Εργαστήριο Κυματικής Και Κβαντικής Φυσικής

Σχολή: ***Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών***

Ονοματεπώνυμο:

Τμήμα: ***Β***

Άσκηση: ***23 – Μελέτη των κανονικών τρόπων ταλάντωσης με αεροτροχιά***

Αριθμός Καταλόγου:

Συνεργάτες:

Υπεύθυνος άσκησης: ***Κωνσταντίνος Πατρινός***

Ημερομηνία Διεξαγωγής της άσκησης:

Σκοπός της άσκησης

Στην άσκηση αυτή χρησιμοποιούμε αεροτροχιά προκειμένου να μελετήσουμε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης ενός συστήματος που αποτελείται από συζευγμένα βαγόνια. Στην συνέχεια μελετώντας τα διακροτήματα που δημιουργούνται μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές των ελατηρίων του συστήματος και να τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες θεωρητικές.

Θέμα- Θεωρία

- Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης

  Όταν έχουμε δύο ή περισσότερα σώματα τα οποία είναι συζευγμένα μεταξύ τους και τα θέσουμε να εκτελέσουν ταλαντώσεις τότε υπάρχει μεγάλος αριθμός πιθανών τρόπων κίνησης. Ωστόσο οι τρόποι για τους οποίους η κίνηση του συστήματος είναι αρμονική αποτελούν ειδική κατηγορία και ονομάζονται κανονικοί τρόποι ταλάντωσης. Στους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης κάθε ταλαντωτής εκτελεί απλή αρμονική κίνηση έχοντας ίδια γωνιακή συχνότητα και περνώντας την ίδια χρονική στιγμή με τους υπόλοιπους ταλαντωτές από την θέση ισορροπίας. Για αυτό τον λόγο η διαφορά φάσης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ταλαντωτών του συστήματος είναι 0° ή 180° . Ο αριθμός των κανονικών τρόπων ταλάντωσης ισούται με τον αριθμό των συζευγμένων σωμάτων του συστήματος και η απομάκρυνση κάθε ταλαντωτή από την θέση ισορροπίας δίνεται από την σχέση :

  $y_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi)$, *όπου i = 1, 2, …,n*

- ## Σύστημα με τρεις συζευγμένους ταλαντωτές

Έχουμε τρία σώματα (α, β, γ) τα οποία έχουν την ίδια μάζα M. Όπως αναφέραμε και πριν, επειδή τα σώματα είναι τρία συμπεραίνουμε ότι θα υπάρχουν τρεις κανονικοί τρόποι ταλάντωσης. Ύστερα από μελέτη των κινήσεων του συστήματος καταλήγουμε στις εξής σχέσεις που αφορούν τις γωνιακές συχνότητες και τα πλάτη των ταλαντωτών:

- Για τον 1^{ο} ΚΤΤ : $\omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{M}}$, $A_\alpha = A_\gamma$ και $A_\beta = +\sqrt{2}\,A_\alpha$
- Για τον 2^{ο} ΚΤΤ : $\omega_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{M}}$, $A_\alpha = -A_\gamma$ και $A_\beta = 0$
- Για τον 3^{ο} ΚΤΤ : $\omega_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\sqrt{\frac{k}{M}}$, $A_\alpha = A_\gamma$ και $A_\beta = -\sqrt{2}\,A_\alpha$

Όπου φυσικά ισχύει κατά τα γνωστά ότι $T = \frac{2\pi}{\omega}$, με T να είναι η περίοδος της ταλάντωσης.

