2η Σειρά Ασκήσεων Αναστάσιος Παπαζαφειρόπουλος

03118079

Άσκηση 1:

Από ΚΤΤ για την χορδή προκύπτει: $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$

και θεωρούμε $f(x) = A\sin(kx+\theta)$

κυματική εξίσωση: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

ακλόνητα άκρα: $y(x=0,t)=0 \Rightarrow A\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0$

$y(x=a,t)=0 \Rightarrow A\sin(ka)=0 \Rightarrow ka = n\pi \Rightarrow k=\frac{n\pi}{a}, n=1,2.$

άρα: $y(x,t) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos(\omega t)$, $n=1,2,\dots$

Ενώ ισχύουν: $k=\frac{\omega}{c}$ και $c=\sqrt{\frac{T_x}{\rho}}$

Από ΚΤΤ για τη μεμβράνη: $z(x,y,t) = \cancel{g}f(x,y)\cos(\omega t) \Rightarrow$

$z(x,y,t) = X(x)Y(y)\cos(\omega t)$

και θεωρούμε: $X = A\sin(k_x x+\theta)$, $Y = B\sin(k_y y+\varphi)$

Συνοριακές συνθήκες (ακλόνητα άκρα):

- $X(x=0,y,t)=0 \Rightarrow \sin\theta=0 \Rightarrow \theta=0$
- $X(x=b,y,t)=0 \Rightarrow \sin(k_x b)=0 \Rightarrow k_x = \frac{m_1\pi}{b}$, $m_1=1,2,\dots$
- $Y(\cancel{x}y=0,t)=0 \Rightarrow \sin(\varphi)=0 \Rightarrow \varphi=0$
- $Y(\cancel{x},y=0,t)=0 \Rightarrow \sin(k_y b)=0 \Rightarrow k_y = \frac{m_2\pi}{b}$, $m_2=1,2,\dots$

άρα: $y(x,y,t) = C\sin\left(\frac{m_1\pi}{b}x\right)\sin\left(\frac{m_2\pi}{b}y\right)\cos(\omega t)$, $m_1,m_2=1,2,\dots$

Ενώ ισχύουν: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow$ και $c=\sqrt{\frac{T_\mu}{\sigma}}$

$k_x^2+k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

α) είναι: $f_{x(1)} \longrightarrow k = \frac{\pi}{a}$ και $f_{\mu(1,1)} \rightarrow k_x = k_y = \frac{\pi}{b}$

άρα:
$$\omega_1 = c\,k \Rightarrow$$
$$(2\pi) f_{x(1)} = \sqrt{\frac{T_x}{\rho}} \cdot \frac{\pi}{a} \quad (1)$$

$$\omega_{(1,1)} = c\,k \Rightarrow$$
$$2\pi f_{\mu(1,1)} = \sqrt{\frac{T_\mu}{\sigma}} \cdot \frac{\pi}{b}\sqrt{2}$$

Από: $\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{f_{x(1)}}{f_{\mu(1,1)}} = \frac{\sqrt{\frac{T_x}{\rho}} \cdot \frac{\pi}{a}}{\sqrt{\frac{T_\mu}{\sigma}} \cdot \frac{\pi}{b}\sqrt{2}} \Rightarrow 2\frac{T_\mu}{\sigma} = \frac{T_x b^2}{\rho \cdot a^2} \Rightarrow$

$$\underline{T_x = \frac{2\rho a^2}{\sigma b^2} T_\mu}$$

β) Θεωρώντας ως «δεύτερο» ΚΤΤ, τέτοιον ώστε να ισχύει:

