

ΤΡΙΤΟ ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Ασκήσεις που λύθηκαν στο μάθημα

III 1 Θεωρήστε τα μόρια του αέρα ως σφαιρίδια ακτίνας ενός Angstrom και υποθέστε ότι κατά μέσον όρο έχουμε $n = 10^{20}$ μόρια/cm³. Βρείτε προσεγγιστικά κατά μέσον όρο την συχνότητα κρούσεων των μορίων του αέρα μεταξύ τους.

III 2 Σύμφωνα με την κλασική ηλεκτρομαγνητική θεωρία, η ακτινοβολούμενη ισχύς P από ένα σωματίδιο φορτίου q , που εκτελεί επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση a δίνεται από τον τύπο:

$$P = \frac{2}{3} \frac{kq^2 a^2}{c^3}, \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Υπολογίστε τον χρόνο που χρειάζεται στο ατομικό μοντέλο του Rutherford ένα ηλεκτρόνιο για να πέσει στον πυρήνα, όταν κινείται στην πρώτη δυνατή τροχιά ($n = 1$) κατά Bohr. Υποθέστε ότι το ηλεκτρόνιο κατά την σπειροειδή κίνηση που κάνει καθώς πέφτει προς τον πυρήνα κινείται προσεγγιστικά σε κυκλική τροχιά.

III 3 (α) Εφαρμόστε την συνθήκη χβάντωσης του Bohr για να υπολογίσετε τις ενεργειακές στάθμες ενός σωματιδίου μάζας M που κινείται υπό την επίδραση της κεντρικής ελκτικής δύναμης $\vec{F} = -b\hat{r}$.

(β) Υπολογίστε την άγνωστη παράμετρο b , εάν το σωματίδιο (μάζας $M = 1\text{GeV}$) είναι περιορισμένο να κινείται μέσα στον πυρήνα ενός ατόμου με ακτίνα $R = 10^{-15}\text{m}$. Σε αυτή την περίπτωση υπολογίστε τις ενεργειακές στάθμες του σωματιδίου σε MeV .

(γ) Εφαρμόζοντας την υπόθεση De Broglie για τα υλικά κύματα, βρείτε την κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου μάζας $M = 1\text{GeV}$, που βρίσκεται παγιδευμένο μέσα στον πυρήνα. Να συγκρίνετε την κινητική ενέργεια που βρήκατε με τις ενεργειακές στάθμες του ερωτήματος (β).

III 4 (α) Βρείτε τις ενεργειακές στάθμες ενός μονοδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή εφαρμόζοντας τις συνθήκες χβάντωσης των Wilson και Sommerfeld.

(β) Ομοίως βρείτε τις ενεργειακές στάθμες ενός σωματιδίου μάζας m που κινείται σε μονοδιάστατο δυναμικό της μορφής:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ 0, & 0 < x < L, \\ +\infty, & x > L \end{cases}.$$

(γ) Χρησιμοποιήστε την συνθήκη δημιουργίας στάσιμων κυμάτων σε συνδυασμό με την σχέση ορμή-μήκος κύματος του De Broglie για να υπολογίσετε τις επιτρεπόμενες ενέργειες ενός σωματιδίου μάζας m , που είναι υποχρεωμένο να κινείται μέσα σε έναν κλειστό σωλήνα μήκους L . Συγκρίνετε με το ερώτημα (β)

III 5 (α) Ξεκινώντας από την σχέση Planck-Einstein $E = \hbar\omega$, να καταλήξετε στην σχέση De Broglie $p = \hbar k$ για ένα ελεύθερο μη σχετικιστικό σωματίδιο μάζας m . Θεωρήστε ότι η ταχύτητα $v = \frac{p}{m}$ του σωματιδίου ταυτίζεται με την ομαδική ταχύτητα $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ του κύματος που χαρακτηρίζει το σωματίδιο.

(β) Για ένα ελεύθερο σχετικιστικό σωματίδιο μάζας m , ορμής $p = \hbar k$ και ενέργειας $E = \hbar\omega$:

(ι) να γράψετε την σχέση διασποράς του, δηλαδή την συνάρτηση $\omega = \omega(k)$.

(ιι) Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $v_g v_p = c^2$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό, $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ η ομαδική ταχύτητα του υλικού κύματος που χαρακτηρίζει το σωματίδιο και $v_p = \frac{\omega}{k}$ η φασική ταχύτητα του κύματος αντίστοιχα.

III 6 Να βρεθεί η ακτίνα του ατόμου του υδρογόνου μέσω διαστατικής ανάλυσης, (ι) στην κλασική περίπτωση, (ιι) στην κβαντική περίπτωση.

