ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος «Κυματική και Κβαντική Φυσική» της Σχολής ΗΜΜΥ του ΕΜΠ

Chapter03-4

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα
2020

Φαινόμενα διασποράς

Στις προηγούμενες ενότητες αυτών των σημειώσεων, παρουσιάστηκε η τυπική κυματική εξίσωση ενός ιδανικού κυματικού μέσου, η οποία έχει τη μορφή: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, η οποία διαπιστώθηκε ότι έχει ως λύσεις και οδεύοντα και στάσιμα κύματα. Όσον αφορά τα οδεύοντα κύματα η ταχύτητά τους εξαρτάται από την εξωτερική τάση T και από τη γραμμική πυκνότητα ρ, μέσω της σχέσης $c = \sqrt{T/\rho}$ και, στην περίπτωση, π.χ., μίας αρμονικής διέγερσης, είναι ανεξάρτητη από τη συχνότητα ω της διέγερσης. Η ανεξαρτησία της ταχύτητας διάδοσης ενός αρμονικού κύματος από τη συχνότητά του (φασική ταχύτητα, $c \equiv \omega / k =$ σταθ.) είναι αποτέλεσμα της ιδανικότητας του μέσου (δηλ., της έλλειψης εσωτερικών τάσεων, δυνάμεων επαναφοράς, πέραν της τάσης T που επιβάλλεται εξωτερικά), και της επακόλουθης ιδανικότητας της διαφορικής εξίσωσης κύματος. Μία ισοδύναμη διατύπωση αυτής της ιδιότητας των ιδανικών κυματικών μέσων προκύπτει από το συνδυασμό των σχέσεων, $\omega = 2\pi f$ και $k = 2\pi / \lambda$, (όπου *f*: η συνήθης [όχι κυκλική] συχνότητα, και λ: το μήκος κύματος, ως η απόσταση που διανύει το κύμα στο χρονικό διάστημα μίας περιόδου Τ=1/*f*), από τον οποίο προκύπτει η σχέση $c = \lambda / \mathrm{T} = f\lambda$, γνωστή και ως “θεμελιώδης σχέση” της κυματικής. Τα ελαστικά μέσα και τα αντίστοιχα κύματα που ικανοποιούν τις σχέσεις $\boxed{c \equiv \omega / k = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow c = \lambda / \mathrm{T} = f\lambda}$, λέγονται ***μέσα – κύματα χωρίς διασπορά*** (non-dispersive wave media – waves). Η ονομασία προέρχεται από το γεγονός ότι, όταν ένα κύμα αποτελείται από περισσότερες συχνότητες, επειδή όλες οι συχνότητες ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα, αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην παραμορφώνεται (να μην “διασπείρεται”) το αντίστοιχο κύμα, καθώς διαδίδεται, αφού σε κάθε σημείο του ελαστικού μέσου συνυπάρχουν, ταυτόχρονα, όλες οι συχνότητες που απαρτίζουν το κύμα.

Στα περισσότερα ρεαλιστικά συστήματα διάδοσης κυμάτων (μηχανικών, ηλεκτρικών, οπτικών, υδάτινων, κ.λπ.) η κυματική εξίσωση είναι πιο σύνθετη από την τυπική κυματική εξίσωση, περιέχοντας (όπως θα δούμε στη συνέχεια) επιπλέον όρους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την παρουσία ***φαινομένων διασποράς***, δηλ., η φασική ταχύτητα διάδοσης ενός αρμονικού κύματος με συχνότητα ω να είναι συνάρτηση της συχνότητας, μέσω μίας σχέσης της μορφής $c(\omega) \equiv \omega / k(\omega)$, όπου η σχέση $k(\omega)$ προκύπτει (όπως θα δούμε, επίσης) από την αντικατάσταση του αρμονικού οδεύοντος κύματος $y(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ στη συγκεκριμένη (“μη-ιδανική”) κυματική εξίσωση. Τα φαινόμενα διασποράς έχουν ως αποτέλεσμα, όταν σε ένα σημείο ενός τέτοιου κυματικού μέσου, κάποιος “πομπός” παράγει ένα “σήμα” (που περιέχει πολλές συχνότητες), η διάδοση αυτού του σήματος προς κάποιον “δέκτη” να γίνεται με διαφορετική ταχύτητα $c(\omega)$ για κάθε συχνότητα ω. Αυτό σημαίνει ότι, κατά τη λήψη του σήματος στον δέκτη, δεν συνυπάρχουν όλες οι συχνότητες ταυτόχρονα, με αποτέλεσμα την παραμόρφωση του λαμβανόμενου σήματος.

Στη συνέχεια αυτής της ενότητας, αφού παρουσιαστούν παραδείγματα κυματικών μέσων με διασπορά, και παραχθούν οι κυματικές εξισώσεις που αντιστοιχούν σε αυτά, θα παραχθούν, επίσης, και οι ***σχέσεις διασποράς***, με τη μορφή $k = k(\omega)$, ή, ισοδύναμα, $\omega = \omega(k)$, ή και $c(\omega) \equiv \omega / k(\omega)$. Στη συνέχεια, αναλύοντας την συμπεριφορά μίας ***κυματο-ομάδας***, που αποτελείται από το γραμμικό συνδυασμό τέτοιων συχνοτήτων, θα ορισθεί και η ***ταχύτητα ομάδας*** ενός κύματος που διαδιδεται μέσα σε ένα μέσο με διασπορά.

Κυματική εξίσωση με διασπορά σε χορδή με τάση επαναφοράς

Θεωρούμε μία χορδή η οποία έχει μία (εσωτερική) τάση να διατηρεί το ευθύγραμμο σχήμα της (π.χ., μία χορδή κιθάρας), και στην οποία εφαρμόζουμε επιπλέον μία εξωτερική τάση T.

