Ε.Μ.Π. – Σχολή Ηλεκτρολόγων ΜΜΥ
Μάθημα «Κυματική και ΚβαντικήΦυσική», 2019-20
2η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ
ΚΥΜΑΤΑ ΣΕ 2-3-ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ – ΑΝΑΚΛΑΣΗ – ΔΙΑΘΛΑΣΗ – ΣΥΜΒΟΛΗ - ΠΕΡΙΘΛΑΣΗ

Ι. Ράπτης (ΣΕΜΦΕ) Αθήνα, 16/4/2020

Να επιστραφούν λυμένες, μέχρι 5/5/2020, οι 1, 2, 3, 4, 5, 6.
[ΠΡΟΣΟΧΗ: Οι λύσεις να είναι **χειρόγραφες** και να αναρτηθούν **ως PDF** στις «Εργασίες» του mycourses]

1. Θεωρήσετε ιδανική ομοιογενή χορδή μήκους α και γραμμικής πυκνότητας ρ, καθώς και ιδανική ομοιογενή τετραγωνική μεμβράνη πλευράς b και επιφανειακής πυκνότητας σ, αμφότερα τα ελαστικά μέσα με ακλόνητα άκρα.
(α) Αν T_μ είναι η τάση ανά μονάδα μήκους με την οποία τείνεται ομοιόμορφα η μεμβράνη, να υπολογίσετε την τάση T_χ με την οποία πρέπει να τείνεται η χορδή, προκειμένου η συχνότητα του πρώτου εγκάρσιου κανονικού τρόπου ταλάντωσης των δύο ελαστικών μέσων να είναι κοινή, $f_{\chi(1)} = f_{\mu(1,1)}$, («κούρδισμα»).
(β) Στην περίπτωση αυτή, να υπολογίσετε το πηλίκο των συχνοτήτων για τον αμέσως επόμενο («δεύτερο») κανονικό τρόπο ταλάντωσης των δύο μέσων.
(γ) Περιγράψτε, (είτε αναλυτικά, $z = z(x, y, t)$, είτε με ένα απλό σχήμα), τους δύο διαφορετικούς τρόπους κίνησης της μεμβράνης, που αντιστοιχούν σε αυτόν τον «δεύτερο» κανονικό τρόπο ταλάντωσης.
(δ) Αν a=2b=1m, και η κοινή θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_{\chi(1)} = f_{\mu(1,1)} = 50\,\mathrm{Hz}$, να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων στα δύο μέσα.
(ε) Σε ένα κυματικό μέσο, στο οποίο η ταχύτητα διάδοσης κύματος δίνεται με τη μορφή $c = \sqrt{(\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\;\sigma\kappa\lambda\eta\rho\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma)/(\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\;\alpha\delta\rho\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma)}$, με ποιά μορφή θα δίνεται η μηχανική σύνθετη (κυματική) αντίσταση του ίδιου μέσου;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $f_{\chi(1)} = f_{\mu(1,1)} \Rightarrow 2\pi f_{\chi(1)} = 2\pi f_{\mu(1,1)} \Rightarrow \omega_{\chi(1)} = \omega_{\mu(1,1)} \Rightarrow c_\chi k_1 = c_\mu k_{1,1}$,

όπου $c_\chi = \sqrt{\dfrac{T_\chi}{\rho}}, c_\mu = \sqrt{\dfrac{T_\mu}{\sigma}}$

Για χορδή με σταθερά άκρα: $k_n = n\dfrac{\pi}{a}$, εδώ $n = 1$

Για μεμβράνη με σταθερά άκρα: $k_{n,m} = \sqrt{\left(n\dfrac{\pi}{b_1}\right)^2 + \left(m\dfrac{\pi}{b_2}\right)^2}$, εδώ $n = m = 1$ και $b_1 = b_2 = b$

Άρα: $c_\chi k_1 = c_\mu k_{1,1} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{T_\chi}{\rho}}1\dfrac{\pi}{a} = \sqrt{\dfrac{T_\mu}{\sigma}}\dfrac{\pi}{b}\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{T_\chi}{\rho}\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{T_\mu}{\sigma}\dfrac{2}{b^2} \Rightarrow \boxed{T_\chi = 2T_\mu \dfrac{\rho}{\sigma}\dfrac{a^2}{b^2}}$

(β) Πηλίκο των συχνοτήτων για τον αμέσως «επόμενο» κανονικό τρόπο ταλάντωσης των δύο μέσων.

$$\frac{\omega_{x,2}}{\omega_{m,(1,2)}} = \frac{\omega_{x,2}}{\omega_{m,(2,1)}} = \frac{\sqrt{\dfrac{T_x}{\rho}}2\dfrac{\pi}{a}}{\sqrt{\dfrac{T_\mu}{\sigma}}\dfrac{\pi}{b}\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{T_\chi}{T_\mu}\frac{\sigma}{\rho}}\frac{b}{a}\frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}\frac{a}{b}\frac{b}{a}\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_{x,2}}{\omega_{m,(1,2)}} = \frac{\omega_{x,2}}{\omega_{m,(2,1)}} = 2\sqrt{\frac{2}{5}}}$$

(γ) Περιγράψτε, (είτε αναλυτικά, $z = z(x, y, t)$, είτε με ένα απλό σχήμα) τους δύο διαφορετικούς τρόπους κίνησης που αντιστοιχούν σε αυτόν τον δεύτερο κανονικό τρόπο ταλάντωσης της μεμβράνης.

(δ) Αν a=2b=1m, και η κοινή θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_{\chi(1)} = f_{\mu(1,1)} = 50\,\text{Hz}$, να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων στα δύο μέσα.

(δ_1) Από: $f_{\chi(1)} = 50\,\text{Hz} \Rightarrow \omega_{\chi(1)} = 2\pi f_{\chi(1)} = 100\pi\,\text{s}^{-2}$. Αλλά: $\omega_{\chi(1)} = c_\chi k_1 = c_\chi \left(1\dfrac{\pi}{a}\right)$

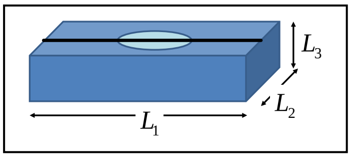
Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις: $100\pi\,\text{s}^{-2} = c_\chi \dfrac{\pi}{a} \Rightarrow c_\chi = 100a\, s^{-1} \Rightarrow \boxed{c_\chi = 100\, m/s}$

(δ_2) Από: $f_{\mu(1,1)} = 50\,\text{Hz} \Rightarrow \omega_{\mu(1,1)} = 2\pi f_{\mu(1,1)} = 50\,\text{s}^{-1}$.

Αλλά: $\omega_{\mu(1,1)} = c_\mu k_{1,1} = c_\mu \sqrt{2\left(1\dfrac{\pi}{b}\right)^2} = c_\mu \dfrac{\pi}{b}\sqrt{2} = c_\mu \dfrac{\pi}{a} 2\sqrt{2}$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις: $100\pi\,\text{s}^{-2} = c_\mu \dfrac{\pi}{a} 2\sqrt{2} \Rightarrow c_\mu = \dfrac{100a}{2\sqrt{2}}\, s^{-1} \Rightarrow \boxed{c_\mu = \dfrac{50}{\sqrt{2}}\, m/s}$

(ε) $c = \sqrt{\dfrac{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \sigma\kappa\lambda\eta\rho\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma}{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \alpha\delta\rho\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma}}$, $\qquad Z = \sqrt{(\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \sigma\kappa\lambda\eta\rho\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma)\times(\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \alpha\delta\rho\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma)}$



2. Μονόχορδο όργανο και το αντηχείο του προσομοιώνονται με κλειστό παραλληλεπίπεδο, διαστάσεων $(L_1 \times L_2 \times L_3)$, με ακλόνητα τοιχώματα, το οποίο φέρει στόμιο αμελητέων διαστάσεων στην μία πλευρά του επί της οποίας τείνεται χορδή, μήκους L_1, με γραμμική πυκνότητα μάζας ρ, και ακλόνητα άκρα. Το στόμιο επιτρέπει να διεγερθούν, από τη χορδή, στο εσωτερικό του αντηχείου 3-διάστατα ακουστικά κύματα, όταν συντονίζονται με Κανονικούς Τρόπους Ταλάντωσης του αντηχείου.

(α) Αν οι ΚΤΤ του αντηχείου αντιστοιχούν σε μεταβολές πίεσης του αέρα $\Delta P \equiv p(x,y,z,t))$ που ικανοποιούν την εξίσωση κύματος $\dfrac{1}{c_{\eta\chi}^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 p}{\partial z^2}$, δείξτε ότι συναρτήσεις της μορφής $p(x,y,z,t) = p_0 \cos(k_x x + \theta_x)\cos(k_y y + \theta_y)\cos(k_z z + \theta_z)\cos(\omega t)$ μπορούν να είναι λύσεις ΚΤΤ, και προσδιορίστε τη σχέση $\omega = \omega(k_x, k_y, k_z)$. [***<u>Ταχύτητα ήχου,</u>*** $c_{\eta\chi}$ ***: <u>γνωστή</u>***]

(β) Αν οι συνοριακές συνθήκες των ακλόνητων πλευρών απαιτούν $(\partial p/\partial n) = 0$, όπου $n = \{x,y,z\}$, κάθετα στην κάθε πλευρά, αντίστοιχα, να προσδιοριστούν οι τιμές των φάσεων $\{\theta_x, \theta_y, \theta_z\}$, οι αποδεκτές τιμές των $\{k_x, k_y, k_z\}$, και οι συχνότητες των ΚΤΤ του αντηχείου.

