. Για ποιες τιμες του θ συγκλινει η σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta)$;

13.4.32. Αποδειξε οτι

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) ... .$$

13.4.33. Βρες μια $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ της οποιας η συγκλιση μπορει να αποδεχιθει με το κριτηριο ριζας αλλα οχι με το κριτηριο λογου.

13.4.34. Εστω ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ με θετικους ορους και τετοιες ωστε

$$f_1^2 + f_2^2 + ... < \infty, \qquad g_1^2 + g_2^2 + ... < \infty.$$

Αποδειξε οτι

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + ... \leq \left(f_1^2 + f_2^2 + ...\right)\left(g_1^2 + g_2^2 + ...\right).$$

Ποτε ισχυει η ισοτητα;

13.4.35. Εστω $p, q \in [1, \infty]$ τετοια ωστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Εστω επισης ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ με θετικους ορους και τετοιες ωστε

$$f_1^p + f_2^p + ... < \infty, \qquad g_1^q + g_2^q + ... < \infty.$$

Αποδειξε οτι

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + ... \leq \left(f_1^p + f_2^p + ...\right)^{1/p}\left(g_1^q + g_2^q + ...\right)^{1/q}.$$

Ποτε ισχυει η ισοτητα;

13.4.36. Εστω $p \in [1, \infty]$. Εστω επισης ακολουθιες $(f_n)_{n=1}^{\infty}, (g_n)_{n=1}^{\infty}$ με θετικους ορους και τετοιες εστε

$$f_1^p + f_2^p + ... < \infty, \qquad g_1^p + g_2^p + ... < \infty.$$

Αποδειξε οτι

$$(f_1 + g_1)^p + (f_2 + g_2)^p + ... \leq \left(f_1^p + f_2^p + ...\right)^{1/p} + \left(g_1^p + g_2^p + ...\right)^{1/p}.$$

Ποτε ισχυει η ισοτητα;

13.4.37. Δινεται μη αρνητικη ακολουθια $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και οριζουμε την $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$g_n = (-1)^n f_n.$$

Αποδειξε οτι: αν η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλινει και η $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ δεν συγκλινει, τοτε μπορουμε να αναδιαταξουμε τους ορους της $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ ετσι ωστε το αθροισμα των να ισουται με *οποιοδηποτε* αριθμο $c \in \mathbb{R}$.

13.4.38. Ας θεωρησουμε καθε ακολουθια $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ...)$ ως ενα *διανυσμα* με *μετρο*

$$||\mathbf{f}||_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2\right)^{1/2}.$$

Αποδειξε οτι το συνολο των ακολουθιων

$$\mathcal{F}_2 = \{\mathbf{f} : \|\mathbf{f}\|_2 < \infty\}$$

ειναι ενας *διανυσματικος* χωρος. Τι διανυσματικες ιδιοτητες μπορεις να αποδειξεις για τον $\mathcal{F}_2$ και τα στοιχεια του;

13.4.39. Επαναλαβε το προηγουμενο οταν το μετρο οριζεται ως

$$||\mathbf{f}||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^p\right)^{1/p}$$

για τυχον $p \in (0, \infty]$.

13.4.40. Βρες ικανες και αναγκαιες συνθηκες επι των p, q ετσι ωστε να συγκλινει η

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p (\ln n)^q}.$$

14 Σειρες Συναρτησεων

Στο προηγομενο κεφαλαιο μελετησαμε σειρες (δηλ. αθροισματα) αριθμων: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Στο παρον θα μελετησουμε *σειρες* (δηλ. αθροισματα) *συναρτησεων*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$$

και, ιδιαιτερα, *δυναμοσειρες:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x - x_0)^n ,$$

δηλ. αθροισματα ακολουθιων συναρτησεων οπου $F_n(x) = f_n \cdot (x - x_0)^n$. Μπορουμε να θεωρησουμε μια δυναμοσειρα ως ενα «πολυωνυμο» *απειρης* ταξης. Αν μια συναρτηση $f(x)$ μπορει να γραφτει ως δυναμοσειρα και αθροισουμε μονο τους πρωτους $N+1$ ορους της δυναμοσειρας, παιρνουμε μια *προσεγγιση* της $f(x)$ απο ενα πολυωνυμο $f_N(x)$ το οποιο εχει *πεπερασμενη* ταξη N· οποτε η τιμη της $f(x)$ μπορει να προσεγγιστει χρησιμοποιωντας μονο «απλες» αριθμητικες πραξεις (προσθεση και πολλαπλασιασμο).

14.1 Θεωρια και Παραδειγματα

14.1.1. Αν και το κυριο ενδιαφερον μας ειναι η μελετη των *σειρων* συναρτησεων, αυτη προυποθετει την μελετη *ακολουθιων* συναρτησεων.

14.1.2. Ορισμος. Μια *ακολουθια συναρτησεων* $(F_n(x))_{n=0}^{\infty}$ ειναι μια συναρτηση με πεδιο ορισμου το $\mathbb{N}_0$ και πεδιο τιμων καποιο συνολο συναρτησεων $\mathcal{F}$.

14.1.3. Δηλαδη η ακολουθια συναρτησεων $(F_n(x))_{n=0}^{\infty}$ αποτελειται απο τις συναρτησεις $F_0(x)$, $F_1(x)$, ..., $F_n(x)$, ... $\in \mathcal{F}$. Παρακατω θα υποθεσουμε, χαριν απλοτητας, οτι ολες οι $F_n(x)$ εχουν το ιδιο πεδιο ορισμου A (τα αποτελεσματα που ακολουθουν ισχυουν, με προφανεις τροποποιησεις, και οταν η $F_n(x)$ εχει πεδιο ορισμου A_n).

14.1.4. Ορισμος. Το *σημειακο οριο* της $(F_n(x))_{n=0}^{\infty}$ ειναι η συναρτηση F της οποιας η τιμη στο x ειναι

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) \tag{14.1}$$

(οταν το οριο υπαρχει). Λεμε και οτι η $(F_n(x))_{n=0}$ *συγκλινει σημειακα* στην $F(x)$.

14.1.5. Προσεξε οτι το πεδιο ορισμου της $F(x)$ ειναι το $B \subseteq A$ στο οποιο υπαρχει το οριο της (14.1).

14.1.6. Παραδειγμα. Εστω

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{οταν } x \in (-\infty, 0), \\ x^n & \text{οταν } x \in [0,1], \\ 1 & \text{οταν } x \in (1, +\infty). \end{cases}$$

Δες το Σχημα

Σχημα

και παρατηρησε οτι η συναρτηση

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$

εχει πεδιο ορισμου το $(-\infty, +\infty)$ και ειναι

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{οταν } x < 1, \\ 1 & \text{οταν } x \geq 1. \end{cases}$$

Παρατηρησε οτι η $F(x)$ ειναι ασυνεχης στο 1, αν και για καθε n η $F_n(x)$ ειναι συνεχης στο $(-\infty, +\infty)$.

14.1.7. Παραδειγμα. Εστω

$$F_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{οταν } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right), \\ \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) & \text{οταν } x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \\ 1 & \text{οταν } x \in \left(\frac{1}{n}, +\infty\right). \end{cases}$$

Δες το Σχημα και παρατηρησε οτι η συναρτηση

$$F(x) := \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$

εχει πεδιο ορισμου το $(-\infty, +\infty)$ και ειναι

$$F(x) = \begin{cases} -1 & \text{οταν } x < 0, \\ 0 & \text{οταν } x = 0, \\ 1 & \text{οταν } x > 0. \end{cases}$$

Παρατηρησε οτι η $F(x)$ ειναι ασυνεχης στο 0, αν και για καθε n η $F_n(x)$ ειναι συνεχης και παραγωγισιμη στο $(-\infty, +\infty)$.

14.1.8. Απο τα παραπανω παραδειγματα βλεπουμε οτι η συναρτηση $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ μπορει να εχει αρκετα διαφορετικη συμπεριφορα απο αυτη των $F_n(x)$. Τωρα θα ορισουμε μια ισχυροτερη εννοια συγκλισης υπο την οποια η $F(x)$ διατηρει αρκετες απο τις ιδιοτητες των $F_n(x)$.

14.1.9. Ορισμος. Εστω ακολουθια συναρτησεων $(F_n(x))_{n=0}$ οπου οι οι $F_0(x)$, $F_1(x)$, ... ειναι ορισμενες στο συνολο A και για καθε $x \in A$ με υπαρχει το σημειακο οριο

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x).$$

Λεμε οτι το *η $F(x)$ ειναι το ομοιομορφο οριο της $(F_n(x))_{n=0}$) στο A ανν*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_\varepsilon : \forall x \in A : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |F(x) - F_n(x)| < \varepsilon.$$

Σε αυτη την περιπτωση λεμε και οτι *η $(F_n(x))_{n=0}$ συγκλινει ομοιομορφα (στο A) στην $F(x)$*.

14.1.10. Η διαφορα της σημειακης συγκλισης απο την ομοιομορφη ειναι οτι στην ομοιομορφη συγκλιση μπορουμε, για καθε $\varepsilon > 0$, *να επιλεξουμε n_ε ανεξαρτητο του x* τετοιο ωστε

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |F(x) - F_n(x)| < \varepsilon.$$

14.1.11. Θεωρημα. Αν στο $[a,b]$ η $(F_n(x))_{n=0}$ συγκλινει ομοιομορφα στην $F(x)$ και

$$\int_a^b F(x)\,dx \in \mathbb{R} \text{ και } \forall n : \int_a^b F_n(x)\,dx \in \mathbb{R},$$

τοτε

$$\int_a^b F(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n(x)\,dx.$$

Αποδειξη. Εστω $\varepsilon > 0$. Υπαρχει n_ε τετοιο ωστε

$$\forall x \in [a,b] : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |F(x) - F_n(x)| < \varepsilon.$$

Τοτε, για καθε $n \geq n_\varepsilon$, εχουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b F(x)\,dx - \int_a^b F_n(x)\,dx \right| &= \left| \int_a^b (F(x)\,dx - F_n(x))\,dx \right| \\ &\leq \int_a^b |F(x)\,dx - F_n(x)|\,dx \\ &\leq \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a) \end{aligned}$$

οποτε

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b F(x)\,dx - \int_a^b F_n(x)\,dx \right| \leq \varepsilon(b-a).$$

Αφου αυτο ισχυει για καθε $\varepsilon > 0$, εχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b F(x)\,dx - \int_a^b F_n(x)\,dx \right| = 0 \Rightarrow \int_a^b F(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b F_n(x)\,dx.$$

14.1.12. Θεωρημα. Αν η $(F_n(x))_{n=0}$ στο $[a,b]$ συγκλινει ομοιομορφα στην $F(x)$ και

$$\forall n : \text{ η } F_n(x) \text{ ειναι συνεχης στο } [a,b].$$

Τοτε

$$\text{η } F(x) \text{ ειναι συνεχης στο } [a,b].$$

Αποδειξη. Θα δειξουμε μονο οτι η $F(x)$ ειναι συνεχης σε τυχον $x \in (a,b)$ (η περιπτωση $x \in \{a,b\}$ αφηνεται στον αναγνωστη). Εστω $\varepsilon > 0$· αφου η $(F_n(x))_{n=0}$ στο $[a,b]$ συγκλινει ομοιομορφα στην $F(x)$, υπαρχει n_ε τετοιο ωστε

$$\forall y \in [a,b] : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |F(y) - F_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τοτε εχουμε

$$|F(x) - F_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

και, για καθε ξ τετοιο ωστε $x + \xi \in [a,b]$, εχουμε

$$|F(x+\xi) - F_n(x+\xi)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Επισης, λογω της συνεχειας της $F_n(x)$, υπαρχει δ_ε τετοιο ωστε: οταν $|\xi| < \delta_\varepsilon$ εχουμε $x + \xi \in [a,b]$ και

$$|F_n(x+\xi) - F_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Με προσθεση κατα μελη, για καθε ξ τετοιο ωστε $|\xi| < \delta$ εχουμε:

$$\begin{aligned} |F(x+\xi) - F(x)| &= |F(x) - F_n(x) + F_n(x) - F_n(x+\xi) + F_n(x+\xi) - F(x+\xi)| \\ &< |F(x) - F_n(x)| + |F_n(x) - F_n(x+\xi)| + |F_n(x+\xi) - F(x+\xi)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Εν ολιγοις:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon : \forall x \in [a,b] : |\xi| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |F(x+\xi) - F(x)| < \varepsilon$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

14.1.13. Θεωρημα. Εστω οτι για τις $(F_n(x))_{n=0}$ ισχυουν τα εξης:

1. στο $[a,b]$ η $(F_n(x))_{n=0}$ συγκλινει σημειακα στην $F(x)$,
2. για καθε n: η $F_n(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο $[a,b]$ και $\int_a^b F_n'(x)\,dx \in \mathbb{R}$,
3. στο $[a,b]$ η $(F_n'(x))_{n=0}$ συγκλινει ομοιομορφα στην συνεχη συναρτηση $G(x)$.

Τοτε η $F(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο $[a,b]$ και

$$\forall x \in [a,b] : F'(x) = G(x) = \lim_{n\to\infty} F_n'(x).$$

Αποδειξη. Εφαρμοζοντας το Θεωρημα 14.1.11 στο διαστημα $[a,x] \subseteq [a,b]$ εχουμε οτι

$$\int_a^x G(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_a^x F_n'(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} (F_n(x) - F_n(a)) = F(x) - F(a).$$

Αφου η $G(x)$ ειναι συνεχης, εχουμε $F'(x) = G(x)$ και

$$\forall x \in [a,b] : F'(x) = G(x) = \lim_{n\to\infty} F_n'(x).$$

14.1.14. Τωρα μπορουμε να μελετησουμε τις σειρες συναρτησεων.

14.1.15. Ορισμος. Εστω ακολουθια συναρτησεων $(F_n(x))_{n=0}$ οπου οι $F_0(x)$, $F_1(x)$, ..., $F_n(x)$, ... ειναι ορισμενες στο A. Εστω το συνολο $B \subseteq A$ στο οποιο η $\sum_{n=0}^\infty F_n(x)$ τεινει σε πραγματικο αριθμο ή στο $+\infty$ ή στο $-\infty$:

$$B = \left\{ x : \sum_{n=0}^\infty F_n(x) \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

Η αντιστοιχη *σειρα συναρτησεων* ειναι η συναρτηση $F : B \to \mathbb{R}^*$ η οποια οριζεται ως εξης:

$$\forall x \in B : F(x) := \sum_{n=0}^\infty F_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^N F_n(x). \tag{14.2}$$

Στην (14.2) το οριο ειναι σημειακο και λεμε οτι *η $\sum_{n=0}^\infty F_n(x)$ συγκλινει σημειακα στην $F(x)$*. Αν στο $C \subseteq B \subseteq A$ το οριο ειναι ομοιομορφο, λεμε οτι *η $\sum_{n=0}^\infty F_n(x)$ συγκλινει στο C ομοιομορφα στην $F(x)$*.

14.1.16. Απο τα Θεωρηματα 14.1.11–14.1.13 παιρνουμε αμεσα το εξης.

14.1.17. Θεωρημα. Εστω οτι η $\sum_{n=0}^\infty F_n(x)$ συγκλινει στο $[a,b]$ ομοιομορφα στην $F(x)$. Τοτε

1. Αν για καθε n η $F_n(x)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$, τοτε και η $F(x)$ ειναι συνεχης στο $[a,b]$.
2. Αν $\int_a^b F(x)\,dx \in \mathbb{R}$ και για καθε n $\int_a^b F_n(x)\,dx \in \mathbb{R}$, τοτε

$$\int_a^b F(x)\,dx = \sum_{n=0}^\infty \int_a^b F_n(x)\,dx.$$

3. Αν

   α΄) για καθε n υπαρχει η $F_n'(x)$ και $\int_a^b F_n'(x)\,dx \in \mathbb{R}$ και

   β΄) αν η $\sum_{n=0}^\infty F_n'(x)$ συγκλινει στο $[a,b]$ ομοιομορφα στην συνεχη συναρτηση $G(x)$,

τοτε

$$F'(x) = G'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n'(x).$$

Αποδειξη. Εχουμε τα εξης.

1. Αφου καθε $F_n(x)$ ειναι συνεχης, το ιδιο ισχυει και για την $\sum_{n=0}^{N} F_n(x)$ οποτε, απο το Θεωρημα 14.1.12, η $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ ειναι το ομοιομορφο οριο $\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} F_n(x)$.

2. Αφου η $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)$ ειναι το ομοιομορφο οριο $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} F_n(x)$, απο το Θεωρημα 14.1.11 εχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)\,dx &= \lim_{N\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{N} F_n(x)\right) dx \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\int_a^b (F_n(x))\,dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b (F_n(x))\,dx\right).\end{aligned}$$

3. Για καθε N, η $\sum_{n=0}^{N} F_n(x)$ ειναι παραγωγισιμη συναρτηση με παραγωγο $\sum_{n=0}^{N} F_n'(x)$· εξ υποθεσεως η ακολουθια $\left(\sum_{n=0}^{N} F_n'(x)\right)_{N=0}^{\infty}$ συγκλινει ομοιομορφα στην συνεχη συναρτηση $G(x)$, Οποτε, απο το Θεωρημα 14.1.13,

$$F'(x) = G(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} F_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n'(x).$$

14.1.18. Το επομενο θεωρημα ειναι ενα κριτηριο για να ελεγξουμε την ομοιομορφη συγκλιση μιας σειρας συναρτησεων.

14.1.19. Θεωρημα (M-Κριτηριο Weierstrass). Εστω ακολουθιες $(M_n)_{n=0}^{\infty}$ (αριθμων) και $(F_n(x))_{n=0}^{\infty}$ (συναρτησεων ορισμενων στο A) τετοιες ωστε

$$\forall x \in A : |F_n(x)| \leq M_n.$$

Τοτε

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} M_n \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow \left(\text{η } \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) \text{ συγκλινει ομοιομορφα στο } A\right).$$

Αποδειξη. Απο το κριτηριο συγκρισης, για καθε $x \in A$ η $\sum_{n=1}^{\infty} |F_n(x)|$ συγκλινει, οποτε το ιδιο ισχυει και για την $\sum_{n=0}^{N} F_n(x)$. Επιπλεον, για καθε $x \in A$ εχουμε

$$\left|F(x) - \sum_{n=0}^{N} F_n(x)\right| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x) - \sum_{n=0}^{N} F_n(x)\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} F_n(x)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |F_n(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M_n.$$

Αφου υπαρχει το οριο $\sum_{n=0}^{\infty} M_n \in \mathbb{R}$, συμπεραινουμε οτι

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon : N \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|F(x) - \sum_{n=0}^{N} F_n(x)\right| \leq \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} M_n\right| < \varepsilon$$

και εχουμε δειξει το ζητουμενο.

14.1.20. Και τωρα μπορουμε να στραφουμε στο κυριο θεμα του παροντος κεφαλαιου.

14.1.21. Ορισμος. *Δυναμοσειρα* ειναι μια *συναρτηση* της μορφης

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x - x_0)^n \tag{14.3}$$

οπου η $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ ειναι μια ακολουθια αριθμων.

14.1.22. Παραδειγμα. Δυο δυναμοσειρες ειναι οι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + ...$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} (x-1)^n = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)^2 + ...$$

14.1.23. Ο Ορισμος 14.1.21 ειναι «φορμαλιστικος». Δηλ. γραφουμε την σειρα (14.3) χωρις να εξετασουμε αν αυτη συγκλινει ή οχι. Εστω οτι υπαρχει ενα συνολο A τιμων του x (το *συνολο συγκλισης*) για τις οποιες η (14.3) συγκλινει σε πραγματικο αριθμο. Αυτος γενικα θα εξαρταται απο το x. Ετσι οριζεται μια συναρτηση $f : A \to \mathbb{R}$:

$$\forall x \in A : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot (x - x_0)^n .$$

Γεννιουνται τωρα τα ερωτηματα: *για μια συγκεκριμενη $f(x)$ ποιοι ειναι οι συντελεστες (f_n) και ποιο ειναι το συνολο συγκλισης A*; Θα απαντησουμε σε αυτα (και αλλα ερωτηματα στην συνεχεια) μονο για την απλουστερη περιπτωση οπου $x_0 = 0$· η γενικευση στην περιπτωση $x_0 \neq 0$ ειναι μαλλον προφανης.

14.1.24. Θεωρημα. Εστω ξ τετοιο ωστε η σειρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi^n$$

συγκλινει. Τοτε η

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

συγκλινει *ομοιομορφα* σε καθε $[-a, a] \subseteq (-|\xi|, |\xi|)$. Ομοιως η

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n x^{n-1}$$

συγκλινει *ομοιομορφα* σε καθε $(-a, a) \subseteq (-|\xi|, |\xi|)$ οπου και ισχυει

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n x^{n-1}$$

(και αρα η $f(x)$ ειναι παραγωγισιμη στο $(-a, a)$).
Αποδειξη: Αφου η $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi^n$ συγκλινει, υπαρχει M τετοιο ωστε

$$\forall n : |f_n \xi^n| = |f_n| \cdot |\xi|^n < M.$$

Τοτε

$$\forall x \in [-a, a] : |x| \leq a \Rightarrow$$
$$\forall n, \forall x \in [-a, a] : |f_n x^n| \leq |f_n| |a|^n = |f_n| |\xi|^n \left| \frac{a}{\xi} \right|^n \leq |f_n| M^n.$$

Αφου $\left| \frac{a}{\xi} \right| < 1$ εχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{a}{\xi} \right|^n < \infty.$$

Δηλ. ισχυει η συνθηκη του Θεωρηματος 14.1.19 με $M_n = M \left| \frac{a}{\xi} \right|^n$· αρα η $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ συγκλινει ομοιομορφα στο $[-a, a]$.

Παρομοια αποδεικνυουμε οτι συγκλινει ομοιομορφα στο $[-a, a]$ η $\sum_{n=1}^{\infty} n f_n x^{n-1}$ (τωρα χρησιμοποιουμε $M_n = \frac{M}{a} n \left|\frac{a}{\xi}\right|^n$). Οποτε (απο το Θεωρημα 14.1.13) η $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n x^{n-1}$ ειναι συνεχης και

$$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n x^{n-1}.$$

14.1.25. Θεωρημα. Εστω τυχουσα $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ και A το συνολο στο οποιο αυτη συγκλινει. Τοτε θα ισχυει ενα απο τα παρακατω ενδεχομενα:

1. $A = (0, 0) = \{0\}$ ή
2. $A = (-\infty, \infty)$ ή
3. υπαρχει R (η *ακτινα συγκλισης*) τετοιο ωστε το A ειναι $(-R, R)$ ή $[-R, R]$ ή $(-R, R]$ ή $[-R, R)$ (το *διαστημα συγκλισης*).

Αποδειξη: Αν δεν ισχυει ουτε το 1 ουτε το 2, τοτε θα υπαρχει καποιο $\xi_1 > 0$ τετοιο ωστε να συγκλινει η $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi_1^n$ και καποιο $\xi_2 > \xi_1$ τετοιο ωστε να αποκλινει η $\sum_{n=0}^{\infty} f_n \xi_2^n$. Τοτε, αν ορισουμε

$$R = \sup S$$

βλεπουμε οτι το 3 ισχυει εκ του Θεωρηματος 14.1.24.

14.1.26. Παραδειγμα. Εστω

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... \ .$$

Εχουμε δει στο Κεφαλαιο 13 οτι

$$\forall x \in (-1, 1) : \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

και

$$\forall x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) : \text{η } 1 + x + x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ δεν συγκλινει.}$$

Αρα οταν $(f_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 1, 1, ...)$ η $\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ εχει ακτινα συγκλισης $R = 1$ και *διαστημα συγκλισης* το $(-1, 1)$. Μπορουμε να γραψουμε

$$\forall x \in (-1, 1) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

οπου $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

14.1.27. Παραδειγμα. Εστω

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + ... \ .$$

Για να βρουμε την ακτινα συγκλισης της σειρας χρησιμοποιουμε το Κριτηριο του Λογου. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+2}}{(n+2)^2}\right|}{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} |x| = |x| \,.$$

Βλεπουμε οτι η

$$|x| < 1 \Rightarrow \text{ η } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \text{ συγκλινει,}$$

$$|x| > 1 \Rightarrow \text{ η } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \text{ αποκλινει.}$$

Αρα η ακτινα συγκλισης ειναι $R = 1$. Ποιο ειναι το διαστημα συγκλισης; Σιγουρα περιεχει το $(-1, 1)$. Επισης, οταν $x = 1$ η σειρα γινεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...$$

που ξερουμε οτι συγκλινει. Παρομοια, οταν $x = -1$ η σειρα γινεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} = -\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - ...\right)$$

που ξερουμε οτι συγκλινει. Αρα τελικα το διαστημα συγκλισης ειναι $[-1, 1]$, δηλαδη

$$\forall x \in [-1, 1] : g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

14.1.28. Θεωρημα. Αν η δυναμοσειρα

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

εχει ακτινα συγκλισης R τοτε, για καθε , ισχυουν τα εξης:

$$\begin{aligned}
&\forall x \in (-R, R) : \text{η } f(x) \text{ ειναι συνεχης},\\
&\forall x \in (-R, R) : \frac{df}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n n x^{n-1},\\
&\forall x \in (-R, R) : \int f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^{n+1}}{n+1},\\
&\forall x \in (-R, R) : \int_a^b f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \int_a^b x^n dx
\end{aligned}$$

Αποδειξη: Ολα τα παραπανω ειναι αμεσες συνεπειες των Θεωρηματων 14.1.11–14.1.13 και 14.1.25.

14.1.29. Το Θεωρημα 14.1.28 λεει οτι στο εσωτερικο του διαστηματος συγκλισης μπορω να παραγωγισω και να ολοκληρωσω την δυναμοσειρα ορο-προς-ορο.

14.1.30. Παραδειγμα. Εχουμε δει οτι

$$\forall x \in (-1, 1) : \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... \ .$$

Οποτε η $\frac{1}{1-x}$ ειναι συνεχης στο $(-1, 1)$. Επιπλεον

$$\begin{aligned}
&\forall x \in (-1, 1) : 1 + 2x + 3x^2 + ... = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(x-1)^2},\\
&\forall x \in (-1, 1) : x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... \ = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(x-1).
\end{aligned}$$

14.1.31. Θεωρημα. Εστω οτι

$$\forall x \in (-R, R) : \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n.$$

Τοτε

$$\forall n \geq 0 : f_n = g_n.$$

Αποδειξη: Αν ισχυει η υποθεση, τοτε

$$\forall x \in (-R, R) : 0 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n - g_n)\, x^n.$$

Προφανως η $f(x) = 0$ εχει παραγωγους ολων των ταξεων (γιατι;). Θετοντας $x = 0$ παιρνουμε

$$0 = f(0) = f_0 - g_0.$$

Παραγωγιζοντας και θετοντας $x = 0$ παιρνουμε

$$0 = f'(0) = f_1 - g_1.$$

Συνεχιζοντας κατ΄ αυτο τον τροπο βλεπουμε οτι

$$\forall n \geq 0 : f_n = g_n.$$

14.1.32. Πορισμα. Μια συναρτηση $f(x)$ εχει το πολυ μια αναπαρασταση ως δυναμοσειρα στο διαστημα $(-R, R)$.

14.1.33. Τωρα θα εξετασουμε τον *υπολογισμο* της αναπαραστασης μιας συγκεκριμενης συναρτησης ως δυναμοσειρα.

14.1.34. Θεωρημα (Σειρα MacLaurin). Αν μια συναρτηση $f(x)$ μπορει να αναπτυχθει σε δυναμοσειρα του x με ακτινα συγκλισης $R > 0$, τοτε αυτη εχει την μορφη

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{14.4}$$

Αποδειξη: Ας υποθεσουμε οτι η $f(x)$ μπορει να αναπτυχθει σε δυναμοσειρα. Τοτε η $f(x)$ και οι παραγωγοι αυτης θα δινονται απο τις σχεσεις

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + ... \\ f'(x) &= f_1 + 2 f_2 x + 3 f_3 x^2 + ... \\ f''(x) &= 2 f_2 + 3 \cdot 2 \cdot f_3 x + ... \\ f^{'''}(x) &= 3 \cdot 2 \cdot f_3 + ... \\ &... \end{aligned} \tag{14.5}$$

Ολες οι παραπανω θα ισχυουν στο $(-R, R)$. Οποτε μπορουμε να θεσουμε $x = 0$ και να παρουμε

$$\begin{aligned} f(0) &= 0! f_0 \\ f'(0) &= 1! f_1 \\ f''(0) &= 2! f_2 \\ f'''(0) &= 3! f_3 \\ &... \end{aligned}$$

Λυνοντας τις παραπανω παιρνουμε

$$f_0 = \frac{f(0)}{0!}, \quad f_1 = \frac{f'(0)}{1!}, \quad f_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad f_3 = \frac{f'''(0)}{3!}, \quad ...$$

και αντικαθιστωντας στην (14.5) παιρνουμε

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

14.1.35. Παραδειγμα. Εστω $f(x) = e^x$. Τοτε

$$\begin{aligned} f(x) = e^x &\Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) = e^x &\Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) = e^x &\Rightarrow f''(0) = 1 \\ &\text{κ.τ.λ.} \end{aligned}$$

οποτε

$$e^x = f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...$$

δηλ. παιρνουμε τον τυπο του Κεφαλαιου 3 για το e^x. Για να ισχυει ο τυπος πρεπει να συγκλινει η σειρα· αυτο το ελεγχουμε με το Κριτηριο του Λογου. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!}\right| < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} < 1.$$

Αλλα $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0$ για καθε $x \in (-\infty, \infty)$. Δηλ. η σειρα συγκλινει στο $(-\infty, \infty)$ ή με αλλα λογια η ακτινα συγκλισης ειναι $R = \infty$.

14.1.36. Παραδειγμα. Εστω $f(x) = \cos x$. Τοτε

$$\begin{aligned} f(x) = \cos x &\Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin x &\Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos x &\Rightarrow f''(0) = 1 \\ f^{(3)}(x) = \sin x &\Rightarrow f''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos x &\Rightarrow f''(0) = 1 \\ &\text{κ.τ.λ.} \end{aligned}$$

οποτε

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... \\ &= 1 + \frac{0}{1!}x + \frac{-1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ... \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... \end{aligned}$$

δηλ. παιρνουμε τον τυπο του Κεφαλαιου 4 για το $\cos x$. Για να ισχυει ο τυπος πρεπει να συγκλινει η σειρα· αυτο το ελεγχουμε με το Κριτηριο του Λογου. Εχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)}/(2n+2)!}{x^{2n}/(2n)!}\right| < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} < 1.$$

Αλλα $\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0$ για καθε $x \in (-\infty, \infty)$. Δηλ. η σειρα συγκλινει στο $(-\infty, \infty)$ ή με αλλα λογια η ακτινα συγκλισης ειναι $R = \infty$.

14.1.37. Δινονται παρακατω μερικες αξιοσημειωτες σειρες $MacLaurin$ (τις οποιες καλο θα ειναι να *απομνημονευσεις*).

$$\forall x \in (-1,1) : \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$
$$\forall x \in (-\infty,\infty) : e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$
$$\forall x \in (-\infty,\infty) : \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...$$
$$\forall x \in (-\infty,\infty) : \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$
$$\forall x \in (-\infty,\infty) : \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ...$$
$$\forall x \in (-1,1) : \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + ...$$
$$\forall x \in (-1,1) : (1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + ...$$

14.1.38. Θεωρημα (Σειρα Taylor). Αν μια συναρτηση $f(x)$ μπορει να αναπτυχθει σε δυναμοσειρα του $x - x_0$ με ακτινα συγκλισης $R > 0$, τοτε αυτη η εχει την μορφη

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n . \tag{14.6}$$

Αποδειξη: Η αποδειξη ειναι παρομοια με αυτη του Θεωρηματος 14.1.34.

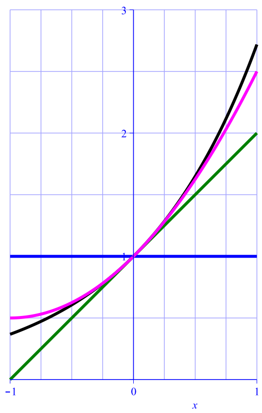
14.1.39. Ενα σημαντικο (αλλα οχι το μοναδικο) κινητρο για την χρηση δυναμοσειρων (και ιδιαιτερως σειρων $Taylor$) ειναι η υπολογιστικη ευκολια. Μπορουμε να θεωρησουμε μια δυναμοσειρα ως ενα *πολυωνυμο απειρης ταξης*. Σε αντιθεση με την εκθετικη, λογαριθμικη και αλλες *υπερβατικες* συναρτησεις, οι τιμες ενος πολυωνυμου μπορουν να υπολογιστουν με απλες αριθμητικες πραξεις(προσθεση, πολλαπλασιασμο). Θεωρησε την εκθετικη συναρτηση

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \tag{14.7}$$

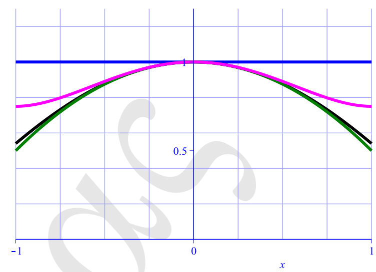
Για να υπολογισουμε μια συγκεκριμενη τιμη e^{x_1} *ακριβως* πρεπει να υπολογισουμε το απειρο αθροισμα της (14.7). Φυσικα αυτο ειναι αδυνατο. Αλλα μπορουμε να *προσεγγισουμε* την τιμη e^{x_1} χρησιμοποιωντας ενα πεπερασμενο αριθμο ορων της (14.7). Στον παρακατω πινακα δινουμε τις τιμες των $f(x) = e^x$, $f_{(0)}(x) = 1$, $f_{(1)}(x) = 1 + x$, $f_{(2)}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$, για τις τιμες $x = 0$, 0.1, 0.5, 1.0.

x	0.000	0.100	0.500	1.000
$f_{(0)}(x) = 1$	1.000	1.000	1.000	1.000
$f_{(1)}(x) = 1 + x$	1.000	1.100	1.500	2.000
$f_{(2)}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$	1.000	1.105	1.625	2.500
$f(x) = e^x$	1.000	1.105	1.649	2.719

Παρατηρουμε οτι οσο υψηλοτερης ταξης προσεγγισης N παιρνουμε, τοσο μικροτερη γινεται η διαφορα μεταξυ της $f(x)$ και της $f_{(N)}(x)$. Απο την αλλη πλευρα, οσο μεγαλυτερο γινεται το x, τοσο μεγαλυτερη γινεται η διαφορα. Παρομοια πραγματα μπορουμε να δουμε στο Σχημα, ;; οπου δινονται οι γραφικες παραστασεις των $f(x)$, $f_{(0)}(x)$, $f_{(1)}(x)$, $f_{(2)}(x)$.



Σχήμα 14.1



Σχήμα 14.2

14.1.40. Βλεπουμε λοιπον οτι οσο μεγαλυτερης ταξης προσεγγιση χρησιμοποιουμε, τοσο πλησιεστερα βρισκεται η αντιστοιχη καμπυλη σε αυτη της $f(x)$, αλλα επισης οτι οι καμπυλες αποκλινουν οσο μεγαλωνει η τιμη του $|x|$. Τα επομενα θεωρηματα διατυπωνουν αυτη την παρατηρηση με ακριβεια.

14.1.41. Το Θεωρημα 14.1.34 (αντ., το Θεωρημα 14.1.38) λεει: *εαν* η $f(x)$ εχει σειρα $MacLaurin$ (αντ. $Taylor$) τοτε η σειρα δινεται απο την (14.4) (αντ. (14.6)). Τωρα θα δωσουμε ενα θεωρημα το οποιο δινει *ικανες συνθηκες* για να εχει η $f(x)$ σειρα $MacLaurin$ ή $Taylor$. Καταρχην θυμιζουμε το Θεωρημα $Taylor$;; (γενικευση του Θεωρηματος μεσης τιμης)

14.1.42. Θεωρημα: Αν η συναρτηση $f(x)$ εχει παραγωγους ολων των ταξεων στο διαστημα $(-R, R)$ τοτε

$$\forall x \in (-R, R), \forall n \geq 0 : f(x) = \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1} \tag{14.8}$$

οπου $\xi \in (-R, R)$. Ομοιως, αν η συναρτηση $f(x)$ εχει παραγωγους ολων των ταξεων στο διαστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$, τοτε

$$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R), \forall n \geq 0 : f(x) = \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \right) + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} (x - x_0)^{N+1} \tag{14.9}$$

οπου $\xi \in (-R, R)$.

14.1.43. Και τωρα μπορουμε να δωσουμε τις ικανες συνθηκες για να εχει καποια $f(x)$ σειρα $MacLaurin$ ή $Taylor$.

14.1.44. Θεωρημα: Εστω οτι η συναρτηση $f(x)$ εχει παραγωγους ολων των ταξεων στο διαστημα $(-R, R)$ και υπαρχει αριθμος M τετοιος ωστε

$$\forall x \in (-R, R), \forall n \geq 0 : \left| f^{(n)}(x) \right| < M^n.$$

Τοτε

$$\forall x \in (-R, R) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{14.10}$$

Ομοιως, εστω οτι η $f(x)$ εχει παραγωγους ολων των ταξεων στο διαστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$ και υπαρχει M τετοιος ωστε

$$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R), \forall n \geq 0 : \left| f^{(n)}(x) \right| < M^n.$$

Τοτε

$$\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x - x_0)}{n!} (x - x_0)^n . \tag{14.11}$$

Αποδειξη: Θα αποδειξουμε την (14.10). Απο την (14.8) εχουμε.

$$\forall x \in (-R, R), \forall n \geq 0 : f(x) - f_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1}$$

οπου

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Τοτε

$$\forall x \in (-R, R) : \lim_{N\to\infty} |f(x) - f_N(x)| = \lim_{N\to\infty} \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1} \right| < \lim_{N\to\infty} \frac{(MR)^n}{(N+1)!} = 0,$$

αφου (κριτηριο λογου)

$$\forall a \in \mathbb{R} : \lim_{N\to\infty} \frac{a^n}{(N+1)!} = 0.$$

Η (14.11) αποδεικνυεται παρομοια.

14.1.45. Παραδειγμα. Μεχρι ποιας ταξης οροι απαιτουνται στην σειρα *McLaurin* της $f(x) = \frac{1}{1-x}$ για να βρουμε την τιμη $f(0.6)$ με σφαλμα μικροτερο απο 0.001; Το σφαλμα θα ειναι μικροτερο κατ΄ απολυτο τιμη απο τον πρωτο ορο που παραλειπεται (γιατι;). Δηλ. θα πρεπει να εχουμε

$$(0.6)^n < 0.001 \Rightarrow n > \frac{\ln 0.001}{\ln 0.6} = 13.523 \Rightarrow n \geq 14.$$

Πραγματι,

$$\frac{1}{1-0.6} = 2.5000, \qquad \sum_{n=0}^{15} (0.6)^n = 2.4992$$

και

$$\left| \frac{1}{1-0.6} - \sum_{n=0}^{15} (0.6)^n \right| = |2.5000 - 2.4992| = 8 \cdot 10^{-4} < 0.001.$$

14.1.46. Παραδειγμα. Μεχρι ποιας ταξης οροι απαιτουνται στην σειρα *McLaurin* της $f(x) = \cos x$ για να βρουμε την τιμη $f(1)$ με σφαλμα μικροτερο απο 0.001; Το σφαλμα θα ειναι μικροτερο κατ΄ απολυτο τιμη απο τον πρωτο ορο που παραλειπεται. Δηλ. θα πρεπει να εχουμε

$$\frac{1}{n!} < 0.001 \Rightarrow n! > 1000.$$

Επειδη $6! = 720$, $7! = 5040$, πρεπει να παρουμε ορους μεχρι και 6ης ταξης. Πραγματι

$$\cos 1 = 0.5403, \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} = 0.54028$$

και

$$\left| \cos 1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{720} \right) \right| = |0.54030 - 0.54028| = 2 \cdot 10^{-5} < 0.001.$$

14.1.47. Τα παρακατω παραδειγματα δινουν διαφορους τροπους για την αναπτυξη μιας συναρτησης σε δυναμοσειρα.

