ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Πρόχειρες Σημειώσεις για τις ανάγκες του μαθήματος «Κυματική και Κβαντική Φυσική» της Σχολής Η.Μ.Μ.Υ. του ΕΜΠ
Chapter03-5

Ιωάννη Σ. Ράπτη
Καθηγητή ΣΕΜΦΕ - ΕΜΠ

Αθήνα
2020

Κυματο-ομάδες – Διασπορά και Ταχύτητα Ομάδας

Τα κύματα που διαδίδονται στα κυματικά μέσα, σπάνια είναι είναι απλά "μονοχρωματικά" κύματα, δηλ., αρμονικά κύματα με μία ορισμένη συχνότητα ω. Τα συνηθέστερα κύματα αποτελούνται από μια ομάδα συχνοτήτων, είτε διότι αυτό επιβάλλει η ανάγκη μετάδοσης μίας πληροφορίας ("σήμα"), είτε διότι ο μηχανισμός διέγερσης του κύματος έχει μία παλμική χρονική μορφή και, άρα, αναλύεται (κατά Fourier) σε μία συνεχή κατανομή συχνοτήτων. Αυτού του είδους τα κύματα περιγράφονται συχνά ως κυματο-ομάδες. Σε ένα ιδανικό κυματικό μέσο χωρίς διασπορά (non-dispersive medium), όπου κάθε αρμονικό κύμα έχει την ίδια ταχύτητα διάδοσης, ή ταχύτητα φάσης $\upsilon_{ph} \equiv \omega / k = c$, μία τέτοια κυματο-ομάδα διαδίδεται χωρίς παραμόρφωση (χωρίς "διασπορά"), διότι σε κάθε σημείο του κυματικού μέσου φθάνουν ταυτόχρονα όλες οι συχνότητες της κυματο-ομάδας.

Στην περίπτωση, όμως που μία κυματο-ομάδα διαδίδεται σε ένα κυματικό μέσο το οποίο παρουσιάζει διασπορά, $\omega = \omega(k) \Rightarrow k = k(\omega)$ (βλ. προηγούμενη παράγραφο των σημειώσεων), οι συχνότητες που το αποτελούν, ενώ ξεκινάνε ταυτόχρονα από την πηγή, διαδίδονται με διαφορετική φασική ταχύτητα η κάθε μία, $\upsilon_{ph} \equiv (\omega / k(\omega)) = c(\omega)$. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα ορισμένο σημείο του κυματικού μέσου οι διαφορετικές συχνότητες φτάνουν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, άρα ένας τοπικός δέκτης θα καταγράφει ένα διαφορετικό σήμα από το αρχικό που εκπέμπει η πηγή. Ως προς την ταχύτητα διάδοσης αυτού του σήματος, μπορεί να ορισθεί (υπό προϋποθέσεις, που θα φανούν στη συνέχεια) το μέγεθος ***<u>ταχύτητα ομάδας</u>*** (group velocity: $\upsilon_g \equiv (d\omega / dk)$), το οποίο αποτελεί ένα μέτρο αυτής της ταχύτητας διάδοσης.

Για την ανάλυση της διάδοσης πολυχρωματικών κυματο-ομάδων σε μέσα που παρουσιάζουν διασπορά θα χρησιμοποιήσουμε ως παράδειγμα κυματο-ομάδας ένα κύμα που αποτελείται από μία επαλληλία αρμονικών κυμάτων με συνεχή κατανομή συχνοτήτων, στο διάστημα $\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right) \le \omega \le \left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)$. Αν υποθέσουμε ότι κάθε διαφορική περιοχή συχνοτήτων, $d\omega$, συνεισφέρει με το δικό της δεξιά-οδεύον-κύμα, στη συνολική κυματο-ομάδα, κατά ένα πλάτος συνεισφοράς ίδιο για όλες τις συχνότητες

$$\frac{dy}{d\omega} = y_0 e^{i(kx - \omega t)}, \qquad \text{όπου: } \omega = \omega(k) \Rightarrow k = k(\omega),$$

