Α΄ ομάδα ασκήσεων

IV 1 Η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου στην θεμελιώδη στάθμη του ατόμου του Υδρογόνου είναι $\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$, όπου $a_0 > 0$ μια σταθερά.

(α) Να βρείτε την μέση απόσταση $< r >$ του ηλεκτρονίου από τον πυρήνα.

(β) Να βρείτε την απόσταση όπου η πιθανότητα να βρούμε το ηλεκτρόνιο γίνεται μέγιστη.

IV 2 Η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου κάποια χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι: $\Psi(x, t_0) = N \exp[-bx^2/2],\ b > 0$.

(α) Να κανονικοποιήσετε την $\Psi(x, t_0)$.

(β) Να υπολογίσετε την αβεβαιότητα Δx στην θέση και την αβεβαιότητα Δp στην ορμή.

(γ) Δείξτε ότι ισχύει: $\Delta x \cdot \Delta p = \frac{\hbar}{2}$.

IV 3 Ένα μονοδιάστατο πρόβλημα χαρακτηρίζεται από δέσμιες καταστάσεις με ενέργειες E_n και ορθοκανονικό σύστημα ιδιοσυναρτήσεων $\psi_n(x)$, όπου το n είναι ακέραιος. Δίνεται η κυματοσυνάρτηση του συστήματος $\psi(x, t)$ για $t = 0 : \psi(x, t = 0) = \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_1(x) - \frac{i}{\sqrt{3}}\psi_3(x) + C\psi_5(x)$. Οι κυματοσυναρτήσεις $\psi_1(x),\ \psi_3(x),\ \psi_5(x)$ είναι περιττές συναρτήσεις του x.

(α) Υπολογίστε τον συντελεστή C έτσι ώστε αυτή να είναι κανονικοποιημένη στην μονάδα και γράψτε την κυματοσυνάρτηση $\psi(x, t)$ σε χρόνο t.

(β) Βρείτε την πιθανότητα μια μέτρηση της ενέργειας στο χρόνο T να σας δώσει την τιμή E_5.

(γ) Οι μέσες τιμές θέσης, ορμής και ενέργειας, $< x >,\ < p >$ και $< H >$ μεταβάλλονται με τον χρόνο; Εξηγήστε.

IV 4 Σωματίδιο μάζας m κινείται κατά τον άξονα x εντός πεδίου δυνάμεων που δίνεται από την δυναμική ενέργεια $U(x)$. Εάν η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου είναι:

$$\psi(x) = Nx \exp[-bx^2/2],\ b > 0$$

και είναι λύση της χρονοανεξάρτητης εξίσωσης του Schrödinger με μηδενική ενέργεια, να βρείτε την συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας $U(x)$.

IV 5 Σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $F = -kx, k > 0$ και η κατάστασή του σε μια ορισμένη στιγμή περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση: $\psi(x) = N \exp[-\lambda x^2/2],\ \lambda > 0$.

(α) Έχει το σωματίδιο απόλυτα καθορισμένη ενέργεια; Υπάρχει κατάλληλη τιμή του λ για την οποία η απάντηση είναι καταφατική;

(β) Για οιοδήποτε λ υπολογίστε την μέση τιμή της ενέργειας του σωματιδίου και σχεδιάστε πρόχειρα την εξάρτησή της από το λ. Τί παρατηρείτε; Ποιά είναι η σχέση με το ερώτημα (α);

Δίνεται το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} \exp[-ax^2] dx = \frac{(2n)!}{n!(4a)^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\ a > 0.$$

IV 6 Οι δύο κυματοσυναρτήσεις $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$ ενός σωματιδίου συνδέονται με την σχέση $\psi_2(x) = e^{ia(x)}\psi_1(x)$. Το σωματίδιο έχει μάζα m και βρίσκεται μέσα σε πεδίο δυνάμεων με δυναμική ενέργεια $V(x)$. Να υπολογίσετε τις μέσες τιμές $< x >,\ < p >,\ < H >$ του σωματιδίου για τις δύο κυματοσυναρτήσεις και να συγκρίνετε.

B΄ ομάδα ασκήσεων

IV 7 Θεωρήστε σωματίδιο σε απειρόβαθο πηγάδι, που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση:

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} \psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \psi_2(x),\ \psi_k = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Να βρείτε την πιθανότητα $\Pi_1(t)$ το σωματίδιο να βρίσκεται στο διάστημα $\left(0, \frac{L}{2}\right)$ συναρτήσει του χρόνου.