14.1.48. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$ (σειρα *Taylor* γυρω απο το $x_0 = 0$). Εχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(1+x)^3} \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= \frac{-3}{(1+x)^4} \Rightarrow f'(0) = -3 \\ f''(x) &= \frac{12}{(1+x)^5} \Rightarrow f''(0) = 12 \\ &\text{κ.τ.λ.} \end{aligned}$$

οποτε

$$\frac{1}{(1+x)^3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 + \dots .$$

14.1.49. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = e^{x^2}$ (σειρα *Taylor* γυρω απο το $x_0 = 0$). Αντι να χρησιμοποιησουμε το ορισμο της σειρας *Taylor*, ο οποιος απαιτει πολλες παραγωγισεις, δουλευουμε ως εξης: παιρνουμε την (γνωστη) σειρα της e^z και οπου z θετουμε $z = x^2$. Δηλ. εχουμε

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots \Rightarrow e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \dots$$

14.1.50. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Δουλευοντας παρομοια με την προηγουμενη, εχουμε

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

14.1.51. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Δουλευοντας παρομοια με την προηγουμενη, εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \Rightarrow \\ \frac{1}{1-(-x)} &= 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \dots = 1 - x + +x^2 - x^3 + \dots . \end{aligned}$$

14.1.52. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = \frac{1}{4-x}$. Δουλευοντας παρομοια με την προηγουμενη, εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \Rightarrow \\ \frac{1}{4-x} &= \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{x}{4}} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{64} + \dots\right) = \frac{1}{4} + \frac{x}{16} + \frac{x^2}{64} + \frac{x^3}{256} + \dots \end{aligned}$$

14.1.53. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$. Γνωριζουμε οτι

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots .$$

Οποτε

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1-x} &= (1+x)\left(1 + x + x^2 + \dots\right) \\ &= \left(1 + x + x^2 + \dots\right) + x\left(1 + x + x^2 + \dots\right) \\ &= \left(1 + x + x^2 + \dots\right) + \left(x + x^2 + x^3 + \dots\right) \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots . \end{aligned}$$

14.1.54. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε την σειρα $MacLaurin$ της $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^3}$. Δουλευουμε ως εξης:

$$
\begin{aligned}
\frac{1+x^2}{1-x^3} &= \left(1+x^2\right)\left(1+x^3+x^6+...\right) \\
&= \left(1+x^3+x^6+...\right) + x^2\left(1+x^3+x^6+...\right) \\
&= \left(1+x^3+x^6+...\right) + \left(x^2+x^5+x^8+...\right) \\
&= 1+x+x^2+x^3+x^5+x^6+x^8+x^9+... \,.
\end{aligned}
$$

14.1.55. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε την σειρα $MacLaurin$ της $f(x) = e^x \sin x$. Εδω εχουμε

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \text{ και } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... \,.$$

Τοτε θα ισχυει και

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right) \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...\right).$$

Πρεπει να εκτελεσουμε τον πολλαπλασιασμο δυο πολυωνυμων *απειρης ταξης*. Αυτο μπορει να γινει με την βοηθεια του παρακατω πινακα

	1	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{6}$	$\frac{x^4}{24}$	...
0	0	0	0	0	0	...
x	x	x^2	$\frac{x^3}{2}$	$\frac{x^4}{6}$	$\frac{x^5}{24}$	...
0	0	0	0	0	0	...
$-\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^3}{6}$	$-\frac{x^4}{6}$	$-\frac{x^5}{12}$	$-\frac{x^6}{36}$	$-\frac{x^7}{144}$	...
0	0	0	0	0	0	...
...	...	...	...	...	...	...

Τωρα, προσθετοντας στα στοιχεια κατα μηκος των *αντιδιαγωνιων* παιρνουμε

$$
\begin{aligned}
\text{οροι 0ης ταξης} &: 0 \\
\text{οροι 1ης ταξης} &: 0 + x = x \\
\text{οροι 2ης ταξης} &: 0 + x^2 + 0 = x^2 \\
\text{οροι 3ης ταξης} &: 0 + \frac{x^3}{2} + 0 - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{3} \\
\text{οροι 4ης ταξης} &: 0 + \frac{x^4}{6} + 0 - \frac{x^4}{6} = 0
\end{aligned}
$$

Οποτε βλεπουμε οτι οι οροι μεχρι και 3ης ταξης ειναι

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ... \,.$$

14.1.56. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε την σειρα $MacLaurin$ της $f(x) = \frac{\sin x}{x+1}$. Παρομοια με την προηγουμενη εχουμε

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... \text{ και } \frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$$

οποτε

$$\frac{\sin x}{x+1} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...\right) \cdot \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right).$$

Ο αντιστοιχος πινακας ειναι

	0	x	0	$-\frac{x^3}{6}$	0	...
1	0	x	0	$-\frac{x^3}{6}$	0	...
$-x$	0	$-x^2$	0	$\frac{x^4}{6}$	0	...
x^2	0	x^3	0	$-\frac{x^5}{6}$	0	...
$-x^3$	0	$-x^4$	0	$\frac{x^6}{6}$	0	...
x^4	0	x^5	0	$-\frac{x^7}{6}$	0	...
...	...	...	...	...	...	...

Προσθετοντας στα στοιχεια κατα μηκος των αντιδιαγωνιων παιρνουμε

$$\begin{aligned}
&\text{οροι 0ης ταξης} : 0\\
&\text{οροι 1ης ταξης} : x+0=x\\
&\text{οροι 2ης ταξης} : 0-x^2+0=-x^2\\
&\text{οροι 3ης ταξης} : -\frac{x^3}{6}+0+x^3+0=\frac{5x^3}{6}\\
&\text{οροι 4ης ταξης} : 0+\frac{x^4}{6}+0-x^4+0=-\frac{5x^4}{6}
\end{aligned}$$

Οποτε βλεπουμε οτι οι οροι μεχρι και 3ης ταξης ειναι

$$\frac{\sin x}{x+1}=x-x^2+\frac{5}{6}x^3-\frac{5}{6}x^4+\dots\ .$$

14.1.57. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε την σειρα *MacLaurin* της $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$. Παρατηρουμε οτι

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Οποτε

$$\frac{1}{(x-1)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\left(1+x+x^2+\dots\right)'=1+2x+3x^2+\dots\ .$$

14.1.58. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε την σειρα *MacLaurin* της $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. Παρατηρουμε οτι

$$\frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}.$$

Οποτε

$$\frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\left(1+x^2+x^4+\dots\right)dx=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots\ .$$

14.1.59. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε την σειρα *MacLaurin* της $f(x)=x^2+2x+1$. Δουλευοντας με τον ορισμο εχουμε

$$\begin{aligned}
f(x)&=x^2+2x+1\Rightarrow f(0)=1\\
f'(x)&=2x+2\Rightarrow f'(0)=2\\
f''(x)&=2\Rightarrow f''(0)=2\\
f^{(n)}(x)&=0\Rightarrow f^{(n)}(0)=0 \text{ για καθε } n\geq 3
\end{aligned}$$

οποτε παιρνουμε

$$f(x)=1+2\cdot x+\frac{2}{2!}x^2=1+2x+x^2$$

δηλ. την αρχικη συναρτηση. Αυτο δεν ειναι απροσδοκητο: η αρχικη συναρτηση ηταν ηδη πολυωνυμο και αρα η σειρα *Taylor* δεν θα εισαγει πολυωνυμικους ορους ανωτερης ταξης απο αυτους που ηδη υπαρχουν· οι δε συντελεστες θα ειναι ιδιοι με τους αρχικους.

14.1.60. Παραδειγμα. Ας υπολογισουμε την σειρα *Taylor* της $f(x) = x^2 + 2x + 1$ γυρω απο το $x_0 = 2$. Δουλευοντας με τον ορισμο εχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f(2) = 9 \\ f'(x) &= 2x + 2 \Rightarrow f'(2) = 6 \\ f''(x) &= 2 \Rightarrow f''(2) = 2 \\ f^{(n)}(x) &= 0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = 0 \text{ για καθε } n \geq 3 \end{aligned}$$

οποτε παιρνουμε

$$f(x) = 9 + 6 \cdot (x-2) + \frac{2}{2!}(x-2)^2 .$$

Αν κανεις τις πραξεις θα δεις οτι οντως

$$9 + 6 \cdot (x-2) + (x-2)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Η σειρα γυρω απο το $x_0 = 2$ ειναι και παλι πολυωνυμο 2ης ταξης (οπως η αρχικη συναρτηση) αλλα εκφρασμενη σε δυναμεις του $(x-2)$, οχι του x!

14.2 Λυμενα Προβληματα

14.2.1. Βρες την ακτινα συγκλισης της $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots .$$

Λυση. Με το κριτηριο λογου

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)}{x^n/n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x| .$$

Αρα η σειρα συγκλινει για $|x| < 1$ και δεν συγκλινει για $|x| > 1$. Η ακτινα συγκλισης ειναι $R = 1$.

14.2.2. Βρες την ακτινα συγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$.
Λυση. Με το κριτηριο λογου

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |(n+1)x| = \begin{cases} 0 & \text{οταν } x = 0 \\ \infty & \text{οταν } x \neq 0 \end{cases} .$$

Αρα η σειρα συγκλινει για $x = 0$ και δεν συγκλινει για $x \neq 0$. Η ακτινα συγκλισης ειναι $R = 0$.

14.2.3. Βρες την ακτινα συγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.
Λυση. Με το κριτηριο λογου

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} x^{n+1}}{\frac{(n!)^2}{(2n!)} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} x \right| = \frac{|x|}{4}.$$

Αρα η σειρα συγκλινει για $\frac{|x|}{4} < 1$ και δεν συγκλινει για $\frac{|x|}{4} > 1$. Η ακτινα συγκλισης ειναι $R = 4$.

14.2.4. Δειξε αριθμητικα και με γραφικη παρασταση την προσεγγιση της

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots .$$

Λυση. Θα χρησιμοποιησουμε προσεγγιση 0ης, 2ης και 4ης ταξης. Οριζουμε

$$\begin{aligned} f_{(0)}(x) &= 1 \\ f_{(2)}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} \\ f_{(4)}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

Η αριθμητικη προσεγγιση φαινεται στον παρακατω πινακα, για τις τιμες $x = 0,\ 0.1,\ 0.5,\ 1.0$.

x	0.000	0.100	0.500	1.000
$f_{(0)}(x) = 1$	1.000	1.000	1.000	1.000
$f_{(2)}(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$	1.000	0.995	0.877	0.500
$f_{(4)}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$	1.000	0.995	0.877	0.541
$f(x) = \cos x$	1.000	0.995	0.877	0.540

Η γραφικη παρασταση δινεται στο Σχημα 14.2.

14.2.5. Μεχρι ποιας ταξης οροι απαιτουνται στην σειρα $McLaurin$ της $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ για να βρουμε την τιμη $f(0.5)$ με σφαλμα μικροτερο απο 0.001;
Λυση. Το σφαλμα θα ειναι μικροτερο κατ΄ απολυτο τιμη απο τον πρωτο ορο που παραλειπεται (γιατι;). Δηλ. θα πρεπει να εχουμε

$$(0.5)^n < 0.001 \Rightarrow n > \frac{\ln 0.001}{\ln 0.5} = 9.965 \Rightarrow n \geq 10.$$

Πραγματι

$$\frac{1}{1+(0.5)^2} = 0.8000, \qquad 1 - (0.5)^2 + (0.5)^4 - (0.5)^8 + (0.5)^{10} = 0.809$$

και

$$\left| \frac{1}{1+(0.5)^2} - \left(1 - (0.5)^2 + (0.5)^4 - (0.5)^8 + (0.5)^{10}\right) \right| = |0.800 - 0.809| < 0.001.$$

14.2.6. Υπολογισε την τιμη του e^{-1} με ακριβεια δυο δεκαδικων.
Λυση. Εχουμε

$$e^{-1} = 1 + (-1) + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \ldots = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots .$$

Αρκει να βρουμε το μικροτερο n τετοιο ωστε $\frac{1}{n!} < 0.01$. Εχουμε

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{24} = 4.166 \times 10^{-2},$$
$$\frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 8.333 \times 10^{-3}.$$

Αρα θα λαβουμε

$$\frac{1}{e} \simeq 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} = 0.366.$$

14.2.7. Υπολογισε την τιμη του $\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^3} dx$ με ακριβεια δυο δεκαδικων.
Λυση. Εχουμε

$$\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \ldots .$$

Οποτε

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^3} dx = \int_0^{1/2} \left(1 - x^3 + x^6 - x^9 + \ldots\right) dx = \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{10} + \ldots .$$

Αρκει να βρουμε το μικροτερο n τετοιο ωστε $\frac{1}{n2^n} < 0.01$. Εχουμε

$$\frac{1}{4 \cdot 2^4} = 1.5625 \times 10^{-2},$$
$$\frac{1}{7 \cdot 2^7} = 1.1161 \times 10^{-3}.$$

Αρα θα λαβουμε

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^3} dx \simeq \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7} = 0.48549 .$$

14.2.8. Υπολογισε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= \frac{-2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'(0) = -2 \\ f''(x) &= \frac{6}{(1+x)^4} \Rightarrow f''(0) = 6 \\ &\text{κ.τ.λ.} \end{aligned}$$

οποτε

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \ldots \, .$$

14.2.9. Υπολογισε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = \sqrt{1+x}$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^{1/2} \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4} \\ f'''(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \Rightarrow f''(0) = \frac{3}{8} \\ &\text{κ.τ.λ.} \end{aligned}$$

οποτε

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \ldots \, .$$

14.2.10. Υπολογισε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = \cos(x^2)$.
Λυση. Παιρνουμε την (γνωστη) σειρα της $\cos z$ και οπου z θετουμε $z = x^2$. Εχουμε

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 + \ldots \Rightarrow \cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + \ldots$$

14.2.11. Υπολογισε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Λυση. Δουλευοντας παρομοια με την προηγουμενη, εχουμε

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

14.2.12. Υπολογισε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = \frac{1}{3+x}$.
Λυση. Παρομοια με την προηγουμενη, εχουμε

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots \Rightarrow \frac{1}{3+x} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + \ldots\right) = \frac{1}{3} - \frac{x}{9} + \frac{x^2}{27} - \ldots \, .$$

14.2.13. Υπολογισε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$.
Λυση. Δουλευουμε ως εξης. Γνωριζουμε οτι

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots \, .$$

Οποτε

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{1+x} &= (1-x)\left(1 - x + x^2 + \ldots\right) \\ &= \left(1 - x + x^2 + \ldots\right) - x\left(1 - x + x^2 + \ldots\right) \\ &= 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 - 2x^5 + \ldots \, . \end{aligned}$$

14.2.14. Υπολογισε την σειρα $MacLaurin$ της $f(x) = e^x \ln(1+x)$.
Λυση. Εδω εχουμε

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... \\
\ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + ...
\end{aligned}
$$

Τοτε θα ισχυει και

$$e^x \ln(1+x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...\right) \cdot \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + ...\right).$$

Ο πινακας του πολλαπλασιασμου ειναι

	1	x	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^3}{6}$	$\frac{x^4}{24}$	...
0	0	0	0	0	0	...
x	x	x^2	$\frac{x^3}{2}$	$\frac{x^4}{6}$	$\frac{x^5}{24}$	...
$-\frac{x^2}{2}$	$-\frac{x^2}{2}$	$-\frac{x^3}{2}$	$-\frac{x^4}{4}$	$-\frac{x^5}{12}$	$-\frac{x^6}{48}$	...
$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^3}{3}$	$\frac{x^4}{3}$	$\frac{x^5}{6}$	$\frac{x^6}{18}$	$\frac{x^7}{72}$	...
$-\frac{x^4}{4}$	$-\frac{x^4}{4}$	$-\frac{x^5}{4}$	$-\frac{x^6}{8}$	$-\frac{x^7}{24}$	$-\frac{x^8}{96}$	...
...	...	...	...	...	...	...

Τωρα, προσθετοντας στα στοιχεια κατα μηκος των αντιδιαγωνιων παιρνουμε

$$
\begin{aligned}
&\text{οροι 0ης ταξης} : 0 \\
&\text{οροι 1ης ταξης} : 0 + x = x \\
&\text{οροι 2ης ταξης} : 0 + x^2 - \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \\
&\text{οροι 3ης ταξης} : 0 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3} \\
&\text{οροι 4ης ταξης} : 0 + \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4} = 0
\end{aligned}
$$

Οποτε βλεπουμε οτι οι οροι μεχρι και 3ης ταξης ειναι

$$e^x \ln(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 + ... \ .$$

14.2.15. Υπολογισε την σειρα $MacLaurin$ της $f(x) = \frac{4x}{1+2x-3x^2}$.
Λυση. Εχουμε

$$\frac{4x}{1+2x-3x^2} = \frac{4x}{(1-x)(1+3x)}.$$

Με διασπαση σε απλα κλασματα παιρνουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{4x}{(1-x)(1+3x)} &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+3x} \\
&= \left(1 + x + x^2 + x^3 + ...\right) - \left(1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + ...\right) \\
&= 4x - 8x^2 + 28x^3 + ... \ .
\end{aligned}
$$

Η ακτινα συγκλισης της σειρας ειναι $R = \frac{1}{3}$ (γιατι;).

14.2.16. Υπολογισε την σειρα $Taylor$ της $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ γυρω απο το $x_0 = 0$.
Λυση. Παρατηρουμε οτι

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{x+1} \Rightarrow \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 = -\left(\frac{1}{x+1}\right)'.$$

Οποτε

$$\frac{1}{(x-1)^2} = -\left(\frac{1}{x+1}\right)' = -\left(1 - x + x^2 - x^3 + ...\right)' = 1 - 2x + 3x^2 + ... \quad .$$

14.2.17. Υπολογισε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = \arctan x$.
Λυση. Παρατηρουμε οτι

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \arctan x = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

Οποτε

$$\arctan x = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \left(1 - x^2 + x^4 - ...\right) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ...$$

14.2.18. Υπολογισε το αθροισμα

$$f(x) = \frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + ... \,.$$

Λυση. Παρατηρουμε οτι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{3\cdot 4} + ...\right)' \\ &= \left(\frac{x^2}{1\cdot 2}\right)' - \left(\frac{x^3}{2\cdot 3}\right)' + \left(\frac{x^4}{3\cdot 4}\right)' + ... = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... = \ln(1+x)\,. \end{aligned}$$

Οποτε

$$f(x) = \int \ln(1+x)\,dx = (1+x)\ln(1+x) - x.$$

14.2.19. Υπολογισε την σειρα *MacLaurin* της $f(x) = 2x^2 + x + 5$.
Λυση. Δουλευοντας με τον ορισμο εχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + x + 5 \Rightarrow f(0) = 5 \\ f'(x) &= 4x + 1 \Rightarrow f'(0) = 1 \\ f''(x) &= 4 \Rightarrow f''(0) = 4 \\ f^{(n)}(x) &= 0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = 0 \text{ για καθε } n \geq 3. \end{aligned}$$

οποτε παιρνουμε

$$f(x) = 5 + 1\cdot x + \frac{4}{2!}x^2 = 5 + x + 2x^2.$$

14.2.20. Υπολογισε την σειρα *Taylor* της $f(x) = 2x^2 + x + 5$ γυρω απο το $x_0 = 1$.
Λυση. Δουλευοντας με τον ορισμο εχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + x + 5 \Rightarrow f(1) = 8 \\ f'(x) &= 4x + 1 \Rightarrow f'(1) = 5 \\ f''(x) &= 4 \Rightarrow f''(0) = 4 \\ f^{(n)}(x) &= 0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = 0 \text{ για καθε } n \geq 3. \end{aligned}$$

οποτε παιρνουμε

$$f(x) = 8 + 5\cdot(x-1) + \frac{4}{2!}(x-1)^2\,.$$

Αν κανεις τις πραξεις θα δεις οτι οντως

$$8 + 5\cdot(x-1) + \frac{4}{2!}(x-1)^2 = 2x^2 + x + 5.$$

Η σειρα γυρω απο το $x_0 = 1$ ειναι και παλι πολυωνυμο 2ης ταξης (οπως η αρχικη συναρτηση) αλλα εκφρασμενη σε δυναμεις του $(x-1)$.

14.2.21. Υπολογισε την σειρα $Taylor$ της $f(x) = \cos x$ γυρω απο το $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
Λυση. Εχουμε

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + \dots .$$

14.2.22. Υπολογισε την σειρα $Taylor$ της $f(x) = \sqrt{x}$ γυρω απο το $x_0 = 2$.
Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= \sqrt{2 + (x-2)} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{x-2}{2}} \\ &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x-2}{2} - \frac{1}{8}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \dots\right) = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + \dots .\end{aligned}$$

14.2.23. Αποδειξε οτι η εκθετικη συναρτηση $E(x)$ του κεφαλαιου 3 ικανοποιει

$$\forall x \in \mathbb{R} : E(x) > 0.$$

Λυση. Θα δειξουμε οτι η $E(x)$ δεν μηδενιξεται (οποτε δεν μπορει να αλλαξει προσημο και πρεπει να ειναι παντου θετικη). Για τυχον x_0 εχουμε

$$0 = E(x_0) = E'(x_0) = E''(x_0) = \dots$$

αλλα και

$$\begin{aligned}E(x) &= E(x_0) + E'(x_0)(x - x_0) + E''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots \\ &= 0 + 0(x - x_0) + 0\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots = 0.\end{aligned}$$

Αρα αν υπηρχει ριζα x_0 θα ειχαμε

$$\forall x : E(x) = 0$$

αλλα ξερουμε οτι $E(0) = 1$. Οποτε δεν μπορει να ισχυει $E(x_0) = 0$.

14.2.24. Υπολογισε την σειρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .$$

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\arctan x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \Rightarrow \\ \arctan 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \Rightarrow \\ \frac{\pi}{4} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots .\end{aligned}$$

14.2.25. Υπολογισε την σειρα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.
Λυση. Εχουμε

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Οποτε εχουμε και

$$\left(\frac{e^x-1}{x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}\right)' \Rightarrow$$
$$\frac{xe^x-e^x+1}{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!} \Rightarrow$$
$$\frac{1\cdot e^1-e^1+1}{1^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n1^{n-1}}{(n+1)!} \Rightarrow 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}.$$

14.3 Αλυτα Προβληματα

14.3.1. Βρες το διαστημα συγκλισης των παρακατω δυναμοσειρων.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$. *Απ.* $(-1,1)$.
2. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/\left(n^3+1\right)$. *Απ.* $[-1,1]$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} (x/n)^n$. *Απ.* $(-\infty,\infty)$.
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \ln(n)\, x^n/n$. *Απ.* $[0,0]$.
5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n/n$. *Απ.* $(-1,1]$.
6. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n(n+1)$. *Απ.* $[-1,1]$.
7. $\sum_{n=0}^{\infty} (nx)^n/n!$. *Απ.* $[-e^{-1},e)$.
8. $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$. *Απ.* $[0,0]$.
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$. *Απ.* $[-1,1)$.
10. $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2+\sqrt{2}}+...+\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}+...$. *Απ.* $(-1,1)$.

14.3.2. Βρες το διαστημα συγκλισης των παρακατω *σειρων*.

1. $\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{4}+...+\sin\frac{x}{2^n}+...$. *Απ.* $(-\infty,\infty)$.
2. $\sin x+\sin\frac{2x}{2^2}+...+\sin\frac{nx}{n^2}+...$. *Απ.* $(-\infty,\infty)$.
3. $\frac{x}{e^x}+\frac{2x}{e^{2x}}+...+\frac{nx}{e^{nx}}+...$. *Απ.* $[0,\infty)$.

14.3.3. Χρησιμοποιησε σειρα *Taylor* για να βρεις με ακριβεια 3 δεκαδικων την τιμη των παρακατω συναρτησεων στο $x=1$.

1. $\sin x$. *Απ.* 0.841
2. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. *Απ.* 0.888.
3. $\arctan x$. *Απ.* 0.785.
4. $\sqrt[3]{1+x}$. *Απ.* 1.259.

14.3.4. Για τις παρακατω $f(x)$ και x_0, κανε την γραφικη παρασταση της προσεγγισης n-στης ταξης (για $n=0,1,2,5$) με σειρα *Taylor*.

1. $x_0=0$, $f(x)$. *Απ.* $\sin x^3 = x^3$.

2. $x_0 = 0,\ f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
   Απ. $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{4}\sqrt{2}x^2 - \frac{1}{12}\sqrt{2}x^3 + \frac{1}{48}\sqrt{2}x^4 + \frac{1}{240}\sqrt{2}x^5$.
3. $x_0 = 0,\ f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$. *Απ.* $x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6$.
4. $x_0 = 0,\ f(x) = \ln(x)$. *Απ.* Δεν υπαρχει.
5. $x_0 = 0,\ f(x) = \sqrt{1+x}$. *Απ.* $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$.
6. $x_0 = 0,\ f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$. *Απ.* $\frac{1}{2} + \frac{5}{4}x + \frac{13}{8}x^2 + \frac{29}{16}x^3 + \frac{61}{32}x^4$.
7. $x_0 = 0,\ f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}$. *Απ.*$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{23}{16}x^3 + \frac{55}{32}x^4$.
8. $x_0 = 0,\ f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$. *Απ.* $-1 + 2x - x^2 - x^3 + 2x^4$.

14.3.5. Υπολογισε την σειρα $Taylor$ της $f(x)$ γυρω απο το x_0.

1. Οταν $f(x) = \cosh x,\ x_0 = 0$. *Απ.* $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + ...$
2. Οταν $f(x) = e^{x^2},\ x_0 = 0$. *Απ.* $1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + ...$.
3. Οταν $f(x) = \arccos x,\ x_0 = 0$. *Απ.* $\frac{1}{2}\pi - x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + ...$
4. Οταν $f(x) = \tan x^2,\ x_0 = 0$. *Απ.* $x^2 + \frac{1}{3}x^6 + ...$
5. Οταν $f(x) = \sin^2 x,\ x_0 = 0$. *Απ.* $x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + ...$
6. Οταν $f(x) = x^2 + 2x + 4,\ x_0 = 0$. *Απ.* $4 + 2x + x^2$.
7. Οταν $f(x) = \frac{1}{1+x^7},\ x_0 = 0$. *Απ.* $1 + ...$
8. Οταν $f(x) = \frac{1}{1+x^4},\ x_0 = 0$. *Απ.* $1 - x^4 + x^8 - ...$.
9. Οταν $f(x) = \frac{1}{(1+x)^4},\ x_0 = 0$. *Απ.* $1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + 35x^4 + ...$.
10. Οταν $f(x) = \frac{1}{10+x},\ x_0 = 0$. *Απ.* $\frac{1}{10} - \frac{1}{100}x + \frac{1}{1000}x^2 - \frac{1}{10\,000}x^3 + \frac{1}{100\,000}x^4 + ...$.

14.3.6. Υπολογισε την σειρα $Taylor$ της $f(x)$ γυρω απο το x_0.

1. Οταν $f(x) = (x+3)\sin x,\ x_0 = 0$. *Απ.* $3x + x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + ...$
2. Οταν $f(x) = e^x \sin(2x),\ x_0 = 0$. *Απ.* $2x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x^4 - \frac{19}{60}x^5 + ...$
3. Οταν $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2},\ x_0 = 0$. *Απ.* $x - \frac{7}{6}x^3 + \frac{47}{40}x^5 + ...$
4. Οταν $f(x) = e^{\sin x},\ x_0 = 0$. *Απ.* $1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + ...$.
5. Οταν $f(x) = e^x,\ x_0 = 1$.
   Απ. $e + e(x-1) + \left(\frac{1}{2}e\right)(x-1)^2 + \left(\frac{1}{6}e\right)(x-1)^3 + \left(\frac{1}{24}e\right)(x-1)^4 + ...$
6. Οταν $f(x) = x^2 + 2x + 4,\ x_0 = 1$. *Απ.* $7 + 4(x-1) + (x-1)^2$.
7. Οταν $f(x) = \frac{1}{1+x},\ x_0 = 2$.
   Απ. $\frac{1}{3} - \frac{1}{9}(-2+x) + \frac{1}{27}(-2+x)^2 - \frac{1}{81}(-2+x)^3 + \frac{1}{243}(-2+x)^4 + ...$.
8. Οταν $f(x) = \frac{1}{2+x},\ x_0 = 2$.
   Απ. $\frac{1}{4} - \frac{1}{16}(x-2) + \frac{1}{64}(x-2)^2 - \frac{1}{256}(x-2)^3 + \frac{1}{1024}(x-2)^4 + ...$.

14.3.7. Υπολογισε το αθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$. *Απ.* $x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x$.

14.3.8. Υπολογισε το αθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} n3^{n-1}x^{n-1}$. *Απ.* $\frac{1}{(3x-1)^2}$.

14.3.9. Υπολογισε το αθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$. *Απ.* $-\ln\frac{2}{3}$.

14.3.10. Υπολογισε το αθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$. (*Υποδ.* Παρε την $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$). *Απ.* 12.

14.3.11. Βρες την σειρα $McLaurin$ του ολοκληρωματος $\int \frac{\sin x}{x} dx$.
Απ. $x - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{600}x^5 - ....$

14.3.12. Βρες την σειρα $McLaurin$ του ολοκληρωματος $\int \frac{e^x}{x^2} dx$.
Απ. $\frac{1}{2x}\left(2x\ln x + x^2 - 2 + ...\right)$.

14.3.13. Βρες την σειρα $McLaurin$ του ολοκληρωματος $\int e^{-x^2} dx$.
Απ. $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - ...$.

14.3.14. Υπολογισε τα παρακατω με ακριβεια 3 δεκαδικων ψηφιων.

1. $\sqrt{1.005}$. *Απ.* 1.002.
2. $\sqrt[3]{1.025}$. *Απ.* 1.008.
3. $\sqrt[3]{73.25}$. *Απ.* 4.184.
4. $\cos 12$: *Απ.* 0.843.
5. $\cos 12^o$: *Απ.* 0.0.978.

14.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

14.4.1. Δινεται η συναρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{οταν } x \neq 0, \\ 0 & \text{οταν } x = 0. \end{cases}$$

Δειξε τα εξης.

1. Η συναρτηση εχει σειρα $Taylor$ στο $x_0 = 0$.
2. Η συναρτηση ισουται με την σειρα $Taylor$ αυτης *μονο* στο $x_0 = 0$.

14.4.2. Βρες την σειρα $MacLaurin$ της $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}\cos\left(n^2 x\right)$.

14.4.3. Αποδειξε οτι $\int_0^{\infty} \sin\left(x^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

14.4.4. Βρες την σειρα $MacLaurin$ της $f(z) = (1+qx)\left(1+qx^2\right)\left(1+qx^4\right)...$ για τυχον q.

14.4.5. Δειξε οτι

$$\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1-x^3}{1+x^3} \cdot ... = 1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + 2x^{16} - ... \ .$$

14.4.6. Δειξε οτι

$$\frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^3} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^5} \cdot ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Ειναι το δεξι μελος της παραπανω μια δυναμοσειρα;

14.4.7. Εστω οτι το $\phi(x)$ ειναι πολυωνυμο με ακεραιους συντελεστες. Δειξε οτι υπαρχει ακεραιος N τετοιος ωστε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n!} = Ne.$$

14.4.8. Εστω οτι τα $\phi(x)$ και $\gamma(x)$ ειναι πολυωνυμα τα οποια δεν εχουν ακεραιες ριζες. Δειξε οτι η σειρα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(n)}{\gamma(n)}$ ικανοποιει την *διαφορικη εξισωση*

$$\gamma\left(x\frac{d}{dx}\right) y = \phi\left(x\frac{d}{dx}\right)\frac{1}{1-x}.$$

14.4.9. Δειξε οτι η δυναμοσειρα

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \ldots$$

ικανοποιει την εξισωση

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \left(1+x^2\right) f(x).$$

15 ΔΕ Πρωτης Ταξης

Διαφορικη εξισωση πρωτης ταξης ειναι μια εξισωση η οποια συνδεει μια συναρτηση $x(t)$ με την παραγωγο $\frac{dx}{dt}$ και μας δινει πληροφοριες για τον ρυθμο μεταβολης της $x(t)$. Αξιοποιωντας αυτη την πληροφορια, μπορουμε να προσδιορισουμε την αγνωστη συναρτηση $x(t)$. Δηλ., ο ζητουμενος αγνωστος σε μια διαφορικη εξισωση ειναι μια *συναρτηση*. Οι διαφορικες εξισωσεις ειναι ενα απο τα σημαντικοτερα εργαλεια για την μελετη φυσικων και κοινωνικων φαινομενων.

15.1 Θεωρια και Παραδειγματα

15.1.1. Ορισμος. Μια *διαφορικη εξισωση* (*ΔΕ*) ειναι μια εξισωση η οποια εμπλεκει μια αγνωστη συναρτηση $x(t)$ και τις παραγωγους αυτης:

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0.$$

Η *ταξη* της ΔΕ ειναι η υψηλοτερη ταξη παραγωγου που εμφανιζεται σε αυτη.

15.1.2. Παραδειγμα. Η

$$\frac{dx}{dt} - tx^3 + 5t = 0$$

ειναι μια ΔΕ πρωτης ταξης. Η

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = \sin(t)$$

ειναι μια ΔΕ δευτερης ταξης.

15.1.3. Ορισμος. Μια *λυση της ΔΕ*

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}, ..., \frac{d^n x}{dt^n}\right) = 0 \tag{15.1}$$

στο διαστημα (a,b) ειναι μια συναρτηση $x(t)$ η οποια οταν εισαχθει στην (15.1) την μετατρεπει σε ταυτοτητα για καθε $t \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$.

15.1.4. Παραδειγμα. Καθε συναρτηση της μορφης $x(t) = ce^t$ ειναι λυση της

$$\frac{dx}{dt} = x(t) \tag{15.2}$$

στο συνολο $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Διοτι

$$x(t) = ce^t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = ce^t$$

οποτε, αντικαθιστωντας την $x(t)$ με ce^t στην (15.2), αυτη μετατρεπεται στην ταυτοτητα

$$ce^t = ce^t.$$

15.1.5. Παραδειγμα. Ελεγξε οτι στο συνολο $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, η

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0$$

εχει λυσεις τις $x_1(t) = e^{2t}$ και $x_2(t) = e^{3t}$ καθως και καθε συναρτηση της μορφης $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$.

15.1.6. Παραδειγμα. Ελεγξε οτι στο συνολο $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, η

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t^2}$$

εχει την λυση $x(t) = ce^{-\frac{1}{t}}$.

15.1.7. Ορισμος. Μια ΔΕ 1ης ταξης εχει την μορφη

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \tag{15.3}$$

Αν μπορουμε να λυσουμε την (15.3) ως προς $\frac{dx}{dt}$, παιρνουμε την *τυπική μορφή* της ΔΕ 1ης ταξης:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{15.4}$$

Η προσθετη συνθηκη

$$x(t_0) = x_0$$

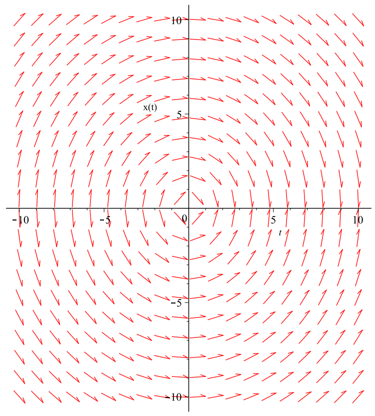
(για καταλληλα t_0, x_0) λεγεται *αρχικη συνθηκη*.

15.1.8. Ορισμος. Η *γενικη λυση* της (15.4) ειναι μια *οικογενεια συναρτησεων* $x(t, c)$ (με παραμετρο c) τετοια ωστε για καθε τιμη $c = c_1$ η $x(t, c_1)$ ικανοποιει την (15.4) (σε καποιο διαστημα (a, b)).

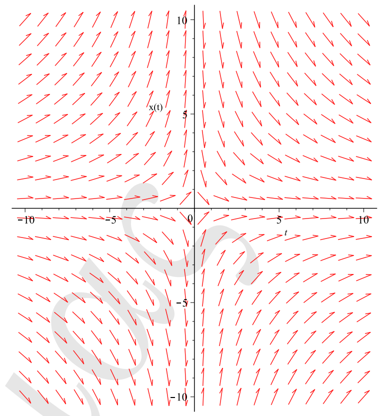
15.1.9. Παραδειγμα. Η ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} \tag{15.5}$$

εχει γενικη λυση $x(t, c) = \frac{c}{t}$, δηλ. μια οικογενεια υπερβολων, οπως φαινεται στο Σχημα 15.1. Η *μοναδικη* λυση της (15.5) η οποια ικανοποιει και την αρχικη συνθηκη $x(2) = 1$ ειναι η $x(t) = \frac{2}{t}$· γεωμετρικα, ειναι η υπερβολη η οποια διερχεται απο το σημειο $(2, 1)$. Αυτη η λυση ισχυει για οποιαδηποτε $t \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ με $\varepsilon < 1$ (γιατι;).



Σχήμα 15.1



Σχήμα 15.2

15.1.10. Οπως συμβαινει και στις αλγεβρικες εξισωσεις, μια διαφορικη εξισωση μπορει να εχει μια, πολλες ή καμμια λυση. Θα δωσουμε παραλατω ενα θεωρημα υπαρξης και μοναδικοτητας της γενικης διαφορικης εξισωσης πρωτης ταξης.

15.1.11. Ορισμος. Εστω συναρτηση δυο μεταβλητων $f(x,y)$. Η *μερικη παραγωγος της* f *ως προς το* x συμβολιζεται με $\frac{\partial f}{\partial x}$ ή με f_x και οριζεται να ειναι η συναρτηση που προκυπτει αν παραγωγισουμε την $f(x,y)$ ως προς το x *θεωρωντας το* y ως σταθερα. Η *μερικη παραγωγος της* f *ως προς το* y συμβολιζεται με $\frac{\partial f}{\partial y}$ ή με f_y και οριζεται αναλογα.

15.1.12. Παραδειγμα. Η $f(x,y) = x^2 y + x^2 + \sin y$ εχει

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \cos y.$$

15.1.13. Θεωρημα (Υπαρξης και Μοναδικοτητας). Εστω ΔΕ με αρχικη συνθηκη:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = t_0. \tag{15.6}$$

Αν υπαρχει $\varepsilon > 0$ τετοιος ωστε η f και η $\frac{\partial f}{\partial x}$ ειναι συνεχεις για καθε στοιχειο (t,x) του συνολου

$$D_R(t_0,x_0) = \left\{(t,x) : (t-t_0)^2 + (x-x_0)^2 < \varepsilon\right\},$$

τοτε υπαρχει ακριβως μια συναρτηση $x(t)$ η οποια ειναι λυση της (15.6) στο $D_R(t_0,x_0)$.
Αποδειξη. Η αποδειξη του Θεωρηματος παραλειπεται, διοτι ειναι αρκετα πεπλεγμενη. Απλα αναφερουμε οτι βασιζεται στην εφαρμογη της επαναπληπτικης διαδικασιας του *Picard*.

15.1.14. Μπορουμε να δωσουμε μια διαισθητικη εμηνεια της (15.6) και του Θεωρηματος 15.1.13. Γνωριζουμε οτι

$$\frac{dx}{dt} \cong \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

και η προσεγγιση ειναι τοσο καλυτερη ος το Δt γινεται μικροτερο. Ας επιλεξουμε ενα Δt και ας θεσουμε

$$x_0 = x(t_0), \quad x_1 = x(t_0 + \Delta t), \quad x_2 = x(t_0 + 2\cdot\Delta t), ..., \quad x_n = x(t_0 + n\cdot\Delta t), ...$$

Τοτε η (15.6) προσεγγιζεται απο μια αναδρομικη ακολουθια:

$$x_0 = \text{ δεδομενο},$$
$$\forall n \geq 0 : \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = f\left(n\Delta t, x_n\right)$$

η οποια αναλυεται σε ενα *συστημα αλγεβρικων εξισωσεων*:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \text{ δεδομενο}, \\
x_1 &= x_0 + f\left(0, x_0\right)\Delta t, \\
x_2 &= x_1 + f\left(\Delta t, x_1\right)\Delta t, \\
x_3 &= x_2 + f\left(2\Delta t, x_2\right)\Delta t, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Μπορουμε να λυσουμε διαδοχικα τις αλγεβρικες εξισωσεις και να προσδιορισουμε την ακολουθια

$$\left(x_0, x_1, x_2, \dots\right)$$

η οποια αποτελει μια *προσεγγιστικη λυση* της (15.6)· περιμενουμε οτι η προσεγγιση θα ειναι τοσο καλυτερη οσο μικροτερο ειναι το Δt (γιατι;).

15.1.15. Παραδειγμα. Εφαρμοζουμε την διαδικασια προσεγγιστικης επιλυσης στην ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}, \quad x\left(2\right) = 1. \tag{15.7}$$

Για οποιοδηποτε Δt εχουμε

$$\begin{aligned}
x_0 &= x\left(2\right) = 1, \\
x_1 &= x\left(2 + \Delta t\right) = x_0 + f\left(2, x_0\right)\Delta t = x_0 - \frac{x_0}{2}\Delta t, \\
x_2 &= x\left(2 + 2\Delta t\right) = x_1 + f\left(2 + \Delta t, x_0\right)\Delta t = x_1 - \frac{x_1}{2 + \Delta t}\Delta t, \\
x_3 &= x\left(2 + 3\Delta t\right) = x_2 + f\left(2 + 2\Delta t, x_0\right)\Delta t = x_2 - \frac{x_2}{2 + 2\Delta t}\Delta t, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Επιλεγοντας $\Delta t = 0.1$ παιρνουμε

t	2.000	2.100	2.200	2.300	2.400
$x\left(t\right)$	1.000	0.950	0.905	0.863	0.826

Επιλεγοντας $\Delta t = 0.02$ παιρνουμε

t	2.000	2.020	2.040	2.060	2.080	2.100
$x\left(t\right)$	1.000	0.999	0.980	0.970	0.961	0.951

Η αληθης τιμη $x\left(2.1\right)$ ειναι

$$x\left(2.1\right) = \frac{2}{2.1} = 0.95238$$

(γιατι;). Βλεπουμε οτι η προσεγγιστικη λυση με $\Delta t = 0.1$ εχει υψηλο *σχετικο σφαλμα*:

$$\left|\frac{0.95238 - 0.826}{0.95238}\right| = 0.13270.$$

Αλλα η προσεγγιστικη λυση με $\Delta t = 0.02$ εχει σημαντικα πιο χαμηλο σχετικο σφαλμα:

$$\left|\frac{0.95238 - 0.951}{0.95238}\right| = 0.00145.$$

15.1.16. Θυμησου οτι η *τυπικη μορφη* μιας ΔΕ 1ης ταξης ειναι $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$. Αν τωρα $f(t,x) = f_1(t) f_2(x)$ παιρνουμε μια ειδικη μορφη ΔΕ η οποια μπορει να λυθει πολυ ευκολα.