τότε το συνολικό κύμα, σε κάθε (x,t) θα προκύπτει ως ολοκλήρωμα επί όλων των συχνοτήτων:

$$y = \int dy = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} y_0 e^{i(kx - \omega t)} d\omega$$

όπου $k = k(\omega)$ και, αναπτύσσοντας κατά Taylor τη σχέση διασποράς, περί το κέντρο ω_0 της ζώνης συχνοτήτων, σε πρώτη τάξη: $k(\omega) = k(\omega_0) + \left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) + ...$, προκύπτει

$$y = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} y_0 e^{i\left[k_0 x + (\omega - \omega_0)\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x - \omega t\right]} d\omega = \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} y_0 e^{i\left[k_0 x + (\omega - \omega_0)\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x - \omega t + \omega_0 t - \omega_0 t\right]} d\omega$$

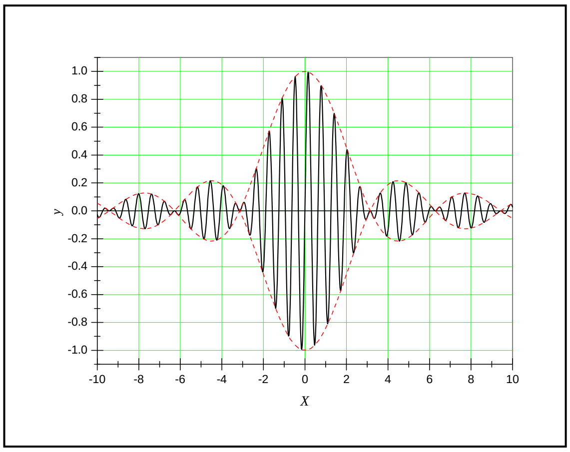
Απομονώνοντας εκτός ολοκληρώματος τους όρους, οι οποίοι είναι σταθεροί ώς προς τη μεταβλητή ολοκλήρωσης, και κάνοντας μια αλλαγή μεταβλητής: $\xi = \omega - \omega_0 \Rightarrow d\xi = d\omega$, (οπότε και : $\xi_{\min,\max} = \pm\Delta\omega/2$) προκύπτει:

$$y = e^{i[k_0 x - \omega_0 t]} \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} y_0 e^{i\left[(\omega-\omega_0)\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x - (\omega-\omega_0)t\right]} d\omega = e^{i[k_0 x - \omega_0 t]} \int_{-\frac{\Delta\omega}{2}}^{+\frac{\Delta\omega}{2}} y_0 e^{i\xi\left[\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x - t\right]} d\xi$$

Ολοκληρώνοντας και λαμβάνοντας τις τιμές στα δύο όρια του ολοκληρώματος:

$$y = y_0 e^{i[k_0 x - \omega_0 t]} \left. \frac{e^{i\xi\left[\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x - t\right]}}{i\left[\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x - t\right]} \right|_{-\Delta\omega/2}^{+\Delta\omega/2} \Rightarrow y = (y_0 \Delta\omega) e^{i[k_0 x - \omega_0 t]} \frac{\sin\left\{\left[\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x - t\right]\frac{\Delta\omega}{2}\right\}}{\left\{\left[\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x - t\right]\frac{\Delta\omega}{2}\right\}}$$

Το αποτέλεσμα γράφεται συνοπτικότερα με τη βοήθεια της νέας μεταβλητής $X = \left\{\left[\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x - t\right]\frac{\Delta\omega}{2}\right\}$, οπότε: $\boxed{y = (y_0 \Delta\omega) e^{i[k_0 x - \omega_0 t]} \frac{\sin X}{X}}$