III 7 Λυχνία ατμών Νατρίου εκπέμπει ενέργεια 6 joule ανά δευτερόλεπτο υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Εάν η ενέργεια που εκπέμπεται έχει μήκη κύματος στην περιοχή των 5000 Angstrom, $1\text{Angstrom} = 10^{-10}\text{m}$, βρείτε τον μέσο αριθμό φωτονίων που εκπέμπονται ανά δευτερόλεπτο.

III 8 Λαμπτήρας κενού με νήμα βολφραμίου έχει ισχύ 60W. Εάν το νήμα βολφραμίου βρίσκεται σε θερμοκρασία 2800K, να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας του νήματος.

III 9 Άτομο με ακτίνα $R = 1\text{Angstrom}$ δέχεται την ακτινοβολία λάμπας με ισχύ $P = 100\text{Watt}$ από απόσταση $L = 1\text{m}$. Υπολογίστε τον χρόνο που χρειάζεται για να πάρει ένα ηλεκτρόνιο του ατόμου ενέργεια ίση με το έργο ionτισμού $W = 2\text{eV}$.

III 10 Εφαρμόζοντας τις συνθήκες του Bohr βρείτε την ενέργεια πλήρους ionτισμού του ιόντος He^+ του ηλίου, ώστε το ιόν He^+ να μετατραπεί σε ιόν He^{++} .

III 11 Αποδείξτε τον νόμο μετατόπισης του Wien.

III 12 Υπολογίστε τη μέση τιμή της ενέργειας σε θερμοκρασία T , για στατιστικό σύστημα όπου οι επί μέρους ενέργειες είναι κβαντισμένες: $E_n = nhf$.

III 13 (α) Να υπολογίσετε το μήκος κύματος κατά de Broglie ηλεκτρονίων με ενέργειες $E_1 = 100\text{eV}$ και $E_2 = 100\text{keV}$.

(β) Βρείτε το μήκος κύματος για μια μπάλα μάζας $m = 100\text{gr}$, που κινείται με ταχύτητα $v = 100\text{km/h}$.

III 14 Βρείτε τις ενεργειακές στάθμες ενός μονοδιάστατου απλού αρμονικού ταλαντωτή εφαρμόζοντας τις συνθήκες κβάντωσης των Wilson και Sommerfeld.

III 15 (α) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του de Broglie να βρείτε τη σχέση διασποράς $\omega = \omega(k)$ για ένα κλασικό μη σχετικιστικό σωματίδιο. Να υπολογίσετε την ταχύτητα ομάδας v_g του αντίστοιχου κύματος και να δείξετε ότι ισούται με την ταχύτητα του αντίστοιχου σωματιδίου.

(β) Ομοίως να βρείτε τα $\omega(k)$, v_ϕ και v_g για σχετικιστικό σωματίδιο και να δείξετε ότι: $v_\phi v_g = c^2$.

Άλλες ασκήσεις

III 16 Ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda = 1000\text{Angstrom}$ πέφτει πάνω σε ένα μέταλλο με έργο εξαγωγής $W = 3\text{eV}$. Υπολογίστε:

(α) Την κινητική ενέργεια και την ταχύτητα των φωτοηλεκτρονίων.

(β) Το δυναμικό αποκοπής V_0 . Δίνεται $hc = 12400\text{eV} \cdot \text{Angstrom}$ και $m_e c^2 = 0,5\text{MeV}$.

III 17 (α) Υπολογίστε το ηλεκτρικό δυναμικό και την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση μιας ακτίνας του Bohr από τον πυρήνα του ατόμου του υδρογόνου.

(β) Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή του πυρήνα του ατόμου του υδρογόνου λόγω της κίνησης του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα.

III 18 Σωματίδιο μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά υπό την επίδραση ενός δυναμικού της μορφής $V(r) = \lambda r^4$.

(α) Χρησιμοποιήστε την συνθήκη κβάντωσης της στροφορμής του Bohr για να βρείτε την ολική ενέργεια της n -οστής στάθμης του σωματιδίου.

(β) Έστω ότι το σωματίδιο αποδιεγείρεται και μεταπίπτει από μια αρχική κατάσταση n_i σε μία χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση n_f εκπέμποντας ένα φωτόνιο. Να υπολογίσετε την συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτονίου συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος.

III 19 Η θερμοκρασία που προκαλεί ένας κεραυνός είναι της τάξης των 10^4K , ενώ μία πυρηνική έκρηξη είναι 10^7K .

(α) Γράψτε την συνάρτηση φασματικής κατανομής J (ή φασματικής έντασης ισοδύναμα) του μέλανος σώματος ως συνάρτηση του μήκους κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας, $J = J(\lambda, T)$.

(β) Χρησιμοποιήστε τον νόμο του Wien για να βρείτε τον λόγο των μέγιστων υψών της φασματικής κατανομής γι' αυτές τις πηγές.