15.1.17. Παρακατω θα δωσουμε μεθοδους επιλυσης συγκεκριμενων κατηγοριων διαφορικωβν εξισωσεων πρωτης ταξης.

15.1.18. Ορισμος. *Χωριζομενη ΔΕ* λεγεται καθε ΔΕ της μορφης

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t) f_2(x). \tag{15.8}$$

Επισης χωριζομενη ΔΕ λεγονται και καθε μια η οποια εχει μια απο τις (ισοδυναμες με την (15.8)) μορφες

$$f_1(t) dt = \frac{1}{f_2(x)} dx, \quad M(t) dt + N(x) dx = 0. \tag{15.9}$$

15.1.19. Θεωρημα. Η χωριζομενη ΔΕ

$$M(t) dt + N(x) dx = 0. \tag{15.10}$$

εχει γενικη λυση την

$$\int M(t) dt + \int N(x) dx = c$$

ή ισοδυναμα την

$$G(t) + H(x) = c.$$

Αποδειξη. Προκυπτει αμεσα απο την ολοκληρωση της (15.10).

15.1.20. Παραδειγμα. Η γενικη λυση της

$$tdt + xdx = 0$$

λαμβανεται με ολοκληρωση:

$$tdt + xdx = 0 \Rightarrow \int tdt + \int xdx = c \Rightarrow \frac{t^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c.$$

Η λυση μπορει να γραφει και στην μορφη

$$x(t) = \pm\sqrt{2c - t^2}.$$

Γεωμετρικα ειναι μια οικογενεια κυκλων με κεντρο το $(0,0)$ και ακτινα $\sqrt{c}$, οπως φαινεται στο Σχημα 15.2.

15.1.21. Παραδειγμα. Η γενικη λυση της ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = ax. \tag{15.11}$$

υπολογιζεται ως εξης:

$$\frac{dx}{x} = at \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int at \Rightarrow \ln x = at + c_1 \Rightarrow e^{\ln x} = e^{at+c_1} \Rightarrow x(t) = ce^{at}.$$

15.1.22. Παραδειγμα. Η γενικη λυση της ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{x}. \tag{15.12}$$

λαμβανεται ως εξης:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2}{x} \Rightarrow t^2 dt - xdx = 0 \Rightarrow \int t^2 dt - \int xdx = c \Rightarrow \frac{t^2}{3} - \frac{x^2}{2} = c.$$

Η τελευταια εκφραση δινει την λυση της (15.12) σε *πεπλεγμενη μορφη*. Μπορουμε να λυσουμε ως προς x και να γραψουμε την λυση στην μορφη

$$x(t) = \sqrt{2\left(\frac{t^2}{3} - c\right)}.$$

15.1.23. Παραδειγμα. Η γενικη λυση της ΔΕ

$$(1+t)\,xdt + (1-x)\,tdx = 0, \tag{15.13}$$

λαμβανεται ως εξης:

$$\begin{aligned}
\frac{1+t}{t}dt + \frac{1-x}{x}dx = 0 \Rightarrow \\
\int \frac{1+t}{t}dt + \int \frac{1-x}{x}dx = c \Rightarrow \\
\ln|t| + t + \ln|x| - x = c \Rightarrow \\
\ln|xt| + t - x = c.
\end{aligned}$$

15.1.24. Παραδειγμα. Η μοναδικη λυση της ΔΕ με αρχικη συνθηκη:

$$x\,(0) = 2, \quad \frac{dx}{dt} = xt. \tag{15.14}$$

μπορει να υπολογιστει ως εξης:

$$\frac{dx}{x} = tdt \Rightarrow \ln x = \frac{t^2}{2} + c_1 \Rightarrow x\,(t) = ce^{\frac{t^2}{2}}.$$

Τωρα

$$2 = x\,(0) = ce^{\frac{0^2}{2}} \Rightarrow c = 2.$$

Οποτε η ζητουμενη λυση ειναι

$$x\,(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}}.$$

15.1.25. Παραδειγμα. Η μοναδικη λυση της ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = -5x. \tag{15.15}$$

η οποια ικανοποιει

$$\int_0^\infty x\,(t)\,dt = 1.$$

υπολογιζεται ως εξης. Η ΔΕ εχει γενικη λυση την $x\,(t) = ce^{-5t}$. Για να ικανοποιει και την ολοκληρωτικη συνθηκη, θα εχουμε

$$1 = \int_0^\infty ce^{-5t}dt = \frac{1}{5}c \Rightarrow c = 5.$$

Οποτε η ζητουμενη λυση ειναι

$$x\,(t) = 5e^{-5t}.$$

15.1.26. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ:

$$x\,(0) = 2, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{t+1}.$$

15.1.27. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ:

$$x\,(1) = 2, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{t}.$$

15.1.28. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη:

$$x\,(0) = 3, \quad \frac{dx}{dt} = x^2t.$$

15.1.29. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη:

$$x\,(0) = 3, \quad \frac{dx}{dt} = x^2t.$$

15.1.30. Ορισμος. Η συναρτηση $f(t,x)$ λεγεται *ομοιογενης n-στης ταξης* ανν

$$\forall a \in \mathbb{R} : f(ax, at) = a^n f(x,t).$$

15.1.31. Παραδειγμα. Η $f(t,x) = \frac{x+t}{t}$ ειναι ομοιογενης μηδενικης ταξης, διοτι

$$\forall a \in \mathbb{R} : f(ax, at) = \frac{ax+at}{at} = a^0 f(x,t).$$

15.1.32. Θεωρημα. Εστω η ΔΕ 1ης ταξης

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{15.16}$$

οπου η $f(x,t)$ ειναι ομοιογενης μηδενικης ταξης. Τοτε με τις αντικαταστασεις

$$x = ut, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$$

η (15.16) μετασχηματιζεται σε μια χωριζομενη ΔΕ.
Αποδειξη. Εαν θεσουμε $x = ut$, τοτε με αλυσωτη παραγωγιση $\frac{dx}{dt}$ εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$$

και (απο την ομοιογενεια)

$$f(t, ut) = f(1, u).$$

Οποτε η (15.16) γινεται

$$\frac{du}{dt}t + u = f(1,u) \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{f(1,u) - u}{t}$$

η οποια ειναι χωριζομενη.

15.1.33. Παραδειγμα : Θα λυσουμε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t+x}{t}. \tag{15.17}$$

Θετουμε $x = ut$, οποτε $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$. Αντικαθιστωντας στην (15.17) παιρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}t + u = \frac{t+ut}{t} = 1 + u \Rightarrow \\ \frac{du}{dt}t = 1 \Rightarrow du = \frac{dt}{t} \Rightarrow \int du = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow \\ u = \ln|t| + c \Rightarrow x(t) = t \ln|ct|. \end{aligned}$$

15.1.34. Παραδειγμα : Θα λυσουμε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{tx}{t^2 - x^2}. \tag{15.18}$$

Θετουμε $x = ut$, οποτε $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$. Αντικαθιστωντας στην (15.18) παιρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt}t + u = \frac{ut^2}{t^2 - u^2t^2} = \frac{u}{1-u^2} \Rightarrow \\ \frac{du}{dt}t = \frac{u}{1-u^2} - u = \frac{u^3}{1-u^2} \Rightarrow \\ \frac{dt}{t} = \frac{1-u^2}{u^3}du \Rightarrow \int \frac{dt}{t} = \int \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right) du \Rightarrow \\ \ln|t| + c = -\frac{1}{2u^2} - \ln|u| \Rightarrow \ln|t| + c = -\frac{1}{2\left(\frac{x}{t}\right)^2} - \ln\left|\frac{x}{t}\right| \Rightarrow -\frac{t^2}{2x^2} = \ln|cx|. \end{aligned}$$

Αυτη ειναι η λυση σε πλεγμενη μορφη.

15.1.35. Παραδειγμα. Θα λυσουμε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη:

$$x(1) = 2, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t-x}{t}. \tag{15.19}$$

Θετουμε $x = ut$, οποτε $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$. Αντικαθιστωντας στην (15.17) παιρνουμε

$$\frac{du}{dt}t + u = \frac{t-ut}{t} = 1 - u \Rightarrow$$
$$\frac{du}{dt}t = 1 - 2u \Rightarrow \frac{du}{1-2u} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \int \frac{1}{1-2u} du = \int \frac{dt}{t} \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left(u - \frac{1}{2}\right) = \ln t + c_1 \Rightarrow u - \frac{1}{2} = \frac{c}{t^2} \Rightarrow x(t) = \frac{t}{2} + \frac{c}{t}.$$

Επισης

$$2 = x(1) = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

οποτε τελικα η ζητουμενη λυση ειναι

$$x(t) = \frac{t+3}{2}.$$

15.1.36. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 + tx - t^2}{t^2}.$$

15.1.37. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x + te^{-x/t}}{t}.$$

15.1.38. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη:

$$x(1) = 1, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{t+x}{t}.$$

15.1.39. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη:

$$x(-1) = 2, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{t^3 + x^3}{tx^2}.$$

15.1.40. Ορισμος. Λεμε οτι η ΔΕ

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0 \tag{15.20}$$

ειναι *ακριβης ανν*

$$M_x = N_t.$$

15.1.41. Θεωρημα. Εστω οτι οι $M(t,x)$, $N(t,x)$ ειναι συνεχεις και εχουν συνεχεις μερικες παραγωγους M_x και N_t σε καποιο

$$R = \{(t,x) : t \in (a_1, b_1) \text{ και } x \in (a_2, b_2)\}.$$

Τοτε η

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx = 0 \tag{15.21}$$

ειναι ακριβης (στο R) ανν

$$\forall (t,x) \in R : M_x = N_t.$$

Σε αυτη την περιπτωση υπαρχει συναρτηση $F(t,x)$ τετοια ωστε

$$M = F_t, \qquad N = F_x$$

και μια λυση της (15.21) δινεται απο την

$$F(t,x) = c,$$

οπου c ειναι τψχουσα σταθερα.

Αποδειξη. Η αποδειξη δεν ειναι δυσκολη αλλα απαιτει εννοιες απο το Λογισμο Συναρτησεων *Πολλων* Μεταβλητων, οποτε παραλειπεται.

15.1.42. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την ΔΕ

$$xdt + tdx = 0. \tag{15.22}$$

Ελεγχουμε οτι η (15.22) ειναι ακριβης. Οντως

$$\begin{aligned} M(t,x) &= x, \quad M_x = 1, \\ N(t,x) &= t, \quad N_t = 1 \end{aligned}$$

και $M_x = N_t$. Οποτε υπαρχει καποια συναρτηση $F(t,x)$ τετοια ωστε $M(t,x) = F_t$ και $N(t,x) = F_x$. Τοτε εχουμε

$$F_t = M(t,x) = x \Rightarrow F(t,x) = \int xdt = xt + c(x).$$

Προσεξε οτι η σταθερα ολοκληρωσης ειναι $c(x)$, συναρτηση του x (γιατι συμβαινει αυτο;). Τοτε

$$t = N(t,x) = F_x = \frac{\partial}{\partial x}(xt + c(x)) = t + c_x \Rightarrow 0 = c_x \Rightarrow c(x) = c_1.$$

Οποτε

$$F(t,x) = xt + c_1.$$

Αν και δεν ειναι απαραιτητο, σε αυτο το σημειο μπορουμε να ελεγξουμε οτι

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{\partial}{\partial t}(xt + c_1) = x = M(t,x) \\ F_x &= \frac{\partial}{\partial x}(xt + c_1) = t = N(t,x) \end{aligned}$$

αρα οντως η ΔΕ (15.22) ειναι ακριβης και η λυση της ειναι

$$xt + c_1 = 0.$$

15.1.43. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την ΔΕ

$$\frac{2t}{x^3}dt + \frac{x^2 - 3t^2}{x^4}dx = 0. \tag{15.23}$$

Ελεγχουμε οτι η (15.23) ειναι ακριβης. Οντως

$$\begin{aligned} M(t,x) &= \frac{2t}{x^3}, \quad M_x = -\frac{6t}{x^4}, \\ N(t,x) &= \frac{x^2 - 3t^2}{x^4}, \quad N_t = -\frac{6t}{x^4} \end{aligned}$$

και $M_x = N_t$. Οποτε υπαρχει καποια συναρτηση $F(t,x)$ τετοια ωστε $M(t,x) = F_t$ και $N(t,x) = F_x$. Τοτε εχουμε

$$F_t = \frac{2t}{x^3} \Rightarrow F(t,x) = \int \frac{2t}{x^3}dt = \frac{t^2}{x^3} + c(x).$$

Προσεξε οτι η σταθερα ολοκληρωσης ειναι $c(x)$, συναρτηση του x (γιατι συμβαινει αυτο;). Τοτε

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3t^2}{x^4} = N(t,x) = F_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t^2}{x^3} + c(x)\right) = -\frac{3t^2}{x^4} + c_x \Rightarrow \\ \frac{1}{x^2} = c_x \Rightarrow c(x) = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c_1. \end{aligned}$$

Οποτε

$$F(t,x) = \frac{t^2 - x^2}{x^3} + c_1.$$

Ελεγχουμε οτι

$$F_t = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t^2 - x^2}{x^3} + c_1\right) = \frac{2t}{x^3} = M\left(t,x\right)$$
$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t^2 - x^2}{x^3} + c_1\right) = \frac{x^2 - 3t^2}{x^4} = N\left(t,x\right)$$

αρα οντως η ΔΕ (15.23) ειναι ακριβης και η λυση της ειναι

$$\frac{t^2 - x^2}{x^3} + c_1 = 0.$$

15.1.44. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ

$$3t^2 x dt + 4t^3 dx = 0.$$

15.1.45. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ

$$\left(4t^3x^3 + 3t^2\right)dt + \left(3t^4x^2 + 6x^2\right)dx = 0.$$

15.1.46. Υπαρχουν περιπτωσεις στις οποιες η

$$M\left(t,x\right)dt + N\left(t,x\right)dx = 0 \tag{15.24}$$

δεν ειναι ακριβης, αλλα υπαρχει συναρτηση $G\left(t,x\right)$ τετοια ωστε να ειναι ακριβης η

$$G\left(t,x\right)M\left(t,x\right)dt + G\left(t,x\right)N\left(t,x\right)dx = 0. \tag{15.25}$$

Σε τετοια περιπτωση λεμε οτι η $G\left(t,x\right)$ ειναι *ολοκληρωτικος παραγοντας* της (15.24). Παρακατω θα δωσουμε παραδειγματα επιλυσης ΔΕ με χρηση ολοκληρωτικου παραγοντα.

15.1.47. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την ΔΕ

$$\left(t + t^2 + x^2\right)dt + xtdx = 0. \tag{15.26}$$

Εχουμε $M = t + t^2 + x^2$, $N = xt$ και

$$M_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(t + t^2 + x^2\right) = 2x \neq x = \frac{\partial}{\partial t}\left(xt\right) = N_t$$

αρα η (15.26) δεν ειναι ακριβης. Ομως εστω οτι υπαρχει συναρτηση $G\left(t\right)$ (η οποια εξαρταται μονο απο το t!!!) τετοια ωστε η

$$G\left(t\right)\left(t + t^2 + x^2\right)dt + G\left(t\right)xtdx = 0. \tag{15.27}$$

ειναι ακριβης. Τοτε θα πρεπει να ειναι

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(G\left(t\right)\left(t + t^2 + x^2\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(G\left(t\right)xt\right) \Rightarrow \\ G\left(t\right)2x = G\left(t\right)x + xtG_t \Rightarrow \\ G\left(t\right) = t\frac{\partial G}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial G}{G} = \frac{\partial t}{t}.\end{aligned}$$

Οποτε

$$G\left(t\right) = ct$$

Αυτος ειναι ο ζητουμενος ολοκληρωτικος παραγοντας. Τωρα θα λυσουμε την

$$\left(t^2 + t^3 + x^2 t\right)dt + xt^2 dx = 0. \tag{15.28}$$

Θετοντας $M_1 = t^2 + t^3 + x^2 t$ και $N_1 = xt^2$ βλεπουμε οτι

$$G_x\left(t^2 + t^3 + x^2 t\right) = 2xt = G_t\left(xt^2\right)$$

αρα η (15.28) ειναι ακριβης. Οπως προηγουμενως, θα εχουμε

$$F_t = M_1 = t^2 + t^3 + x^2 t \Rightarrow F = \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{x^2 t^2}{2} + c(x).$$

Τωρα θα εχουμε

$$F_x = xt^2 + c_x = xt^2 = N_1 \Rightarrow c_x = 0 \Rightarrow c = 0.$$

Οποτε η λυση της (15.26) ειναι

$$\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \frac{x^2 t^2}{2} = c_1.$$

15.1.48. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την ΔΕ

$$\left(x + tx^2\right) dt - tdx = 0. \tag{15.29}$$

Εχουμε $M = x + tx^2$, $N = -t$ και

$$M_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(x + tx^2\right) = 1 + 2xt \neq -1 = \frac{\partial}{\partial t}(-t) = N_t$$

αρα η (15.29) δεν ειναι ακριβης. Ομως εστω οτι υπαρχει συναρτηση $G(x)$ (η οποια εξαρταται μονο απο το x!!!) τετοια ωστε η

$$G(x)\left(x + tx^2\right) dt - G(x)\, tdx = 0. \tag{15.30}$$

ειναι ακριβης. Τοτε θα πρεπει να ειναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(G(x)\left(x + tx^2\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-tG(x)\right) \Rightarrow \\ G(x)(1 + 2xt) + \left(x + tx^2\right) G_x &= -G(x) \Rightarrow \\ G_x &= -G(x)\frac{(2 + 2xt)}{x + tx^2} = -\frac{2G(x)}{x}. \end{aligned}$$

Οποτε

$$G_x = -\frac{2G(x)}{x} \Rightarrow \frac{\partial G}{G} = -2\frac{\partial x}{x} \Rightarrow \ln G = -2\ln x + c_1 \Rightarrow G(x) = \frac{c}{x^2}.$$

Αυτος ειναι ο ζητουμενος ολοκληρωτικος παραγοντας. Τωρα θα λυσουμε την

$$\frac{x + tx^2}{x^2} dt - \frac{t}{x^2} dx = 0. \tag{15.31}$$

Θετοντας $M_1 = \frac{x+tx^2}{x^2}$ και $N_1 = -\frac{t}{x^2}$ βλεπουμε οτι

$$\frac{\partial G}{\partial x}\left(\frac{x + tx^2}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial G}{\partial t}\left(-\frac{t}{x^2}\right)$$

αρα η (15.31) ειναι ακριβης. Λυνοντας αυτη με τις προηγουμενες μεθοδους παιρνουμε

$$\frac{t}{x} + \frac{t^2}{2} + c = 0.$$

15.1.49. Παραδειγμα. Λυσε την ΔΕ

$$\left(2tx^3 - 2t^3x^3 - 4tx^2 + 2t\right) dt + \left(3t^2x^2 + 4x\right) dx = 0.$$

15.1.50. Παραδειγμα. Λυσε την ΔΕ

$$2tx^3 dt + \left(3t^2x^2 + t^2x^3 + 1\right) dx = 0.$$

15.1.51. Ορισμος. *Γραμμικη ΔΕ 1ης ταξης* λεγεται καθε εξισωση της μορφης

$$\frac{dx}{dt} + P(t)\,x = Q(t)\,.$$

15.1.52. Θεωρημα. Η γραμμικη ΔΕ 1ης ταξης

$$\frac{dx}{dt} + P(t)\,x = Q(t) \tag{15.32}$$

εχει γενικη λυση την

$$x(t) = e^{-\int P(t)dt}\left(\int Q(t)\,e^{\int P(t)dt}dt + c\right). \tag{15.33}$$

Αποδειξη. Θα ζητησουμε μια λυση της (15.32) της μορφης $x(t) = u(t)\,v(t)$. Αν παραγωγισουμε παιρνουμε

$$\frac{dx}{dt} = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}.$$

Αντικαθιστωντας στην (15.32) παιρνουμε

$$\begin{aligned} u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt} + P(t)\,uv = Q(t) \Rightarrow \\ u\left(\frac{dv}{dt} + P(t)\,v\right) + v\frac{du}{dt} = Q(t)\,. \end{aligned} \tag{15.34}$$

Τωρα επιλεγουμε την $v(t)$ τετοια ωστε

$$\frac{dv}{dt} + P(t)\,v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{v} = -P(t)\,dt \Leftrightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int P(t)\,dt \Leftrightarrow v(t) = ce^{-\int P(t)dt}.$$

Μπορουμε να θεσουμε (αυθαιρετα) $c = 1$ και θα εχουμε $u\left(\frac{dv}{dt} + P(t)\,v\right) = 0$, οποτε η (15.34) γινεται

$$\begin{aligned} v\frac{du}{dt} &= Q(t) \Rightarrow du = \frac{Q(t)\,dt}{v} = e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt \Rightarrow \\ u &= \int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt + c \Rightarrow uv = e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt + c\right) \Rightarrow \\ x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt + c\right) \end{aligned}$$

και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

15.1.53. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} + tx = t. \tag{15.35}$$

Ειναι μια γραμμικη ΔΕ με $P(t) = t$ και $Q(t) = t$. Οποτε εχουμε

$$\int P(t)\,dt = -\int tdt = -\frac{t^2}{2}, \quad e^{-\int P(t)dt} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

και

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt + c\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}\left(\int e^{\frac{t^2}{2}}tdt + c\right) \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}}\left(e^{\frac{t^2}{2}} + c\right) = 1 + ce^{-\frac{t^2}{2}}. \end{aligned}$$

15.1.54. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} - \frac{2}{t+1}x = (t+1)^3 . \tag{15.36}$$

Λυση. Ειναι μια γραμμικη ΔΕ με $P(t) = -\frac{2}{t+1}$ και $Q(t) = (t+1)^3$. Οποτε εχουμε

$$\begin{aligned}
&\int P(t)\,dt = -\int \frac{2}{t+1}dt = -2\ln(t+1)\,, \\
&e^{-\int P(t)dt} = (t+1)^2\,,
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt + c\right) = (t+1)^2\left(\int \frac{1}{(t+1)^2}(t+1)^3\,dt + c\right) \\
&= (t+1)^2\left(\int (t+1)\,dt + c\right) = (t+1)^2\left(\frac{(t+1)^2}{2} + c\right) \Rightarrow \\
x(t) &= \frac{(t+1)^4}{2} + c(t+1)^2 .
\end{aligned}$$

15.1.55. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη

$$x(1) = 2, \quad \frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}x = 1. \tag{15.37}$$

Εχουμε $P(t) = \frac{1}{t}$ και $Q(t) = 1$. Οποτε εχουμε

$$\int P(t)\,dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln t, \quad e^{-\int P(t)dt} = \frac{1}{t}$$

και

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt + c\right) = \frac{1}{t}\left(\int t dt + c\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{2} + c\right) = \frac{t}{2} + \frac{c}{t}.
\end{aligned}$$

Επιπλεον

$$2 = x(1) = \frac{2}{2} + \frac{c}{2} \Rightarrow 1 = \frac{c}{2} \Rightarrow c = 2$$

οποτε η ζητουμενη λυση ειναι

$$x(t) = \frac{t}{2} + \frac{2}{t}$$

15.1.56. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} + 3x = t^3 e^{-2t.}$$

15.1.57. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} - 2tx = t.$$

15.1.58. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη

$$x(0) = 2, \qquad \frac{dx}{dt} - 4tx = t.$$

15.1.59. Ασκηση. Λυσε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη

$$x(1) = 1, \qquad \frac{dx}{dt} + \frac{1+t}{t}x = 0.$$

15.1.60. Πορισμα. Η γραμμικη ΔΕ 1ης ταξης

$$\frac{dx}{dt} + ax = b \tag{15.38}$$

εχει γενικη λυση την

$$x(t) = e^{-at}\left(\frac{b}{a}e^{at} + c\right) = \frac{b}{a} + ce^{-at}. \tag{15.39}$$

Αποδειξη. Ειναι $P(t) = a$, $Q(t) = b$. Οποτε ο γενικος τυπος γινεται

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int Q(s)\, e^{\int P(s)ds}ds + c\right) \\ &= e^{-\int adt}\left(\int be^{\int adt}dt + c\right) \\ &= e^{-at}\left(\int be^{at}dt + c\right) = e^{-at}\left(\frac{b}{a}e^{at} + c\right) = \frac{b}{a} + ce^{-at}. \end{aligned}$$

15.1.61. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} + 5x = 2.$$

Ειναι

$$x(t) = \frac{2}{5} + ce^{-5t}.$$

15.1.62. Παραδειγμα. Θα βρουμε την τιμη του a τετοια ωστε η λυση της ΔΕ

$$x(0) = 3, \quad \frac{dx}{dt} + ax = 2$$

να ικανοποιει $\lim_{t\to\infty} x(t) = 4$. Ευκολα βρισκουμε οτι η λυση της ΔΕ ειναι

$$x(t) = \left(2 - \frac{2}{a}\right)e^{-at} + \frac{2}{a}.$$

Εχουμε

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 4 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\left(\left(2 - \frac{2}{a}\right)e^{-at} + \frac{2}{a}\right) = 4 \Rightarrow \frac{2}{a} = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Δηλ. η ζητουμενη τιμη του a ειναι $a = \frac{1}{2}$. Παρατηρησε οτι αυτη δεν εξαρταται απο την αρχικη συνθηκη!

15.1.63. Παραδειγμα. Θα λυσουμε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} + xt = t^3x. \tag{15.40}$$

Αυτη ειναι μια ΔΕ *Bernoulli*, δηλ. της μορφης

$$\frac{dx}{dt} + P(t)\, x = Q(t)\, x^n$$

Αυτες οι ΔΕ λυνονται με μια αντικατασταση της παρακατω μορφης. Διαιρουμε τνν (15.40) με x^3 και παιρνουμε

$$x^{-3}\frac{dx}{dt} + x^{-2}t = t^3. \tag{15.41}$$

Τωρα οριζουμε την $z = x^{-2}$ με $\frac{dz}{dt} = -2x^{-3}\frac{dx}{dt}$ και η (15.41) γινεται

$$\frac{dz}{dt} - 2tz = -2t^3$$

οποτε

$$\begin{aligned} z &= t^2 + 1 + ce^{-t^2} \\ x &= \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1 + ce^{-t^2}}}. \end{aligned}$$

15.2 Λυμενα Προβληματα

15.2.1. Ποιες απο τις παρακατω ΔΕ ειναι γραμμικες;

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{x+1}$.
2. $t^2 \frac{dx}{dt} + x \sin t = e^x$.
3. $t^2 \frac{dx}{dt} + x \sin t = e^t$.
4. $\frac{dx}{dt} + e^t x^2 = 4$.

Λυση. Μονο η τριτη ειναι γραμμικη ή, σωστοτερα, μπορει να τεθει στην γραμμικη μορφη

$$\frac{dx}{dt} + x\frac{\sin t}{t^2} = \frac{e^t}{t^2}.$$

15.2.2. Ελεγξε οτι η $x^2 + t^2 = c$ ειναι η λυση της ΔΕ $x\frac{dx}{dt} + t = 0$.
Λυση. Με πλεγμενη παραγωγιση παιρνουμε

$$2x\frac{dx}{dt} + 2t = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}.$$

Οποτε

$$x\frac{dx}{dt} + t = -x\frac{t}{x} + t = 0$$

και αρα η $x^2 + t^2 = c$ ειναι η λυση της ΔΕ.

15.2.3. Ελεγξε οτι η ΔΕ με αρχικη συνθηκη

$$x(1) = 1, \quad \frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = 0 \tag{15.42}$$

εχει στο συνολο $(0,\infty)$ την λυση $x(t) = \frac{1}{t}$.
Λυση. Η $x(t) = \frac{1}{t}$ εχει $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}$. Αντικαθιστωντας στην (15.42) παιρνουμε

$$\forall t > 0 : \frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1/t}{t} = 0.$$

Επισης εχουμε $x(1) = \frac{1}{1} = 1$. Αφου λοιπον ικανοποιειται η ΔΕ και η αρχικη συνθηκη, η $x(t)$ ειναι η ζητουμενη λυση *στο συνολο* (t,∞). *Δεν* ειναι λυση στο $[0,\infty)$ διοτι δεν ειναι ορισμενη στο $t = 0$. Τι ισχυει στο συνολο $(-\infty, 0)$;

15.2.4. Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t^2+1}. \tag{15.43}$$

Λυση. Η ΔΕ ειναι χωριζομενη. Την ξαναγραφουμε στην μορφη

$$dx = \frac{dt}{t^2+1} \Rightarrow \int dx = \int \frac{dt}{t^2+1} \Rightarrow x = \arctan t + c.$$

15.2.5. Λυσε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη

$$x(0) = 4, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{t+2}{x+1}.$$

Λυση. Εχουμε

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t+2}{x+1} \Rightarrow (x+1)\,dx = (t+2)\,dt \Rightarrow \frac{x^2}{2} + x = \frac{t^2}{2} + 2t + c$$

Για την αρχικη συνθηκη εχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{x^2(t)}{2}+x(t)&=\frac{t^2}{2}+2t+c\Rightarrow\\
\frac{x^2(0)}{2}+x(0)&=\frac{0^2}{2}+2\cdot 0+c\Rightarrow\\
\frac{4^2}{2}+4&=c\Rightarrow c=12.
\end{aligned}$$

Τελικα η ζητουμενη λυση ειναι

$$\frac{x^2}{2}+x=\frac{t^2}{2}+2t+12.$$

15.2.6. Λυσε την ΔΕ $t^2dt+(x+3)\,dx=0$.
Λυση. Ειναι χωριζομενη ΔΕ. Εχουμε

$$\int t^2dt+\int(x+3)\,dx=c\Rightarrow\frac{t^3}{3}+\frac{(x+3)^2}{2}=c.$$

15.2.7. Λυσε την ΔΕ

$$t^2(x+1)\,dt+x^2(t-1)\,dx=0. \tag{15.44}$$

Λυση. Διαιρουμε με $(x+1)(t-1)$ και εχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{t^2}{t-1}dt+\frac{x^2}{x+1}dx&=0\Rightarrow\\
\int\frac{t^2}{t-1}dt+\int\frac{x^2}{x+1}dx&=c\Rightarrow\\
\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt+\int\frac{x^2-1+1}{x+1}dx&=c\Rightarrow\\
\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt+\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx&=c\Rightarrow\\
\frac{t^2}{2}+t+\ln\frac{1}{t-1}+\frac{x^2}{2}-t+\ln\frac{1}{x+1}&=c.
\end{aligned}$$

15.2.8. Λυσε την ΔΕ

$$4tdx-xdt=t^2dx. \tag{15.45}$$

Λυση. Η ΔΕ γραφεται

$$\begin{aligned}
\left(4t-t^2\right)dx-xdt&=0\Rightarrow\\
\frac{dt}{t(t-4)}+\frac{dx}{x}&=0\Rightarrow\\
\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-4}-\frac{1}{t}\right)dt+\int\frac{dx}{x}&=c\Rightarrow\\
\frac{1}{4}\ln(t-4)-\frac{1}{4}\ln t+\ln x&=c\Rightarrow\\
\frac{(t-4)\,x^4}{t^4}&=c_1\Rightarrow x=c_2\left(\frac{t}{t-4}\right)^{1/4}.
\end{aligned}$$

15.2.9. Λυσε την *λογιστικη ΔΕ* με αρχικη συνθηκη

$$x(0)=a,\quad\frac{dx}{dt}=x(1-x).$$

Κατοπιν αποδειξε οτι: (α) για καθε $a\in(0,1)$ η $x(t)$ ειναι αυξουσα και (β) για καθε $a\in(1,\infty)$ η $x(t)$ ειναι φθινουσα.

Λυση. Ειναι μια χωριζομενη ΔΕ. Εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x(1-x)} = dt &\Rightarrow \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) dx = dt \\ &\Rightarrow \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) dx = \int dt \\ &\Rightarrow \ln \frac{x}{1-x} = t + c_1 \\ &\Rightarrow \frac{x}{1-x} = ce^t \Rightarrow x(t) = \frac{ce^t}{ce^t + 1}.\end{aligned}$$

Για την αρχικη συνθηκη εχουμε

$$a = x(0) = \frac{c}{c+1} \Rightarrow c = \frac{a}{1-a}.$$

Οποτε

$$x(t) = \frac{\frac{a}{1-a}e^t}{\frac{a}{1-a}e^t + 1} = \frac{ae^t}{ae^t - a + 1}.$$

Μπορουμε να δειξουμε την ζητουμενη μονοτονια υπολογιζοντας το προσημο της

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ae^t(1-a)}{(ae^t - a + 1)^2}$$

στα διαστηματα $(0,1)$ και $(1,\infty)$. Αλλα η συμπεριφορα της $x(t)$ γινεται καλυτερα κατανοητη αν παρατηρησουμε τα εξης. Αν $a \in (0,1)$, η παραγωγος

$$\frac{dx}{dt}|_{t=0} = x(0)(1 - x(0)) = a(1-a)$$

ειναι θετικη. Οποτε το $x(t)$ θα αυξανει εφοσον $x(t) \in (0,1)$. Η $x(t)$ δεν θα παρει ποτε τιμες μεγαλυτερες του 1 διοτι, καθως $x(t) \to 1$, η παραγωγος παραμενει θετικη αλλα τεινει προς το 0 (γιατι;). Με αλλα λογια, αν η αρχικη τιμη της $x(t)$ ειναι μεσα στο $(0,1)$ το ιδιο θα συμβαινει και για τις επομενες τιμες $x(t)$ για καθε $t \geq 0$. Με αναλογο τροπο εξεταζουμε την περιπτωση $a > 1$. Αυτα φαινονται και στο Σχημα 10.12. Τι συμβαινει οταν $a \in (-\infty, 1)$;

15.2.10. Βρες το a για το οποιο η λυση $x(t)$ της

$$\frac{dx}{dt} + x^2 = a^2$$

ικανοποιει

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1.$$

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} + x^2 = a^2 \Rightarrow \frac{dx}{a^2 - x^2} = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \int dt \\ \Rightarrow \ln \frac{x+a}{x-a} = 2at + c_1 \Rightarrow \frac{x+a}{x-a} = ce^{2at} \Rightarrow x(t) = a\frac{ce^{2at}+1}{ce^{2at}-1}.\end{aligned}$$

Τωρα παρατηρουμε οτι *για καθε* $a \in \mathbb{R}$ ισχυει

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} a\frac{ce^{2at}+1}{ce^{2at}-1} = a.$$

Αρα, το ζητουμενο ισχυει για $a = 1$.

15.2.11. Λυσε την ΔΕ
$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^3 + x^3}{3tx^2}. \tag{15.46}$$
Λυση. Η $f(t,x) = \frac{t^3+x^3}{3tx^2}$ ειναι ομοιογενης συναρτηση. Ξαναγραφουμε την ΔΕ στην μορφη
$$\left(t^3 + x^3\right) dt = 3tx^2 dx.$$
Θετουμε $x = vt$, οποτε και $dx = vdt + tdv$, και αντικαθιστωντας παιρνουμε
$$\begin{aligned}
\left(t^3 + v^3t^3\right) dt &= 3t^3v^2 \left(vdt + tdv\right) \\
&\Rightarrow \left(1 + v^3\right) dt = 3v^3dt + 3v^2tdv \\
&\Rightarrow \left(1 - 2v^3\right) dt = 3v^2tdv \\
&\Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{3v^2}{1 - 2v^3} dv \\
&\Rightarrow \ln t = -\frac{1}{2} \ln\left(1 - 2v^3\right) + c_1 \\
&\Rightarrow t^2 \left(1 - 2v^3\right) = c \\
&\Rightarrow t^2 \left(1 - 2\frac{x^3}{t^3}\right) = c \\
&\Rightarrow t^3 - 2x^3 = ct.
\end{aligned}$$

15.2.12. Λυσε την ΔΕ
$$(2t + 3x)\, dt + (x - t)\, dx = 0. \tag{15.47}$$
Λυση. Ειναι ομοιογενης ΔΕ. Θετουμε $x = vt$, οποτε και $dx = vdt + tdv$, και αντικαθιστωντας παιρνουμε $\int \frac{2}{(v+1)^2+1} dv\, :\, -\pi$
$$\begin{aligned}
(2t + 3vt)\, dt + (vt - t)\left(vdt + tdv\right) &= 0 \\
&\Rightarrow (2 + 3v)\, dt + (v - 1)\left(vdt + tdv\right) = 0 \\
&\Rightarrow \left(v^2 + 2v + 2\right) dt = t\,(1 - v)\, dv \\
&\Rightarrow \frac{1 - v}{(v + 1)^2 + 1} dv = \frac{dt}{t} \\
&\Rightarrow -\int \frac{v + 1}{(v + 1)^2 + 1} dv + \int \frac{2}{(v + 1)^2 + 1} dv = \frac{dt}{t} \\
&\Rightarrow -\frac{1}{2} \ln\left(v^2 + 2v + 2\right) + 2 \arctan(v + 1) = \ln t + c_1 \\
&\Rightarrow \arctan(v + 1) = \ln\left(ct\sqrt{v^2 + 2v + 2}\right) \\
&\Rightarrow \arctan\left(\frac{t + x}{t}\right) = \ln\left(c\sqrt{t^2 + 2tx + 2x^2}\right).
\end{aligned}$$

15.2.13. Εστω οτι οι $M(t,x)$, $N(t,x)$ ειναι *ομοιογενεις* n-στης ταξης. Αποδειξε οτι, με τις αντικαταστασεις $x = ut$, $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} t + u$, η ΔΕ
$$M(t,x)\, dt + N(t,x)\, dx = 0 \tag{15.48}$$
μετασχηματιζεται σε μια χωριζομενη ΔΕ.
Λυση. Εχουμε
$$0 = M(t,x)\, dt + N(t,x)\, dx = t^n \left(M_1\left(\frac{x}{t}\right) dt + N_1\left(\frac{x}{t}\right) dx\right). \tag{15.49}$$

Θετοντας $x = ut$, $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$, η (15.49) γινεται

$$\begin{aligned} 0 &= t^n \left(M_1(u)\,dt + N_1(u)(udt + tdu)\right) \Rightarrow \\ 0 &= M_1(u)\,dt + N_1(u)\,udt + N_1(u)\,tdu \Rightarrow \\ 0 &= \left(M_1(u) + N_1(u)\,u\right)dt + N_1(u)\,tdu \Rightarrow \\ \frac{dt}{t} &= \frac{N_1(u)\,du}{M_1(u) + N_1(u)\,u} \end{aligned}$$

η οποια ειναι χωριζομενη.

15.2.14. Λυσε την ΔΕ

$$(t + x)\,dt + (3t + 3x - 4)\,dx = 0. \tag{15.50}$$

Λυση. Η ΔΕ δεν ειναι ομοιογενης, αλλα τα $t+x$ και $3t+3x$ μας οδηγουν στον μετασχηματισμο $z = t+x$, οποτε $x = z - t$ και $dx = dz - dt$. Τοτε εχουμε

$$\begin{aligned} & zdt + (3z-4)(dz - dt) = 0 \\ & \Rightarrow (4 - 2z)\,dt + (3z - 4)\,dz = 0 \\ & \Rightarrow 2dt = \frac{3z-4}{2-z}dz \\ & \Rightarrow 2\int dt = \int \frac{3z-4}{2-z}dz \\ & \Rightarrow 2t + c = -3z - 2\ln(z-2) \\ & \Rightarrow 2t + c = -3(t+x) - 2\ln(t+x-2) \\ & \Rightarrow t + 3x + 2\ln(2 - t - x) = c. \end{aligned}$$

15.2.15. Λυσε την ΔΕ

$$\left(4t^3x^3 - 2tx\right)dt + \left(3t^4x^2 - t^2\right)dx = 0. \tag{15.51}$$

Λυση. Θετουμε $M = 4t^3x^3 - 2tx$, $N = 3t^4x^2 - t^2$. Παρατηρουμε οτι

$$M_x = 12t^3x^2 - 2t = N_t$$

αρα η ΔΕ ειναι ακριβης. Αρα υπαρχει $F(t,x)$ τετοια ωστε

$$\begin{aligned} F_t = M &\Rightarrow F_t = \left(4t^3x^3 - 2tx\right) \\ &\Rightarrow F = \int \left(4t^3x^3 - 2tx\right)dt = t^4x^3 - t^2x + c(x). \end{aligned}$$

Τοτε

$$F_x = N \Rightarrow 3t^4x^2 - t^2 + \frac{\partial c}{\partial x} = 3t^4x^2 - t^2 \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \Rightarrow c(x) = c_1.$$

Οποτε η λυση ειναι $F(t,x) = 0$ δηλ.

$$t^4x^3 - t^2x + c_1 = 0$$

την οποια θα μπορουσαμε να ειχαμε εντοπισει και με απλη επισκοπηση.