$f_{x(2)} \longrightarrow k = \frac{2\pi}{a}$, $f_{\mu(1,2)} \rightarrow k_x = \frac{\pi}{b}$, $k_y = \frac{2\pi}{b}$

$$\omega_x = C_x k = C_x \frac{2\pi}{a}$$

$$\omega_{m_1 m_2} = C_\mu k = C_\mu \pi \sqrt{\left(\frac{m_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{b}\right)^2}$$
$$= \frac{C_\mu \pi}{b}\left(\sqrt{m_1^2 + m_2^2}\right) \xrightarrow[m_2 = 2]{m_1 = 1}$$
$$\frac{C_\mu \pi \sqrt{5}}{b}$$

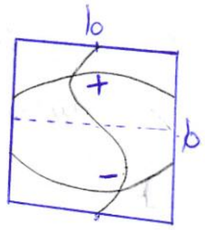
οπότε είναι: $\frac{f_{x(2)}}{f_{\mu(1,2)}} = \frac{C_x \frac{2\pi}{a}}{C_\mu \pi \frac{\sqrt{5}}{b}} = \frac{2b}{a\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{T_x \cdot \sigma}{\rho \cdot T_\mu}} \overset{(a)}{=}$

$$= \frac{2b}{a\sqrt{5}}\sqrt{\frac{2\rho a^2 \sigma}{\sigma b^2 \cdot \rho}} = \frac{2b}{a\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{2a^2}{b^2}} = \frac{2\sqrt{2}\, a \cdot b}{a \cdot b \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \text{ ή}$$

$$\frac{f_{x(2)}}{f_{\mu(1,2)}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

γ) είναι: i) $Z_{12}(x,y,t_0) = C_0 \sin\left(\frac{\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right)\cos(\omega t_0)$.

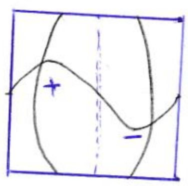
Το σχήμα που αναπαριστά αυτό τον τρόπο ταλάντωσης, είναι:



$$\omega_{12} = Ck = \frac{C\pi\sqrt{5}}{b}$$

ii) $Z_{21}(x,y,t_0) = C_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos(\omega t_0)$

Το σχήμα που αναπαριστά αυτό τον τρόπο ταλάντωσης, είναι:



$$\omega_{21} = Ck = \frac{C\pi\sqrt{5}}{b} \; (=\omega_{12}).$$

δ) $a = 1\,m$, $b = 0,5$, $f_{x(1)} = f_{\mu(1,1)} = 50\,Hz$.

χορδη: $C_x = \frac{\omega_x}{k} \Rightarrow C_x = \frac{2\pi f_{x(1)} \cdot a}{\pi} \Rightarrow C_x = 100\,m/sec.$

μεμβράνη: $C_\mu = \frac{\omega_\mu}{k} \Rightarrow C_\mu = \frac{b\, f_{\mu(1,1)} \cdot \pi \cdot 2}{\pi\sqrt{2}} \Rightarrow C_\mu = \frac{50}{\sqrt{2}} = 25\sqrt{2}\,m/sec$

ε) είναι: $Z = \sqrt{T \cdot \rho}$ στην χορδή όταν $C = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, οπότε

αντίστοιχα όταν είναι: $C = \sqrt{(\text{μέτρο σκληρότητας})/(\text{μέτρο αδράνειας})}$

Θα είναι: $Z = \sqrt{(\text{μέτρο σκληρότητας}) \cdot (\text{μέτρο αδράνειας})}$

Άσκηση 2:

α) Αναζητούμε ΚΤΤ της μορφής:

$$p(x,y,z,t) = f(x,y,z)\cos(\omega t) = X(x)Y(y)Z(z)\cos(\omega t)$$

Αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση:

$$\frac{1}{c_{nx}^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

και διαιρώντας κατά μέλη, μετά τις παραγωγίσεις, με την ίδια τη συνάρτηση $p(x,y,z,t) = X(x)Y(y)Z(z)\cos(\omega t)$, παίρνουμε τη σχέση:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -\frac{\omega^2}{c_{nx}^2}$$