Η τελευταία μορφή είναι ακριβώς ένα παράδειγμα κυματο-ομάδας, μία παράσταση της οποίας μπορεί να έχουμε, είτε σταθεροποιώντας τη θέση, $x = x_0$, και παρακολουθώντας την χρονική εξάρτηση $y = y(t)$, είτε "σταθεροποιώντας" τον χρόνο, $t = t_0$, και καταγράφοντας, για αυτή τη χρονική στιγμή, ένα στιγμιότυπο ως προς τη θέση. Και στις δύο περιπτώσεις, η μορφή της y φαίνεται στο σχήμα, όπου η συνεχής καμπύλη είναι η πλήρης κυματομορφή, με συχνότητα-κυματαριθμό τα $(\omega_0 \leftrightarrow k_0)$ και με πλάτος που "διαμορφώνεται" από την περιβάλλουσα $\sin(X)/X$, η οποία δηλώνεται (βοηθητικά) με την κόκκινη εστιγμένη γραμμή του σχήματος.

Με βάση την ανωτέρω ανάλυση, το μέγιστο της κυματομορφής δίνεται από το μέγιστο τη περιβάλλουσας $\sin(X)/X$, το οποίο αντιστοιχεί, ως γνωστόν, στην τιμή $X = 0$, δηλ., στον μηδενισμό της έκφρασης $X = \left\{\left[\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x - t\right]\frac{\Delta\omega}{2}\right\}$, άρα αντιστοιχεί σε ένα συνδυασμό των (x,t) τέτοιο ώστε, $\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x - t = 0$. Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}$, όπου $k_0 = k(\omega_0)$. Επομένως αφού τα (x,t), για τα οποία ισχύει το τελυταίο συμπέρασμα, είναι εκείνα που αντιστοιχούν στο μέγιστο τη κυματο-ομάδας, είναι εύλογο να ορίσουμε ως ταχύτητα ομάδας την ταχύτητα του αντιπροσωπευτικού της μεγίστου, δηλ., ταχύτητα ομάδας $\boxed{\upsilon_{gr} \equiv \frac{dx}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}}$.

Από την τελευταία έκφραση για την ταχύτητα ομάδας (group velocity, υ_{gr}), προκύπτει, όπως αναμενόταν, ότι στις περιπτώσεις μη-διασποράς, $\upsilon_{ph} \equiv \omega / k = c$, οπότε ισχύει $\omega = ck$, τότε ισχύει επίσης $\upsilon_{gr} \equiv d\omega / dk = c$, και η ταχύτητα ομάδας συμπίπτει με την ταχύτητα φάσης. Για όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις, όπου δεν υπάρχει γραμμική σχέση μεταξύ των ω και k, (ισοδύναμα, όπου $\upsilon_{ph} = f(\omega) \neq \sigma\tau\alpha\theta.$), τότε οι ταχύτητες φάσης και ομάδας διαφέρουν.

Θεωρήματα Εύρους Ζώνης

Μία κυματο-ομάδα είναι μια κυματομορφή η οποία είναι γενικά εντοπισμένη και στο πεδίο του χώρου και στο πεδίο του χρόνου. Αυτό δεν σημαίνει ότι η κυματομορφή μηδενίζεται απολύτως εκτός κάποιου χρονικού η χωρικού διαστήματος, αλλά γενικά ότι οι μεγάλες τιμές της κύμανσης είναι περιορισμένες χωρο-χρονικά.

Στο προηγούμενο παράδειγμα, (όπου όλες οι συχνότητες συμετείχαν με το ίδιο πλάτος), διαπιστώσαμε ότι ο χωρο-χρονικός περιορισμός εκδηλώνεται με την παρουσία της συνάρτησης $\sin(X)/X$, η οποία, όπως φαινεται στο προηγούμενο σχήμα, δίνει ένα κεντρικό μέγιστο και μικρότερα πλευρικά δευτερεύοντα μέγιστα. Αν θεωρήσουμε ως αντιπροσωπευτική του χωροχρονικού περιορισμού του κυματοπακέτου την χωρο-χρονική έκταση του κεντρικού μεγίστου, τότε διαπιστώνουμε ότι το κεντρικό μέγιστο μηδενίζεται για $\Delta X = \pi$, δηλ., $\Delta X = \Delta\left\{\left[\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x - t\right]\frac{\Delta\omega}{2}\right\} = \pi$. Οπότε μπορούμε να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Μελέτη της χρονικής «διάρκειας» του κεντρικού μεγίστου. Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι βρισκόμαστε σε κάποιο σταθερό σημείο του ελαστικού μέσου, $x = x_0 = \sigma\tau\alpha\theta.$, και αναζητούμε τα χρονικά όρια της διέλευσης του κεντρικού μεγίστου από το σημείο αυτο. Δηλ., $\Delta\left\{\left[\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x_0 - t\right]\frac{\Delta\omega}{2}\right\} = \pi \Rightarrow \boxed{|(\Delta t)|(\Delta\omega) = 2\pi}$

