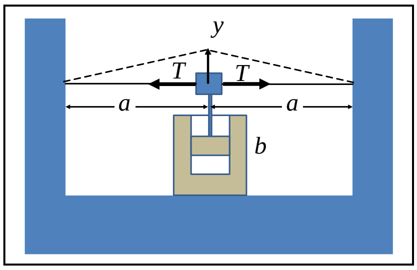
Ε.Μ.Π. – Σχολή ΕΜΦΕ, Μάθημα «Φυσική-ΙΙΙ», 2019-20
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ι. Ράπτης Αθήνα, 21/01/2020



1. Σώμα μάζας *m* συνδέεται σε ακλόνητα σημεία, με δύο νήματα μήκους *a* το καθένα, που τείνονται με τάση T_0, όπως στο σχήμα ($T_0 \gg mg =$αμελητέο). Το σώμα μπορεί να εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις μικρού πλάτους $y \ll a$, ως προς τα νήματα. Εγκάρσια προς τα νήματα, το σώμα είναι συνδεδεμένο με μηχανισμό απόσβεσης, από τον οποίο δέχεται δύναμη $F_{\tau\rho} = -b\,\upsilon_y$, όπου $b > 0$ και $\upsilon_y \equiv \partial y/\partial t$.

(α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση για την κίνηση της μάζας *m*, <u>στην περίπτωση που ο μηχανισμός απόσβεσης έχει αποσυνδεθεί</u>, δείξτε ότι το σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση, και υπολογίστε τη φυσική συχνότητα ταλάντωσης ω_0

(β) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση για την κίνηση της μάζας *m*, <u>στην περίπτωση που ο μηχανισμός απόσβεσης έχει συνδεθεί</u>. Βρείτε την τιμή $b = b_0$ που πρέπει να έχει η σταθερά απορρόφησης *b*, προκειμένου να έχουμε συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης.

(γ) Αν η τάση αυξηθεί στην τιμή $T = 10T_0$, ενώ η σταθερά απορρόφησης παραμένει στην ίδια τιμή $b = b_0$, του ερωτήματος-β, δείξτε ότι το σύστημα εκτελεί ταλάντωση με ασθενή απόσβεση, και υπολογίστε πόσος είναι ο συντελεστής ποιότητας *Q* του συστήματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $$m\ddot{y} = -2T_y \;\Rightarrow\; m\ddot{y} = -2T_0\, y/a \;\Rightarrow\; \ddot{y} + \frac{2T_0}{ma} y = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\omega_0^2 = \frac{2T_0}{ma}}$$

(β) $$m\ddot{y} = -\frac{2T_0}{a} y - b\dot{y} \;\Rightarrow\; \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{2T_0}{ma} y = 0$$

Αναζητώντας λύση της μορφής $y = y_0 e^{\rho t}$, αντικαθιστώ στην εξίσωση και παίρνω

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{2T_0}{ma} y = 0 \;\Rightarrow\; \rho^2 y + \rho\frac{b}{m} y + \frac{2T_0}{ma} y = 0 \;\Rightarrow\; \rho^2 + \rho\frac{b}{m} + \frac{2T_0}{ma} = 0$$

Ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου: $\rho_{1,2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{2T_0}{ma}}\right]$

Κρίσιμη απόσβεση

$$\left(\frac{b_0}{m}\right)^2 - 4\frac{2T_0}{ma} = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{b_0}{m}\right) = \sqrt{4\frac{2T_0}{ma}} \;\Rightarrow\; b_0 = m\sqrt{4\frac{2T_0}{ma}} \;\Rightarrow\; \boxed{b_0 = \sqrt{\frac{8T_0 m}{a}}}$$

(γ) Για $T = 10T_0$, η νέα συχνότητα ασθενούς απόσβεσης θα είναι

$$\omega' = \sqrt{\left(\frac{20T_0}{ma}\right) - \left(\frac{b_0}{2m}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{20T_0}{ma}\right) - \left(\frac{2T_0}{ma}\right)} = 3\sqrt{\frac{2T_0}{ma}}$$

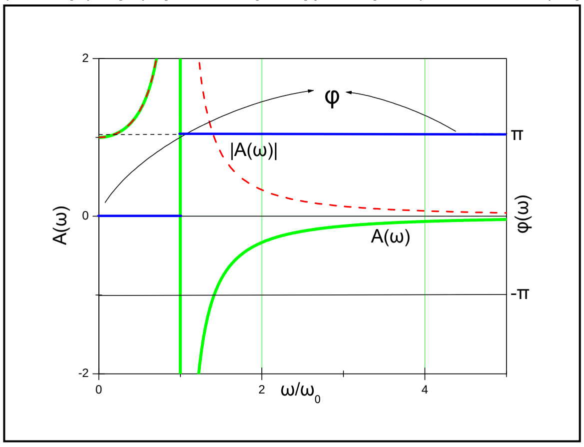
Και ο παράγοντας ποιότητας $Q = \dfrac{\omega'}{b_0/m} = \dfrac{3\sqrt{2T_0/ma}}{2\sqrt{2T_0/ma}} \;\Rightarrow Q = \dfrac{3}{2}$

2. Θεωρήστε έναν γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή μάζας m και σταθεράς ελατηρίου s, που υφίσταται εξωτερική διέγερση $F(t)=F_0\cos(\omega t)$, $\omega\neq\omega_0=\sqrt{s/m}$, ενώ οι τριβές θεωρούνται τόσο μικρές ώστε να μην αναγράφονται στη διαφορική εξίσωση, αλλά τελικά να επικρατεί η μόνιμη κατάσταση στο σύστημα. **(α)** Γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης και βρείτε μία έκφραση για το πλάτος μετατόπισης $A=A(\omega)$, (ως συνάρτηση της συχνότητας διέγερσης ω), που εκφράζει την απόκριση του ταλαντωτή στη μόνιμη κατάσταση, $x(t)=A(\omega)\cos(\omega t)$ **(β)** Ποια είναι η τιμή στην οποία τείνει το πλάτος A, όταν $\omega\to 0$; $\omega\to\omega_0$; $\omega\to\infty$ Σχολιάστε. **(γ)** Σχεδιάστε, ως συνάρτηση του ω, την $|A(\omega)|$, πάλι στη μόνιμη κατάσταση.

Απάντηση

(α) Η διαφορική εξίσωση κίνησης γράφεται $m\ddot{x}=-sx+F_0\cos(\omega t)\Rightarrow m\ddot{x}+sx=F_0\cos(\omega t)$ (1)

Η λύση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης στη μόνιμη κατάσταση, περιλαμβάνει συνάρτηση με τη μορφή και τη συχνότητα μόνο του μη-ομογενούς όρου, (επειδή οι «τριβές θεωρούνται αμελητέες» δεν υπάρχει αντίστοιχος όρος στη διαφορική εξίσωση, αλλά η επίτευξη μόνιμης κατάστασης, έστω και μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα, F_0 οφείλεται στην ύπαρξη, έστω και αμελητέων, τριβών). Επομένως αναζητούμε λύση της μορφής $x(t)=A(\omega)\cos(\omega t)\ \Rightarrow\ \ddot{x}(t)=-\omega^2A(\omega)\cos(\omega t)$. Η αντικατάσταση αυτών των δύο σχέσεων στην (1) δίνει



$$\left(\omega_0^2-\omega^2\right)A=F_0/m\ \Rightarrow A=\frac{F_0/m}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\quad (2),$$

όπου $\omega_0^2=\dfrac{s}{m}$

(β) Όταν $\omega\to 0$ τότε η σχέση (2) δίνει $A(\omega\to 0)\to\dfrac{F_0}{m\omega_0^2}\ \Rightarrow A(\omega\to 0)=\dfrac{F_0}{s}$, που είναι η στατική απομάκρυνση του ελατηρίου από την θέση ηρεμίας, για στατική δύναμη

(γ) Για τον σχεδιασμό της γραφικής παράστασης του $A=A(\omega)$ παρατηρούμε ότι, εκτός από την οριακή τιμή που υπολογίστηκε στο (β), υπάρχει ένα απειρισμός όταν $\omega\to\omega_0$, περί τον οποίον σημειώνεται αλλαγή προσήμου του A, δηλ. έχουμε αλλαγή φάσης κατά π. Αυτά τα χαρακτηριστικά αποτυπώνονται στο διπλανό σχήμα, όπου φαίνονται τα μεγέθη $|A(\omega)|$ (διακεκομμένη γραμμή), $A(\omega)$ (συνεχής γραμμή), και $\varphi(\omega)$

3. Σημειακή μάζα m είναι συνδεδεμένη σε ακλόνητο στήριγμα με ελατήριο σταθεράς s και μηχανισμό που ασκεί τριβή της μορφής $\vec{F}_{\tau\rho}=-r\vec{\upsilon}$, με r τέτοιο ώστε να έχουμε κρίσιμη απόσβεση, οπότε η συνάρτηση της απομάκρυνσης από την κατάσταση ισορροπίας είναι της μορφής $x(t)=(A+Bt)e^{-\gamma t}, (\gamma = r/2m)$, $\left(\gamma^2=\omega_0^2 \equiv \dfrac{s}{m} \Rightarrow r = 2\sqrt{sm}\right)$.

(α) Αν το σύστημα ξεκινά την κίνησή του την χρονική στιγμή $t=0$, με αρχική απομάκρυνση x_0 και αρχική ταχύτητα υ_0, υπολογίστε τις σταθερές *A* και *B*.

(β) Αν $\upsilon_0=-2\omega_0 x_0$, δείξτε ότι το σύστημα διέρχεται από την θέση ισορροπίας μία μόνο φορά, υπολογίστε την αντίστοιχη χρονική στιγμή t_0, και την αντίστοιχη ταχύτητα διέλευσης.