στο αριστερό μέλος της οποίας, κάθε προσθετέος, είναι συνάρτηση άλλης μεταβλητής, άρα δεν μπορεί παρά να είναι μια σταθερή ποσότητα. Θέτουμε:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_y^2, \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_z^2$$

με $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c_{nx}^2}$

Οι λύσεις θα είναι της μορφής:

$$X = A\sin(k_x x + \theta_x')$$
$$Y = B\sin(k_y y + \theta_y'),$$
$$Z = C\sin(k_z z + \theta_z)$$

άρα, τελικά: $p(x,y,z,t) = p_0\cos(k_x x + \theta_x)\cos(k_y y + \theta_y)\cos(k_z z + \theta_z)\cos(\omega t)$

με: $\omega = c_{nx}\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$

β) Εφαρμόζουμε τη συνοριακή συνθήκη για κάθε πλευρά:

Πλευρά: $L_1 \times L_3$:

$(x,0,z)$: $\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{y=0} = 0 \Rightarrow -k_y \sin\theta_y = 0 \Rightarrow \theta_y = 0$ (k_y δεν είναι πάντα 0)

(x,L_2,z): $\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{y=L_2} = 0 \Rightarrow -k_y \sin(k_y L_2) = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n_y \pi}{L_2}$, $n_y = 1,2,\ldots$

Πλευρά: $L_2 \times L_3$:

$(0,y,z)$: $\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow -k_x \sin(\theta_x) = 0 \Rightarrow \theta_x = 0$

(L_1,y,z): $\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=L_1} = 0 \Rightarrow -k_x \sin(k_x L_1) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{n_x \pi}{L_1}$, $n_x = 1,2,\ldots$

Πλευρά: $L_1 \times L_2$:

$(x,y,0)$: $\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \Rightarrow -k_z \sin(\theta_z) = 0 \Rightarrow \theta_z = 0$

(x,y,L_3): $\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=L_3} = 0 \Rightarrow -k_z \sin(k_z L_3) = 0 \Rightarrow k_z = \frac{n_z \pi}{L_3}$, $n_z = 1,2,\ldots$

Επομένως οι τιμές ~~των φάσεων~~ είναι:

- $\{\theta_x, \theta_y, \theta_z\} = \{0, 0, 0\}$
- $\{k_x, k_y, k_z\} = \left\{\frac{n_x \pi}{L_1}, \frac{n_y \pi}{L_2}, \frac{n_z \pi}{L_3}\right\}$, όπου: $n_x, n_y, n_z = 1,2,\ldots$

Και: $\omega_{n_x,n_y,n_z} = c_n k = c_{nx} \cdot \pi \sqrt{\left(\frac{n_x}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_3}\right)^2}$

γ) Θεμελιώδης συχνότητα ΚΤΤ ανηχείου: $n_x = n_y = n_z = 1$, άρα:

$$\omega_{(1,1,1)} = C_{ux}\pi \sqrt{\left(\frac{1}{L_1}\right)^2+\left(\frac{1}{L_2}\right)^2+\left(\frac{1}{L_3}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\omega_{(1,1,1)} = C_{ux}\pi\sqrt{1+16+100} \Rightarrow 2\pi f_{(1,1,1)} = C_{ux}\pi\sqrt{117} \Rightarrow$$

$$f_{(1,1,1)} = \frac{C_{ux}\sqrt{117}}{2}.$$

Από ΚΤΤ για την χορδή προκύπτει ότι η κίνησή της ικανοποιείται από τη σχέση: $y(x,t) = A\sin(k_x+\theta)\cos(\omega t)$.

Με εφαρμογή των οριακών συνθηκών για ακλόνητα άκρα, έχουμε: $y(x=0,t) = \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$$y(x=L_1,t) = \sin(kL_1) = 0 \Rightarrow kL_1 = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L_1}, n=1,2,\ldots$$

Θεμελιώδης συχνότητα: $n=1 \Rightarrow k=\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \pi \Rightarrow \lambda = 2$ m.

