

## ~ ΑΣΚΗΣΗ 29 ~

### Μέτρηση της ταχύτητας του ήχου στα υγρά

- ❖ Ονοματεπώνυμο: **Μαρκέλλα Μπουρνάκα**
- ❖ Αριθμός μητρώου: **e120030**
- ❖ Ημερομηνία διεξαγωγής: **04/04/2022**
- ❖ Τμήμα: **Β' (17:00-19:00)**

#### ➤ ΣΚΟΠΟΣ – ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργαστηριακή άσκηση έχει ως σκοπό την αξιοποίηση των στάσιμων υπερηχητικών κυμάτων που γίνονται ορατά με οπτικές μεθόδους για τον προσδιορισμό της ταχύτητας διάδοσης του ήχου μέσα στην αιθυλική αλκοόλη (αιθανόλη, οινόπνευμα). Επιπλέον, θα προσδιοριστεί και ο συντελεστής συμπίεστότητας του εν λόγω υγρού.

## ➤ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

Διαμήκη κύματα ονομάζονται τα κύματα των οποίων η διεύθυνση ταλάντωσης των σωματιδίων είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος μέσα στο εκάστοτε μέσο, ενώ είναι κύματα που μπορούν να διαδοθούν στα στερεά, στα υγρά και στα αέρια σώματα. Όταν αναφερόμαστε σε διάδοση μέσα σε κάποιο υλικό διαστάσεων πολύ μεγαλύτερων από το μήκος κύματος  $\lambda$  του κύματος, τότε η ταχύτητα διάδοσής του δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$u_l = \sqrt{\frac{\frac{1}{k} + \frac{3}{4}G}{\rho}}$$

όπου  $k$  είναι ο **συντελεστής συμπίεστότητας** του υγρού,  $G$  το μέτρο διάτμησης και  $\rho$  η πυκνότητα του υλικού.

Επειδή, ωστόσο, στα ρευστά το μέτρο διάτμησης είναι ίσο με μηδέν, προκύπτει ότι:

$$u = \sqrt{\frac{1}{k_{ad}\rho}}$$

όπου  $k_{ad}$  είναι ο **αδιαβατικός συντελεστής συμπίεστότητας**, ο οποίος εξαρτάται από τη θερμοκρασία, όπως και η πυκνότητα  $\rho$ , με αποτέλεσμα να έχουμε **θερμοκρασιακή εξάρτηση και της ταχύτητας**.

Επιπροσθέτως, για την αιθυλική αλκοόλη έχουμε λόγο  $\Delta u/\Delta \theta$  ή  $\Delta u/\Delta T$  με αρνητική τιμή, συγκεκριμένα  $\Delta u/\Delta \theta = -3.6 \text{ ms}^{-1}/^{\circ}\text{C}$  (σε αντίθεση με το νερό, το οποίο έχει θετικό λόγο).

## ➤ ΜΕΘΟΔΟΣ – ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΑΞΗ

Για την εκτέλεση του πειράματος χρησιμοποιήσαμε ένα γυάλινο δοχείο με αιθυλική αλκοόλη, για την οποία γνωρίζουμε ότι έχει πυκνότητα ίση με  $0.79 \text{ g/cm}^3 \pm 0.003 \text{ g/cm}^3$ , μία γεννήτρια υπερηχητικών συχνοτήτων (800 kHz) με υψηλή εναλλασσόμενη μεταβλητή τάση, καθώς και μία πηγή υπερήχων, της ίδιας συχνότητας με τη γεννήτρια, που τροφοδοτούνταν από αυτήν. Ακόμη, χρειαστήκαμε ένα laser He-Ne του οποίου η δέσμη φωτός διερχόταν από έναν συγκεντρωτικό φακό εστίασης απόστασης 2 cm και κατόπιν

μέσα από το δοχείο με την αιθανόλη, ενώ κατέληγε σε μία κάθετη στη δέσμη επιφάνεια στην οποία είχαμε τοποθετήσει μιλλιμετρέ χαρτί για να λάβουμε τις μετρήσεις μας. Λοιπές μετρήσεις διεξάχθηκαν με μετροταινία και θερμόμετρο.

