

ΑΣΚΗΣΗ 29Θεωρητικό Υπόβαθρο

Στο παρόν πείραμα θα μελετήσουμε τη διάδοση διαμηκών κυμάτων στα υγρά. Με τον όρο Διαμήκη Κύματα αναφερόμαστε στο είδος κυμάτων με διεύθυνση ταλάντωσης σωματιδίων παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Τα κύματα αυτά μπορούν να διαδοθούν τόσο σε στερεά, όσο και σε υγρά κι αέρια σώματα (μέσο μετάδοσης). Όταν το μέσο διάδοσης έχει διαστάσεις κατά πολύ μεγαλύτερες από το μήκος κύματος λ του κύματος, τότε ορίζουμε την ταχύτητα διάδοσής του ως εξής:

$$u_l = \sqrt{\frac{\frac{1}{k} + \frac{3}{4}G}{\rho}},$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του υγρού, k ο συντελεστής συμπιεστότητάς του και G το μέτρο διάτμησης.

Στα ρευστά σώματα, ωστόσο, ισχύει πως $G = 0$, επομένως ο παραπάνω τύπος γίνεται:

$$u = \sqrt{\frac{1}{k_{ad} \cdot \rho}},$$

όπου k_{ad} είναι ο αδιαβατικός συντελεστής συμπιεστότητας.

Αξίζει να αναφερθεί πως ο αδιαβατικός συντελεστής συμπιεστότητας εξαρτάται από την πυκνότητα ρ , αλλά και από τη θερμοκρασία. Το τελευταίο οδηγεί στο συμπέρασμα πως και η ταχύτητα εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

Συγκεκριμένα για την αιθυλική αλκοόλη, η οποία χρησιμοποιείται και στο πείραμα, ισχύει πως:

$$\frac{\Delta u}{\Delta \theta} = -3,6 \frac{m/s}{^\circ C} < 0$$

Πειραματική Μέθοδος – Πειραματική Διάταξη

Για τη διεξαγωγή του πειράματος απαιτήθηκαν τα παρακάτω υλικά:

- Ένα γυάλινο δοχείο, το οποίο γεμίσαμε με αιθυλική αλκοόλη ($\rho = 0,79 \pm 0,003 \frac{g}{cm^3}$)
- Μια γεννήτρια υπερηχητικών συχνοτήτων με υψηλή εναλλασσόμενη μεταβλητή τάση ($f = 800 \text{ kHz}$)
- Μια πηγή υπερήχων ($f = 800 \text{ kHz}$), με τροφοδοσία από τη γεννήτρια
- Ένα laser He-Ne
- Έναν φακό εστίασης
- Μια κάθετη στη δέσμη επιφάνεια (με μιλλιμετρέ χαρτί)

- Θερμόμετρο, χάρακας και μετροταινία.

Συγκεκριμένα, η δέσμη φωτός του laser προσπίπτει στον φακό εστίασης απόστασης 2cm, έπειτα στην αιθυλική αλκοόλη εντός του γυάλινου δοχείου και τελικά στην επιφάνεια με το μιλλιμετρέ χαρτί (από όπου και λαμβάνουμε τις μετρήσεις μας).

Στη συνέχεια βυθίζουμε την πηγή υπερήχων μέσα στην αιθυλική αλκοόλη. Παρατηρούμε πως στο υγρό διαδίδεται ένα κατακόρυφο υπερηχητικό κύμα, το οποίο όμως δημιουργεί ένα στάσιμο κύμα, λόγω της ανάκλασής του στον πυθμένα του γυάλινου δοχείου. Η εικόνα που λαμβάνουμε στο μιλλιμετρέ χαρτί επιβεβαιώνει τις παρατηρήσεις μας, καθώς απεικονίζεται ένα στάσιμο κύμα στον άξονα zz' . Το γεγονός αυτό οφείλεται στη συμμόρφωση του δείκτη διάθλασης με την κατανομή της πίεσης της αιθυλικής αλκοόλης, δηλαδή τη διαμόρφωσή του στον άξονα zz' . Χάρη στην απεικόνιση στάσιμου κύματος, μάλιστα, είναι δυνατόν να διακρίνουμε τις κοιλίες (δηλαδή φωτεινούς κροσσούς και σημεία μέγιστου πλάτους), αλλά και τους δεσμούς (δηλαδή σκοτεινούς κροσσούς και σημεία μηδενικού πλάτους).