Η εσωτερική τάση της χορδής να διατηρεί το ευθύγραμμο σχήμα της μπορεί να περιγραφεί με την απόδοση στη χορδή μίας ***σκληρότητας ανά μονάδα μήκους***, $\sigma \equiv ds/dx$, οπότε όταν ένα τμήμα της χορδής $(x, x+dx)$ μετατοπίζεται κατά y από την ευθύγραμμη κατάσταση ισορροπίας της, αισθάνεται δύναμη επαναφοράς $-(ds)y = -\sigma y dx$, το οποίο προστίθεται στη δύναμη επαναφοράς $(x, x+dx)$ λόγω της εξωτερικής τάσης, το οποίο υπολογίστηκε στην περίπτωση της ιδανικής μορφής. Επομένως, η εξίσωση κίνησης του τμήματος $(x, x+dx)$ της χορδής γράφεται

$$(\rho dx)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx - \sigma y dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \sigma y}$$

Αυτή η κυματική διαφέρει από την κυματική εξίσωση της ιδανικής χορδής, και αυτό έχει επίπτωση και στη σχέση $\omega = \omega(k)$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι ενα αρμονικό κύμα $y(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ ταξιδεύει κατά μήκος της χορδής, αντικαθιστώντας το στην ανωτέρω κυματική εξίσωση, προκύπτει $-\omega^2 \rho y = -k^2 T y - \sigma y \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = k^2(T/\rho) + (\sigma/\rho)$

Αν διατηρήσουμε το συμβολισμό $c^2 = T/\rho$ και ορίσουμε $\omega_s^2 = \sigma/\rho$, τότε έχουμε: $\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_s^2 \Rightarrow k = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_s^2}}{c}$, όπου η ταχύτητα φάσης δεν είναι πλέον το c.

Η ταχύτητα φάσης είναι η $\upsilon_{ph} = \dfrac{\omega}{k} \Rightarrow \boxed{\upsilon_{ph} = c\dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_s^2}}}$. Η σχέση αυτή δηλώνει ότι η ταχύτητα φάσης, στην μη-ιδανική χορδή για την οποία θεωρήθηκε ότι υπάρχει μία σκληρότητα ανά μονάδα μάζας, εξαρτάται από τη συχνότητα. Επιπλέον, για συχνότητες $\omega < \omega_s$, προκύπτει φανταστική ταχύτητα φάσης, αποτέλεσμα που σημαίνει ότι αυτές οι συχνότητες δεν διαδίδονται στη χορδή. Πράγματι, για αυτή την περιοχή συχνοτήτων $\omega < \omega_s$ προκύπτει $k = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_s^2}}{c} = i\dfrac{\sqrt{\omega_s^2 - \omega^2}}{c} = i\kappa$, οπότε, το «οδεύον» κύμα γράφεται

$$y(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)} = Ae^{i(i\kappa x - \omega t)} = Ae^{-\kappa x - i\omega t} \Rightarrow \boxed{y = \left(Ae^{-\kappa x}\right)e^{-i\omega t}},$$

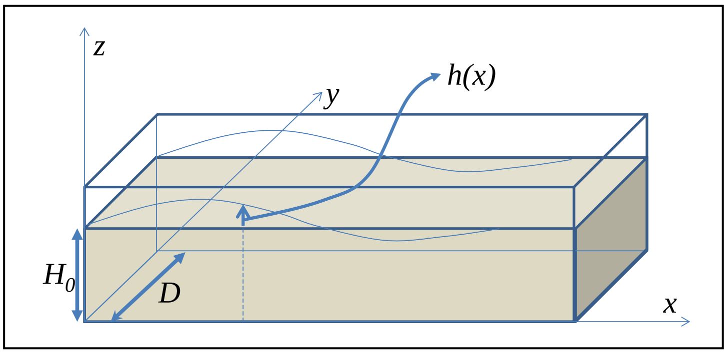
Δηλαδή, γίνεται ένα κύμα εκθετικά μειούμενου πλάτους. Μάλιστα, ο παράγοντας εκθετικής μείωσης είναι τόσο μεγαλύτερος όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά $\left(\omega_s^2 - \omega^2\right)$,

Στην περίπτωση μη-ιδανικής (σκληρής) χορδής (π.χ., χορδής πιάνου) με εσωτερική ***ροπή επαναφοράς ανά μονάδα μήκους*** η οποία είναι ανάλογη της καμπύλωσης που υφίσταται η χορδή, αποδεικνύεται ότι η αντίστοιχη εξίσωση κίνησης γίνεται $\boxed{\rho\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \tau\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4}}$, με $\tau = ESK^2$, όπου E: μέτρο του Young, S: η διατομή της χορδής, και K: η ακτίνα αδράνειας, που, για κυλινδρική χορδή ακτίνας R, είναι $K=R/2$,

οπότε, αντικαθιστώντας σε αυτή την έκφραση ένα αρμονικό οδεύον κύμα $y(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, προκύπτει η σχέση διασποράς $\omega^2 = (T/\rho)k^2 + (\tau/\rho)k^4$.

Υδάτινα κύματα μικρού και μεγάλου βάθους
(σε σύγκριση με το μήκος κύματος).

Α. Κύματα σε ρηχό νερό (μήκος κύματος: $\lambda >> H_0$: μέσο βάθος νερού)



Θεωρούμε υδάτινο κανάλι, το οποίο εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x, έχει εύρος D (κατά μήκος του άξονα y), και στο οποίο η ελεύθερη επιφάνεια του νερού βρίσκεται σε ύψος H_0 από τον πυθμένα του, σε κατάσταση ηρεμίας.

