Ε.Μ.Π. – Σχολή Ηλεκτρολόγων ΜΜΥ
Μάθημα «Κυματική και Κβαντική Φυσική», 2021-22
2η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ – ΚΥΜΑΤΑ ΣΕ 2-3-ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ
ΑΝΑΚΛΑΣΗ – ΔΙΑΘΛΑΣΗ – ΣΥΜΒΟΛΗ - ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ

Ι. Ράπτης (ΣΕΜΦΕ) Αθήνα, 12/4/2022

Να επιστραφούν λυμένες, μέχρι 5/5/2022, οι 1, 2, 3, 4, 5. [ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι **χειρόγραφες** και να αναρτηθούν **ως ΕΝΑ ΕΝΙΑΙΟ PDF** στις «Εργασίες» του helios]

1. Μία ορθογώνια μεμβράνη με πλευρές a και b=2a, έχει επιφανειακή πυκνότητα σ, βρίσκεται υπό ισότροπη τάση Τ ανά μονάδα μήκους και έχει σταθερές και τις τέσσερις πλευρές της.
α) Βρήτε τις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης της μεμβράνης και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις ταλάντωσης $u_{mn}(x,y)$.
β) Προσδιορίστε τις εκφυλισμένες ταλαντώσεις για τις δέκα χαμηλότερες ιδιοσυχνότητες.
β) Αν b=a, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι κόμβοι εκείνων των τρόπων ταλάντωσης που αντιστοιχούν στο συνδυασμό των ιδιοσυναρτήσεων ($u_{mn} \pm u_{nm}$).

2. Τετράγωνο «ντέφι» αποτελείται από μεμβράνη διαστάσεων ($a\times a$), και συνολικής μάζας 40 gr, που είναι τεντωμένη πάνω σε ορθογώνιο αντηχείο του οποίου η τρίτη διάσταση είναι $b=a/8=5$ cm, και του οποίου η απέναντι από την μεμβράνη πλευρά είναι ανοικτή. Η μεμβράνη λειτουργεί ως ακλόνητη πλευρά, όπως και οι άλλες τέσσερις επιφάνειες διαστάσεων ($a\times b$). (α) Βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις $u_{nm.}$ που αντιστοιχούν στους Κανονικούς Τρόπους Ταλάντωσης (στάσιμα κύματα) της μεμβράνης, και δείξτε ότι ο συνδυασμός ($u_{nm} - u_{mn}$) δύο ΚΤΤ με ίδιο πλάτος, αντιστοιχεί σε μία δεσμική (ακλόνητη) ευθεία κατά μήκος μιας διαγωνίου της μεβράνης (β) Ποιός είναι ο εκφυλισμός (τιμή) κάθε κανονικού τρόπου ταλάντωσης της μεμβράνης και γιατί ; Υπάρχει εξαίρεση και ποια είναι, ή ΟΧΙ και γιατί; (γ) Θεωρήστε ότι η ταχύτητα του ήχου στον αέρα, για τις συνθήκες του πειράματος, είναι $\upsilon_{\eta\chi} = 300\,\mathrm{m/s}$, και υπολογίστε την ισότροπη δύναμη ανά μονάδα μήκους (τιμή και μονάδες), με την οποία πρέπει να τεντωθεί η μεμβράνη έτσι ώστε το στάσιμο κύμα της μεμβράνης με την 3$^{\eta}$, κατά αύξουσα τιμή, συχνότητα να είναι σε συντονισμό με τον θεμελιώδη κανονικό τρόπο ταλάντωσης του αντηχείου.

3. Θεωρήστε ότι σε χώρο άπειρης έκτασης έχει αναπτυχθεί ηλεκτρικό πεδίο της μορφής $\vec{E}(\vec{r},t) = kE_0(-y\hat{x} + x\hat{y})\cos(\omega t)$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

(α) Να υπολογίσετε την ένταση του μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t)$

(β) Να υπολογίσετε την πυκνότητα φορτίου $\rho = \rho(\vec{r},t)$ και ρεύματος $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},t)$.

(γ) Να υπολογίσετε το διάνυσμα Poynting $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ του Η/Μ κύματος, καθώς και τη μέση χρονική τιμή του, σε χρονικό διάστημα μίας περιόδου $T=2\pi/\omega$, για κάθε $\vec{r}$.