(γ) Να προσδιοριστεί, συναρτήσει των $\{\rho, c_{\eta\chi}, L_1, L_2, L_3\}$ η τιμή της τάσης Τ με την οποία πρέπει να «κουρδισθεί» το έγχορδο, έτσι ώστε η θεμελιώδης συχνότητα της χορδής να συμπίπτει με την συχνότητα του θεμελιώδους ΚΤΤ του αντηχείου.

[Εφαρμογή: $(L_1 \times L_2 \times L_3) = (1 \times 0.25 \times 0.1)\text{m}^3$, ρ=0,01 gr/mm, $c_{\eta\chi}$=340 m/s]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 4Α

(α) Αντικαθιστώντας την $p(x,y,z,t) = A\cos(k_x x + \theta_x)\cos(k_y y + \theta_y)\cos(k_z z + \theta_z)\cos(\omega t)$

στην εξίσωση κύματος: $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p \Rightarrow -\dfrac{\omega^2}{c^2} p = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) p \quad \Rightarrow \quad \omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$

(β) Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα του δωματίου

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x=0,y,z,t) = 0 \Rightarrow \sin(\theta_x) = 0 \quad \Rightarrow \theta_x = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x}(x=L_1,y,z,t) = 0 \Rightarrow k_x = l\frac{\pi}{L_1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x,y=0,z,t) = 0 \Rightarrow \sin(\theta_y) = 0 \quad \Rightarrow \theta_y = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y}(x,y=L_2,z,t) = 0 \Rightarrow k_x = m\frac{\pi}{L_2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x,y,z=0,t) = 0 \Rightarrow \sin(\theta_z) = 0 \quad \Rightarrow \theta_z = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z}(x,y,z=L_3,t) = 0 \Rightarrow k_z = n\frac{\pi}{L_3}$$

$$\omega_{lmn} = c\sqrt{k_{x,l}^2 + k_{y,m}^2 + k_{z,n}^2} = c\pi\sqrt{\frac{l^2}{L_1^2} + \frac{m^2}{L_2^2} + \frac{n^2}{L_3^2}}$$

(γ) Θεμελιώδης συχνότητα του αντηχείου: $\omega_{\alpha\nu\tau,111} = c_{\eta\chi}\pi\sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} + \frac{1}{L_3^2}}$

Θεμελιώδης συχνότητα της χορδής: $\omega_{\chi o\rho\delta,1} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}k_1 = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\frac{1\cdot\pi}{L_1}$

Συνθήκη συντονισμού: $\omega_{\chi o\rho\delta,1} = \omega_{\alpha\nu\tau,111} \Rightarrow \sqrt{\frac{T}{\rho}}\frac{\pi}{L_1} = c_{\eta\chi}\pi\sqrt{\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} + \frac{1}{L_3^2}}$

$$\Rightarrow \frac{T}{\rho} = c_{\eta\chi}^2 L_1^2\left(\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2} + \frac{1}{L_3^2}\right) \quad \Rightarrow T = \rho c_{\eta\chi}^2\left(1 + \frac{L_1^2}{L_2^2} + \frac{L_1^2}{L_3^2}\right)$$

3. Θεωρήστε ότι σε χώρο άπειρης έκτασης έχει αναπτυχθεί ηλεκτρικό πεδίο της μορφής $\vec{E}(\vec{r},t) = kE_0(-y\hat{x} + x\hat{y})\cos(\omega t)$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

(α) Να υπολογίσετε την ένταση του μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t)$

(β) Να υπολογίσετε την πυκνότητα φορτίου $\rho = \rho(\vec{r},t)$ και ρεύματος $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},t)$.

(γ) Να υπολογίσετε το διάνυσμα Poynting $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{E}$ του Η/Μ κύματος, καθώς και τη μέση χρονική τιμή του, σε χρονικό διάστημα μίας περιόδου T=2π/ω, για κάθε $\vec{r}$.

(δ-ΕΚΤΟΣ) Να δείξετε ότι τα μεγέθη $\rho = \rho(\vec{r},t)$ και $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},t)$ ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας, και να εξηγήσετε, με φυσικά επιχειρήματα, πως συμβιβάζονται οι τιμές των δύο μεγεθών.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α)

$$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E} = kE_0\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ -y & x & 0\end{vmatrix}\cos(\omega t) = \hat{z}2kE_0\cos(\omega t) \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \hat{z}(2kE_0/\omega)\sin(\omega t)}$$

(β) $\rho = \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0 kE_0\left[\frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial(x)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z}\right] \Rightarrow \boxed{\rho = 0}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}0 - \varepsilon_0(-k\omega E_0)(-y\hat{x} + x\hat{y})\sin(\omega t)$$

Τελικά $\boxed{\vec{j} = \varepsilon_0 k\omega E_0(-y\hat{x} + x\hat{y})\sin(\omega t)}$

(γ) Το διάνυσμα Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ -y & x & 0\\ 0 & 0 & 2/\omega\end{vmatrix}(kE_0)^2\cos(\omega t)\sin(\omega t) \Rightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{(kE_0)^2}{\mu_0}(x\hat{x} + y\hat{y})\cos(\omega t)\sin(\omega t)}$$

και $\left\langle\vec{S}\right\rangle_t = \frac{(kE_0)^2}{\mu_0}(x\hat{x} + y\hat{y})\frac{1}{T}\int_o^T\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,dt \Rightarrow \boxed{\left\langle\vec{S}\right\rangle_t = 0}$

(δ-ΕΚΤΟΣ) Τα μεγέθη $\rho = \rho\left(\vec{r}, t\right)$ και $\vec{j} = \vec{j}\left(\vec{r}, t\right)$ ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας,

Διότι $\rho = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, και $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \dfrac{\partial j_x}{\partial x} + \dfrac{\partial j_y}{\partial y} + \dfrac{\partial j_z}{\partial z} = 0$, Άρα $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Εξάλλου, παρότι $\rho = 0$, μπορεί να υπάρχει μη-μηδενικό ρεύμα και πυκνότητα ρεύματος από την κίνηση, π.χ., ετερόσημων φορτίων, με αντίθετες ταχύτητες, οπότε τα φορτία αλληοαναιρούνται, αλλά τα ρεύματα αθροίζονται, άρα συμβιβάζονται οι τιμές των δύο μεγεθών.

4. Συχνότητα αποκοπής σε Οπτική Ίνα. Μία οπτική ίνα (ΟΙ) από γυαλί τετραγωνικής διατομής πλευράς a, συμπεριφέρεται ως κυματοδηγός στην ορατή περιοχή του Η-Μ φάσματος. Στις δύο δευθύνσεις x και y, κάθετα στον άξονα z της ΟΙ, δημιουργούνται στάσιμα Η-Μ κύματα και οι οριακές συνθήκες επιβάλουν περιορισμούς στους (εγκάρσιους) κυματικούς αριθμούς k_x και k_y που δίδονται από τις σχέσεις: $k_x=n\pi/a$, και $k_y=m\pi/a$ όπου n,m=1,2,3,... οι τάξεις των εγκάρσιων (στασίμων) τρόπων ταλάντωσης του Η-Μ πεδίου στο εσωτερικό του κυματοδηγού.

(α) Θεωρείστε ότι η σχέση διαποράς του Η-Μ κύματος στο γυαλί δίδεται από τη σχέση $\omega^2=(c^2/n^2)k^2$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό και n=1.52 ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού, και υπολογίστε τη συχνότητα αποκοπής κάτω από την οποία δεν έχουμε διάδοση οδεύοντος κύματος κατά μήκος του άξονα z.

(β) Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της διάστασης a ώστε να έχουμε διάδοση δέσμης laser ερυθρού χρώματος (λ=800 nm).

(γ) Υπολογίστε τη φασική ταχύτητα υ_φ και την ομαδική ταχύτητα υ_g ως και δείξτε ότι $\upsilon_g\upsilon_\varphi=(c/n)^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Από την σχέση διασποράς που δίδεται

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\eta^2 \Rightarrow \left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) = \frac{\omega^2}{c^2}\eta^2 \Rightarrow k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\eta^2 - k_x^2 - k_y^2 \Rightarrow$$

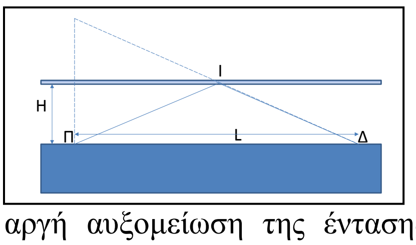
$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\eta^2 - k_x^2 - k_y^2} \Rightarrow \boxed{k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\eta^2 - \frac{\pi^2}{a^2}\left(n^2 + m^2\right)}}$$

Για να έχουμε διάδοση κατά τον άξονα-z πρέπει να είναι πραγματικό μέγεθος το k_z, επομένως, θα πρέπει να ισχύει: $\dfrac{\omega^2}{c^2}\eta^2 - \dfrac{\pi^2}{a^2}\left(n^2 + m^2\right) > 0 \Rightarrow \boxed{\omega > \dfrac{c}{\eta}\dfrac{\pi}{a}\sqrt{\left(n^2 + m^2\right)}}$