Στην κατάσταση ηρεμίας του νερού, η μάζα που βρίσκεται σε κάθε διαφορική φέτα η οποία βρίσκεται στο χώρο ανάμεσα στα κατακόρυφα επίπεδα που διέρχονται από τις θέσεις x και $x+dx$, ισορροπεί καθώς τα κατακόρυφα επίπεδα που ορίζουν την διαφορική φέτα υφίστανται πιέσεις οι οποίες είναι μεν συναρτήσεις του ύψους z, αλλά αλληλοαναιρούνται ακριβώς. Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού προκαλούμε μία διαταραχή, η οποία έχει μήκος κύματος πολύ μεγαλύτερο από το βάθος ηρεμίας του νερού στο κανάλι.

Έστω $H(x) = H_0 + h(x)$ και $H(x+dx) = H_0 + h(x+dx)$ οι αποστάσεις της ελεύθερης επιφάνειας από τον πυθμένα, που αντιστοιχούν στις θέσεις x και $x+dx$, όταν στο κανάλι διαδίδεται η διαταραχή. Τώρα, σε όλα τα σημεία του κατακόρυφου επιπέδου (του παράλληλου στο επίπεδο $y-z$) που διέρχεται από τη θέση x, έχει δημιουργηθεί μία κοινή αύξηση της πίεσης p, η οποία (σύμφωνα με την αρχή του Pascal) είναι $p(x) = \rho g h(x)$, ενώ στη γειτονική διατομή (στη θέση $x+dx$), η ενιαία αύξηση της πίεσης είναι $p(x+dx) = \rho g h(x+dx)$, όπου ρ η πυκνότητα του νερού, (το οποίο είναι με καλή προσέγγιση ασυμπίεστο). Αυτή η διαφορά πίεσης ανάμεσα στις δύο διατομές, έχει ως επακόλουθο την εφαρμογή μία επιταχύνουσας δύναμης στην διαφορική μάζα του νερού που υπάρχει ανάμεσα στις δύο διατομές. Λόγω του μικρού βάθους του καναλιού, θεωρούμε ότι αυτή η επιταχύνουσα δύναμη κινεί τη διαφορική μάζα του νερού με τον ίδιο τρόπο, καθ' όλο το ύψος, οπότε η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$\left(\rho H_0 D dx\right)\frac{\partial u}{\partial t} = H_0 D\left[p(x) - p(x+dx)\right] \Rightarrow \boxed{\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}} \qquad (1)$$

Στον ανωτέρω υπολογισμό, το εμβαδόν και των δύο διατομών έχει ληφθεί, κατά προσέγγιση, ίσο με $S = H_0 D$. Η προσέγγιση αυτή είναι ισοδύναμη με το να θεωρήσουμε αμελητέες εκείνες τις ποσότητες που είναι ανάλογες διαφορικών δεύτερης τάξης.

Επίσης, έχει αγνοηθεί η επίδραση της επιφανειακής τάσης, δηλαδή, της δύναμης ανά μονάδα μήκους του μετώπου του κύματος $\left(\sigma = \dfrac{\Delta F}{D}\right)$ που προέρχεται από τις δυνάμεις συνοχής οι οποίες ασκούνται από τα γειτονικά μέρη του νερού επί των μετώπων μήκους D στα σημεία x και $x+dx$. Η επίδραση της επιφανειακής τάσης σε αυτή την μορφή κίνησης, (κατά την οριζόντια διεύθυνση), είναι αμελητέα διότι η καθαρή δύναμη από την επιφανειακή τάση είναι ανάλογη του όρου $(\sigma D)\left[\cos\theta_{x+dx} - \cos\theta_x\right]$. Οπότε, στην προσέγγιση των μικρών γωνιών, $\cos\theta_{x+dx} \approx 1-\left(\theta_{x+dx}^2/2\right)\approx 1, \quad \cos\theta_{\ x} \approx 1-\left(\theta_x^2/2\right)\approx 1$, και η συνολική επίδραση είναι μηδέν, σε πρώτη τάξη ως προς την γωνία θ, άρα, και ως προς την παράγωγο $\dfrac{\partial h}{\partial x}$.

Η εξίσωση του Newton μας έδωσε την μία από τις δύο εξισώσεις πεδίου. Για την παραγωγή της δεύτερης εξίσωσης θα εκμεταλλευτούμε την διατήρηση της μάζας η οποία, σε συνδυασμό με την μη-συμπιεστότητα του νερού, αποδίδει την μεταβολή μάζας στο χώρο ανάμεσα στις διατομές που βρίσκονται στις θέσεις x και $x+dx$, στις διαφορές των ταχυτήτων εισροής $\left(u(x)\right)$ και εκροής $\left(u(x+x)\right)$. Οπότε, από την διαφορά εισροής-εκροής έχουμε

$$\frac{dm}{dt} = \rho H_0 D\left[u(x)-u(x+dx)\right] \Rightarrow \frac{dm}{dt} = -\rho H_0 D\frac{\partial u}{\partial x}dx \qquad (2\alpha)$$

Αν οι διαφορές των ταχυτήτων εισροής-εκροής είναι η αιτία για την μεταβολή μάζας ανάμεσα στις δύο διατομές, η μεταβολή αυτή έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή ύψους h με την οποία εκδηλώνεται. Επομένως:

$$\frac{dm}{dt} = \rho Ddx\frac{\partial H}{\partial t} = \rho Ddx\frac{\partial h}{\partial t} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{D}{g}\frac{\partial\left(\rho gh\right)}{\partial t}dx \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{D}{g}\frac{\partial p}{\partial t}dx \qquad (2\beta)$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη των (2α) και (2β) έχουμε:

$$-\rho H_0 D\frac{\partial u}{\partial x}dx = \frac{D}{g}\frac{\partial p}{\partial t}dx \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho g H_0}\frac{\partial p}{\partial t}} \qquad (3)$$