- ## Σύστημα με δύο συζευγμένους ταλαντωτές – Διακροτήματα

Όταν έχουμε δύο σώματα (α, β) ίδιας μάζας M τα οποία είναι ενωμένα μεταξύ τους με ένα μαλακό ελατήριο σταθεράς k' και με τα τοιχώματα της αεροτροχιάς με δύο σκληρά ελατήρια σταθεράς k και τα θέσουμε σε ταλάντωση, οι σχέσεις που παίρνουμε είναι οι:

- Για τον 1^{ο} ΚΤΤ : $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}}$, $A_\alpha = A_\beta$
- Για τον 2^{ο} ΚΤΤ : $\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k'}{M}}$, $A_\alpha = -A_\beta$

Επίσης καταλήγουμε σε τέσσερις σχέσεις που αφορούν τις απομακρύνσεις καθενός από τους δύο ταλαντωτές σε κάθε τρόπο ταλάντωσης τις οποίες αν τις κάνουμε υπέρθεση ανά δύο (δηλαδή όσες αφορούν το κάθε σώμα) έχουμε:

$$y_\alpha(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

και

$$y_\beta(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Υποθέτοντας ότι $A_1 = A_2$ και $\phi_1 = \phi_2 = -\frac{\pi}{2}$ καταλήγουμε σε δύο νέες εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν διακροτήματα. Σε αυτή την περίσταση, το κάθε σώμα ταλαντώνεται με μέση γωνιακή συχνότητα $\omega_{av} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ενώ το πλάτος διαμορφώνεται με την γωνιακή συχνότητα του διακροτήματος $\omega_\delta = \omega_2 - \omega_1$. Τα νέα μεγέθη που εμφανίζονται είναι η περίοδος του διακροτήματος $T_\delta = \frac{2\pi}{\omega_\delta}$, η περίοδος διαμόρφωσης $T_{mod} = 2\ T_\delta$ και η μέση περίοδος ταλάντωσης $T_{av} = \frac{4\pi}{\omega_1+\omega_2}$.

Από την μελέτη των απομακρύνσεων γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι τα πλάτη διαμόρφωσης των δύο σωμάτων έχουν μεταξύ τους διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$ καθώς επίσης και ότι ανταλλάσσεται ενέργεια μεταξύ των δύο ταλαντωτών κατά την διάρκεια της κίνησης. Για την ακρίβεια, έχουμε πλήρη ανταλλαγή ενέργειας (δηλαδή πλήρης ακινητοποίηση της κάθε μάζας για ελάχιστο χρονικό διάστημα κατά την διάρκεια της κίνησης) μόνο στην περίπτωση ίσων μαζών, ίσων πλατών ταλάντωσης και ακέραιου λόγου $\frac{\omega_1+\omega_2}{\omega_1-\omega_2}$.

Μέθοδος – Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει μία οριζόντια αεροτροχιά, τρία ίδια βαγόνια και ένα χρονόμετρο. Επίσης για την εκτέλεση των πειραμάτων χρησιμοποιούνται 6 ελατήρια, δύο εκ των οποίων είναι πιο μαλακά ενώ στην συνέχεια γίνεται χρήση βραχιόνων για τον περιορισμό της έκτασης της αεροτροχιάς. Το σφάλμα της εκάστοτε μάζας καθώς κα των λοιπών εξαρτημάτων ισούται με ± 0,1 gr.

Αρχικά θα μετρήσουμε την περίοδο των ΚΤΤ τριών ίδιων συζευγμένων (με ίδια ελατήρια μεταξύ τους και με τα άκρα σταθεράς k) βαγονιών τα οποία είναι τοποθετημένα πάνω στην αεροτροχιά και μπορούν να κινούνται πάνω σε αυτήν με ελάχιστη τριβή. Επιλέγουμε τις αρχικές απομακρύνσεις κατάλληλα - ώστε να διεγείρουμε κάθε φορά διαφορετικό τρόπο ταλάντωσης – και μετράμε την περίοδο του κάθε ΚΤΤ. Έχοντας σε επόμενο πείραμα μετρήσει και τις σταθερές k των ελατηρίων συγκρίνουμε τις πειραματικά υπολογισμένες γωνιακές συχνότητες με τις αντίστοιχες θεωρητικές.

Στο επόμενο πείραμα περιορίζουμε την έκταση της αεροτροχιάς και μειώνουμε τον αριθμό των βαγονιών σε δύο αλλάζοντας παράλληλα το ελατήριο με το οποίο είναι συνδεδεμένα τα βαγόνια με ένα μαλακότερο. Έτσι δημιουργούνται διακροτήματα στα οποία μετράμε την περίοδο των ΚΤΤ και την συχνότητα ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ των δύο σωμάτων.