(β) $\omega > \dfrac{c}{\eta}\dfrac{\pi}{a}\sqrt{\left(n^2 + m^2\right)} \Rightarrow \boxed{a > \dfrac{\lambda}{2\eta}\sqrt{\left(n^2 + m^2\right)}} \Rightarrow \boxed{a_{\min} = \dfrac{\lambda}{2\eta}\sqrt{2}}$

(γ) Η σχέση διασποράς (από το πρώτο ερώτημα) είναι : $\omega = \dfrac{c}{\eta}\sqrt{\left(\left(n\dfrac{\pi}{a}\right)^2 + \left(mk\dfrac{\pi}{a}\right)^2 + k_z^2\right)}$

Οπότε $\upsilon_{ph} = \dfrac{\omega}{k_z}$, $\upsilon_{gr} = \dfrac{d\omega}{dk_z}$, που υπολογίζονται από την προηγούμενη σχέση



5. Δέκτης ραδιοφωνικών κυμάτων λαμβάνει ταυτοχρόνως δύο σήματα. Το ένα σήμα προέρχεται κατ' ευθείαν από έναν πομπό ο οποίος απέχει 500 km. Το δεύτερο σήμα προέρχεται από το ίδιο πομπό μέσω ανάκλασής του σε τμήμα της ιονόσφαιρας το οποίο ευρίσκεται σε ύψος 200 km, από την επιφάνεια της γής. Οταν η συχνότητα του εκπεμπόμενου σήματος είναι 10 MHz, στον δέκτη παρατηρείται μία αργή αυξομείωση της έντασης με ρυθμό 6 πλήρης αυξομειώσεις σε ένα λεπτό. Υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα κίνησης της ιονόσφαιρας. Δεχθείτε ότι η επιφάνεια της Γης είναι επίπεδη και ότι η ιονόσφαιρα λειτουργεί, για το εκπεμπόμενο σήμα, ως ιδανικός ανακλαστήρας παράλληλος στην επιφάνειας της Γης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν Π και Δ ο πομπός και ο δέκτης, αντίστοιχα, και Ι το σημείο ανάκλασης στην ιονόσφαιρα, τότε η διαφορά οπτικού δρόμου ανάμεσα στην κατ' ευθείαν διαδιδόμενη και στην εξ' ανακλάσεως είναι :

$$\Delta(\mathrm{O\Delta}) = 2\sqrt{H^2 + (L/2)^2} - L$$

Η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής των δύο διαδρομών είναι:

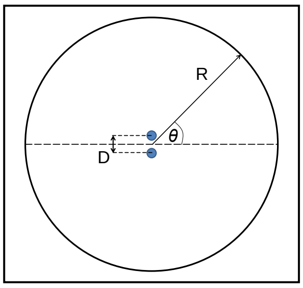
$$\Delta(\mathrm{O\Delta}) = n\lambda \Rightarrow \sqrt{(2H)^2 + L^2} - L = n\lambda$$

Αν μεταβάλλεται η απόσταση Η λόγω της κατακόρυφης συνιστώσας της κίνησης της ιονόσφαιρας, αλλάζει και η συνθήκη συμβολής

$$\frac{d}{dt}\left[\sqrt{(2H)^2 + L^2} - L\right] = \frac{dn}{dt}\lambda \Rightarrow \frac{1}{2}\left[(2H)^2 + L^2\right]^{-1/2} 2(2H)\frac{dH}{dt} = \frac{dn}{dt}\lambda \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{dn}{dt}\lambda\frac{\sqrt{(2H)^2 + L^2}}{2H}}$$

Όπου, στο δεξί σκέλος το Η μπορεί να ληφθεί περίπου σταθερό και ίσο με 200 km, ενώ το $\frac{dn}{dt} = 6\min^{-1}$, από τον ρυθμό αυξομείωσης της έντασης.

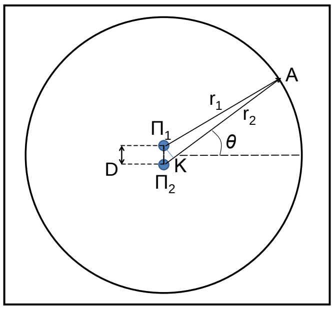


6. Δύο κεραίες εκπομπής σύμφωνης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, συχνότητας $f = 3MHz$, είναι τοποθετημένες, στο οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση $D = 100m$ μεταξύ τους, και εκπέμπουν, όσον αφορά στο οριζόντιο επίπεδο, με κυκλικά ομοιόμορφο τρόπο η κάθε μία. Μεταξύ των δύο κεραιών μπορεί να δημιουργηθεί ελεγχόμενη αρχική διαφορά φάσης $\Delta\varphi_0$. (α) Υπολογίστε την γωνιακή κατανομή $I = I(\theta)$ της συνολικής έντασης στο οριζόντιο επίπεδο, ως συνάρτηση της γωνίας θ, σε σχέση με την μεσοκάθετο ως προς τις δύο πηγές, σε απόσταση $R >> D$, από το μέσον των δύο κεραιών, όταν η αρχική διαφορά φάσης τους είναι $\Delta\varphi_0 = \pi$, και προσδιορίστε τις γωνίες μέγιστης και ελάχιστης εκπομπής.

(β) Υπολογίστε την ελάχιστη κατάλληλη διαφορά φάσης που πρέπει να εισάγει κανείς μεταξύ των δύο κεραιών ώστε, επί του οριζόντιου επιπέδου, να κατευθύνει την μέγιστη εκπεμπόμενη ισχύ κατά μήκος της μεσοκαθέτου ως προς την ευθεία που συνδέει τις δύο κεραίες. Σε αυτή την περίπτωση, σε ποια γωνία καταγράφεται το επόμενο μέγιστο εκπομπής.

[Υποδείξεις: Θεωρήστε ότι η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι $c = 3\times10^8 ms^{-1}$, και κάντε τις κατάλληλες προσεγγίσεις, κατά τους υπολογισμούς, δεδομένου ότι $R >> D$]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 3Γ



Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, συχνότητα $f = 3MHz$, ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων $c = 3\times10^8 ms^{-1}$, και τη θεμελιώδη σχέση της κυματικής $c = f\lambda$ υπολογίζουμε το μήκος κύματος της ακτινοβολίας $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8 ms^{-1}}{3\times10^6 s^{-1}} \Rightarrow \boxed{\lambda = 100m}$. Άρα $\lambda = D$.

Θεωρούμε σημείο παρατήρησης Α, το οποίο απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις r_1 και r_2, αντίστοιχα. Επειδή οι πηγές είναι σύμφωνες, στο σημείο Α αθροίζονται τα πλάτη και η ένταση υπολογίζεται ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου του συνολικού πλάτους. Επειδή οι κεραίες εκπέμπουν με κυκλικά ομοιόμορφο τρόπο, στο οριζόντιο επίπεδο, το συνολικό πλάτος του κύματος στο σημείο Α είναι

$$E_{o\lambda} = E_1(r_1) + E_2(r_2) = \frac{E_0}{f(r_1)} e^{i(kr_1 - \omega t)} + \frac{E_0}{f(r_2)} e^{i(kr_2 - \omega t + \Delta\varphi_0)},$$ όπου $f(r)$: αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση (του τύπου $\sim r^{-1}$, ή $\sim r^{-1/2}$, για σφαιρικά ή κυλινδρικά κύματα, αντίστοιχα).

Ο όρος kr στον παράγοντα φάσης των δύο οδευόντων σφαιρικών κυμάτων έχει τάξη μεγέθους $kr \approx \frac{2\pi}{\lambda} R = \frac{2\pi}{10^2 m} 10^5 m \Rightarrow kr \approx 2\pi \times 10^3$. Επομένως, οι μικρομεταβολές των r_1 και r_2, καθώς αλλάζει η γωνία θ, είναι αισθητές ως πολλαπλάσια του 2π. Αντίθετα, στους παρονομαστές των πλατών μπορεί να θεωρηθεί, με καλή προσέγγιση, ότι $f(r_1) \approx f(r_2) = f(r)$. Επίσης, με βάση την πολύ μεγάλη απόσταση R του σημείου παρατήρησης σε σχέση με την απόσταση D των δύο πηγών, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η γωνία που σχηματίζουν και οι δύο αποστάσεις r_1 και r_2 με την μεσοκάθετο στις πηγές είναι περίπου ίδια και ίση με θ. Με βάση τις προηγούμενες προσεγγίσεις, αν φέρουμε την Π_1K κάθετο στην Π_2A έχουμε $r_2 \approx r_1 + \Pi_2\mathrm{K} = r_1 + D\sin\theta$, και αυτό για τον υπολογισμό των παραγόντων φάσης μόνο, σύμφωνα με τα παραπάνω, οπότε:

$$E_{o\lambda} = \frac{E_0}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} + \frac{E_0}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)} \approx \frac{E_0}{R} e^{-i(\omega t)} \left(e^{i(kr_1)} + e^{i(kr_2 + \Delta\varphi_0)} \right) \approx \frac{E_0}{R} e^{i(kr_1 - \omega t)} \left(1 + e^{i[k(r_2 - r_1) + \Delta\varphi_0]} \right)$$