Η τελευταία έκφραση μπορεί να γραφεί και ως $(\Delta t)(\Delta f) = 1$, και αποτελεί το

<u>1^ο Θεώρημα Εύρους Ζώνης</u>: Το χρονικό εύρος (Δt) μία κυματο-ομάδας είναι αντιστρόφως ανάλογο του φασματικού εύρους $(\Delta\omega) = 2\pi(\Delta f)$ των συχνοτήτων από τις οποίες έχει δημιουργηθεί (ή, στις οποίες μπορεί να αναλυθεί) αυτή η κυματο-ομάδα.

(α) Μελέτη της χωρικής «έκτασης» του κεντρικού μεγίστου. Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι για κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, $t = t_0 = \sigma\tau\alpha\theta.$, αποτυπώνουμε ένα στηγμιότυπο του κυματοπαλμού, ως συνάρτηση της θέσης, και αναζητούμε τα χωρικά όρια μέχρι το μηδενισμό του κεντρικού μεγίστου. Δηλ.,

$$\Delta\left\{\left[\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x - t_0\right]\frac{\Delta\omega}{2}\right\} = \pi \Rightarrow \Delta\left\{\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} x\right\}\frac{\Delta\omega}{2} = \pi \Rightarrow \left(\Delta x\right)\left(\frac{dk}{d\omega}\right)_{\omega_0} \Delta\omega = 2\pi \ .$$

Αλλά $\left(dk/d\omega\right)_{\omega_0} \Delta\omega = \Delta k$ και, τελικά, $\boxed{\left(\Delta x\right)\left(\Delta k\right) = 2\pi}$

Η τελευταία έκφραση αποτελεί το

<u>2^{o} Θεώρημα Εύρους Ζώνης</u>: Η χωρική έκταση $\left(\Delta x\right)$ μία κυματο-ομάδας είναι αντιστρόφως ανάλογη του εύρους κυματαριθμών $\left(\Delta k\right) = \Delta\left(2\pi/\lambda\right)$ από τους οποίους έχει δημιουργηθεί (ή, στους οποίους μπορεί να αναλυθεί) αυτή η κυματο-ομάδα.

Τα δύο θεωρήματα εύρους ζώνης είναι θεμελιώδη συμπεράσματα της κυματικής, τόσο όσον αφορά τα κλασικά κυματικά φαινόμενα και τις αντίστοιχες εφαρμογές (π.χ., δημιουργία, διάδοση, και ανίχνευση σήματος), αλλά και όσον αφορά τα κβαντομηχανικά φαινόμενα του μικρόκοσμου, όπου τα δύο θεωρήματα είναι γνωστά και ως σχέσεις αβεβαιότητας του Heisenberg.

