ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ IX

Άσκηση 1 Οι X, Y είναι τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\{-1, 1\}$ για τις οποίες έχουμε

$$\mathbb{P}\big[X = 1\big] = 1/4,\ \mathbb{P}\big[Y = 1|X = 1\big] = 2/3,\ \text{και}\ \mathbb{P}\big[Y = 1|X = -1\big] = 1/3.$$

Ποια είναι η πιθανότητα το τριώνυμο $P(z) = z^2 + Xz + Y$ να έχει πραγματικές ρίζες;

Άσκηση 2 Έστω X και Y δύο ανεξάρτητες τ.μ. οι οποίες περιγράφουν δύο τυχαία bits στην εκτέλεση ενός προγράμματος. Έστω ότι $X \sim\text{Bern}(\frac{1}{4})$, $Y \sim \text{Bern}(\frac{1}{2})$. Ορίζουμε την τ.μ. $Z = X \text{ XOR } Y$.

(α′) Η Z είναι δυαδική τ.μ. άρα έχει κατανομή Bernoulli. Να βρεθεί η παράμετρός της.

(β′) Είναι η Z ανεξάρτητη από τη X ή όχι; Αποδείξτε την απάντησή σας.

Άσκηση 3 Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Ας είναι X_1 και X_2 τα αποτελέσματα των δύο ρίψεων.

(α′) Ποια είναι η από κοινού σ.μ.π. του ζεύγους (X_1, X_2) υποθέτοντας ότι οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες και το ζάρι είναι δίκαιο;

(β′) Έστω $X = \min\{X_1, X_2\}$, $Y = \max\{X_1, X_2\}$. Να βρείτε την από κοινού σ.μ.π. των X, Y.

(γ′) Βρείτε τις περιθώριες σ.μ.π. των τ.μ. X και Y.

Άσκηση 4 Έστω η τ.μ. N η οποία ακολουθεί Poisson(λ). Η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου ότι $N = n$ είναι Διων(n, p).

(α′) Ποια είναι η από κοινού συνάρτηση μάζας πιθανότητας των N και X;

(β′) Ποια κατανομή ακολουθεί η τ.μ. X;

Άσκηση 5 Το (X, Y) είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με σ.π.π.

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x^{\alpha}y^{\alpha+1} & \text{για } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Να υπολογίστε τη σταθερά α και την πιθανότητα των ενδεχομένων $\{X \le 1/3\}$, $\{Y > 2X\}$, $\{X + Y \ge 1\}$.

Άσκηση 6 Έστω πως τρεις συνεχείς τ.μ. X, Y, Z έχουν από κοινού πυκνότητα:

$$f_{XYZ}(x, y, z) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{k}\left(2x + 3y^2 + 4z^3\right), & 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{array} \right.$$

(α′) Βρείτε την τιμή της σταθεράς k.

(β′) Υπολογίστε τη μέση τιμή $\mathbb{E}[XYZ]$.

(γ′) Υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}(X + Y + Z \le 1)$.

Άσκηση 7 Οι τ.μ. X, Y έχουν από κοινού σ.π.π. $f(x, y) = \frac{1}{y}$ για $0 < x < y < 1$ και 0 διαφορετικά.

(α′) Να υπολογίσετε την δεσμευμένη σ.π.π. της Y δεδομένου ότι $X = x$.

(β′) Να υπολογίσετε την $\mathbb{P}\big[X + Y > 1/2\big]$.

Άσκηση 8 Αν η τ.μ. P ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $[0,1]$ και η δεσμευμένη κατανομή της X δεδομένου ότι $P = p$ είναι διωνυμική Διων(n, p) υπολογίστε την (περιθώρια) σ.μ.π. της X.

Άσκηση 9 Οι χρόνοι εξυπηρέτησης ενός πελάτη από δύο εξυπηρετητές A, B είναι ανεξάρτητες τ.μ. T_A, T_B και ακολουθούν εκθετική κατανομή με παραμέτρους α και β αντίστοιχα. Τη χρονική στιγμή 0 οι A, B είναι ελεύθεροι και δέχονται από έναν πελάτη.

(α′) Υπολογίστε την πιθανότητα να τελειώσει πρώτα η εξυπηρέτηση του πελάτη που εξυπηρετείται από τον A.

(β′) Βρείτε την κατανομή της τ.μ. $X = \frac{T_A}{T_A+T_B}$.

Άσκηση 10 Οι X, Y είναι τ.μ. που παίρνουν τιμές στο [0,1]. Η από κοινού σ.κ.π. τους για $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ δίνεται από την $F(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}(x \wedge y)$.

(α′) Βρείτε τις περιθώριες σ.κ.π. των X, Y και συμπεράνετε ότι καθεμιά τους είναι συνεχής τ.μ.

(β′) Ας είναι $U_0, \ldots, U_4$ ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή στο [0,1]. Στρίβουμε ένα τίμιο κέρμα. Αν έρθει κορώνα ορίζουμε $X = Y = U_0$. Αν έρθει γράμματα ορίζουμε $X = U_1 \vee U_2$ και $Y = U_3 \vee U_4$. Ποια είναι η από κοινού σ.κ.π. των (X, Y);

(γ′) Υπολογίστε την $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ όπου αυτή υπάρχει και στην συνέχεια το ολοκλήρωμα της f στο $[0,1] \times [0,1]$. Γιατί το αποτέλεσμα δεν είναι 1;

Συμβολισμός: $x \wedge y = \min\{x, y\}$ και $x \vee y = \max\{x, y\}$, για $x, y \in \mathbb{R}$.