Οι εξισώσεις (1) και (3) αποτελούν τις εξισώσεις των πεδίων της ταχύτητας $u = u(x,t)$ του νερού, και της πίεσης $p = p(x,t)$ του νερού, ως συναρτήσεων της θέσης και του χρόνου. Ο συνδυασμός των εξισώσεων (1) και (3), μέσω απαλοιφής του ενός από τα δύο πεδία κάθε φορά, οδηγεί στην ίδια κυματική εξίσωση για το κάθε πεδίο:

$$\boxed{\frac{1}{gH_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{1}{gH_0}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}} \qquad (4\alpha,\beta)$$

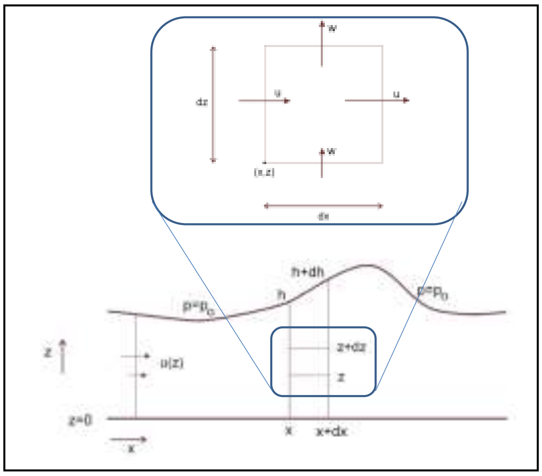
Βλέπουμε ότι για τα υδάτινα κύματα με μεγάλο μήκος κύματος, ως προς το βάθος του νερού, η ταχύτητα διάδοσης των μεταβολών πίεσης και ταχύτητας είναι ανεξάρτητη από την συχνότητα και είναι ίση με $c = \sqrt{gH_0}$, οπότε έχουμε ένα κύμα χωρίς διασπορά.

Η μείωση της ταχύτητας διάδοσης ενός κύματος καθώς οδεύει, π.χ., προς μία ακτή (λόγω μείωσης του βάθους H_0 καθώς πλησιάζει στην ακτή) έχει ως αποτέλεσμα την καθυστέρηση των κυμάτων που προηγούνται, τα οποία με αυτό τον τρόπο «προφταίνονται» από τα κύματα που έπονται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του πλάτους των κυμάτων (σε συνέπεια με την μεταβολή της μειούμενης κινητικής ενέργειας σε δυναμική ενέργεια) και την δημιουργία κυματικών μετώπων («τσουνάμι»), η ακριβής ανάλυση των οποίων υπερβαίνει το πλαίσιο αυτού του μαθήματος.

Β. Κύματα σε βαθύ νερό (μήκος κύματος: $\lambda << H_0$: μέσο βάθος νερού)

Στην περίπτωση του βαθιού νερού είναι φανερό ότι το νερό που βρίσκεται στον όγκο ελέγχου με τη μορφή κατακόρυφης διαφορικής φέτας, μεταξύ του x και του $x+dx$, δεν κινείται όλο με την ίδια οριζόντια ταχύτητα (αφού αναμένεται ότι, στα μεγάλα βάθη, το νερό δεν παρακολουθεί την κίνηση των επιφανειακών στρωμάτων.

Επομένως σε αυτή την περίπτωση, **υποθέτουμε ότι εξακολουθεί να υπάρχει συμμετρία μετατόπισης ως προς** y, αλλά η ταχύτητα του ρευστού έχει συνιστώσες και προς τους δύο άλλους άξονες $\left(x,z\right)$, $\vec{V} = u\hat{x} + w\hat{z}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η μεταβολή της οριζόντιας συνιστώσας της ταχύτητας οφείλεται στη διαφορά πίεσης κατά μήκος του άξονα x, όπως και στην προηγούμενη ανάλυση (βλ. εξίσωση (1)), ενώ η μεταβολή της κατακόρυφης συνιστώσας της ταχύτητας οφείλεται στη διαφορά πίεσης κατά μήκος του άξονα z αλλά και στο βάρος του, εφόσον τώρα δεν αναλύουμε την κίνηση όλης της κατακόρυφης στήλης, ως σύνολο, αλλά ένα τμήμα αυτής, μεταξύ z και $z+dz$. Επομένως, οι δύο εξισώσεις κίνησης γράφονται:

$$\boxed{\rho\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial x}} \qquad (5a) \qquad\qquad \boxed{\rho\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g} \qquad (5\beta)$$

Για την ακρίβεια, επειδή και οι δύο συνιστώσες του πεδίου ταχυτήτων είναι συναρτήσεις των (x,z,t), τα πρώτα μέλη των εξισώσεων (5α) και (5β) θα πρέπει να γραφούν $\rho\frac{df}{dt}=\rho\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}\right)=\rho\left(\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}u+\frac{\partial f}{\partial z}w\right)$, $f=\{u,w\}$, όπου οι όροι $\frac{\partial f}{\partial x}u+\frac{\partial f}{\partial z}w$, (όπου $f=\{u,w\}$), θεωρούνται αμελητέοι ως δεύτερης τάξης.

Για την συμπεριφορά του ρευστού κάνουμε δύο υποθέσεις.
Πρώτον, υποθέτουμε ότι αυτό είναι ασυμπίεστο, επομένως η διατήρηση της μάζας ανά μοναδιαίο όγκο επιβάλλει μηδενισμό της απόκλισης για το πεδίο ταχυτήτων

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}=0\Rightarrow\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad (5\gamma)}$$

Δεύτερον, υποθέτουμε ότι έχει ασήμαντο ιξώδες, επομένως το πεδίο ταχυτήτων είναι αστρόβιλο $\qquad \vec{\nabla}\times\vec{V}=0\Rightarrow\boxed{\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}=0} \qquad (6)$

Για τα πεδία, u, w, p, έχουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων, (5α), (5β), (5γ), από τις οποίες μπορούμε, με κατάλληλες απαλοιφές να πάρουμε

$$(5a):\ \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=0 \quad (7a)$$

$$(5\beta):\ \frac{\partial w}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g=0\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0 \quad (7\beta)$$

Αθροίζοντας τις (7α) και (7β) παίρνουμε: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)=0 \quad (7\gamma)$

Με βάση την (5γ), η τελευταία σχέση ισοδυναμεί με την: $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=0 \qquad (8)$.