(δ-ΕΚΤΟΣ) Να δείξετε ότι τα μεγέθη $\rho = \rho(\vec{r},t)$ και $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},t)$ ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας, $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, και να εξηγήσετε, με φυσικά επιχειρήματα, πως συμβιβάζονται οι τιμές των δύο μεγεθών.

4. Συχνότητα αποκοπής σε Οπτική Ίνα. Μία οπτική ίνα (ΟΙ) από γυαλί τετραγωνικής διατομής πλευράς a, συμπεριφέρεται ως κυματοδηγός στην ορατή περιοχή του Η-Μ φάσματος. Στις δύο δευθύνσεις x και y, κάθετα στον άξονα z της ΟΙ, δημιουργούνται στάσιμα Η-Μ κύματα και οι οριακές συνθήκες επιβάλουν περιορισμούς στους (εγκάρσιους) κυματικούς αριθμούς k_x και k_y που δίδονται από τις σχέσεις: $k_x=n\pi/a$, και $k_y=m\pi/a$ όπου n,m=1,2,3,... οι τάξεις των εγκάρσιων (στασίμων) τρόπων ταλάντωσης του Η-Μ πεδίου στο εσωτερικό του κυματοδηγού.

(α) Θεωρείστε ότι η σχέση διαποράς του Η-Μ κύματος στο γυαλί δίδεται από τη σχέση $\omega^2=(c^2/n^2)k^2$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό και n=1.52 ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού, και υπολογίστε τη συχνότητα αποκοπής κάτω από την οποία δεν έχουμε διάδοση οδεύοντος κύματος κατά μήκος του άξονα z.

(β) Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της διάστασης a ώστε να έχουμε διάδοση δέσμης laser ερυθρού χρώματος (λ=800 nm).

(γ) Υπολογίστε τη φασική ταχύτητα υ_φ και την ομαδική ταχύτητα υ_g ως και δείξτε ότι $\upsilon_g\upsilon_\varphi=(c/n)^2$.

5. Ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\boldsymbol{E}}(x,y,z)=\hat{\boldsymbol{x}}\,E_0\sin\left(\omega t\right)\cos(k\,z)$$

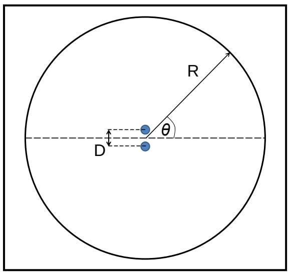
όπου E_0, ω και k είναι θετικές σταθερές, $\omega=2\pi f=2\pi/T$, $k=2\pi/\lambda$ και $c=\lambda f=\lambda/T=\omega/k$ είναι η ταχύτητα του κύματος.

(α) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο που συνοδεύει το παραπάνω ηλεκτρικό πεδίο, αγνοώντας στατικές (μη μεταβαλλόμενες με τον χρόνο) συνιστώσες του. [*Υπόδειξη:* Βρείτε πρώτα το $\partial\vec{\boldsymbol{B}}/\partial t$]

(β) Βρείτε την πυκνότητα φορτίου και την πυκνότητα ρεύματος ($\rho=\rho\left(\vec{r},t\right)$, $\vec{\boldsymbol{J}}=\vec{\boldsymbol{J}}\left(\vec{r},t\right)$)

(β) Υπολογίστε τις πυκνότητες ηλεκτρικής και μαγνητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου, για το παραπάνω ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

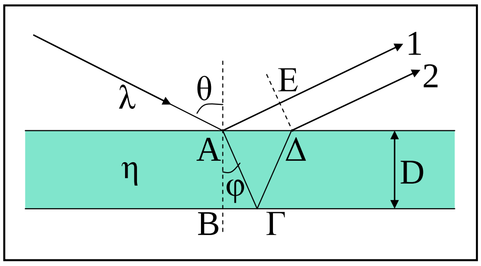
(γ) Για το παραπάνω ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, υπολογίστε τη ροή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου (διάνυσμα *Poynting*) και την αντίστοιχη μέση χρονική τιμή της (και σχολιάστε).