(γ) Σε ποιες περιοχές του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος θα περιμένατε να ακτινοβολούν ισχυρότερα;

III 20 Φωτόνια μήκους κύματος $\lambda = 5000 \text{ Angstrom}$ προσπίπτουν σε μεταλλική επιφάνεια και εκπέμπονται φωτοηλεκτρόνια. Τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται εισέρχονται σε μία περιοχή με μαγνητικό πεδίο έντασης $B = 3 \times 10^{-5} \text{ Tesla}$. Εάν τα ηλεκτρόνια με την μεγαλύτερη κινητική ενέργεια κάνουν κυκλική τροχιά ακτίνας 15 cm , να βρείτε το έργο εξαγωγής του μετάλλου.

III 21 Φωτόνιο ενέργειας 10^5 eV σκεδάζεται σε γωνία $\theta = 90^\circ$ από ελεύθερο ηλεκτρόνιο σε ηρεμία. Βρείτε τις συνιστώσες της ορμής του σκεδαζόμενου ηλεκτρονίου.

III 22 Ηλεκτρόνιο στο άτομο του Υδρογόνου μεταπίπτει από μία αρχική κατάσταση με $n_1 = 6$ στην κατάσταση με $n_2 = 4$. Υπολογίστε την ενέργεια του φωτονίου που εκπέμπεται χρησιμοποιώντας τους κανόνες κβάντωσης του Bohr. Να συγκρίνετε την συχνότητα του φωτονίου που εκπέμπεται με τις συχνότητες περιστροφής του ηλεκτρονίου στις δύο τροχιές.

ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΚΑΙ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

3η σειρά ασκήσεων

Παπαδημητρίου Ευθύμιος

Αριθμός Μητρώου: 03118129

Άσκηση III 16

(α) Η ενέργεια της ακτινοβολίας είναι $E_{0\lambda} = hf = \frac{hc}{\lambda} =$
 $\frac{h = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}}{c = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{10} \frac{\text{\AA}}{\text{s}}} \frac{12400 \text{ \AA eV}}{1000 \text{ \AA}} = 12,4 \text{ eV}$

και έχουμε $E_{\text{κιν}} = E_{0\lambda} - W = 9,4 \text{ eV}$

$E_{\text{κιν}} = 9,4 \Rightarrow \frac{1}{2} m_e v^2 = 9,4 \Rightarrow m_e c^2 \frac{v^2}{c^2} = 18,8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{18,8}{0,5 \cdot 10^6} \Rightarrow v^2 = \frac{37,6 c^2}{10^6} \Rightarrow v = 0,0061 c =$
 $= 1,84 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(β) Το δυναμικό αποκρούς V_0 πρέπει να παρείχει αντίσταθμίζει πλήρως την κινητική ενέργεια και να μηδενίσει το ρεύμα, άρα πρέπει $V_0 = E_{\text{κιν}} = 9,4 \text{ eV}$

Άσκηση III 18

(α) Η δύναμη ισούται με την παράγωγο του δυναμικού ως προς r_n , δηλαδή $F_n = \frac{dV}{dr} = 4\lambda r_n^3$.

Είναι $F_n = \frac{m v_n^2}{r_n} \Rightarrow v_n^2 = \frac{4\lambda r_n^4}{m}$ ①

άρα η ολική ενέργεια είναι $E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 + V(r_n) =$
 $= 2\lambda r_n^4 + \lambda r_n^4 = 3\lambda r_n^4$

ισχύει επιπλέον $m v_n r_n = n\hbar \Rightarrow r_n = \frac{n\hbar}{m v_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_n^4 = \frac{n^4 \hbar^4}{m^4 v_n^4} \stackrel{\text{①}}{=} \frac{n^4 \hbar^4 m^2}{16\lambda^2 m^4 r_n^8} \Rightarrow r_n^{12} = \frac{n^4 \hbar^4}{16\lambda^2 m^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_n^4 = \sqrt[3]{\frac{n^4 \hbar^4}{16\lambda^2 m^2}}$ και τελικά $E_n = 3\lambda \sqrt[3]{\frac{n^4 \hbar^4}{16\lambda^2 m^2}} =$
 $= 3\lambda^{\frac{1}{3}} \left(\frac{n^2 \hbar^2}{4m} \right)^{\frac{2}{3}}$

(β) Η ενέργεια του φωτονίου είναι

$E_{\phi} = E_{n_i} - E_{n_f} = 3\lambda^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\hbar^2}{4m} \right)^{\frac{2}{3}} (n_i^{\frac{4}{3}} - n_f^{\frac{4}{3}}) \Rightarrow$

$\Rightarrow hf = 3\lambda^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\hbar^2}{4m} \right)^{\frac{2}{3}} (n_i^{\frac{4}{3}} - n_f^{\frac{4}{3}}) \Rightarrow f = 3\lambda^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{16\pi^2 m} \right)^{\frac{2}{3}} (n_i^{\frac{4}{3}} - n_f^{\frac{4}{3}})$