Όταν βυθίζουμε την πηγή υπερήχων (πιεζοηλεκτρικός κρύσταλλος) μέσα στο δοχείο, έχουμε διάδοση υπερηχητικού κύματος κατακόρυφα, το οποίο ανακλάται στον πυθμένα του δοχείου και έτσι δημιουργεί ένα στάσιμο κύμα. Το αποτέλεσμα που βλέπουμε στο μιλλιμετρέ χαρτί πρόκειται για ένα στάσιμο κύμα στον άξονα  $z$  και οφείλεται στο γεγονός ότι ο δείκτης διάθλασης του υγρού διαμορφώνεται στον άξονα  $z$ , ακολουθώντας την κατανομή της πίεσης μέσα στο υγρό. Ειδικότερα, εφόσον εμφανίζεται στάσιμο κύμα, μπορούμε να διακρίνουμε τις κοιλίες (φωτεινοί κροσσοί, σημεία μέγιστου πλάτους), οι οποίες δεν εκτρέπουν τη φωτεινή ακτίνα, και τους δεσμούς (σκοτεινοί κροσσοί, σημεία μηδενικού πλάτους), οι οποίοι εκτρέπουν έντονα την ακτίνα φωτός.

Παρακάτω παρατίθενται οι μετρήσεις που λάβαμε για την προαναφερθείσα πειραματική διάταξη, μέσω των οποίων υπολογίστηκαν και οι απαιτούμενες αποστάσεις. Να σημειωθεί πως έχουμε συμπεριλάβει και τα αντίστοιχα εκτιμώμενα σφάλματα, βάσει της γνωστής μεθόδου (το ήμισυ της ελάχιστης υποδιαίρεσης του οργάνου μέτρησης με στρογγυλοποίηση στον κοντινότερο άρτιο είτε άνω είτε κάτω).

<b>Μέγεθος</b>	<b>Τιμή</b>	<b>Σφάλμα</b>
Αριθμός φωτεινών κροσσών	11	-
Απόσταση πρώτου και τελευταίου κροσσού	32mm	1mm
Απόσταση εστίας φακού και μέσου δοχείου ( $l_1$ )	20.5cm	0.5mm
Απόσταση πετάσματος και μέσου δοχείου ( $l_2$ )	62cm	0.5mm
Θερμοκρασία υγρού	21.3°C	0.2 °C

## ➤ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

1. Για τον υπολογισμό της απόστασης μεταξύ δύο γειτονικών κροσσών αρκεί απλώς να διαιρέσουμε την απόσταση πρώτου και τελευταίου κροσσού με το πλήθος των μεταξύ τους διαστημάτων. Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζουμε και το αντίστοιχο σφάλμα και λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα (έπειτα από κατάλληλες στρογγυλοποιήσεις):

Μέγεθος	Τιμή	Σφάλμα
Απόσταση δύο γειτονικών κροσσών	2.9mm	0.1mm

2. Για την εύρεση του  $\lambda/2$  του στάσιμου υπερηχητικού κύματος, πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι η εικόνα στο πέτασμα είναι μεγεθυμένη κατά  $(l_1+l_2)/l_1$ , λόγω της απόκλισης που παρουσιάζουν οι φωτεινές ακτίνες. Επομένως, η μεγέθυνσή μας είναι  $\mu=(20.5+62)/20.5=4.02$ , με αμελητέα στρογγυλοποίηση, ενώ μέσω του τύπου διάδοσης σφάλματος έχουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}\Delta\mu &= \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial l_1}\Delta l_1\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial l_2}\Delta l_2\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{l_2}{l_1^2}0.5mm\right)^2 + \left(\frac{1}{l_1}0.5mm\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^4}(0.5mm)^2 + \frac{1}{l_1^2}(0.5mm)^2} = 0.5mm \sqrt{\frac{l_2^2}{l_1^4} + \frac{1}{l_1^2}} = 0.5mm \sqrt{\frac{l_2^2+l_1^2}{l_1^4}} = \\ &= 0.5mm*0.1553cm = 0.5*1.55mm = 0.775mm \sim \mathbf{0.8\ mm}\end{aligned}$$