IV 8 Σωμάτιο μάζας μ κινείται σε πηγάδι δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & x < -a/2 \\ 0, & -a/2 < x < a/2, \\ V_0, & x > a/2. \end{cases}$$

Υπολογίστε το πλάτος a σαν συνάρτηση των m, V_0 και $\hbar$, ώστε να υπάρχει μόνο μια δέσμια κατάσταση με ενέργεια $E_0 = V_0/2$, όπου $V_0 > 0$.

IV 9 Σωμάτιο μάζας μ κινείται στο δυναμικό $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & x < -a \\ 0, & -a < x < -b, \\ V_0, & b < x < +b \\ 0, & b < x < a, \\ +\infty, & x > a, \end{cases}$$

όπου $a,\ b$ θετικές σταθερές, $V_0 > 0$. Ζητείται να υπολογιστεί η ενέργεια E και το V_0, έτσι ώστε η ιδιοσυνάρτηση $\psi(x)$ της Χαμιλτονιανής να ικανοποιεί την συνθήκη $\frac{d\psi}{dx} = 0$, για $-b < x < b$.

IV 10 Σωματίδιο μάζας m κινείται σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού πλάτους L

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ +\infty, & x < 0,\ x > L \end{cases}$$

Την χρονική στιγμή $t = 0$ η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου έχει την μορφή:

$$\Psi(x,0) = \sqrt{\frac{8}{5L}} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right] \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

(α) Εκφράστε την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,0)$ ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοσυναρτήσεων $\psi_n(x)$ του συστήματος.

(β) Γράψτε την χρονική εξέλιξη της κυματοσυνάρτησης.

(γ) Να υπολογίσετε την μέση τιμή της ενέργειας του σωματιδίου για $t > 0$.

IV 11 Σωμάτιο μάζας m σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού με πλάτος a, $\ -a/2 < x < a/2$ βρίσκεται στην κατάσταση $\psi_2(x)$. Αίφνης το πλάτος του πηγαδιού διπλασιάζεται $(-a < x < a)$.

(α) Γράψτε τις καινούργιες ίδιοσυναρτήσεις και ίδιοενέργειες.

(β) Υπολογίστε την πιθανότητα σε μέτρηση της ενέργειας του σωματίου, αυτή να βρεθεί ίση με τιμή που είχε πριν τον διπλασιασμό του πλάτους του πηγαδιού.

(γ) Δώστε την έκφραση για την πυκνότητα πιθανότητας στο $x = 0$ για $t > 0$.

IV 12 Να βρείτε τις ιδιοτιμές της ενέργειας για τις δέσμιες καταστάσεις ενός σωματιδίου μάζας m στο ασύμμετρο πηγάδι δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} V_3, & x < -0 \\ V_2 = 0, & 0 < x < a, \\ V_1, & x > a, \end{cases}$$

όπου $V_3 > V_1 > 0$.

IV 13 Σωματίδιο μάζας m βρίσκεται μέσα σε ένα μονοδιάστατο απειρόβαθο φρέαρ δυναμικού εύρους L. Η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου για $t = 0$ είναι $\Psi(x,0) = Nx$ όταν $0 < x < L/2$ και $\Psi(x,0) = N(L-x)$ όταν $L/2 < x < L$.

(α) Υπολογίστε την πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο στην νιοστή ενεργειακή στάθμη.

(β) Γράψτε την κυματοσυνάρτηση για μη μηδενικές τιμές του χρόνου.

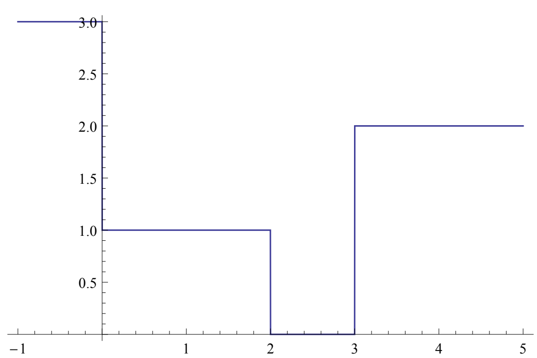
(γ) Βρείτε την μέση τιμή της ενέργειας.

Γ′ ομάδα ασκήσεων

IV 14 Εκτιμήστε την ελάχιστη δυνατή ενέργεια ενός σωματιδίου που κινείται στο δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

IV 15* Εκτιμήστε την ελάχιστη δυνατή ενέργεια ενός σωματιδίου που κινείται στο δυναμικό $V(x) = \frac{\hbar^2}{8mx^2} + \frac{\hbar^2}{2mL^3}x$.

