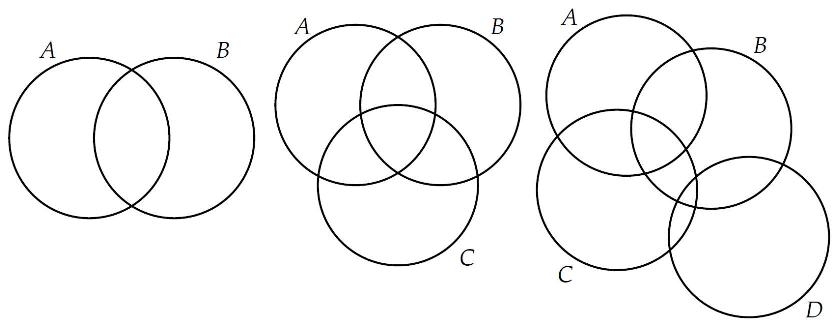
ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ & ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Σ.Η.Μ.Μ.Υ. ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Ι

Άσκηση 1 Ρίχνουμε ένα ζάρι 3 φορές. Περιγράψτε το χώρο πιθανότητας Ω και τα ενδεχόμενα: $A =$«Την 1η και 3η φορά ήρθε 6», $B =$«την 1η φορά ήρθε 1 και τη 2η και 3η φορά ήρθε το ίδιο αποτέλεσμα» και $C =$«τρεις φορές ήρθε το ίδιο ζυγό αποτέλεσμα».

Άσκηση 2 Στα τρία διαγράμματα του παρακάτω σχήματος να σκιαστούν (αντιστοίχως) τα τρία ενδεχόμενα $B \cap A', (A \cup B') \cap C, (A' \cup B' \cup C') \cap D$.



Άσκηση 3 Ένα τυχαίο πείραμα έχει χώρο πιθανότητας το σύνολο $\Omega = \{a, b, c\}$. Έστω πως κάποιο μέτρο πιθανότητας $\mathbb{P}$ ικανοποιεί τις σχέσεις, $\mathbb{P}(\{a, c\}) = 9/16$ και $\mathbb{P}(\{a, b\}) = 3/4$. Χρησιμοποιήστε τους κανόνες πιθανότητας του κεφαλαίου 3 για να υπολογίσετε τις πιθανότητες όλων των στοιχειωδών ενδεχομένων.

Άσκηση 4 Θεωρήστε τον χώρο πιθανότητας $\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \{0, 1\} \right\}$. Αν

$$\mathbb{P}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \right] = K(a + b + c)$$

όπου K είναι μια σταθερά, υπολογίστε την K και στη συνέχεια την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{P \in \Omega :$ ο P είναι αντιστρέψιμος$\}$.

Άσκηση 5 Να δείξετε, χρησιμοποιώντας τους κανόνες πιθανότητας του κεφαλαίου 3, ότι για οποιαδήποτε δύο ενδεχόμενα E, F ισχύει:

$$\mathbb{P}(E \cap F') = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E \cap F).$$

Να δείξετε επίσης ότι, για οποιαδήποτε τρία ενδεχόμενα A, B και C ισχύει:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A' \cap B) + \mathbb{P}(A' \cap B' \cap C).$$

Άσκηση 6 Ο παίκτης A στρίβει ν φορές ένα (δίκαιο) νόμισμα και ο παίκτης B στρίβει το ίδιο νόμισμα $\nu + 1$ φορές. Ποια είναι η πιθανότητα ο B να φέρει αυστηρά περισσότερες φορές γράμματα απ' όσες ο A;

Άσκηση 7 (Ανισότητα Bonferroni.) Έστω μια οποιαδήποτε ακολουθία ενδεχόμενων $A_1, A_2, \ldots$ σε κάποιο χώρο πιθανότητας Ω. Δείξτε ότι: $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j)$.

Άσκηση 8 Έστω χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και οποιαδήποτε ενδεχόμενα $\{A_1, ..., A_n\} \subset \mathcal{F}$, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \leq \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] + n - 1$$

Συμπεράνετε ότι, αν $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ είναι μια ακολουθία ενδεχομένων με $\mathbb{P}(A_i) = 1$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, τότε

$$\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right] = 1$$

Άσκηση 9 Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου, να αποδείξετε ότι

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B')\mathbb{P}(B \cap A').$$

Χρησιμοποιήστε την παραπάνω ισότητα για να αποδείξετε ότι

$$\big|\, \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \big| \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A') \leq \frac{1}{4}.$$