Τέλος, μετράμε τις σταθερές όλων των ελατηρίων με την βοήθεια ενός βαγονιού και ενός τμήματος της αεροτροχιάς.

Διαδικασία που ακολουθήθηκε

- Τρεις συζευγμένοι ταλαντωτές

Συνδέσαμε το τροφοδοτικό του φυσητήρα στα 220V AC και στην συνέχεια το θέσαμε σε λειτουργία. Ενώσαμε τα βαγόνια μεταξύ τους με τα κατάλληλα σκληρά ελατήρια και τα τοποθετήσαμε πάνω στην αεροτροχιά ενώνοντας την διάταξη με τα άκρα της αεροτροχιάς. Στην συνέχεια τα φέραμε στην θέση ισορροπίας τους και σημειώσαμε ως θέσεις ισορροπίας τις θέσεις y_0 = 46 – 58,8 cm ,y_1 = 97 – 109,8 cm ,y_2 = 147 – 159,8 cm όσον αφορά και το αριστερό και το δεξί άκρο του κάθε βαγονιού. Διεγείραμε τον πρώτο ΚΤΤ μεταφέροντας τα δύο ακριανά βαγόνια κατά 5cm και το μεσαίο βαγόνι αριστερά κατά 7,1 cm και στην συνέχεια αφήνοντας τα ελεύθερα. Μετρήσαμε το χρονικό διάστημα 10 ταλαντώσεων 5 φορές συνολικά και καταγράψαμε τις μετρήσεις που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Στην συνέχεια διεγείραμε τον δεύτερο ΚΤΤ κρατώντας σταθερό το μεσαίο βαγόνια και απομακρύνοντας τα δύο ακριανά προς αντίθετες κατευθύνσεις κατά 5 cm, δηλαδή το δεξί άκρο κάθε βαγονιού ήταν σε θέση y_0 = 53,8 cm , y_1 = 109,8 cm, y_2 = 164,8 cm ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν όσον αφορά τις μετρήσεις. Τέλος, μεταφέραμε τα βαγόνια σε νέες θέσεις απομακρύνοντας τα δύο ακριανά βαγόνια κατά 5 cm δεξιά και το μεσαίο κατά 7,1 cm αριστερά διεγείροντας με αυτόν τον τρόπο τον τρίτο ΚΤΤ και έχοντας το δεξί άκρο κάθε βαγονιού σε θέση y_0 = 63,8 cm , y_1 = 102,7 cm, y_2 = 164,8 cm. Καταγράψαμε όλες τις παραπάνω μετρήσεις στον πίνακα που ακολουθεί.
Να σημειωθεί ότι οι μάζες των βαγονιών ήταν : $M_α$ = 184,2 ± 0,1 gr , $M_β$ = 184,5 ± 0,1 gr , $M_γ$ = 184,7 ± 0,1 gr και ότι το σφάλμα του χρονομέτρου ισούται με $δT_{χρ.}$ = 0,01 sec άρα για 10 μετρήσεις $δ10T_{χρ.}$ = 0,1 sec.

Πίνακας 1

	$10T_1$ (sec)	$10T_2$ (sec)	$10T_3$ (sec)
1η μέτρηση	24.37	13.12	10.12
2η μέτρηση	24.25	13.10	10.09
3η μέτρηση	24.38	13.56	10.03
4η μέτρηση	24.15	13.53	10.25
5η μέτρηση	24.81	13.37	10.12