Αντικαθιστούμε την διαφορά $r_2 - r_1 \approx D\sin\theta$ και διαμορφώνουμε την παράσταση ως εξής

$$E_{o\lambda} \approx \frac{E_0}{R} e^{i(kr_1 - \omega t)} \left(1 + e^{i[kD\sin\theta + \Delta\varphi_0]} \right) = \frac{E_0}{R} e^{i\left(kr_1 + k\frac{D}{2}\sin\theta - \omega t + \Delta\varphi_0/2\right)} \left(e^{i\left[k\frac{D}{2}\sin\theta + \Delta\varphi_0/2\right]} + e^{-i\left[k\frac{D}{2}\sin\theta + \Delta\varphi_0/2\right]} \right) =$$

$$= \frac{2E_0}{R} e^{i\left(kr_1 + k\frac{D}{2}\sin\theta - \omega t + \Delta\varphi_0/2\right)} \left(\frac{e^{i\left[k\frac{D}{2}\sin\theta + \Delta\varphi_0/2\right]} + e^{-i\left[k\frac{D}{2}\sin\theta + \Delta\varphi_0/2\right]}}{2} \right)$$

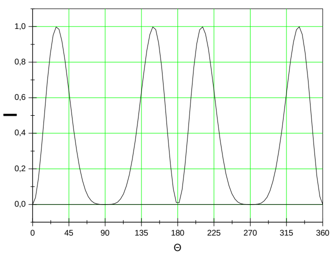
$$= \frac{2E_0}{R} e^{i\left(kr_1 + k\frac{D}{2}\sin\theta - \omega t + \Delta\varphi_0/2\right)} \cos\left(k\frac{D}{2}\sin\theta + \Delta\varphi_0/2 \right)$$

Η ένταση είναι ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου του συνολικού πεδίου

$$I \propto E^*_{o\lambda} E_{o\lambda} = \left(\frac{2E_0}{R} \right)^2 \cos^2\left(k\frac{D}{2}\sin\theta + \Delta\varphi_0/2 \right)$$

Αντικαθιστώντας όπου $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ και $D = \lambda$ παίρνουμε

$$I \propto \frac{4E_0^2}{R^2} \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} \sin\theta + \Delta\varphi_0/2 \right) \Rightarrow \boxed{I \propto \frac{4E_0^2}{R^2} \cos^2\left(\pi\sin\theta + \Delta\varphi_0/2 \right)}$$

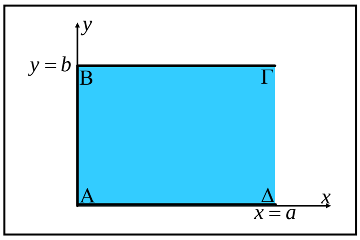


Επομένως, οι γωνίες ελάχιστης εκπομπής είναι κατά μήκος της μεσοκαθέτου στην ευθεία που ενώνει τις δύο κεραίες, $\theta=0^o$ και $\theta=180^o$, αλλά και της ευθείας που ενώνει τις δύο κεραίες, $\theta=90^o$ και $\theta=270^o$. Οι γωνίες μέγιστης εκπομπής είναι κατά μήκος των γωνιών $\theta=30^o$ και $\theta=210^o$ και $\theta=150^o$ και $\theta=330^o$

Τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα, δεδομένου ότι οι δύο κεραίες έχουν αρχική διαφορά φάσης $\Delta\varphi_0 = \pi$ και επομένως, κατά μήκος της μεσοκαθέτου, εξακολουθούν τα δύο κύματα να έχουν διαφορά φάσης-π αφού διανύουν την ίδια απόσταση. Επίσης, κατά μήκος του άξονα που ενώνει της δύο κεραίες, η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο κυμάτων είναι ίση με π (180^o) αφού η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση με ένα μήκος κύματος.

(γ) Για να κατευθύνουμε την μέγιστη εκπεμπόμενη ισχύ κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τις δύο κεραίες, πρέπει να έχουμε αρχική διαφορά φάσης $\Delta\varphi_0 = 0$, οπότε το επόμενο μέγιστο εκπομπής παρατηρείται στις 90^0, ως προς την μεσοκάθετο, αφού εκεί η διαφορά δρόμου είναι ίση ακριβώς με ένα μήκος κύματος.

7. Λεπτή ιδανική μεμβράνη, ομοιογενής και ισότροπη, που εκτείνεται στο επίπεδο $x-y$ έχει επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma \equiv dm/dS = \sigma\tau\alpha\theta.$. Η μεμβράνη ΑΒΓΔΑ έχει ορθογώνιο σχήμα και διαστάσεις $(a \times b)$ και είναι τεντωμένη με ισότροπη δύναμη ανά μονάδα μήκους ίση με Τ. Οι τρείς



διαδοχικές πλευρές της μεμβράνης είναι στερεωμένες ακλόνητα και η τέταρτη πλευρά (διάστασης: *b*) είναι ελεύθερη, όπως στο σχήμα Μικρές εγκάρσιες διαραχές της μεμβράνης από την κατάσταση ισορροπίας, κατά $z = z(x,y,t)$, ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση κύματος $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

(α) Αναζητήστε τους Κανονικούς Τρόπους Ταλάντωσης της μεμβράνης με τη μορφή $z(x,y,t) = X(x)Y(y)\sin(\omega t)$ και δείξτε ότι οι συναρτήσεις $X(x), Y(y)$ μπορεί να είναι κατάλληλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις της θέσης.

(β) Εφαρμόστε τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, σε κάθε άκρο της μεμβράνης, και υπολογίστε τις παραμέτρους των $X(x), Y(y)$, καθώς και την έκφραση που δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

(γ) Αν $\sigma \equiv dm/dS = 40\ \mathrm{g/m^2}$, $T = 100\ \mathrm{N/m}$, και $a = 2b = 40\ \mathrm{cm}$, να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων στην μεμβράνη, η συχνότητα του «πρώτου» κανονικού τρόπου ταλάντωσης και να περιγραφεί η μορφή αυτού του τρόπου ταλάντωσης, είτε μέσω της μαθηματικής έκφρασης $f(x,y) = X(x)Y(y)$ είτε με τη βοήθεια κατάλληλου σχήματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \qquad z(x,y,t) = X(x)Y(y)\sin(\omega t)$$

$$X''(x)Y(y)\sin(\omega t)+X(x)Y''(y)\sin(\omega t) = -\frac{\omega^2}{c^2}X(x)Y(y)\sin(\omega t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \left\{\frac{X''(x)}{X(x)}+=-k_x^2, \frac{Y''(y)}{Y(y)}=-k_y^2\right\}, \quad k_x^2+k_y^2=\frac{\omega^2}{c^2}$$

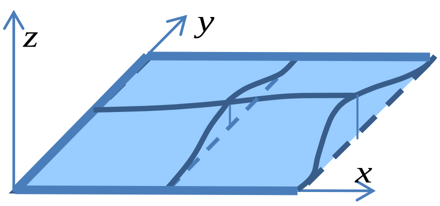
$$X(x) = A\sin(k_x x+\theta), \quad Y(y) = B\sin(k_y y+\varphi)$$

(β) Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

$$X(x=0)=0 \Rightarrow A\sin(\theta)=0 \Rightarrow \boxed{\theta=0}, \quad X'(x=a)=0 \Rightarrow Ak\cos(k_x a)=0 \Rightarrow \boxed{k_x=(2n-1)\frac{\pi}{2a}}$$

$$Y(y=0)=0 \Rightarrow B\sin(\varphi)=0 \Rightarrow \boxed{\varphi=0}, \quad Y(y=b)=0 \Rightarrow B\sin(k_y b)=0 \Rightarrow \boxed{k_y=m\frac{\pi}{b}}$$

Από (α): $$k_x^2+k_y^2=\frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \omega = c\sqrt{k_x^2+k_y^2} \Rightarrow \omega_{nm} = c\pi\sqrt{\frac{(2n-1)^2}{4a^2}+\frac{m^2}{b^2}}$$



(γ) Αν $\sigma \equiv dm/dS = 40\ \mathrm{g/m}$, $T = 100\ \mathrm{N/m}$, και $a = 2b = 40\ \mathrm{cm}$, να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων στην μεμβράνη, η συχνότητα του «πρώτου» κανονικού τρόπου ταλάντωσης

$$c=\sqrt{\frac{T}{\sigma}}=\sqrt{\frac{10^2\text{kg s}^{-2}}{4\times10^{-2}\text{kg m}^{-2}}}\Rightarrow\boxed{c=50\text{ m/s}}$$

$$\left\{a=2b,\quad \omega_{nm}=c\pi\sqrt{\frac{(2n-1)^2}{4a^2}+\frac{m^2}{b^2}}\right\}\Rightarrow$$

$$\omega_{11}=\frac{c\pi}{b}\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{1}}\Rightarrow\boxed{\omega_{11}=\frac{c\pi}{4b}\sqrt{17}=\frac{c\pi}{2a}\sqrt{17}}$$

$$\omega_{11}=\frac{50\pi\text{ ms}^{-1}}{0.8\text{ m}}\sqrt{17}\Rightarrow\boxed{\omega_{11}=\frac{500\pi\sqrt{17}}{8}\text{s}^{-1}}$$

3. Ορθογώνια μεμβράνη με <u>επιφανειακή πυκνότητα μάζας *σ*</u>, είναι παράλληλη στο επίπεδο (x,y) και καταλαμβάνει την περιοχή $(0\le x\le a)$, $(0\le y\le b)$, με $2a=3b$. Η μεμβράνη <u>τείνεται ισότροπα με δύναμη ανά μονάδα μήκους ίση με *T*</u>, και έχει ακλόνητες τις πλευρές που είναι παράλληλες στον άξονα-x και ελεύθερες τις πλευρές που είναι παράλληλες στον άξονα-y.