άρα: $\frac{C}{f_{(1)}} = 2 \Rightarrow C = 2f_{(1)} \xrightarrow{f_{(1)} = f_{(1,1,1)}}$

$$C = C_{ux}\sqrt{117} \Rightarrow \sqrt{\frac{T}{\rho}} = C_{ux}\sqrt{117} \Rightarrow$$

$$T = C_{ux}^2\cdot(117)\rho \Rightarrow T = (117)(0,01)\cdot(340)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{T = 135.252\ N.}$$

Άσκηση 3:

Εξισώσεις Maxwell:

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (α), $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ (β), $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (γ),

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$ (δ), με: $\vec{E}(\vec{r},t) = kE_0(-y\hat{x} + x\hat{y})\cos(\omega t)$.

α) Από την (γ) εξίσωση Maxwell, έχουμε:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

είναι:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -kE_0 y\cos(\omega t) & kE_0 x\cos\omega t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0\hat{x} + 0\hat{y} + \hat{z}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ -kE_0 y\cos(\omega t) & kE_0 x\cos(\omega t) \end{vmatrix} =$$

$$= 2kE_0\cos(\omega t)\cdot\hat{z} \Rightarrow \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 2kE_0\cos(\omega t)\hat{z} \Rightarrow$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = -\frac{2kE_0}{\omega}\sin(\omega t)\,\hat{z} + B_{const}$$

Θεωρούμε ότι δεν υπάρχει συνιστώσα σταθερού μαγνητικού πεδίου, οπότε $B_{const} = 0 \Rightarrow \vec{B}(\vec{r},t) = -B_0\sin(\omega t)\hat{z}$,

όπου: $B_0 = \dfrac{2kE_0}{\omega}$.

β) Από την (α) εξίσωση Maxwell, είναι:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(kE_0(-y\hat{x} + x\hat{y})\cos(\omega t)\right) = \rho/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow 0 = \rho/\varepsilon_0 \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow \underline{\rho(\vec{r},t) = 0}.$$

Από την δ) εξίσωση Maxwell, έχουμε:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Είναι: $\cdot\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -B_0\sin(\omega t) \end{vmatrix} = 0\hat{x} - 0\hat{y} + 0\hat{z} = 0.$

$$\cdot\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(kE_0(-y\hat{x} + x\hat{y})\cos(\omega t)\right) =$$

$$= -kE_0(-y\hat{x} + x\hat{y})\sin(\omega t), \text{ άρα:}$$

$$\mu_0\left(\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0 \Rightarrow \vec{J} = -\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\underline{\vec{J}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 k E_0(-y\hat{x} + x\hat{y})\sin(\omega t)}$$

γ) Είναι: $\vec{S}(t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$.

όπου: $\vec{E} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -kE_0 y\cos(\omega t) & kE_0 x\cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & -B_0\sin(\omega t) \end{vmatrix} =$

$= \hat{x} \begin{vmatrix} kE_0 x\cos(\omega t) & 0 \\ 0 & -B_0\sin(\omega t) \end{vmatrix} - \hat{y} \begin{vmatrix} -kE_0 y\cos(\omega t) & 0 \\ 0 & -B_0\sin(\omega t) \end{vmatrix} + 0\hat{z} =$

$= -kE_0B_0 x\cos(\omega t)\sin(\omega t)\hat{x} - kE_0B_0 y\cos(\omega t)\sin(\omega t)\hat{y}$,

άρα: $\vec{S}(t) = -\frac{kE_0B_0}{\mu_0}\cos(\omega t)\sin(\omega t)(x\hat{x} + y\hat{y})$.

οπότε: $I = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{S}(t)\,dt = -\frac{kE_0B_0}{2\mu_0}(x\hat{x} + y\hat{y})\int_0^T 2\cos(\omega t)\sin(\omega t)$,

όπου: $\int_0^T 2\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,dt = \int_0^T \sin(2\omega t)\,dt = 0$. , άρα και $I = 0$.