(γ) Αν μεταβάλουμε τον συντελεστή τριβής σε νέα τιμή $r=\sqrt{sm}/2$, δείξτε ότι το σύστημα θα εκτελέσει ταλάντωση με ασθενή απόσβεση και υπολογίστε τη συχνότητα αυτής της ταλάντωσης και τον συντελεστή ποιότητας *Q*.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Εφαρμογή των αρχικών συνθηκών στη σχέση κρίσιμης απόσβεσης: $x(t)=(A+Bt)e^{-\frac{rt}{2m}}$

Για την αρχική θέση: $x(0)=x_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=x_0}$. Από την αρχική ταχύτητα:

$$\dot{x}=Be^{-\frac{rt}{2m}}-\frac{r}{2m}(x_0+Bt)e^{-\frac{rt}{2m}} \Rightarrow \dot{x}(0)=B-\frac{r}{2m}x_0=\upsilon_0 \Rightarrow B=\frac{r}{2m}x_0+\upsilon_0 \Rightarrow \boxed{B=\gamma x_0+\upsilon_0}$$

Οπότε, τελικά : $\qquad x(t)=\left(x_0+(\gamma x_0+\upsilon_0)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}$

(β) Λόγω της συνθήκης κρίσιμης απόσβεσης $\left(\gamma^2=\omega_0^2 \Rightarrow \gamma=\omega_0\right)$, σχέσης, από (α), $x(t)=\left(x_0+(\gamma x_0+\upsilon_0)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}$, και της σχέσης των αρχικών συνθηκών $\upsilon_0=-2\omega_0 x_0$, έχουμε:

$$x(t)=\left(x_0+(\gamma x_0+\upsilon_0)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}=\left(x_0+(\omega_0 x_0-2\omega_0 x_0)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}=\left(x_0-\omega_0 x_0 t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}$$

Συνθήκη διέλευσης από τη θέση ισορροπίας: $\quad x(t_0)=0 \Rightarrow x_0(1-\omega_0 t_0)e^{-\frac{rt}{2m}}=0 \Rightarrow \boxed{t_0=\dfrac{1}{\omega_0}}$

Η ταχύτητα είχε υπολογιστεί στο (α): $\qquad \dot{x}=(\gamma x_0+\upsilon_0)e^{-\frac{rt}{2m}}-\gamma\left(x_0+(\gamma x_0+\upsilon_0)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}$

$$\dot{x}=(\omega_0 x_0-2\omega_0 x_0)e^{-\frac{rt}{2m}}-\omega_0\left(x_0+(\omega_0 x_0-2\omega_0 x_0)t\right)e^{-\frac{rt}{2m}}=-\omega_0 x_0 e^{-\frac{rt}{2m}}-\omega_0\left(x_0-\omega_0 x_0 t\right)e^{-\frac{rt}{2m}},$$

και για $t_0=1/\omega_0$: $\dot{x}(t_0)=-\omega_0 x_0 e^{-1}-\omega_0(x_0-x_0)e^{-\frac{rt}{2m}} \Rightarrow \boxed{\dot{x}(t_0)=-\omega_0 x_0/e}$

(γ) Αφού η συνθήκη κρίσιμης απόσβεσης είναι $\left(\gamma^2 \equiv \left(\dfrac{r}{2m}\right)^2=\omega_0^2 \equiv \dfrac{s}{m} \Rightarrow r=2\sqrt{sm}\right)$, για οποιοδήποτε $r<2\sqrt{sm}$, έχουμε ασθενή απόσβεση (άρα. και για το $r<\sqrt{sm}/2$), με συχνότητα $\omega'=\sqrt{\omega_0^2-(r/2m)^2}=\sqrt{\omega_0^2-\left(\sqrt{s/m}/4\right)^2} \Rightarrow \boxed{\omega'=\omega_0\sqrt{15}/4}$.

Ο συντελεστής ποιότητας $Q=\dfrac{\omega'}{r/m}=\dfrac{\omega'}{\sqrt{sm}/2m}=\dfrac{2\omega'}{\sqrt{s/m}}=\dfrac{2\omega_0\sqrt{15}}{\omega_0 4} \Rightarrow \boxed{Q=\dfrac{\sqrt{15}}{2}\approx 2}$

4. Απλός αρμονικός ταλαντωτής χωρίς απόσβεση, με μάζα *m* και σταθερά ελατηρίου *s*, διεγείρεται από μία δύναμη $F=F_0\sin(\omega t)$. α) Να υπολογίσετε τη μετατόπιση $x=x(t)$, στην περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες είναι $x(t=0)=0$ και $\dot{x}(t=0)=\upsilon_0$. β) Για συχνότητες διέγερσης κοντά στη συχνότητα $\omega_0=\sqrt{s/m}$, θεωρείστε ότι $\omega=\omega_0+\Delta\omega$ (όπου $\Delta\omega$ μικρό και τέτοιο ώστε $\Delta\omega\ t<<1$). Αναπτύσσοντας τη λύση του ερωτήματος (α) γύρω από το ω_0, να δείξετε ότι το πλάτος της μετατόπιση αυξάνει γραμμικά με το χρόνο.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Διαφορική εξίσωση κίνησης $m\ddot{x}+sx=F_0\sin(\omega t)$

Γενική Λύση Μη-Ομογενούς = Γενική Λύση Ομογενούς + Ειδική Λύση Μη-Ομογενούς

Γενική Λύση Ομογενούς : $x_{\Gamma\Lambda\mathrm{O}}=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

Ειδική Λύση Μη-Ομογενούς (με τη μορφή του Μη-Ομογενούς όρου): $x_{\mathrm{E\Lambda M-O}}=B\sin(\omega t)$

$$-\omega^2 mB\sin(\omega t)+sB\sin(\omega t)=F_0\sin(\omega t)\Rightarrow B\left(-\omega^2+s/m\right)=F_0/m\Rightarrow\boxed{B=\frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

Επομένως, η Γενική Λύση της Μη-Ομογενούς (πλήρους διαφορικής) γράφεται:

$$x_{\Gamma\Lambda M-\mathrm{O}}=A\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{F_0/m}{\omega_0^2-\omega^2}\sin(\omega t)$$

Ισχύει περίπου: $\omega_0^2-\omega^2=(\omega_0-\omega)(\omega_0+\omega)\approx(\Delta\omega)(2\omega_0)$, οπότε:

$$x_{\Gamma\Lambda M-\mathrm{O}}\simeq A\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{F_0/m}{2\omega_0\Delta\omega}\sin((\omega_0-\Delta\omega)t),\qquad[\Delta\omega\,t<<1]$$

$$x_{\Gamma\Lambda M-\mathrm{O}}\simeq A\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{F_0/m}{2\omega_0\Delta\omega}\left[\sin(\omega_0 t)\cos(-\Delta\omega t)+\cos(\omega_0 t)\sin(-\Delta\omega t)\right]$$

$$x_{\Gamma\Lambda M-\mathrm{O}}\approx A\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{F_0/m}{2\omega_0\Delta\omega}\left[\sin(\omega_0 t)1+\cos(\omega_0 t)(-\Delta\omega t)\right]$$

Άρα, υπάρχει ένα όρος: $(-\Delta\omega t)\dfrac{F_0/m}{2\omega_0\Delta\omega}\cos(\omega_0 t)$, που αυξάνει γραμμικά με το χρόνο, και του οποίου το πλάτος, μάλιστα, είναι αντιστρόφως ανάλογο της <u>μικρής ποσότητας Δω</u>.

5. Σημειακή μάζα m είναι συνδεδεμένη σε ακλόνητο στήριγμα με ελατήριο σταθεράς s και μηχανισμό που ασκεί τριβή της μορφής $\vec{F}_{\tau\rho}=-r\vec{\upsilon}$, με r τέτοιο ώστε να έχουμε ασθενή απόσβεση, οπότε η συνάρτηση της απομάκρυνσης από την κατάσταση ισορροπίας είναι της μορφής $x(t)=Ae^{-\gamma t}\sin(\omega' t+\varphi),(\gamma=r/2m),\left(\omega'=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right),\left(\omega_0^2=s/m\right)$.

(α) Αν στο συγκεκριμένο σύστημα ισχύει $\gamma=\omega_0/10$, (ω_0: γνωστό), και την χρονική στιγμή $t_0=0$ η μάζα ξεκινάει από το $x_0=0$ με γνωστή αρχική ταχύτητα $\upsilon_0>0$, υπολογίστε τις σταθερές A και φ, συναρτήσει των υ_0,ω_0 και σχεδιάστε ποιοτικά τη συνάρτηση $x=x(t)$.

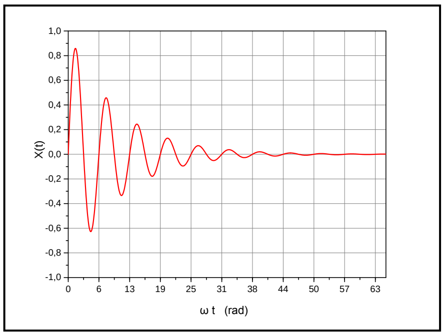
(β) Υπολογίστε την πρώτη χρονική στιγμή $t_1>0$ κατά την οποία το σύστημα <u>διέρχεται</u> από την θέση ισορροπίας για πρώτη φορά (μετά την εκκίνησή του) και υπολογίστε την αντίστοιχη ταχύτητα διέλευσης $\upsilon(t_1)=\upsilon_1$.