IV 16* Θεωρήστε σωματίδιο που κινείται στη δυναμική ενέργεια του σχήματος. Ο οριζόντιος άξονας είναι σε Angstrom ενώ ο κατακόρυφος σε eV. Ποιές θα είναι οι κυματοσυναρτήσεις όταν η ολική ενέργεια βρίσκεται στα διαστήματα: (α) $(0eV, 1eV)$, (β) $(1eV, 2eV)$, (γ) $(2eV, 3eV)$, (δ) $> 3eV$; Γράψτε τις συνθήκες συνέχειας χωρίς να προσπαθήσετε να τις επιλύσετε.



Σχήμα 1: Δυναμική ενέργεια

IV 17 Σωματίδιο περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi_0 = Nx(L-x),\ \gamma\iota\alpha\ 0 < x < L$, ενώ μηδενίζεται οπουδήποτε αλλού. (α) Βρείτε το N. (β)Υπολογίστε τα $< x >$, $< p >$, Δx και Δp. (γ) Γίνεται σεβαστή η ανισότητα του Heisenberg;

IV 18 Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ένα σωματίδιο περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση:

$$\Psi(x,0) = \begin{cases} \frac{Nx}{L}, & \alpha\nu\ 0 < x < L, \\ N\frac{H-x}{H-L}, & \alpha\nu\ L < x < H, \\ 0, & \alpha\lambda\lambda\iota\omega s. \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι $H > L > 0$. (α) Εκφράστε την N συναρτήσει των L και H. (β) Σχεδιάστε την $\Psi(x,0)$. (γ)Ποιά είναι η πιθανότερη θέση του σωματιδίου για $t=0$; (δ) Ποιά είναι η πιθανότητα να βρεθεί το σωματίδιο αριστερά του L; Ελέγξτε την ορθότητα του αποτελέσματός σας πηγαίνοντας στις οριακές περιπτώσεις $H = L$ και $H = 2L$. (ε) Ποιά είναι η αναμενόμενη τιμή του x;

IV 19* Θεωρήστε την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = N \exp\left[-\frac{\mu^2 x^2}{2} + iax\right], \quad \mu > 0.$$

(α) Κανονικοποιήστε την $\psi(x)$. (β) Υπολογίστε τις αναμενόμενες τιμές των $x,\ x^2$ και $p,\ p^2$. (γ) Ελέγξτε την ισχύ της αρχής της αβεβαιότητας.

IV 20 Θεωρήστε σωματίδιο που περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση υπέρθεσης:

$$\psi = N(\psi_1 + 2\psi_2 - \psi_3),$$

όπου οι $\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3$ είναι ορθοκανονικές και $Q\psi_1 = \psi_1,\ Q\psi_2 = 0,\ Q\psi_3 = -\psi_3$ για κάποιον τελεστή Q. Προσδιορίστε το N και υπολογίστε τη μέση τιμή $< Q >$ και την αβεβαιότητα ΔQ του μεγέθους Q.

IV 21 Δίνεται η ιδιοσυνάρτηση της ενέργειας: $\psi = Nx\exp\left[-ax^2\right]$. Να προσδιοριστεί η αντίστοιχη ενέργεια E και η δυναμική ενέργεια $V(x)$.

Συμπλήρωμα θεωρίας: θεώρημα του Ehrenfest.

Ξεκινάει κανείς από την εξίσωση του Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \Rightarrow \frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}H\Psi$$

και την μιγαδική συζυγή της:

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = H\Psi^* \Rightarrow \frac{\partial\Psi^*}{\partial t} = -\frac{1}{i\hbar}H\Psi^*.$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τη χρονική παράγωγο της μέσης τιμής της θέσης ως εξής:

$$\frac{\partial < x >}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^* x\Psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^* x\frac{\partial\Psi}{\partial t}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}x\Psi dx.$$

Σ' αυτό το σημείο οι δύο εκδοχές της εξίσωσης του Schrödinger μας βοηθούν να αντικαταστήσουμε τις χρονικές παραγώγους:

$$\frac{\partial < x >}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^* x(H\Psi)dx - \int_{-\infty}^{+\infty}(H\Psi^*)x\Psi dx\right]$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^* x\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi\right)dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2} + V(x)\Psi^*\right)x\Psi dx\right]$$

$$= -\frac{1}{i\hbar}\frac{\hbar^2}{2m}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^* x\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}\right)x\Psi dx\right].$$

Ο δεύτερος όρος μπορεί να μετασχηματιστεί μέσω παραγοντικών ολοκληρώσεων:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}\right)x\Psi dx = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi)\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi)dx.$$