15.2.16. Λυσε την ΔΕ

$$6t^5x^3dt + 3t^6x^2dx = 0. \tag{15.52}$$

Λυση. Με απλη επισκοπηση βλεπουμε οτι η $F(t,x) = t^6x^3$ ειναι η λυση της ΔΕ (γιατι;).

15.2.17. Λυσε την ΔΕ

$$\left(2t^3 + 3x\right)dt + (3t + x - 1)\,dx = 0. \tag{15.53}$$

Λυση. Θετουμε $M = \left(2t^3 + 3x\right)$, $N = (3t + x - 1)$. Παρατηρουμε οτι

$$M_x = 3 = N_t$$

αρα η ΔΕ ειναι ακριβης. Αρα υπαρχει $F(t,x)$ τετοια ωστε

$$\begin{aligned}F_t = M &\Rightarrow F_t = 2t^3 + 3x \\ &\Rightarrow F = \int \left(2t^3 + 3x\right) dt = \frac{t^4}{2} + 3xt + c(x).\end{aligned}$$

Τοτε

$$F_x = N \Rightarrow 3t + \frac{\partial c}{\partial x} = 3t + x - 1 \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x} = x - 1 \Rightarrow c(x) = \frac{x^2}{2} - x + c_1.$$

Οποτε η λυση ειναι $F(t,x) = 0$ δηλ.

$$\frac{t^4}{2} + 3xt + \frac{x^2}{2} - x + c_1 = 0$$

15.2.18. Λυσε την ΔΕ

$$\left(t^4 + x^4\right) dt - \left(tx^3\right) dx = 0. \tag{15.54}$$

Λυση. Εχουμε $M = t^4 + x^4$, $N = -tx^3$ και

$$M_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(t^4 + x^4\right) = 4x^3 \neq -x^3 = \frac{\partial}{\partial t}\left(-tx^3\right) = N_t$$

αρα η (15.54) δεν ειναι ακριβης. Ομως εστω οτι υπαρχει συναρτηση $G(t)$ (η οποια εξαρταται μονο απο το t!!!) τετοια ωστε η

$$G(t)\left(t^4 + x^4\right) dt - G(t)\left(tx^3\right) dx = 0. \tag{15.55}$$

ειναι ακριβης. Τοτε θα πρεπει να ειναι

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(G(t)\left(t^4 + x^4\right)\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-G(t)\,tx^3\right) \Rightarrow \\ G(t)\,4x^3 &= -G(t)\,x^3 - G_t t x^3 \Rightarrow \\ 5G(t) &= -G_t t \Rightarrow \frac{\partial G}{G} = -5\frac{\partial t}{t}.\end{aligned}$$

Οποτε

$$G(t) = \frac{c}{t^5}$$

Αυτος ειναι ο ζητουμενος ολοκληρωτικος παραγοντας. Τωρα θα λυσουμε την

$$\frac{t^4 + x^4}{t^5} dt - \frac{tx^3}{t^5} dx = 0. \tag{15.56}$$

Θετοντας $M_1 = \frac{t^4+x^4}{t^5}$ και $N_1 = -\frac{tx^3}{t^5}$ βλεπουμε οτι

$$M_{1,x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{t^4 + x^4}{t^5}\right) = \frac{4x^3}{t^5} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{tx^3}{t^5}\right) = N_{1,t}$$

αρα η (15.56) ειναι ακριβης. Ξαναγραφουμε την (15.56) στην μορφη

$$\left(\frac{1}{t} + \frac{x^4}{t^5}\right) dt - \frac{x^3}{t^4} dx = 0$$

και με απλη επισκοπηση βλεπουμε οτι η λυση της ειναι

$$\ln t + \frac{x^4}{4t^4} = c_1.$$

15.2.19. Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt}+\frac{x}{t+1}=2. \tag{15.57}$$

Λυση. Ειναι μια γραμμικη ΔΕ. Εχουμε $P(t)=\frac{1}{t+1}$ και $Q(t)=2$. Οποτε

$$\int P(t)\,dt=\int\frac{1}{t+1}dt=\ln(t+1)\,,\quad e^{-\int P(t)dt}=\frac{1}{t+1}$$

και

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt+c\right)=\frac{1}{t+1}\left(\int(t+1)\,dt+c\right)\\&=\frac{c+\frac{1}{2}t(t+2)}{t+1}.\end{aligned}$$

15.2.20. Λυσε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt}+x=t^2-t. \tag{15.58}$$

Λυση. Ειναι μια γραμμικη ΔΕ. Εχουμε $P(t)=1$ και $Q(t)=t^2-t$. Οποτε

$$\int P(t)\,dt=\int dt=t,\quad e^{-\int P(t)dt}=e^{-t}$$

και $\int\left(t^2-t\right)e^tdt=e^t\left(t^2-3t+3\right)$

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt+c\right)=e^{-t}\left(\int\left(t^2-t\right)e^tdt+c\right)\\&=\left(t^2-3t+3\right)+ce^{-t}.\end{aligned}$$

15.2.21. Λυσε την ΔΕ με αρχικη συνθηκη

$$x(0)=1,\quad\frac{dx}{dt}+x=\sin t. \tag{15.59}$$

Λυση. Εχουμε $P(t)=1$ και $Q(t)=\sin t$. Οποτε

$$\int P(t)\,dt=\int 1dt=t,\quad e^{-\int P(t)dt}=e^{-t}$$

και

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{-\int P(t)dt}\left(\int e^{\int P(t)dt}Q(t)\,dt+c\right)=e^{-t}\left(\int e^t\sin t+c\right)\\&=e^{-t}\left(c-\frac{1}{2}\cos te^t+\frac{1}{2}e^t\sin t\right)\\&=ce^{-t}-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t.\end{aligned}$$

Για την αρχικη συνθηκη:

$$1=x(0)=ce^{-0}-\frac{1}{2}\cos 0+\frac{1}{2}\sin 0=c-\frac{1}{2}\Rightarrow c=\frac{3}{2}.$$

Οποτε

$$x(t)=\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t$$

15.2.22. Βρες το a για το οποιο η λυση $x(t)$ της

$$x(0) = a, \quad \frac{dx}{dt} + x = e^{-t} \sin t$$

ικανοποιει

$$\int_0^\infty x(t)\,dt = 1.$$

Λυση. Εχουμε $P(t) = 1$ και $Q(t) = e^{-t} \sin t$. Οποτε

$$\int P(t)\,dt = \int 1dt = t, \quad e^{-\int P(t)dt} = e^{-t}$$

και

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\int P(t)dt} \left(\int e^{\int P(t)dt} Q(t)\,dt + c \right) = e^{-t} \left(\int e^t e^{-t} \sin t + c \right) \\ &= e^{-t} (c - \cos t). \end{aligned}$$

Για να εχουμε $x(0) = a$ πρεπει να ειναι $c = a + 1$.

$$x(t) = e^{-t} (a + 1 - \cos t).$$

Τοτε

$$1 = \int_0^\infty x(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t} (a + 1 - \cos t)\,dt = a + \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Οποτε τελικα

$$x(t) = e^{-t} \left(\frac{3}{2} - \cos t \right).$$

15.3 Αλυτα Προβληματα

15.3.1. Ποιες απο τις παρακατω ΔΕ ειναι γραμμικες;

1. $\frac{dx}{dt} = 5x$.
2. $t\frac{dx}{dt} + t^2 x = \sin t$.
3. $x\frac{dx}{dt} + t^2 = \sin t$.
4. $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + e^t x = 4$.

Απ. Η 1 και η 2 ειναι γραμμικες, οι 3 και 4 οχι.

15.3.2. Λυσε τις παρακατω ΔΕ

1. $\frac{dx}{dt} = t$. *Απ.* $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + c$.
2. $\frac{dx}{dt} = 2x$. *Απ.* $x(t) = Ce^{2t}$.
3. $\frac{dx}{dt} = t$. *Απ.* $x(t) = t^2/2 + c$.
4. $\frac{dx}{dt} = \sin(t)$. *Απ.* $x(t) = -\cos(t) + c$.
5. $\frac{dx}{dt} = te^t$. *Απ.* $x(t) = (t-1)\mathrm{e}^t + c$.
6. $\frac{dx}{dt} = \frac{\sin(t)}{x}$. *Απ.* $x^2 + 2\cos t = c$.
7. $\frac{dx}{dt} = \frac{t^3}{x}$. *Απ.* $x^2 - \frac{t^4}{2} = c$.

8. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{tx}$. *Απ.* $x^2 - 2\ln t = c$.

9. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos(t)\sin(x(t))}$. *Απ.* $x^2 - 2\ln\left(\sec\left(t\right) + \tan\left(t\right)\right) = c$.

10. $\frac{dx}{dt} = t^3 x^2$. *Απ.* $\frac{1}{x} + \frac{t^4}{4} = c$.

15.3.3. Λυσε τις παρακατω ΔΕ με αρχικες συνθηκες.

1. $\frac{dx}{dt} = 2x$ με αρχικη συνθηκη $x\left(0\right) = 5$. *Απ.* $x\left(t\right) = 5e^{2t}$.
2. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{(t^2+2\,t+2)x}$ με αρχικη συνθηκη: $x\left(0\right) = 1$. *Απ.* $x^2 - 2\arctan\left(t+1\right) = 1 - \frac{\pi}{2}$.
3. $\frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{x}$ με αρχικη συνθηκη $x\left(0\right) = 2$. *Απ.* $x^2 - 2e^t = c$.

15.3.4. Λυσε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{x+t}{t}$. *Απ.* $x\left(t\right) = \left(\ln\left(t\right) + c\right)t$.
2. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2+tx}{t^2}$. *Απ.* $x\left(t\right) = -\frac{t}{\ln(t)-c}$.
3. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2t+t^2x}{t^3}$. *Απ.* $x\left(t\right) = \frac{t}{c-\ln t}$.
4. $\frac{dx}{dt} = \frac{x+t}{t}$. *Απ.* $x\left(t\right) = \left(\ln\left(t\right) + c\right)t$
5. $\frac{dx}{dt} = \frac{x-t}{t}$. *Απ.* $x\left(t\right) = \left(c - \ln\left(t\right)\right)t$
6. $\frac{dx}{dt} = \frac{tx+t^2}{t^2}$. *Απ.* $x\left(t\right) = \left(\ln\left(t\right) + 4\right)t$.
7. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2+t^2}{tx}$ με αρχικη συνθηκη : $x\left(4\right) = 1$. *Απ.* $x^2 = t^2\left(c + 2\ln t\right)$.
8. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2t+t^3}{t^3}$ με αρχικη συνθηκη : $x\left(4\right) = 1$. *Απ.* $\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{t-2x}{\sqrt{3}t}\right) = c + \ln t$.

15.3.5. Λυσε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\left(t + 2x\right)dt + \left(2t + 3x\right)dx = 0$.
2. $2tdx - 2xdt = \sqrt{t^2 + 4x^2}dt$.
3. $txdt + \left(x + 1\right)\left(t - 1\right)dx = 0$.
4. $\left(t^3 + x^3\right)dt + 3tx^2dx = 0$.

15.3.6. Λυσε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{x+t}{t}$. *Απ.* $x\left(t\right) = \left(\ln\left(t\right) + c\right)t$.
2. $\frac{dx}{dt} = \frac{-x\sin(t)+x}{\cos(t)}$. *Απ.* $x\left(t\right) = c\left(1 + \sin t\right)$
3. $\frac{dx}{dt} + 2x = 1$. *Απ.* $x\left(t\right) = 1/2 + \mathrm{e}^{-2\,t}c$.
4. $\frac{dx}{dt} + tx = t$. *Απ.* $x\left(t\right) = 1 + \mathrm{e}^{-1/2\,t^2}c$.
5. $\frac{dx}{dt} + x = \sin\left(t\right)$. *Απ.* $x\left(t\right) = -1/2\,\cos\left(t\right) + 1/2\,\sin\left(t\right) + \mathrm{e}^{-t}c$.
6. $\frac{dx}{dt} - t^2x = t^2$. *Απ.* $x\left(t\right) = -1 + \mathrm{e}^{1/3\,t^3}c$.
7. $\frac{dx}{dt} + 4\,tx = 3\,t$. *Απ.* $x\left(t\right) = 3/4 + \mathrm{e}^{-2\,t^2}c$.
8. $\frac{dx}{dt} - 2\,\frac{x}{t} = t^2$. *Απ.* $x\left(t\right) = \left(t + c\right)t^2$.

9. $\frac{dx}{dt} + 5\,tx = t^3$. *Απ.* $x\left(t\right) = 1/5\,t^2 - \frac{2}{25} + \mathrm{e}^{-5/2\,t^2}\,c$.

10. $\frac{dx}{dt} + 5\,tx = t^5$. *Απ.* $x\left(t\right) = -\frac{4\,t^2}{25} + 1/5\,t^4 + \frac{8}{125} + \mathrm{e}^{-5/2\,t^2}\,c_1$.

11. $\frac{dx}{dt} + 5\,tx = t^7$. *Απ.* $x\left(t\right) = \frac{24\,t^2}{125} - \frac{6\,t^4}{25} + 1/5\,t^6 - \frac{48}{625} + \mathrm{e}^{-5/2\,t^2}\,c_1$.

12. $\frac{dx}{dt} + t^2x = x = x$. *Απ.* $x\left(t\right) = c\,\mathrm{e}^{-1/3\,t\left(t^2-3\right)}$.

13. $\frac{dx}{dt} - 2\,\frac{x}{t^2} = -3\,t^{-2}$. *Απ.* $x\left(t\right) = 3/2 + \mathrm{e}^{-2\,t^{-1}}\,c$.

15.3.7. Λυσε τις ΔΕ :

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{x\cos(t)+1}{\sin(t)}$. *Απ.* $-\frac{\sin t}{\tan t} + c\sin t$.

2. $\frac{dx}{dt} + tx = tx^2$. *Απ.* $x\left(t\right) = \frac{1}{1+c\mathrm{e}^{1/2\,t^2}}$.

3. $\frac{dx}{dt} + t^2x = tx$. *Απ.* $x\left(t\right) = c\mathrm{e}^{-1/6\,t^2(2\,t-3)}$.

4. $\frac{dx}{dt} + t^2x = \sin\left(t\right)x$. *Απ.* $x\left(t\right) = c\,\mathrm{e}^{-1/3\,t^3-\cos(t)}$.

15.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

15.4.1. Θεωρησε την ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-\left(t+2\right) + \sqrt{t^2+4t+4x}}{2}.$$

Επαληθευσε οτι οι συναρτησεις

$$y_1\left(t\right) = c^2 + ct + 2c + 1,$$
$$y_2\left(t\right) = -\frac{t^2+4t}{4},$$

ειναι λυσεις της ΔΕ, η καθε μια σε διαφορετικο διαστημα $[t_1, t_2]$. Προσδιορισε τα αντιστοιχα διαστηματα.

15.4.2. Αποδειξε οτι: η ΔΕ $x = t\frac{dx}{dt} + f\left(\frac{dx}{dt}\right)$ εχει λυση την $x = ct + f\left(c\right)$.

15.4.3. Αποδειξε οτι: η ΔΕ $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ εχει λυση την $\ln x = \int \frac{dz}{F(z)-z} + c$.

15.4.4. Αποδειξε οτι: η ΔΕ $yF\left(ty\right)dt + tG\left(ty\right)dy = 0$ εχει την λυση $\ln t = \int \frac{G(y)}{y(G(y)-F(y))}dy + c$.

15.4.5. Εστω συναρτηση $f\left(t,x\right)$ και αριθμος $R>0$ τετοια ωστε η f και η $\frac{\partial f}{\partial x}$ ειναι συνεχεις για καθε στοιχειο (t,x) του συνολου

$$D_R\left(t_0,x_0\right) = \left\{(t,x) : \left(t-t_0\right)^2 + \left(x-x_0\right)^2 < R\right\}.$$

Δινονται η ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t,x\right), \quad x\left(0\right) = c \tag{15.60}$$

και η *ολοκληρωτικη εξισωση*

$$x\left(t\right) = c + \int_0^t f\left(s, x\left(s\right)\right)ds. \tag{15.61}$$

Αποδειξε οτι: η $z\left(t\right)$ ειναι λυση της (15.60) ανν ειναι λυση της (15.61). Επισης αποδειξε οτι σε αυτη την περιπτωση, η σειρα συναρτησεων η οποια προκυπτει απο την παρακατω επαναληπτικη διαδικασιας

$$z_0\left(t\right) = c, \qquad \forall n : z_{n+1}\left(t\right) = c + \int_0^t f\left(s, z_n\left(s\right)\right)ds$$

ικανοποιει

$$\forall t : \lim_{n\to\infty} z_n\left(t\right) = z\left(t\right).$$

15.4.6. Λεμε οτι η

$$x_0(t) = c, \qquad \forall n : x_{n+1}(t) = c + \int_0^t f(s, x_n(s))\, ds \tag{15.62}$$

εχει *σταθερο σημειο* την συναρτηση $z(t)$ ανν η $z(t)$ ικανοποιει την (15.62). Εστω συναρτηση $f(t,x)$ και αριθμος $R > 0$ τετοια ωστε η f και η $\frac{\partial f}{\partial x}$ ειναι συνεχεις για καθε στοιχειο (t,x) του συνολου

$$D_R(t_0, x_0) = \left\{ (t,x) : (t-t_0)^2 + (x-x_0)^2 < R \right\}.$$

Αποδειξε οτι, υπο αυτες τις συνθηκες, η (15.62) εχει ακριβως ενα σταθερο σημειο και αρα η (15.60) εχει ακριβως μια λυση.

15.4.7. Αποδειξε οτι η ΔΕ $\frac{dx}{dt} = \sqrt{|x|}$, $x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$ εχει απειρες λυσεις.

15.4.8. Αποδειξε οτι η ΔΕ $\frac{dx}{dt} = x^k$, $x(0) = 0$, με σταθερα $k \in (0,1)$, εχει απειρες λυσεις.

15.4.9. Βρες αναγκαιες συνθηκες ωστε η ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = |x|^{m/n}$$

να εχει μοναδικη λυση· υποθετουμε οτι $m, n \in \mathbb{N}$.

15.4.10. Δινεται η ΔΕ $\frac{dx}{dt} = x$, $x(0) = 1$. Αποδειξε με προσεγγιση της συναρτησης απο αναδρομικη ακολουθια οτι $x(t) = e^t$.

15.4.11. Αποδειξε: αν $\forall t \in \mathbb{R} : \frac{dx}{dt} \leq f(t)\, x(t)$, τοτε

$$\forall t \in \mathbb{R} : x(t) \leq x(0)\, e^{\int_0^t f(\tau) d\tau}.$$

15.4.12. Αποδειξε οτι: οταν η $f(t,x)$ ειναι ομοιογενης 1ης ταξης, η ΔΕ $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$, με την αντικατασταση $x = ut$ μετασχηματιζεται σε μια χωριζομενη ΔΕ.

15.4.13. Αποδειξε οτι η ΔΕ $\frac{dx}{dt} = F(ax + by)$ μετατρεπεται σε χωριζομενη με την αλλαγη μεταβλητης $v = ax + bt$.

15.4.14. Βρες μια συνθηκη την οποια πρεπει να ικανοποιουν οι $M(t,x)$, $N(t,x)$ ωστε η ΔΕ

$$M(t,x)\, dt + N(t,x)\, dx = 0$$

να εχει ολοκληρωτικο παραγοντα της μορφης $f(xt)$.

15.4.15. Δειξε οτι: αν η ΔΕ

$$M(t,x)\, dt + N(t,x)\, dx = 0$$

ειναι ομοιογενης *και* ακριβης, τοτε η λυση μπορει να τεθει στην μορφη

$$tM + xN = c.$$

15.4.16. Εστω συναρτηση $f(t;c)$ η οποια εξαρταται απο την παραμετρο c. Λεμε οτι η $f(t;c)$ ειναι *συνεχης ως προς την* c *στο* $[t_1, t_2]$ ανν

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall t \in [t_1, t_2] : |c_1 - c_2| < \delta \Rightarrow |f(t;c_1) - f(t;c_2)| < \varepsilon.$$

Εστω οτι $x(t;c)$ ειναι η λυση της $\frac{dx}{dt} + p(t)\, x = 0$, $x(0) = c$. Αποδειξε οτι η $x(t;c)$ ειναι συνεχης ως προς την c σε καθε πεπερασμενο διαστημα $[t_1, t_2]$ στο οποιο η $p(t)$ ειναι συνεχης.

15.4.17. Εστω $f(t)$ συναρτηση συνεχης και φραγμενη στο $[0, \infty)$ και k θειτκη σταθερα. Αποδειξε:

1. Καθε λυση της $\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$ ειναι φραγμενη στο $[0, \infty)$.
2. Η $\frac{dx}{dt} - kx = f(t)$ εχει λυση μη φραγμενη στο $[0, \infty)$.

15.4.18. Εστω $f(t)$ συναρτηση τετοια ωστε $\lim_{t\to\infty} f(t) = m$ και k θετικη σταθερα. Αποδειξε: για καθελυση $x(t)$ της $\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$ ισχυει $\lim_{t\to\infty} f(t) = \frac{m}{k}$.

15.4.19. Βρες συναρτηση $f(t)$ τετοια ωστε για καθε $g(t)$ παραγωγισιμη στο $(0,1)$ ισχυει

$$\frac{d}{dt}(fg) = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dg}{dt}.$$

15.4.20. Αποδειξε οτι: αν οι $f(t)$, $g(t)$ ικανοποιουν στο $\mathbb{R}$ την ΔΕ

$$\left(f^2 + g^2\right) \frac{df}{dt} + fg \frac{dg}{dt} = 0$$

τοτε οι $f(t)$, $g(t)$ ειναι φραγμενες.

15.4.21. Δινεται η ΔΕ

$$\frac{dx}{dt} = ax + x^3$$

οπου $a > 0$. Δειξε οτι υπαρχει $t_0 \in \mathbb{R}$ τετοιο ωστε $\lim_{t\to t_0} x(t) \in \{\infty, -\infty\}$.

15.4.22. Λυσε την εξισωση

$$(\forall t \in (-\infty, 0] : x(t) = 0), \quad \frac{dx}{dt} + x(t - t_0) = 1$$

οπου $t_0 > 0$.

15.4.23. Βρες ολες τις λυσεις της ΔΕ

$$f'\left(\frac{a}{t}\right) = \frac{t}{f(t)}.$$

16 ΔΕ Ανωτερης Ταξης

Στο παρον κεφαλαιο θα μελετησουμε τις γραμμικες ΔΕ *με σταθερους συντελεστες*. Για αυτες θα αναπτυξουμε εκτεταμενη μεθοδολογια επιλυσης· επισης θα εξετασουμε τις ιδιοτητες αυτων οι οποιες σχετιζονται με την *Γραμμικη Αλγεβρα*.

16.1 Θεωρια και Παραδειγματα

16.1.1. Ορισμος. Μια *γραμμικη ΔΕ N-στης ταξης με σταθερους συντελεστες* εχει την μορφη

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t).$$

Εαν $f(t) = 0(t)$, λεμε οτι η ΔΕ ειναι *ομογενης* (αλλιως λεμε οτι ειναι *μη ομογενης*).

16.1.2. Παραδειγμα. Μια ομογενης γραμμικη ΔΕ 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες ειναι η

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0.$$

Μια μη ομογενης γραμμικη ΔΕ 3ης ταξης με σταθερους συντελεστες ειναι η

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = t.$$

16.1.3. Ορισμος. Η *χαρακτηριστικη εξισωση* της

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0$$

ειναι η

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

16.1.4. Παρακατω θα μελετησουμε σε αρκετη εκταση τις γραμμικες ΔΕ *2ης ταξης* με σταθερους συντελεστες. Ολα μας τα συμπερασματα γενικευονται (με προφανη τροπο) και για γραμμικες ΔΕ *υψηλοτερης ταξης* με σταθερους συντελεστες, οπως θα φανει απο παραδειγματα που θα παραθεσουμε.

16.1.5. Κατ' αρχην δινουμε δυο θεωρηματα: το πρωτο εξασφαλιζει την *υπαρξη* λυσεων και το δευτερο την *μοναδικοτητα*.

16.1.6. Θεωρημα (Υπαρξης). Δινεται η (ομογενης γραμμικη 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες) ΔΕ

$$x(0)=A, \quad x'(0)=B, \quad \frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=0. \tag{16.1}$$

Αν r_1, r_2 ειναι οι ριζες της χαρακτηριστικης εξισωσης της (16.1) τοτε η λυση αυτης ειναι

$$\text{οταν } r_1 \neq r_2 : x(t)=\frac{B-Ar_2}{r_1-r_2}e^{r_1t}-\frac{B-Ar_1}{r_1-r_2}e^{r_2t}, \tag{16.2}$$

$$\text{οταν } r_1 = r_2 : x(t)=Ae^{r_1t}+(B-Ar_1)\,te^{r_1t}. \tag{16.3}$$

Αποδειξη. Μπορουμε να αποδειξουμε το θεωρημα με απλη αντικατασταση, αλλα θα ακολουθησουμε μια πιο λεπτομερη προσεγγιση η οποια θα δωσει καλυτερη κατανοηση του προβληματος.

Θα εξετασουμε πρωτα τις λυσεις της ΔΕ χωρις αρχικες συνθηκες

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=0. \tag{16.4}$$

Ας υποθεσουμε οτι οι λυσεις εχουν την μορφη $x=e^{rt}$. Αντικαθιστωντας στην (16.4) παιρνουμε

$$\begin{aligned}&\forall t: r^2e^{rt}+a_1re^{rt}+a_0e^{rt}=0 \Rightarrow \\ &\forall t: \left(r^2+a_1r+a_0\right)e^{rt}=0\end{aligned} \tag{16.5}$$

το οποιο σαφως ισχυει για $r=r_1,r_2$. Τωρα θα εξετασουμε δυο περιπτωσεις.

1. Αν $r_1 \neq r_2$, τοτε εχουμε δυο λυσεις, τις $x_1(t)=e^{r_1t}$ και $x_2(t)=e^{r_2t}$.
2. Αν $r_1 = r_2$ εχουμε μονο μια λυση, την $x_1(t)=e^{r_1t}=e^{r_2t}$. Ομως αν θεσουμε $x_2(t)=te^{r_1t}$ παρατηρουμε οτι

$$\begin{aligned}\frac{d^2x_2}{dt^2}+a_1\frac{dx_2}{dt}+a_0x_2 &= r_1e^{r_1t}(r_1t+2)+a_1e^{r_1t}(r_1t+1)+a_0te^{r_1t}\\ &=\left(r_1^2+a_1r_1+a_0\right)te^{r_1t}+(2r_1+a_1)\,e^{r_1t}=0\end{aligned}$$

   (διοτι $r_1^2+a_1r_1+a_0=0$ και, αφου η r_1 ειναι διπλη ριζα, εχουμε $r_1=-\frac{a_1}{2}$).

Οποτε και στις δυο περιπτωσεις εχουμε βρει δυο διαφορετικες λυσεις της (16.4).

Τωρα θα δειξουμε οτι η $x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ ειναι επισης λυση (για καθε $c_1,c_2 \in \mathbb{C}$). Αυτο συμβαινει διοτι

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}(c_1x_1+c_2x_2)+a_1\frac{d}{dt}(c_1x_1+c_2x_2)+a_0(c_1x_1+c_2x_2)\\ &=c_1\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}+a_1\frac{dx_1}{dt}+a_0\right)+c_2\left(\frac{d^2x_2}{dt^2}+a_1\frac{dx_2}{dt}+a_0\right)=0.\end{aligned}$$

Για να βρουμε μια λυση της (16.1) μπορουμε να παρουμε την $x(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)$ και να επιλεξουμε τα c_1,c_2 ωστε να ικανοποιουν τις αρχικες συνθηκες.

1. Στην περιπτωση $r_1 \neq r_2$ εχουμε

$$\begin{aligned}x(t)&=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t},\\ x'(t)&=c_1r_1e^{r_1t}+c_2r_2e^{r_2t},\end{aligned}$$

   οποτε

$$\begin{aligned}A&=x(0)=c_1e^{0r_1}+c_2e^{0r_2}=c_1+c_2\\ B&=x'(0)=c_1r_1e^{0r_1}+c_2r_2e^{0r_2}=c_1r_1+c_2r_2.\end{aligned}$$

Δηλ. πρεπει να λυσουμε το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= A \\ r_1 c_1 + r_2 c_2 &= B \end{aligned}$$

Αυτο εχει ακριβως μια λυση, διοτι

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0,$$

οποτε η ζητουμενη λυση ειναι

$$c_1 = \frac{B - Ar_2}{r_1 - r_2}, \quad c_2 = -\frac{B - Ar_1}{r_1 - r_2}.$$

Αντικαθιστωντας στην $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ παιρνουμε τις λυσεις της (16.2).

2. Στην περιπτωση $r_1 = r_2$ εχουμε

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}, \\ x'(t) &= e^{t r_1} \left(c_2 + c_1 r_1 + t c_2 r_1 \right) \end{aligned}$$

οποτε

$$\begin{aligned} A = x(0) &= c_1 e^{0 r_1} + c_2 0 e^{0 r_2} = c_1 \\ B = x'(0) &= c_1 r_1 e^{0 r_1} + c_2 \left(1 + r_1\right) e^{0 r_1} = c_1 r_1 + c_2 \left(1 + r_1\right). \end{aligned}$$

Δηλ. πρεπει να λυσουμε το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 &= A \\ r_1 c_1 + c_2 &= B \end{aligned}$$

Υπαρχει ακριβως μια λυση, διοτι

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ r_1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

και αυτη ειναι

$$c_1 = A, \quad c_2 = B - Ar_1.$$

Αντικαθιστωντας στην $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ παιρνουμε τις λυσεις της (16.3).

16.1.7. Θεωρημα (Μοναδικοτητας). Δινεται η (ομογενης γραμμικη 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες) ΔΕ

$$x(0) = A, \quad x'(0) = B, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = 0. \tag{16.6}$$

Αυτη εχει *ακριβως μια λυση* (αυτη που δινεται απο το Θεωρημα ;;.;;)

Αποδειξη. Στο Θεωρημα ;;.;; εχουμε βρει οτι μια λυση $x(t)$ της (16.1) ειναι αυτη των (16.2)-(16.3). Εστω οτι υπαρχει και δευτερη λυση $z(t)$. Θετουμε

$$w(t) = x(t) - z(t)$$

οποτε

$$w''(t) + a_1 w'(t) + a_0 w(t) = 0, \quad w(t) = w'(t) = 0.$$

Οριζουμε επισης

$$u(t) = \left(w'(t)\right)^2 + \left(w(t)\right)^2$$

οποτε και $u(0) = 0$. Τωρα, για καθε t ισχυει

$$\begin{aligned} u'(t) &= 2w'(t)\, w''(t) + 2w(t)\, w'(t) \\ &= -2w'(t) \left[a_1 w'(t) + a_0 w(t)\right] + 2w(t)\, w'(t) \\ &= -2a_1 \left(w'(t)\right)^2 + 2w(t)\, w'(t) \left(1 - a_0\right). \end{aligned}$$

Εστω $M = \max(|a_0|, |a_1|)$ οποτε
$$|a_0| < M, \quad |a_1| < M.$$
Τοτε
$$\begin{aligned}|u'(t)| &\leq 2|a_1|(w'(t))^2 + 2|w(t)||w'(t)||1-a_0| \\ &\leq 2M(w'(t))^2 + 2(1+M)|w(t)||w'(t)| \\ &\leq 2M\left((w'(t))^2 + (w(t))^2\right) + (1+M)\left((w'(t))^2 + (w(t))^2\right) \\ &= (1+3M)\left((w'(t))^2 + (w(t))^2\right) = (1+3M)u(t)\end{aligned}$$
και αρα
$$-(1+3M)u(t) \leq u'(t) \leq (1+3M)u(t).$$
Θετοντας $K = 1+3M$ εχουμε:
$$u'(t) - Ku(t) \leq 0 \Rightarrow (u'(x) - Ku(t))e^{-Kt} \leq 0 \Rightarrow \left(u(t)e^{-Kt}\right)' \leq 0.$$
Δηλαδη η $u(t)e^{-Kt}$ ειναι φθινουσα και
$$\left(\forall t \geq 0 : 0 \leq u(t)e^{-Kt} \leq u(0)e^{-Kt} = 0\right) \Rightarrow \left(\forall t : z(t) = (w'(t))^2 + (w(t))^2 = 0\right).$$
Αλλα τοτε
$$\left(\forall t \geq 0 : (x(t) - z(t))^2 = 0\right) \Rightarrow (\forall t : x(t) = z(t)).$$
Με παρομοιο τροπο δειχνουμε οτι
$$\left(\forall t \leq 0 : (x(t) - z(t))^2 = 0\right) \Rightarrow (\forall t \leq 0 : x(t) = z(t)).$$
Ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

16.1.8. Παραδειγμα. Η μοναδικη λυση της ομογενους γραμμικης ΔΕ
$$x(0) = 1, \qquad x'(0) = 2, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0 \tag{16.7}$$
υπολογιζεται ως εξης. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι
$$r^2 + 4r + 3 = 0$$
με ριζες τις $r_1 = -1$, $r_2 = -3$. Οποτε, συμφωνα με τον τυπο (16.2) η λυση ειναι
$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{2-1(-3)}{-1-(-3)}e^{-1t} - \frac{2-1(-1)}{-1-(-3)}e^{-3t} \Rightarrow \\ x(t) &= \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t}\end{aligned}$$

16.1.9. Παραδειγμα. Η λυση της ομογενους γραμμικης ΔΕ
$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \tag{16.8}$$
υπολογιζεται ως εξης. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι
$$r^2 + 4r + 4 = 0$$
με διπλη ριζα $r_1 = r_2 = -2$. Οποτε, συμφωνα με τον τυπο (16.3) η λυση ειναι
$$\begin{aligned}x(t) &= 1e^{-2t} + (2-1(-2))te^{-2t} \Rightarrow \\ x(t) &= e^{-2t} + 4te^{-2t}\end{aligned}$$

16.1.10. Παραδειγμα. Θα βρουμε την λυση της ΔΕ

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 1, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = 0. \tag{16.9}$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

με ριζες $r_1 = -2$, $r_2 = -3$. Οποτε η λυση θα εχει την μορφη

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}.$$

Για να ικανοποιουνται οι αρχικες συνθηκες πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2 \\ 1 &= -2c_1 - 3c_2 \end{aligned}$$

οποτε $c_1 = 4$, $c_2 = -3$ και η λυση ειναι

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1 - 1(-3)}{(-2) - (-3)} e^{-2t} - \frac{1 - 1(-2)}{(-2) - (-3)} e^{-3t} \Rightarrow \\ x(t) &= 4e^{-2t} - 3e^{-3t} \end{aligned}$$

16.1.11. Παραδειγμα. Θα βρουμε την λυση της ΔΕ

$$x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \tag{16.10}$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 + 4 = 0$$

με *μιγαδικες* ριζες $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$. Οποτε η λυση θα εχει την μορφη

$$x(t) = c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it}.$$

Για να ικανοποιουνται οι αρχικες συνθηκες πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2 \\ 2 &= 2ic_1 - 2ic_2 \end{aligned}$$

με λυση $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $c_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ και η λυση ειναι

$$x(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) e^{2it} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) e^{-2it}.$$

Πως ειναι δυνατον μια πραγματικη διαφορικη εξισωση να εχει μιγαδικες λυσεις; Για να βρουμε την απαντηση ας επεξεργαστουμε την λυση:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) e^{2it} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) e^{-2it} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) - \frac{i}{2}\left(e^{2it} - e^{-2it}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{2it} + e^{-2it}\right) + \frac{1}{2i}\left(e^{2it} - e^{-2it}\right) \\ &= \cos 2t + \sin 2t. \end{aligned}$$

16.1.12. Ερωτηση. Ειναι τυχαιο οτι η παραγοντοποιηση της μιγαδικης συναρτησης οδηγησε σε ισοδυναμη πραγματικη συναρτηση; Μπορεις να αποδειξεις οτι αυτο θα συμβαινει παντα;

16.1.13. Ασκηση. Λυσε την

$$x(0) = 2, \qquad x'(0) = 3, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 8x = 0.$$

16.1.14. Ασκηση. Λυσε την

$$x(0) = 1, \qquad x'(0) = 3, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 9x = 0.$$

16.1.15. Ασκηση. Λυσε την

$$x(0) = 1, \qquad x'(0) = 1, \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

16.1.16. Ορισμος. Δινεται η (ομογενης γραμμικη 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες) ΔΕ

$$x(0) = A, \quad x'(0) = B, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = 0. \tag{16.11}$$

και οριζουμε τις συναρτησεις

$$\begin{aligned} &\text{οταν } r_1 \neq r_2 : p_1(t) := e^{r_1 t}, \qquad p_2(t) := e^{r_2 t}, \\ &\text{οταν } r_1 = r_2 : p_1(t) := e^{r_1 t}, \qquad p_2(t) := te^{r_1 t}. \end{aligned}$$

Ονομαζουμε τις $p_1(t)$ και $p_2(t)$ *θεμελιωδεις λυσεις* της (16.11).

16.1.17. Θεωρημα. Δινεται η (ομογενης γραμμικη 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες) ΔΕ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = 0 \tag{16.12}$$

με θεμελιωδεις λυσεις $p_1(t)$, $p_2(t)$. Τοτε καθε λυση της (;;) εχει την μορφη

$$x(t) = c_1p_1(t) + c_2p_2(t). \tag{16.13}$$

Αποδειξη. Ξερουμε οτι η (16.13) ειναι μια λυση της (16.12) (αρα το συνολο λυσεων δεν ειναι κενο). Εστω $x(t)$ τυχουσα λυση της (16.12). Θετουμε

$$A = x(0), \qquad B = x'(0). \tag{16.14}$$

Τοτε, απο το Θεωρημα 16.1.6, η λυση της (16.12) μαζι με τις αρχικες συνθηκες (16.14) ειναι

$$\begin{aligned} &\text{οταν } r_1 \neq r_2 : x(t) = \frac{B - Ar_2}{r_1 - r_2}e^{r_1 t} - \frac{B - Ar_1}{r_1 - r_2}e^{r_2 t}, \\ &\text{οταν } r_1 = r_2 : x(t) = Ae^{r_1 t} + (B - Ar_1)\, te^{r_1 t}. \end{aligned}$$

Και στις δυο περιπτωσεις (με καταλληλη επιλογη των c_1, c_2) εχουμε

$$x(t) = c_1e^{r_1 t} + c_2e^{r_2 t}. \tag{16.15}$$

16.1.18. Παραδειγμα. Η γενικη λυση της ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0 \tag{16.16}$$

ειναι η

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}$$

16.1.19. Παραδειγμα. Η γενικη λυση της ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0 \tag{16.17}$$

ειναι η

$$x(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}.$$

16.1.20. Παραδειγμα. Η λυση της ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0 \tag{16.18}$$

ειναι η

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}t} + c_2 t e^{-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}t}$$

η οποια μπορει να γραφει (γιατι;) και στην ισοδυναμη μορφη

$$x(t) = b_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + b_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

16.1.21. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 9x = 0.$$

16.1.22. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0.$$

16.1.23. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

16.1.24. Τωρα θα μελετησουμε τις μη ομογενεις ΔΕ.

16.1.25. Θεωρημα. Εστω οτι $\overline{x}(t)$ ειναι *καποια* λυση της μη ομογενους γραμμικης ΔΕ 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \tag{16.19}$$

και

$$\widehat{x}(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

ειναι η γενικη λυση της *προσαρτημενης* ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0. \tag{16.20}$$

Τοτε *καθε* λυση της (16.19) εχει την μορφη

$$x(t) = \widehat{x}(t) + \overline{x}(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \overline{x}(t)$$

οπου c_1, c_2 ειναι αυθαιρετες σταθερες.
Αποδειξη. Ξερουμε οτι η

$$\widehat{x}(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

ικανοποιει την

$$\frac{d^2\widehat{x}}{dt^2} + a_1\frac{d\widehat{x}}{dt} + a_0\widehat{x} = 0 \tag{16.21}$$

και, εξ υποθεσεως, η $\overline{x}(t)$ ικανοποιει την

$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} + a_1\frac{d\overline{x}}{dt} + a_0\overline{x} = f(t). \tag{16.22}$$

Προσθετοντας τις (16.21) και (16.22), με

$$x(t) = \widehat{x}(t) + \overline{x}(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \overline{x}(t),$$

παιρνουμε

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2\left(\widehat{x}+\overline{x}\right)}{dt^2}+a_1\frac{d\left(\widehat{x}+\overline{x}\right)}{dt}+a_0\left(\widehat{x}+\overline{x}\right)=0+f\left(t\right)\Rightarrow \\
\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=f\left(t\right)
\end{gathered}
$$

και εχουμε αποδειξει οτι *καθε* $\widehat{x}\left(t\right)=c_1x_1\left(t\right)+c_2x_2\left(t\right)$ ειναι λυση της (16.19). Αφηνεται στον αναγνωστη να αποδειξει οτι *καθε* λυση της (16.19) εχει την μορφη $\widehat{x}\left(t\right)=c_1x_1\left(t\right)+c_2x_2\left(t\right)$.