6. Δύο κεραίες εκπομπής σύμφωνης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, συχνότητας $f=3MHz$, είναι τοποθετημένες, στο οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση $D=100m$ μεταξύ τους, και εκπέμπουν, όσον αφορά στο οριζόντιο επίπεδο, με κυκλικά ομοιόμορφο τρόπο η κάθε μία. Μεταξύ των δύο κεραιών μπορεί να δημιουργηθεί ελεγχόμενη αρχική διαφορά φάσης $\Delta\varphi_0$.
(α) Υπολογίστε την γωνιακή κατανομή $I=I(\theta)$ της συνολικής έντασης στο οριζόντιο επίπεδο, ως συνάρτηση της γωνίας θ, σε σχέση με την μεσοκάθετο ως προς τις δύο πηγές, σε απόσταση $R>>D$, από το μέσον των δύο κεραιών, όταν η αρχική διαφορά φάσης τους είναι $\Delta\varphi_0=\pi$, και προσδιορίστε τις γωνίες μέγιστης και ελάχιστης εκπομπής.
(β) Υπολογίστε την ελάχιστη κατάλληλη διαφορά φάσης που πρέπει να εισάγει κανείς μεταξύ των δύο κεραιών ώστε, επί του οριζόντιου επιπέδου, να κατευθύνει την μέγιστη εκπεμπόμενη ισχύ κατά μήκος της μεσοκαθέτου ως προς την ευθεία που συνδέει τις δύο κεραίες. Σε αυτή την περίπτωση, σε ποια γωνία καταγράφεται το επόμενο μέγιστο εκπομπής.
[Υποδείξεις: Θεωρήστε ότι η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι $c=3\times10^8 ms^{-1}$, και κάντε τις κατάλληλες προσεγγίσεις, κατά τους υπολογισμούς, δεδομένου ότι $R>>D$]

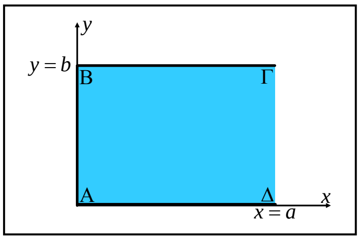
7. Πολωτές P_1, P_2, P_3 είναι τοποθετημένοι ο ένας μετά τον άλλον, έτσι ώστε οι P_1 και P_3 να έχουν κάθετα επίπεδα πόλωσης, και το επίπεδο πόλωσης του P_2 να σχηματίζει γωνία α με το επίπεδο πόλωσης του P_1. Στο σύστημα προσπίπτει φυσικά πολωμένο φώς έντασης I_o (που ισοδυναμεί με μη-πολωμένο φως, ή, λειτουργικά, με 50%+50% κάθετα πολωμένες ασύμφωνες συνιστώσες).

Υπολογίστε την ένταση του τελικά διερχόμενου κύματος ως συνάρτηση της α. Για ποιά τιμή του α μεγιστοποιείται η συνολικά διερχόμενη ένταση ;



8. Μονοχρωματικό φως μήκους κύματος λ, πέφτει σε λεπτό φιλμ πάχους D, με δείκτη διάθλασης η. α) Δείξτε ότι η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής των δύο πρώτων ανακλάσεων, από την άνω και κάτω επιφάνεια του φιλμ, είναι $2D\eta\cos\varphi = (2k-1)\lambda/2$, όπου φ η γωνία διάθλασης στο εσωτερικό του φιλμ, και $k = 1, 2, \ldots$. β) Δείξτε ότι, αν το πλακίδιο φωτιστεί με πολυχρωματικό φως, η ποσοστιαία μεταβολή του παρατηρούμενου μήκους κύματος dλ/λ, γύρω από την γωνία εξωτερικής ανάκλασης των 45^{o}, είναι ανάλογη της μεταβολής $d\theta$ της γωνίας παρατήρησης, και υπολογίστε το συντελεστή αναλογίας αν $\eta = \sqrt{2}$, (υποθέστε k=1).