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, (παραγωγίζοντας τις (5γ) και (6) ως προς x, z, αντίστοιχα και αφαιρώντας, ή, ως προς z, x, αντίστοιχα και αθροίζοντας), και οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας, u, w, ικανοποιούν επίσης την σχέση (8). Αναζητώντας, για κάθε μία, λύσεις της μορφής $f(x,z,t)=\mathrm{Re}\left\{\tilde{f}_0(z,t)e^{ikx}\right\}$, βρίσκουμε ότι τα πλάτη $\tilde{f}_0$ ικανοποιούν την διαφορική $\dfrac{\partial^2 \tilde{f}_0}{\partial z^2}-k^2\tilde{f}_0=0$, (9α)

οπότε $$\tilde{f}_0(z,t)=f_1(t)e^{kz}+f_2(t)e^{-kz} \qquad (9β)$$

Για κάθε πεδίο, χρησιμοποιούμε τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, προκειμένου να υπολογίσουμε την μορφή της συγκεκριμένης λύσης.

Για την κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας , w, η συνοριακή συνθήκη εκφράζει το γεγονός ότι στον πυθμένα $(z=0)$ η κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας πρέπει να είναι μηδέν, $w(z=0,x,t)=0$, οπότε από την (9β) έχουμε $f_1(t)=-f_2(t)$, άρα

$$\tilde{w}(x,z,t)=w_0(t)\sinh(kz)e^{ikx}$$

Για z ίσο με το ύψος της ελεύθερης επιφάνειας, $H=H_0+h(x,z,t)$, έχουμε

$$\tilde{w}(x,H,t)=w_0(t)\sinh(kH)e^{ikx}\Rightarrow w_0(t)=\frac{\tilde{w}(x,H,t)}{\sinh(kH)e^{ikx}}=\frac{w(H,t)}{\sinh(kH)},$$

οπότε, λόγω του μεγάλου βάθους σε σχέση με το μήκος κύματος $(H_0>>\lambda)$, κατά μείζονα λόγο, ισχύει $H_0>>h$, και τελικά

$$\tilde{w}(x,z,t)=\frac{w(H_0,t)}{\sinh(kH_0)}\sinh(kz)e^{ikx} \qquad (10)$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούν να υπολογιστούν οι εκφράσεις για τα πεδία u και p, τα οποία προκύπτουν ανάλογα του $\simeq\cosh(kz)$.

Θα επανέλθουμε στο πεδίο w μέσω του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε την συνολική κατακόρυφη ορμή, προκειμένου να συσχετίσουμε τον ρυθμό μεταβολής αυτής της ορμής με την συνολική κατακόρυφη δύναμη. Η συνολική κατακόρυφη δύναμη έχει δύο συνιστώσες, οι οποίες οφείλονται στην διακύμανση ύψους $H-H_0=h$, και κάθε μία από τις οποίες μηδενίζεται όταν η ελεύθερη επιφάνεια παραμένει αδιατάρακτη $(H(x,t)=H_0)$.

Η πρώτη συνιστώσα οφείλεται στο βάρος της επιπλέον μάζας του νερού, πού βρίσκεται μέσα στον όγκο ελέγχου (η «φέτα» από x μέχρι $x+dx$) και πάνω από το ύψος της αδιατάρακτης επιφάνειας, και είναι ίση με $(Dhdx)\rho g$.

Η δεύτερη συνιστώσα προέρχεται από την διαφορά κατακόρυφων προβολών της επιφανειακής τάσης, δηλαδή, της δύναμης ανά μονάδα μήκους του μετώπου του κύματος $\left(\sigma=\dfrac{\Delta F}{D}\right)$ που προέρχεται από τις δυνάμεις συνοχής οι οποίες ασκούνται από τα γειτονικά μέρη του νερού επί των μετώπων μήκους D στα σημεία x και $x+dx$. Η επίδραση της επιφανειακής τάσης σε αυτή την μορφή κίνησης, (κατά την κατακόρυφη διεύθυνση), δεν είναι αμελητέα διότι η καθαρή δύναμη από την επιφανειακή τάση είναι ανάλογη του όρου $(\sigma D)[\sin\theta_{x+dx}-\sin\theta_x]$. Οπότε, στην προσέγγιση των μικρών γωνιών, $\sin\theta_{x+dx}\approx\theta_{x+dx}\approx\left(\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)_{x+dx}$, $\sin\theta_x\approx\theta_x\approx\left(\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)_x$, και, επομένως, η συνολική κατακόρυφη δύναμη λόγω επιφανειακής τάσης είναι ίση με $(\sigma D)\left[\left(\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)_{x+dx}-\left(\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)_x\right]=(\sigma D)\left(\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)dx$

Στη συνολική κατακόρυφη δύναμη δεν συνεισφέρουν οι διαφορές πίεση κατά τον άξονα x: $\left(-\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)$, (που δημιουργούσαν την επιταχύνουσα δύναμη για τη επιφανειακά κύματα), δεδομένου ότι η αντίστοιχη δύναμη έχει οριζόντιο προσανατολισμό.