16.1.26. Συνεπεια της παραπανω προτασης ειναι οτι: για να βρουμε την γενικη λυση της μη ομογενους ΔΕ, αρκει να βρουμε την γενικη λυση της προσαρτημενης ομογενους και να *ανακαλυψουμε* μια ειδικη λυση της ομογενους. Για την επιλογη της ειδικης λυσης μπορουμε να χρησιμοποιησουμε τον παρακατω πινακα:

οταν η $f\left(t\right)$ ειναι	δοκιμαζουμε την λυση
$at+b$	$At+B$
at^2+bt+c	At^2+Bt+C
ae^{r_0t}	Ae^{r_0t}
$a\cos\left(\omega t\right)$	$A\cos\left(\omega t\right)+B\sin\left(\omega t\right)$
$a\sin\left(\omega t\right)$	$A\cos\left(\omega t\right)+B\sin\left(\omega t\right)$
ate^{r_0t}	$\left(At^2+Bt+C\right)e^{r_0t}$
$at\cos\left(\omega t\right)$	$t\left(A\cos\left(\omega t\right)+B\sin\left(\omega t\right)\right)$
$at\sin\left(\omega t\right)$	$t\left(A\cos\left(\omega t\right)+B\sin\left(\omega t\right)\right)$

16.1.27. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την

$$
\frac{d^2x}{dt^2}5\frac{dx}{dt}+6x=1.
$$

Φαινεται ευκολα (ελεγξε το) οτι μια λυση της ΔΕ ειναι η $\overline{x}\left(t\right)=\frac{1}{6}$. Επισης η προσαρτημενη ομογενης

$$
\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=1
$$

εχει δυο γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις $x_1\left(t\right)=e^{-2t}$ και $x_2\left(t\right)=e^{-3t}$. Αρα η γενικη λυση της (;;) ειναι

$$
x\left(t\right)=c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{6}
$$

(ελεγξε το).

16.1.28. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την

$$
\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+2x=t^2.
$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι $r^2+3r+2=0$ με ριζες $r_1=-1$, $r_2=-2$. Αρα η γενικη λυση ειναι

$$
\widehat{x}\left(t\right)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}
$$

Για την ειδικη λυση θα δοκιμασουμε την

$$
\overline{x}\left(t\right)=At^2+Bt+C,
$$

η οποια ικανοποιει

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overline{x}}{dt}&=2At+B,\\
\frac{d^2\overline{x}}{dt^2}&=2A.
\end{aligned}
$$

Θα πρεπει λοιπον να εχουμε

$$2A+3(2At+B)+2\left(At^2+Bt+C\right)=t^2 \Rightarrow$$
$$2At^2+(6A+2B)t+(2A+3B+2C)=t^2$$

το οποιο δινει το συστημα

$$\begin{aligned} 2A&=1 \\ 6A+2B&=0 \\ 2A+3B+2C&=0 \end{aligned}$$

με λυση

$$A=\frac{1}{2},\quad B=-\frac{3}{2},\quad C=\frac{7}{4}.$$

Οποτε η ειδικη λυση ειναι

$$\overline{x}(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{7}{4}$$

και η γενικη λυση ειναι

$$x(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}+\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{7}{4}.$$

16.1.29. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την

$$\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+5x=e^{-t}.$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι $r^2-4r+5=0$ με ριζες $r_1=2+i$, $r_2=2-i$. Γραφουμε την γενικη λυση στην μορφη

$$\widehat{x}(t)=c_1e^{2t}\cos t+c_2e^{2t}\sin t.$$

Για την ειδικη λυση θα δοκιμασουμε την

$$\begin{aligned} \overline{x}(t)&=Ae^{-t}, \\ \frac{d\overline{x}}{dt}&=-Ae^{-t}, \\ \frac{d^2\overline{x}}{dt^2}&=Ae^{-t}. \end{aligned}$$

Θα πρεπει να εχουμε

$$Ae^{-t}-4(-Ae^{-t})+5Ae^{-t}=e^{-t}\Rightarrow 10Ae^{-t}=e^{-t}\Rightarrow A=\frac{1}{10}.$$

Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$x(t)=c_1e^{2t}\cos t+c_2e^{2t}\sin t+\frac{1}{10}e^{-t}.$$

16.1.30. Παραδειγμα. Ας λυσουμε την

$$2\frac{d^2x}{dt^2}+3\frac{dx}{dt}+x=2\cos^2 t.$$

Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι $2r^2+3r+1=0$ με ριζες $r_1=-1$, $r_2=-\frac{1}{2}$. Γραφουμε την γενικη λυση στην μορφη

$$\widehat{x}(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-t/2}.$$

Για την ειδικη λυση, καταρχην γραφουμε

$$2\cos^2 t=1+\cos 2t$$

και θα δοκιμασουμε την

$$\begin{aligned}
\overline{x}(t) &= A\cos 2t + B\sin 2t + C, \\
\frac{d\overline{x}}{dt} &= -2A\sin 2t + 2B\cos 2t, \\
\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} &= -4A\cos 2t - 4B\sin 2t.
\end{aligned}$$

Θα πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned}
2(-4A\cos 2t - 4B\sin 2t) + 3(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t) + A\cos 2t + B\sin 2t + C = 1 + \cos 2t \Rightarrow \\
(-7A + 6B)\cos 2t + (-7B - 6A)\sin 2t + C = 1 + \cos 2t.
\end{aligned}$$

Οποτε εχουμε το συστημα

$$\begin{aligned}
-7A + 6B &= 1 \\
-7B - 6A &= 0 \\
C &= 1
\end{aligned}$$

με λυση

$$A = -\frac{7}{85}, \quad B = \frac{6}{85}, \quad C = 1$$

και αρα η γενικη λυση ειναι

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t/2} - \frac{7}{85}\cos 2t + \frac{6}{85}\sin 2t + 1.$$

16.1.31. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 9x = t.$$

16.1.32. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = e^{-t}.$$

16.1.33. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + 5x = \sin t.$$

16.1.34. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 9x = 3t + 2.$$

16.1.35. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = te^{-t}.$$

16.1.36. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = te^{-2t}.$$

16.1.37. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 6x = \sin t + t + 1.$$

16.1.38. Τωρα θα δειξουμε την σχεση των παραπανω αποτελεσματων με την *Γραμμικη Αλγεβρα*.

16.1.39. Ορισμος. Εστω g, h δυο συναρτησεις. Ενας *γραμμικος συνδυασμος των* g, h ειναι μια συναρτηση της μορφης

$$\kappa g + \lambda h$$

οπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$.

16.1.40. Ορισμος. Εστω $\mathcal{X}$ ενα συνολο συναρτησεων. Λεμε οτι το $\mathcal{X}$ ειναι *διανυσματικος χωρος* ανν

$$\forall \kappa, \lambda \in \mathbb{C} : (g, h \in \mathcal{X}) \Rightarrow (\kappa g + \lambda h \in \mathcal{X}).$$

Δηλ. ο διανυσματικος χωρος (συναρτησεων) ειναι ενα συνολο (συναρτησεων) το οποιο ειναι κλειστο ως προς γραμμικους συνδυασμους.

16.1.41. Ορισμος. Εστω συναρτησεις f_1, f_2, ..., f_M. Λεμε οτι το συνολο $\{f_1, f_2, ..., f_M\}$ ειναι *γραμμικα ανεξαρτητο* ανν

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_M f_M = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_M = 0 \tag{16.23}$$

δηλ. ανν

$$(\forall t : c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + ... + c_M f_M(t) = 0) \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_M = 0.$$

Λεμε οτι το $\{f_1, f_2, ..., f_M\}$ ειναι *γραμμικα εξαρτημενο* ανν δεν ισχυει η (16.23).

16.1.42. Παραδειγμα. Το $\{f_1, f_2, f_3\}$, οπου $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = t^2$, ειναι γραμμικα ανεξαρτητο. Διοτι εαν για καποια c_1, c_2, c_3 ισχυει

$$\forall t : c_1 1 + c_2 t + c_3 t^2 = 0$$

τοτε θα εχουμε (με $t = 0, 1, 2$)

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 \\ 0 &= c_1 + c_2 + c_3 \\ 0 &= c_1 + 2c_2 + 4c_3 \end{aligned}$$

Ειναι ευκολο να λυσουμε αυτο το συστημα και να δουμε οτι η μοναδικη του λυση ειναι

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

16.1.43. Παραδειγμα. Το $\{f_1, f_2, f_3\}$, οπου $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$, $f_3(t) = 2 + 3t$, ειναι γραμμικα εξαρτημενο. Διοτι παιρνοντας $c_1 = 2, c_2 = 3$ και $c_3 = -1$, εχουμε

$$(\forall t : c_1 1 + c_2 t + c_3 (2 + 3t) = 0) \Rightarrow \left(\forall t : \begin{array}{c} c_1 + 2c_3 = 0 \\ t(c_2 + 3c_3) = 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} c_1 + 2c_3 = 0 \\ c_2 + 3c_3 = 0 \end{array}\right).$$

Οποτε αν λαβουμε, π.χ., $c_1 = 6$, $c_2 = -3$, $c_3 = -2$, βλεπουμε οτι

$$\forall n : 6f_1(t) - 3f_2(t) - 2f_3(t) = 0.$$

16.1.44. Παραδειγμα. Οι συναρτησεις $x_1(t) = e^t$, $x_2(t) = e^{-t}$, $x_3(t) = \cosh t$ ειναι γραμμικα εξαρτημενες.. Διοτι παιρνοντας $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ και $c_3 = -1$, εχουμε

$$\forall t : c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \cosh t = 0.$$

16.1.45. Παραδειγμα. Οι συναρτησεις $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 1 - t$, $x_3(t) = 1$ ειναι γραμμικα εξαρτημενες αν υπαρχουν c_1 και c_2 τετοια ωστε (α) τουλαχιστον ενα εξ αυτων ειναι διαφορο του 0 και (β) ισχυει

$$\begin{aligned} &(\forall t : c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) = 0) \Leftrightarrow \\ &(\forall t : c_1(1 + t) + c_2(1 - t) + c_3 = 0) \Leftrightarrow \\ &(\forall t : c_1 + c_2 + c_3 + (c_1 - c_2) t = 0) \Leftrightarrow (c_1 + c_2 + c_3 = 0, \quad c_1 - c_2 = 0). \end{aligned}$$

Αλλα το τελευταιο ειναι το συστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 - c_2 &= 0 \end{aligned}$$

το οποιο εχει απειρια λυσεων, της μορφης $c_1 = -\frac{1}{2}c_3$, $c_2 = -\frac{1}{2}c_3$. Θετοντας $c_3 = 1$, $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$, βλεπουμε οτι υπαρχουν μη μηδενικοι αριθμοι τετοιοι ωστε

$$\forall t : c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) = 0.$$

Αρα οι συναρτησεις $x_1(t) = 1 + t$, $x_2(t) = 1 - t$, $x_3(t) = 1$ ειναι γραμμικα εξαρτημενες.

16.1.46. Ορισμος. Εστω διανυσματικος χωρος (συναρτησεων) $\mathcal{X}$ και συναρτησεις f_1, f_2, ..., f_M τετοιες ωστε

1. το συνολο $\{f_1, f_2, ..., f_M\}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητο και
2. καθε $g \in \mathcal{X}$ μπορει να γραφτει ως γραμμικος συνδυασμος των $f_1, f_2, ..., f_M$ δηλ.

$$g=c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_M f_M.$$

Τοτε λεμε οτι το $\{f_1, f_2, ..., f_M\}$ ειναι μια *βαση* του $\mathcal{X}$.

16.1.47. Συμβολισμος. Στα παρακατω θα γραφουμε την εκφραση

$$\forall n \geq 2 : \frac{d^2 f}{dt^2} + a_1 \frac{df}{dt} + a_2$$

και στην μορφη

$$\mathbf{L}(f)$$

οπου

$$\mathbf{L}(\cdot) = \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_2.$$

16.1.48. Παραδειγμα. Θετοντας

$$\mathbf{L}(\cdot) = \frac{d^2}{dt^2} + 3\frac{d}{dt} + 2$$

εχουμε

$$\mathbf{L}(f) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{d^2 f}{dt^2} + 3\frac{df}{dt} + 2 = 0.$$

Θετοντας

$$\mathbf{L}(\cdot) = \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{df}{dt} + f$$

εχουμε

$$\mathbf{L}(f) = 1 \Leftrightarrow \frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{df}{dt} + f = 1.$$

16.1.49. Θεωρημα. Ο $\mathbf{L}(f)$ ειναι ενας *γραμμικος τελεστης*, δηλ. μια συναρτηση $\mathbf{L} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ (οπου το $\mathcal{X}$ ειναι το συνολο ολων των συναρτησεων) και

$$\forall \kappa, \lambda \in \mathbb{C}, \forall p, q \in \mathcal{X} : \kappa p + \lambda q \in \mathcal{X}.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

16.1.50. Θεωρημα. Εστω $\mathcal{X}$ το συνολο των λυσεων της

$$\mathbf{L}(f) = \mathbf{0}$$

δηλ. της

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + a_1 \frac{df}{dt} + a_2 f = 0 \tag{16.24}$$

Τοτε το $\mathcal{X}$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος.
Αποδειξη. Εστω οτι g, $h \in \mathcal{X}$, δηλ. ειναι λυσεις της (16.24). Τοτε εχουμε

$$\forall \kappa, \lambda \in \mathbb{C} : \mathbf{L}(\kappa f + \lambda g) = \mathbf{L}(\kappa f) + \mathbf{L}(\lambda g) = \kappa \mathbf{L}(f) + \lambda \mathbf{L}(g) = \kappa 0 + \lambda 0 = 0.$$

το οποιο σημαινει οτι $\kappa f + \lambda g \in \mathcal{X}$. Αρα το $\mathcal{X}$ ειναι ενας διανυσματικος χωρος.

16.1.51. Θεωρημα. Δινεται η ομογενης γραμμικη ΔΕ 2ης ταξης με σταθερους συντελεστες

$$\mathbf{L}(f) = \mathbf{0} \tag{16.25}$$

δηλ. η

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + a_1 \frac{df}{dt} + a_2 f = 0. \tag{16.26}$$

Εστω $\mathcal{X}$ το συνολο των λυσεων της (16.25) και p, q οι θεμελιωδεις λυσεις της (16.25). Τοτε το συνολο $\{p, q\}$ ειναι μια βαση του $\mathcal{X}$.
Αποδειξη. Αυτο ειναι αμεση συνεπεια

1. του Θεωρηματος ;;, συμφωνα με το οποιο οτι καθε λυση της $\mathbf{L}(f) = \mathbf{0}$ μπορφει να γραφτει ως γραμμικος συνδυασμος των θεμελιωδων λυσεων p, q·

2. και του (ευκολα αποδειξιμου) γεγονοτος οτι το $\{p, q\}$ ειναι ενα γραμμικα ανεξαρτητο συνολο.

16.1.52. Ολα τα παραπανω μπορουν να γενικευτουν για την περιπτωση των γραμμικων ΔΕ N*-στης ταξης*, οπως φαινεται απο τα επομενα θεωρηματα.

16.1.53. Ορισμος. Η *χαρακτηριστικη εξισωση* της

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} x}{dt^{N-1}} + ... + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = 0$$

ειναι η

$$r^N + a_{N-1} r^{N-1} + ... + a_1 r + a_0 = 0.$$

16.1.54. Θεωρημα: Εστω $r_1, r_2, ..., r_K$ οι *διακριτες* ριζες (με αντιστοιχες πολλαπλοτητες $M_1, M_2, ..., M_K$) της χαρακτηριστικης εξισωσης της

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} x}{dt^{N-1}} + ... + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = 0 \tag{16.27}$$

Η γενικη λυση της (16.27) εχει την μορφη

$$x(t) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{M_k} c_{k,i} t^{i-1} e^{r_k t}.$$

Θα ονομαζουμε τις συναρτησεις

$$e^{r_1 t}, te^{r_1 t}, ..., , t^{M_1 - 1} e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, ..., t^{M_K - 1} e^{r_K t}$$

θεμελιωδεις λυσεις της (16.27).

16.1.55. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^3 x}{dt^2} + 6 \frac{d^2 x}{dt^2} + 11 \frac{dx}{dt} + 6x = 0.$$

16.1.56. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^3 x}{dt^2} + 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} = 0.$$

16.1.57. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^3 x}{dt^2} + 6 \frac{d^2 x}{dt^2} + 11 \frac{dx}{dt} + 6x = 0.$$

16.1.58. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^3 x}{dt^2} + 3 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + x = 0.$$

16.1.59. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^3x}{dt^2} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

16.1.60. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^3x}{dt^2} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

16.1.61. Ασκηση. Λυσε την

$$x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0, \qquad x''(0) = 2, \qquad \frac{d^3x}{dt^2} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} + 4x = 0.$$

16.1.62. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^3x}{dt^2} + x = 0.$$

16.1.63. Θεωρημα. Εστω οτι $\overline{x}(t)$ ειναι *καποια* λυση της μη ομογενους γραμμικης ΔΕ N-στης ταξης με σταθερους συντελεστες

$$\frac{d^Nx}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = f(t) \tag{16.28}$$

και $x_1(t), ..., x_N(t)$ ειναι οι N θεμελιωδεις λυσεις της *προσαρτημενης* ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$\frac{d^Nx}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = 0. \tag{16.29}$$

Τοτε η *γενικη* λυση της (16.19) ειναι

$$x(t) = c_1x_1(t) + ... + c_Nx_N(t) + \overline{x}(t)$$

οπου $c_1, ..., c_N$ ειναι αυθαιρετες σταθερες.

16.1.64. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^3x}{dt^2} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 11\frac{dx}{dt} + 6x = 3t.$$

16.1.65. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^3x}{dt^2} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 3e^{-t}.$$

16.1.66. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^3x}{dt^2} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 11\frac{dx}{dt} + 6x = -e^{-t}.$$

16.1.67. Ασκηση. Λυσε την

$$x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0, \qquad x''(0) = 2, \qquad \frac{d^3x}{dt^2} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = \sin t.$$

16.1.68. Ασκηση. Λυσε την

$$x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0, \qquad x''(0) = 2, \qquad \frac{d^3x}{dt^2} + 3\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + x = t^2 + t + 1.$$

16.1.69. Ασκηση. Λυσε την

$$x(0) = 1, \qquad x'(0) = 0, \qquad x''(0) = 2, \qquad \frac{d^3x}{dt^2} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} + 4x = 5.$$

16.1.70. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^3x}{dt^2} + 6\frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} + 4x = 5e^{-t}.$$

16.1.71. Ασκηση. Λυσε την

$$\frac{d^3x}{dt^2} + x = 2t + 3.$$

16.1.72. Θεωρημα. Η ομογενης γραμμικη ΔΕ N-στης ταξης με σταθερους συντελεστες

$$\frac{d^Nx}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0$$

εχει ακριβως N γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις.

16.1.73. Θεωρημα. Εστω $\mathcal{X}$ το συνολο των λυσεων της

$$\frac{d^Nx}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0.$$

Τοτε ισχυει το εξης

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in \mathcal{X} : c_1x_1 + c_2x_2 \in \mathcal{X}.$$

Δηλαδη το $\mathcal{X}$ ειναι ενας *διανυσματικος χωρος*.

16.1.74. Θεωρημα. Οι θεμελιωδεις λυσεις $x_1, ..., x_N$ της

$$\frac{d^Nx}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0.$$

ειναι μια *βαση* του $\mathcal{X}$. Δηλ.

$$x \in \mathcal{X} \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n.$$

16.2 Λυμενα Προβληματα

16.2.1. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = 0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 + 3r - 4 = 0$$

με ριζες $r_1 = 1$, $r_2 = -4$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$x(t) = c_1e^t + c_2e^{-4t}$$

16.2.2. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 10\frac{dx}{dt} + 25x = 0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 - 10r + 25 = 0$$

με διπλη ριζα $r_1 = r_2 = 5$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$x(t) = c_1e^{5t} + c_2te^{5t}.$$

16.2.3. Λυσε την

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$

με διπλες ριζες $r_1 = i$, $r_2 = -i$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$x(t) = c_1e^{it} + c_2te^{it} + c_3e^{-it} + c_4te^{-it}$$

η οποια ομως μπορει να γραφει και στην μορφη (αποδειξε το)

$$x(t) = p_1\cos t + p_2t\cos t + p_3\sin t + p_4t\sin t.$$

16.2.4. Λυσε την

$$x(0) = -1, \quad x'(0) = 2, \quad 4\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 17x = 0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$4r^2 + 4r + 17 = 0$$

με ριζες $r_1 = -\frac{1}{2} + 2i$, $r_2 = -\frac{1}{2} - 2i$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$x(t) = c_1 e^{\left(-\frac{1}{2}+2i\right)t} + c_2 e^{\left(-\frac{1}{2}-2i\right)t}$$

ή

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(p_1 \cos 2t + p_2 \sin 2t\right),$$
$$x'(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left(p_1 \cos 2t - 4p_2 \cos 2t + 4p_1 \sin 2t + p_2 \sin 2t\right).$$

Τοτε εχουμε

$$-1 = x(0) = p_1 \cos 0 + p_2 \sin 0 = p_1$$
$$2 = x'(0) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}} \left(p_1 \cos 0 - 4p_2 \cos 0 + 4p_1 \sin 0 + p_2 \sin 0\right) = -\frac{1}{2} p_1 + 2p_2$$

οποτε

$$p_1 = -1$$
$$-\frac{1}{2} p_1 + 2p_2 = 2$$

με λυσεις $p_1 = -1$, $p_2 = \frac{3}{4}$. Οποτε τελικα

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(-\cos 2t + \frac{3}{4} \sin 2t\right).$$

16.2.5. Λυσε την

$$x\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, \quad x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 + 16 = 0$$

με διπλες ριζες $r_1 = 4i$, $r_2 = -4$. Οποτε η γενικη λυση ειναι

$$x(t) = c_1 e^{4it} + c_2 e^{-4it}$$

ή

$$x(t) = p_1 \cos 4t + p_2 \sin 4t,$$
$$x'(t) = 4p_2 \cos 4t - 4p_1 \sin 4t.$$

Τοτε εχουμε

$$0 = x\left(\frac{\pi}{3}\right) = p_1 \cos \frac{4\pi}{3} + p_2 \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} p_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} p_2$$
$$2 = x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4p_2 \cos \frac{4\pi}{3} - 4p_1 \sin \frac{4\pi}{3} = 2\sqrt{3} p_1 - 2p_2$$

οποτε

$$-\frac{1}{2} p_1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} p_2 = 0$$
$$2\sqrt{3} p_1 - 2p_2 = 2$$

με λυσεις $p_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $p_2 = -\frac{1}{4}$. Οποτε τελικα

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 4t - \frac{1}{4} \sin 4t.$$

16.2.6. Λυσε την
$$x\left(0\right)=1,\quad x'\left(0\right)=5,\quad \frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+2x=0.$$
Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι
$$r^2+r+2=0$$
με $r_1=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$, $r_2=\frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$. Οποτε η γενικη λυση ειναι
$$x\left(t\right)=e^{-t/2}\left(p_1\cos\frac{\sqrt{7}t}{2}+p_2\sin\frac{\sqrt{7}t}{2}\right),$$
$$x'\left(t\right)=-\frac{e^{-t/2}}{2}\left(p_1\cos\frac{\sqrt{7}t}{2}+p_2\sin\frac{\sqrt{7}t}{2}-\sqrt{7}p_2\cos\frac{\sqrt{7}t}{2}+\sqrt{7}p_1\sin\frac{\sqrt{7}t}{2}\right).$$
Τοτε εχουμε
$$1=x\left(0\right)=p_1,$$
$$5=x'\left(0\right)=-\left(p_1-\sqrt{7}p_2\right)$$
με λυσεις $p_1=1$, $p_2=\frac{11\sqrt{7}}{7}$. Οποτε τελικα
$$x\left(t\right)=e^{-t/2}\left(\cos\frac{\sqrt{7}t}{2}+\frac{11\sqrt{7}}{2}\sin\frac{\sqrt{7}t}{2}\right).$$

16.2.7. Λυσε την
$$y\left(0\right)=y'\left(0\right)=0,\quad y''\left(0\right)=1,\quad \frac{d^3x}{dt^3}+2\frac{d^2x}{dt^2}-5\frac{dx}{dt}-6x=0.$$
Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι
$$r^3+2r^2-5r-6=0$$
με ριζες $r_1=-3$, $r_2=2$, $r_3=-1$. Οποτε η γενικη λυση ειναι
$$x\left(t\right)=c_1e^{-3t}+c_2e^{2t}+c_3e^{-t},$$
$$x'\left(t\right)=-3c_1e^{-3t}+2c_2e^{2t}-c_3e^{-t},$$
$$x''\left(t\right)=9c_1e^{-3t}+4c_2e^{2t}+c_3e^{-t}.$$
Τοτε εχουμε
$$0=c_1+c_2+c_3$$
$$0=-3c_1+2c_2-c_3$$
$$1=9c_1+4c_2+c_3$$
με λυσεις $c_1=\frac{1}{10}$, $c_2=\frac{1}{15}$, $c_3=-\frac{1}{6}$. Οποτε τελικα
$$x\left(t\right)=\frac{1}{10}e^{-3t}+\frac{1}{15}e^{2t}-\frac{1}{6}e^{-t}.$$

16.2.8. Λυσε την
$$\frac{d^2x}{dt^2}-16x=2e^{4t}.$$
Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι $r^2-16=0$ οποτε η γενικη λυση της προσαρτημενης ομογενους ειναι
$$x\left(t\right)=c_1e^{4t}+c_2e^{-4t}.$$

Για την ειδικη λυση δοκιμαζουμε

$$\begin{aligned}\overline{x}(t) &= Ate^{4t}\\ \overline{x}'(t) &= Ae^{4t}(4t+1)\\ \overline{x}''(t) &= 8Ae^{4t}(2t+1)\end{aligned}$$

οποτε πρεπει να εχουμε

$$8Ae^{4t}(2t+1) - 16Ate^{4t} = 2e^{4t} \Rightarrow 8A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{4}.$$

Τελικα λοιπον η λυση της ΔΕ ειναι

$$x(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-4t} + \frac{t}{4} e^{4t}.$$

16.2.9. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 10\frac{dx}{dt} + 25x = 30t + 3.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 - 10r + 25 = 0$$

οποτε η γενικη λυση ειναι

$$\widehat{x}(t) = c_1 e^{5t} + c_2 te^{5t}.$$

Για την ειδικη λυση δοκιμαζουμε

$$\begin{aligned}\overline{x}(t) &= At + B\\ \overline{x}'(t) &= A\\ \overline{x}''(t) &= 0\end{aligned}$$

οποτε πρεπει να εχουμε

$$0 - 10A + 25(At + B) = 30t + 3.$$

Δηλ.

$$(25A = 30, \quad -10A + 25B = 3) \Rightarrow \left(A = \frac{6}{5}, \quad B = \frac{3}{5}\right).$$

Τελικα λοιπον η λυση της ΔΕ ειναι

$$x(t) = c_1 e^{5t} + c_2 te^{5t} + \frac{6}{5}t + \frac{3}{5}.$$

16.2.10. Λυσε την

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} + 9x = 6t^2 + 2 - 12e^{3t}.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

οποτε η γενικη λυση ειναι

$$\widehat{x}(t) = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t}.$$

Για την ειδικη λυση θα δοκιμαζαμε $\overline{x}(t) = At^2 + Bt + C + De^{3t}$. Αλλα ο ορος e^{3t} εμφανιζεται ηδη στην $\widehat{x}(t)$, οπως και ο te^{3t}. Οποτε θα δοκιμασουμε την $D_{tt}\left(At^2 + Bt + C + Dt^2e^{3t}\right) =$

$$\begin{aligned}\overline{x}(t) &= At^2 + Bt + C + Dt^2e^{3t}\\ \overline{x}'(t) &= B + 2At + 3t^2De^{3t} + 2tDe^{3t}\\ \overline{x}''(t) &= 2A + 2De^{3t} + 9t^2De^{3t} + 12tDe^{3t}\end{aligned}$$

οποτε πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned}&\left(2A + 2De^{3t} + 9t^2De^{3t} + 12tDe^{3t}\right) - 6\left(B + 2At + 3t^2De^{3t} + 2tDe^{3t}\right) + 9\left(At^2 + Bt + C + Dt^2e^{3t}\right)\\ &= 6t^2 + 2 - 12e^{3t}\end{aligned}$$

Ομαδοποιωντας και εξισωνοντας αντιστοιχους ορους καταληγουμε στο συστημα

$$\begin{aligned} 9A &= 6 \\ -12A + 9B &= 0 \\ 2A - 6B + 9C &= 2 \\ 2E &= -12 \end{aligned}$$

με λυσεις

$$A = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{8}{9}, \quad C = \frac{2}{3}, \quad D = -6.$$

Τελικα λοιπον η λυση της ΔΕ ειναι

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + \frac{2}{3}t^2 + \frac{8}{9}t + \frac{2}{3} - 6t^2 e^{3t}.$$

16.2.11. Λυσε την

$$y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 2, \quad \frac{d^2x}{dt^2} + x = 4t + 10\sin t.$$

Λυση. Η χαρακτηριστικη εξισωση ειναι

$$r^2 + 1 = 0$$

οποτε η γενικη λυση της αντιστοιχης ομογενους ειναι

$$\overline{x}(t) = p_1 \cos t + p_2 \sin t.$$

Αφου η $\sin t$ εμφανιζεται στην γενικη λυση, για την ειδικη δοκιμαζουμε

$$\begin{aligned} \widehat{x}(t) &= At + B + Ct\cos t + Dt\sin t \\ \widehat{x}'(t) &= A + D\sin t + C\cos t + tD\cos t - Ct\sin t \\ \widehat{x}''(t) &= 2D\cos t - 2C\sin t - tD\sin t - Ct\cos t \end{aligned}$$

Τοτε πρπει να εχουμε

$$(2D\cos t - 2C\sin t - tD\sin t - Ct\cos t) + At + B + Ct\cos t + Dt\sin t = 4t + 10\sin t$$

και αρα

$$\begin{aligned} A &= 4 \\ B &= 0 \\ 2D &= 0 \\ -2C &= 10 \end{aligned}$$

οποτε η ειδικη λυση γινεται

$$\begin{aligned} \widehat{x}(t) &= 4t - 5t\cos t \\ \widehat{x}'(t) &= 4 - 5(\cos t - t\sin t) \\ \widehat{x}''(t) &= -2\sin t - t\cos t. \end{aligned}$$

Τωρα η λυση $x(t) = \overline{x}(t) + \widehat{x}(t)$ γινεται

$$\begin{aligned} x(t) &= p_1\cos t + p_2\sin t + 4t - 5t\cos t \\ x'(t) &= p_2\cos t - p_1\sin t + 4 - 5\cos t + 5t\sin t \end{aligned}$$

οποτε

$$\begin{aligned} 0 = x(\pi) &= p_1\cos\pi + p_2\sin\pi + 4\pi - 5\pi\cos\pi = -p_1 + 4\pi + 5\pi \\ 2 = x'(\pi) &= p_2\cos\pi - p_1\sin\pi + 4 - 5\cos\pi + 5t\sin t = -p_2 + 4 + 5 \end{aligned}$$

με λυσεις $p_1 = 9\pi$, $p_2 = 7$. Οποτε τελικα

$$x(t) = 9\pi\cos t + 7\sin t + 4t - 5t\cos t.$$

16.2.12. Λυσε την

$$x\left(0\right)=2,\quad x'\left(0\right)=5,\quad \frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=\left(3+t\right)e^{-2t}.$$

Λυση. Η γενικη λυση της αντιστοιχης ομογενους ειναι

$$\widehat{x}\left(t\right)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}.$$

Υποθετουμε για την μερικη λυση

$$\overline{x}\left(t\right)=\left(At^3+Bt^2\right)e^{-2t}$$

και λυνοντας προκυπτει $A=\frac{1}{6}$, $B=\frac{3}{2}$. Οποτε

$$x\left(t\right)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+\left(\frac{t^3}{6}+\frac{3t^2}{2}\right)e^{-2t}$$

$$x'\left(t\right)=-\frac{1}{6}e^{-2t}\left(12c_1-18t-6c_2+12tc_2+15t^2+2t^3\right)$$

και

$$2=x\left(0\right)=c_1,$$
$$5=x'\left(0\right)=-2c_1+c_2.$$

Τελικα $c_1=2$, $c_2=9$ και

$$x\left(t\right)=\left(2+9t+\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\right)e^{-2t}.$$

16.3 Αλυτα Προβληματα

16.3.1. Λυσε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+3x=0$. *Απ.* $c_1e^{3t}+c_2e^t$.
2. $\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+8x=0$. *Απ.* $c_1e^{2t}\cos 2t-c_2e^{2t}\sin 2t$.
3. $2\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-x=0$. *Απ.* $c_1e^{-\frac{1}{2}t}+c_2e^t$.
4. $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}+x=0$. *Απ.* $c_1\left(\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t\right)e^{\frac{1}{2}t}-c_2\left(\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}t\right)e^{\frac{1}{2}t}$.

16.3.2. Λυσε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\frac{d^2x}{dt^2}+3x=0$, $y\left(0\right)=3$, $y'\left(0\right)=-4$. *Απ.* $3\cos\sqrt{3}t-\frac{4\sqrt{3}}{3}\sin\sqrt{3}t$.
2. $4\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+x=0$, $y\left(0\right)=1$, $y'\left(0\right)=-\frac{3}{2}$. *Απ.* $e^{t/2}-2te^{t/2}$.
3. $\frac{d^2x}{dt^2}+16x=0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=-3$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$. *Απ.* $3\cos 4t-\sin 4t$.
4. $\frac{d^2x}{dt^2}+12\frac{dx}{dt}+36x=0$, $y\left(1\right)=0$, $y'\left(1\right)=1$. *Απ.* $\left(t-1\right)e^{-6(t-1)}$.

16.3.3. Λυσε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+3x=t^2-1$. *Απ.* $\frac{8}{9}t+c_1e^{3t}+c_2e^t+\frac{1}{3}t^2+\frac{17}{27}$.
2. $\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+3x=\sin t$. *Απ.* $\frac{1}{5}\cos t+\frac{1}{10}\sin t+c_1e^{3t}+c_2e^t$.
3. $\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+4x=\sin t$. *Απ.* $\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t+c_1e^{2t}+c_2te^{2t}$.
4. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}+x=t+1$. *Απ.* $t+c_1e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{1}{2}\sqrt{3}t-c_2te^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

5. $\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=t\sin t$. *Απ.* $c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{10}\cos t-\frac{1}{25}\sin t-\frac{1}{10}t\cos t+\frac{1}{10}t\sin t$.

6. $\frac{d^2x}{dt^2}+5\frac{dx}{dt}+6x=e^{-2t}$. *Απ.* $c_1e^{-2t}+c_2e^{-3t}+\frac{1}{e^{2t}}\left(t-1\right)$.

7. $\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+4x=e^{-2t}$. *Απ.* $c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+\frac{t^2}{2}e^{-2t}$.

8. $\frac{d^2x}{dt^2}+4x=\cos 2t$. *Απ.* $c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+\frac{1}{4}t\sin 2t+\frac{1}{16}\cos 2t$.

16.3.4. Λυσε τις παρακατω ΔΕ.

1. $\frac{d^2x}{dt^2}+x=e^t+t^3$, $x\left(0\right)=2$, $x'\left(0\right)=0$. *Απ.* $\frac{3}{2}\cos t+\frac{11}{2}\sin t+\frac{1}{2}e^t+t^3-6t$.

2. $\frac{d^2x}{dt^2}-4x=e^t\cos t$, $x\left(0\right)=1$, $x'\left(0\right)=2$. *Απ.* $\frac{9}{8}e^{2t}+\frac{3}{40}e^{-2t}+e^t\left(\frac{1}{10}\sin t-\frac{1}{5}\cos t\right)$.

3. $\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}=te^t$, $x\left(0\right)=2$, $x'\left(0\right)=1$. *Απ.* $e^t\left(\frac{t^2}{2}-t+2\right)$.

4. $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}-2x=t+\sin 2t$, $x\left(0\right)=1$, $x'\left(0\right)=0$. *Απ.* $\frac{17}{15}e^t+\frac{1}{6}e^{-2t}-\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}-\frac{1}{20}\cos 2t-\frac{3}{20}\sin 2t$.

16.4 Προχωρημενα Αλυτα Προβληματα

16.4.1. Αποδειξε οτι: αν $r_1,r_2,...,r_K$ ειναι οι *διακριτες* ριζες (με αντιστοιχες πολλαπλοτητες $M_1,M_2,...,M_K$) της χαρακτηριστικης εξισωσης της

$$\frac{d^Nx}{dt^N}+a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}}+...+a_1\frac{dx}{dt}+a_0=0, \tag{16.30}$$

τοτε η γενικη λυση της (16.30) εχει την μορφη

$$x\left(t\right)=\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{M_k}c_{k,i}t^{i-1}e^{r_kt}.$$

16.4.2. Αποδειξε οτι: αν $\overline{x}\left(t\right)$ ειναι *καποια* λυση της μη ομογενους ΔΕ

$$\frac{d^Nx}{dt^N}+a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}}+...+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=f\left(t\right) \tag{16.31}$$

και $x_1\left(t\right),...,x_N\left(t\right)$ ειναι οι N θεμελιωδεις λυσεις της *προσαρτημενης* ομογενους γραμμικης ΔΕ

$$\frac{d^Nx}{dt^N}+a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}}+...+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=0, \tag{16.32}$$

τοτε η *γενικη* λυση της (16.19) ειναι

$$x\left(t\right)=c_1x_1\left(t\right)+...+c_Nx_N\left(t\right)+\overline{x}\left(t\right)$$

οπου $c_1,...,c_N$ ειναι αυθαιρετες σταθερες.

16.4.3. Αποδειξε οτι: η ομογενης γραμμικη ΔΕ N-στης ταξης με σταθερους συντελεστες

$$\frac{d^Nx}{dt^N}+a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}}+...+a_1\frac{dx}{dt}+a_0=0$$

εχει ακριβως N γραμμικα ανεξαρτητες λυσεις.

16.4.4. Αποδειξε οτι: αν $\mathcal{X}$ ειναι το συνολο των λυσεων της

$$\frac{d^Nx}{dt^N}+a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}}+...+a_1\frac{dx}{dt}+a_0=0$$

τοτε ισχυει το εξης

$$\forall c_1,c_2\in\mathbb{R},\forall x_1,x_2\in\mathcal{X}:c_1x_1+c_2x_2\in\mathcal{X}.$$

16.4.5. Αποδειξε οτι: οι θεμελιωδεις λυσεις $x_1, ..., x_N$ της

$$\frac{d^N x}{dt^N} + a_{N-1}\frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0.$$

ειναι μια *βαση* του $\mathcal{X}$, δηλ.

$$x \in \mathcal{X} \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n.$$

Α′ Συνολα, Σχεσεις και Συναρτησεις

Παρουσιαζουμε βασικα στοιχεια και συμβολισμους της Θεωριας Συνολων. Χρησιμοποιωντας αυτα, κατοπιν εξεταζουμε την εννοια της *συναρτησης* και την (γενικοτερη) εννοια της *σχεσης*[1].

Α′.1 Θεωρια και Παραδειγματα

Α′.1.1. Θεωρω οτι γνωριζεις τους βασικους λογικους συμβολισμους ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$ κ.τ.λ.). Ο ορος «*ανν*» σημαινει «*αν και μονον αν*».

Α′.1.2. Συμβολισμος. Θεωρω οτι γνωριζεις τους παρακατω βασικους συμβολισμους της Θεωριας Συνολων.

1. $a \in A$. Το στοιχειο a *ανηκει* στο συνολο A. Γραφεται και ως $A \ni a$.
2. $A \subseteq B$. Το συνολο A ειναι *υποσυνολο* του συνολου B: $a \in A \Rightarrow a \in B$. Γραφεται και ως $A \supseteq B$.
3. $A \subset B$. Το συνολο A ειναι *γνησιο υποσυνολο* του συνολου B: $A \subseteq B$ και $A \neq B$. Γραφεται και ως $A \supset B$.
4. $A = B$. Τα συνολα A και B ταυτιζονται: $A = B \Rightarrow (A \subseteq B$ και $B \subseteq A)$.
5. $A \cap B$. Η *τομη* των συνολων A και B: $a \in A \cap B \Rightarrow (a \in A$ και $a \in B)$.
6. $A \cup B$. Η *ενωση* των συνολων A και B: $a \in A \cup B \Rightarrow (a \in A$ ή $a \in B$). Αυτο περιλαμβανει και την περιπτωση οπου $a \in A$ *και* $a \in B$.
7. $A \backslash B$. Η *διαφορα* του A απο το B: $a \in A \backslash B \Rightarrow (a \in A$ και $a \notin B$).
8. A^c. Το *συμπληρωμα* του A (ως προς καποιο *συνολο αναφορας* U): $A^c = U \backslash A$.
9. $\emptyset$. Το *κενο συνολο* ειναι εκεινο το οποιο δεν εχει κανενα μελος.
10. $\wp(A)$. Το *δυναμοσυνολο* του A: το συνολο ολων των υποσυνολων του A.
11. $A \times B$. Το *Καρτεσιανο γινομενο* των συνολων A και B: το συνολο

    $$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}.$$

    Η εννοια γενικευεται σε N-διαστατα Καρτεσιανα γινομενα:

    $$A_1 \times A_2 \times ... \times A_N = \{(a_1, a_2, ..., a_N) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_N \in A_N\}.$$

[1] Στο παρον παραρτημα και σε αυτα που επονται, αρκετες αποδειξεις θεωρηματων αφηνεται ως ασκησεις στον αναγνωστη.