Από την άποψη των κλασικών κυματικών φαινομένων, ένα “ακραίο” συμπέρασμα, που προκύπτει από τα δύο θεωρήματα εύρους ζώνης, είναι, π.χ., ότι ένα οδεύον μονοχρωματικό κύμα, για να είναι απολύτως μονοχρωματικό, δηλ., να χαρακτηρίζεται από μία και μοναδική συχνότητα ω_0 και να έχει μηδενικό εύρος συχνοτήτων, $\Delta\omega = 0$, πρέπει να διαρκεί επ’ άπειρον στο πεδίο του χρόνου, $\Delta t \to \infty$! Αντίστοιχα συμπεράσματα προκύπτουν για το εύρος μηκών κύματος, αφού το εύρος κυματαριθμών Δk σχετίζεται με το εύρος μηκών κύματος: $\Delta k = \Delta\left(2\pi/\lambda\right) = 2\pi\left(-1/\lambda^2\right)\Delta\lambda$, άρα, η σχέση: $\left(\Delta x\right)\left(\Delta k\right) = 2\pi \Rightarrow \left(\Delta x\right)2\pi\left(-1/\lambda^2\right)\Delta\lambda = 2\pi \Rightarrow \left|\left(\Delta x\right)\left(\Delta\lambda\right)\right| = \lambda^2$, δηλώνει, ότι ένα αρμονικό κύμα με, αντίστοιχα, απόλυτα καθορισμένο μήκος κύματος λ, δηλ., με αβεβαιότητα μήκους κύματος $\Delta\lambda \to 0$ πρέπει να έχει άπειρη χωρική έκταση $\Delta x \to \infty$.

Στην περίπτωση της κβαντομηχανικής, χρησιμοποιώντας τις θεμελιώδεις σχέσεις που εκφράζουν των κυματο-σωματιδιακό χαρακτήρα του μικρόκοσμου, δηλ, τη σχέση του Planck: $E = \hbar\omega$, και τη σχέση του de Broglie: $p_x = \dfrac{h}{\lambda_x} = \dfrac{h}{2\pi}\dfrac{2\pi}{\lambda_x} \Rightarrow p_x = \hbar k_x$, και γράφοντας, επομένως, τα αντίστοιχα “εύρη”, $\Delta E = \hbar\Delta\omega$, και $\Delta p = \hbar\Delta k$, τα δύο θεωρήματα εύρους ζώνης πάιρνουν τη μορφή των σχέσεων αβεβαιότητας του Heisenberg

$$\left(\Delta t\right)\left(\Delta E\right) = h, \ \text{και} \quad \left(\Delta x\right)\left(\Delta p_x\right) = h$$

όπου: $h = 6,62617\times 10^{-34}\,\mathrm{Js}$, η σταθερά του Planck. Η ερμηνεία αυτών των σχέσεων, στο πλαίσιο της κβαντομηχανικής έχει ως εξής. Κατά την μέτρηση της ενέργειας E που έχει ένα μικροσκοπικό σύστημα κάποια χρονική στιγμή t, οι αβεβαιότητες στη μέτρηση του κάθε μεγέθους δεν μπορεί να έχουν γινόμενο μικρότερο από $\left(\Delta t\right)\left(\Delta E\right) = h$. Αντίστοιχα, κατά την μέτρηση της θέσης x και της ορμής p_x ενός μικροσκοπικού σωματιδίου, οι αβεβαιότητες στη μέτρηση του κάθε μεγέθους δεν μπορεί να έχουν γινόμενο μικρότερο από $\left(\Delta x\right)\left(\Delta p_x\right) = h$.