(α) Να διατυπωθούν οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα σύνορα της μεμβράνης

(β) Να ευρεθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (ΚΤΤ) του συστήματος, δηλ. οι κινήσεις με ενιαία συχνότητα: $z(x,y,t)=f(x,y)\cos(\omega t)$, άρα, να βρεθεί η γενική μορφή της $f=f(x,y)$ και η γενική σχέση που δίνει τις συχνότητές τους (με βάση το ερώτημα-α).

(γ) Με βάση τις απαντήσεις των (α)-(β), να υπολογιστούν οι συχνότητες και να περιγραφούν οι γεωμετρικές παραμορφώσεις των τριών πρώτων ΚΤΤ, από την άποψη του συνδυασμού δεικτών. [Κάντε ένα ποιοτικό σκαρίφημα-κάτοψη της μεμβράνης, σημειώνοντας: (i) με διακεκομμένες γραμμές τα σημεία τα οποία μένουν ακίνητα (όταν υπάρχουν), και (ii) με τα πρόσημα «±» τις «κοιλίες» που βρίσκονται «πάνω» και «κάτω» από το επίπεδο του σχήματος αντίστοιχα, σε μία τυχαία γενική φάση της ταλάντωσης]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Να διατυπωθούν οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα σύνορα της μεμβράνης

$z(x,y=0,t)=0,\qquad z(x,y=b,t)=0$: ακλόνητα άκρα

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x=0,y,t)}=0,\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x=a,y,t)}=0$: ελεύθερα άκρα

(β) Να ευρεθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (ΚΤΤ) του συστήματος, δηλ. οι κινήσεις με ενιαία συχνότητα: $z(x,y,t)=f(x,y)\cos(\omega t)$, άρα, να βρεθεί η γενική μορφή της $f=f(x,y)$ και η γενική σχέση που δίνει τις συχνότητές τους (με βάση το ερώτημα-α).

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\\ z(x,y,t)=f(x,y)\cos(\omega t)\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\cos(\omega t)=-\frac{\omega^2}{c^2}f\cos(\omega t)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{\omega^2}{c^2}f\\ f(x,y)=X(x)Y(y)\end{array}\right\}\Rightarrow X''Y+XY''=-\frac{\omega^2}{c^2}XY\Rightarrow\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=-\frac{\omega^2}{c^2}$$

Θέτουμε: $\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k_x^2$, $\quad\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-k_y^2$, $\quad$ με $\quad k_x^2+k_y^2=\omega^2/c^2$

Οι λύσεις είναι της μορφής: $X=A\cos(k_x x+\theta)$, $Y=B\sin(k_y y+\phi)$

Οριακές συνθήκες:

$z(x,y=0,t)=0 \Rightarrow \boxed{\phi=0}$ $\qquad$ $z(x,y=b,t)=0 \Rightarrow k_y b=0 \Rightarrow \boxed{k_y = m\frac{\pi}{b}}$

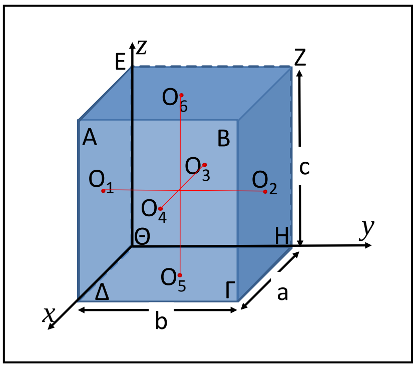
$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x=0,y,t)} = 0 \Rightarrow \sin(\theta)=0 \Rightarrow \boxed{\theta=0}$, $\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x=a,y,t)} = 0 \Rightarrow \sin(k_x a)=0 \Rightarrow \boxed{k_x = n\frac{\pi}{a}}$

$f(x,y) = X(x)Y(y) = A\cos(k_x x)\sin(k_y y)$

(γ) Με βάση τις απαντήσεις των (α)-(β), να υπολογιστούν οι συχνότητες και να περιγραφούν οι γεωμετρικές παραμορφώσεις των τριών πρώτων ΚΤΤ, από την άποψη του συνδυασμού δεικτών.

$$k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 / c^2 \Rightarrow \boxed{\omega_{nm} = c\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}}$$

[Κάντε ένα ποιοτικό σκαρίφημα-κάτοψη της μεμβράνης, σημειώνοντας: (i) με διακεκομμένες γραμμές τα σημεία τα οποία μένουν ακίνητα (όταν υπάρχουν), και (ii) με τα πρόσημα «±» τις «κοιλίες» που βρίσκονται «πάνω» και «κάτω» από το επίπεδο του σχήματος αντίστοιχα, σε μία τυχαία γενική φάση της ταλάντωσης]



8. (α) Δωμάτιο διαστάσεων $(a \times b \times c)$ έχει την μπροστινή του πλευρά (ΑΒΓΔ) ανοικτή και τις άλλες 5 πλευρές του με ακλόνητα τοιχώματα. Το δωμάτιο βρίσκεται σε χώρο όπου η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι c=300 m/s, και η κυματική εξίσωση για την αντίστοιχη ***μεταβολή πίεσης p*** λόγω του ήχου, είναι της μορφής $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$.

(α₁) Δείξτε ότι μέσα στο δωμάτιο αυτό μπορούν να υπάρχουν στάσιμα ηχητικά κύματα της μορφής

$$p(x,y,z,t) = A\cos(k_x x + \theta_x)\cos(k_y y + \theta_y)\cos(k_z z + \theta_z)\cos(\omega t)$$

αρκεί τα (k_x, k_y, k_z), c, ω, να ικανοποιούν μία σχέση την οποία να βρήτε.

(α₂) Αν ***στις ακλόνητες πλευρές*** η μεταβολή πίεσης είναι τέτοια ώστε η κάθετη παράγωγός της είναι $(\partial p/\partial n) = 0$, ενώ ***στην ανοικτή πλευρά*** η μεταβολή πίεσης είναι $p=0$, να υπολογίσετε τη σχέση που δίνει τις συχνότητες των στάσιμων κυμάτων και να σχεδιάστε τις μορφές στάσιμων κυμάτων για τη συνάρτηση μεταβολής πίεσης p, κατά μήκος των ευθειών που συνδέουν τα κέντρα των απέναντι πλευρών O_iO_{i+1}, $i=1,3,5$. (α3) Υπολογίστε τη θεμελιώδη συχνότητα ηχητικού συντονισμού αυτού του δωματίου, αν: a=1 m, $b=a\sqrt{3}$, c=3a.

(β) Ιδανική χορδή με μήκος L και γραμμική πυκνότητα μάζας $\rho_1(x) = \rho_0(1+ax)$, $(0 \le x \le L)$, συνδέεται, στο σημείο $x=L$, με δεύτερη ιδανική χορδή πολύ μεγάλου μήκους, με σταθερή γραμμική πυκνότητα μάζας $\rho_2 = 4\rho_0$, και όλο το σύστημα τείνεται με τάση Τ. **(β₁)** Ποιά τιμή πρέπει να έχει η σταθερά a, ώστε να μην υπάρχει ανάκλαση στο σημείο σύνδεσης των δύο χορδών ($x=L$); **(β₂)** Αν στο άκρο x=0 διεγείρεται αρμονικό κύμα κυκλικής συχνότητας ω και πλάτους A_0, να βρεθούν οι συναρτήσεις που περιγράφουν το μήκος κύματος $\lambda = \lambda(x)$ και το πλάτος $A = A(x)$ ως συνάρτηση του x για $0 \le x \le 2L$, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν ενεργειακές απώλειες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α1) Αντικαθιστώντας την $p(x,y,z,t) = A\cos(k_x x + \theta_x)\cos(k_y y + \theta_y)\cos(k_z z + \theta_z)\cos(\omega t)$

στην εξίσωση κύματος: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p \Rightarrow -\frac{\omega^2}{c^2} p = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)p \quad \Rightarrow \quad \omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$

(α2) Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα του δωματίου

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x=0,y,z,t)=0 \Rightarrow \sin(\theta_x)=0 \quad \Rightarrow \theta_x=0, \qquad p(x=a,y,z,t)=0 \Rightarrow k_x=(2l-1)\frac{\pi}{2a}$$
$$\frac{\partial p}{\partial x}(x,y=0,z,t)=0 \Rightarrow \sin(\theta_y)=0 \quad \Rightarrow \theta_y=0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x}(x,y=b,z,t)=0 \Rightarrow k_x=m\frac{\pi}{b}$$
$$\frac{\partial p}{\partial x}(x,y,z=0,t)=0 \Rightarrow \sin(\theta_z)=0 \quad \Rightarrow \theta_z=0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x}(x,y,z=c,t)=0 \Rightarrow k_z=n\frac{\pi}{c}$$
$$\omega_{lmn}=c\sqrt{k_{x,l}^2+k_{y,m}^2+k_{z,n}^2}=c\pi\sqrt{\frac{(2l-1)^2}{4a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}}$$