δ) εξίσωση συνέχειας: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$.

προφανώς $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ και: $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\varepsilon k E_0(-y\hat{x} + x\hat{y})\sin(\omega t)\right) = 0$, άρα

$0 + 0 = 0$, ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας.

Οι τιμές των δύο μεγεθών $(\rho, \vec{j})$ συμβιβάζονται μέσω της εξίσωσης συνέχειας, καθώς αυτή αποτελεί μια μαθηματική διατύπωση της αρχής διατήρησης του φορτίου.

Άσκηση 4:

α) Είναι: $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, με $k_x = \frac{n\pi}{a}$, και $k_y = \frac{m\pi}{a}$, όπου: $n, m = 1, 2, 3, \ldots$

Αφού το κύμα διαδίδεται κατά μήκος του άξονα z, πρέπει $k_z^2 > 0$ (δηλ. το κυματάνυσμα k_z να είναι πραγματικό).

$$\Rightarrow k^2 - k_x^2 + k_y^2 > 0 \Rightarrow k^2 > k_x^2 + k_y^2 \Rightarrow \frac{n_\delta^2 \omega^2}{c} > k_x^2 + k_y^2.$$

$$\Rightarrow \omega^2 > \left(\frac{c}{n_\delta^2}\right)^2 \left(\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\omega > \frac{c}{n_\delta} \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2+m^2} \quad (1) \Rightarrow \omega_{απ} = \frac{c}{n_\delta} \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2+m^2} \text{ ή}$$

$$2\pi f_{απ} = \frac{c}{n_\delta} \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2+m^2} \Rightarrow \underline{f_{απ} = \frac{c}{2 \cdot n_\delta \cdot a} \sqrt{n^2+m^2}}, \text{ όπου: } n, m = 1, 2, \ldots$$

Για $n = m = 1$: $f_{απ} = \frac{c\sqrt{2}}{2 n_\delta a}$ (Με n_δ συμβολίζεται ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού για αποφυγή σύγχυσης)

β) Από την προηγούμενη σχέση (1):

$$\omega > \frac{c}{n_\delta} \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2+m^2} \Rightarrow a > \frac{c}{n_\delta} \frac{\pi}{\omega} \sqrt{n^2+m^2}$$

επομένως, η μικρότερη τιμή του a, είναι:

$$a_{(1,1)} = \frac{c}{n_\delta} \frac{\pi}{\omega} \sqrt{2} \text{ ή } a = \frac{\sqrt{2}}{2 n_\delta} \lambda \text{ ή } a = (0,93) \cdot \frac{\lambda}{2}.$$

γ) Το κύμα διαδίδεται κατά μήκος του άξονα z, οπότε το κυματάνυσμα που μας ενδιαφέρει είναι το k_z.

Είναι: $v_\varphi = \frac{\omega}{k_z}$, όπου: $\omega^2 = k^2 \left(\frac{c^2}{n_\delta^2}\right)$

Είναι: $\omega^2 = k^2\left(\frac{c^2}{n_\delta^2}\right) \Rightarrow \omega^2 = k_z^2\left(\frac{c^2}{n_\delta^2}\right) + (k_x^2 + k_y^2)\left(\frac{c^2}{n_\delta^2}\right)$

$\Rightarrow \omega^2 = k_z^2\left(\frac{c^2}{n_\delta^2}\right) + \omega_{\alpha\pi}^2$ (από ερώτημα (α))

$\Rightarrow \omega^2 - \omega_{\alpha\pi}^2 = k_z^2\left(\frac{c^2}{n_\delta^2}\right) \Rightarrow k_z = \frac{n_\delta}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{\alpha\pi}^2}$,

άρα: $\underline{v_\varphi = \frac{\omega \cdot c}{n_\delta \cdot \sqrt{\omega^2 - \omega_{\alpha\pi}^2}}}$