(γ) Υπολογίστε το λόγο των ενεργειών του συστήματος, κατά τις δύο χρονικές στιγμές $E_0/E_1=E(t_o)/E(t_1)$ και συγκρίνετε με τον συντελεστή ποιότητας $Q=\omega'/(2\gamma)$ του συστήματος. Περιγράψτε τη φυσική σημασία του συντελεστή ποιότητας για ένα σύστημα ασθενούς απόσβεσης είτε σε στιγμιαία διέγερση, είτε με συνεχή αρμονική εξωτερική διέγερση.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Για $\gamma = \omega_0/10$ έχουμε $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{100}\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{\omega' = \frac{\sqrt{99}}{10}\omega_0} \approx 0.995\omega_0$

Εφαρμογή των αρχικών συνθηκών στη σχέση ασθενούς απόσβεσης



$$x(t=0)=0 \Rightarrow Ae^{-0}\sin(0+\varphi)=0 \Rightarrow \boxed{\varphi=0}$$

$$x(t)=Ae^{-\gamma t}\sin(\omega' t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t)=Ae^{-\gamma t}\left(-\gamma\sin(\omega' t)+\omega'\cos(\omega' t)\right)$$

$$\dot{x}(t=0)=\upsilon_0 \Rightarrow Ae^{-0}\left(-\gamma\sin(0)+\omega'\cos(0)\right)=\upsilon_0$$

$$\Rightarrow A=\upsilon_0/\omega' \Rightarrow \boxed{A=10\upsilon_0/\sqrt{99}\omega_0} \approx 1.005\,\upsilon_0/\omega_0$$

(β) $x(t)=Ae^{-\gamma t}\sin(\omega' t)=Ae^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{99}\omega_0 t/10\right)$, και για τη χρονική της πρώτης διέλευσης

$$x(t_1)=0 \Rightarrow Ae^{-\gamma t_1}\sin\left(\sqrt{99}\omega_0 t_1/10\right)=0 \Rightarrow \sqrt{99}\omega_0 t_1/10=\pi \Rightarrow \boxed{t_1=10\pi/\sqrt{99}\omega_0}$$

Η αντίστοιχη ταχύτητα υπολογίζεται:

$$\dot{x}(t)=Ae^{-\gamma t}\left(-\gamma\sin(\omega' t)+\omega'\cos(\omega' t)\right) \Rightarrow \dot{x}(t_1)=Ae^{-\gamma t_1}\left(-\gamma\sin(\omega' t_1)+\omega'\cos(\omega' t_1)\right)$$

$$\dot{x}(t_1)=-Ae^{-\gamma t_1}\omega'=-\frac{10\upsilon_0}{\sqrt{99}\omega_0}\frac{\sqrt{99}\omega_0}{10}e^{-\frac{\omega_0}{10}\frac{10\pi}{\sqrt{99}\omega_0}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_1=-\upsilon_0 e^{-\frac{\pi}{\sqrt{99}}}}$$

(γ) Κατά τις χρονικές στιγμές $t_0=0$, $t_1=10\pi/\sqrt{99}\omega_0$, η μάζα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας $x=0$, οπότε το ελατήριο έχει μηδενική επιμήκυνση με αποτέλεσμα όλη η ενέργεια του συστήματος να είναι κινητική ενέργεια.

Άρα $\frac{E(t_o)}{E(t_1)}=\frac{\upsilon_0^2}{\left(-\upsilon_0 e^{-\frac{\pi}{\sqrt{99}}}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\frac{E(t_o)}{E(t_1)}=e^{\frac{2\pi}{\sqrt{99}}}}$

Συντελεστής ποιότητας $Q=\frac{\omega'}{2\gamma}=\frac{\sqrt{99}\omega_0}{10}\frac{10}{2\omega_0}=\frac{\sqrt{99}}{2}$, και, συγκρίνοντας με την προηγούμενη σχέση, έχουμε:

$$\boxed{\ln(E_0/E_1)=\pi/Q}$$

6. Οι αποσβηνόμενες ταλαντώσεις ενός μηχανικού συστήματος έχουν συχνότητα ω_1. Το ίδιο σύστημα, όταν διεγείρεται από εξωτερική δύναμη της μορφής $F(t)=F_0\cos(\omega t)$, (όπου F_0=σταθερά, και ω=μεταβλητή), παρουσιάζει μία καμπύλη συντονισμού ισχύος, με εύρος στο μισό του ύψους της $\Delta\omega=\omega_1/5$.

i) Σε ποιά γωνιακή συχνότητα παρατηρείται η μέγιστη μεταφορά ισχύος από τη δύναμη προς το σύστημα;

ii) Ποιός είναι ο παράγοντας ποιότητας Q του συστήματος;

iii) Αν το σύστημα έχει στοιχεία (m, s) ποιά είναι η τιμή του συντελεστή τριβής r_1 στην έκφραση $F_{\tau\rho}=-r\upsilon$;

iv) Σχεδιάστε την καμπύλη συντονισμού μέσης ισχύος για $r=r_1$, $r=r_1/10$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Η Μέγιστη μεταφορά ισχύος παρουσιάζεται στη φυσική συχνότητα ταλάντωσης ω_0 του συστήματος, όταν δεν υπάρχει τριβή, και ισχύει

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(r/2m\right)^2} \qquad (1)$$

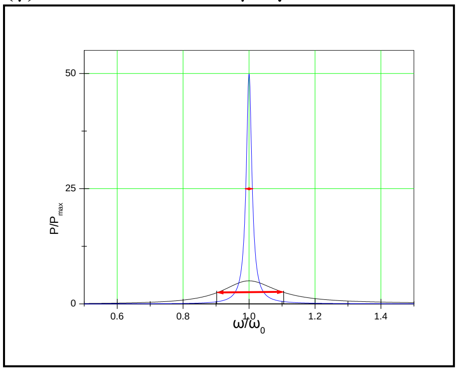
Επίσης, ισχύει $\Delta\omega = r/m$ αλλά $\Delta\omega = \omega_1/5$, επομένως $r/2m = \omega_1/10$. Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (1) παίρνουμε

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \left(r/2m\right)^2 \Rightarrow \omega_1^2 = \omega_0^2 - \omega_1^2/100$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 + \omega_1^2/100 = \omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \omega_1\sqrt{101}/10}$$

(β) Ο παράγοντας ποιότητας $Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega} = \dfrac{\omega_1\sqrt{101}/10}{\omega_1/5} = \dfrac{5\sqrt{101}}{10} \Rightarrow \boxed{Q = \dfrac{\sqrt{101}}{2}}$

(γ) Για τον υπολογισμό του r:



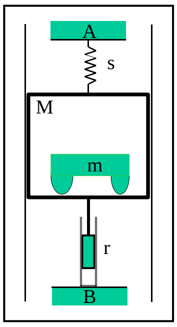
Τετραγωνίζουμε την $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(r/2m\right)^2}$:

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \left(r/2m\right)^2 \Rightarrow 100\omega_0^2/101 = \omega_0^2 - \left(r/2m\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(r/2m\right)^2 = \omega_0^2/101 = s/101m$$

Επιλύοντας ως προς r βρίσκουμε: $\boxed{r = 2\sqrt{\dfrac{ms}{101}}}$

(δ) Οι δυο γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



7. Θάλαμος συνολικής μάζας M=60 kg, είναι τοποθετημένος σε κατακόρυφο φρεάτιο, έτσι ώστε να κινείται μόνο κατακόρυφα, χωρίς τριβές με τα τοιχώματα του φρεατίου. Ο θάλαμος στηρίζεται, σε ακλόνητες βάσεις A και B, με σύστημα ανάρτησης, το οποίο αποτελείται από ελατήριο σταθεράς σκληρότητας s και από συνδυασμό εμβόλου-φιάλης, που διαθέτει μηχανισμό ελεγχόμενης απόσβεσης, και ισοδυναμεί με ιξώδη τριβή της μορφής $\mathbf{F}_{τριβής} = -r\,\mathbf{υ}$, όπου **υ** η ταχύτητα, και *r* ένας ρυθμιζόμενος συντελεστής απόσβεσης. Στον θάλαμο τοποθετείται συσκευή μάζας m=40 kg. Κατά την τοποθέτηση της συσκευής, (με τρόπο που να μην δημιουργούνται ταλαντώσεις), ο θάλαμος χαμηλώνει κατά 1 cm, και ισορροπεί. **α**) Να υπολογιστεί η σταθερά σκληρότητας s του ελατηρίου. **β**) Να υπολογιστεί η κρίσιμη τιμή r_0, που πρέπει να επιλεγεί για τον συντελεστή απόσβεσης, έτσι ώστε, σε περίπτωση διαταραχής, να έχουμε την ταχύτερη δυνατή ασυμπτωτική επαναφορά του συστήματος σε κατάσταση ισορροπίας, χωρίς ταλαντωτική συμπεριφορά. **γ**) Να γραφεί, συναρτήσει του χρόνου, η αντίστοιχη μετατόπιση x=x(t) του συστήματος, από την κατάσταση ισορροπίας, αν η αρχική απομάκρυνση είναι μηδενική και η αρχική ταχύτητα (διαταραχής) είναι 10 m/s. **δ**) Να υπολογιστεί η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος, αν η σταθερά απόσβεσης γίνει $r = r_0\sqrt{2,4}/2$. **ε**) Να γραφεί, συναρτήσει του χρόνου, η αντίστοιχη μετατόπιση x=x(t) του συστήματος, [με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, όπως στο ερώτημα (γ)]. [Δίνεται: επιτάχυνση βαρύτητας g=10m/s^2].