(α3) Αν a=1m, $b=a\sqrt{3}$, c=3a, η θεμελιώδης συχνότητα ηχητικού συντονισμού δίνεται από τη σχέση
$$\omega_{111}=c\pi\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=c\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}=c\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{25}{36}}=c\frac{\pi}{a}\frac{5}{6}\approx 785,4Hz$$

(β1) Για να μην υπάρχει ανάκλαση στο x=L, πρέπει να ταυτίζονται οι σύνθετες κυματικές αντιστάσεις και, επειδή τείνονται με την ίδια τάση οι δύο χορδές, πρέπει να ταυτίζονται οι γραμμικές πυκνότητες $\rho_1(x=L)=\rho_2=4\rho_0 \Rightarrow \rho_0(1+aL)=4\rho_0 \Rightarrow a=3/L$

Άρα $\rho_1=\rho_0(1+3x/L)$

(β2) Η συχνότητα ω είναι κοινή σε όλο το σύστημα (σχέση ταλαντωτή-διεγέρτη), οπότε:
$$\omega=ck=c(x)2\pi/\lambda(x) \Rightarrow \lambda(x)=2\pi c(x)/\omega=(2\pi/\omega)\sqrt{T}\Big/\sqrt{\rho(x)}=\frac{(2\pi/\omega)\sqrt{T}}{\sqrt{\rho_0(1+3x/L)}}$$

Διατήρηση ισχύος: $P_{\alpha\rho\chi}=P_1(x)=P_2 \Rightarrow A_0^2 z_0\omega^2=A_1^2(x)z_1(x)\omega^2=A_2^2 z_2\omega^2$
$$A_0^2 z_0=A_1^2(x)z_1(x) \Rightarrow A_1^2(x)=A_0^2\frac{z_0}{z_1(x)}=A_0^2\frac{\sqrt{T\rho_0}}{\sqrt{T\rho_0(1+3x/L)}}$$
$$A_1(x)=\frac{A_0}{\sqrt[4]{(1+3x/L)}}, \quad 0\le x\le L, \quad A_2(x)=\frac{A_0}{\sqrt[4]{4}}=\frac{A_0}{\sqrt{2}}, \quad L\le x\le 2L$$

9. Μια ορθογώνια μεμβράνη με πλευρές a και b=2a, έχει επιφανειακή πυκνότητα σ, βρίσκεται υπό ισότροπη τάση T ανά μονάδα μήκους και έχει σταθερές και τις τέσσερις πλευρές της.
α) Βρήτε τις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης της μεμβράνης και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις ταλάντωσης $u_{mn}(x,y)$.
β) Προσδιορίστε τις εκφυλισμένες ταλαντώσεις για τις δέκα χαμηλότερες ιδιοσυχνότητες.
β) Αν b=a, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι κόμβοι εκείνων των τρόπων ταλάντωσης που αντιστοιχούν στο συνδυασμό των ιδιοσυναρτήσεων ($u_{mn} \pm u_{nm}$).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Με βάση την σταθερότητα των τεσσάρων πλευρών της μεμβράνης, προσδιορίζονται οι διακριτές τιμές των συνιστωσών $k_{x,n}=n\frac{\pi}{a}, \quad k_{y,m}=m\frac{\pi}{b}=m\frac{\pi}{2a}$

Από τη σχέση $c=\frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega=ck=c\sqrt{k_x^2+k_y^2}=c\sqrt{n^2\frac{\pi^2}{a^2}+m^2\frac{\pi^2}{4a^2}} \Rightarrow \boxed{\omega_{nm}=\frac{c\pi}{2a}\sqrt{4n^2+m^2}}$

(β) $\omega_{nm}=\frac{c\pi}{2a}\sqrt{4n^2+m^2}=\frac{c\pi}{2a}\sqrt{(2n+m)^2-4nm}$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται: οι τάξεις (n,m) (στην πρώτη σειρά) και ο όρος $\sqrt{4n^2+m^2}$ (στη δεύτερη σειρά). Οι διαγραμμισμένες τιμές δείχνουν εκφυλισμένους τρόπους ταλάντωσης, δηλαδή., ταλαντώσεις με διαφορετικούς γεωμετρικούς σχηματισμούς στη μεμβράνη αλλά με ίδια συχνότητα.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(1,4)	(2,2)	(2,3)	(1,5)	(2,4)	(3,1)	(1,6)	(3,2)
$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{40}$

(γ) Οι γραμμικοί συνδυασμοί: $u_{nm} \pm u_{mn} = \sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(m\frac{\pi}{a}y\right) \pm \sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right)$

μελετώνται κατά μήκος των δύο διαγωνίων: $y = x$ και $y = a - x$

Κατά μήκος της πρώτης διαγωνίου $y = x$ έχουμε:

$u_{nm} \pm u_{mn} = \sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right) \pm \sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)$, οποίος μηδενίζεται για το πρόσημο (-)

Κατά μήκος της δεύτερης διαγωνίου $y = a - x$ έχουμε:

$$u_{nm} \pm u_{mn} = \sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(m\frac{\pi}{a}(a-x)\right) \pm \sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{a}(a-x)\right) =$$

$$= \sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(m\pi - m\frac{\pi}{a}x\right) \pm \sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\pi - n\frac{\pi}{a}x\right) =$$

$$= \sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)(-1)^{m-1}\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right) \pm \sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)(-1)^{n-1}\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right) =$$

$$= (-1)^{m-1}\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right) \pm (-1)^{n-1}\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{u_{nm} \pm u_{mn}\left((-1)^{m-1} \pm (-1)^{n-1}\right)\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)}$$

ο οποίος μηδενίζεται για το πρόσημο (-), όταν (*n*,*m*) άρτιοι, ή (*nm*) περιττοί
για το πρόσημο (+), όταν n: άρτιος και m: περιττός, ή, αντίστροφα.

10. (α) Στην εξίσωση κύματος σε 2- και 3-διαστάσεις, εκφράστε την Λαπλασιανή σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, για κάθε μία περίπτωση, και εφαρμόστε την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών, για την περίπτωση κυλινδρικά-συμμετρικού $y(r_\perp,\theta,\varphi) = y(r_\perp)$ και σφαιρικά-συμμετρικού $y(r,\theta,\varphi) = y(r)$ κύματος, αντίστοιχα. Όπου, $r_\perp$: η κάθετη απόσταση από τον άξονα κυλινδρικής συμμετρίας και r: η απόσταση από τε κέντρο σφαιρικής συμμετρίας, αντίστοιχα. (β) Προσδιορίστε την συνάρτηση πλάτους $A = A(r_\perp)$ και $A = A(r)$ του οδεύοντος κύματος, $y(r_\perp) = A(r_\perp)e^{i(kr_\perp - \omega t)}$ και $y(r) = A(r)e^{i(kr-\omega t)}$, για τις δύο περιπτώσεις, αντίστοιχα. (γ) Λαμβάνοντας υπόψη σας ότι η ένταση του κύματος, δηλ., η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας, την οποία μεταφέρει ένα κύμα, είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του, (ή, ισοδύναμα, ανάλογη του y^*y, όπου y^*: ο μιγαδικός συζυγής του y, για την περίπτωση της μιγαδικής αναπαράστασης, αντίστοιχα), δείξτε ότι τα πλάτη $A = A(r_\perp)$ και $A = A(r)$, που υπολογίστηκαν στο ερώτημα (β) είναι συνεπή με την διατήρηση της ενέργειας

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}\left(r_\perp\frac{\partial f}{\partial r_\perp}\right) + \frac{1}{r_\perp^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},\quad \nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Στην περίπτωση σφαιρικής συμμετρίας, ένα σφαιρικό οδεύον κύμα περιγράφεται από μία έκφραση της μορφής $y(r,t) = f(r)e^{i(kr-\omega t)}$, οπότε, η αντικατάστασή του στην εξίσωση κύματος δίνει

$$\nabla^2 y = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow e^{-i\omega t}\nabla^2\left(f(r)e^{ikr}\right) = \frac{-\omega^2}{c^2}e^{-i\omega t}f(r)e^{i(kr)} \Rightarrow \nabla^2\left(f(r)e^{ikr}\right) = \frac{-\omega^2}{c^2}f(r)e^{i(kr)},$$

οπότε, ορίζοντας ως $k^2 \equiv \left(\omega / c\right)^2$, έχουμε $\qquad \nabla^2\left(f(r)e^{ikr}\right) + k^2 f(r)e^{i(kr)} = 0$

Αντικαθιστώντας την Λαπλασιανή σε σφαιρικές συντεταγμένες, και λαμβάνοντας υπόψη μας ότι οι γωνιακές παράγωγοι $\dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}$ είναι μηδέν λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, έχουμε:

$$\nabla^2\left(f(r)e^{ikr}\right) + k^2 f(r)e^{i(kr)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)\left(f(r)e^{ikr}\right) + k^2 f(r)e^{i(kr)} = 0 \qquad (1)$$

(β) Μετασχηματίζουμε το ακτινικό κομμάτι της Λαπλασιανής

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial\left(r^2\right)}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right] = \frac{1}{r^2}\left[2r\frac{\partial F}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right] = \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \qquad (2)$$