- Δύο συζευγμένοι ταλαντωτές

Αφαιρέσαμε το ένα βαγόνι και ενώσαμε τα δύο μεταξύ τους με ένα μαλακό ελατήριο. Στην συνέχεια τα μεταφέραμε πάνω στην αεροτροχιά μικραίνοντας την έκταση της στα 110 cm με την βοήθεια ενός σφιγκτήρα και ενώσαμε τα άκρα των βαγονιών με τα άκρα της αεροτροχιάς με δύο σκληρά ελατήρια. Οι νέες θέσεις ισορροπίας είναι y_0 = 20 – 32,8 cm, y_1 = 78,6 – 91,4 cm όσον αφορά και το αριστερό και το δεξί άκρο του κάθε βαγονιού, αν θεωρήσουμε ως αρχή των μετρήσεων το αριστερό άκρο της αεροτροχιάς μετά την προσθήκη του σφιγκτήρα. Για να δούμε τον 1^{ο} ΚΤΤ μετακινήσαμε προς τα δεξιά και τα δύο βαγόνια κατά 1 cm και τα αφήσαμε ελεύθερα να κινηθούν από τις θέσεις που το δεξί άκρο κάθε βαγονιού είναι σε θέση y_0 = 33,8 cm και y_1 = 92,4 cm αντίστοιχα. Μετρήσαμε το χρονικό διάστημα 10 ταλαντώσεων 5 φορές συνολικά και καταγράψαμε τις μετρήσεις που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Στην συνέχεια για να διεγείρουμε τον 2^{ο} ΚΤΤ τα απομακρύναμε κατά 1 cm σε αντίθετες κατευθύνσεις δηλαδή μέχρι το δεξί άκρο κάθε βαγονιού να βρεθεί στις θέσεις y_0 = 31,8 cm και y_1 = 92,4 cm και τα αφήσαμε να ταλαντωθούν καταγράφοντας παράλληλα κάθε 10 ταλαντώσεις επί 5 φορές. Τέλος, για να μετρήσουμε την περίοδο διακροτημάτων κρατήσαμε το αριστερό βαγόνι σταθερό και μεταφέραμε το δεξί βαγόνι κατά 3 cm δεξιά στις θέσεις y_0 = 32,8 cm και y_1 = 94,4 cm. Αυτή την φορά μετρήσαμε το χρονικό διάστημα 8 περιόδων διακροτημάτων 5 φορές συνολικά και καταγράψαμε τις μετρήσεις μας. Να σημειωθεί ότι οι μάζες των βαγονιών αυτή την φορά ήταν : $M_α$ = 184,2 ± 0,1 gr , $M_β$ = 184,5 ± 0,1 gr και ότι το σφάλμα του χρονομέτρου ισούται με $δT_{χρ.}$ = 0,01 sec άρα για 8 μετρήσεις $δ8T_{χρ.}$ = 0,08 sec.

Πίνακας 2

	$10T_1$ (sec)	$10T_2$ (sec)	$8T_δ$ (sec)
1^{η} μέτρηση	19.59	14.22	50.25
2^{η} μέτρηση	19.28	14.35	49.97
3^{η} μέτρηση	19.31	14.52	50.25
4^{η} μέτρηση	19.59	14.47	50.95
5^{η} μέτρηση	19.44	14.11	50.44

- ## Μέτρηση των σταθερών k και k' των ελατηρίων

Αφαιρέσαμε άλλο ένα βαγόνι και μικρύναμε το μήκος της αεροτροχιάς με την βοήθεια του σφιγκτήρα στα 60 cm. Συνδέσαμε το βαγόνι με τα άκρα της αεροτροχιάς με δύο σκληρά ελατήρια και βρήκαμε ότι η θέση ισορροπίας του είναι σε απόσταση y_0 = 24,5 – 37,3 cm. Εν συνεχεία το απομακρύναμε από την θέση ισορροπίας του κατά 5 cm, δηλαδή στην θέση y_0 =42,3 cm και το αφήσαμε ελεύθερο. Μετρήσαμε το χρονικό διάστημα 10 ταλαντώσεων 5 φορές και κρατήσαμε τις μετρήσεις μας. Ύστερα, αλλάξαμε τα ελατήρια και τα αντικαταστήσαμε με μαλακά και επαναλάβαμε τις μετρήσεις που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.
Να σημειωθεί ότι οι μάζες των βαγονιών που χρησιμοποιήθηκαν ήταν :
$M_{α,β}$ = 184,2 ± 0,1 και ότι το σφάλμα του χρονομέτρου ισούται με $δT_{χρ.}$ = 0,01 sec άρα για 10 μετρήσεις $δ10T_{χρ.}$ = 0,1 sec.

