ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ VI

Άσκηση 1 Έστω τυχαία μεταβλητή X, η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = ce^{-4|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

με $c > 0$.

(α′) Ποια είναι η τιμή της c;

(β′) Ποια είναι η μέση τιμή $\mathbb{E}(X)$;

(γ′) Ποια είναι η διασπορά $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$;

(δ′) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $\mathbb{P}\big(|X| > \frac{1}{2}\big)$.

Άσκηση 2 Στο χρηματιστήριο, κάθε μέρα η τιμή μιας μετοχής αυξάνεται κατά 1€ με πιθανότητα 14%, αλλιώς μένει σταθερή, και οι αλλαγές αυτές είναι ανεξάρτητες από τη μια μέρα στην άλλη. Έστω ότι το πρωί της πρώτης μέρας η τιμή είναι 100 € και έστω Y_i η μεταβολή της τιμής κατά την i ημέρα.

(α′) Ποια είναι η κατανομή των τυχαίων μεταβλητών Y_i;

(β′) Έστω X η συνολική διαφορά της τιμής μετά από ένα μήνα. Ποια είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής X;

(γ′) Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου E ότι μετά από ένα μήνα η τιμή θα είναι μεταξύ 110 και 112 € (συμπεριλαμβανομένων);

(δ′) Αν Z είναι η τιμή της μετοχής μετά απο 60 μέρες, να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της.

(ε′) Αν αντί για 1€ η τιμή αυξανόταν κατά 2€ ή έμενε σταθερή (με τις ίδιες πιθανότητες), να βρεθεί η μέση τιμή και η διασπορά της τιμής της μετοχής μετά από 60 μέρες.

Άσκηση 3 Έστω X συνεχής τ.μ. με σύνολο τιμών το $S = [2, +\infty)$ και πυκνότητα $f(x) = c/x^2$, για $x \in S$.

(α′) Να υπολογίσετε την τιμή της σταθεράς c.

(β′) Να αποδείξετε πως η μέση τιμή είναι άπειρη, $\mathbb{E}(X) = +\infty$.

Άσκηση 4 Το μέτρο X της ταχύτητας ενός μορίου αερίου μάζας m σε απόλυτη θερμοκρασία T είναι μια τ.μ. με κατανομή Maxwell-Boltzmann. Συγκεκριμένα η σ.π.π. της δίνεται από την

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-\beta x^2} & \text{για } x > 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου $\beta = \frac{m}{2KT}$ και α είναι μια σταθερά κανονικοποίησης (K είναι η σταθερά του Boltzmann.)
α) Υπολογίστε τη σταθερά α.
β) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της X.
γ) Υπολογίστε την αναμενόμενη τιμή της κινητικής ενέργειας $E = \frac{1}{2}mX^2$.

Άσκηση 5 Η διάρκεια ζωής (σε ώρες) ενός προϊόντος είναι τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{1200} e^{-\frac{x}{1200}}, \; x > 0.$$

Κάθε μονάδα του προϊόντος έχει κόστος κατασκευής €5.000, πωλείται προς €7.000, και συνοδεύεται από εγγύηση για τη διάρκεια ζωής της. Συγκεκριμένα, αν αυτή είναι μικρότερη από 1000 ώρες το αντίτιμο της αγοράς επιστρέφεται στον αγοραστή, ενώ το προϊόν πωλείται προς €500 ως παλαιό υλικό.

(α′) Υπολογίστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος.

(β′) Ποια διάρκεια ζωής πρέπει να προβλέπει η εγγύηση ώστε το αναμενόμενο κέρδος ανά μονάδα προϊόντος να είναι τουλάχιστον €800;

Άσκηση 6 (α′) Αν $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ βρείτε την σ.π.π. f_Y της τ.μ. $Y = X^2$. Στη συνέχεια, υπολογίστε την $\mathbb{E}\big[Y\big]$ με δύο τρόπους: (i) με τον ορισμό, χρησιμοποιώντας τη σ.π.π. f_Y και (ii) με τον τύπο (10.10) στο βιβλίο των Κοντογιάννη-Τουμπή για τη μέση τιμή μιας συνάρτησης της τ.μ. X.

(β′) Αν $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ βρείτε την σ.π.π. της τ.μ. $Y = e^X$ (log-normal distribution).

Άσκηση 7 (α′) Αν η X είναι μια τ.μ. με τιμές στο $\{0,1,2,\ldots\}$, να αποδείξετε ότι

$$\mathbb{E}\big[X\big] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\big[X > k\big] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}\big[X > t\big] dt.$$

(β′) Αν η X είναι μια μη αρνητική συνεχής τ.μ., να αποδείξετε ότι $\mathbb{E}\big[X\big] = \displaystyle\int_0^{\infty} \mathbb{P}\big[X > t\big] dt$. Στη συνέχεια, να συμπεράνετε ότι για μια (γενική) συνεχή τ.μ. X, ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\big[X\big] = \int_0^{\infty} \mathbb{P}\big[X > t\big] dt - \int_0^{\infty} \mathbb{P}\big[X < -t\big] dt$$

Άσκηση 8 Έστω X μια συνεχής τ.μ. με σ.κ.π. F. Δείξτε ότι η $H(c) = \mathbb{E}\big[\,|X - c|\,\big]$ ελαχιστοποιείται αν και μόνο αν $F(c) = 1/2$. Ένα τέτοιο c το ονομάζουμε *διάμεσο τιμή* της X.

Άσκηση 9 Σε ένα ντουλάπι υπάρχουν 32 διαφορετικά ζευγάρια παπούτσια. Αν βγάλουμε από το ντουλάπι 20 παπούτσια τυχαία, ποιο είναι το αναμενόμενο πλήθος ζευγαριών που θα απομείνουν;

Άσκηση 10 Ο κατάλογος ενός εστιατορίου έχει N πιάτα. Κάθε φορά που επισκέπτεστε το εστιατόριο επιλέγετε ένα από αυτά στην τύχη. Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός v_N των επισκέψεων που πρέπει να κάνετε μέχρι να δοκιμάσετε όλα τα πιάτα; Συμπεράνετε ότι $v_N \sim N \log N$, καθώς $N \to \infty$.