και: $v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = \left(\frac{dk_z}{d\omega}\right)^{-1}$

Είναι: $\frac{dk_z}{d\omega} = \frac{n_\delta}{c}\frac{d\left(\sqrt{\omega^2 - \omega_{\alpha\pi}^2}\right)}{d\omega} = \frac{n_\delta}{c}\frac{2\omega}{2\sqrt{\omega^2 - \omega_{\alpha\pi}^2}} = \frac{n_\delta}{c}\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{\alpha\pi}^2}}$

οπότε: $\underline{v_g = \frac{c}{n_\delta}\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{\alpha\pi}^2}}{\omega}}$.

ενώ: $v_\varphi \cdot v_g = \frac{\omega \cdot c}{n_\delta\sqrt{\omega^2 - \omega_{\alpha\pi}^2}} \cdot \frac{c}{n_\delta}\frac{\sqrt{\omega^2 - \alpha_\pi^2}}{\omega} = \frac{c^2}{n_\delta^2} \Rightarrow \underline{v_\varphi \cdot v_g = \left(\frac{c}{n_\delta}\right)^2}$

Άσκηση 5:

Η ιονόσφαιρα κινείται κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα, άρα: $\frac{dH}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta.$

Η συνθήκη ακυρωτικής συμβολής για τα δύο σήματα που φτάνουν ταυτόχρονα στον δέκτη από τον πομπό μέσω των δύο διαδρομών δίνει:

$$(\Pi I) + (I\Delta) - L = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\lambda \Rightarrow 2\sqrt{H^2 + \frac{L^2}{4}} - L = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\lambda$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο, έχουμε:

$$\frac{dH(t)}{dt}\cdot\frac{2H(t)}{\sqrt{H^2(t)+\frac{L^2}{4}}}=\frac{dn}{dt}\cdot\lambda \Rightarrow \frac{dH(t)}{dt}=\frac{dn}{dt}\cdot\lambda\,\frac{\sqrt{H^2(t)+\frac{L^2}{4}}}{2H(t)}.$$

Εφόσον, το μέσο ύψος παραμένει προσεγγιστικά σταθερό, είναι: $H(t)\simeq 200km$, ενώ $L=500km$, άρα:

$$\frac{\sqrt{H^2(t)+\frac{L^2}{4}}}{2H(t)}=0,8 \quad , \quad \frac{dn}{dt}=\frac{6 \text{ πλήρεις αυξομειώσεις}}{60 \text{ sec}}=0,1 \text{ sec}^{-1}$$

και $\lambda=\frac{c}{f}\Rightarrow\lambda=\frac{3\cdot 10^8}{10^7}=30m$

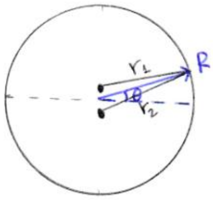
Οπότε: $\frac{dH(t)}{dt}=(0,1)\cdot(0,8)\cdot 30\Rightarrow$

$$\frac{dH(t)}{dt}=2,4 \text{ m/sec}.$$

Συνεπώς, η ιονόσφαιρα κινείται κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα 2,4 m/sec για μερικές ώρες και με αντίθετη ταχύτητα άλλες τόσες.

Άσκηση 6:

α)



ισχύουν: $R >> D$ και $\theta \in [0, 2\pi)$

Αφού μας ενδιαφέρει η διάδοση των κυμάτων στο οριζόντιο επίπεδο, θεωρούμε κυλινδρικά κύματα με z = σταθ. (έστω z_0). Επομένως,

$$y_{ολ} = \frac{A_1}{\sqrt{r_1}} e^{i(kr_1 - \omega t)} + \frac{A_2}{\sqrt{r_2}} e^{i(kr_2 - \omega t + \pi)} \Rightarrow$$

$$y_{ολ} \simeq \frac{A}{\sqrt{R}} e^{i(-\omega t)} \left(e^{i(kr_1)} + e^{i(kr_2)} \right)$$