Πίνακας 3

	10T (sec)	10T’ (sec)
1η μέτρηση	13.53	22.68
2η μέτρηση	13.78	22.59
3η μέτρηση	13.52	22.17
4η μέτρηση	13.81	22.59
5η μέτρηση	13.81	22.68

Ανάλυση των αποτελεσμάτων

- Υπολογισμός των σταθερών των ελατηρίων

1) Από τον πίνακα 3 μετράμε τις μέσες τιμές $\overline{10T} = \frac{13.53+13.78+13.52+13.81+13.81}{5} =$ $= 13.7$ sec άρα $\overline{T} = \frac{13.7}{10} = 1.37$ sec και $\overline{10T'} = \frac{22.68+22.59+22.17+2259+22.68}{5} =$ $= 22.5$ sec άρα $\overline{T}' = \frac{22.5}{10} = 2.25$ sec. Γνωρίζουμε ότι το στατιστικό σφάλμα δίνεται από τον τύπο $\delta_{10T} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(10T_i - \overline{10T})^2}{n(n-1)}} =$ $\sqrt{\frac{(13.53-13.7)^2+(13.78-13.7)^2+(13.52-13.7)^2+(13.81-13.7)^2+(13.81-13.7)^2}{5(5-1)}} = 0.067\ sec$ και $\delta_{10T'} = \sqrt{\frac{(22.68-22.5)^2+(22.59-22.5)^2+(22.17-22.5)^2+(22.59-22.5)^2+(22.68-22.5)^2}{5(5-1)}} = 0.13$ sec.
Άρα $\delta_T = \frac{0.067}{10} = 0.0067 = 0.007$ sec < 0.01 sec = $\delta T_{χρ.}$ οπότε $T = 1.37 \pm 0.01$ sec και $\delta_{T'} = \frac{0.13}{10} = 0.013 > 0.01$ sec = $\delta T_{χρ.}$ οπότε $T' = 2.25 \pm 0.013$ sec.

2) Γνωρίζουμε ότι $\overline{\omega} = \frac{2\pi}{\overline{T}}$ άρα $\overline{\omega} = 4.58\ rad/sec$ και $\overline{\omega'} = 2.79\ rad/sec$. Από τον νόμο διάδοσης σφαλμάτων έχουμε $\delta\omega = \frac{2\pi}{\overline{T}}\sqrt{(\frac{\delta T}{\overline{T}})^2} = \frac{2\pi\ \delta T}{\overline{T}^2}$ άρα $\delta\omega = 0.023$ rad/sec και $\delta\omega' = 0.016\ rad/sec$. Επομένως $\omega = 4.58\ \pm 0.023\ rad/sec$ και $\omega' = 2.79 \pm 0.016\ rad/sec$.

3) Από τον τύπο $\omega = \sqrt{\frac{2k}{M}}$ λύνοντας ως προς k έχουμε ότι $k = \frac{\omega^2 M}{2} = \frac{2\pi^2 M}{T^2}$ και αντικαθιστώντας τα νούμερα βρίσκουμε ότι k = 1.94 kg/s^2 και k’ = 0.72 kg/s^2. Από τον κανόνα διάδοσης σφαλμάτων βρίσκουμε ότι $\delta k = \sqrt{(\frac{\delta M\ \omega^2}{2})^2 + \ (M\ \omega\ \delta\omega)^2}$

επομένως δk = 0.02 kg/s^2 και δk' = 0.008 kg/s^2. Άρα τελικά k = 1.94 ± 0.02 kg/s^2 και k'= 0.72 ± 0.008 kg/s^2.