Άσκηση III 19

(α) Έχουμε τον τύπο $J = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{f^3}{\exp(\frac{hf}{kT}) - 1} \xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}} \frac{2\pi hc}{\lambda^3 (\exp(\frac{hc}{\lambda kT}) - 1)}$

(β) Για τον κεραυνό είναι $\lambda_{\max \kappa} = \frac{0,29}{10^4} = 29 \cdot 10^{-6} \text{ cm} = 29 \cdot 10^{-8} \text{ m}$

Για την πυρηνική έκρηξη είναι $\lambda_{\max \eta} = \frac{0,29}{10^7} \text{ cm} = 29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

$$\frac{J_{\max \kappa}}{J_{\max \eta}} = \frac{\frac{2\pi hc}{(29 \cdot 10^{-8})^3} (\exp(\frac{hc}{29 \cdot 10^{-8} k \cdot 10^4}) - 1)}{\frac{2\pi hc}{(29 \cdot 10^{-11})^3} (\exp(\frac{hc}{29 \cdot 10^{-11} k \cdot 10^7}) - 1)} \cdot \frac{\lambda_{\kappa T_{\kappa} = 0,29}}{\lambda_{\eta T_{\eta} = 0,29}} = 10^{-9}$$

(γ) Παρατηρώντας το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα, αφού έχουμε τα λ_{\max} , βλέπουμε ότι:

- Ο κεραυνός ακτινοβολεί ισχυρότερα στην περιοχή της υπεριώδους ακτινοβολίας ($\lambda_{\max \kappa} = 290 \text{ nm}$)
- Η πυρηνική έκρηξη ακτινοβολεί ισχυρότερα στην περιοχή των ακτίνων X ($\lambda_{\max \eta} = 0,29 \text{ nm}$)

Άσκηση III 22

Διατήρηση της Ενέργειας: $hf + mec^2 = hf' + E_e$

Διατήρηση της Ορμής: $\frac{hf}{c} + 0 = \frac{hf'}{c} \cos \theta + p_x$
(στον οριζόντιο άξονα)

Διατήρηση της Ορμής: $0 + 0 = \frac{hf'}{c} \sin \theta - p_y$
(στον κάθετο άξονα)

Εμείς έχουμε $\theta = 90^\circ$ άρα $p_x = \frac{hf}{c} = \frac{10^5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} =$

$$= 0,53 \cdot 10^{-22} \text{ kg } \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι $\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{h}{mec^2} (1 - \cos \theta) \xrightarrow{\theta=90^\circ} = \frac{1}{hf'} - \frac{1}{hf} = \frac{1}{mec^2} \Rightarrow \frac{1}{hf'} = \frac{1}{0,5 \cdot 10^6 \text{ eV}} + \frac{1}{10^5 \text{ eV}} = 1,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{eV}} \Rightarrow hf' = 0,83 \cdot 10^5 \text{ eV} = 0,83 \cdot 10^5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1,328 \cdot 10^{-14} \text{ J}$

και χρησιμοποιώντας στην διατήρηση της ορμής έχουμε

$$p_{ey} = \frac{hf'}{c} \sin 90^\circ = \frac{1,328 \cdot 10^{-14}}{3 \cdot 10^8} = 0,443 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Άσκηση III 22

Η ενέργεια του ηλεκτρονίου για $n_1=6$ είναι $E_6 = \frac{Z^2 E_1}{6^2} =$
 $\frac{Z=1}{E_1=-13,6\text{eV}} - \frac{13,6}{36} = -0,38\text{eV}$

Για $n_2=4$ είναι $\frac{1^2 \cdot (-13,6)}{16} = -0,85\text{eV}$

$$E_6 - E_4 = E_{\text{φωτ}} \Rightarrow E_{\text{φωτ}} = -0,38 + 0,85 = 0,47\text{eV}$$

Για το ηλεκτρόνιο έχουμε:

$$f_6 = - \frac{2E_1}{h} \frac{1}{n^3} = \frac{2 \cdot 13,6}{4,14 \cdot 10^{-15}} \cdot \frac{1}{6^3} = 0,03 \cdot 10^{15} \text{ Hz} = 0,3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$f_4 = - \frac{2E_1}{h} \frac{1}{n^3} = \frac{2 \cdot 13,6}{4,14 \cdot 10^{-15}} \cdot \frac{1}{64} = 1,03 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$f_{\text{φωτ}} = \frac{E_{\text{φωτ}}}{h} = \frac{0,47}{4,14 \cdot 10^{-15}} = 1,135 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

άρα $f_{\text{φωτ}} > f_4 > f_6$.