Μάθημα "Κυματική και Κβαντική Φυσική" 2021-2022

2η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΚΥΜΑΤΑ ΣΕ 2-3 ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ, ΑΝΑΚΛΑΣΗ-ΔΙΑΘΛΑΣΗ-ΣΥΜΒΟΛΗ-ΠΕΡΙΘ

Άσκηση 1

$a,\ b = 2a,\ \sigma$

α) Από τη σταθερότητα των τεσσάρων πλευρών της μεμβράνης, έχουμε:

$$k_{x,n} = n\cdot\frac{\pi}{a},\quad k_{y,m} = m\cdot\frac{\pi}{b} = m\cdot\frac{\pi}{2a}$$

Ισχύει $c = \frac{\omega}{k} \Leftrightarrow \omega = c\cdot k$, όπου

$$k = \sqrt{k_{x,n}^2 + k_{y,m}^2} = \sqrt{n^2\frac{\pi^2}{a^2} + m^2\cdot\frac{\pi^2}{4a^2}} = \frac{\pi}{a}\cdot\sqrt{n^2 + \frac{m^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \omega_{n,m} = \frac{c\pi}{a}\sqrt{n^2 + \frac{m^2}{4}}$$

β) $$\omega_{n,m} = \frac{c\pi}{a}\sqrt{n^2+\frac{m^2}{4}} = \frac{c\pi}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}(4n^2+m^2)} = \frac{c\pi}{2a}\sqrt{4n^2+m^2} = \frac{c\pi}{2a}\sqrt{(2n)^2+m^2}$$

$$\omega_{n,m} = \frac{c\pi}{2a}\sqrt{(2n+m)^2 - 4n\cdot m}$$

τάξη (n,m)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(1,4)	(2,2)	(2,3)	(1,5)	(2,4)	(3,1)	(1,6)	(3,2)
$\sqrt{4n^2+m^2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{40}$

Παρατηρούμε πως για τις τάξεις (1,4)-(2,2) και (1,6)-(3,2), παρόλο που έχουμ διαφορετικούς γεωμετρικούς σχηματισμούς στη μεμβράνη, έχουμε την ίδια συχνότητα για κάθε ζεύγος

γ) $b = a$

Έχουμε: $u_{nm} \pm u_{mn} = \sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(m\frac{\pi}{a}y\right) \pm \sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right)$

για τις διαγώνιους $y = x$ και $y = a - x$

• Για $y = x$: ο όρος $u_{mn} \pm u_{mn}$ μηδενίζεται για το αρνητικό πρόσημο

• Για $y = a - x$: $u_{nm} \pm u_{mn} = \sin\left[n\cdot\frac{\pi}{a}x\right]\cdot\sin\left[m\frac{\pi}{a}(a-x)\right] \pm \sin\left[m\cdot\frac{\pi}{a}x\right]\cdot\sin\left[n\frac{\pi}{a}(a-x)\right]$

$$= \sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(m\pi - \frac{m}{a}\pi x\right) \pm \sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(n\pi - \frac{n}{a}\pi x\right)$$

$$= \sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\cdot(-1)^{m-1}\cdot\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right) \pm \sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\cdot(-1)^{n-1}\cdot\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)$$

$$= \sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\cdot\left[(-1)^{m-1} \pm (-1)^{n-1}\right]$$

Ο παραπάνω όρος μηδενίζεται όταν το ζεύγος (n,m) αποτελείται από δύο περιττο ή δύο άρτιους αριθμούς κι εφαρμόζουμε ταυτόχρονα το αρνητικό πρόσημο. Επίσης, ο όρος $u_{nm} \pm u_{mn}$ μηδενίζεται και για το θετικό πρόσημο, όταν το ζεύγος (n,m) αποτελείται από έναν άρτιο και έναν περιττό αριθμό.

Άσκηση 3

$\vec{E}(\vec{r},t) = kE_0(-y\hat{x}+x\hat{y})\cos(\omega t)$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\vec{\nabla}\vec{B}=0$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

α) $-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E} = k_0E_0\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ -y & x & 0\end{vmatrix}\cos(\omega t) = \hat{z}\,2kE_0\cos(\omega t)$

$\Rightarrow \vec{B} = \hat{z}\cdot\frac{2kE_0}{\omega}\cdot\sin(\omega t)$

β) $\rho - \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0\cdot k\cdot E_0\left[\frac{\partial(-y)}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial(0)}{\partial z}\right] \Rightarrow \rho=0$