Τώρα, για να βρούμε το  $\lambda/2$  διαιρούμε την απόσταση δύο γειτονικών κροσσών με τη μεγέθυνση που βρήκαμε και προκύπτουν τα εξής:

Μέγεθος	Τιμή	Σφάλμα
$\lambda/2$	0.72mm	0.02mm

Βάσει του τύπου  $u=\lambda*f$ , και της γνωστής συχνότητας 800 kHz, έχουμε:

Μέγεθος	Τιμή	Σφάλμα	Σχετικό Σφάλμα
Ταχύτητα ήχου	1152 m/s	32 m/s	0.03 (3%)

Εφόσον η συχνότητα έχει μηδενικό σφάλμα, προφανώς μέσω του τύπου διάδοσης σφαλμάτων, το σφάλμα της ταχύτητας θα δίνεται από το γινόμενο του  $\Delta\lambda$  με την  $f$ .

Αξίζει να σημειωθεί πως η αιθυλική αλκοόλη έχει λόγο  $\Delta u/\Delta\theta=-3.6\ ms^{-1}/^{\circ}C$ , δηλαδή η ακριβέστερη ταχύτητα που προκύπτει είναι

$$1152-1.3*3.6 = 1152-4.68 = 1147.32 \sim \mathbf{1147\ m/s}$$

Αντιστοίχως, το σφάλμα γίνεται  $32-(3.6*0.03)=32-0.108\sim 31.9\ m/s$ , τιμή που θα θεωρήσουμε προσεγγιστικά ίση με το αρχικό σφάλμα για διευκόλυνση των πράξεων, εφόσον η διαφορά είναι αμελητέα.

Παρατηρούμε, επιπλέον, πως η τιμή που υπολογίσαμε βρίσκεται πολύ κοντά στην πραγματική (που βρέθηκε στη βιβλιογραφία), εάν λάβουμε ως δεδομένο το γεγονός ότι η ταχύτητα του ήχου στην αιθανόλη στους  $20^{\circ}C$  είναι ίση με **1159 m/s**.

3. Αξιοποιώντας τον τύπο που μας δίνεται, υπολογίζουμε τον αδιαβατικό συντελεστή συμπίεστικότητας του υγρού πραγματοποιώντας κατάλληλες προσαρμογές στις μονάδες μέτρησης:

$$\begin{aligned}k_{ad} &= (\rho \cdot v^2)^{-1} = (0.79 \text{ g/cm}^3 \cdot (1147 \text{ m/s})^2)^{-1} = \\&= (920926.3 / 10^{-6} \text{ gm}^{-1} \text{ s}^{-2})^{-1} = 10^{-6} / 920926.3 \text{ ms}^2 / \text{g} = \\&= 10.86 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-6} \text{ ms}^2 / 10^{-3} \text{ kg} = \mathbf{10.86 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta k_{ad} &= \sqrt{\left(\frac{\partial k_{ad}}{\partial \rho} \Delta \rho\right)^2 + \left(\frac{\partial k_{ad}}{\partial v} \Delta v\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{v^2 \rho^2} 0.003 \frac{10^{-3}}{10^{-6}}\right)^2 + \left(\frac{-2v}{\rho v^4} 32\right)^2} = \\&= \sqrt{\frac{9}{v^4 \rho^4} + \frac{1}{v^6 \rho^2} (64)^2} = \frac{1}{\rho v^2} \sqrt{\frac{9}{\rho^2} + \frac{4096}{v^2}} = k_{ad} \sqrt{\frac{9}{0.6241 \cdot 10^6} + 3113.39 \cdot 10^{-6}} = \\&= 10.86 \cdot 10^{-10} \sqrt{3127.82 \cdot 10^{-6}} = 10.86 \cdot 10^{-13} \cdot 55.93 = \\&= 607.4 \cdot 10^{-13} \sim \mathbf{0.6 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}}\end{aligned}$$

Συνεπώς, ο υπολογισμός του αδιαβατικού συντελεστή συμπίεστικότητας της αιθυλικής αλκοόλης δεν είναι ακριβής και περιέχει περαιτέρω σφάλματα, διότι η τιμή που βρίσκουμε στη βιβλιογραφία είναι  $9.42 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ , και αυτή δεν συμπεριλαμβάνεται στην περιοχή από  $10.26 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  έως  $11.46 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  που ορίζεται από την τιμή που βρήκαμε συν/πλην το σφάλμα μας.