- Υπολογισμός των συχνοτήτων των ΚΤΤ και της ω_δ

1) Η μέση τιμή των μαζών M_α, M_β, M_γ ορίζεται ως M = $\frac{M\alpha + M\beta + M\gamma}{3}$ = 184.5 ± 0.2 gr όπου το σφάλμα υπολογίστηκε από τον νόμο διάδοσης σφαλμάτων ως
$\delta M = \sqrt{(\frac{\delta M\alpha}{3})^2 + (\frac{\delta M\beta}{3})^2 + (\frac{\delta M\gamma}{3})^2}$.
Από γνωστές εξισώσεις που αναφέραμε στο θεωρητικό μέρος σχετικά με τις γωνιακές συχνότητες των τριών ΚΤΤ του συστήματος έχουμε :
ω_1 = 2.48 rad/sec , ω_2 = 4.58 rad/sec και ω_3 = 5.99 rad/sec.
Κάνοντας πράξεις με βάση τον νόμο διάδοσης σφαλμάτων καταλήγουμε στου παρακάτω τύπους για τα σφάλματα δω:
$\delta\omega_1 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\ \sqrt{(\frac{\delta k}{2\sqrt{kM}})^2 + (\frac{\sqrt{k}\delta M}{2M\sqrt{M}})^2} =$ 0.02 rad/sec ,
$\delta\omega_2 = \sqrt{2}\ \sqrt{(\frac{\delta k}{2\sqrt{kM}})^2 + (\frac{\sqrt{k}\delta M}{2M\sqrt{M}})^2} =$ 0.02 rad/sec και
$\delta\omega_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\ \sqrt{(\frac{\delta k}{2\sqrt{kM}})^2 + (\frac{\sqrt{k}\delta M}{2M\sqrt{M}})^2} =$ 0.03 rad/sec.

2) Από τον πίνακα 1 μετράμε τις μέσες τιμές $\overline{10T_1} = \frac{24.37+24.25+24.38+24.15+24.81}{5} =$
= 24.4 sec άρα $\overline{T_1} = \frac{24.4}{10}$ = 2.44 sec , $\overline{10T_2} = \frac{13.12+13.10+13.56+13.53+13.37}{5} =$
= 13.3 sec άρα $\overline{T_2} = \frac{13.3}{10}$ = 1.33 sec και $\overline{10T_3} = \frac{10.12+10.09+10.03+10.25+10.12}{5} =$
= 10.1 sec άρα $\overline{T_3} = \frac{10.1}{10}$ = 1.01 sec. Γνωρίζουμε ότι το στατιστικό σφάλμα δίνεται από τον τύπο $\delta_{10T1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(10T_i - \overline{10T})^2}{n(n-1)}} =$
$\sqrt{\frac{(24.37-24.4)^2+(24.25-24.4)^2+(24.38-24.4)^2+(24.15-24.4)^2+(24.81-24.4)^2}{5(5-1)}} = 0.11\ sec$ και
$\delta_{10T2} = \sqrt{\frac{(22.68-22.5)^2+(22.59-22.5)^2+(22.17-22.5)^2+(22.59-22.5)^2+(22.68-22.5)^2}{5(5-1)}}$ = 0.10 sec
και $\delta_{10T3} = \sqrt{\frac{(10.12-10.1)^2+(10.09-10.1)^2+(10.03-10.1)^2+(10.25-10.1)^2+(10.12-10.1)^2}{5(5-1)}}$ = 0.04 sec.
Άρα $\delta_{T1} = \frac{0.11}{10}$ = 0.011 > 0.01 sec = $\delta T_{\chi\rho.}$ οπότε T_1 = 2.44 ± 0.01 sec και
$\delta_{T2} = \frac{0.10}{10}$ = 0.01 = 0.01 sec = $\delta T_{\chi\rho.}$ οπότε T2 = 1.33 ± 0.01 sec
και $\delta_{T3} = \frac{0.04}{10}$ = 0.004 < 0.01 sec = $\delta T_{\chi\rho.}$ οπότε T3 = 1.01 ± 0.01 sec.