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \Leftrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}+\varepsilon_0\cdot\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Leftrightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{j}\cdot\mu_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \vec{j} = \frac{\vec{\nabla}\times\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{0}{\mu_0} - \varepsilon_0(-kE_0\omega)(-y\hat{x}+x\hat{y})\sin(\omega t)$

$\vec{j} = \varepsilon_0 kE_0\omega(-y\hat{x}+x\hat{y})\sin(\omega t)$

γ) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$

$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ -y & x & 0\\ 0 & 0 & 2/\omega\end{vmatrix}(kE_0)^2\cos(\omega t)\cdot\sin(\omega t)$

$\vec{S} = \frac{(kE_0)^2}{\mu_0}(x\hat{x}+y\hat{y})\cos(\omega t)\sin(\omega t)$

$\langle\vec{S}\rangle_t = \frac{(kE_0)^2}{\mu_0}(x\hat{x}+y\hat{y})\frac{1}{T}\int_0^T\cos(\omega t)\sin(\omega t)dt \Rightarrow \langle\vec{S}\rangle_t = 0$

Άσκηση 4

α) Από τη σχέση διασποράς: $\omega^2 = \frac{c^2}{n^2}k^2 \Leftrightarrow k^2 = \frac{n^2}{c^2}\omega^2$, όπου $k^2 = k_x^2+k_y^2+k_z^2$ $\Bigg\}$ $k_z^2 = \frac{n^2}{c^2}\omega^2 - k_x^2 - k_y^2$

$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{\frac{n^2}{c^2}\omega^2 - \frac{n^2}{a^2}\pi^2 - \frac{m^2}{a^2}\pi^2} \Rightarrow k_z = \sqrt{\frac{n^2}{c^2}\omega^2 - \frac{\pi^2}{a^2}(n^2+m^2)}$

Για να υπάρχει διάδοση στον άξονα z πρέπει $k_z\in\mathbb{R}$, δηλαδή:

$\frac{n^2}{c^2}\omega^2 - \frac{\pi^2}{a^2}(n^2+m^2) > 0 \Leftrightarrow \omega^2 > \frac{c^2}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{a^2}(n^2+m^2) \Rightarrow \omega > \frac{c\pi}{na}\sqrt{n^2+m^2}$

β) Από την παραπάνω σχέση έχουμε: $\omega > \frac{c\pi}{na}\sqrt{n^2+m^2}$, όμως $\lambda = \frac{2c\pi}{\omega}$, άρα

$a > \frac{c\pi}{n\omega}\sqrt{n^2+m^2} = \frac{\lambda}{2n}\sqrt{n^2+m^2} \Leftrightarrow a > \frac{\lambda}{2n}\sqrt{n^2+m^2} \Rightarrow a_{min} = \frac{\lambda}{2n}\sqrt{2}$

γ) Από ερώτημα (α): $\omega = \frac{c}{n}\sqrt{\left[\left(n\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(mk\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_z^2\right]}$

$$U_{ph} = \frac{\omega}{k_z} \Rightarrow U_{ph} = \frac{c}{n}\sqrt{\left[\left(\frac{n\pi}{a k_z}\right)^2 + \left(m\frac{k}{k_z}\cdot\frac{\pi}{a}\right)^2 + 1\right]}$$

$$U_{gr} = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{d}{dk_z}\left[\frac{c}{n}\sqrt{\left(n\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(mk\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_z^2}\right] = \frac{c}{n}\cdot\frac{k_z}{\sqrt{\left[\left(n\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(mk\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_z^2\right]}}$$

$$U_{ph}\cdot U_{gr} = \frac{c}{n}\cdot\cancel{\sqrt{\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(mk\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_z^2\right]}}\cdot\frac{1}{\cancel{k_z}}\cdot\frac{c}{n}\cdot\frac{\cancel{k_z}}{\cancel{\sqrt{\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(mk\frac{\pi}{a}\right)^2 + k_z^2\right]}}}$$

$$U_{ph}\cdot U_{gr} = \left(\frac{c}{n}\right)^2$$

Άσκηση 5

$\vec{E}(x,y,z) = \hat{x}E_0\sin(\omega t)\cos(kz)$, $E_0, \omega, k > 0$

α) $$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ E_0\cdot\sin(\omega t)\cos(kz) & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -E_0\sin(\omega t)\left[-\hat{y}(-k\sin(kz))\right] = -E_0 k\sin(\omega t)\sin(kz)\hat{y}$$