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) M = 60 kg, m = 40 kg

$$s=\frac{F}{x}=\frac{mg}{x}=\frac{40kg\times 10m/s^2}{0.01m}=4\times 10^4 kg/s^2=4\times 10^4 N/m$$

$$\omega_0^2=\frac{s}{M+m}=\frac{4\times 10^4 kg/s^2}{10^2 kg}=4\times 10^2 s^{-2}\Rightarrow \omega_0=20s^{-1}$$

β) Κρίσιμη απόσβεση: $\left(\frac{r_0}{2(M+m)}\right)^2=\omega_0^2=\frac{s}{M+m}\Rightarrow r_0=2\sqrt{s(M+m)}=4\times 10^3 kg/s$

γ) Κίνηση κατά την κρίσιμη απόσβεση

(διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου): $x(t)=(A+Bt)e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}$

Εφαρμογή αρχικών συνθηκών:

$$\left.\begin{matrix} x(t)=(A+Bt)e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}} \\ x(t=0)=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow A=0\Rightarrow x(t)=Bt\,e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}$$

$$x(t)=Bt\,e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}\Rightarrow \dot{x}(t)=B\,e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}-\frac{r_0}{2(M+m)}Bt\,e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}$$

$$\left.\begin{matrix} \dot{x}(t)=B\,e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}\left(1-\frac{r_0 t}{2(M+m)}\right) \\ \dot{x}(t=0)=\upsilon_0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow B=\upsilon_0$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t)=\upsilon_0 e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}\left(1-\frac{r_0 t}{2(M+m)}\right),\qquad \kappa\alpha\iota \qquad x(t)=\upsilon_0 t\,e^{-\frac{r_0 t}{2(M+m)}}$$

Όπου: $\frac{r}{2(M+m)}=\omega_0=20s^{-1}$

δ) $\frac{r'}{2(M+m)}=10\sqrt{2,4}s^{-1}\Rightarrow \omega'=\sqrt{\omega_0^2-\left(r'/2(M+m)\right)^2}=\sqrt{400s^{-2}-240s^{-2}}=4\sqrt{10}s^{-1}$

ε) $$\left.\begin{matrix} x(t)=Ae^{-\frac{r' t}{2(M+m)}}\sin(\omega' t+\phi) \\ x(t=0)=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \phi=0$$

$$x(t)=Ae^{-\frac{r' t}{2(M+m)}}\sin(\omega' t)\Rightarrow \upsilon(t)=Ae^{-\frac{r' t}{2(M+m)}}\left(\omega'\cos(\omega' t)-\frac{r'}{2(M+m)}\sin(\omega' t)\right)$$

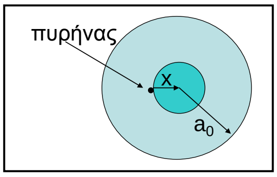
$$\upsilon(t=0)=\upsilon_0\Rightarrow A\omega'=\upsilon_0\Rightarrow A=\frac{\upsilon_0}{\omega'}$$

$$\upsilon(t)=\upsilon_0 e^{-\frac{r' t}{2(M+m)}}\left(\cos(\omega' t)-\frac{r'}{2(M+m)\omega'}\sin(\omega' t)\right)$$

8. Θεωρήστε, (σε μια ημικλασική προσέγγιση), ότι το άτομο του υδρογόνου αποτελείται από ένα αρνητικό νέφος, συνολικού φορτίου –*e*, κατανεμημένο ομοιόμορφα στο εσωτερικό σφαιρικού όγκου ακτίνας όση και η ακτίνα του Bohr, $a_0=0.5\overset{o}{A}$, στο κέντρο του οποίου βρίσκεται ένας σχεδόν σημειακός πυρήνας με φορτίο +*e*. Υποθέστε ότι, όταν το σύστημα διαταράσσεται ελαφρώς, το ηλεκτρονιακό νέφος μετατοπίζεται χωρίς παραμόρφωση, μεταθέτοντας κατά x το κέντρο βάρους του από τον πυρήνα. (α) Με τη βοήθεια του νόμου του Gauss, δείξτε ότι η δύναμη που ασκείται μεταξύ πυρήνα και ηλεκτρονιακού νέφους, έχει τη μορφή δύναμης επαναφοράς και, επομένως, το σύστημα θα εκτελέσει αρμονική ταλάντωση. (β) Υπολογίστε την κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης, ω_0, συναρτήσει των μεγεθών, e, a_0 και m_0 (=η μάζα του ελεύθερου ηλεκτρονίου), και της διηλεκτρικής σταθεράς του κενού ε_0 [Υπόδειξη: κάντε εύλογες προσεγγίσεις για την ανηγμένη μάζα του συστήματος, λαμβάνοντας υπόψη ότι η μάζα του πυρήνα είναι τρεις τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από εκείνη του ηλεκτρονίου]. (γ) Συγκρίνετε την ω_0, του ερωτήματος (β) με την κυκλική συχνότητα περιστροφής ω ενός σημειακού φορτίου –e περί ένα ακλόνητο ελκτικό κέντρο φορτίου +e σε κυκλική τροχιά ακτίνας a_0. (δ) Υποθέστε ότι η ταλάντωση του συστήματος διαρκεί, λόγω απωλειών, ένα χρονικό διάστημα $\Delta t = 10^{-9} s$. Εκτιμείστε, με τη βοήθεια των θεωρημάτων εύρους ζώνης, το αντίστοιχο εύρος συχνοτήτων $\Delta\omega$, και υπολογίστε τον συντελεστή ποιότητας Q του συστήματος.

Λύση

(α) Αν το κέντρο βάρους της ομοιόμορφης ηλεκτρονιακής κατανομής έχει μετατοπιστεί κατά



x ως προς τον πυρήνα, ο πυρήνας “αισθάνεται” μόνο το ηλεκτρόνιο της σφαίρας r < x , το οποίο το “βλέπει” ως σημειακό, οπότε η ηλεκτρική δύναμη αλληλεπίδρασης πυρήνα – ηλεκτρονίου είναι :|

$$F(x) = -\frac{q(x)e}{4\pi\varepsilon_0 x^2},$$

όπου $q(x) = \left(\frac{4}{3}\pi x^3\right)\rho_e = \left(\frac{4}{3}\pi x^3\right)\frac{e}{\frac{4}{3}\pi a_0^3} \Rightarrow q(x) = \frac{ex^3}{a_0^3}$. Επομένως:

$F(x) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}x = -sx$: δύναμη επαναφοράς με ενεργό σταθερά ελατηρίου $s = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}$

(β) Το ατομικό σύστημα είναι ένα σύστημα δύο σωμάτων που αλληλεπιδρούν αρμονικά, οπότε η συχνότητα θα δίνεται από τη σχέση $\omega^2 = s/\mu$, όπου μ η ανηγμένη μάζα του συστήματος $\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \approx m_e$, λόγω της σχέσης $m_p \approx 2000 m_e$, οπότε $\omega^2 = \frac{s}{m_e} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3 m_e}$

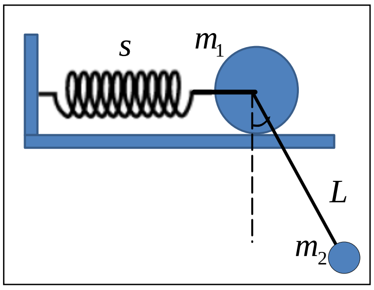
(γ) Στην περίπτωση των σημειακών φορτίων έχουμε

$F_C = F_K \Rightarrow \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^2} = m_e\frac{\upsilon^2}{a_0} = m_e\frac{\omega^2 a_0^2}{a_0} \Rightarrow \omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3 m_e}$, ίδια με την ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του (β).

(δ) Ο παράγοντας ποιότητας είναι $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, επομένως πρέπει να υπολογιστεί η τιμή του ω_0

$$\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3 m_e} = \frac{(1.6\times10^{-19}C)^2}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}C^2N^{-1}m^{-2}\times(0.5\times10^{-10}m)^3\times0.9\times10^{-30}kg} = 2\times10^{33}s^{-2}$$

$\omega = 4.5\times10^{16}s^{-1}$. Από το θεώρημα εύρους ζώνης $\Delta\omega\,\Delta t = 2\pi$, και $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0\Delta t}{2\pi} \approx \frac{2}{3}\times10^7$



9. Κύλινδρος μάζας m_1 και ακτίνας R είναι συνδεδεμένος με ακλόνητο σημείο μέσω ελατηρίου σταθεράς s και μπορεί να κυλάει χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο επίπεδο. Από τον άξονά του είναι αναρτημένο εκκρεμές (m_2, L) το οποίο μπορείνα εκτελεί ταλαντώσεις μικρών γωνιών $(\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta)$.

(α) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσσεις κίνησης που ικανοποιούν οι απομακρύνσεις (x_1, x_2) των μαζών (m_1, m_2) από τη θέση ισορροπίας τους, αντίστοιχα.

(β) Να αναζητηθούν λύσεις με τη μορφή κανονικών τρόπων ταλάντωσης $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$ και $x_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$, και να υπολογισθούν οι συχνότητες των ΚΤΤ

(α) $\left\{ m_1\ddot{x}_1 = -sx_1 + F_{\tau\rho} + T_x, \quad I\ddot{\varphi}_1 = -F_{\tau\rho}R \Rightarrow I\dfrac{\ddot{x}_1}{R} = -F_{\tau\rho}R \right\} \Rightarrow \quad F_{\tau\rho} = -\dfrac{I}{R^2}\ddot{x}_1$

$$m_1\ddot{x}_1 = -sx_1 - \frac{I}{R^2}\ddot{x}_1 + T_x \quad \Rightarrow \quad \left(m_1 + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{x}_1 = -sx_1 + T_x \qquad (1)$$

$$\left\{ m_2\ddot{x}_2 = -T_x \quad \Rightarrow \quad T_x = m_2 g\sin\theta = m_2 g\frac{x_2 - x_1}{L} \right\} \Rightarrow m_2\ddot{x}_2 = -m_2 g\frac{x_2 - x_1}{L} \qquad (2)$$

(β) $\left(m_1 + \dfrac{I}{R^2}\right)\ddot{x}_1 = -sx_1 + m_2 g\dfrac{x_2 - x_1}{L} \Rightarrow \left(m_1 + \dfrac{I}{R^2}\right)\ddot{x}_1 + \left(s + m_2\dfrac{g}{L}\right)x_1 - m_2\dfrac{g}{L}x_2 = 0$

$$m_2\ddot{x}_2 + m_2\frac{g}{L}x_2 - m_2\frac{g}{L}x_1 = 0$$

$$\left(1 + \frac{I}{m_1R^2}\right)\ddot{x}_1 + \left(\frac{s}{m_1} + \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{L}\right)x_1 - \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{L}x_2 = 0$$

$I = m_1R^2/2,\ m_1 = 2m_2,\ s/m_1 = g/L = \omega_0^2, \qquad \dfrac{3}{2}\ddot{x}_1 + \dfrac{3}{2}\omega_0^2x_1 - \dfrac{1}{2}\omega_0^2x_2 = 0$