Σχέσεις διασποράς συγκεκριμένων κυματικών συστημάτων

Στα μη-ιδανικά κυματικά συστήματα, στα οποία η αντίστοιχη κυματική εξίσωση οδηγεί στην ύπαρξη διασποράς, εφαρμόζονται οι παραπάνω σχέσεις για τον υπολογισμό της ταχύτητας φάσης και της ταχύτητας ομάδας, των οποίων η τιμή μπορεί να είναι συνάρτηση της συχνότητας. Η σχέση διασποράς βρίσκεται από την εξίσωση κύματος, μέσω της αντικατάστασης σε αυτή ενός οδεύοντος αρμονικου κύματος $y = y_0 e^{i(kx-\omega t)}$, οπότε η σχέση $\omega = \omega(k)$ που προκύπτει, ως σχέση διασποράς, μπορεί να θεωρηθεί με την αντίστροφη μορφή $k = g(\omega)$, ή $2\pi/\lambda = g(\omega) \Rightarrow \boxed{\lambda(\omega) = 2\pi/g(\omega)}$. Η φυσική ερμηνεία της τελευταίας σχέσης πρέπει να είναι η εξής***: ο πειραματιστής (διεγέρτης) αποφασίζει για τη συχνότητα ω με την οποία διεγείρει το σύστημα, και το ίδιο το σύστημα, (μέσω της δυναμικής που το χαρακτηρίζει και, επομένως, μέσω της αντίστοιχης κυματικής εξίσωσης), καθορίζει το μήκος κύματος λ με το οποίο αυτή η συχνότητα θα διαδοθεί σε αυτό το μέσο***. Στην περίπτωση της μη-ιδανικής χορδής, διαπιστώσαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι οι κυματικές εξισώσεις έχουν τις παρακάτω μορφές και τις αντίστοιχες σχέσεις διασποράς, ανάλογα με την παραδοχή ύπαρξης
εσωτερικής δύναμης επαναφοράς

$$\boxed{\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \sigma y} \Rightarrow \omega^2 = k^2c^2 + \omega_s^2 \Rightarrow \boxed{\omega = k\sqrt{c^2 + \omega_s^2/k^2}, \quad k = \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_s^2}}{c}},$$

ή ***εσωτερικής ροπής επαναφοράς***,

$$\boxed{\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \tau\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}} \Rightarrow \omega^2 = (T/\rho)k^2 + (\tau/\rho)k^4 \Rightarrow \boxed{\omega = k\sqrt{(T/\rho)+(\tau/\rho)k^2}}$$

Στην περίπτωση ***υδάτινων κυμάτων χαμηλού βάθους*** (***σε σχέση με το μήκος κύματος***):

$$\boxed{\frac{1}{gH_0}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{1}{gH_0}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \sqrt{gH_0}}$$

η ταχύτητα διάδοσης των μεταβολών πίεσης και ταχύτητας είναι ανεξάρτητη από την συχνότητα και είναι ίση με $c = \sqrt{gH_0}$, δηλ., δεν εξαρτάται από τη συχνότητα, αλλά εξαρτάται από το βάθος (στο πλαίσιο της προσέγγισης του χαμηλού βάθους).

Για ***υδάτινα κύματα μεγάλους βάθους (σε σχέση με το μήκος κύματος)***, η πλήρης διαφορική εξίσωση είναι της μορφής $\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \left[-hg + \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right]\frac{k\sinh(kH_0)}{\cosh(kH_0)-1}}$, η οποία επιδέχεται μια περαιτέρω απλοποίηση, λόγω της παραδοχης του μεγάλου βάθους: $H_0 >> \lambda \Rightarrow 2\pi\frac{H_0}{\lambda} >> 1 \quad \Rightarrow kH_0 >> 1 \Rightarrow \cosh(kH_0) >> 1 \Rightarrow \boxed{\cosh(kH_0) - 1 \approx \cosh(kH_0)}$ και, τελικά η διαφορική εξίσωση γράφεται: $\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \left[\frac{\sigma}{\rho}k\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - gkh\right]\tanh(kH_0)}$, με σχέση διασποράς $-\omega^2 h = \left[-\frac{\sigma}{\rho}k^3 h - gkh\right]\tanh(kH_0) \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \left[\frac{\sigma}{\rho}k^3 + gk\right]\tanh(kH_0)}$.

Οπότε: $\omega = k\sqrt{\left[\frac{\sigma}{\rho}k + \frac{g}{k}\right]\tanh(kH_0)} \Rightarrow \upsilon_{ph} \equiv \frac{\omega}{k} = \sqrt{\left[\frac{\sigma}{\rho}k + \frac{g}{k}\right]\tanh(kH_0)}$

Για μικρό μήκος κύματος, τέτοιο ώστε (λόγω της μεγάλης τιμής του *k*) να ισχύει και η προσέγγιση $\frac{\sigma}{\rho}k^3 + gk \approx \frac{\sigma}{\rho}k^3$, τότε η σχέση διασποράς, για τα κύματα μεγάλου βάθους και μικρού μήκους κύματος, γινεται: $\omega = k\sqrt{\left[\frac{\sigma}{\rho}k\right]\tanh(kH_0)}$.