Ειδικότερα, το σφάλμα της μέτρησής μας ανέρχεται στο αρκετά μεγάλο ποσοστό:  $1.44 / 9.42 = 0.15 = 15\%$ , γεγονός που μαρτυρά πως δεν έχουμε λάβει υπόψιν κάποιον παράγοντα/σφάλμα.

4. Όπως υπολογίσαμε ήδη στο δεύτερο βήμα, η τιμή της ταχύτητας του ήχου στην αιθυλική αλκοόλη στους  $21.3^\circ\text{C}$  είναι ίση με  $1147 \text{ m/s}$ , διότι με αύξηση της θερμοκρασίας έχουμε μείωση της ταχύτητας στην αιθανόλη. Η τιμή αυτή που βρήκαμε είναι αποδεκτή και αρκετά αξιόπιστη, διότι βρίσκεται μέσα στο επιτρεπτό πλαίσιο που ορίζει το σφάλμα που εκτιμήσαμε ( $1115\text{-}1179 \text{ m/s}$ ), καθώς και παρουσιάζει σφάλμα :  $12 / 1159 = 0.01 = 1\%$ , το οποίο είναι ελάχιστος σημασίας.

## ➤ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως αναφέρθηκε ανωτέρω, η τιμή της ταχύτητας που υπολογίσαμε προσεγγίζει ικανοποιητικά την πραγματική, ωστόσο ο αδιαβατικός συντελεστής συμπίεστικότητας παρουσιάζει σημαντική απόκλιση από την τιμή που υπολογίστηκε θεωρητικά βάσει του τύπου που δίνεται στον εργαστηριακό οδηγό με τιμές που αντλήθηκαν από τη βιβλιογραφία για την πυκνότητα του υγρού και την ταχύτητα του ήχου σε αυτό.

Επομένως, καταλαβαίνουμε ότι οι εκτιμήσεις μας για τα σφάλματα των μετρήσεών μας ήταν ανακριβή, όσον αφορά τον  $k_{ad}$ , διότι δεν μπορέσαμε να προβλέψουμε επιτυχώς την αναξιοπιστία των μετρήσεων μας. Είναι, λοιπόν, πιθανό να υποτιμήσαμε κάποιο σφάλμα και να μην το συμπεριλάβουμε στους υπολογισμούς μας, ή οι διαδοχικές στρογγυλοποιήσεις να συσσωρεύτηκαν στο τελικό αποτέλεσμα και να οδήγησαν στη διαστρέβλωση της τιμής. Το επικρατέστερο, ωστόσο, σενάριο είναι πως το σφάλμα (που αγγίζει το 15%) οφείλεται σε έναν συνδυασμό παραγόντων που δύσκολα μπορούν να ελεγχθούν και να ληφθούν υπόψη. Μερικοί από αυτούς ίσως είναι η καθαρότητα της αιθυλικής αλκοόλης που είχαμε στη διάθεσή μας, εάν η γεννήτρια παρήγαγε ακριβώς την επιθυμητή συχνότητα και η πηγή υπερήχων τοποθετήθηκε ολόσωστα στο υγρό, εάν όλες οι αποστάσεις που χρησιμοποιήσαμε ήταν αξιόπιστες, εάν ο φακός ήταν εντελώς ευθυγραμμισμένος με το πέτασμα κι εάν η δέσμη λέιζερ διερχόταν ακριβώς από το κέντρο του , καθώς και τα ενδογενή σφάλματα των οργάνων.

Συνεπώς, ο υπολογισμός του αδιαβατικού συντελεστή μπορεί να προσδιορίσει την τάξη μεγέθους του, και όχι την τιμή του επακριβώς. Αντιθέτως, η ταχύτητα που υπολογίστηκε μπορεί να μας δώσει με αμελητέο σφάλμα την πραγματική τιμή.