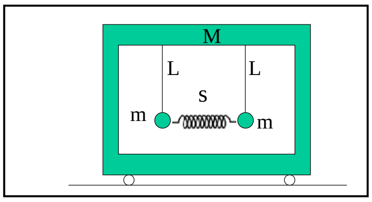
$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2x_2 - \omega_0^2x_1 = 0$$

Υπιθέτοντας : $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$ και $x_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_1 + \omega_0^2x_1 - \frac{1}{3}\omega_0^2x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2x_2 - \omega_0^2x_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\omega_0^2 - \omega^2)A - \frac{1}{3}\omega_0^2B = 0 \\ -\omega_0^2A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) & -\frac{1}{3}\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{1}{3}\omega_0^4 = 0 \Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \frac{1}{3}\omega_0^4 \Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 = \pm\frac{\omega_0^2}{\sqrt{3}}$$

$$\omega_0^2 \mp \frac{\omega_0^2}{\sqrt{3}} = \omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \mp \frac{\omega_0^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} \mp 1\right)}$$



10. Δύο ιδανικά εκκρεμή μάζας m και μήκους L, το καθένα, κρέμονται από δύο διαφορετικά σημεία της οροφής μικρού οχήματος μάζας M, το οποίο μπορεί να κινείται ελεύθερα, χωρίς τριβές, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Το σύστημα βρίσκεται μέσα σε κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας g, και τα δύο εκκρεμή συνδέονται με ελατήριο σταθεράς s. Τα δύο εκκρεμή

εκτρέπονται κατά μικρές γωνίες από την κατακόρυφο, έτσι ώστε να κάνουν ταλαντώσεις μικρών γωνιών $\left(\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta\right)$, μένοντας στο κατακόρυφο επίπεδο που περνάει από τα σημεία ανάρτησης. (α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης για κάθε ένα από τα τρία σώματα (*m*, *m*, *M*). (β) Υποθέστε ότι το σύστημα εκτελεί κίνηση σε κανονικό τρόπο ταλάντωσης (ΚΤΤ: κοινή συχνότητα και φάση, διαφορετικά πλάτη) και διατυπώστε τη συνθήκη υπολογισμού των συχνοτήτων των κανονικών τρόπων ταλάντωσης. (γ) Επιλύστε τη χαρακτηριστική εξίσωση, για την περίπτωση *m=M*, $\left(g/L\right)=\left(s/m\right)=\omega_0^2$, και προσδιορίστε τις συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0.
(δ) Επαναλάβετε το ερώτημα-γ, για την περίπτωση *m=M*, $\omega_{01}^2 \equiv \left(g/L\right) \neq \left(s/m\right)=\omega_{02}^2$, και προσδιορίστε τις συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει των $\omega_{01}^2, \omega_{02}^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Έστω ότι $x_1,\ x_2,\ x_3$, οι μετατοπίσεις των $m_1,\ m_2,\ M$, από τις θέσεις ισορροπίας, και $\theta_1,\ \theta_2$, οι γωνίες των αντίστοιχων νημάτων με την κατακόρυφο.

$$\left\{\begin{array}{l} m_1\ddot{x}_1 = -T_1\sin\theta_1 - s\left(x_1-x_2\right) = -m_1 g\,\dfrac{(x_1-x_3)}{L} - s\left(x_1-x_2\right) \\ m_2\ddot{x}_2 = -T_2\sin\theta_2 - s\left(x_2-x_1\right) = -m_2 g\,\dfrac{(x_2-x_3)}{L} - s\left(x_2-x_1\right) \\ m_3\ddot{x}_3 = T_1\sin\theta_1 + T_2\sin\theta_2 = m_1 g\,\dfrac{(x_1-x_3)}{L} + m_2 g\,\dfrac{(x_2-x_3)}{L} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} m_1\ddot{x}_1 + m_1 g\,\dfrac{(x_1-x_3)}{L} + s\left(x_1-x_2\right) = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_1}\right)x_1 - \dfrac{s}{m_1}x_2 - \dfrac{g}{L}x_3 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + m_2 g\,\dfrac{(x_2-x_3)}{L} + s\left(x_2-x_1\right) = 0 \Rightarrow -\dfrac{s}{m_2}x_1 + \ddot{x}_2 + \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_2}\right)x_2 - \dfrac{g}{L}x_3 = 0 \\ m_3\ddot{x}_3 - m_1 g\,\dfrac{(x_1-x_3)}{L} - m_2 g\,\dfrac{(x_2-x_3)}{L} = 0 \Rightarrow -\dfrac{m_1}{m_3}\dfrac{g}{L}x_1 - \dfrac{m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}x_2 + \ddot{x}_3 + \dfrac{m_1+m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}x_3 = 0 \end{array}\right\}$$

Υποθέτουμε: $x_1 = A\cos(\omega t+\varphi)$, $x_2 = B\cos(\omega t+\varphi)$, $x_3 = C\cos(\omega t+\varphi)$, οπότε:

$$\left.\begin{array}{l} -\omega^2 A + \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_1}\right)A - \dfrac{s}{m_1}B - \dfrac{g}{L}C = 0 \\ -\dfrac{s}{m_2}A + -\omega^2 B + \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_2}\right)B - \dfrac{g}{L}C = 0 \\ -\dfrac{m_1}{m_3}\dfrac{g}{L}A - \dfrac{m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}B + -\omega^2 C + \dfrac{m_1+m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_1}\right)-\omega^2 & -\dfrac{s}{m_1} & -\dfrac{g}{L} \\ -\dfrac{s}{m_2} & \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_2}\right)-\omega^2 & -\dfrac{g}{L} \\ -\dfrac{m_1}{m_3}\dfrac{g}{L} & -\dfrac{m_2}{m_3}\dfrac{g}{L} & \dfrac{m_1+m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0^2 & 2\omega_0^2-\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \left(\omega^2-2\omega_0^2\right) & \omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \left(\omega^2-2\omega_0^2\right) & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega_0^2 & \left(\omega^2-2\omega_0^2\right) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)^2-\omega_0^4\right]-\omega_0^2\left[\omega_0^2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^4\right]+\omega_0^2\left[\omega_0^4-\omega_0^2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\right]=0$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)^2-\omega_0^4\right]-2\omega_0^2\left[\omega_0^2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^4\right]=0$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^2\right]\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)+\omega_0^2\right]-2\omega_0^4\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)-\omega_0^2\right]=0$$

$$\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left(\omega^2-\omega_0^2\right)-2\omega_0^4\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)=0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)\left(\omega^2-\omega_0^2\right)-2\omega_0^4\right]=0$$

$$\Rightarrow\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\omega^4+2\omega_0^4-3\omega_0^2\omega^2-2\omega_0^4\right]=0\Rightarrow\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\omega^4-3\omega_0^2\omega^2\right]=0,\ \text{άρα:}$$

$$\Rightarrow\omega^2\left(\omega^2-3\omega_0^2\right)\left[\omega^2-3\omega_0^2\right]=0\quad\Rightarrow\boxed{\left\{\omega_1=0,\quad \omega_2=\omega_3=\omega_0\sqrt{3}\right\}}$$

Ο μηδενισμός της μίας ιδιοσυχνότητας δηλώνει την ισοταχή κίνηση (ή, ακινησία) του Κέντρου Μάζας του συστήματος (επειδή το σύστημα είναι ελεύθερο, συνολικά)

Όσον αφορά την σύμπτωση των άλλων δύο ιδιοσυχνοτήτων, εδώ έχουμε την περίπτωση «εκφυλισμού» δύο Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, δηλαδή την σύμπτωση των ιδιοσυχνοτήτων τους, λόγω της ύπαρξης συμμετρίας (όχι μόνο γεωμετρικής, αλλά και ενός είδους «δυναμικής» συμμετρίας)

$$\left\{\begin{matrix}\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)A+\omega_0^2B+\omega_0^2C=0\\ \omega_0^2A+\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)B+\omega_0^2C=0\\ \omega_0^2A+\omega_0^2B+2\left(\omega^2-2\omega_0^2\right)C=0\end{matrix}\right\}\qquad \kappa\alpha\iota \qquad \left\{\begin{matrix}\omega_1^2=0\\ \omega_2^2=3\omega_0^2\\ \omega_3^2=3\omega_0^2\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

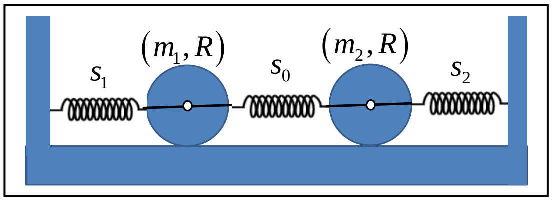
$$\omega_1^2=0 \qquad \Rightarrow 2A=B+C \qquad \acute{\eta} \qquad 2B=A+C \qquad \acute{\eta} \qquad A+B=2C$$

$$\omega_{2,3}^2=3\omega_0^2 \qquad \Rightarrow A+B+C=0$$

(δ) Για την περίπτωση m=M, $\omega_{01}^2\equiv\left(g/L\right)\neq\left(s/m\right)=\omega_{02}^2$,

$$\begin{vmatrix}\left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_1}\right)-\omega^2 & -\dfrac{s}{m_1} & -\dfrac{g}{L}\\ -\dfrac{s}{m_2} & \left(\dfrac{g}{L}+\dfrac{s}{m_2}\right)-\omega^2 & -\dfrac{g}{L}\\ -\dfrac{m_1}{m_3}\dfrac{g}{L} & -\dfrac{m_2}{m_3}\dfrac{g}{L} & \dfrac{m_1+m_2}{m_3}\dfrac{g}{L}-\omega^2\end{vmatrix}=0\Rightarrow\begin{vmatrix}\left(\omega_{01}^2+\omega_{02}^2\right)-\omega^2 & -\omega_{02}^2 & -\omega_{01}^2\\ -\omega_{02}^2 & \left(\omega_{01}^2+\omega_{02}^2\right)-\omega^2 & -\omega_{01}^2\\ -\omega_{01}^2 & -\omega_{01}^2 & 2\omega_{01}^2-\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$\left[\left(\omega =_{01}^2+\omega_{02}^2\right)-\omega^2\right]\begin{vmatrix}\left(\omega_{01}^2+\omega_{02}^2\right)-\omega^2 & -\omega_{01}^2\\ -\omega_{01}^2 & 2\omega_{01}^2-\omega^2\end{vmatrix}+\omega_{02}^2\begin{vmatrix}-\omega_{02}^2 & -\omega_{01}^2\\ -\omega_{01}^2 & 2\omega_{01}^2-\omega^2\end{vmatrix}-\omega_{01}^2\begin{vmatrix}-\omega_{02}^2 & \left(\omega_{01}^2+\omega_{02}^2\right)-\omega^2\\ -\omega_{01}^2 & -\omega_{01}^2\end{vmatrix}=0$$