Με βάση όλα τα προηγούμενα, ο νόμος μεταβολής της κατακόρυφης ορμής για τον όγκο ελέγχου, γράφεται

$$\frac{dP_{z,o\lambda}}{dt} = F_{z,o\lambda} = -\left(Dhdx\right)\rho g + \left(\sigma D\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}dx \qquad (11)$$

[Η συνιστώσα της βαρύτητας, $-\left(Dhdx\right)\rho g$, έχει αρνητικό πρόσημο λόγω του προσανατολισμού που έχουμε επιλέξει για τον κατακόρυφο άξονα z]

Για τον υπολογισμό της κατακόρυφης ορμής θεωρούμε το τμήμα του νερού, μεταξύ $\left(x, x+dx\right)$ και $\left(z, z+dz)\right)$ (δεδομένου ότι η κατακόρυφη ταχύτητα w είναι συνάρτηση του z, σύμφωνα με τη σχέση (10)), και ολοκληρώνουμε από $z=0$ μέχρι $z=H_0$, την αντίστοιχη διαφορική (ως προς z) ορμή : $dP_z(z) = (Ddxdz)\cdot\rho\cdot w(z)$.

$$P_{z,o\lambda} = D\rho dx\int_{z=0}^{z=H_0} w(z)dz = D\rho dx\int_{z=0}^{z=H_0}\frac{w(H_0)}{\sinh(kH_0)}\sinh(kz)dz =$$

$$= \frac{D\rho dx}{\sinh(kH_0)}w(H_0)\int_{z=0}^{z=H_0}\sinh(kz)dz = \frac{D\rho dx}{k\sinh(kH_0)}w(H_0)\left[\cosh(kH_0)-1\right]$$

Αντικαθιστούμε την χρονική παράγωγο της τελευταίας σχέσης στην εξίσωση (11) και έχουμε:

$$\frac{D\rho dx}{k\sinh(kH_0)}\frac{\partial w(H_0)}{\partial t}\left[\cosh(kH_0)-1\right] = -\left(Dhdx\right)\rho g + \left(\sigma D\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}dx.$$

Απλοποιούμε τον κοινό όρο Ddx και αντικαθιστούμε όπου $\frac{\partial w(H_0)}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial t}$, οπότε:

$$\frac{\rho}{k\sinh(kH_0)}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}\left[\cosh(kH_0)-1\right] = -h\rho g + \sigma\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \left[-hg + \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right]\frac{k\sinh(kH_0)}{\cosh(kH_0)-1}}$$

Η τελευταία σχέση είναι η πλήρης διαφορική εξίσωση για τα κύματα σε νερό μεγάλου βάθους. Αν μάλιστα λάβουμε υπόψη μας ότι η παραδοχή του μεγάλου βάθους (σε σύγκριση με το μήκος κύματος) γράφεται: $H_0 >> \lambda \Rightarrow 2\pi\frac{H_0}{\lambda} >> 1$. Επομένως, $\Rightarrow kH_0 >> 1 \Rightarrow \cosh(kH_0) >> 1 \Rightarrow \boxed{\cosh(kH_0)-1 \approx \cosh(kH_0)}$ και, τελικά η διαφορική εξίσωση γράφεται: $\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \left[\frac{\sigma}{\rho}k\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - gkh\right]\tanh(kH_0)}$ (12).

Από την σχέση (12) υπολογίζεται η σχέση διασποράς αρμονικού μονοχρωματικού κύματος της μορφής: $h = h_0 e^{i(kx-\omega t)}$,

η αντικατάσταση του οποίου, στην (12) δίνει:

$$-\omega^2 h = \left[-\frac{\sigma}{\rho}k^3 h - gkh\right]\tanh(kH_0) \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \left[\frac{\sigma}{\rho}k^3 + gk\right]\tanh(kH_0)} \qquad (13)$$

Οπότε: $$\omega = k\sqrt{\left[\frac{\sigma}{\rho}k + \frac{g}{k}\right]\tanh(kH_0)} \Rightarrow \upsilon_{ph} \equiv \frac{\omega}{k} = \sqrt{\left[\frac{\sigma}{\rho}k + \frac{g}{k}\right]\tanh(kH_0)}$$

Από τη σχέση διασποράς (13) μπορούν να υπολογιστούν οι αντίστοιχες σχέσεις για τις περιπτώσεις των πολύ μικρών και των πολύ μεγάλων μηκών κύματος, σε σύγκριση με το μέσο βάθος H_0 του νερού.

(α) Μεγάλο μήκος κύματος, σε σχέση με το βάθος του νερού $\left(kH_0 << 1\right)$

Σε αυτή την περίπτωση αναφερόμαστε σε επιφανειακά κύματα και, λόγω της μικρής τιμής του k, μπορούν να γίνουν οι εξής δύο προσεγγίσεις: (i) όροι ανώτερης τάξης ως προς k θεωρούνται αμελητέοι $\frac{\sigma}{\rho}k^3 + gk \approx gk$, και (ii) από το ανάπτυγμα Taylor της υπερβολικής εφαπτομένης περιοριζόμαστε στον πρώτο όρο $\tanh\left(kH_0\right) \approx kH_0$, οπότε η σχέση διασποράς (13) γίνεται $\omega^2 \approx gH_0k^2$ και, επομένως, σε αυτή την οριακή περίπτωση αναπαράγεται η σχέση για την ταχύτητα φάσης (χωρίς διασπορά) $\upsilon_{ph} \equiv \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH_0}$ [και, κατά συνέπεια $\upsilon_{gr} \equiv \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{gH_o}$, όπως θα δούμε στην δι΄δοση κυματο-ομάδων]. Οι δύο τελευταίες σχέσεις είναι συνεπείς και με την αρχική ανάλυση και το αποτέλεσμα που περιγράφουν οι σχέσεις

$$\boxed{\frac{1}{gH_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{1}{gH_0}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}} \qquad (4\alpha,\beta)$$

Πράγματι, αν λάβουμε υπόψη μας ότι $p = \rho gh$, τότε η σχέση (4β) δίνει

$$\frac{1}{gH_0}\rho g\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \rho g\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{1}{gH_0}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \Rightarrow \upsilon_{ph} = \sqrt{gH_0}$$

(β) Μικρό μήκος κύματος, σε σχέση με το βάθος του νερού $\left(kH_0 >> 1\right)$

Στο όριο $H_0 \to \infty$ έχουμε $\tanh(kH_0) \to 1$, οπότε από τη σχέση (12) μπορούμε να πάρουμε τη διαφορική εξίσωση κύματος για «άπειρο» βάθος νερού, με τη μορφή

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\sigma}{\rho}k\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - gkh$$

Σε αυτή την περίπτωση η αντίστοιχη σχέση διασποράς είναι $\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho}k^3 + gk$.