Στη συνέχεια, λαμβάνουμε τις ζητούμενες μετρήσεις, για αριθμό κροσσών $n = 10$ (δεν ήταν εμφανής 11^{ος} φωτεινός κροσσός). Αξίζει να σημειωθεί πως τα σφάλματα που λαμβάνονται υπόψη ισούνται με το ήμισυ της ελάχιστης υποδιαίρεσης του οργάνου με το οποίο γίνεται η μέτρηση (στρογγυλοποιημένο στον κοντινότερο άρτιο).

Μετρούμενο Μέγεθος	Όργανο Μέτρησης	Μέτρηση	Σφάλμα
Απόσταση ακραίων φωτεινών κροσσών	Μετροταινία (cm)	27mm	1mm
Θερμοκρασία αιθανόλης	Θερμόμετρο	24°C	0,2°C
Απόσταση μεταξύ του φακού και του μέσου του δοχείου (l_1)	Χάρακας (m)	168cm	50mm
Απόσταση μεταξύ του πετάσματος και του μέσου του δοχείου (l_2)	Χάρακας (m)	556cm	50mm

Επεξεργασία Μετρήσεων

Αρχικά θα υπολογίσουμε την απόσταση μεταξύ δύο γειτονικών κροσσών. Για τον σκοπό αυτό, διαιρούμε την απόσταση των ακραίων φωτεινών κροσσών με το πλήθος των διαστημάτων μεταξύ αυτών (όμοια και για το σφάλμα) και λαμβάνουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$\text{Απόσταση 2 γειτονικών κροσσών} = 3 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$$

(όπου 0,1mm το σφάλμα που προκύπτει από τη διαίρεση $\frac{1 \text{ mm}}{10}$)

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε το $\lambda/2$ του στάσιμου υπερηχητικού κύματος. Για τον σκοπό αυτό λαμβάνουμε υπόψη πως η εικόνα στο πέτασμα είναι μεγεθυμένη κατά $\mu = \frac{(l_1 + l_2)}{l_1}$, δηλαδή:

$$\mu = \frac{(168 + 556)}{168} = 4,31$$

Για το σφάλμα του μεγέθους μ αξιοποιούμε τον τύπο διάδοσης σφάλματος:

$$\begin{aligned}
\Delta\mu &= \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial l_1} * \Delta l_1\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial l_2} * \Delta l_2\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{l_2}{l_1^2} * 50mm\right)^2 + \left(\frac{1}{l_1} * 50mm\right)^2} \\
&= 50mm * \sqrt{\left(\frac{l_2}{l_1^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{l_1}\right)^2} = 50mm * \sqrt{\frac{l_1^2 + l_2^2}{l_1^4}} = \frac{50mm}{l_1^2} * \sqrt{l_1^2 + l_2^2} \\
&= \frac{50mm}{(168cm)^2} * \sqrt{337360cm^2} = \frac{50mm}{(168cm)^2} * 580,83cm \cong 1,03mm
\end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του $\lambda/2$ διαιρούμε την απόσταση δύο γειτονικών κροσσών (που υπολογίσαμε παραπάνω) με το μ κι έτσι προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\lambda/2 = \frac{3}{4,31} \cong 0,07 \text{ mm με σφάλμα } \Delta\lambda = 0,04mm$$

Η ταχύτητα υπολογίζεται βάσει του γνωστού τύπου $u = \lambda * f$ (όπου $f = 800 \text{ kHz}$) και προκύπτει η εξής τιμή:

$$u = \lambda * f = 0,7 * 2mm * 800kHz = 1120 \text{ m/s}$$

Εφόσον $\Delta f = 0$, το σφάλμα της ταχύτητας δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\Delta u = \Delta\lambda * f = 2 * \frac{0,1}{4,31} mm * 800kHz = 0,046mm * 800kHz = 36,8 \text{ m/s}$$

Τέλος, το σχετικό σφάλμα της ταχύτητας δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\frac{\Delta u}{u} = \frac{36,8}{1120} \cong 0,033$$

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, για την αιθυλική αλκοόλη ισχύει πως $\frac{\Delta u}{\Delta\theta} = -3,6 \frac{\text{m/s}}{^\circ\text{C}}$, επομένως, ο ακριβέστερος προσδιορισμός της ταχύτητας και του σφάλματός της είναι:

$$\begin{aligned}
u &= 1120 - 4 * 3,6 = 1105,6 \text{ m/s και} \\
\Delta u &= 36,8 - (3,6 * 0,033) \cong 36,68 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι η ταχύτητα του ήχου στην αιθυλική αλκοόλη στους 24°C ισούται με $1147,6 \text{ m/s}$ παρατηρούμε πως το τελικό μας αποτέλεσμα απέχει λίγο μόνο από την τιμή αυτή. Η απόκλιση οφείλεται, κατά πάσα πιθανότητα, στην παρατήρηση 10 μόνο κροσσών (καθώς δεν ήταν εφικτή η παρατήρηση μεγαλύτερου αριθμού τους).