12. Τα στοιχεια (a, b) του συνολου $A \times B$ λεγονται *διατεταγμενα ζευγη*. Τα στοιχεια $(a_1, ..., a_N)$ του $A_1 \times A_2 \times ... \times A_N$ λεγονται N-αδες.

Α΄.1.3. Θεωρημα. Η τομη και η ενωση συνολων ειναι *αντιμεταθετικες* και *προσεταιριστικες*. Δηλ.

$$\forall A, B, C : A \cap B = B \cap A, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{Α΄.1}$$

$$\forall A, B, C : A \cup B = B \cup A, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{Α΄.2}$$

Αποδειξη. Αποδεικνυουμε μονο τις ιδιοτητες (Α΄.1) της τομης.

$$a \in A \cap B \Leftrightarrow (a \in A \text{ και } a \in B) \Leftrightarrow (a \in B \text{ και } a \in A) \Leftrightarrow a \in B \cap A.$$

και

$$\begin{aligned} & a \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow (a \in A \cap B \text{ και } a \in C) \\ & \quad \Leftrightarrow (a \in A \text{ και } a \in B \text{ και } a \in C) \Leftrightarrow (a \in A \text{ και } a \in B \cap C) \Leftrightarrow (a \in A \cap (B \cap C)) . \end{aligned}$$

Η αποδειξη των ιδιοτητων (Α΄.2) αφηνεται στον αναγνωστη.

Α΄.1.4. Θεωρημα. Η τομη συνολων ειναι επιμεριστικη ως προς την ενωση και αντιστροφα, δηλ.

$$\forall A, B, C : A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) ,$$
$$\forall A, B, C : A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) .$$

Αποδειξη. Η αποδειξη αφηνεται στον αναγνωστη.

Α΄.1.5. Συμβολισμος. Μπορουμε να ορισουμε την τομη και ενωση μιας οικογενειας συνολων $\mathcal{A}$. Δηλ.

$$a \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{A} : a \in A) ,$$
$$a \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \Leftrightarrow (\exists A \in \mathcal{A} : a \in A) .$$

Α΄.1.6. Θεωρημα. Δινεται οικογενεια συνολων $\mathcal{A}$. Δειξε οτι

$$A \cap \left(\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} (A \cap B) ,$$
$$A \cup \left(\bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \right) = \bigcup_{B \in \mathcal{A}} (A \cup B) .$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Α΄.1.7. Θεωρημα. Για καθε A, B, C:

$$(A \subseteq C \text{ και } B \subseteq C) \Rightarrow A \cap B \subseteq C, \tag{Α΄.3}$$

$$(A \subseteq C \text{ και } B \subseteq C) \Rightarrow A \cup B \subseteq C. \tag{Α΄.4}$$

Αποδειξη. Αποδεικνυουμε την (Α΄.3). Εχουμε

$$x \in A \cap B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \in A \Rightarrow x \in C \\ x \in B \Rightarrow x \in C \end{array} \right\} \Rightarrow x \in C.$$

Αρα $A \cap B \subseteq C$. Η αποδειξη της (Α΄.4) αφηνεται στον αναγνωστη.

Α'.1.8. Ορισμος. Μια *διαμεριση* του συνολου A ειναι μια συλλογη συνολων

$$\mathcal{A} = \{A_s : s \in S\}$$

(δηλ. για καθε *δεικτη* $s \in S$ εχουμε ενα συνολο) τετοια ωστε:

$$\cup_{s\in S} A_s = A, \quad \forall s,t \in S \text{ με } s \neq t : A_s \cap A_t = \emptyset.$$

Α'.1.9. Παραδειγμα. Εστω $A = \{a,b,c,d,e\}$, $S = (s,t,u)$ και $A_s = \{a,b\}$, $A_t = \{c,e\}$, $A_u = \{d\}$. Τοτε η οικογενεια

$$\mathcal{A} = \{A_s : s \in S\} = \{A_s, A_t, A_u\} = \{\{a,b\}, \{c,e\}, \{d\}\}$$

ειναι μια διαμεριση του A.

Α'.1.10. Ορισμος. Μια *σχεση* $\overline{R}$ *απο το συνολο* A *στο συνολο* B ειναι ενα υποσυνολο $\overline{R}$ του $A \times B$. Οταν $A = B$ λεμε και οτι η $\overline{R}$ ειναι μια σχεση στο A.

Α'.1.11. Συμβολισμος. Οταν η $\overline{R}$ ειναι μια σχεση, συνηθως γραφουμε aRb ή $R(a,b)$ για να δηλωσουμε οτι $(a,b) \in \overline{R}$.

Α'.1.12. Ορισμος. Μια σχεση $\overline{R}$ στο A λεγεται *ισοδυναμια* ανν για καθε $a,b,c \in A$ ισχυουν τα εξης.

1. aRa (η $\overline{R}$ ειναι *ανακλαστικη*),
2. $aRb \Rightarrow a = b$ (η $\overline{R}$ ειναι *συμμετρικη*),
3. (aRb και bRc) $\Rightarrow aRc$ (η $\overline{R}$ ειναι *μεταβατικη*).

Α'.1.13. Συμβολισμος. Μια ισοδυναμια συχνα συμβολιζεται με συμβολα της μορφης $\approx$, $\simeq$, $\sim$ κ.τ.λ.

Α'.1.14. Παραδειγμα. Εστω A το συνολο των ευθειων στο επιπεδο και $\overline{R}$ η σχεση παραλληλιας. Δηλ., αν a,b ειναι ευθειες στο επιπεδο aRb ανν η a ειναι παραλληλη στην b. Μπορουμε να χρησιμοποιησουμε και τον παραδοσιακο συμβολισμο $a \| b$. Η παραλληλια ειναι μια ισοδυναμια, διοτι για καθε $a,b,c \in A$ εχουμε:

$$a\|a, \quad a\|b \Rightarrow b\|a, \quad (a\|b \text{ και } b\|c) \Rightarrow a\|c.$$

Α'.1.15. Ορισμος. Μια σχεση $\overline{R}$ στο A λεγεται (*μερικη*) *διαταξη* ανν για καθε $a,b,c \in A$ ισχυουν τα εξης.

1. aRa (η $\overline{R}$ ειναι *ανακλαστικη*),
2. (aRb και bRa) $\Rightarrow a = b$ (η $\overline{R}$ ειναι *αντισυμμετρικη*),
3. (aRb και bRc) $\Rightarrow aRc$ (η $\overline{R}$ ειναι *μεταβατικη*).

Αν επιπλεον ισχυει

$$\forall a,b \in A: \text{ είτε } aRb \text{ είτε } bRa$$

τοτε η $\overline{R}$ λεγεται *ολικη διαταξη*.

Α'.1.16. Συμβολισμος. Μια διαταξη συχνα συμβολιζεται με συμβολα της μορφης $\preceq$, $\sqsubseteq$, $\leqslant$ κ.τ.λ.

Α'.1.17. Παραδειγμα. Ο εγκλεισμος συνολων $\subseteq$ ειναι μια μερικη διαταξη διοτι, οπως εχουμε ηδη δει, για καθε τριαδα συνολων A,B,C ισχυουν τα παρακατω.

$$A \subseteq A, \quad (A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A) \Rightarrow A = B, \quad (A \subseteq B \text{ και } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C.$$

Η $\subseteq$ *δεν* ειναι ολικη διαταξη· π.χ., για τα συνολα $\{a,b\}$ και $\{a,c\}$ δεν ισχυει ουτε $A \subseteq B$ ουτε $B \subseteq A$.

Α'.1.18. Ορισμος. Εστω $\overline{R}$ ισοδυναμια στο A. Για καθε $a \in A$ η *κλαση ισοδυναμιας του* a συμβολιζεται με $[a]$ και οριζεται ως εξης:

$$[a] = \{b : bRa\}.$$

Α′.1.19. Θεωρημα. Εστω $\overline{R}$ ισοδυναμια στο A. Ισχυει το εξης:

$$aRb \Rightarrow [a] = [b]\,.$$

Αποδειξη. Εστω $(a,b) \in \overline{R}$, οποτε aRb. Για τυχον $a' \in [a]$ εχω επισης $a'Ra$. Οποτε

$$\left.\begin{array}{c} a'Ra \\ aRb \end{array}\right\} \Rightarrow a'Rb \Rightarrow a' \in [b] \Rightarrow [a] \subseteq [b]\,.$$

Με ομοιο τροπο παιρνουμε $[b] \subseteq [a]$. Οποτε $[a] = [b]$.

Α′.1.20. Θεωρημα. Εστω $\overline{R}$ ισοδυναμια στο A. Τοτε η οικογενεια

$$\{[a] : a \in A\}$$

ειναι μια διαμεριση του A (δηλ. οι κλασεις μιας ισοδυναμιας στο A διαμεριζουν το A).
Αποδειξη. Πρωτα δειχνουμε οτι $\cup_{a\in A}[a] = A$. Πραγματι

$$(\forall a \in A : [a] \subseteq A) \Rightarrow \cup_{a\in A}[a] \subseteq A$$

και

$$a' \in A \Rightarrow a' \in [a'] \Rightarrow a' \in \cup_{a\in A}[a] \Rightarrow A \subseteq \cup_{a\in A}[a]$$

οποτε $\cup_{a\in A}[a] = A$.

Τωρα θα δειξουμε οτι $[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$. Πραγματι, αν εχουμε $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ τοτε υπαρχει $c \in [a] \cap [b]$· αλλα

$$c \in [a] \cap [b] \Rightarrow \left.\begin{array}{c} aRc \\ cRb \end{array}\right\} \Rightarrow aRb \Rightarrow [a] = [b]\,.$$

Δηλ. $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$ ή, ισοδυναμα,

$$[a] \neq [b] \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset.$$

Α′.1.21. Ορισμος. Μια *συναρτηση* απο το συνολο A στο συνολο B ειναι ενα υποσυνολο $\overline{F}$ του $A \times B$ τετοιο ωστε: για *καθε* $a \in A$ υπαρχει *ακριβως* ενα ζευγος $(a,b) \in \overline{F}$. Το A λεγεται *πεδιο ορισμου* της $\overline{F}$ και το B λεγεται *πεδιο τιμων* της $\overline{F}$. Το συνολο

$$\left\{b : (a,b) \in \overline{F}\right\}$$

λεγεται *εικονα* της $\overline{F}$.

Α′.1.22. Συμβολισμος. Οταν η $\overline{F}$ ειναι μια συναρτηση, συνηθως γραφουμε $F(a)$ για να δηλωσουμε οτι $(a, F(a)) \in \overline{R}$. Γραφουμε επισης $F : A \to B$ για να δηλωσουμε οτι πεδιο ορισμου ειναι το A και πεδιο τιμων το B.

Α′.1.23. Χρησιμοποιουμε και τους εξης συμβολισμους:

1. Το πεδιο ορισμου της F το συμβολιζουμε με $dom(F)$.
2. Το πεδιο τιμων της F την συμβολιζουμε με $ran(F)$.
3. Την εικονα της F την συμβολιζουμε με $im(F)$.

Α′.1.24. Αμεσες συνεπειες των παραπανω, για δεδομενη συναρτηση $F : A \to B$, ειναι:

1. Για καθε $a \in dom(F) = A$, υπαρχει το $F(a)$ και ειναι μονοσημαντα ορισμενο.
2. $im(F) \subseteq ran(F) = B$ (και μπορει ο εγκλεισμος να ειναι γνησιος: $im(F) \subset ran(F)$).

Α′.1.25. Ορισμος. Εστω συναρτηση $F : A \to B$. Χρησιμοποιουμε τους εξης ορους.

1. Λεμε οτι η F ειναι *μονοσημαντη* ανν
$$\forall a, a' \in A : a = a' \Rightarrow F(a) = F(a').$$
Προφανως καθε συναρτηση ειναι μονοσημαντη.

2. Λεμε οτι η F ειναι *επιμονοσημαντη* ή *επι του* B ανν
$$\forall b \in B : \exists a \in A : F(a) = b,$$
δηλ. $im(F) = B$.

3. Λεμε οτι η F ειναι *αμφιμονοσημαντη* ή *1-προς-1* ανν
$$\forall a, a' \in A : F(a) = F(a') \Rightarrow a = a'.$$

Α΄.1.26. Ορισμος. Λεμε οτι η συναρτηση $F : A \to B$ ειναι *αντιστρεψιμη* ανν υπαρχει συναρτηση $G : B \to A$ τετοια ωστε
$$\forall a \in A, b \in im(F) : b = F(a) \Leftrightarrow a = G(b).$$
Η G λεγεται *αντιστροφη* της F και συμβολιζεται και ως F^{-1}.

Α΄.1.27. Θεωρημα. Η συναρτηση F ειναι αντιστρεψιμη ανν ειναι 1-προς-1 και επι του B.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Α΄.1.28. Ορισμος. Δινονται συναρτησεις $F : A \to B$ και $G : B \to C$. Η *συνθεση των* F *και* G ειναι η συναρτηση $H : A \to C$ η οποια οριζεται ως εξης:
$$\forall a \in A : H(a) = G(F(a)).$$
Η H συμβολιζεται και ως $G \circ F$.

Α΄.2 Αλυτα Προβληματα

Α΄.2.1. Δειξε οτι $A \backslash B = A \cap B^c$.

Α΄.2.2. Δειξε οτι $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ και $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.

Α΄.2.3. Δειξε οτι $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = A$ και $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) = \emptyset$.

Α΄.2.4. Μπορει να ισχυουν (α) $A \cap C = B \cap C$ και $A \neq B$, (β) $A \cup C = B \cup C$ και $A \neq B$;

Α΄.2.5. Δειξε οτι αν σε μια εγκυρη ταυτοτητα συνολων, η οποια χρησιμοποιει μονο τα $\cap$ και $\cup$, αντικαταστησω καθε $\cap$ και $\cup$ και αντιστροφα, προκυπτει μια νεα εγκυρη ταυτοτητα.

Α΄.2.6. Εστω $A = \{a, b, c\}$, $P = \{p, q\}$. Βρες το $A \times P$.

Α΄.2.7. Δειξε οτι $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$.

Α΄.2.8. Δινεται το συνολο $A = \{a, b, c, d\}$. Ορισε δυο διαφορετικες ισοδυναμιες στο A. Κατοπιν ορισε δυο διαφορετικες διαταξεις στο A, μια μερικη και μια ολικη.

Α΄.2.9. Δινεται το συνολο $A = \{a, b, c, d\}$. Ορισε μια ισοδυναμια στο A και βρες τις κλασεις αυτης.

Α΄.2.10. Δινεται το συνολο A και μια διαμεριση αυτου $\mathcal{A}$. Χρησιμοποιησε το $\mathcal{A}$ για ναορισεις μια ισοδυναμια στο A.

Α΄.2.11. Δινεται το συνολο $A = \{a, b, c\}$. Ποσες διαφορετικες διαμερισεις του A υπαρχουν;

Α΄.2.12. Δινεται το συνολο $A = \{a, b, c\}$. Ποσες διαφορετικες ισοδυναμιες υπαρχουν στο A; Ποσες διαφορετικες διαταξεις;

Α′.2.13. Εστω συνολο A και δυο ισοδυναμιες $\overline{R}'$ και $\overline{R}''$ στο A. Λεμε οτι η $\overline{R}'$ ειναι *λεπτοτερη* της $\overline{R}''$ (και η $\overline{R}''$ ειναι *χονδροτερη* της $\overline{R}'$) στο A ανν $\overline{R}'' \subseteq \overline{R}'$. Δινεται το συνολο $A = \{a, b, c, d\}$. Βρες την λεπτοτερη και χονδροτερη ισοδυναμια στο A. Γενικευσε σε τυχον συνολο.

Α′.2.14. Δινονται συναρτησεις $F : A \to B$ και $G : B \to C$. Δειξε οτι: (α) αν οι F και G ειναι 1-προς-1 τοτε η $G \circ F$ ειναι 1-προς-1 και (β) αν οι F και G ειναι επι τοτε η $G \circ F$ ειναι επι.

Α′.2.15. Δινονται συναρτησεις $F : A \to B$ και $G : B \to C$. Δειξε οτι: (α) αν η $G \circ F$ ειναι 1-προς-1 τοτε η F ειναι 1-προς-1 και (β) αν η $G \circ F$ ειναι επι τοτε η G ειναι επι.

Α′.2.16. Δινονται αντιστρεψιμες συναρτησεις $F : A \to B$ και $G : B \to C$. Δειξε οτι η $G \circ F$ ειναι αντιστρεψιμη και $(G \circ F)^{-1}$ ειναι η $G^{-1} \circ F^{-1}$.

Β΄ Πραγματικοι Αριθμοι

Στις προπανεπιστημιακες σου σπουδες εχεις χρησιμοποιησει διαφορα συνολα αριθμων, π.χ., τους *φυσικους*, τους *ακεραιους*, τους *ρητους* και τους *πραγματικους* αριθμους. Ομως κατα πασα πιθανοτητα δεν εχεις δει εναν *αυστηρο ορισμο* ολων αυτων των συνολων. Ενας τετοιος ορισμος παρουσιαζεται στο παρον κεφαλαιο. Για την ακριβεια, παρουσιαζουμε μια *αξιωματικη θεμελιωση του συστηματος των πραγματικων αριθμων*.

Β΄.1 Θεωρια και Παραδειγματα

Β΄.1.1. Καθε μαθηματικος ορισμος βασιζεται σε καποιες «*προτερες*» εννοιες οι οποιες (α) ειτε εχουν ορισθει προηγουμενως (β) ειτε δεν οριζονται διοτι θεωρουνται θεμελιωδεις. Στην περιπτωση των αριθμων υπαρχουν δυο δυνατοτητες.

1. Μπορουμε να δεχτουμε ως θεμελιωδη την εννοια των *φυσικων αριθμων* και να την χρησιμοποιησουμε για να ορισουμε κατα σειρα τους ακεραιους, τους ρητους και τελικα τους πραγματικους αριθμους.

2. Ή μπορουμε να δεχτουμε ως θεμελιωδη την εννοια των *πραγματικων αριθμων* και με βαση αυτη να ορισουμε τους φυσικους, ακεραιους και ρητους αριθμους.

Και στις δυο περιπτωσεις θεωρουμε επισης δεδομενες τις εννοιες της λογικης και της θεωριας συνολων.

Β΄.1.2. Στο παρον κεφαλαιο θα χρησιμοποιησουμε την δευτερη προσεγγιση[1]. Αρχιζουμε με εναν *αξιωματικο* ορισμο του συνολου των πραγματικων αριθμων. Δηλαδη *υποθετουμε* την υπαρξη ενος συνολου του οποιου τα στοιχεια ικανοποιουν ορισμενα *αξιωματα* (δηλ. εχουν ορισμενες ιδιοτητες) και χρησιμοποιωντας τα αξιωματα αυτα αποδεικνυουμε οτι τα στοιχεια αυτου του συνολου (οι πραγματικοι αριθμοι) εχουν διαφορες επιπλεον ιδιοτητες.

Η προσεγγιση μας *δεν* ειναι απολυτως αυστηρη διοτι αφηνει αναπαντητο ενα σημαντικο ερωτημα. Αυτο το ερωτημα θα διατυπωθει στο τελος του παροντος κεφαλαιου, αλλα αξιζει να προσπαθησεις να το μαντεψεις πριν φτασεις εκει.

Β΄.1.3. Ορισμος. Το συνολο των *πραγματικων αριθμων* ειναι ενα συνολο $\mathbb{R}$ το οποιο ειναι εφοδιασμενο: (α) με την πραξη $+$ της *προσθεσης*, (β) την πραξη $\cdot$ του *πολλαπλασιασμου*, και (γ) ενα *μη κενο* υποσυνολο $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, τετοια ωστε για καθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ να ικανοποιουνται οι παρακατω ιδιοτητες (*αξιωματα των πραγματικων*

[1] Η πρωτη προσεγγιση ειναι πιο θεμελιωδης αλλα και πιο απαιτητικη. Μπορεις να την μελετησεις στο βιβλιο [;].

αριθμων):

A1 : $x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x,$

A2 : $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$

A3 : $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$

A4 : υπαρχουν στοιχεια $0 \in \mathbb{R}$ και $1 \in \mathbb{R}$ τετοια ωστε: $x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x,$

A5 : $\forall x : \exists y : x + y = 0$ (το y αυτο συμβολιζουμε και με $-x$),

A6 : $\forall x \neq 0 : \exists y : xy = 1$ (το y αυτο συμβολιζουμε και με x^{-1}),

A7 : $\left(x \in \mathbb{R}^+ \text{ και } y \in \mathbb{R}^+\right) \Rightarrow \left(x + y \in \mathbb{R}^+ \text{ και } x \cdot y \in \mathbb{R}^+\right),$

A8 : ισχυει ένα και μονο ενα απο τα εξης ενδεχομενα: $x = 0$ ή $x \in \mathbb{R}^+$ ή $-x \in \mathbb{R}^+$,

A9 : $0 \notin \mathbb{R}^+,$

A10 : Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $A \neq \emptyset$ και ανω φραγμενο, τοτε υπαρχει το $\sup A$.

Β΄.1.4. Μαλλον οι ιδιοτητες **A1** – **A6** σου ειναι γνωστες και κατανοητες, οι **A7** – **A9** σου ειναι κατανοητες αλλα φαινονται περιεργα διατυπωμενες και η **A10** χρησιμοποιει εναν συμβολισμο (sup) ο οποιος σου ειναι αγνωστος. Στην συνεχεια θα εξετασουμε καθε ομαδα ιδιοτητων ξεχωριστα, ωστε να γινουν καλυτερα κατανοητες, αυτες και η σημασια τους (και στο καταλληλο σημειο θα ορισουμε το συμβολο sup).

Προσεξε το εξης: σε αρκετα σημεια παρακατω θα αποδειξουμε ιδιοτητες των πραγματικων αριθμων οι οποιες σου φαινονται αυτονοητες. *Ωστοσο, μεχρι να αποδειχθει καμμια τετοια ιδιοτητα δεν ειναι δεδομενη εκτος των* **A1** – **A10**. Οποτε θα ειναι καλη εξασκηση, καθε φορα που θελεις να χρησιμοποιησεις μια ιδιοτητα να εξετασεις αν εχει ηδη αποδειχθει ή αν μπορεις να την αποδειξεις.

Β΄.1.5. Ξαναγραφουμε τις ιδιοτητες **A1** – **A6** και εξεταζουμε τα συμπερασματα τα οποια μπορουν να εξαχθουν απο αυτες.

A1 : $x + y = y + x, \quad x \cdot y = y \cdot x,$

A2 : $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$

A3 : $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$

A4 : υπαρχουν στοιχεια $0 \in \mathbb{R}$ και $1 \in \mathbb{R}$ τετοια ωστε: $x + 0 = x, \quad x \cdot 1 = x,$

A5 : $\forall x : \exists y : x + y = 0$ (το y αυτο συμβολιζουμε και με $-x$),

A6 : $\forall x \neq 0 : \exists y : xy = 1$ (το y αυτο συμβολιζουμε και με x^{-1}).

Β΄.1.6. Θεωρημα. Για καθε $x, y, z \in \mathbb{R} : x + y = x + z \Rightarrow y = z$.

Αποδειξη. Πραγματι, υπαρχει στοιχειο x' τετοιο ωστε $x + x' = 0$. Οποτε

$$x + y = x + z \Rightarrow x' + x + y = x' + x + z \Rightarrow x + x' + y = x + x' + z \Rightarrow 0 + y = 0 + z \Rightarrow y = z.$$

Β΄.1.7. Θεωρημα. Υπαρχει *ακριβως* ενα στοιχειο $\widehat{z} \in \mathbb{R}$ τετοιο ωστε $\forall x \in \mathbb{R} : x + \widehat{z} = x$.

Αποδειξη. Πραγματι, εαν εχουμε $x + \widehat{z}' = x$ και $x + \widehat{z}'' = x$ απο το προηγουμενο θεωρημα συμπεραινουμε οτι $\widehat{z}' = \widehat{z}''$. Αρα το συμβολο 0 της **A4** υποδηλωνει ενα και μοναδικο στοιχειο.

Β΄.1.8. Παραδειγμα. Ισχυει οτι $-0 = 0$, διοτι $0 + 0 = 0$.

Β΄.1.9. Θεωρημα. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ υπαρχει *ακριβως* ενα στοιχειο $\widehat{x}$ τετοιο ωστε $x + \widehat{x} = 0$.

Αποδειξη. Πραγματι, αν $x + \widehat{x}' = 0 = x + \widehat{x}''$ τοτε $\widehat{x}' = \widehat{x}''$. Αρα καλως χρησιμοποιουμε το συμβολο $-x$ στην **A5** διοτι αυτο υποδηλωνει ενα και μοναδικο στοιχειο. Επισης στα επομενα θα χρησιμοποιουμε τον συμβολισμο $x - y$ για τον αριθμο $x + (-y)$.

Β΄.1.10. Θεωρημα. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυει οτι $-(-x) = x$.

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β′.1.11. Θεωρημα. Υπαρχει *ακριβως* ενα στοιχειο $\widehat{z} \in \mathbb{R}$ τετοιο ωστε $\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot \widehat{z} = x$.

Αποδειξη. Η αποδειξη αφηνεται στον αναγνωστη. Συνεπεια του θεωρηματος ειναι οτι το συμβολο 1 της **Α4** υποδηλωνει ενα και μοναδικο στοιχειο.

Β′.1.12. Θεωρημα. Για καθε $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ υπαρχει *ακριβως* ενα στοιχειο $\widehat{x}$ τετοιο ωστε $x \cdot \widehat{x} = 1$.

Αποδειξη. Η αποδειξη αφηνεται στον αναγνωστη. Συνεπεια του θεωρηματος ειναι οτι καλως χρησιμοποιουμε στην **Α6** το συμβολο x^{-1}.

Β′.1.13. Θεωρημα. Για καθε $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $y \in \mathbb{R}$ υπαρχει ακριβως ενα $z \in \mathbb{R}$ τετοιο ωστε $xz = y$ (αυτο το z ειναι ισο με το $y \cdot x^{-1}$ και θα το γραφουμε και ως $z = \frac{y}{x}$).

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β′.1.14. Ασκηση. Δειξε οτι $1^{-1} = 1$.

Β′.1.15. Συνηθως απο εδω και περα θα χρησιμοποιουμε τον συμβολισμο xy αντι του $x \cdot y$.

Β′.1.16. Θεωρημα. Για καθε $x, y \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, ισχυει

$$(xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1}.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β′.1.17. Θεωρημα. Για καθε $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ ισχυει

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β′.1.18. Θεωρημα. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυει $0x = 0$.

Αποδειξη. Πραγματι

$$0x = (0+0)\, x = 0x + 0x \Rightarrow 0 = 0x.$$

Β′.1.19. Θεωρημα. Για καθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχυει $x\,(y - z) = xy - xz$.

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β′.1.20. Θεωρημα. Για καθε $y \in \mathbb{R}$ ισχυει $(-x)\, y = -\,(xy)$.

Αποδειξη. Πραγματι

$$xy + (-x)\, y = (x - x)\, y = 0y = 0 \Rightarrow (-x)\, y = -\,(xy)\,.$$

Β′.1.21. Ασκηση. Δειξε οτι $(-x)\,(-y) = xy$.

Β′.1.22. Θεωρημα. Για καθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχυει

$$(x\,(y - z) = 0 \text{ και } x \neq 0) \Rightarrow y = z.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β′.1.23. Θεωρημα. Για καθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχυει

$$xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ ή } y = 0)\,.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.24. Τωρα ξαναγραφουμε τις ιδιοτητες **Α7** – **Α9** και εξεταζουμε μερικες απο τις συνεπειες αυτων.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A7} : \left(x \in \mathbb{R}^+ \text{ και } y \in \mathbb{R}^+\right) \Rightarrow \left(x + y \in \mathbb{R}^+ \text{ και } xy \in \mathbb{R}^+\right), \\
&\mathbf{A8} : \text{ισχυει ένα και μονο ενα απο τα εξης ενδεχομενα: } x = 0 \text{ ή } x \in \mathbb{R}^+ \text{ ή } -x \in \mathbb{R}^+ , \\
&\mathbf{A9} : 0 \notin \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

Β΄.1.25. Συμβολισμος. Λεμε οτι ο x ειναι *θετικος* ανν $x \in \mathbb{R}^+$. Οριζουμε το συνολο $\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \backslash \left(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}\right)$ και λεμε οτι ο x ειναι *αρνητικος* ανν $x \in \mathbb{R}^-$.

Β΄.1.26. Ορισμος. Οριζουμε την *σχεση* $<$ μεταξυ των στοιχειων του $\mathbb{R}$ ως εξης:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+.$$

Επισης οριζουμε την σχεση $\leq$ μεταξυ των στοιχειων του $\mathbb{R}$ ως εξης:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Leftrightarrow (x < y \text{ ή } x = y).$$

Ο συμβολισμος $x > y$ ειναι ισοδυναμος του $x < y$ και ο $x \geq y$ ειναι ισοδυναμος του $y \leq x$.

Β΄.1.27. Θεωρημα. Για καθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχυει ακριβως ενα απο τα εξης: $x < y$ ή $y < x$ ή $x = y$.

Αποδειξη. Υπαρχουν τρια αμοιβαια αποκλειομενα ενδεχομενα.

1. $x - y = 0$. Τοτε δεν μπορει να ισχυει ουτε $x < y$ ουτε $y < x$. Αλλα ισχυει

$$x - y = 0 \Rightarrow x - y + y = y \Rightarrow x + 0 = y \Rightarrow x = y.$$

2. $x - y \in \mathbb{R}^+$. Τοτε $y < x$.

3. $-(x - y) = y - x \in \mathbb{R}^+$. Τοτε $x < y$.

Β΄.1.28. Θεωρημα. Η σχεση $\leq$ ειναι μια *ολικη διαταξη*. Δηλαδη για καθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ικανοποιουνται τα παρακατω.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B1} : x \leq x. \\
&\mathbf{B2} : (x \leq y \text{ και } y \leq x) \Rightarrow x = y, \\
&\mathbf{B3} : (x \leq y \text{ και } y \leq z) \Rightarrow x \leq z, \\
&\mathbf{B4} : \text{είτε } x \leq y \text{ είτε } x = y \text{ είτε } y \leq x.
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Προφανως ισχυει η **Β1**

$$x \leq x,$$

αφου $x \leq x \Leftrightarrow (x < x \text{ ή } x = x)$. Αφηνεται στον αναγνωστη να αποδειξει την **Β2**. Επισης ισχυει η **Β3** διοτι

$$\left.\begin{array}{l} x \leq y \Rightarrow 0 \leq y - x \\ y \leq z \Rightarrow 0 \leq z - y \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \leq (z - y) + (y - x) = z - x \Rightarrow x \leq z.$$

Τελος αφηνεται στον αναγνωστη να αποδειξει την **Β4**.

Β΄.1.29. Θεωρημα. Τα συνολα $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ ικανοποιουν

$$\mathbb{R}^+ = \{x : 0 < x\}, \quad \mathbb{R}^- = \{x : x < 0\}.$$

Αποδειξη. Πραγματι,

$$0 < x \Leftrightarrow x - 0 \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow x = x + 0 = x + (-0) = x - 0 \in \mathbb{R}^+.$$

Η αποδειξη του δευτερου μερους αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.30. Θεωρημα. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυει $x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq y - x$.

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.31. Θεωρημα. Για καθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχυουν

$$x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z, \quad x \leq y \Leftrightarrow x - z \leq y - z,$$
$$x < y \Rightarrow x + z < y + z, \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.32. Θεωρημα. Για καθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχυει

$$(x < y \text{ και } z > 0) \Rightarrow xz < yz.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.33. Ασκηση. Δειξε οτι $xy < 0 \Rightarrow$ (είτε $x > 0$ και $y > 0$, είτε $x < 0$ και $y < 0$).

Β΄.1.34. Θεωρημα. Για καθε $x, y, z \in \mathbb{R}$ ισχυουν

$$x < y \Rightarrow x + z < y + z$$
$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.35. Θεωρημα. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ ισχυει

$$x \neq 0 \Rightarrow xx > 0.$$

Αποδειξη. Πραγματι, αν $x > 0$, τοτε $xx > 0$. Και αν $x < 0$ τοτε $-x > 0$, οποτε $(-x)(-x) > 0$ και

$$xx = -(-xx) = -(x(-x)) = (-x)(-x) > 0.$$

Β΄.1.36. Θεωρημα. $1 > 0$.

Αποδειξη. Πραγματι, απο το προηγουμενο θεωρημα εχουμε

$$1 = 1 \cdot 1 > 0.$$

Β΄.1.37. Ορισμος. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ οριζουμε την *απολυτη τιμη* του x ως εξης

$$|x| = \begin{cases} x & \text{οταν } x \geq 0 \\ -x & \text{οταν } x < 0 \end{cases}.$$

Β΄.1.38. Θεωρημα. Για καθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ισχυουν τα εξης:

$$|x| \geq 0, \qquad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$
$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a,$$
$$|xy| = |x| \cdot |y|, \qquad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.39. Συμβολισμος. Οριζουμε τα *διαστηματα πραγματικων αριθμων* ως εξης.

1. $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ (*κλειστο* διαστημα),
2. $(a, b) = \{x : a < x < b\}$ (*ανοικτο* διαστημα),
3. $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$,
4. $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$.

Β΄.1.40. Θεωρημα. Εστω ανοιχτο διαστημα (a, b). Τοτε

$$\forall x \in (a,b) : \exists \varepsilon > 0 : (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a,b)\,.$$

Αποδειξη. Εστω $\delta_1 = x - a$, $\delta_2 = b - x$ και δ το μικροτερο εκ των δ_1 και δ_2. Θετω $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$. Τοτε

$$y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} a = x - \delta_1 < x - \varepsilon < y \\ y < x + \varepsilon < x + \delta_2 = b \end{array} \right) \Rightarrow y \in (a,b)\,.$$

Οποτε $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b)$. Επισης ισχυει τουλαχιστον ενα εκ των

$$a < x - \frac{2}{3}\delta_1 < x - \varepsilon, \quad x + \varepsilon < x + \frac{2}{3}\delta_2 < b$$

οποτε $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (a,b)\,.$

Β΄.1.41. Τωρα θα ορισουμε τους *φυσικους* αριθμους ως ενα υποσυνολο των πραγματικων.

Β΄.1.42. Ορισμος. Ενα συνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λεγεται *επαγωγικο* εαν ικανοποιει τα εξης:

1. $1 \in A$,
2. $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$.

Β΄.1.43. Συμβολισμος. Συμβολιζουμε με $\mathcal{I}$ την οικογενεια ολων των επαγωγικων συνολων.

Β΄.1.44. Θεωρημα. Το $\mathbb{R}^+$ ειναι ενα επαγωγικο συνολο.

Αποδειξη. Εχουμε ηδη δειξει οτι $1 > 0$, δηλ. οτι $1 \in \mathbb{R}^+$. Επισης

$$(x > 0 \text{ και } 1 > 0) \Rightarrow x + 1 > 0.$$

Β΄.1.45. Θεωρημα. Το $\{x : x \geq 1\}$ ειναι ενα επαγωγικο συνολο.

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.46. Ασκηση. Βρες ενα ακομη επαγωγικο συνολο. Κατοπιν βρες ενα μη επαγωγικο συνολο.

Β΄.1.47. Ορισμος. Το συνολο των *φυσικων αριθμων* συμβολιζεται με $\mathbb{N}$ και οριζεται να ειναι η τομη ολων των επαγωγικων συνολων. Δηλαδη

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{I}} A.$$

Β΄.1.48. Αμεση συνεπεια του παραπανω ορισμου ειναι οτι το $\mathbb{N}$ ειναι υποσυνολο καθε επαγωγικου συνολου (αλλιως: ειναι το «μικροτερο» εξ ολων των επαγωγικων συνολων).

Β΄.1.49. Θεωρημα. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > 0$.

Αποδειξη. Αφου $\mathbb{R}^+ \in \mathcal{I}$ και $\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{I}} A$ τοτε $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \mathbb{R}^+$.

Β΄.1.50. Θεωρημα. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 1$.

Αποδειξη. Αφου $\{x : x \geq 1\} \in \mathcal{I}$ και $\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{I}} A$, τοτε $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in \{x : x \geq 1\} \Rightarrow n \geq 1$.

Β΄.1.51. Θεωρημα. $m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow (m + n \in \mathbb{N} \text{ και } mn \in \mathbb{N}\ )\,.$

Αποδειξη. Για καθε $m \in \mathbb{N}$, το συνολο $\{n : m + n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{I}$ και το συνολο $\{n : mn \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{I}$. Το υπολοιπο της αποδειξης αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.52. Θεωρημα. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (\nexists m \in \mathbb{N} : n < m < n + 1)\,.$

Αποδειξη. Το συνολο $\{n : \nexists y \in \mathbb{N} : n < y < n+1\} \in \mathcal{I}$. Το υπολοιπο της αποδειξης αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.53. Θεωρημα. $(m, n \in \mathbb{N}$ *και* $m < n) \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}$.

Αποδειξη. Η αποδειξη αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.54. Συμβολισμος. Τωρα εισαγουμε τον γνωστο συμβολισμο των φυσικων αριθμων. Δηλαδη οριζουμε τα συμβολα 2, 3, 4, ... ως εξης:

$$2 = 1+1, \quad 3 = 2+1, \quad 4 = 3+1, \quad \ldots .$$

Β΄.1.55. Θεωρημα (Μαθηματικη Επαγωγη). *Αν το* $A \in \mathcal{I}$ *και* $A \subseteq \mathbb{N}$ *τοτε* $A = \mathbb{N}$.

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.56. Πρακτικα η μεθοδος της μαθηματικης επαγωγης εφαρμοζεται ως εξης. Εστω οτι εχουμε μια προταση $\mathbf{P}(n)$ η οποια περιεχει μια μεταβλητη $n \in \mathbb{N}$ και θελουμε να αποδειξουμε οτι η $\mathbf{P}(n)$ ισχυει *για καθε* $n \in \mathbb{N}$, δηλ. οτι

$$\{n : \text{ η } \mathbf{P}(n) \text{ ειναι αληθης}\} = \mathbb{N}.$$

Αυτο μπορουμε να το επιτυχουμε (ως αμεση συνεπεια του παραπανω θεωρηματος) δειχνοντας οτι: (α) ισχυει η $\mathbf{P}(1)$ και (β) $\mathbf{P}(n) \Rightarrow \mathbf{P}(n+1)$.

Β΄.1.57. Παραδειγμα. Για να δειξουμε οτι

$$\forall n : 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

δουλευουμε ως εξης. Θετουμε

$$\mathbf{P}(n) = «1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}».$$

Τοτε

$$\mathbf{P}(1) = «1 = \frac{1(1+1)}{2}»$$

το οποιο προφανως ισχυει. Επισης

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow 1 + 2 + \ldots + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

δηλαδη $\mathbf{P}(n) \Rightarrow \mathbf{P}(n+1)$. Οποτε αποδειξαμε το ζητουμενο.

Β΄.1.58. Ασκηση. Δειξε οτι $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (ο συμβολισμος n^k εχει την γνωστη σημασια).

Β΄.1.59. Ασκηση. Δειξε οτι $2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ (ο συμβολισμος 2^k εχει την γνωστη σημασια).

Β΄.1.60. Θεωρημα (Καλης Διαταξεως). *Καθε μη κενο* $A \subseteq \mathbb{N}$ *περιεχει* $\underline{n} \in A$ *τετοιο ωστε*

$$n \in A \Rightarrow \underline{n} \leq n$$

(δηλ. το $\underline{n}$ ειναι το *ελαχιστο* στοιχειο του A).

Αποδειξη. Εστω οτι το A δεν εχει ελαχιστο στοιχειο· τοτε

$$\forall m \in A : 1 < m$$

και $1 \notin A$ (γιατι;). Οριζουμε

$$B = \{n \in \mathbb{N} : m \in A \Rightarrow n < m\},$$

δηλ. το B ειναι το συνολο των θετικων ακεραιων οι οποιοι ειναι μικροτεροι απο καθε στοιχειο του A. Προφανως $1 \in B$. Εστω n τυχον στοιχειο του B, τοτε $m \in A \Rightarrow n < m \Rightarrow n + 1 \leq m$. Αλλα δεν μπορει να ειναι $n + 1 = m$, διοτι τοτε το $n + 1$ θα ηταν το ελαχιστο στοιχειο του A. Οποτε $n + 1 < m$ και αρα $n \in B \Rightarrow n + 1 \in B$. Οποτε $B \in \mathcal{I}$ και (αφου εξ ορισμου $B \subseteq \mathbb{N}$), συμφωνα με το προηγουμενο θεωρημα $A = \mathbb{N}$. Δηλ. καθε $m \in A \subseteq \mathbb{N}$ ειναι μεγαλυτερο *καθε* θετικου ακεραιου. Αρα $A = \emptyset$.