9. ιδανική μεμβράνη, ομοιογενής και ισότροπη, που εκτείνεται στο επίπεδο $x - y$ έχει επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma \equiv dm/dS = \sigma\tau\alpha\theta.$. Η μεμβράνη ΑΒΓΔΑ έχει ορθογώνιο σχήμα και διαστάσεις $(a \times b)$ και είναι τεντωμένη με ισότροπη δύναμη ανά μονάδα μήκους ίση με Τ. Οι τρείς διαδοχικές



πλευρές της μεμβράνης είναι στερεωμένες ακλόνητα και η τέταρτη πλευρά (διάστασης: b) είναι ελεύθερη, όπως στο σχήμα Μικρές εγκάρσιες διαραχές της μεμβράνης από την κατάσταση ισορροπίας, κατά $z = z(x, y, t)$, ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση κύματος $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

(α) Αναζητήστε τους Κανονικούς Τρόπους Ταλάντωσης της μεμβράνης με τη μορφή $z(x, y, t) = X(x)Y(y)\sin(\omega t)$ και δείξτε ότι οι συναρτήσεις $X(x), Y(y)$ μπορεί να είναι κατάλληλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις της θέσης.

(β) Εφαρμόστε τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, σε κάθε άκρο της μεμβράνης, και υπολογίστε τις παραμέτρους των $X(x), Y(y)$, καθώς και την έκφραση που δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

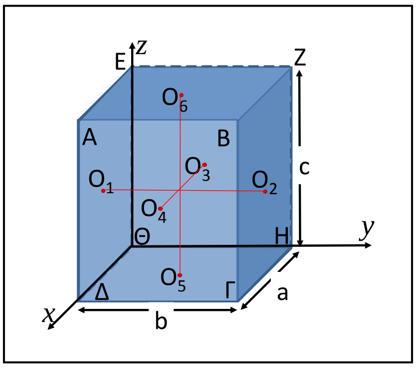
(γ) Αν $\sigma \equiv dm/dS = 40\,\mathrm{g/m^2}$, $T = 100\,\mathrm{N/m}$, και $a = 2b = 40\,\mathrm{cm}$, να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων στην μεμβράνη, η συχνότητα του «πρώτου» κανονικού τρόπου ταλάντωσης και να περιγραφεί η μορφή αυτού του τρόπου ταλάντωσης, είτε μέσω της μαθηματικής έκφρασης $f(x, y) = X(x)Y(y)$ είτε με τη βοήθεια κατάλληλου σχήματος.

10. Ορθογώνια μεμβράνη με <u>επιφανειακή πυκνότητα μάζας σ</u>, είναι παράλληλη στο επίπεδο (x, y) και καταλαμβάνει την περιοχή $(0 \le x \le a)$, $(0 \le y \le b)$, με $2a = 3b$. Η μεμβράνη <u>τείνεται ισότροπα με δύναμη ανά μονάδα μήκους ίση με T</u>, και έχει ακλόνητες τις πλευρές που είναι παράλληλες στον άξονα-x και ελεύθερες τις πλευρές που είναι παράλληλες στον άξονα-y.

(α) Να διατυπωθούν οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα σύνορα της μεμβράνης

(β) Να ευρεθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (ΚΤΤ) του συστήματος, δηλ. οι κινήσεις με ενιαία συχνότητα: $z(x, y, t) = f(x, y)\cos(\omega t)$, άρα, να βρεθεί η γενική μορφή της $f = f(x, y)$ και η γενική σχέση που δίνει τις συχνότητές τους (με βάση το ερώτημα-α).

(γ) Με βάση τις απαντήσεις των (α)-(β), να υπολογιστούν οι συχνότητες και να περιγραφούν οι γεωμετρικές παραμορφώσεις των τριών πρώτων ΚΤΤ, από την άποψη του συνδυασμού δεικτών. [Κάντε ένα ποιοτικό σκαρίφημα-κάτοψη της μεμβράνης, σημειώνοντας: (i) με διακεκομμένες γραμμές τα σημεία τα οποία μένουν ακίνητα (όταν υπάρχουν), και (ii) με τα πρόσημα «±» τις «κοιλίες» που βρίσκονται «πάνω» και «κάτω» από το επίπεδο του σχήματος αντίστοιχα, σε μία τυχαία γενική φάση της ταλάντωσης]



11. **(α)** Δωμάτιο διαστάσεων $(a\times b\times c)$ έχει την μπροστινή του πλευρά (ΑΒΓΔ) ανοικτή και τις άλλες 5 πλευρές του με ακλόνητα τοιχώματα. Το δωμάτιο βρίσκεται σε χώρο όπου η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι c=300 m/s, και η κυματική εξίσωση για την αντίστοιχη ***μεταβολή πίεσης p*** λόγω του ήχου, είναι της μορφής $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$.