Ο πρώτος όρος μηδενίζεται, λόγω του μηδενισμού των κυματοσυναρτήσεων στο άπειρο, οπότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}\right)x\Psi dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi)dx.$$

Στη συνέχεια μιά δεύτερη παραγοντική ολοκλήρωση (και πάλι παραλείποντας τον αντίστοιχο όρο που προϋποθέτει υπολογισμούς στο άπειρο) θα μας δώσει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2\Psi^*}{\partial x^2}\right)x\Psi dx=+\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x\Psi)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\left(2\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)dx.$$

Άρα τελικά:

$$\frac{\partial<x>}{\partial t}=+\frac{1}{i\hbar}\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{+\infty}2\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}=\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

Όμως το τελευταίο ολοκλήρωμα αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή της ορμής, οπότε:

$$\frac{\partial<x>}{\partial t}=\frac{<p>}{m}.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η χρονική παράγωγος της μέσης τιμής της θέσης, που κλασικά αντιστοιχεί στην ταχύτητα, ισούται με τη μέση τιμή της ορμής διά τη μάζα, όπως θα περιμέναμε από την αντίστοιχη σχέση της κλασικής μηχανικής. Με αντίστοιχα βήματα μπορεί κανείς να υπολογίσει και τη χρονική παράγωγο της μέσης τιμής της ορμής, με αποτέλεσμα:

$$\frac{d<p>}{dt}=<-\frac{\partial V}{\partial x}>=<F>,$$

δηλαδή ότι η μεταβολή της μέσης τιμής της ορμής ισούται με τη μέση τιμή της δύναμης (αφού $F=-\frac{\partial V}{\partial x}$), δηλαδή το αντίστοιχο του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. Ο συνδυασμός των δύο δίνει τη σχέση:

$$m\frac{d^2<x>}{dt^2}=<-\frac{\partial V}{\partial x}>=<F>,$$

δηλαδή το αντίστοιχο της σχέσης: $F=ma$ της Νευτώνειας Μηχανικής. Συνοπτικά το θεώρημα του Ehrenfest εκφράζεται από τις σχέσεις:

$$\frac{\partial<x>}{\partial t}=\frac{<p>}{m},\ \frac{d<p>}{dt}=m\frac{d^2<x>}{dt^2}=<-\frac{\partial V}{\partial x}>=<F>.$$

IV 22 Σε μια ορισμένη στιγμή, $t=0$, η μέση θέση ενός σωματιδίου με μάζα m και φορτίο q είναι μηδέν, ενώ η μέση ορμή του είναι p_0. Ποιά είναι η μέση θέση και η μέση ορμή του σωματιδίου τη χρονική στιγμή $t=T$, αν το σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση ενός σταθερού και ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου με ένταση $\mathcal{E}$; Τα ίδια ερωτήματα, αν η δύναμη προέρχεται από το δυναμικό $V=\frac{1}{2}kx^2,\ k>0$.

IV 23* Σε μια ορισμένη στιγμή η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου που βρίσκεται σε απειρόβαθο πηγάδι το οποίο εκτείνεται από το 0 μέχρι το L έχει τη μορφή $\psi=Nx(L-x)$. Υπολογίστε την πιθανότητα εμφάνισης της ιδιοτιμής E_1 της θεμελιώδους στάθμης σε μιά μέτρηση της ενέργειας. Ποιά θα είναι η κυματοσυνάρτηση αμέσως μετά;

IV 24 Σε μια ορισμένη στιγμή η κυματοσυνάρτηση ενός σωματιδίου που βρίσκεται σε απειρόβαθο πηγάδι που εκτείνεται από το 0 μέχρι το L έχει τη μορφή $\psi=N\sqrt{\frac{2}{L}}\sin^3\frac{\pi x}{L}$. (α) Ποιά είναι τα δυνατά αποτελέσματα των μετρήσεων της ενέργειας και ποιά είναι η πιθανότητα του καθενός; (β)

Υπολογίστε τη μέση ενέργεια και την αβεβαιότητα ενέργειας του σωματιδίου που βρίσκεται σ' αυτήν την κατάσταση. (γ) Ποιά είναι η αναμενόμενη θέση του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου;

IV 25* (α) Για τυχούσα ιδιοσυνάρτηση ψ_n απειρόβαθου φρέατος (από 0 μέχρι L), δείξτε ότι $< x >= L/2$ και ότι $< x^2 >= L^2/3 - L^2/(2n^2\pi^2)$. (β) Υπολογίστε επίσης την αβεβαιότητα θέσης Δx και την αβεβαιότητα ορμής Δp.