11. Δίνεται η διάταξη του σχήματος με δύο ελατήρια σταθεράς s και ένα ενδιάμεσο ελατήριο σταθεράς $s_0=2s$. Τα άκρα του ελατηρίου s_0 είναι συνδεδεμένα στα κέντρα C_1 και C_2 δύο συμπαγών ομοιογενών κυλίνδρων μάζας $m_1=m_2=m$ και ακτίνας R. Επίσης στα κέντρα C_1 και C_2 είναι συνδεδεμένα, αντίστοιχα, το δεξιό και αριστερό ελατήριο $s_1=s_2=s$. Θεωρούμε ότι, κατά την εξέλιξη της κίνησης, η όλη διάταξη παραμένει στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο, τα ελατήρια είναι οριζόντια, οι κύλινδροι εκτελούν κύλιση χωρίς

ολίσθηση και οι συνδέσεις μεταφέρουν τις δυνάμεις των ελατηρίων στα κέντρα χωρίς να ακουμπούν τους κυλίνδρους σε άλλα σημεία (με κατάλληλες ζεύξεις τύπου “χαλινάρια”).
(α) Βρείτε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος θεωρώντας ως μεταβλητές τις μετατοπίσεις x_1 και x_2 των C_1 και C_2 από την θέση ισορροπίας της διάταξης.
(β) Βρείτε τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης της διάταξης.
(γ) Περιγράψτε (είτε μετά από τον προσδιορισμό των $x_1(t)$ και $x_2(t)$, είτε πιο απλά σε αναλογία με άλλο γνωστό σύστημα) το είδος της κίνησης στους δύο κανονικούς τρόπους ταλάντωσης.
[Οδηγία: Για το ερώτημα-α χρησιμοποιείστε τα μεγέθη με τους δείκτες (1,2), (δηλ., πριν την εξίσωση των τιμών τους), για την ευκρινή συσχέτισή τους με τα αντίστοιχα υποσυστήματα.]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $m_1\ddot{x}_1 = -s_1x_1 - s_0\left(x_1 - x_2\right) + T_1, \qquad I_1\ddot{\theta}_1 = -T_1R \Rightarrow T_1 = -\left(I_1/R^2\right)\ddot{x}_1$

$m_2\ddot{x}_2 = -s_2x_2 - s_0\left(x_2 - x_1\right) + T_2, \qquad I_2\ddot{\theta}_2 = -T_2R \Rightarrow T_2 = -\left(I_2/R^2\right)\ddot{x}_2$

$$\left\{\begin{array}{l} m_1\ddot{x}_1 = -s_1x_1 - s_0\left(x_1 - x_2\right) - \left(I_1/R^2\right)\ddot{x}_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = -s_2x_2 - s_0\left(x_2 - x_1\right) - \left(I_2/R^2\right)\ddot{x}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[m_1 + \left(I_1/R^2\right)\right]\ddot{x}_1 = -s_1x_1 - s_0\left(x_1 - x_2\right) \\ \left[m_2 + \left(I_2/R^2\right)\right]\ddot{x}_2 = -s_2x_2 - s_0\left(x_2 - x_1\right) \end{array}\right\}$$

$$s_1 = s_2 = k, \quad s_0 = 2k \qquad m_1 = m_2 = m \quad \Rightarrow \quad I_1/R^2 = I_2/R^2 = m/2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[m_1 + \left(I_1/R^2\right)\right]\ddot{x}_1 + \left(s_1 + s_0\right)x_1 - s_0x_2 = 0 \\ \left[m_2 + \left(I_2/R^2\right)\right]\ddot{x}_2 + \left(s_2 + s_0\right)x_2 - s_0x_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - 2kx_2 = 0 \\ -2kx_1 + \frac{2}{3}m\ddot{x}_2 + 3kx_2 = 0 \end{array}\right\}}$$

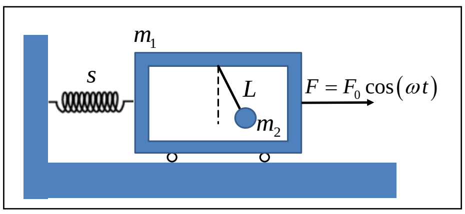
(β) $\left\{x_1 = A\cos\left(\omega t\right), \quad x_2 = B\cos\left(\omega t\right)\right\}$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\left(s_1 + s_0\right) - \omega^2\left[m_1 + \left(I_1/R^2\right)\right]\right)A - s_0B = 0 \\ -s_0A + \left(\left(s_1 + s_0\right) - \omega^2\left[m_2 + \left(I_2/R^2\right)\right]\right)B = 0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \left(2k - \frac{3}{2}m\omega^2\right)A - 2kB = 0 \\ -2kA + \left(2k - \frac{3}{2}m\omega^2\right)B = 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} \left(2k - \frac{3}{2}m\omega^2\right) & -2k \\ -2k & \left(2k - \frac{3}{2}m\omega^2\right) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(2k - \frac{3}{2}m\omega^2\right)^2 - \left(-2k\right)^2 = 0$$

$$\left(2k - \frac{3}{2}m\omega^2\right)^2 = 4k^2 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{2}{3}\left(3 \mp 2\right)\omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\left\{\omega_{1,2}^2 = \frac{2}{3}\omega_0^2\right\}, \left\{\omega_{1,2}^2 = \frac{10}{3}\omega_0^2\right\}}$$

(γ) $\left\{\omega_1 : \quad A = B\right\}, \quad \left\{\omega_2 : \quad A = -B\right\}$



12. Όχημα μάζας m_1 είναι συνδεδεμένο με ακλόνητο σημείο μέσω ελατηρίου σταθεράς s και μπορεί να κυλάει χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο επίπεδο. Στο εσωτερικό του οχήματος είναι αναρτημένο εκκρεμές $\left(m_2, L\right)$. Στο όχημα ασκείται εξωτερική οριζόντια δύναμη $F = F_0\cos\left(\omega t\right)$.

(α) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσσεις κίνησης που ικανοποιούν οι απομακρύνσεις (x_1, x_2) των μαζών (m_1, m_2)από τη θέση ισορροπίας τους, αντίστοιχα, στην προσέγγιση ότι το εκκρεμές εκτελεί ταλαντώσεις μικρού πλάτους $(\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta)$.

(β) Αν $m_1 = 2m_2, \quad s/m_1 = \omega_0^2/2, \quad g/L = \omega_0^2$, να αναζητηθούν μόνιμες λύσεις με τη μορφή κανονικών τρόπων ταλάντωσης $x_1 = A\cos(\omega t)$ και $x_2 = B\cos(\omega t)$, και να υπολογισθούν τα πλάτη $A = A(\omega), \quad B = B(\omega)$, συναρτήσει των F_0, ω_0^2.

(γ) Να προσδιορισθούν οι τιμές ω_1^2, ω_2^2 του τετραγώνου της συχνότητας ω για τις οποίες τα A και B απειρίζονται, και η τιμή ω_3^2 του τετραγώνου της ω για την οποία το A μηδενίζεται. Σχεδιάστε, συναρτήσει του ω, τα πλάτη $A = A(\omega), \quad B = B(\omega)$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $\left\{ m_1\ddot{x}_1 = -sx_1 + T_x + F_0\cos(\omega t) \right\}$ (1)

$$\left\{ m_2\ddot{x}_2 = -T_x \quad \Rightarrow \quad T_x = m_2 g\sin\theta = m_2 g\frac{x_2 - x_1}{L} \right\} \Rightarrow m_2\ddot{x}_2 = -m_2 g\frac{x_2 - x_1}{L} \quad (2)$$

(β) $m_1\ddot{x}_1 = -sx_1 + m_2 g\dfrac{x_2 - x_1}{L} + F_0\cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{x}_1 + \left(\dfrac{s}{m_1} + \dfrac{m_2}{m_1}\dfrac{g}{L}\right)x_1 - \dfrac{m_2}{m_1}\dfrac{g}{L}x_2 = \dfrac{F_0}{m_1}\cos(\omega t)$

$$m_2\ddot{x}_2 + m_2\frac{g}{L}x_2 - m_2\frac{g}{L}x_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x}_2 + \frac{g}{L}x_2 - \frac{g}{L}x_1 = 0$$

$m_1 = 2m_2, \quad s/m_1 = \omega_0^2/2, \quad g/L = \omega_0^2, \quad F_0/m_1 \equiv f_0,$

$$\ddot{x}_1 + \left(\frac{\omega_0^2}{2} + \frac{\omega_0^2}{2}\right)x_1 - \frac{1}{2}\omega_0^2 x_2 = f_0\cos(\omega t)$$

και $-\omega_0^2 x_1 + \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0$. Υπιθέτοντας : $x_1 = A\cos(\omega t)$ και $x_2 = B\cos(\omega t)$