Β΄.1.61. Ορισμος. Το συνολο των *ακεραιων* οριζεται ως εξης

$$\mathbb{Z} = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ ή } -x \in \mathbb{N} \text{ ή } x = 0\}.$$

Αν $x \in \mathbb{N}$ λεμε οτι ο x ειναι ενας *θετικος ακεραιος* (ισοδυναμα: ο x ειναι φυσικος αριθμος). Αν $-x \in \mathbb{N}$ λεμε οτι ο x ειναι ενας *αρνητικος ακεραιος*.

Β΄.1.62. Συμβολισμος. Τωρα επεκτεινουμε τον συμβολισμο των ακεραιων αριθμων και στους αρνητικους ακεραιους. Δηλαδη οριζουμε τα συμβολα $-1, -2, -3, -4, \ldots$ ως εξης:

$$-1 = -(1), \quad -2 = -(2), \quad \ldots .$$

Β΄.1.63. Ορισμος. Το συνολο των *ρητων* οριζεται ως εξης

$$\mathbb{Q} = \left\{x : x = \frac{m}{n} \text{ οπου } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\right\}.$$

Β΄.1.64. Ορισμος. Για καθε $x \in \mathbb{Q}$ οριζουμε τις δυναμεις του x ως εξης.

1. Καταρχην οριζουμε $x^0 = 1$.
2. Επισης για καθε $n \in \mathbb{N}$ οριζουμε $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ φορες}}$.
3. Τελος, για καθε $n \in \mathbb{Z}\backslash(\{0\} \cup \mathbb{N})$ οριζουμε (οταν $x \neq 0$) $x^{-n} = \underbrace{x^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \ldots \cdot x^{-1}}_{n \text{ φορες}}$.

Β΄.1.65. Ασκηση. Επαληθευσε οτι η δομη $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \mathbb{Q}^+)$ ικανοποιει τις ιδιοτητες **Α1** – **Α9** (εαν αντικαταστησουμε το $\mathbb{R}$ με το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R}^+$ με το $\mathbb{Q}^+$).

Β΄.1.66. Φαινεται λοιπον οτι αυτο το οποιο διαφοροποιει το $\mathbb{R}$ απο το $\mathbb{Q}$ (τους πραγματικους απο τους ρητους) ειναι οτι οι πρωτοι ικανοποιουν, επιπλεον των **Α1** – **Α9** και την ιδιοτητα **Α10**

$$\mathbf{A10}: \text{ Αν } A \subseteq \mathbb{R} \text{ και } A \neq \emptyset \text{ και ανω φραγμενο, τοτε υπαρχει το } \sup A.$$

Τωρα θα εξετασουμε τις συνεπειες αυτης της ιδιοτητας, αλλα πρωτα χρειαζομαστε καποιες βοηθητικες εννοιες.

Β΄.1.67. Ορισμος. Λεμε οτι το συνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ ειναι *ανω φραγμενο* εαν υπαρχει $\overline{a} \in \mathbb{R}$ τετοιο ωστε

$$\forall a \in A : a \leq \overline{a}.$$

Λεμε οτι το A ειναι *κατω φραγμενο* εαν υπαρχει $\underline{a} \in \mathbb{R}$ τετοιο ωστε

$$\forall a \in A : \underline{a} \leq a.$$

Β΄.1.68. Παραδειγμα. Το συνολο $\{x : 0 \leq x \leq 1\}$ ειναι ανω και κατω φραγμενο. Το ιδιο ισχυει και για το $\{x : 0 \leq x < 1\}$.

Β΄.1.69. Ορισμος. Εστω συνολο $A \subseteq \mathbb{R}$. Λεμε οτι το *μεγιστο* του A ειναι το $\overline{a}$ και γραφουμε $\max A = \overline{a}$, ανν

$$\forall x \in A : x \leq \overline{a} \text{ και } \overline{a} \in A.$$

Ομοιως λεμε οτι το *ελαχιστο* του A ειναι το $\underline{a}$ και γραφουμε $\min A = \underline{a}$, ανν

$$\forall x \in A : \underline{a} \leq x \text{ και } \underline{a} \in A.$$

Δηλαδη το *μεγιστο* $\max A$ (αντιστοιχα, το ελαχιστο $\min A$) του A ειναι *ενα στοιχειο του* A το οποιο ειναι μεγαλυτερο ή ισο (αντιστοιχα, μικροτερο ή ισο) απο καθε στοιχειο του A.

Β΄.1.70. Παραδειγμα. Εχουμε

$$\min\{x : 0 \leq x \leq 1\} = 0, \quad \max\{x : 0 \leq x \leq 1\} = 1.$$

Επισης εχουμε

$$\min\{x : 0 \leq x < 1\}$$

αλλα το $\{x : 0 \leq x < 1\}$ *δεν εχει μεγιστο* (γιατι;).

Β΄.1.71. Ορισμος. Εστω συνολο $A \subseteq \mathbb{R}$. Λεμε οτι το *ελαχιστο ανω φραγμα* του A ειναι το $\overline{a}$ και γραφουμε $\sup A = \overline{a}$, ανν

$$\forall x \in A : x \leq \overline{a} \text{ και } \ (\forall x \in A : x \leq b\ ) \Rightarrow \overline{a} \leq b.$$

Ομοιως λεμε οτι το *μεγιστο κατω φραγμα* του A ειναι το $\underline{a}$ και γραφουμε $\inf A = \underline{a}$, ανν

$$\forall x \in A : \underline{a} \leq x \text{ και } \ (\forall x \in A : b \leq x\ ) \Rightarrow b \leq \underline{a}.$$

Β΄.1.72. Παραδειγμα. Εχουμε

$$\inf\{x : 0 \leq x \leq 1\} = 0, \quad \sup\{x : 0 \leq x \leq 1\} = 1$$

και

$$\inf\{x : 0 \leq x < 1\} = 0, \quad \sup\{x : 0 \leq x < 1\} = 1.$$

Ολα τα παραπανω ειναι προφανη εκτος ισως απο το $\sup\{x : 0 \leq x < 1\} = 1$. Για να δειξουμε αυτο, ας υποθεσουμε οτι υπαρχει b τετοιο ωστε

$$(\forall x \in A : x \leq b\ ) \text{ και } \Rightarrow b < 1.$$

Θετω $\varepsilon = 1 - b > 0$. Τοτε

$$z = b + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$$

οποτε $z \in \{x : 0 \leq x \leq 1\}$. Αλλα προφανως $z > b$, όπερ ατοπο.

Β΄.1.73. Με αλλα λογια, η ιδιοτητα **Α10** λεει οτι:

καθε ανω φραγμενο και μη κενο συνολο πραγματικων αριθμων εχει ελαχιστο ανω φραγμα

και μια αμεση συνεπεια της ειναι οτι

καθε κατω φραγμενο και μη κενο συνολο πραγματικων αριθμων εχει μεγιστο κατω φραγμα.

Β΄.1.74. Θεωρημα. Για καθε $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$ ισχυουν τα εξης.

1. Αν υπαρχει το $\sup A$ τοτε υπαρχει $x \in A$ τετοιο ωστε $\sup A < x + \varepsilon$.
2. Αν υπαρχει το $\inf A$ τοτε υπαρχει $x \in A$ τετοιο ωστε $x - \varepsilon < \inf A$.

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.75. Θεωρημα. Δινονται συνολα A, B τετοια ωστε

$$(x \in A, y \in B) \Rightarrow x \leq y.$$

Δειξε οτι: $\sup A \leq \inf B$.

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.76. Θεωρημα. Δινονται συνολα A, B και οριζουμε

$$C = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

Δειξε οτι (οταν υπαρχουν τα sup και inf):

$$\sup C = \sup A + \sup B, \quad \inf C = \inf A + \inf B.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β΄.1.77. Δυο αμεσες συνεπειες της **Α10** ειναι τα παρακατω θεωρηματα.

Β΄.1.78. Θεωρημα. Το συνολο $\mathbb{N}$ δεν ειναι ανω φραγμενο.

Αποδειξη. Εστω οτι το $\mathbb{N}$ ειναι ανω φραγμενο. Αφου ειναι και μη κενο, τοτε υπαρχει το $\overline{n} = \sup \mathbb{N}$. Οποτε το $\overline{n} - 1$ δεν ειναι ανω φραγμα του $\mathbb{N}$, δηλ. υπαρχει $n \in \mathbb{N}$ τετοιο ωστε $n > \overline{n} - 1$ και τοτε $n + 1 > \overline{n}$. Αυτο ειναι ατοπο, αφου $n + 1 \in \mathbb{N}$ και υποθεσαμε οτι $\overline{n} = \sup \mathbb{N}$.

Β΄.1.79. Θεωρημα. Για καθε $x \in \mathbb{R}$ υπαρχει $n \in \mathbb{N}$ τετοιο ωστε $x < n$. Για καθε $x, y \in \mathbb{R}$ υπαρχει $n \in \mathbb{N}$ τετοιο ωστε $y < nx$.

Αποδειξη. Για το πρωτο μερος, αν δεν υπηρχε $n \in \mathbb{N}$ τετοιο ωστε $x < n$, το x θα ηταν ενα ανω φραγμα του $\mathbb{N}$, οπερ ατοπο. Το δευτερο μερος αποδεικνυεται παρομοια.

Β΄.1.80. Ισως γνωριζεις το θεωρημα συμφωνα με το οποιο η τετραγωνικη ριζα του **2** δεν ειναι ρητος αριθμος, δηλ. δεν υπαρχουν $m, n \in \mathbb{Z}$ τετοια ωστε $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Αυτο το θεωρημα δειχνει την αναγκη εισαγωγης των πραγματικων αριθμων: εν συντομια, το $\mathbb{R}$ ειναι η *επεκταση* του $\mathbb{Q}$ ετσι ωστε καθε μη αρνητικος πραγματικος αριθμος να εχει τετραγωνικη ριζα. Αυτο αποδεικνυεται στο επομενο θεωρημα οπου φαινεται ο θεμελιωδης ρολος της ιδιοτητας **Α10**.

Β΄.1.81. Θεωρημα. Για καθε $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ υπαρχει $y \in \mathbb{R}$ τετοιο ωστε $y^2 = x$.

Αποδειξη. Αν $x = 0$, προφανως $y = 0$. Εστω λοιπον οτι $x > 0$ και

$$A = \left\{z : z \in \mathbb{R}^+ \text{ και } z^2 \leq x\right\}.$$

Αφου $\frac{x}{1+x} < x$ το A δεν ειναι κενο· αφου $(1+x)^2 > x$, το $1 + x$ ειναι ανω φραγμα του A. Αρα *συμφωνα με την* **Α10** υπαρχει το $y = \sup A$ και $y > \frac{x}{1+x} > 0$. Τωρα υπαρχουν τρεις δυνατοτητες.

1. $y^2 > x$. Τοτε θετουμε $u = y - \frac{y^2 - x}{2y} = \frac{1}{2}\left(y + \frac{x}{y}\right) \in (0, y)$ και για καθε $z \in A$ εχουμε

   $$u^2 = x + \left(\frac{y^2 - x}{2y}\right)^2 > x \geq z^2.$$

   Οποτε για καθε $z \in A$ ισχυει $u > z$, δηλ. το u ειναι ανω φραγμα του A. Αλλα $u < y = \sup A$, όπερ άτοπο.

2. $y^2 < x$. Παρομοια με την προηγουμενη περιπτωση, και εδω προκυπτει ατοπο (ελεγξε το!).

3. $y^2 = x$ ειναι λοιπον η μονη δυνατοτητα που δεν οδηγει σε ατοπο και ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

Β΄.1.82. Βλεπουμε λοιπον οτι η ιδιοτητα (αξιωμα) **Α10** ειναι αυτη η οποια μας επετρεψε να αποδειξουμε οτι καθε $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ εχει τετραγωνικη ριζα. Αυτη η αποδειξη μπορει να επεκταθει ετσι ωστε να δειξουμε οτι καθε $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ εχει n-στη ριζα. Αυτο ειναι το βασικο «πλεονεκτημα» του συνολου $\mathbb{R}$ σε σχεση με το $\mathbb{Q}$: το πρωτο ειναι *πληρες* ενω το δευτερο δεν ειναι. Ομως το $\mathbb{Q}$ ειναι *πυκνο* εντος του $\mathbb{R}$, δηλαδη ισχυει το παρκατω θεωρημα.

Β΄.1.83. Θεωρημα. Για καθε $x, y \in \mathbb{R}$ (με $x \neq y$) υπαρχει $z \in \mathbb{Q}$ τετοιο ωστε $x < z < y$.

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Β′.2 Αλυτα Προβληματα

Β′.2.1. Δειξε οτι: αν $x \neq 0, y \neq 0$ τοτε $\frac{xz}{xy} = \frac{z}{y}$.

Β′.2.2. Δειξε οτι: αν $x \neq 0, y \neq 0$ τοτε $\frac{u}{x} + \frac{v}{y} = \frac{uy+xv}{xy}$.

Β′.2.3. Δειξε οτι: αν $x \neq 0$ τοτε $-\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{x}{-y}$.

Β′.2.4. Δειξε οτι δεν υπαρχει $x \in \mathbb{R}$ τετοιο ωστε $x^2 + 1 = 0$.

Β′.2.5. Δειξε οτι: αν $0 < x < y$ τοτε $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Β′.2.6. Δειξε οτι: αν $x \geq 0$ και για καθε $\varepsilon > 0$ ισχυει $x < \varepsilon$, τοτε $x = 0$.

Β′.2.7. Δειξε οτι $2 + 2 = 4$.

Β′.2.8. Δειξε οτι $2 \cdot 2 = 4$.

Β′.2.9. Δειξε οτι: για καθε $n \in \mathbb{N}$, $n < 2^n$.

Β′.2.10. Εστω $q \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Δειξε οτι $q + x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ και $qx \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Β′.2.11. Εστω $q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Βρες αναγκαιες και ικανες συνθηκες ωστε $\frac{q_1+q_2x}{q_3+q_4x} \in \mathbb{Q}$.

Γ′ Το Διωνυμικο Θεωρημα

Στο παρον κεφαλαιο θα εξετασουμε ποιοι ειναι οι συντελεστες των διαφορων ορων που προκυπτουν οταν αναπτυξουμε το *διωνυμο* $(p+q)^N$. Η απαντηση δινεται απο το *Διωνυμικο Θεωρημα*, το οποιο εχει σημαντικες εφαρμογες και σε πολλα αλλα μαθηματικα προβληματα.

Γ′.1 Θεωρια και Παραδειγματα

Γ′.1.1. Αν αναπτυξουμε τις εκφρασεις $(p+q)^0$, $(p+q)^1$, $(p+q)^2$, ... παιρνουμε το εξης πινακα

$$
\begin{aligned}
&(p+q)^0 = 1 = p^0q^0 \\
&(p+q)^1 = p+q = p^1q^0 + p^0q^1 \\
&(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = p^2q^0 + 2p^1q^1 + p^0q^2 \\
&(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = p^3q^0 + 3p^2q^1 + 3p^1q^2 + p^0q^3 \\
&\qquad ...
\end{aligned}
$$

Παρατηρουμε τα εξης.

1. Καθε αναπτυγμα αποτελειται απο ενα αθροισμα ορων της μορφης p^nq^m, πολλαπλασιασμενων με καταλληλους συντελεστες.
2. Σε καθε τετοιο ορο ισχυει $m+n=N$ (οταν εξεταζουμε το $(p+q)^N$).
3. Οι συντελεστες φαινεται να υποκεινται σε καποια δομη, αλλα αυτη δεν ειναι φανερη.

Γ′.1.2. Εστιαζουμε τωρα στους συντελεστες. Μπορουμε να γραφουμε σε γενικη μορφη οτι

$$(p+q)^N = C_{N,0}p^Nq^0 + C_{N,1}p^{N-1}q^1 + ... + C_{N,N-1}p^1q^{N-1} + C_{N,N}p^0q^N = \sum_{m=0}^{N} C_{N,m}p^{N-m}q^m. \tag{Γ′.1}$$

Δηλαδη ο συντελεστης $C_{N,m}$ ειναι αυτος που πολλαπλασιαζει τον ορο $p^{N-m}q^m$. Στον παρακατω πινακα (ο οποιος ονομαζεται *Τριγωνο του Pascal*) δινουμε μερικες τιμες των $C_{N,m}$

	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
$N=0$	1						
$N=1$	1	1					
$N=2$	1	2	1				
$N=3$	1	3	3	1			
$N=4$	1	4	6	4	1		
$N=5$	1	5	10	10	5	1	
$N=6$	1	6	15	20	15	6	1

Η δομη των συντελεστων γινεται τωρα φανερη. Εχουμε παντα 1 στην πρωτη στηλη και στην διαγωνιο. Και, αν προσεξουμε, παρατηρουμε οτι ο αριθμος καθε κελιου ειναι το αθροισμα των αριθμων του κελιου ακριβως επανω και αυτο του κελιου επανω και αριστερα (π.χ., $2=1+1$, $10=6+4$ κ.τ.λ.). Αυτο μπορει να διατυπωθει ως εξης:

$$\forall N\in\{0,1,2,...\}: C_{N,0}=1,\quad C_{N,N}=1 \tag{Γ'.2}$$

$$\forall N\in\{1,2,...\},\forall m\in\{1,...,N-1\}: C_{N,m}=C_{N-1,m-1}+C_{N-1,m}. \tag{Γ'.3}$$

Ο στοχος μας παρακατω ειναι να αποδειξουμε οτι ισχυουν οι (Γ'.1)-(Γ'.3) και επισης να βρουμε εναν τυπο ο οποιος να δινει την τιμη καθε $C_{N,m}$.

Γ'.1.3. Θεωρημα. Για καθε $p,q\in\mathbb{R}$ εχουμε

$$\forall N\in\{0,1,...\}: (p+q)^N=\sum_{m=0}^{N}C_{N,m}p^{N-m}q^m, \text{ οπου} \tag{Γ'.4}$$

$$\forall N\in\{0,1,...\}: C_{N,0}=C_{N,N}=1,\quad \forall N\in\{1,2,...\},\forall m\in\{1,...,N-1\}: C_{N,m}=C_{N-1,m-1}+C_{N-1,m}. \tag{Γ'.5}$$

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε τα ζητουμενα επαγωγικα. Καταρχην, με $N=0$ εχουμε

$$(p+q)^0=p^0q^0=\sum_{m=0}^{0}C_{0,m}p^{0-m}q^m \text{ με } C_{0,0}=1.$$

Ας υποθεσουμε τωρα οτι για καποιο $k\in\{0,1,2,...\}$ εχουμε

$$(p+q)^k=\sum_{m=0}^{k}C_{k,m}p^{k-m}q^m,\qquad \text{οπου} \tag{Γ'.6}$$

$$C_{k,0}=1,\quad C_{k,k}=1,\quad \forall m\in\{1,...,k-1\}: C_{k,m}=C_{k-1,m-1}+C_{k-1,m}. \tag{Γ'.7}$$

Τοτε

$$\begin{aligned}(p+k)^{k+1}&=(p+k)^k(p+q)=\left(\sum_{m=0}^{k}C_{k,m}p^{k-m}q^m\right)(p+q)\\&=\sum_{m=0}^{k}C_{k,m}p^{k-m}q^m(p+q)=\sum_{m=0}^{k}C_{k,m}p^{k+1-m}q^m+\sum_{m=0}^{k}C_{k,m}p^{k-m}q^{m+1}.\end{aligned}$$

Ομαδοποιωντας στο παραπανω ορους με ιδιες δυναμεις $p^i q^j$ παιρνουμε

$$\begin{aligned}
(p+q)^{k+1} &= p^{k+1}q^0 + \sum_{m=1}^{k} C_{k,m} p^{k+1-m} q^m + \sum_{m=0}^{k-1} C_{k,m} p^{k-m} q^{m+1} + p^0 q^{k+1} \\
&= p^{k+1}q^0 + \sum_{m=1}^{k} C_{k,m} p^{k+1-m} q^m + \sum_{m=1}^{k} C_{k,m-1} p^{k-(m-1)} q^{(m-1)+1} + p^0 q^{k+1} \\
&= p^{k+1}q^0 + \sum_{m=1}^{k} \left(C_{k,m} p^{k+1-m} q^m + C_{k,m-1} p^{k+1-m} q^m \right) + p^0 q^{k+1} \\
&= p^{k+1}q^0 + \sum_{m=1}^{k} \left(C_{k,m} + C_{k,m-1} \right) p^{k+1-m} q^m + p^0 q^{k+1} \\
&= \sum_{m=0}^{k+1} \left(C_{k,m} + C_{k,m-1} \right) p^{k+1-m} q^m = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1,m} p^{k+1-m} q^m
\end{aligned}$$

οπου η τελευταια γραμμη προεκυψε θετοντας:

$$C_{k+1,0} = 1, \quad C_{k+1,k+1} = 1 \text{ και } \forall m \in \{1, ..., k\} : C_{k+1,m} = C_{k,m-1} + C_{k,m}. \tag{Γ'.8}$$

Ετσι εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

Γ'.1.4. Θεωρημα. Οι συντελεστες $C_{N,m}$ ικανοποιουν τον εξης τυπο:

$$N \in \{0, 1, 2, ...\}, \forall m \in \{0, 1, ..., N\} : C_{N,m} = \frac{N!}{(N-m)!m!} \tag{Γ'.9}$$

οπου το συμβολο $k!$ (*k παραγοντικο*) οριζεται ως εξης:

$$0! = 1 \text{ και } \forall k \in \{1, 2, ..\} : k! = (k-1)!k = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k$$

Αποδειξη. Και εδω θα αποδειξουμε το ζητουμενο με επαγωγη, πανω στο N. Καταρχην παρατηρουμε οτι

$$C_{0,0} = 1 = \frac{0!}{(0-0)!0!}.$$

Εστω τωρα οτι ισχυει η προταση για καποιο $k \in \{0, 1, 2, ...\}$ και για καθε $m \in \{0, 1, 2..., k\}$. Τωρα εχουμε

$$C_{k+1,0} = 1 = \frac{(k+1)!}{(k+1-0)!0!} \text{ και } C_{k+1,k+1} = \frac{(k+1)!}{(k+1-(k+1))!\,(k+1)!} = \frac{(k+1)!}{0!\,(k+1)!}.$$

Επισης

$$\begin{aligned}
C_{k,m-1} + C_{k,m} &= \frac{k!}{(k-m+1)!\,(m-1)!} + \frac{k!}{(k-m)!m!} = \frac{k!}{(k-m)!\,(m-1)!}\left(\frac{1}{k-m+1} + \frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{k!}{(k-m)!\,(m-1)!}\left(\frac{m+k-m+1}{(k-m+1)\,m}\right) = \frac{k!}{(k-m)!\,(m-1)!} \cdot \frac{k+1}{(k-m+1)\,m} \\
&= \frac{(k+1)!}{(k-m+1)!m!} = C_{k+1,m}
\end{aligned}$$

Αρα οι συντελεστες $C_{N,m}$ ικανοποιουν τον τυπο (Γ'.9) για καθε $N \in \{0, 1, ...\}$ και για καθε $m \in \{0, 1, ..., N\}$.

Γ'.1.5. Πορισμα (Διωνυμικο Θεωρημα). Για καθε $p, q \in \mathbb{R}$ εχουμε

$$\forall N \in \{0, 1, ...\} : (p+q)^N = \sum_{m=0}^{N} \frac{N!}{(N-m)!m!} p^{N-m} q^m.$$

Αποδειξη. Ξερουμε οτι

$$\forall N \in \{0, 1, ...\} : (p+q)^N = \sum_{m=0}^{N} C_{N,m} p^{N-m} q^m$$

και οτι αν θεσουμε

$$C_{N,m} = \frac{N!}{(N-m)!m!}$$

ικανοποιουνται οι σχεσεις (Γ΄.5). Επειδη αυτες προσδιοριζουν τους συντελεστες $C_{N,m}$ *μονοσημαντα* (γιατι;) η επιλογη $C_{N,m} = \frac{N!}{(N-m)!m!}$ ειναι η μοναδικη η οποια ικανοποιει τα (Γ΄.4)-(Γ΄.5).

Γ΄.1.6. Παραδειγμα. Το αναπτυγμα του $(p+q)^3$ ειναι

$$\frac{3!}{3!0!}p^3 + \frac{3!}{2!1!}p^2 q + \frac{3!}{1!2!}pq^2 + \frac{3!}{0!3!}q^3 = p^3 + 3p^2 q + 3pq^2 + q^3.$$

Γ΄.1.7. Παραδειγμα. Στο αναπτυγμα του $(p+q)^{10}$ συντελεστης του ορου $p^6 q^4$ ειναι $\frac{10!}{6!4!} = 210$.

Γ΄.1.8. Οι συντελεστες $C_{N,m}$ λεγονται *διωνυμικοι συντελεστες* και συμβολιζονται και ως $\left(\begin{array}{c} N \\ m \end{array} \right)$.

Γ΄.2 Αλυτα Προβληματα

Οι διωνυμικοι συντελεστες εχουν πολλες αξιοσημειωτες ιδιοτητες, οπως φαινεται και απο τα παρακατω προβληματα.

Γ΄.2.1. Δειξε οτι $\sum_{m=0}^{N} \left(\begin{array}{c} N \\ m \end{array} \right) = 2^N$.

Γ΄.2.2. Δειξε οτι $\sum_{m=0}^{N} 2^m \left(\begin{array}{c} N \\ m \end{array} \right) = 3^N$.

Γ΄.2.3. Δειξε οτι $\sum_{m=0}^{N} (-1)^m \left(\begin{array}{c} N \\ m \end{array} \right) = 0$.

Γ΄.2.4. Δειξε οτι $\left(\begin{array}{c} N+1 \\ 2 \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} N \\ 2 \end{array} \right) = N$, για $N \geq 1$.

Γ΄.2.5. Δειξε οτι $\left(\begin{array}{c} N+1 \\ 2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} N \\ 2 \end{array} \right) = N^2$, για $N \geq 2$.

Γ΄.2.6. Δειξε οτι $\left(\begin{array}{c} N \\ N-2 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} N+1 \\ N-1 \end{array} \right) = N^2$, για $N \geq 2$.

Οι διωνυμικοι συντελεστες εχουν μια πολυ ενδιαφερουσα *συνδυαστικη* ερμηνεια την οποια αναδεικνυουν τα παρακατω προβληματα.

Γ΄.2.7. Δειξε οτι σε 4 ριψεις ενος νομισματος (κορωνα-γραμματα) υπαρχουν $\left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right)$ διαφορετικοι τροποι να προκυψουν 2 κορωνες και 2 γραμματα. Ποσοι τροποι υπαρχουν να προκυψουν 2 κορωνες και 3 γραμματα σε 5 ριψεις;

Γ΄.2.8. Δειξε οτι οταν μας δινονται N *διακριτα* αντικειμενα υπαρχουν $N!$ τροποι να τα βαλουμε στην σειρα (χρησιμποιησε μαθηματικη επαγωγη).

Γ΄.2.9. Δειτε οτι οτι μας δινονται K αντικειμενα τυπου A και M αντικειμενα τυπου B, υπαρχουν $\frac{(K+M)!}{K!M!}$ τροποι να τα βαλουμε στην σειρα (ολα τα αντικειμενα καθε τυπου θεωρουνται ιδια).

Γ΄.2.10. Δειξε οτι: για να υπολογισουμε το γινομενο

$$(p+q)^N = \underbrace{(p+q)\,(p+q)\ldots(p+q)}_{N \text{ οροι}}$$

υπαρχουν $\frac{N!}{(N-K)!K!}$ τροποι να σχηματισουμε τον ορο $p^{N-K}q^K$. Τι σχεση εχει αυτο με το Διωνυμικο Θεωρημα;

Γ΄.2.11. Με ποσους διαφορετικους τροπους μπορουν να μπουν σε μια γραμμη K αγορια και M κοριτσια;

Γ΄.2.12. Σε ενα δωματιο βρισκονται N ανθρωποι και ο καθενας εχει στο μετωπο του κολλημενη μια ετικετα η οποια μπορει να ειναι λευκη ή μαυρη· ο καθε ανθρωπος μπορει να δει τις ετικετες ολων των αλλων αλλα οχι την δικη του. Οι ανθρωποι αυτοι θα βγουν, ο ενας μετα τον αλλο, απο το δωματιο και θα σχηματισουν μια γραμμη. Βρες μια διαδικασια η οποια εξασφαλιζει (αν αυτοι την ακολουθησουν) οτι τελικα θα προκυψει μια γραμμη στην μια πλευρα της οποιας θα ειναι ολοι αυτοι με λευκη ετικετα και στην αλλη πλευρα ολοι αυτοι με μαυρη ετικετα.

Δ΄ Μιγαδικοι Αριθμοι

Οι μιγαδικοι αριθμοι ειναι μια *επεκταση* των πραγματικων η οποια εξασφαλιζει οτι η εξισωση $z^2+1=0$ (γενικοτερα: *καθε* πολυωνυμικη εξισωση) εχει λυση.

Δ΄.1 Θεωρια και Παραδειγματα

Δ΄.1.1. Αν *υποθεσουμε* οτι η εξισωση

$$z^2+1=0$$

εχει καποια λυση, την οποια θα συμβολισουμε με i, τοτε

$$i^2+1=0 \Leftrightarrow i^2=-1 \Leftrightarrow i=\sqrt{-1}.$$

Προφανως ο i δεν ειναι ενας πραγματικος αριθμος· θα τον ονομασουμε (για ιστορικους λογους) *φανταστικη μοναδα*. Ας υποθεσουμε επιπλεον οτι μπορουμε να εκτελεσουμε τις συνηθισμενες πραξεις με τον i και πραγματικους αριθμους. Π.χ. μπορουμε να εχουμε αριθμους (θα τους ονομασουμε *μιγαδικους*) της μορφης

$$x+iy \text{ οπου } x,y\in\mathbb{R}$$

τους οποιους μπορουμε να προσθετουμε και να πολλαπλασιαζουμε ως εξης:

$$\forall x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}:(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=x_1+x_2+i\,(y_1+y_2)$$
$$\forall x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}:(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=x_1x_2+x_1iy_2+iy_1x_2+iy_1iy_2=x_1x_2-y_1y_2+i\,(x_1y_2+y_2x_1)\,.$$

Παρατηρησε οτι τα αποτελεσματα των παραπανω πραξεων δινουν και παλι μιγαδικους αριθμους, δηλ. της μορφης $x+iy$ με $x,y\in\mathbb{R}$.

Τωρα μπορουμε να ορισουμε αυστηρα τους μιγαδικους αριθμους.

Δ΄.1.2. Ορισμος. Το συνολο των *μιγαδικων αριθμων* ειναι το συνολο

$$\mathbb{C}=\{x+iy:x,y\in\mathbb{R}\}$$

εφοδιασμενο με την πραξη $+$ της *προσθεσης* και με την πραξη $\cdot$ του *πολλαπλασιασμου*, οι οποιες οριζονται ως εξης:

$$\forall x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}:(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i\,(y_1+y_2)\,,$$
$$\forall x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbb{R}:(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i\,(x_1y_2+y_1x_2)\,,$$

οπου οι πραξεις μεταξυ πραγματικων αριθμων διατηρουν την γνωστη τους σημασια $x\in\mathbb{R}$, εχουμε $xi=ix$.

Δ΄.1.3. Παραδειγμα. Ετσι, π.χ., εχουμε

$$\begin{aligned}(2+3i)+(1-5i)&=(2+1)+i\,(3-5)=3-2i\\(2+3i)\cdot(1-5i)&=(2\cdot 1-(3\cdot(-5)))+i\,(2\cdot(-5)+3\cdot 1)=17-7i\end{aligned}$$

Δ΄.1.4. Θεωρημα. Η προσθεση και πολλαπλασιασμος ειναι *κλειστες πραξεις στο συνολο* $\mathbb{Q}$. Δηλ.

$$x,y\in\mathbb{C}\Rightarrow(x+y\in\mathbb{C}\text{ και }x\cdot y\in\mathbb{C})$$

Αποδειξη. Ειναι αμεση συνεπεια του ορισμου των $+,\cdot$.

Δ΄.1.5. Απο εδω και περα πολλες φορες θα γραφουμε xy αντι $x\cdot y$.

Δ΄.1.6. Ορισμος. Οριζουμε την ισοτητα = μιγαδικων αριθμων ως εξης:

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2\Leftrightarrow(x_1=x_2\text{ και }y_1=y_2)\,.$$

Δ΄.1.7. Θεωρημα. Για καθε $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ ικανοποιουνται οι παρακατω ιδιοτητες:

A1 : $z_1+z_2=z_2+z_1,\quad z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1,$
A2 : $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3,\quad z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3,$
A3 : $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3,$
A4 : υπαρχουν στοιχεια $0\in\mathbb{C}$ και $1\in\mathbb{C}$ τετοια ωστε: $z_1+0=z_1,\quad z_1\cdot 1=z_1,$
A5 : $\forall z:\exists z':z+z'=0$ (το z' αυτο συμβολιζουμε και με $-z$),
A6 : $\forall z\neq 0:\exists z'':zz''=1$ (το z'' αυτο συμβολιζουμε και με z^{-1}),

Αποδειξη. Εστω $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, $z_3=x_3+iy_3$.

1. Για την **A1** εχουμε

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i\,(y_1+y_2)=(x_2+x_1)+i\,(y_2+y_1)=z_2+z_1$$

και παρομοια δειχνουμε οτι $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.

2. Για την **A2** εχουμε

$$\begin{aligned}z_1+(z_2+z_3)&=(x_1+iy_1)+((x_2+iy_2)+(x_3+iy_3))\\&=(x_1+iy_1)+((x_2+x_3)+i\,(y_2+y_3))\\&=x_1+x_2+x_3+i\,(y_1+y_2+y_3)\\&=((x_1+iy_1)+(x_2+x_3))+i\,(y_2+y_3)\\&=((x_1+iy_1)+(x_2+iy_2))+(x_3+iy_3)\\&=(z_1+z_2)+z_3\end{aligned}$$

και παρομοια δειχνουμε οτι $z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$.

3. Αφηνουμε την αποδειξη της **A3** στον αναγνωστη.

4. Για την **A4** εχουμε

$$z_1+(0+0i)=(x_1+iy_1)+(0+0i)=(x_1+0)+i\,(y_1+0)=x_1+iy_1=z_1.$$

Αρα ο *μιγαδικος* αριθμος 0 ειναι ο $0+0i$ ο οποιος ειναι ο ιδιος με τον πραγματικο 0. Ομοιως δειχνουμε οτι ο *μιγαδικος* αριθμος 1 ειναι ο $1+0i$ ο οποιος ειναι ο ιδιος με τον πραγματικο 1.

5. Για την **A5** βλεπουμε ευκολα οτι: οταν $z=x+iy$, τοτε $-z=-x-iy$.

6. Για την **Α6**, αν $z = x + iy$, ας *υποθεσουμε* οτι υπαρχει $u = v + iw$ τετοιος ωστε $zu = 1 = 1 + 0i$. Τοτε θα ικανοποιοουνται οι ισοτητες

$$(x + iy)(v + iw) = 1 + 0i \Leftrightarrow (xv - yw) + i(xw + yv) = 1 + 0i \Leftrightarrow (xv - yw = 1 \text{ και } xw + yv = 0).$$

Ας λυσουμε το τελευταιο *συστημα εξισωσεων* ως προς τους ζητουμενους v, w. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} xv - yw &= 1 \\ yv + xw &= 0 \end{aligned}$$

Ειναι ενα συστημα γραμμικων εξισωσεων και η οριζουσα του ειναι $x^2 + y^2 \neq 0$, διοτι

$$x^2 + y^2 \neq 0 \Leftrightarrow x + iy \neq 0.$$

Οποτε υπαρχει *μοναδικη* λυση και ειναι ιση με

$$v = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad w = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Τελικα ο ζητουμενος *αντιστροφος* ειναι

$$(x + iy)^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Δ΄.1.8. Παραδειγμα. Ο αντιστροφος του $1 + 2i$ ειναι

$$(1 + 2i)^{-1} = \frac{1}{1^2 + 2^2} - i\frac{2}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i.$$

Δ΄.1.9. Ειναι φανερη η αντιστοιχια των ιδιοτητων **Α1** – **Α6** με τα πρωτα εξη αξιωματα **Α1** – **Α6** των πραγματικων αριθμων απο το Κεφαλαιο Β΄. Στην πραγματικοτητα, η δομη $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ειναι μια *επεκταση* της δομης $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ με την εξης εννοια. Αν αντιστοιχισουμε σε καθε $x \in \mathbb{R}$ τον $z = x + i0 \in \mathbb{C}$ και ετσι *ταυτισουμε* το $\mathbb{R}$ με το $\{z : z = x + i0\}$ τοτε

1. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ και
2. αν $z_1 = x_1 + i0 \in \mathbb{R}$, $z_2 = x_2 + i0 \in \mathbb{R}$, τοτε $z_1 + z_2 = x_1 + x_2$ και $z_1 z_2 = x_1 x_2$.

Δ΄.1.10. Ορισμος. Η *δυναμη* z^n οριζεται για καθε $n \in \mathbb{Z}$ ως εξης.

1. $z^0 = 1$ (οταν $z \neq 0$).
2. Για καθε $n \in \mathbb{N}$: $z^n = z^{n-1}z$.
3. Για καθε $n \in \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\})$: $z^n = \left(z^{-1}\right)^{-n}$ (οταν $z \neq 0$).

Δ΄.1.11. Θεωρημα. Για καθε $m, n \in \mathbb{Z}$ και για καθε $z \in \mathbb{C}$ τετοιο ωστε να υπαρχουν οι αντιστοιχες δυναμεις, ισχυουν

$$z^m z^n = z^{m+n}, \qquad (z^m)^n = z^{mn}.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Δ΄.1.12. Ασκηση. Ελεγξε οτι $(1 + i)^3 = -2 + 2i$ και $(2 - 3i)^{-3} = -\frac{46}{2197} + i\frac{9}{2197}$.

Δ΄.1.13. Ασκηση. Υπολογισε τα $(2 + 3i)^4$ και $(2 - i)^{-2}$.

Δ΄.1.14. Ορισμος. Ο *συζυγης* του αριθμου $z = x + iy$ συμβολιζεται με $\overline{z}$ και οριζεται

$$\overline{z} = x - iy.$$

Δ΄.1.15. Παραδειγμα. $\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$.

Δ΄.1.16. Θεωρημα. Για καθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχυουν οι παρακατω ιδιοτητες

1. $\overline{(-z_1)} = -\overline{z}_1$,
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$,
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$,
4. $\overline{z_1^{-1}} = (\overline{z}_1)^{-1}$ (οταν $z_1 \neq 0$).

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Δ΄.1.17. Ορισμος. Το *πραγματικο μερος* (αντ. *φανταστικο μερος*) του αριθμου $z = x + iy$ συμβολιζεται με $\mathrm{Re}\,(z)$ (αντ. $\mathrm{Im}\,(z)$). Αυτα οριζονται ως εξης

$$\mathrm{Re}\,(z) = x, \qquad \mathrm{Im}\,(z) = y.$$

Δ΄.1.18. Παραδειγμα. Για να υπολογισουμε τα $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2+3i}\right)$ και $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2+3i}\right)$ δουλευουμε ως εξης:

$$\frac{1}{2+3i} = \frac{1}{2+3i} \cdot \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i}{|2+3i|^2} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i.$$

Δ΄.1.19. Θεωρημα. Για καθε $z \in \mathbb{C}$ ισχυουν: $z + \overline{z} = \mathrm{Re}\,(z)\,, \qquad z - \overline{z} = \mathrm{Im}\,(z)\,.$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Δ΄.1.20. Ορισμος. Για καθε $z \in \mathbb{C}$ το *μετρο* του $z = x + iy$ συμβολιζεται με $|z|$ και οριζεται ως εξης:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Δ΄.1.21. Παραδειγμα. $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Δ΄.1.22. Ασκηση. Δειξε οτι: $z = x + i0 \Rightarrow |z| = |x|$, οπου $|z|$ ειναι το *μετρο* του z και $|x|$ ειναι η *απολυτη τιμη* του x. Αρα το μετρο (μιγαδικου) αριθμου ειναι η γενικευση της απολυτης τιμης (πραγματικου) αριθμου.

Δ΄.1.23. Θεωρημα. Για καθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $x \in \mathbb{R}$, ισχυουν οι παρακατω ιδιοτητες.

