ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Χ

***Άσκηση* 1** Αν οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,1]: Δείξτε ότι οι τ.μ.

$$U = \sqrt{-2\ln X}\cos(2\pi Y) \quad \text{και} \quad V = \sqrt{-2\ln X}\sin(2\pi Y)$$

είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή.

***Άσκηση* 2** Έστω πως οι τ.μ. (X, Y) είναι «ομοιόμορφα» κατανεμημένες στο μοναδιαίο δίσκο, δηλαδή στο σύνολο $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, δηλαδή έχουν από κοινού πυκνότητα

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{αν } (x, y) \in S, \\ 0, & \text{αν } (x, y) \notin S. \end{cases}$$

(α′) Βρείτε τις περιθώριες πυκνότητες των X και Y.

(β′) Δείξτε ότι $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = 0$, αλλά οι X, Y δεν είναι ανεξάρτητες.

(γ′) Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη μέση τιμή της X^2 δεδομένης της Y, δηλαδή την $E[X^2|Y]$.

***Άσκηση* 3** 1 Έστω τρεις ανεξάρτητες τ.μ. X, Y, Z με κατανομές, $X \sim$ Εκϑ(1), $Y \sim U[1, 2]$ και $Z \sim \mathrm{Bern}(1/2)$ αντίστοιχα. Βρείτε την πυκνότητα της τ.μ., $W = ZX + (1 - Z)Y$, και εξηγήστε διαισθητικά τι περιγράφει η W.

***Άσκηση* 4** Έστω μία τυχαία μεταβλητή $N \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ και $X_1, X_2, \ldots,$ ακολουθία από *ανεξάρτητες και ισόνομες* (i.i.d) τυχαίες μεταβλητές με σ.μ.π $f_i(x) = f(x)$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες και από την N. Ορίζουμε την τ.μ. $X := \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$.

(α′) Βρείτε τη ροπογεννήτρια της τ.μ. X ως συνάρτηση της ροπογεννήτριας των X_i.

(β′) Υπολογίστε τη μέση τιμή και τη διασπορά της X ως συνάρτηση των $\mathbb{E}\big[X_i\big]$ και $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i)$.

(γ′) Για $X_i \sim \mathrm{Bern}(p)$, να αποδείξετε ότι οι τ.μ. X και $N - X$ είναι ανεξάρτητες.

***Άσκηση* 5** Θεωρήστε X, Y, Z τ.μ. ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας με $\mathbb{E}[X^2], \mathbb{E}[Y^2] < \infty$, $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = 1$, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και Z ανεξάρτητη από το ζεύγος (X, Y). Υπολογίστε την $\mathbb{C}\mathrm{ov}(XZ^2, Y + Z)$.

***Άσκηση* 6** Θεωρούμε τις τ.μ. X, Y με διασπορά $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) = 1$. Η διασπορά του αθροίσματός τους είναι $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + Y) = 3$. Μπορεί οι X, Y να είναι ανεξάρτητες; Αν οι X και $X - \alpha Y$ είναι ανεξάρτητες, τι μπορούμε να συμπεράνουμε για τη σταθερά α;

***Άσκηση* 7** Η τ.μ. X ακολουθεί κατανομή $\chi^2(4)$, ενώ η δεσμευμένη κατανομή της τ.μ. Y με δεδομένη την X είναι ομοιόμορφη στο $[0, X]$, δηλαδή $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}$ για $y \in (0, x)$, και 0 διαφορετικά.

(α′) Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη μέση τιμή της Y δεδομένης της X, δηλαδή την $E[Y|X]$.

(β′) Δείξτε ότι οι τ.μ. $Y, X - Y$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και ακολουθούν κατανομή $\chi^2(2)$.

(γ′) Υπολογίστε την πιθανότητα των ενδεχομένων $\{Y > 1\}$ και $\{X > 2Y\}$.

Σημείωση: $\chi^2(n) = G\big(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\big)$, όπου η σ.π.π. της $G(\alpha, p)$ είναι $f(x) = \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x} 1_{\{x>0\}}$.

***Άσκηση* 8** Η από κοινού σ.π.π. του ζεύγους (X, Y) δίνεται από την

$$f_{X,Y}(x, y) = cy^2(1 - x)\mathbb{1}_{\{0<y<x<1\}}.$$

(α′) Υπολογίστε την τιμή της σταθεράς c.

(β′) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}\left[X > 2Y\right]$.

(γ′) Να βρείτε την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. X.

(δ′) Να υπολογίσετε τη δεσμευμένη μέση τιμή της Y δεδομένης της X, δηλαδή την $E[Y|X]$.

(ε′) Να απόδειξετε πως η τ.μ. $U = Y/X$ είναι ανεξάρτητη από τη X και να βρείτε την κατανομή της.

Άσκηση 9 (α′) Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τ.μ. με σ.κ.π. F_X και F_Y αντίστοιχα, υπολογίστε τη σ.κ.π. των $W = X \vee Y = \max\{X, Y\}$ και $Z = X \wedge Y = \min\{X, Y\}$ και την απο κοινού σ.κ.π. των W και Z.

(β′) Αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $X_i \sim \text{Εκθ}(\lambda_i)$, ποια κατανομή ακολουθεί η $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$;

(γ′) Αν οι U_1, U_2, U_3 είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο (0,1), να βρείτε τη σ.π.π. της δεύτερης μεγαλύτερης από αυτές.

Άσκηση 10 Έστω X, Y ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ. με κατανομή $\mathcal{N}(0, 2)$. Ορίζουμε $U = \frac{X+Y}{2},\ V = \frac{X-Y}{2}$.

(α′) Ποια είναι η σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος (X, Y);

(β′) Υπολογίστε την σ.π.π. του τυχαίου διανύσματος (U, V). Είναι οι τ.μ. U, V ανεξάρτητες;

(γ′) Έστω $S \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ώστε $\{X, Y, S\}$ ανεξάρτητες. Υπολογίστε την σ.π.π. του διανύσματος $(U, \sqrt{V^2 + S^2})$.

(δ′) Θεωρούμε δύο ακόμα τ.μ. Z, W με κατανομή $\mathcal{N}(0, 2)$ ώστε οι $\{X, Y, Z, W\}$ να είναι ανεξάρτητες.
Αν $A = \begin{pmatrix} X & Z \\ W & Y \end{pmatrix}$, και $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$ είναι οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα $\frac{A+A^\top}{2}$ υπολογίστε την από κοινού κατανομή των Λ_1, Λ_2.