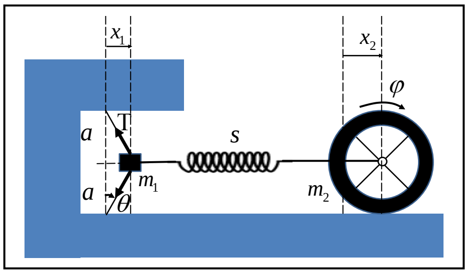
$$\left\{\begin{matrix} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \frac{1}{2}\omega_0^2 x_2 = F_0 \\ -\omega_0^2 x_1 + \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)A - \frac{1}{2}\omega_0^2 B = F_0 \\ -\omega_0^2 A + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)B = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} f_0 & -\frac{1}{2}\omega_0^2 \\ 0 & \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) \end{vmatrix}}{|Det|}, \qquad B = \frac{\begin{vmatrix} \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) & f_0 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{vmatrix}}{|Det|}$$

Ρίζες του παρονομαστή: $|Det| = \begin{vmatrix} \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) & -\frac{1}{2}\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \left(\omega_0^2 - \omega^2\right) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 - \dfrac{1}{2}\omega_0^4 = 0 \Rightarrow$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 = \frac{1}{2}\omega_0^4 \Rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 = \pm\frac{\omega_0^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} \mp 1\right)} = \omega_0^2\left(1 \mp 1/\sqrt{2}\right)$$

$$A = \frac{f_0\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega^2 - \omega_1^2\right)\left(\omega^2 - \omega_2^2\right)}, \qquad B = \frac{f_0\omega_0^2}{\left(\omega^2 - \omega_1^2\right)\left(\omega^2 - \omega_2^2\right)}, \qquad A = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$$



13. Ιδανική χορδή αμελητέας μάζας και μήκους $L = 2a$, έχει ακλόνητα άκρα, και φέρει στο μέσον της ένα σώμα μάζας m_1 το οποίο είναι συνδεδεμένο, μέσω ελατηρίου σταθεράς s, με τον άξονα ενός λεπτότοιχου κυλίνδρου μάζας m_2 και ακτίνας R. Διαταράσσουμε το σύστημα ώστε οι διαγραφόμενες γωνίες του νήματος, ως προς την κατάσταση ισορροπίας, να είναι μικρές, $\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta$, και ο κύλινδρος να κυλάει χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο δάπεδο. Η χορδή τείνεται με τάση T, η οποία είναι πολύ μεγαλύτερη από το βάρος του σωματιδίου m_1, που θεωρείται αμελητέο ως προς την T.
(α) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις απομακρύνσεις x_1 και x_2 των σωμάτων m_1 και m_2, από τις θέσεις ισορροπίας τους. **(β)** Να αναζητηθούν λύσεις με τη μορφή Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, $x_1(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ και $x_2(t) = B\cos(\omega t + \phi)$ και να υπολογιστούν οι συχνότητες, ω_1, ω_2 των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0, στην περίπτωση που $m_1 = m_2 = m$, $T/(ma) = s/2m = \omega_0^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ
(α) Στην προσέγγιση: $\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta$, ισχύει

$$m_1\ddot{x}_1 = -2T\frac{x_1}{a} - s(x_1 - x_2) \qquad (1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -s(x_2 - x_1) + F_{\tau\rho} \qquad (2)$$

Περιστροφική κίνηση: $m_2R^2\ddot{\theta} = -F_{\tau\rho}R \;\Rightarrow\; m_2R^2\frac{\ddot{x}_2}{R} = -F_{\tau\rho}R \;\Rightarrow\; F_{\tau\rho} = -m_2\ddot{x}_2$

Αντικαθιστώντας στη (2) , το σύστημα των 2 εξισώσεων γίνεται

$$\left\{\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -2T\frac{x_1}{a} - s(x_1 - x_2) \\ m_2\ddot{x}_2 &= -s(x_2 - x_1) - m_2\ddot{x}_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -2T\frac{x_1}{a} - s(x_1 - x_2) \\ 2m_2\ddot{x}_2 &= -s(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \left(\frac{2T}{am_1} + \frac{s}{m_1}\right)x_1 - \frac{s}{m_1}x_2 = 0 \\ &-\frac{s}{2m_2}x_1 + \ddot{x}_2 + \frac{s}{2m_2}x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

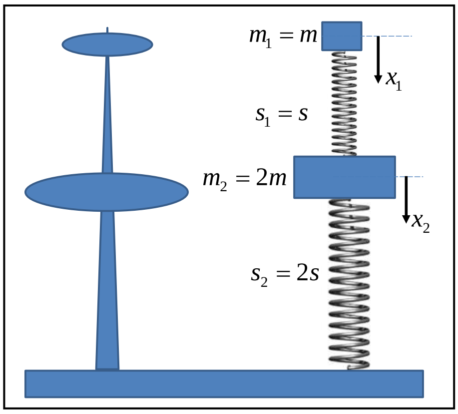
Αν, $\dfrac{T}{ma} = \dfrac{s}{2m} = \omega_0^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{2T}{ma} = \dfrac{s}{m} = 2\omega_0^2$, οπότε:

$$\left\{\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \left(\frac{2T}{am_1} + \frac{s}{m_1}\right)x_1 - \frac{s}{m_1}x_2 = 0 \\ &-\frac{s}{2m_2}x_1 + \ddot{x}_2 + \frac{s}{2m_2}x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + 4\omega_0^2x_1 - 2\omega_0^2x_2 = 0 \\ &-\omega_0^2x_1 + \ddot{x}_2 + \omega_0^2x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Αντικαθιστώντας: $x_1(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ και $x_2(t) = B\cos(\omega t + \phi)$, παίρνουμε:

$$\left\{\begin{aligned} &(4\omega_0^2 - \omega^2)A - 2\omega_0^2B = 0 \\ &-\omega_0^2A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} (4\omega_0^2 - \omega^2) & -2\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^4 - 5\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0$$

Με ρίζες: $\omega_{1,2}^2 = \dfrac{\omega_0^2}{2}\left(5 \pm \sqrt{17}\right)$



14. Ένας πύργος τηλεόρασης με δύο ορόφους μπορεί να προσομοιωθεί με ένα σύστημα μαζών ελατηρίων όπως στο διπλανό σχήμα. Θεωρούμε ότι η διαταραχή του συστήματος από την κατάσταση ισορροπίας (π.χ., λόγω των επισκεπτών του πύργου) γίνεται μόνο κατά την κατακόρυφη διεύθυνση. (α) Γράψτε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κατακόρυφης κίνησης των δύο ορόφων του πύργου. (β) Αναζητήστε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, υποθέτοντας λύσεις της μορφής $x_1 = A\cos(\omega t+\varphi), \quad x_2 = B\cos(\omega t+\varphi)$. (γ) Γράψτε τη συνθήκη επιλυσιμότητας του ομογενούς γραμμικού συστήματος που ικανοποιούν τα πλάτη Α και Β, και υπολογίστε τις συχνότητες (ω_1, ω_2) των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, συναρτήσει του $\omega_0 = \sqrt{s/m}$ (δ) Υπολογίστε το πηλίκο των πλατών Α/Β, για κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης και τις κανονικές συντεταγμένες του συστήματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Οι εξισώσεις κίνησης

$$m_1\ddot{x}_1 = -s_1(x_1 - x_2) \qquad (1\alpha)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -s_1(x_2 - x_1) - s_2 x_2 \qquad (1\beta)$$

$$m_1\ddot{x}_1 + s_1x_1 - s_1x_2 = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + (s_1+s_2)x_2 - s_1x_1 = 0$$

όπου, $m_1 = m, \quad m_2 = 2m, \quad s_1 = s, \quad s_2 = 2s$, οπότε:

$$\left\{\begin{array}{l} \ddot{x}_1 + \dfrac{s_1}{m_1}x_1 - \dfrac{s_1}{m_1}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{(s_1+s_2)}{m_2}x_2 - \dfrac{s_1}{m_2}x_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{3}{2}\omega_0^2 x_2 - \dfrac{1}{2}\omega_0^2 x_1 = 0 \end{array}\right\}.$$

(β) Αν αναζητήσουμε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης $\left\{\begin{array}{l} x_1 = A\cos(\omega t+\varphi) \\ x_2 = B\cos(\omega t+\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{ll} (\omega_0^2-\omega^2)A - \omega_0^2 B = 0 & (2\alpha) \\ -\dfrac{1}{2}\omega_0^2 A + \left(\dfrac{3}{2}\omega_0^2 - \omega^2\right)B = 0 & (2\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} (\omega_0^2-\omega^2) & -\omega_0^2 \\ -\dfrac{1}{2}\omega_0^2 & \left(\dfrac{3}{2}\omega_0^2-\omega^2\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

(γ) $\Rightarrow \omega^4 - \dfrac{5}{2}\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0$, με ρίζες: $\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \dfrac{5\pm 3}{4} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \omega_1 = \omega_0\sqrt{2} & (4\alpha) \\ \omega_1 = \omega_0/\sqrt{2} & (4\beta) \end{array}\right.$

(δ) Αντικαθιστώντας κάθε μία από τις ιδιοσυχνότητες στην (2α) παίρνουμε:

$$\omega = \omega_1 = \omega_0\sqrt{2} \overset{(2\alpha)}{\Rightarrow} (\omega_0^2 - 2\omega_0^2)A_1 = \omega_0^2 B_1 \Rightarrow \boxed{(A_1/B_1) = -1} \qquad (5\alpha)$$

$$\omega = \omega_2 = \omega_0/\sqrt{2} \overset{(2\alpha)}{\Rightarrow} (\omega_0^2 - \omega_0^2/2)A_2 = \omega_0^2 B_2 \Rightarrow \boxed{(A_2/B_2) = 2} \qquad (5\beta)$$

Γράφουμε τις γενικές λύσεις των εξισώσεων κίνησης, χρησιμοποιώντας τις (5α,β)