1. $|z_1| \geq 0$, $|z_1| = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$.
2. $|xz_1| = |x|\,|z_1|\,.$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Αποδειξη. Οι αποδειξεις των δυο πρωτων ιδιοτητων αφηνεται στον αναγνωστη. Για την τριτη, αν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ εχουμε

$$\begin{aligned}
(|z_1 + z_2|)^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2, \\
(|z_1| + |z_2|)^2 &= \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)^2 + \left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)\left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right) \\
&= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + 2\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)\left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right),
\end{aligned}$$

οποτε αρκει να δειξουμε οτι

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leq \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)\left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right).$$

Θα δειξουμε το ισχυροτερο

$$|x_1x_2 + y_1y_2| \leq \left|\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)\left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)\right| \Leftrightarrow |x_1x_2 + y_1y_2|^2 \leq \left|\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right)\left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)\right|^2.$$

Εχουμε

$$\left|x_1x_2+y_1y_2\right|^2-\left|\left(\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right)\left(\sqrt{x_2^2+y_2^2}\right)\right|^2=\left(x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2\right)-\left(x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2+y_1^2y_2^2\right)$$
$$=2x_1x_2y_1y_2-x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2=-\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2\leq 0$$

απο το οποιο προκυπτει η ζητουμενη ιδιοτητα.

Δ΄.1.24. Θεωρημα. Για καθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $n \in \mathbb{R}$, ισχυουν οι παρακατω ιδιοτητες.

1. $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
2. $|z_1^n| = |z_1|^n$ (οταν υπαρχουν οι αντιστοιχες δυναμεις).

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Δ΄.1.25. Παραθετουμε χωρις αποδειξη (αυτη διδασκεται στο μαθημα των Εφαρμοσμενων Μαθηαμτικων) το *Θεμελιωδες Θεωρημα της Αλγεβρας.*

Δ΄.1.26. Θεωρημα (Θεμελιωδες Θεωρημα της Αλγεβρας). Καθε πολυωνυμο N-στου βαθμου μπορει να γραφτει στην μορφη

$$a_Nz^N+a_{N-1}z^{N-1}+...+a_1z+a_0=a_N\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)...\left(z-z_N\right).$$

Οι N αριθμοι $z_1, z_2, ..., z_N \in \mathbb{C}$ ειναι οι N ριζες (ενδεχομενως επαναλαμβανομενες) της πολυωνυμικης εξισωσης

$$a_Nz^N+a_{N-1}z^{N-1}+...+a_1z+a_0=0.$$

Δ΄.1.27. Παραδειγμα. Η εξισωση

$$z^2+z+1=0$$

εχει ριζες

$$z_1=\frac{-1+\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$z_2=\frac{-1-\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

και ισχυει

$$z^2+z+1=\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right).$$

Η εξισωση

$$z^3-1=\left(z-1\right)\left(z^2+z+1\right)=0$$

εχει ριζες

$$z_1=\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2},\quad z_2=-\frac{1}{2}i\sqrt{3}-\frac{1}{2},\quad z_3=1$$

και ισχυει

$$z^3-1=\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right).$$

Η εξισωση

$$z^4-1=\left(z^2-1\right)\left(z^2+1\right)=\left(z-1\right)\left(z+1\right)\left(z-i\right)\left(z+i\right)=0$$

εχει ριζες

$$z_1=1,\quad z_2=-1,\quad z_3=i,\quad z_4=-i$$

και ισχυει

$$z^3-1=\left(z-z_1\right)\left(z-z_2\right)\left(z-z_3\right).$$

Δ΄.1.28. Ολοκληρωνουμε το παρον κεφαλαιο *παραθετοντας* γεωμετρικες ιδιοτητες των μιγαδικων αριθμων.

Δ΄.1.29. Ορισμος. Οριζουμε μια 1-προς-1 αντιστοιχια των μιγαδικων αριθμων με τα σημεια του επιπεδου, οπου ο $z = x + iy$ αντιστοιχιζεται στο σημειο (x, y). Το επιπεδο εφοδιασμενο με αυτη την αντιστοιχια ονομαζεται *μιγαδικο επιπεδο* .

Δ΄.1.30. Κατ΄ αυτον τον τροπο εφοδιαζουμε τους μιγαδικους αριθμους με μια *γεωμετρικη δομη* η οποια ειναι ιδιαιτερως χρησιμη για την κατανοηση των ιδιοτητων των μιγαδικων αλλα και για την επιλυση διαφορων γεωμετρικων προβληματων. Δινουμε παρακατω δυο παραδειγματα.

Δ΄.1.31. Παραδειγμα. Εστω αριθμοι $z = x + iy$ και $z' = iz = -y + ix$. Θα ονομασουμε επισης z και z' τα αντιστοιχα σημεια στο μιγαδικο επιπεδο και το σημειο (αριθμος) 0 ειναι η αρχη των αξονων (γιατι;). Τοτε, αν περιστρεψουμε το ευθυγραμμο τμημα $0z$ κατα μια ορθη γωνια (και με αντιωρολογιακη φορα) θα παρουμε το ευθυγραμμο τμημα $0z'$. Αυτο ειναι προφανες διοτι οι συντεταγμενες του z ειναι (x, y) και του z' ειναι $(-y, x)$. Εν ολιγοις, πολλαπλασιασμος με το i αντιστοιχει σε αντιωρολογιακη περιστροφη κατα μια ορθη γωνια. Παρομοια πολλαπλασιασμος με το $-1 = i^2$ αντιστοιχει σε αντιωρολογιακη περιστροφη κατα *δυο* ορθες γωνιες. Αυτα γενικευονται ετσι ωστε ο πολλαλπλασιασμος με *οποιονδηποτε* μιγαδικο αριθμο να ερμηνευεται ως συνδυασμος περιστροφης και μεγεθυνσης.

Δ΄.1.32. Παραδειγμα. Το συνολο των μιγαδικων αριθμων

$$\{z : |z| = 1\}$$

αντιστοιχει σε ενα κυκλο με κεντρο στην αρχη των αξονων και ακτινα ιση με 1. Αυτο ισχυει διοτι

$$\{z : |z| = 1\} = \left\{x + iy : x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

Με παρομοιο τροπο μπορουμε να χαρακτρησουμε πολλα γεωμετρικα σχηματα ως συνολα μιγαδικων αριθμων οι οποιοι ικανοποιουν καποια εξισωση.

Δ΄.2 Αλυτα Προβληματα

Δ΄.2.1. Υπολογισε τα $(1 + 4i)(2 + 3i)$, $\frac{1+4i}{2+3i}$, $(2 + i)^3$.

Δ΄.2.2. Υπολογισε τα $\mathrm{Re}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ και $\mathrm{Im}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$.

Δ΄.2.3. Βρες ολες τις ριζες των παρακατω εξισωσων (σε παρενθεση δημωνεται ο συνολικος αριθμος ριζων).

1. $z^2 + 1 = 0$ (δυο).
2. $z^2 + z + 1 = 0$ (δυο).
3. $z^3 - 1 = 0$ (τρεις).
4. $z^4 - 1 = 0$ (τεσσερις).
5. $z^4 + 1 = 0$ (τεσσερις).

Δ΄.2.4. Βρες τις N ριζες της εξισωσης $z^N = 1$.

Δ΄.2.5. Εστω $z_0 = 1, z_1, z_2$ οι ριζες της εξισωσης $z^3 = 1$. Δειξε οτι

1. $\overline{z}_1 = z_2$, $\overline{z}_2 = z_1$,
2. $z_1^2 = z_2$, $z_0 z_1 z_2 = 1$,
3. $z_0 + z_1 + z_2 = 0$,
4. $z_0 z_1 + z_1 z_2 + z_2 z_0 = 0$,
5. $z_1^{-1} = z_2$, $z_2^{-1} = z_1$.

Γενικευσε τις παραπανω ιδιοτητες για τις ριζες της $z^N = 1$.

Δ΄.2.6. Εστω z_1, z_2 οι δυο μιγαδικες ριζες της $z^3 = 1$. Για $n \in \{1, 2\}$ υπολογισε τα $\mathrm{Re}\left(\left(1 + z_n + z_n^2\right)^8\right)$ και $\mathrm{Im}\left(\left(1 + z_n + z_n^2\right)^8\right)$.

Δ΄.2.7. Εστω z_1, z_2 οι δυο μιγαδικες ριζες της $z^3 = 1$. Για $n \in \{1, 2\}$ δειξε οτι

$$\underbrace{(1 + z_n)\left(1 + z_n^2\right)\left(1 + z_n^4\right)...}_{2K \text{ οροι}} = 1.$$

Δ΄.2.8. Δειξε οτι $|z_1 + z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$.

Δ΄.2.9. Δειξε οτι: αν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ και $|z_1| = |z_2| = |z3| = 1$ τοτε τα z_1, z_2, z_3 ειναι$z_1 z_2 = 1$, κορυφες ισοπλευρου τριγωνου.

Δ΄.2.10. Βρες την γραφικη παρασταση των σημειων των παρακατω συνολων.

1. $\{z : |z - 1| + |z + 1| = 5\}$.
2. $\{z : |z - 1| = |z + 1|\}$.
3. $\{z : \mathrm{Re}\,(z) + \mathrm{Im}\,(z) < 1\}$.
4. $\{z : |z| = \mathrm{Re}\,(z) + 1\}$.

Ε΄ Πληθαριθμοι

Τωρα επιστρεφουμε στην Θεωρια Συνολων. Αφου εχουμε ορισει την εννοια του ακεραιου αριθμου, μπορουμε να ορισουμε τον *πληθαριθμο* ενος συνολου. Οι πληθαριθμοι ειναι μια *μερικη* γενικευση των φυσικων αριθμων.

Ε΄.1 Θεωρια και Παραδειγματα

Ε΄.1.1. Αρχιζουμε με ενα *προσωρινο* ορισμο του πληθαριθμου ο οποιος εφαρμοζεται σε *πεπερασμενα* συνολα.

Ε΄.1.2. Ορισμος. Ενα συνολο A λεγεται πεπερασμενο ανν υπαρχουν $N \in \mathbb{N}$ και 1-προς-1 και επι συναρτηση $F : A \to \{1, ..., N\}$.

Ε΄.1.3. Παραδειγμα. Το συνολο $A = \{p, q, r\}$ ειναι πεπερασμενο διοτι μπορουμε να ορισουμε την 1-προς-1 και επι συναρτηση $F : A \to \{1, 2, 3\}$ ως εξης:

$$F(1) = p, \quad F(2) = q, \quad F(3) = r.$$

Ε΄.1.4. Αν το συνολο A ειναι πεπερασμενο μπορουμε, για καποιο $N \in \mathbb{N}$, να γραψουμε

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_N\}.$$

Ε΄.1.5. Ορισμος. Ο *πληθαριθμος* του συνολου $A = \{a_1, a_2, ..., a_N\}$ συμβολιζεται με $|A|$ και οριζεται ως $A = N$.

Ε΄.1.6. Παραδειγμα. Εστω $A = \{a_1, a_2\}$. Τοτε $|A| = 2$. Επισης

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1, a_2\}\}$$

και $|\wp(A)| = 4 = 2^{|A|}$.

Ε΄.1.7. Ασκηση. Εστω $A = \{1, 2, 3\}$. Βρες τα $|A|$, $\wp(A)$ και $|\wp(A)|$.

Ε΄.1.8. Θεωρημα. Για καθε πεπερασμενο $A = \{a_1, ..., a_N\}$ (οποτε $|A| = N$) ισχυει

$$|\wp(A)| = 2^{|A|} = 2^N.$$

Αποδειξη. Θα αποδειξουμε το θεωρημα με την μεθοδο της επαγωγης. Εχουμε την προταση

$$\mathbf{P}(N) = «|A| = N \Rightarrow |\wp(A)| = 2^N».$$

Για $N = 1$, ειναι $A = \{a_1\}$, $\wp(A) = \{\emptyset, A\}$, $|\wp(A)| = 2 = 2^1$. Αρα ισχυει η $\mathbf{P}(1)$. Εστω οτι ισχυει και η $\mathbf{P}(n)$, δηλ. αν $A = \{a_1, ..., a_n\}$ τοτε $|\wp(A)| = 2^n$. Τωρα ας θεωρησουμε το συνολο $B = \{a_1, ..., a_n, a_{n+1}\}$. Σε καθε

$A' \in \wp(A)$ αντιστοιχουν δυο υποσυνολα του B: το A' και το $A' \cup \{a_{n+1}\}$· με αυτο τον τροπο μπορουμε να κατασκευασουμε ολα τα υποσυνολα του B απο αυτα του A και θα εχουμε

$$|\wp(A)| = 2^n \Rightarrow |\wp(B)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Δηλ. $\mathbf{P}(n) \Rightarrow \mathbf{P}(n+1)$. Οποτε συμφωνα με την αρχη της μαθηματικης επαγωγης

$$\forall n \in \mathbb{N}: \text{ η } \mathbf{P}(n) \text{ ειναι αληθης}$$

και η αποδειξη ειναι πληρης.

Ε΄.1.9. Ασκηση. Δειξε οτι δεν υπαρχει $n \in \mathbb{N}$ τετοιο ωστε $|\mathbb{N}| = n$.

Ε΄.1.10. Τα παραπανω ισχυουν για πεπρασμενα συνολα A. Υπαρχουν ομως και συνολα με «*απειρο*» αριθμο στοιχειων· αν και δεν εχουμε ακομη ορισει *τι* σημαινει «*απειρο*», διαισθητικα καταλαβαινουμε οτι το $\mathbb{N}$ ειναι ενα τετοιο συνολο, το οποιο περιεχει απειρο αριθμο στοιχειων. Θα πρεπει λοιπον να *επεκτεινουμε* τον ορισμο του πληθαριθμου ενος συνολου με διαφορετικο τροπο, ετσι ωστε αυτος να εφαρμοζεται σε μια μεγαλυτερη οικογενεια συνολων. Για να κανουμε αυτο, απαιτουνται ορισμενες προκαταρκτικες εννοιες.

Ε΄.1.11. Ορισμος. Λεμε οτι τα συνολα A, B ειναι *ισοπληθικα* ή οτι εχουν ιση *πληθικοτητα* (και γραφουμε $A \approx B$) ανν υπαρχει 1-προς-1 και επι του B συναρτηση $F : A \longleftrightarrow B$.

Ε΄.1.12. Διαισθητικα, τα A και B ειναι ισοπληθικα ανν εχουν ισο αριθμο στοιχειων.

Ε΄.1.13. Παραδειγμα. Τα συνολα $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ ειναι ισοπληθικα, διοτι η συναρτηση $F(n) = a_n$ ειναι 1-προς-1 και επι του B. Αυτο εχει μια ξεκαθαρη ερμηνεια: μπορουμε να *απαριθμησουμε* τα στοιχεια του B, δηλ. να τα θεσουμε σε 1-προς-1 αντιστοιχια με τα στοιχεια του A.

Ε΄.1.14. Παραδειγμα. Τα συνολα $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ και $\mathbb{N}_e = \{2, 4, 6, ...\}$ ειναι ισοπληθικα, διοτι η συναρτηση $F(n) = 2n$ ειναι 1-προς-1 και επι του $\mathbb{N}_e$. Αυτο σημαινει οτι μπορουμε να απαριθμησουμε τα στοιχεια του $\mathbb{N}_e$: το πρωτο στοιχειο ειναι το 2, το δευτερο στοιχειο ειναι το 4 κ.ο.κ. Φαινεται αντιδιαισθητικο αλλα, υπο αυτη την εννοια, το πληθος (η πληθικοτητα) των θετικων αρτιων ειναι ισο με το πληθος (την πληθικοτητα) των θετικων ακεραιων!

Ε΄.1.15. Θεωρημα. Η $\approx$ ειναι *σχεση ισοδυναμιας*, δηλ. για τυχοντα συνολα A, B, C ισχυουν τα εξης.

$$\begin{aligned} &\mathbf{D1} : A \approx A, \\ &\mathbf{D2} : A \approx B \Rightarrow B \approx A, \\ &\mathbf{D3} : (A \approx B \text{ και } B \approx C) \Rightarrow A \approx C. \end{aligned}$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Ε΄.1.16. Παραδειγμα. Εστω $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ και $C = \{p, q, r\}$. Τοτε $A \approx B \approx C$.

Ε΄.1.17. Ορισμος. Λεμε οτι το A ειναι *απειροσυνολο* (δηλ. περιεχει απειρα στοιχεια) ανν

$$\exists B \subset A : A \approx B$$

δηλ. αν το A ειναι ισοδυναμο με ενα *γνησιο* υποσυνολο αυτου.

Ε΄.1.18. Παραδειγμα. Συμφωνα με τα παραπανω, το $\mathbb{N}$ ειναι ενα απειροσυνολο.

Ε΄.1.19. Ασκηση. Δειξε οτι το $\mathbb{R}$ ειναι ενα απειροσυνολο.

Ε΄.1.20. Ορισμος. Ενα συνολο A λεγεται *αριθμησιμο* ανν $A \approx \mathbb{N}$ (δηλ. το A εχει πληθικοτητα ιση με αυτη του $\mathbb{N}$).

Ε΄.1.21. Παραδειγμα. Το $\{2, 4, 6, ...\}$ ειναι αριθμησιμο διοτι $\{2, 4, 6, ...\} \approx \{1, 2, 3, ...\}$.

Ε΄.1.22. Οπως θα δουμε σε λιγο, υπαρχουν και *μη αριθμησιμα* συνολα.

Ε΄.1.23. Θεωρημα. $|A| \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *ανν* το A δεν ειναι απειροσυνολο.

Αποδειξη. Αν $|A| = 0$, το A δεν περιεχει στοιχεια, αρα δεν εχει γνησιο υποσυνολο και αρα δεν ειναι απειροσυνολο. Εστω τωρα $|A| = N \in \mathbb{N}$, οποτε $A = \{a_1, ..., a_N\}$ και εστω $B = \{a_{i_1}, ..., a_{i_K}\} \subset A$, οπου $\{i_1, ..., i_K\} \subset \{1, ..., N\}$ οποτε και $K < N$. Αρα δεν μπορει να υπαρχει συναρτηση $A \longleftrightarrow B$ (γιατι;) και το A δεν ειναι απειροσυνολο. Η αντιστροφη συνεπαγωγη αποδεικνυεται παρομοια.

Ε΄.1.24. Θεωρημα. Καθε απειροσυνολο εχει ενα αριθμησιμο υποσυνολο.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Ε΄.1.25. Θεωρημα. Καθε υποσυνολο ενος αριθμησιμου συνολου ειναι ειτε πεπερασμενο ειτε αριθμησιμο.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Ε΄.1.26. Θεωρημα. Αν το A δεν ειναι αριθμησιμο και το B ειναι ειτε πεπερασμενο ειτε αριθμησιμο, τοτε το $A \backslash B$ δεν ειναι αριθμησιμο.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Ε΄.1.27. Θεωρημα. Αν τα A_1, A_2 ειναι αριθμησιμα συνολα, τοτε το $A_1 \cup A_2$ ειναι αριθμησιμο.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Ε΄.1.28. Θεωρημα. Αν τα $A_1, A_2, ...$ ειναι αριθμησιμα συνολα και $m \neq n \Rightarrow A_m \cap A_n = \emptyset$, τοτε το

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...$$

ειναι αριθμησιμο.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Ε΄.1.29. Θεωρημα. Αν τα A, B ειναι αριθμησιμα συνολα, τοτε το $A \times B$ ειναι αριθμησιμο.
Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Ε΄.1.30. Θεωρημα. Το συνολο $\mathbb{Q}$ ειναι αριθμησιμο.

Αποδειξη. Θετουμε $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$ (οπου τα $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}^+$ εχουν τις προφανεις ερμηνειες). Κατοπιν οριζουμε $F : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ως εξης: $f\left(\frac{m}{n}\right) = (m', n')$, οπου οι m', n' ειναι *πρωτοι προς αλληλους* (δηλ. δεν υπαρχουν $k, m'', n'' \in \mathbb{N}$ τετοια ωστε $m' = km''$, $n' = kn''$). Η F ειναι 1-προς-1 [1] με εικονα ενα *απειρο* υποσυνολο A του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Επειδη το $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ειναι αριθμησιμο το ιδιο ισχυει και για το A (γιατι;) αρα και το $\mathbb{Q}^+$ ειναι αριθμησιμο. Το $\mathbb{Q}^-$ ειναι (παρομοιως) αριθμησιμο και το $\{0\}$ ειναι (προφανως) αριθμησιμο. Οποτε ειναι αριθμησιμο και το $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$.

Ε΄.1.31. Θεωρημα. Το συνολο $[0, 1]$ δεν ειναι αριθμησιμο.

Αποδειξη. Εστω οτι το $[0, 1]$ ειναι αριθμησιμο, τοτε μπορουμε να θεσουμε

$$[0, 1] = \{x_1, x_2, ...\}$$

και να γραψουμε τους $x_1, x_2, ...$ στην δεκαδικη τους μορφη

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}..., \\ x_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}..., \\ &... \\ x_n &= 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3} \\ &... \end{aligned}$$

οπου

$$\forall i, j \in \mathbb{N} : a_{ij} \in \{0, 1, ..., 9\}.$$

[1] **Προσοχη**: *καθε* $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^+$ ικανοποιει $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ οπου (α) οι m', n' ειναι πρωτοι προς αλληλους και (β) το (m', n') ειναι μονοσημαντα ορισμενο.

Επιπλεον, επιλεγουμε να γραψουμε καθε $0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}...$ ετσι ωστε να περιεχει εναν απειρο αριθμο μη μηδενικων ψηφιων· π.χ. γραφουμε το $\frac{1}{2}$ ως 0.49999... και οχι ως 0.5000... (κατ΄ αυτο τον τροπο εξασφαλιζουμε οτι καθε $x \in [0,1]$ εχει μοναδικη δεκαδικη αναπαρασταση). Τωρα θεωρουμε τον αριθμο

$$y = 0.b_1 b_2 b_3 ... \in [0,1]$$

οπου επιλεγουμε τα ψηφια b_1, b_2, b_3 ετσι ωστε:

$$\forall n \in \mathbb{N} : b_n \notin \{a_{n1}, 0\}.$$

Τοτε ομως (αποδειξε το!):

$$\forall n \in \mathbb{N} : y \neq x_n.$$

Με αλλα λογια, υπαρχει καποιος $y \in [0,1]$ ο οποιος δεν περιλαμβανεται στο συνολο $\{x_1, x_2, ...\} = [0,1]$, όπερ άτοπο.

Ε΄.1.32. Ασκηση. Δειξε οτι το συνολο $(-1,1)$ δεν ειναι αριθμησιμο.

Ε΄.1.33. Θεωρημα. Το συνολο $\mathbb{R}$ δεν ειναι αριθμησιμο.

Αποδειξη. Θεωρησε την συναρτηση $F(x) = \frac{x}{1+|x|}$ και δειξε οτι η $F : \mathbb{R} \to (-1,1)$ ειναι 1-προς-1 και επι.

Ε΄.1.34. Ασκηση. Δειξε οτι $\mathbb{R} \approx \mathbb{R}^+$.

Ε΄.1.35. Ασκηση. Δειξε οτι $\mathbb{R} \approx \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Ε΄.1.36. Τωρα μπορουμε να επεκτεινουμε τον ορισμο του *πληθαριθμου* ωστε να εφαρμοζεται και σε απειροσυνολα.

Ε΄.1.37. Ορισμος. Για καθε συνολο A συμβολιζουμε τον *πληθαριθμο* του A με $|A|$ και οριζουμε

$$|A| = [A]$$

οπου $[A]$ ειναι η κλαση ισοδυναμιας του A ως προς την ισοπληθικοτητα (δηλ. $[A] = \{B : A \approx B\}$).

Ε΄.1.38. Ο παραπανω ορισμος του $|A|$ ειναι επεκταση του ορισμου που δωσαμε στην αρχη του κεφαλαιου για πεπερασμενα συνολα. Αυτο μπορει να μην ειναι αμεσα προφανες, διοτι με τον αρχικο ορισμο ο πληθαριθμος ηταν ενας μη αρνητικος ακεραιος, ενω τωρα ειναι μια κλαση ισοδυναμιας (δηλ. μια οικογενεια συνολων). Ομως αυτη η δυσκολια αιρεται ευκολα, οπως φαινεται στο επομενο παραδειγμα.

Ε΄.1.39. Παραδειγμα. Τα πεπερασμενα συνολα $A = \{1, 2, ..., N\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_N\}$, $C = \{c_1, c_2, ..., c_N\}$ *και καθε αλλο συνολο το οποιο περιεχει N στοιχεια* εχουν τον ιδιο πληθαριθμο· αυτος ειναι N συμφωνα με τον αρχικο ορισμο και $[\{1, 2, ..., N\}]$ συμφωνα με τον νεο. Για καθε $N \in \mathbb{N}$, μπορουμε να αντιστοιχισουμε το N στο $[\{1, 2, ..., N\}]$· ετσι οι δυο ορισμοι του πληθαριθμου ειναι ισοδυναμοι για πεπερασμενα συνολα.

Ε΄.1.40. Το πλεονεκτημα του νεου ορισμου ειναι οτι εφαρμοζεται και σε απειροσυνολα. Επιπλεον, οπως θα δουμε παρακατω, οι πληθαριθμοι απειροσυνολων εχουν αρκετες κοινες ιδιοτητες με τους μη αρνητικους ακεραιους (αλλα οχι ολες).

Ε΄.1.41. Συμβολισμος. Το συμβολο $\aleph_0$ (διαβαζεται: *αλεφ-0*) οριζεται ως εξης: $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$.

Ε΄.1.42. Συμφωνα με τα παραπανω εχουμε:

$$A \approx \mathbb{N} \Rightarrow |A| = \aleph_0.$$

Αυτο, μαζι με τον ορισμο του πληθαριθμου των πεπερασμενων συνολων, δινει τον ορισμο του πληθαριθμου *καθε αριθμησιμου συνολου*: ολα αυτα εχουν πληθαριθμο που ανηκει στο συνολο $\mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$. *Χονδρικα, το $\aleph_0$ ειναι **ενα** απειρο.*

Ε΄.1.43. Παραδειγμα. Το συνολο $\mathbb{Q}$ ειναι αριθμησιμο, δηλ. $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$. Οποτε $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

Ε΄.1.44. Λεμε οτι το $\aleph_0$ ειναι *ενα* απειρο διοτι, οπως θα δουμε τωρα, υπαρχουν απειροσυνολα των οποιων ο πληθαριθμος ειναι διαφορος του $\aleph_0$. Για να φανει αυτο, θα εφοδιασουμε τους πληθαριθμους με μια σχεση διαταξης. .

Ε΄.1.45. Ορισμος. Εφοδιαζουμε το συνολο των πληθαριθμων με μια σχεση $\preceq$, την οποια οριζουμε ως εξης:

$$|A| \preceq |B| \Leftrightarrow (\exists C \subseteq B : A \approx C) .$$

Επισης οριζουμε την σχεση $\prec$ ως εξης:

$$|A| \prec |B| \text{ ανν } (|A| \preceq |B| \text{ και } |A| \neq |B|) .$$

Οι συμβολισμοι $|A| \succeq |B|$ και $|A| \succ |B|$ εχουν την προφανη ερμηνεια.

Ε΄.1.46. Συμβολισμος. Οριζουμε $2^{|A|} = |\wp(A)|$. Δηλ. το συμβολο $2^{|A|}$ *οριζεται* να υποδηλωνει τον πληθαριθμο του δυναμοσυνολου του A.

Ε΄.1.47. Θεωρημα. Για καθε συνολο A ισχυει

$$|A| \prec |\wp(A)|$$

ή ισοδυναμα

$$|A| \prec 2^{|A|}.$$

Αποδειξη. Οριζουμε την συναρτηση $F : A \to \wp(A)$ ως εξης:

$$F(a) = \{a\} .$$

Αρα $|A| \preceq |\wp(A)|$. Για να δειξουμε το ζητουμενο αρκει να δειξουμε οτι $|A| \neq |\wp(A)|$. Ας υποθεσουμε το αντιθετο, δηλ. οτι $|A| = |\wp(A)|$, δηλ. οτι υπαρχει $G : A \to \wp(A)$ η οποια ειναι 1-προς-1 και επι του $\wp(A)$. Οριζουμε τωρα το συνολο

$$B = \{a : a \in A, a \notin G(a)\} \in \wp(A) .$$

Αφου υποθεσαμε οτι η G ειναι 1-προς-1 και επι του $\wp(A)$, θα υπαρχει $b \in A$ τετοιο ωστε $G(b) = B$. Τωρα υπαρχουν δυο δυνατοτητες.

1. Αν $b \in B$, τοτε $b \notin G(b) = B$, που ειναι ατοπο.
2. Αν $b \notin B$, τοτε $b \in G(b) = B$, που ειναι επισης ατοπο.

Αρα δεν μπορει να υπαρχει G η οποια ειναι 1-προς-1 και επι του $\wp(A)$. Δηλ. $|A| \neq |\wp(A)|$.

Ε΄.1.48. Θεωρημα. Η $\preceq$ ειναι μια σχεση διαταξης. Δηλαδη για καθε A, B, C ισχυουν

$$\begin{aligned}
&\mathbf{F1} : |A| \preceq |A| , \\
&\mathbf{F2} : (|A| \preceq |B| \text{ και } |A| \preceq |B|) \Rightarrow |A| = |B| , \\
&\mathbf{F3} : (|A| \preceq |B| \text{ και } |B| \preceq |C|) \Rightarrow |A| \preceq |C| .
\end{aligned}$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη η αποδειξη των **F1**, **F3**. Για την **F2** δινουμε ενα «προσχεδιο» της αποδειξης (συμπληρωσε το και γραψε μια πληρη αποδειξη).

Πρωτα αποδεικνυουμε οτι:

$$(A \subseteq B \subseteq C \text{ και } A \approx C) \Rightarrow A \approx B \approx C. \tag{Ε΄.1}$$

Για να αποδειξουμε την (Ε΄.1) δουλευουμε ως εξης.

1. Παρατηρουμε οτι υπαρχει 1-προς-1 $F : C \to A$.
2. Επειδη $A \subseteq B$, ο περιορισμος της F στο πεδιο τιμων B ειναι επισης 1-προς-1· εστω $B_1 = F(B)$, τοτε $B \approx B_1$.

3. Ομοια δειχνουμε οτι για το $C_1 = F(C)$ ειναι $C \approx C_1$.
4. Για τα παραπανω συνολα ισχυει
$$C_1 \subseteq B_1 \subseteq A \subseteq B \subseteq C.$$
5. Με παρομοιο τροπο σχηματιζουμε συνολα $B_2 \approx B_3 \approx ...$ και $B_2 \approx B_3 \approx ...$ και $C_2 \approx C_3 \approx ...$ τετοια ωστε
$$... \subseteq B_3 \subseteq C_3 \subseteq B_2 \subseteq C_2 \subseteq B_1 \subseteq C_1 \subseteq A \subseteq B \subseteq C.$$
6. Κατοπιν οριζουμε
$$D = C \cap B \cap C_1 \cap B_1 \cap C_2 \cap B_2 \cap ...$$
και επαληθευουμε οτι
$$C = (C \backslash B) \cup (B \backslash C_1) \cup (C_1 \backslash B_1) \cup (B_1 \backslash C_2) \cup ... \cup D$$
$$B = (B \backslash C_1) \cup (C_1 \backslash B_1) \cup (B_1 \backslash C_2) \cup ... \cup D$$
και
$$(C \backslash B) \approx (C_1 \backslash B_1) \approx (C_2 \backslash B_2) \approx ...$$
7. Τελος, χρησιμοποιουμε τα παραπανω για να ορισουμε μια συναρτηση $G : C \to B$ η οποια ειναι 1-προς-1 και επι, οποτε εχουμε αποδειξει οτι $C \approx B \approx A$.

Κατοπιν χρησιμοποιουμε την (Ε΄.1) για να αποδειξουμε την **F2**.

Ε΄.1.49. Θεωρημα. Η $\prec$ ειναι *ολικη διαταξη*. Δηλ. για καθε A, B ισχυει ακριβως ενα απο τα επομνα ενδεχομενα: είτε $A \prec B$ είτε $B \prec A$ είτε $A = B$.

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Ε΄.1.50. Θεωρημα. Ισχυει οτι
$$|[0,1]| = |\mathbb{R}|.$$

Αποδειξη. Αφηνεται στον αναγνωστη.

Ε΄.1.51. Θεωρημα. Ισχυει οτι
$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}.$$

Αποδειξη. Οριζουμε την συναρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ ως εξης:
$$F(x) = \{y : y \in \mathbb{Q} \text{ και } y < x\}.$$
Η F ειναι 1-προς-1 διοτι: για καθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ υπαρχει $q \in \mathbb{Q}$ τετοιο ωστε $x < q < y$ οποτε $q \in F(y)$ και $q \notin F(x)$, αρα $F(x) \neq F(y)$. Οποτε $|\mathbb{R}| \preceq |\wp(\mathbb{Q})|$. Αρα
$$|\mathbb{R}| \preceq 2^{\aleph_0}.$$
Τωρα οριζουμε συναρτηση $G : \wp(\mathbb{N}) \to [0,1]$ ως εξης:
$$G(A) = 0.g_A(1)\, g_A(2)\, g_A(3) ... \in [0,1]$$
οπου
$$\forall n \in \mathbb{R} : g_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{ανν } n \in A \\ 0 & \text{ανν } n \notin A \end{cases}$$
και $0.g_A(1)\, g_A(2)\, g_A(3) ...$ ειναι η δυαδικη αναπαρασταση του αριθμου $G(A) \in [0,1]$. Αν εχουμε $A, B \in \wp(\mathbb{N})$ και $A \neq B$, τοτε τα $g(A) \neq g(B)$ διοτι θα διαφερουν σε καποιο δυαδικο ψηφιο. Αρα η G ειναι 1-προς-1 και $|\wp(\mathbb{Q})| \preceq |[0,1]|$. Εχουμε λοιπον
$$|\mathbb{R}| \preceq |\wp(\mathbb{Q})| \preceq |[0,1]| = |\mathbb{R}|$$
και εχουμε αποδειξει το ζητουμενο.

Ε΄.1.52. Αμεση συνεπεια των παραπανω ειναι οτι

$$\aleph_0 \prec 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}| \,.$$

Με αλλα λογια:

1. *υπαρχουν απειροι φυσικοι αριθμοι·*
2. *επισης υπαρχουν απειροι πραγματικοι αριθμοι·*
3. *αλλα οι πραγματικοι αριθμοι ειναι «**περισσοτερο απειροι**» απο τους πραγματικους.*

Ή, πιο απλα, **υπαρχουν διαφορετικες ταξεις απειριας**.

Ε΄.1.53. Μπορουμε να εφοδιασουμε τους πληθαριθμους και με πραξεις, ετσι ωστε αυτοι να θεωρηθουν ως ενα *επεκτεταμενο* συνολο αριθμων. Δεν θα επεκταθουμε σε αυτη την κατευθυνση αλλα μπορεις να παρεις μια ιδεα της κατασκευης απο τα προβληματα που παρατιθενται παρακατω. Αν ενδιαφερεσαι να μαθεις περισσοτερα μπορεις να διαβασεις το κεφαλαιο 6 του [;].

Ε΄.2 Αλυτα Προβληματα

Ε΄.2.1. Δειξε οτι το συνολο $\{(p,q) : p,q \in \mathbb{Q}\}$ ειναι αριθμησιμο.

Ε΄.2.2. Δειξε οτι για καθε απειροσυνολο A υπαρχει αριθμησιμο απειροσυνολο $B \subseteq A$.

Ε΄.2.3. Εστω απειροσυνολο A και πεπερασμενο $B \subseteq A$. Δειξε οτι $|A| = |A \backslash B|$.

Ε΄.2.4. Εστω μη αριθμησιμο απειροσυνολο A και αριθμησιμο $B \subseteq A$. Δειξε οτι $|A| = |A \backslash B|$.

Ε΄.2.5. Δειξε οτι $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Ε΄.2.6. Δειξε οτι $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$.

Ε΄.2.7. Ποιος ειναι ο πληθαριθμος του συνολου των αυξουσων συναρτησεων με πεδιο ορισμου και τιμων το $[0,1]$;

Ε΄.2.8. Ποιος ειναι ο πληθαριθμος του συνολου των συνεχων συναρτησεων με πεδιο ορισμου το και τιμων $[0,1]$;

Ε΄.2.9. Ποιος ειναι ο πληθαριθμος του συνολου των συναρτησεων με πεδιο ορισμου και τιμων το $[0,1]$;

Ε΄.2.10. Οριζουμε την *προσθεση* πληθαριθμων ως εξης: αν τα A, B ειναι τετοια ωστε $A \cap B = \emptyset$ τοτε $|A| + |B| = |A \cup B|$. Δειξε οτι, για καθε A, B, C ισχυουν τα εξης.

1. $|A| + |B| = |B| + |A|$.
2. $|A| + (|B| + |C|) = |A| + (|B| + |C|)$.

Ε΄.2.11. Οριζουμε τον *πολλαπλασιασμο* πληθαριθμων για καθε A, B ως εξης: $|A| \cdot |B| = |A \times B|$. Δειξε οτι, για καθε A, B, C ισχυουν τα εξης.

1. $|A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$.
2. $|A| \cdot (|B| \cdot |C|) = (|A| \cdot |B|) \cdot |C|$.
3. $|A| \cdot (|B| + |C|) = |A| \cdot |B| + |A| \cdot |C|$.

Ε΄.2.12. Δειξε οτι $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$ και $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Ε΄.2.13. Δειξε οτι $\aleph_0 \cdot 1 = \aleph_0$ και $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Ε΄.2.14. Δειξε οτι $|\mathbb{N}| \cdot |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}|$.

Βιβλιογραφια

Η μαθηματικη δυσκολια των παρακατω ειναι αναλογη του αριθμου των αστερισκων.

1. *** Apostol, Tom M. Calculus, Vols. 1 and 2. John Wiley & Sons, 2007.
2. **** Apostol, Tom M. Mathematical analysis. (1974).
3. ** Ayres, Frank, and Elliot Mendelson. Schaum's outline of theory and problems of differential and integral calculus. McGraw-Hill, 1990.
4. ** Berman, Georgii Nikolaevich. A collection of problems on a course of mathematical analysis. Elsevier, 2014.
5. **** Kaplan, Wilfred. Advanced calculus. Addison Wesley Publishing Company, 1973.
6. ** Minorsky, V.P. Problems in higher mathematics. Mir Publishers, 1975.
7. ** Paul's Online Math Notes. $http://tutorial.math.lamar.edu/$.
8. **** Rudin, Walter. Principles of mathematical analysis. New York: McGraw-Hill, 1964.
9. * Stewart, James. Calculus: early transcendentals. Cengage Learning, 2010.
10. * Thomas, George Brinton, et al. Thomas' Calculus Early Transcendentals. Pearson, 2010.
11. ** Wrede, Robert C., and Murray R. Spiegel. Advanced calculus. McGraw-Hill, 2010.

Μαθηματικο Λογισμικο

Το μαθηματικο λογισμικο διαιρειται σε δυο βασικες κατηγοριες. Λογισμικο προσανατολισμενο σε *αριθμητικους υπολογισμους*, το οποιο ειναι χρησιμο, π.χ., για αριθμητικη επιλυση αλγεβρικων και διαφορικων εξισωσεων, γραφικες παραστασεις κ.τ.λ. Και λογισμικο προσανατολισμενο σε *συμβολικους υπολογισμους*, το οποιο μπορει να υπολογισει συμβολικα παραγωγους (π.χ. την $\frac{d}{dx}\left(x^2 \sin x\right) = x^2 \cos x + 2x \sin x$), ολοκληρωματα (π.χ. το $\int \frac{1}{\sin x} dx = \frac{1}{2} \ln\left(-\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right)$), να επιλυσει διαφορικες εξισωσεις (π.χ. η $\frac{dx}{dt} = x^2$ εχει λυσεις $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = \frac{1}{c-t}$), να κανει γραφικες παραστασεις και πολλα αλλα.

Επισης το μαθηματικο λογισμικο μπορει να διαιρεθει σε αυτο το οποιο παρεχεται δωρεαν και σε αυτο το οποιο πωλειται.

1. **Δωρεαν**.

   α΄) *Octave*. Κυριως για αριθμητικους υπολογισμους. Κλωνος του *Matlab*.

   β΄) *Maxima*. Κυριως για συμβολικους υπολογισμους.

   γ΄) *Lyx*. Επεξεργαστης κειμενου για μαθηματικα κειμενα, με δυνατοτητα συμβολικων υπολογισμων.

2. **Εμπορικα**.

   α΄) *Matlab*. Κυριως για αριθμητικους υπολογισμους. Εχει ομως ενσωματωμενο το *Mupad*, ενα λογισμικο για συμβολικους υπολογισμους.

   β΄) *Maple*. Κυριως για συμβολικους υπολογισμους.

   γ΄) *Mathematica*. Κυριως για συμβολικους υπολογισμους.

   δ΄) *Scientific Workplace*. Επεξεργαστης κειμενου για μαθηματικα κειμενα, με δυνατοτητα συμβολικων υπολογισμων.

Για περισσοτερες πληροφοριες και για να αποκτησεις τα παραπανω λογισμικα, θυμησου: *το Google ειναι φιλος σου*!

Επιλογος: Ενα Σκοτεινο Σπιτι

"... Perhaps I could best describe my experience of doing mathematics in terms of entering a dark mansion. You go into the first room and it's dark, completely dark. You stumble around, bumping into the furniture. Gradually, you learn where each piece of furniture is. And finally, after six months or so, you find the light switch and turn it on. Suddenly, it's all illuminated and you can see exactly where you were. Then you enter the next dark room..."

Andrew Wiles

Ασκηση. Βρες ποιος ειναι ο *Andrew Wiles* και τι αξιοσημειωτο εχει κανει.