Για μικρό μήκος κύματος, (άρα μεγάλο k), μπορεί να γίνει μία ακόμη απλοποίηση της μορφής διασποράς $\frac{\sigma}{\rho}k^3 + gk \approx \frac{\sigma}{\rho}k^3$ και η σχέση διασποράς γίνεται $\omega = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}k^3}$.

Για την ίδια περίπτωση των μικρών μηκών κύματος, αλλά του πεπερασμένου βάθους H_0, η σχέση διασποράς γίνεται $\omega^2 = \left[\frac{\sigma}{\rho}k^3\right]\tanh(kH_0) \Rightarrow \omega = k\sqrt{\left[\frac{\sigma}{\rho}k\right]\tanh(kH_0)}$

Κυματική εξίσωση και σχέση διασποράς για την διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων παρουσία πλάσματος.

Πλάσμα: Μακροσκοπικά ουδέτερη ύλη που αποτελείται από ίσες, κατά απόλυτη τιμή, αλλά αντίθετου πρόσημου πυκνότητες φορτίου, (δηλ., δύο είδη φορέων), εκ των οποίων τουλάχιστον το ένα είδος φορέων είναι ευκίνητο, έτσι ώστε, από άποψη δυναμικής, να μπορούν να αντιμετωπιστούν ως ελεύθεροι φορείς.

Γενικό Πρόβλημα: Η διατύπωση της διαφορικής εξίσωσης που διέπει την διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στην περιοχή του πλάσματος και, συνεπώς, η παραγωγή της αντίστοιχης σχέσης διασποράς.

ΑΝΑΛΥΣΗ

ΕξισώσειςMaxwell: $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$ (1), $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (2)

Σχέση πυκνότητας ρεύματος με την κίνηση των φορέων: $\vec{j}=-ne\vec{\upsilon}$ (3)

Στόχος είναι η διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων τις οποίες ικανοποιούν τα πεδία $\vec{E}=\vec{E}\left(\vec{r},t\right)$, $\vec{B}=\vec{B}\left(\vec{r},t\right)$, ως συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου. Αν πάρουμε την χρονική παράγωγο της σχέσης (1), εμφανίζεται η δεύτερης τάξης χρονική παράγωγος του ηλεκτρικού πεδίου (άρα, ένας από τους όρους κυματικής εξίσωσης για το πεδίο), και ταυτόχρονα προκύπτει και χρονική παράγωγος πρώτης τάξης για μαγνητικό πεδίο, η οποία μπορεί να απαλειφθεί με τη βοήθεια της σχέσης (2).

$$\frac{\partial}{\partial t}(1):\quad \vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\mu_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(-ne\vec{\upsilon}\right)+\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right)\Rightarrow\vec{\nabla}\times\left(-\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=\mu_0\left(-ne\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}+\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right)\quad(4)$$

[όπου έχουμε δεχτεί ότι η πυκνότητα φορέων n δεν εξαρτάται από το χρόνο]

Σε αυτό το σημείο, πρέπει να αναπτύξουμε τον διπλό στροβιλισμό του πρώτου σκέλους, και να συνδέσουμε την χρονική παράγωγο της ταχύτητας των φορέων με τις δυνάμεις από τις οποίες εξαρτάται.

Μέσω της διανυσματικής ταυτότητας, $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$ και της αντίστοιχης σχέσης των διαφορικών τελεστών της στροβιλισμού και της απόκλισης, έχουμε :

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\nabla^2\vec{E}\qquad(5),$$

ενώ για την χρονική μεταβολή της ταχύτητας των φορέων, έχουμε:

$$m\frac{\partial\vec{\upsilon}}{\partial t}=\vec{F}=-e\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)\qquad(6)$$

Αν αντικατασταθούν οι σχέσεις (5) και (6) στη σχέση (4), χωρίς καμία προσέγγιση, τότε προκύπτει μία πεπλεγμένη διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\nabla^2\vec{E}=\mu_0\left(-ne\left(-\frac{e}{m}\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right)\right)+\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right)\quad(7)$$

Η τελευταία σχέση έχει τα μειονεκτήματα ότι, (α) εξακολουθεί να εμπλέκει το μαγνητικό πεδίο στη διαφορική του ηλεκτρικού πεδίου, και (β) εμπλέκει και την ταχύτητα των φορέων (η οποία εξαρτάται από το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο) και, επομένως, η επίλυσή της απαιτεί αρκετά πολύπλοκες μεθόδους μαγνητο-ρευστο-δυναμικής.