και αντικαθιστούμε όπου $F = f(r)e^{i(kr)}$ για να υπολογίσουμε τους δύο όρους

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(f(r)e^{ikr}\right) = \frac{\partial f}{\partial r}e^{ikr} + (ik)\, f(r)e^{ikr} = \left[\frac{\partial f}{\partial r} + (ik)\, f(r)\right]e^{ikr} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(f(r)e^{ikr}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial r} + (ik)\, f(r)\right]e^{ikr}\right) = e^{ikr}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial r} + (ik)\, f(r)\right]\right) + (ik)\left[\frac{\partial f}{\partial r} + (ik)\, f(r)\right]e^{ikr} =$$

$$= e^{ikr}\left(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + (ik)\frac{\partial f}{\partial r}\right]\right) + (ik)\left[\frac{\partial f}{\partial r} + (ik)\, f(r)\right]e^{ikr} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2(ik)\frac{\partial f}{\partial r} - k^2 f\right]e^{ikr}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(f(r)e^{ikr}\right) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2(ik)\frac{\partial f}{\partial r} - k^2 f\right]e^{ikr} \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις (3), (4) στην (2) και το αποτέλεσμα στην (1) παίρνουμε:

$$\frac{2}{r}\left[\frac{\partial f}{\partial r} + (ik)\, f(r)\right]e^{ikr} + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + 2(ik)\frac{\partial f}{\partial r} - k^2 f\right]e^{ikr} + k^2 f e^{i(kr)} = 0 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + 2ik\left(\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\, f(r)\right)\right]e^{ikr} = 0$$

Απαιτώντας να μηδενίζεται και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της τελευταίας παράστασης, έχουμε:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad (5a), \qquad \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\, f(r) = 0 \quad (5\beta)$$

Ολοκληρώνουμε την (5α), (χρησιμοποιώντας, αντίστροφα την (2)), και παίρνουμε:

$$(5a) \rightarrow \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow r^2\frac{\partial f}{\partial r} = C_1$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{C_1}{r^2} \Rightarrow f = \int \frac{C_1}{r^2}dr \Rightarrow f = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

Αντικαθιστούμε την τελευταία σχέση στην (5β) και παίρνουμε:

$$(5\beta) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\, f(r) = 0 \Rightarrow \frac{C_1}{r^2} - \frac{C_1}{r^2} + \frac{C_2}{r} = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow \boxed{f(r) = \frac{C}{r}}$$

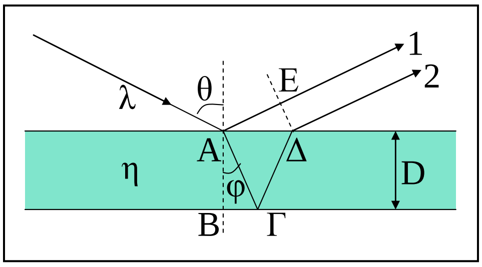
Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε για την περίπτωση κυλινδρικής συμμετρίας

(γ) Αν λάβουμε υπόψη μας ότι η ένταση του κύματος, (ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας) είναι ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου του πλάτους, τότε, για λόγους διατήρησης της ενέργειας, θα πρέπει η ισχύς που διαρρέει κάθε κλειστή επιφάνεια με την συμμετρία του συστήματος να είναι η ίδια (ανεξάρτητη από την έκταση της κλειστής επιφάνειας)

Στην περίπτωση της σφαιρικής συμμετρίας θα πρέπει

$P = \left(y^* y\right)4\pi r^2 = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow f^2 4\pi r^2 = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \boxed{f = \frac{C}{r}}$

Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε για την περίπτωση κυλινδρικής συμμετρίας



11. Μονοχρωματικό φως μήκους κύματος λ, πέφτει σε λεπτό φιλμ πάχους D, με δείκτη διάθλασης η. α) Δείξτε ότι η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής των δύο πρώτων ανακλάσεων, από την άνω και κάτω επιφάνεια του φιλμ, είναι $2D\eta\cos\varphi = (2k-1)\lambda/2$, όπου φ η γωνία διάθλασης στο εσωτερικό του φιλμ, και $k = 1, 2, \ldots$. β) Δείξτε ότι, αν το πλακίδιο φωτιστεί με πολυχρωματικό φως, η ποσοστιαία μεταβολή του παρατηρούμενου μήκους κύματος dλ/λ, γύρω από την γωνία εξωτερικής ανάκλασης των 45^o, είναι ανάλογη της μεταβολής $d\theta$ της γωνίας παρατήρησης, και υπολογίστε το συντελεστή αναλογίας αν $\eta = \sqrt{2}$, (υποθέστε k=1).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Κατά την ανάκλαση των ακτίνων 1 και 2, η μεν 1 υφίσταται μία στιγμιαία μεταβολή φάσης κατά π, λόγω ανάκλασης σε οπτικά πυκνότερο μέσο, ενώ η 2 δεν υφίσταται ανάλογη μεταβολή φάσης, επειδή ανακλάται σε οπτικά αραιότερο μέσο. Αυτή η επιπλέον διαφορά φάσης ισοδυναμεί με διαφορά οπτικού δρόμου κατά λ/2, οπότε η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής των ακτίνων 1 και 2 είναι :

«διαφορά οπτικού δρόμου» = «περιττά πολλαπλάσια μισού μήκους κύματος».

Η διαφορά οπτικού δρόμου Δ(ΟΔ) των δύο ακτίνων είναι:

$$\eta(\mathrm{A\Gamma} + \Gamma\Delta) - \mathrm{AE} = 2\eta\frac{D}{\cos\varphi} - \mathrm{AE} = \eta\frac{2D}{\cos\varphi} - \mathrm{A}\Delta\sin\theta$$

$$= \eta\frac{2D}{\cos\varphi} - 2\mathrm{B\Gamma}\sin\theta = \eta\frac{2D}{\cos\varphi} - 2D\tan\varphi\sin\theta$$

Αλλά, από το νόμο του Snell έχουμε $\sin\theta = \eta\sin\varphi$, οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\Delta(\mathrm{O}\Delta) = \eta\frac{2D}{\cos\varphi} - 2D\eta\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} \Rightarrow \Delta(\mathrm{O}\Delta) = \frac{2D\eta\left(1-\sin^2\varphi\right)}{\cos\varphi} \Rightarrow \Delta(\mathrm{O}\Delta) = 2D\eta\cos\varphi,$$

και η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής γίνεται $\boxed{2D\eta\cos\varphi = (2k-1)\frac{\lambda}{2}}$

(β) $k = 1 \Rightarrow 2D\eta\cos\varphi = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2D\eta\cos\varphi \Rightarrow d\lambda = -2D\eta\sin\varphi d\varphi \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}d\varphi$

Αλλά, αν $\eta = \sqrt{2}$ και $\theta = 45^o \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε

$$\sin\theta = \eta\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sin\theta}{\eta} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2}, \text{ και } \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Αντικαθιστώντας στην dλ/λ, έχουμε : $\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}d\varphi = -\frac{d\varphi}{\sqrt{3}}$

Από νόμο Snell $\sin\theta = \eta\sin\varphi \Rightarrow \cos\theta d\theta = \eta\cos\varphi d\varphi \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}d\theta = \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{d\theta}{\sqrt{3}}$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε $\boxed{\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{3}d\theta}$

12. Χορδή, συνολικού μήκους L, αποτελείται από δύο τμήματα μήκους L_1=3L/4 και L_2=L/4, με γραμμικές πυκνότητες ρ_1 και ρ_2, αντίστοιχα, που συνδέονται μεταξύ τους με σημειακή μάζα m. Η χορδή τείνεται με τάση Τ μεταξύ δύο σταθερών σημείων.
(α) Βρείτε τους Κ.Τ.Τ. του συστήματος, στην περίπτωση που $\rho_2=9\rho_1$.
(β) Τι γίνεται στην περίπτωση $\rho_1=\rho_2$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Στην περίπτωση διαφορετικής πυκνότητας, οι Κανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης των δύο τμημάτων θα περιγράφονται από τις συναρτήσεις $y_{1,2}(x,t) = f_{1,2}(x)\cos(\omega t+\varphi)$,

που θα ικανοποιούν την αντίστοιχη εξίσωση κύματος : $\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c_{1,2}^2}\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}$, οπότε :

$\dfrac{d^2 f_1}{dx^2} + \left(\dfrac{\omega}{c_1}\right)^2 f_1 = 0$, και όμοια $\dfrac{d^2 f_2}{dx^2} + \left(\dfrac{\omega}{c_2}\right)^2 f_2 = 0$, όπου $c_2 = \sqrt{\dfrac{T}{\rho_2}} = \sqrt{\dfrac{T}{9\rho_1}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{T}{\rho_1}} = \dfrac{c_1}{3}$

$c_2 = c_1/3, \qquad c_{1,2} = f\lambda_{1,2} \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_1/3 \Rightarrow k_2 = 3k_1$