Η διαφορική εξίσωση που διέπει την ***διάδοση επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος στην περιοχή του πλάσματος***, με τις εξής παραδοχές:

(α) ο μαγνητικός όρος της δύναμης Lorentz είναι ασήμαντος σε σχέση με τον ηλεκτρικό όρο και απαλείφεται,

(β) το επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα $\left(\hat{x}E_o + \hat{y}B_0\right)e^{i(kz-\omega t)}$ οδεύει στον ελεύθερο χώρο, από το $z<0$ προς το $z=0$, όπου εισέρχεται σε μία περιοχή πλάσματος, που καταλαμβάνει τον ημιχώρο $z>0$, και που χαρακτηρίζεται από πυκνότητα φορέων $n = n_0 = \sigma\tau\alpha\theta$. Σε αυτήν την περίπτωση, όπως εύκολα αποδεικνύεται, $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=0$ και $\nabla^2\vec{E} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}$, οπότε η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή $\boxed{\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \mu_0\varepsilon_0\left(n_0\frac{e^2}{\varepsilon_0 m}\vec{E} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\right)}$.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c$: η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό, και : $\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m} = \omega_p^2$: η συχνότητα πλάσματος φορέων πυκνότητας n_0, φορτίου e και μάζας m, η εξίσωση κύματος γράφεται $c^2\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \omega_p^2\vec{E} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow \omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$.

Οπότε: $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$, δηλ., για συχνότητες μεγαλύτερες της συχνότητας πλάσματος, $\omega > \omega_p$ το κυματάνυσμα είναι πραγματικό και, επομένως, έχουμε ένα οδεύον κύμα να διαδίδεται στην περιοχή του πλάσματος. Για συχνότητες μικρότερες της συχνότητας πλάσματος, $\omega < \omega_p$ το κυματάνυσμα είναι φανταστικό και, επομένως, γράφεται ως $k = i\kappa = i\left(\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}\right)/c$, οπότε το κύμα έχει τη μορφή $\vec{E} = \hat{x}\left(E_o e^{-\kappa z}\right)e^{-i\omega t}$. Άρα, για συχνότητες μικρότερες της συχνότητας πλάσματος, το κύμα υφίσταται εκθετική απόσβεση πλάτους, καθώς εισέρχεται στην περιοχή του πλάσματος.

Πρόβλημα. Ομοιόμορφη ιδανική χορδή, μάζας *m* και μήκους *L*, είναι αναρτημένη από το άκρο *x=0* μέσα σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας με επιτάχυνση βαρύτητας *g*. Στο άλλο άκρο, *x=L* είναι αναρτημένη σημειακή μάζα *M*. (α) Υπολογίστε, σε κάθε σημείο *x* της χορδής , την τάση της χορδής $T = T(x)$. (β) Δείξτε ότι η εξίσωση έγκάρσιας κίνησης ενός διαφορικού τμήματος *dx* της χορδής, περί το σημείο *x*, έχει τη μορφή $dm\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} - T(x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$. (γ) Αναπτύξτε, σε πρώτη τάξη κατά Taylor περί το σημείο *x*, την $T(x+dx)$, αντικαταστήστε στη σχέση του ερωτήματος (β) και δείξτε ποιά είναι η εξίσωση εγκαρσίων κυμάτων στο συγκεκριμένο μέσο. (δ) Στην περίπτωση που στο μέσο αυτό διαδίδεται αρμονικό οδεύον κύμα της μορφής $y(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$, να υπολογίσετε τη σχέση διασποράς $\omega = \omega(k)$.