Εν συνεχεία, θα υπολογίσουμε τον αδιαβατικό συντελεστή συμπίεστικότητας του υγρού, καθώς και το σφάλμα του:

$$\begin{aligned}
k_{ad} &= \frac{1}{\rho * u^2} = \frac{1}{0,79 \text{ g/cm}^3 * (1105,6 \text{ m/s})^2} = \frac{1}{0,79 \text{ g/} 10^{-6} \text{ m}^3 * 1105,6^2 \text{ m}^2/\text{s}^2} \\
&\cong \frac{10^{-6}}{965657,57 \text{ g/m} * \text{s}^2} \cong 1,035 * 10^{-7} * 10^{-6} \text{ m} * \text{s}^2/\text{g} \\
&= 1,035 * 10^{-13} \text{ m} * \text{s}^2 / 10^{-3} \text{ kg} = 10,35 * 10^{-10} \text{ m} * \text{s}^2/\text{kg} \\
&= 10,35 * 10^{-10} 1/\text{Pa}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta k_{ad} &= \sqrt{\left(\frac{\partial k_{ad}}{\partial \rho} * \Delta \rho\right)^2 + \left(\frac{\partial k_{ad}}{\partial u} * \Delta u\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{(\rho * u)^2} * \Delta \rho\right)^2 + \left(-\frac{2}{\rho * u^3} * \Delta u\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(-\frac{1}{(\rho * u)^2} * 3\right)^2 + \left(-\frac{2}{\rho * u^3} * 36,68\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{\rho^4 * u^4} + \frac{2691}{\rho^2 * u^6}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{3}{\rho * u^2}\right)^2 * \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{299}{u^2}\right)} = \frac{3}{\rho * u^2} * \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{299}{u^2}} = 3 * k_{ad} * \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{299}{u^2}} \\
&= 3 * 10,35 * 10^{-10} \text{ 1/Pa} * \sqrt{\frac{1}{(0,79 * 10^{-3} * (10^{-2})^{-3} \text{ kg/m}^3)^2} + \frac{299}{1105,6^2}} \\
&= 31,05 * 10^{-1} \text{ 1/Pa} * \sqrt{\frac{10^{-6}}{0,6241} + \frac{299 * 10^{-6}}{1222,4}} \\
&= 31,05 * 10^{-10} \text{ 1/Pa} * 10^{-3} \sqrt{1,6 + 0,24} \cong 31,05 * 10^{-13} * 1,36 \text{ 1/Pa} \\
&= 42,23 * 10^{-13} \text{ 1/Pa} \cong 0,04 * 10^{-10} \text{ 1/Pa}
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι η τιμή του αδιαβατικού συντελεστή συμπίεστικότητας του υγρού μας ορίζεται μεταξύ $10,26 * 10^{-1} \text{ 1/Pa}$ και $11,46 * 10^{-1} \text{ 1/Pa}$, μπορούμε να πούμε πως η τιμή $10,35 * 10^{-1} \pm 0,04 \text{ 1/Pa}$ που υπολογίσαμε βρίσκεται εντός ορίων. Το σφάλμα, ωστόσο, είναι $\frac{1,44}{10,35} \approx 0,14$, πράγμα που σημαίνει πως οι μετρήσεις μας είναι οριακά αποδεκτές.

Τέλος, όπως είδαμε παραπάνω, στους 24°C, στους οποίους διεξήχθη το πείραμα, η ταχύτητα του ήχου στην αιθανόλη ισούται με $1105,6 \pm 36,68 \text{ m/s}$ (δηλ. 1068,92-1142,28 m/s). Η ταχύτητα του ήχου στην αιθυλική αλκοόλη στους 24°C ισούται με 1140 m/s , σύμφωνα με τη βιβλιογραφία. Συνεπώς, εύκολα παρατηρούμε πως οι υπολογισμοί μας είναι αποδεκτοί κι αξιόπιστοι, καθώς η θεωρητική τιμή της ταχύτητας συμπεριλαμβάνεται σε αυτούς. Το σφάλμα, άλλωστε, ισούται με $\frac{12}{115,6} \approx 0,01$.