$f_1(x) = A_1\sin(k_1x+\theta_1)$, και $f_2(x) = A_2\sin(k_2x+\theta_2)$

Συνοριακές συνθήκες στα άκρα:
$f_1(x=0)=0 \Rightarrow \sin(\theta_1)=0 \Rightarrow \theta_1 = 0$, $f_2(x=L)=0 \Rightarrow \sin(k_2L+\theta_2)=0 \Rightarrow \theta_2 = -k_2L$
Επομένως: $f_1(x) = A\sin(k_1x)$, και $f_2(x) = A_2\sin(k_2[x-L])$
Συνοριακές συνθήκες στο σημείο σύνδεσης:
(i) $f_1(x=3L/4) = f_2(x=3L/4) \Rightarrow A\sin\left(k_1\dfrac{3L}{4}\right) = B\sin\left(-k_2\dfrac{L}{4}\right)$, όπου $k_2 = 3k_1$, οπότε,

$$A_1\sin\left(k_1\frac{3L}{4}\right) = A_2\sin\left(-k_2\frac{L}{4}\right) = -A_2\sin\left(3k_1\frac{L}{4}\right)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτουν δύο ενδεχόμενα:
είτε $\boxed{A_1 = -A_2}$, (1α)
είτε, $\sin\left(k_1\dfrac{3L}{4}\right) = 0 \Rightarrow k_1\dfrac{3L}{4} = n\pi \Rightarrow \boxed{k_{1,n} = n\dfrac{4\pi}{3L}}$ (1β)

(ii) Δυναμική της σημειακής μάζας σύνδεσης: $m\left.\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}\right|_{x=3L/4} = T\left(\dfrac{\partial y_2}{\partial x} - \dfrac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=3L/4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\omega^2 mA_1\sin\left(k_1\frac{3L}{4}\right)\cos(\omega t+\varphi) = T\left(A_2k_2\cos\left(k_2\left(\frac{3L}{4}-L\right)\right) - A_1k_1\cos\left(k_1\frac{3L}{4}\right)\right)\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\Rightarrow -\omega^2 mA_1\sin\left(k_1\frac{3L}{4}\right) = T\left(A_2k_2\cos\left(k_2\left(\frac{3L}{4}-L\right)\right) - A_1k_1\cos\left(k_1\frac{3L}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow -\omega^2 mA_1\sin\left(k_1\frac{3L}{4}\right) = T\left(A_2 3k_1\cos\left(-3k_1\frac{L}{4}\right) - A_1k_1\cos\left(k_1\frac{3L}{4}\right)\right)$$

$$\Rightarrow -\omega^2 mA_1\sin\left(k_1\frac{3L}{4}\right) = T\left(3A_2 - A_1\right)k_1\cos\left(k_1\frac{3L}{4}\right), \qquad (2)$$

Η σχέση (2) πρέπει να συναληθεύει είτε με την (1α) είτε με την (1β).

(I) Στην περίπτωση που ισχύουν η (1α) και (2), έχουμε:

$$\{A_1 = -A_2\} \quad \& \quad \left\{-\omega^2 mA_1\sin\left(k_1\frac{3L}{4}\right) = T\left(3A_2 - A_1\right)k_1\cos\left(k_1\frac{3L}{4}\right)\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -c_1^2 k_1^2 m A_1 \sin\left(k_1 \frac{3L}{4}\right) = -4TA_1 k_1 \cos\left(k_1 \frac{3L}{4}\right) \Rightarrow \boxed{\tan\left(k_1 \frac{3L}{4}\right) = \frac{4T}{mc_1^2 k_1} \quad \& \quad A_1 = -A_2} \qquad (3\alpha)$$

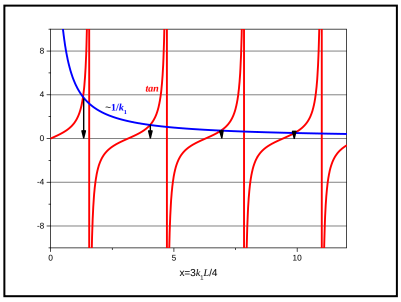
(II) Στην περίπτωση που ισχύουν η (1β) και (2), έχουμε:

$$\left\{\sin\left(k_1 \frac{3L}{4}\right) = 0 \Rightarrow k_{1,n} = n\frac{4\pi}{3L}\right\} \quad \& \quad \left\{-\omega^2 m A_1 \sin\left(k_1 \frac{3L}{4}\right) = T\left(3A_2 - A_1\right) k_1 \cos\left(k_1 \frac{3L}{4}\right)\right\} \Rightarrow$$

$$0 = \pm T\left(3A_2 - A_1\right) \Rightarrow \boxed{A_2 = A_1/3 \quad \& \quad k_{1,n} = n\frac{4\pi}{3L}} \qquad (3\beta)$$

Επομένως, έχουμε δύο οικογένειες κανονικών τρόπων ταλάντωσης. Για την κάθε οικογένεια κανονικών τρόπων ταλάντωσης, το κυματάνυσμα και οι σχέσεις πλατών δίνονται είτε από τις σχέσεις (3α), είτε από τις σχέσεις (3β).

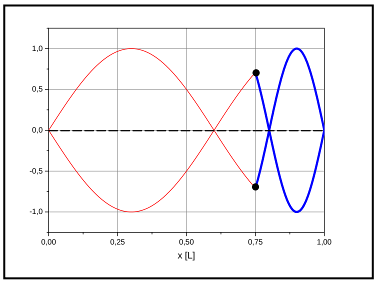
(I): Πρώτη οικογένεια Κ.Τ.Τ., σχέσεις (3α) $\boxed{\tan\left(k_1 \frac{3L}{4}\right) = \frac{4T}{mc_1^2 k_1} \quad \& \quad A_1 = -A_2}$,



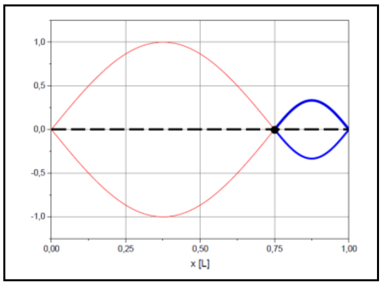
Τα $k_{1,m}$ προσδιορίζονται από την αριθμητική επίλυση της τελευταίας εξίσωσης, ή από το διαγραμματικό προσδιορισμό των ριζών της, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Διαπιστώνουμε ότι οι ανώτερης τάξης ΚΤΤ πλησιάζουν όλο και πιό πολύ στις τιμές του ορίσματος $3k_1L/4 = n\pi$, που μηδενίζουν την συνάρτηση $\tan\left(3k_1L/4\right)$, δηλ.,

$$\frac{3k_1L}{4} = m\pi \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{1,m}} = m\frac{2}{3L} \Rightarrow \frac{3L}{4} = m\frac{\lambda_{1,m}}{2},$$

που σημαίνει οτι τα πρώτα ¾ του μήκος L καλύπτονται από ακέραια πολλαπλάσια του αντίστοιχου μισού μήκους κύματος του αντίστοιχου ΚΤΤ (και όμοια για το τελευταίο $L/4$).



Γενικά, στους χαμηλότερης τάξης ΚΤΤ, τα δύο τμήματα της χορδής δεν καλύπτονται από ακέραια πολλαπλάσια του αντίστοιχου μισού μήκους κύματος του αντίστοιχου ΚΤΤ. Ένα τέτοιο παράδειγμα παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα, όπου φαίνεται ότι ο συγκεκριμένος τρόπος ταλάντωσης είναι συνυφασμένος με έντονη ασυνέχεια της κλίσης των δύο τμημάτων της χορδής στο σημείο σύνδεσης. Αυτή η ασυνέχεια κλίσης εξασφαλίζει την επιταχύνουσα δύναμης για την μάζα-σύνδεσης. Βέβαια, οι ανώτερης τάξης ΚΤΤ, όπως φαίνεται από το προηγούμενο σχήμα, αντιστοιχούν σε κυματαριθμούς k_m, που πλησιάζουν όλο και περισότερο στις τιμές μηδενισμού της εφαπτόμενης $\tan\left(3k_1L/4\right)$. Αυτό σημαίνει ότι, στους ΚΤΤ με υψηλότερη συχνότητα, το το σημείο με τη σημειακή μάζα τείνει να γίνει, όλο και με μεγαλύτερη ακρίβεια, δεσμικό σημείο του συστήματος. Δηλαδή, στις υψηλότερες συχνότητες η σημειακή μάζα δυσκολεύεται, όλο και περισσότερο, να υπερνικήσει την αδράνεια και να κινηθεί.



(II): Δεύτερη οικογένεια Κ.Τ.Τ., σχέσεις (3β) $\boxed{A_2 = A_1/3 \quad \& \quad k_{1,n} = n\frac{4\pi}{3L}}$

Σε αυτή την περίπτωση $k_{1,n} = n\frac{4\pi}{3L} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_{1,n}} = n\frac{4\pi}{3L} \Rightarrow \frac{3L}{4} = n\frac{\lambda_{1,n}}{2}$, δηλαδή, το πρώτο τμήμα της χορδής καλύπτεται από ακέραια πολλαπλάσια του αντίστοιχου μισού μήκους κύματος, και όμοια για το δεύτερο τμήμα της χορδής. Άρα, το δεσμικό σημείο είναι κόμβος και η μάζα μένει ακίνητη σε όλους τους ΚΤΤ αυτής της οικογένειας, διότι η σχέση πλάτους και μήκους κύματος για τα δύο τμήματα της καμπύλης, εξασφαλίζει ότι η κλίση των δύο τμημάτων, στο σημείο σύνδεσης είναι ακριβώς ίδια, με αποτέλεσμα να μηδενίζεται ακριβώς η επιταχύνουσα δύναμη για όλους τους ΚΤΤ της οικογένειας-ΙΙ.

(β) Επαναλάβετε τους συλλογισμούς με τα νέα δεδομένα.