Αφού $R >> D$, οι αντίστοιχες διαφορές των r_1, r_2, R θεωρούνται αμελητέες. Όμως, επειδή $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c} \cdot f = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^8} = 2\pi \cdot 10^{-2}\,m\right)$ οι όροι $k \cdot r_1$, kr_2 βρίσκονται στον εκθέτη δε θεωρούνται αμελητέοι. Επιπλέον, για $x << L$, ισχύουν: $r_1 = R - \frac{D}{2}\sin\theta$ και $r_2 = R + \frac{D}{2}\sin\theta$, οπότε:

$$y_{ολ} \simeq \frac{A}{\sqrt{R}} e^{i(kR - \omega t)} \left[e^{-i\left(\frac{kD}{2}\sin\theta\right)} + e^{i\left(\frac{kD}{2}\sin\theta + \pi\right)} \right], \text{όπου } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

άρα:

$$y_{ολ} = \frac{A}{\sqrt{R}} e^{i(kR - \omega t)} \left[e^{-i\left(\frac{\pi D \sin\theta}{\lambda}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi D \sin\theta}{\lambda} + \pi\right)} \right] \Rightarrow$$

$$y_{ολ} = \frac{A}{\sqrt{R}} e^{i(kR - \omega t)} \left[e^{-i\left(\frac{\pi D \sin\theta}{\lambda}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi D \sin\theta}{\lambda}\right)} \cdot e^{i\pi} \right] \xrightarrow{Euler}$$

$$y_{ολ} = \frac{A}{\sqrt{R}} e^{i(kR - \omega t)} \left[e^{-i\left(\frac{\pi D \sin\theta}{\lambda}\right)} + e^{i\left(\frac{\pi D \sin\theta}{\lambda}\right)} \left(\cos\pi + i\cancel{\sin\pi}^{\,0}\right) \right] \Rightarrow$$

$$y_{ολ} = \frac{A}{\sqrt{R}} e^{i(kR - \omega t)} \left[e^{-i\left(\frac{\pi D \sin\theta}{\lambda}\right)} - e^{i\left(\frac{\pi D \sin\theta}{\lambda}\right)} \right] \xrightarrow{Euler}$$

$$y_{o\lambda} = (-2i)\,\frac{A}{\sqrt{R}}\,e^{i(kR-\omega t)}\sin\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right).$$

και γωνιακή κατανομή της έντασης $I(\theta)$, ισούται:

$$I(\theta) \sim |y_{o\lambda}|^2 = y^*_{o\lambda}\, y_{o\lambda} =$$

$$= (2i)\,\frac{A}{\sqrt{R}}\,e^{-i(kR-\omega t)}\sin\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)\cdot(-2i)\,\frac{A}{\sqrt{R}}\,e^{i(kR-\omega t)}\sin\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right) \Rightarrow$$

$$I(\theta) = \frac{4A^2}{R}\sin^2\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)$$

είναι: $c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3\cdot 10^8}{3\cdot 10^6} = 100\,m$ και $D = 100\,m$.

οπότε $\quad I(\theta) = \frac{4A^2}{R}\sin^2(\pi\sin\theta).$

- Γωνία μέγιστης εκπομπής: $I_{max} \Rightarrow \sin^2(\pi\sin\theta) = 1 \Rightarrow$

$\sin(\pi\sin\theta) = 1 \Rightarrow$ ή $\sin(\pi\cdot\sin\theta) = -1 \Rightarrow$

$\pi\cdot\sin\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $\qquad \pi\sin\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\qquad \sin\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\theta = \frac{\pi}{6}\,rad$ ή $\theta = \frac{5\pi}{6}\,rad$ $\qquad \theta = -\frac{\pi}{6}\,rad$ ή $\theta = -\frac{5\pi}{6}\,rad.$