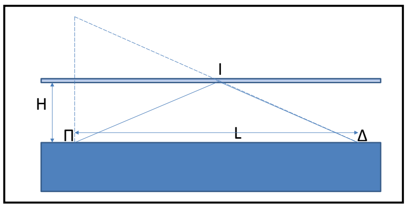
(α₁) Δείξτε ότι μέσα στο δωμάτιο αυτό μπορούν να υπάρχουν στάσιμα ηχητικά κύματα της μορφής

$$p(x,y,z,t)=A\cos(k_x x+\theta_x)\cos(k_y y+\theta_y)\cos(k_z z+\theta_z)\cos(\omega t)$$

αρκεί τα (k_x,k_y,k_z), c, ω, να ικανοποιούν μία σχέση την οποία να βρήτε.

(α₂) Αν ***στις ακλόνητες πλευρές*** η μεταβολή πίεσης είναι τέτοια ώστε η κάθετη παράγωγός της είναι $(\partial p/\partial n)=0$, ενώ ***στην ανοικτή πλευρά*** η μεταβολή πίεσης είναι $p=0$, να υπολογίσετε τη σχέση που δίνει τις συχνότητες των στάσιμων κυμάτων και να σχεδιάστε τις μορφές στάσιμων κυμάτων για τη συνάρτηση μεταβολής πίεσης p, κατά μήκος των ευθειών που συνδέουν τα κέντρα των απέναντι πλευρών $\mathrm{O}_i O_{i+1}$, $i=1,3,5$. (α3) Υπολογίστε τη θεμελιώδη συχνότητα ηχητικού συντονισμού αυτού του δωματίου, αν: a=1 m, $b=a\sqrt{3}$, c=3a.

(β) Ιδανική χορδή με μήκος L και γραμμική πυκνότητα μάζας $\rho_1(x)=\rho_0(1+ax)$, $(0\le x\le L)$, συνδέεται, στο σημείο $x=L$, με δεύτερη ιδανική χορδή πολύ μεγάλου μήκους, με σταθερή γραμμική πυκνότητα μάζας $\rho_2=4\rho_0$, και όλο το σύστημα τείνεται με τάση Τ. **(β₁)** Ποιά τιμή πρέπει να έχει η σταθερά a, ώστε να μην υπάρχει ανάκλαση στο σημείο σύνδεσης των δύο χορδών (x=L); **(β₂)** Αν στο άκρο x=0 διεγείρεται αρμονικό κύμα κυκλικής συχνότητας ω και πλάτους A_0, να βρεθούν οι συναρτήσεις που περιγράφουν το μήκος κύματος $\lambda=\lambda(x)$ και το πλάτος $A=A(x)$ ως συνάρτηση του x για $0\le x\le 2L$, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν ενεργειακές απώλειες.



12. Δέκτης ραδιοφωνικών κυμάτων λαμβάνει ταυτοχρόνως δύο σήματα. Το ένα σήμα προέρχεται κατ' ευθείαν από έναν πομπό ο οποίος απέχει 500 km. Το δεύτερο σήμα προέρχεται από το ίδιο πομπό μέσω ανάκλασής του σε τμήμα της ιονόσφαιρας το οποίο ευρίσκεται σε μέσο ύψος 200 km, από την επιφάνεια της γής. Οταν η συχνότητα του εκπεμπόμενου σήματος είναι 10 MHz, στον δέκτη παρατηρείται μία αργή αυξομείωση της έντασης με ρυθμό 6 πλήρης αυξομειώσεις σε ένα λεπτό, η οποία οφείλεται σε μία αργή μεταβολή της απόστασης της ιονόσφαιρας από την επιφάνεια της Γης. Υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα κίνησης της ιονόσφαιρας. Δεχθείτε ότι, τοπικά, η επιφάνεια της Γης είναι προσεγγιστικά επίπεδη και ότι η ιονόσφαιρα λειτουργεί, για το εκπεμπόμενο σήμα, ως ιδανικός ανακλαστήρας παράλληλος στην επιφάνειας της Γης.