Για την σταδιακή απλούστευση της τελευταίας σχέσης (7) θα κάνουμε ορισμένες εύλογες προσεγγίσεις και ορισμένες χρήσιμες παραδοχές.
Η παραδοχή που κάνουμε είναι ότι αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η διάδοση επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος στην περιοχή του πλάσματος. Στην περίπτωση αυτού του κύματος, τα πλάτη του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ικανοποιούν τη σχέση $\left|\vec{B}\right| = \frac{\left|\vec{E}\right|}{c}$, όπου c: η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό. Επομένως, όρος της δύναμης Lorentz γίνεται

$$-\frac{e}{m}\left(\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \frac{\left|\vec{E}\right|}{C}\hat{B}\right) = -\frac{e}{m}\left|\vec{E}\right|\left(\hat{E} + \frac{\vec{\upsilon}}{c} \times \hat{B}\right)$$

Προσέγγιση (εύλογη, στην περίπτωση που αναφερόμαστε σε όχι ιδιαίτερα υψηλά πεδία): Για χαμηλές ταχύτητες $\upsilon \ll c$, (ανεξάρτητα από τον σχετικό προσανατολισμό των μοναδιαίων διανυσμάτων $\hat{E}, \hat{B}$), ο μαγνητικός όρος της δύναμης είναι ασήμαντος σε σχέση με τον ηλεκτρικό όρο και απαλείφεται. Η προσέγγιση αυτή μας απαλλάσσει από την παρουσία του μαγνητικού πεδίου στην διαφορική εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου, οπότε :

$$-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) + \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \left(n\frac{e^2}{m}\vec{E} + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) \quad (8)$$

Στην γενικότερη περίπτωση, η εξίσωση (8) είναι επίσης μία πεπλεγμένη διαφορική εξίσωση, (η, τουλάχιστον, με μη-σταθερούς συντελεστές), δεδομένου ότι, σύμφωνα με την πρώτη εξίσωση του Maxwell, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{e}{\varepsilon_0} n$, όπου η πυκνότητα φορέων n θα μπορούσε να είναι συνάρτηση της θέσης (ενδεχόμενο που θέτει υπό αίρεση και την παραδοχή που έπεται της εξίσωσης (4)).
Στο σημείο που φτάσαμε, προκειμένου να αναδείξουμε τα βασικά ποιοτικά χαρακτηριστικά του ζητήματος, θεωρούμε ότι μελετάμε πλέον το εξής συγκεκριμένο πρόβλημα: <u>το επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα $\left(\hat{x}E_o + \hat{y}B_0\right)e^{i(kz-\omega t)}$ οδεύει στον ελεύθερο χώρο, από το $z < 0$ προς το $z = 0$, όπου εισέρχεται σε μία περιοχή πλάσματος, που καταλαμβάνει τον ημιχώρο $z > 0$, και που χαρακτηρίζεται από πυκνότητα φορέων $n = n_0 = \sigma\tau\alpha\theta.$</u> Σε αυτήν την περίπτωση, όπως εύκολα αποδεικνύεται, $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) = 0$ και $\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}$, οπότε η διαφορική εξίσωση (8) παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(n_0 \frac{e^2}{\varepsilon_0 m}\vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) \quad (9)$$

Αν θυμηθούμε ότι: $\frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$: η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό, και : $\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} = \omega_p^2$: η συχνότητα πλάσματος φορέων πυκνότητας n_0, φορτίου e και μάζας m, τότε η σχέση (9) γράφεται με τη μορφή

$$c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \omega_p^2 \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (10)$$

Αν αντικαταστήσουμε, στην τελευταία σχέση (10), την ηλεκτρική συνιστώσα του οδεύοντος κύματος $\vec{E}=(\hat{x}E_o)e^{i(kz-\omega t)}$, και εκτελέσουμε τις αντίστοιχες παραγωγίσεις, παίρνουμε την σχέση διασποράς των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην περιοχή του πλάσματος, η οποία είναι $-c^2k^2\vec{E}=\omega_p^2\vec{E}-\omega^2\vec{E} \;\Rightarrow\; \boxed{\omega^2=\omega_p^2+c^2k^2}$ (11)

Αυτή η σχέση (11) αναφέρεται και ως σχέση διασποράς της ταλάντωσης πλάσματος (ή, των ελεύθερων πλασμονίων)

Αν θεωρήσουμε ότι η συχνότητα ω του οδεύοντος κύματος είναι επιλέξιμη από τον πομπό (πηγή εκπομπής) του κύματος, και επιλύσουμε την σχέση (11) ως προς το κυματάνυσμα διάδοσης k, τότε έχουμε $k=\frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c}$. Παρατηρούμε ότι, για συχνότητες μεγαλύτερες της συχνότητας πλάσματος, $\omega>\omega_p$ το κυματάνυσμα είναι πραγματικό και, επομένως, έχουμε ένα οδεύον κύμα να διαδίδεται στην περιοχή του πλάσματος. Για συχνότητες μικρότερες της συχνότητας πλάσματος, $\omega<\omega_p$ το κυματάνυσμα είναι φανταστικό και, επομένως, γράφεται ως $k=i\kappa=i\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c}$, οπότε το κύμα έχει τη μορφή

$$\vec{E}=(\hat{x}E_o)e^{i(kz-\omega t)}=(\hat{x}E_o)e^{i(i\kappa z-\omega t)}=\hat{x}\left(E_o e^{-\kappa z}\right)e^{-i\omega t}.$$

Άρα, για συχνότητες μικρότερες της συχνότητας πλάσματος, $\omega<\omega_p$, το κύμα υφίσταται εκθετική απόσβεση πλάτους, καθώς εισέρχεται στην περιοχή του πλάσματος, και επομένως δεν έχουμε διάδοση οδεύοντος κύματος (περιοχή απόσβεσης).

Για συχνότητες μεγαλύτερες της συχνότητας πλάσματος, $\omega>\omega_p$, μπορούμενα έχουμε οδεύοντα κύματα με κυματάνυσμα $k=\frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c}$, οπότε η ταχύτητα φάσης υπολογίζεται συναρτήσει της συχνότητας, $\upsilon_{ph}=\frac{\omega}{k}=c\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}$.