- Γωνία ελάχιστης εκπομπής: $I_{min} \Rightarrow \sin^2(\pi\sin\theta) = 0 \Rightarrow$

$\pi\sin\theta = 0 \Rightarrow$ ή $\pi\sin\theta = \pi \Rightarrow$

$\sin\theta = 0 \Rightarrow$ $\qquad \sin\theta = 1 \Rightarrow$

$\theta = 0$ ή $\theta = \pi\,rad$ $\qquad \theta = \frac{\pi}{2}\,rad.$

β) Έστω $I'(\theta)$ η νέα γωνιακή κατανομή της συνολικής έντασης στο οριζόντιο επίπεδο. Θέλουμε η $I'(\theta)$ να είναι max πάνω στην μεσοκάθετο, δηλαδή: $I'(\theta)_{max} = I'(0)$

Έστω $\Delta\varphi$ η ζητούμενη διαφορά φάσης. Τότε, από (1):

$$y'_{o\lambda} \simeq \frac{A}{\sqrt{R}} e^{i(kR-\omega t)} \left[e^{-i\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)} + e^{i\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)} \cdot e^{i\Delta\varphi} \right]$$

και: $$y'^{*}_{o\lambda} \simeq \frac{A}{\sqrt{R}} e^{-i(kR-\omega t)} \left[e^{i\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)} \cdot e^{-i\Delta\varphi} \right]$$

Επομένως: $I'(\theta) = y'^{*}_{o\lambda} \cdot y'_{o\lambda} \Rightarrow$

$$I'(\theta) = \frac{A^2}{R} \left[e^{i\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)} + e^{-i\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)} \cdot e^{-i\Delta\varphi} \right] \left[e^{-i\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)} + e^{i\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)} \cdot e^{i\Delta\varphi} \right]$$

$$\Rightarrow I'(\theta) = \frac{A^2}{R} \left[1 + e^{2i\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)} \cdot e^{i\Delta\varphi} + e^{-2i\left(\frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta\right)} \cdot e^{-i\Delta\varphi} + 1 \right] \Rightarrow$$

$$I'(\theta) = \frac{A^2}{R} \left[2 + e^{i\left(\frac{2\pi D\sin\theta}{\lambda} + \Delta\varphi\right)} + e^{-i\left(\frac{2\pi}{\lambda} D\sin\theta + \Delta\varphi\right)} \right] \Rightarrow$$

$$I'(\theta) = \frac{A^2}{R} \left[2 + \frac{\cos\left(\frac{2\pi D\sin\theta}{\lambda} + \Delta\varphi\right)}{2} \right]$$

Η $I'(\theta)$ είναι max όταν $\cos\left(\frac{2\pi D\sin\theta}{\lambda} + \Delta\varphi\right)$ είναι max, άρα πρέπει:

$$\cos\left(\frac{2\pi D\sin\theta}{\lambda} + \Delta\varphi\right)\Big|_{\theta=0} = 1 \Rightarrow \cos(\Delta\varphi) = 1 \Rightarrow \Delta\varphi = 2k\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Η ελάχιστη διαφορά φάσης δίνεται για $k=0$, άρα:

$\Delta\varphi_0 = 0$, οπότε:

$$I'(\theta) = \frac{A^2}{R} \left[2 + \frac{\cos\left(\frac{2\pi D\sin\theta}{\lambda}\right)}{2} \right]$$ ή

$$I'(\theta) = \frac{A^2}{R}\left[2 + \frac{\cos(2\pi \sin\theta)}{2}\right].$$

Η $I'(\theta)$ γίνεται max όταν το $\cos(2\pi \sin\theta) = 1 \Rightarrow$

$$\cos(2\pi \sin\theta) = \cos(2k\pi) \Rightarrow$$

$$2\pi \sin\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

επόμενο μέγιστο $\Longrightarrow k = 1$, άρα:

$$2\pi \sin\theta = 2\pi \Rightarrow \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$