13. Η ηλιακή ακτινοβολία που φτάνει στη Γη αντιστοιχεί περίπου σε ~1 kW/m^2. (α) Αντιμετωπίζοντας την ηλιακή ακτινοβολία ως ένα κλασικό Ηλεκτρομαγνητικό κύμα, να υπολογίσετε το πλάτος του E_0 του Ηλεκτρικού πεδίου (σε V/m). (β) Αντιμετωπίζοντας την ηλιακή ακτινοβολία, κβαντομηχανικά, ως μία ροή φωτονίων, να υπολογίσετε τη ροή φωτονίων, ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας, υποθέτοντας ότι η μέση ενέργεια ενός φωτονίου είναι 2 eV (πορτοκαλί χρώμα, λ ≈ 620 nm). (γ) Υποθέστε ότι ένα φωτοβολταϊκό (ΦΒ) στοιχείο εμβαδού 1m^2 απορροφά όλα τα φωτόνια που προσπίπτουν κάθετα σε αυτό, και υπολογίστε τη συνολική μεταβολή ορμής ανά μονάδα χρόνου που επιβάλλει η επιφάνεια του φωτοβολταϊκού στη ροή φωτονίων, και την πίεση την οποία υφίσταται το ΦΒ στοιχείο από την απορροφούμενη ηλιακή ακτινοβολία.

Δίδονται: ταχύτητα του φωτός στο κενό, $c \simeq 3\times10^8\, m/s$, διηλεκτρική σταθερά του κενού, $\varepsilon_0 = 8,85\times10^{-12}\,\frac{\text{Farad}}{\text{meter}}$, $\left[\frac{\text{Farad}}{\text{meter}} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}\cdot\text{meter}} = \frac{\text{C}^2}{\text{J}\cdot\text{m}} = \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}\right]$, $\mu_0 = 4\pi\,\frac{\text{Henri}}{\text{meter}}$, $\left[\frac{\text{Henri}}{\text{meter}} = \right]$

14. Ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαδίδεται στο κενό, όπου δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία ή ρεύματα ($\rho = 0$, $\vec{\boldsymbol{J}} = 0$). Το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\boldsymbol{E}}(x,y,z) = \hat{\boldsymbol{x}}\,E_0\cos(\omega t - kz) - \hat{\boldsymbol{y}}\,E_0\sin(\omega t - kz)$$

όπου E_0, ω και k είναι θετικές σταθερές, $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, $k = 2\pi/\lambda$ και $c = \lambda f = \lambda/T = \omega/k$ είναι η ταχύτητα του κύματος. (Το πεδίο αυτό αντιστοιχεί σε κυκλικά πολωμένο Η/Μ κύμα).

(α) Βρείτε το μαγνητικό πεδίο που συνοδεύει το παραπάνω ηλεκτρικό πεδίο, αγνοώντας στατικές (μη μεταβαλλόμενες με τον χρόνο) συνιστώσες του. [*Υπόδειξη:* Βρείτε πρώτα το $\partial\vec{\boldsymbol{B}}/\partial t$.]

(β) Υπολογίστε τις πυκνότητες ηλεκτρικής και μαγνητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου, για το παραπάνω ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

(γ) Για το παραπάνω ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, υπολογίστε τη ροή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου (διάνυσμα *Poynting*) και δείξετε ότι αυτή είναι ίση με την πυκνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου επί την ταχύτητα του κύματος.

15. (α) Στην εξίσωση κύματος σε 3-διαστάσεις, εκφράστε την Λαπλασιανή σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων και εφαρμόστε την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών, για την περίπτωση σφαιρικά-συμμετρικού $y(r,\theta,\varphi) = y(r)$ κύματος, όπου r: η απόσταση από το κέντρο σφαιρικής συμμετρίας. (β) Προσδιορίστε την συνάρτηση πλάτους και $A = A(r)$ του οδεύοντος κύματος, $y(r) = A(r)e^{i(kr-\omega t)}$ (γ) Λαμβάνοντας υπόψη σας ότι η ένταση του κύματος, δηλ., η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας, την οποία μεταφέρει ένα κύμα, είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του, (ή, ισοδύναμα, ανάλογη του $y^* y$, όπου y^*: ο μιγαδικός συζυγής του y, για την περίπτωση της μιγαδικής αναπαράστασης, αντίστοιχα), δείξτε ότι το πλάτος $A = A(r)$, που υπολογίστηκαν στο ερώτημα (β) είναι συνεπές με την διατήρηση της ενέργειας

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$