$$\vec{B} = \hat{y}\cdot\frac{E_0 k}{\omega}\cos(\omega t)\cdot\sin(kz)$$

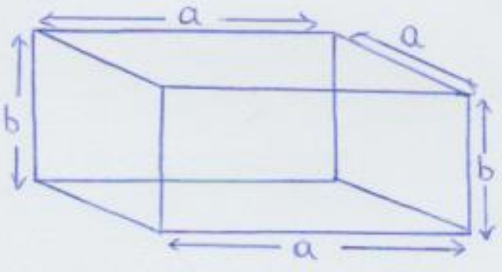
β) $$\rho = \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0\cdot\left[\frac{\partial(E_0\sin(\omega t)\cos(kz))}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z}\right] \Rightarrow \rho = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\cdot E_0\omega\cos(\omega t)\cos(kz)\hat{x}\right) \Rightarrow \vec{J} = -\varepsilon_0 E_0\omega\cos(\omega t)\cos(kz)\hat{x}$$

γ) $$\vec{S} = 2\frac{E_0^2 k}{4\mu_0\omega}\sin(2\omega t)\sin(2kz) \Rightarrow \langle\vec{S}\rangle = 0$$

Άσκηση 2

α)



Εφόσον η μεμβράνη είναι ακλόνητη και στις 4 πλευρές της, ισχύει:

$k_x = n\cdot\frac{\pi}{a}$ και $k_y = m\cdot\frac{\pi}{a}$

$c = \frac{\omega}{k}$, όπου $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{(n^2+m^2)\cdot\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}$,

άρα $\omega = c\cdot k = c\cdot\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2+m^2}$

$U_{nm} = \sin(k_x\cdot x + \theta)\cdot\sin(k_y\cdot y + \varphi)$, όμως $\theta = \varphi = 0$ αφού όλες οι πλευρές της μεμβράνης είναι ακλόνητες.

Συνεπώς, $\Phi_{nm} = \sin(k_x \cdot x) \cdot \sin(k_y \cdot y)$

$U_{nm} - U_{mn} = \sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) - \sin(k_y x) \cdot \sin(k_x y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}y\right) - \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$

Αν $y = x$ (η μια διαγώνιος), τότε:

$U_{nm} - U_{mn} = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) - \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \Rightarrow U_{nm} - U_{mn} = 0$

β) $\omega_{12} = \omega_{21} = \frac{c\pi}{a}\sqrt{1^2+2^2} = \frac{c\pi}{a}\sqrt{5}$

$\omega_{13} = \omega_{31} = \frac{c\pi}{a}\sqrt{1^2+3^2} = \frac{c\pi}{a}\sqrt{10}$

$\omega_{23} = \omega_{32} = \frac{c\pi}{a}\sqrt{2^2+3^2} = \frac{c\pi}{a}\sqrt{13}$ κτλπ.

γ) $\omega_{22} = \frac{c\pi}{a}\sqrt{2^2+2^2} = c\cdot\frac{\pi}{a}2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}\cdot\frac{\pi}{a}2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}\pi\cdot 5\sqrt{2}$

Για τη θεμελιώδη συχνότητα κανονικού τρόπου ταλάντωσης του αντηχείου:

$\omega_{(1,1,1)} = c_{ηχ}\cdot\pi\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = c_{ηχ}\cdot\pi\cdot\frac{1}{a}\sqrt{1+1+64} = \omega_{θεμ}$

$\omega_{θεμ} = c_{ηχ}\cdot\frac{\pi}{a}\sqrt{66} = 30\cancel{0}\frac{\pi}{40\cdot 10^{-3}}\sqrt{66} \Rightarrow \omega_{θεμ} = 75\cdot 10^3\sqrt{66}\pi$ rad/s

$\omega_{22} = \omega_{θεμ} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{T}{\sigma}}\cancel{\pi}\cdot\cancel{5}\sqrt{2} = \overset{15}{\cancel{75}}\cdot 10^3\sqrt{66}\cancel{\pi} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2T}{\sigma}} = 15\cdot 10^3\cdot\sqrt{66} \Leftrightarrow \frac{2T}{\sigma} = 225\cdot 10^6\cdot 66 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{T}{\sigma} = 225\cdot 33\cdot 10^6$

Επίσης $\sigma = \frac{40\cdot 10^{-3}}{(0,4)^2} = \frac{4\cancel{0}\cdot 10^{\cancel{-3}}}{4^2\cdot 10^{\cancel{-2}}} = \frac{1}{4}$

$\Bigg\}\quad T = \frac{33\cdot 225}{4}\cdot 10^6$ sec

Συνεπώς, $T' = \frac{T}{(0,4)^2} = \frac{1856,25\cdot 10^6}{16\cdot 10^{-2}} = 116,015625\cdot 10^8$

$T' \simeq 11,6$ GN/m²