Γνωρίζουμε ότι $\overline{\omega} = \frac{2\pi}{\overline{T}}$ άρα $\overline{\omega 1} = 2.57\ rad/sec, \overline{\omega 2} = 4.72\ rad/sec$ και $\overline{\omega 3} = 6.22\ rad/sec$. Από τον νόμο διάδοσης σφαλμάτων έχουμε δω = $\frac{2\pi}{\overline{T}} \sqrt{(\frac{\delta T}{\overline{T}})^2} = \frac{2\pi\ \delta T}{\overline{T}^2}$ άρα δω1 = 0.01 rad/sec , δω2 = 0.04 rad/sec και δω3 = 0.06 . Επομένως $\omega 1 = 2.57\ \pm 0.01\ rad/sec$, $\omega 2 = 4.72 \pm 0.04\ rad/sec$ και $\omega 3 = 6.22 \pm 0.06\ rad/sec$. Συγκρίνοντας τις πρακτικές τιμές με τις θεωρητικά αναμενόμενες τιμές βλέπουμε ότι τα νούμερα είναι αρκετά κοντά αλλά όχι τα ίδια γεγονός που δικαιολογείται από σφάλματα των οργάνων, σφάλματα κατά την διεξαγωγή του πειράματος κλπ.

3) Η μέση τιμή των μαζών M_α , M_β ορίζεται ως M = $\frac{M\alpha + M\beta}{2}$ = 184.4 ± 0.1 gr όπου το σφάλμα υπολογίστηκε από τον νόμο διάδοσης σφαλμάτων ως δM = $\sqrt{(\frac{\delta M\alpha}{2})^2 + (\frac{\delta M\beta}{2})^2}$. Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα και χρησιμοποιώντας για τα θεωρητικά σφάλματα τους τύπους $\delta\omega_1 = \sqrt{(\frac{\delta k}{2\sqrt{kM}})^2 + (\frac{\sqrt{k}\delta M}{2M\sqrt{M}})^2}$ και $\delta\omega_2 = \sqrt{(\frac{\delta k}{2\sqrt{(k+2k')M}})^2 + (\frac{\sqrt{k+2k'}\delta M}{2M\sqrt{M}})^2 + (\frac{2\delta k}{2\sqrt{(k+2k')M}})^2}$ καταλήξαμε στις τιμές που αναγράφονται στον παρακάτω πίνακα:

	1ος ΚΤΤ	**2ος ΚΤΤ**
ω_i (θεωρητικές τιμές)	3.24 rad/sec	4.28 rad/sec
$\delta\omega_i$	0.09 rad/sec	0.10 rad/sec
$\overline{T}_i$	1.94 sec	1.43 sec
δT_i	0.03 sec	0.01 sec
$\overline{\omega i}$ (πρακτικές τιμές)	3.23 rad/sec	4.39 rad/sec
δωi	0.05 rad/sec	0.09 rad/sec

Πάλι συγκρίνοντας τις θεωρητικές με τις πρακτικές τιμές βλέπουμε ότι είναι αρκετά κοντά.

4) Από την τελευταία στήλη του πίνακα υπολογίζουμε την μέση περίοδο των διακροτημάτων $\overline{8T\delta} = 50.4\,\text{sec}\ \ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \overline{T\delta} = 6.3\ sec$, $\delta T_\delta = 0.02\ sec$, $\overline{\omega\delta}$ = 1 rad/sec και
$\delta\omega_\delta$ = 0.003 sec σύμφωνα με τους τύπους που έχουμε προαναφέρει. Οι αναμενόμενες θεωρητικές τιμές είναι ωδ = $\omega_2 - \omega_1$ = 2.15 rad/sec και το σφάλμα υπολογίζεται από τον τύπο $\delta\omega_\delta = \sqrt{\delta\omega_1{}^2 + \delta\omega_2{}^2}$ = 0.04 rad/sec. Βλέπουμε ότι εδώ οι διαφορές μεταξύ θεωρητικής και πρακτικής τιμής είναι μεγαλύτερη, το οποίο

οφείλεται στο γεγονός ότι η θεωρητική τιμή εξαρτάται από δύο μεταβλητές (ω_1 ,ω_2) ενώ η πρακτική τιμή από μία (T_δ).

5) Σε περίοδο ενός διακροτήματος έχουμε πλήρη ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ των δύο ταλαντωτών αφού κάθε βαγόνι εκτελεί μία πλήρη ταλάντωση. Άρα f = f_δ = $\frac{1}{T_\delta}$ = 0.15 Hz με σφάλμα ίσο με δf = $\frac{\delta T_\delta}{{T_\delta}^2}$ = 0.0005 sec. Επομένως f = 0.15 ± 0.0005 Hz.