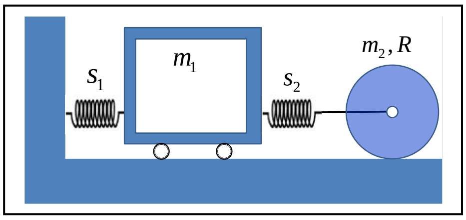
$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \qquad (6\alpha)$$

$$x_2 = -A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1) + \frac{A_2}{2}\cos(\omega_2 t+\varphi_2) \qquad (6\beta)$$

$(6a) - 2\times(6\beta) \Rightarrow x_1 - 2x_2 = (A_1 + 2A_2)\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$

$(6a) + (6\beta) \qquad \Rightarrow x_1 + x_2 = (A_2 + A_2/2)\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

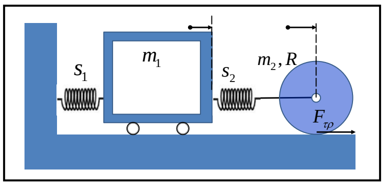
Άρα οι κανονικές συντεταγμένες είναι: $\qquad q_1 \equiv x_1 - 2x_2, \quad q_2 \equiv x_1 + x_2$



15. Όχημα μάζας m_1 ευρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο, επί του οποίου μπορεί να ***κινείται χωρίς τριβές***, και είναι συνδεδεμένο σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχο με ελατήριο σταθεράς s_1. Στο όχημα είναι συνδεδεμένος ομοιογενής κύλινδρος, μάζας m_2 και ακτίνας R, μέσω ελατηρίου σταθεράς s_2, και μπορεί να ***κυλάει χωρίς ολίσθηση*** στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο με το όχημα, όπως στο σχήμα.

(α) Υποθέτοντας μικρή οριζόντια διαταραχή του συστήματος από την κατάσταση ισορροπίας (έτσι ώστε ο κύλινδρος να κυλάει χωρίς ολίσθηση), να γράψετε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κίνησης που ικανοποιούν οι μετατοπίσεις x_1 και x_2 του κάθε σώματος, αντίστοιχα, από τη θέση ισορροπίας.

(β) Υποθέτοντας κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$, $x_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$ να υπολογίσετε τις συχνότητές τους για την περίπτωση που $s_1 = s_2 = s, \quad m_1 = m_2 = m, \quad s/m = \omega_0^2$.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ(α)

Μεταφορική, m_1: $\quad m_1\ddot{x}_1 = -s_1x_1 - s_2(x_1 - x_2) \qquad (1)$

Μεταφορική, m_2: $\quad m_2\ddot{x}_2 = -s_2(x_2 - x_1) + F_{\tau\rho} \qquad (2α)$

Στροφική, $\quad m_2$: $\quad I_2\ddot{\theta}_2 = -RF_{\tau\rho} \qquad (2β)$

Κύλιση χωρίς ολίσθηση: $\theta_2 = x_2/R \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta}_2 = \ddot{x}_2/R \qquad (3)$

(2β), (3) $\Rightarrow F_{\tau\rho} = -(I_2/R^2)\ddot{x}_2$, αντικαθιστώντας στη (2α):

$$\left(m_2 + I_2/R^2\right)\ddot{x}_2 = -s_2(x_2 - x_1) \quad (4)$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (4), και λαμβάνοντας υπόψη ότι $I_2 = m_2R^2/2$ παίρνουμε το σύστημα των ομογενών Δ.Ε. 2ης τάξης

$$m_1\ddot{x}_1 + (s_1 + s_2)x_1 - s_2x_2 = 0 \qquad (5α)$$

$$(3m_2/2)\ddot{x}_2 + s_2x_2 - s_2x_1 = 0 \qquad (5β)$$

(β) Υποθέτοντας κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$, $x_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$, οπότε :

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi), \; \ddot{x}_2 = -\omega^2 B\cos(\omega t + \varphi),$$

αντικαθιστούμε στις (5α, 5β) και παίρνουμε:

$$(s_1 + s_2 - \omega^2 m_1)A - s_2B = 0 \qquad (5α)$$

$$-s_2A + \left(s_2 - \frac{3}{2}\omega^2 m_2\right)B = 0 \qquad (5β)$$

Θέτοντας: $\quad s_1 = s_2 = s, \quad m_1 = m_2 = m, \quad s/m = \omega_0^2$, παίρνουμε

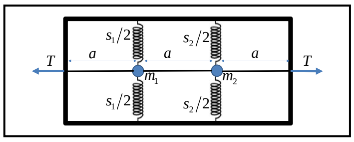
$$(2\omega_0^2 - \omega^2)A - \omega_0^2 B = 0 \qquad (5α)$$

$$-\omega_0^2 A+\left(\omega_0^2-\frac{3}{2}\omega^2\right)B=0 \qquad (5\beta)$$

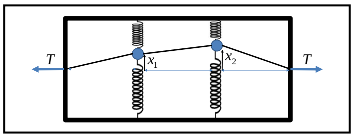
$$\begin{vmatrix} \left(2\omega_0^2-\omega^2\right) & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \left(\omega_0^2-\frac{3}{2}\omega^2\right) \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \left(2\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\omega_0^2-\frac{3}{2}\omega^2\right)-\omega_0^4=0$$

$$2\omega_0^4-3\omega_0^2\omega^2-\omega_0^2\omega^2+\frac{3}{2}\omega^4-\omega_0^4=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}\omega^4-4\omega_0^2\omega^2+\omega_0^4=0$$

$$\omega^4-\frac{8}{3}\omega_0^2\omega^2+\frac{2}{3}\omega_0^4=0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{1,2}^2=\frac{1}{2}\left[\frac{8}{3}\omega_0^2\pm\sqrt{\frac{64}{9}\omega_0^4-\frac{24}{9}\omega_0^4}\right] \Rightarrow \boxed{\omega_{1,2}^2=\omega_0^2\,\frac{4\pm\sqrt{10}}{3}}$$



16. Ιδανική χορδή αμελητέας μάζας και μήκους $L=3a$, έχει ακλόνητα άκρα, τείνεται με τάση T και φέρει δύο σωματίδια μάζας m_1 και m_2, σε απόσταση a μεταξύ τους και από τα άκρα της. Κάθε σωματίδιο είναι συνδεδεμένο με δύο ελατήρια, με σταθερές $s_1/2$ και $s_2/2$, αντίστοιχα, κάθετα στη χορδή, έτσι ώστε τα ελατήρια να έχουν το φυσικό τους μήκος όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση ισορροπίας. Το πλαίσιο στήριξης της χορδής και των ελατηρίων είναι ακλόνητο και το σύστημα βρίσκεται εκτός πεδίου βαρύτητας.



Διαταράσσουμε τα σωματίδια από την κατάσταση ισορροπίας, κάθετα στην χορδή, ώστε οι διαγραφόμενες γωνίες του νήματος να είναι μικρές, $\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta$, και το σύστημα να διατηρείται στο αρχικό του επίπεδο. **(α)** Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις απομακρύνσεις x_1 και x_2 των σωματιδίων από τις θέσεις ισορροπίας τους. **(β)** Να αναζητηθούν λύσεις με τη μορφή Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης, $x_1(t)=A\cos(\omega t+\phi)$ και $x_2(t)=B\cos(\omega t+\phi)$ και να υπολογιστούν οι συχνότητες, ω_1, ω_2 των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0, στην περίπτωση που $m_1=m_2$, $s_1=s_2$, $T/(ma)=s/m=\omega_0^2$. **(γ)** Να υπολογιστούν οι λόγοι των πλατών A_1/B_1 και A_2/B_2 και οι κανονικές συντεταγμένες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Στην προσέγγιση: $\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta$, ισχύει

$$m_1\ddot{x}_1=T\frac{x_2-x_1}{a}-T\frac{x_1}{a}-2\frac{s_1}{2}x_1 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_1+\left(2\frac{T}{am_1}+\frac{s_1}{m_1}\right)x_1-\frac{T}{am_1}x_2=0$$

$$m_2\ddot{x}_2=T\frac{x_1-x_2}{a}-T\frac{x_2}{a}-2\frac{s_2}{2}x_2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_2+\left(2\frac{T}{am_2}+\frac{s_2}{m_2}\right)x_2-\frac{T}{am_2}x_1=0$$

(β) Κανονικοί Τρόποι Ταλάντωσης: $x_1(t)=A\cos(\omega t+\phi)$ και $x_2(t)=B\cos(\omega t+\phi)$

$$\left\{\begin{aligned} &-\omega^2 A+\left(2\frac{T}{am_1}+\frac{s_1}{m_1}\right)A-\frac{T}{am_1}B=0 \\ &-\omega^2 B+\left(2\frac{T}{am_2}+\frac{s_2}{m_2}\right)B-\frac{T}{am_2}A=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} \left(2\frac{T}{am_1}+\frac{s_1}{m_1}\right)-\omega^2 & -\frac{T}{am_1} \\ -\frac{T}{am_2} & \left(2\frac{T}{am_2}+\frac{s_2}{m_2}\right)-\omega^2 \end{vmatrix}=0$$

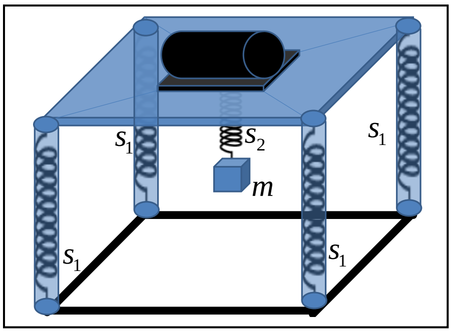
Στην περίπτωση που $m_1=m_2$, $s_1=s_2$, $T/(ma)=s/m=\omega_0^2$.

$$\begin{vmatrix} 3\omega_0^2-\omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & 3\omega_0^2-\omega^2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \left[3\omega_0^2-\omega^2\right]^2-\omega_0^4=0$$

$$3\omega_0^2-\omega^2=\pm\omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_{1,2}^2=(3\mp1)\omega_0^2} \qquad \boxed{\omega_1^2=2\omega_0^2, \quad \omega_1^2=4\omega_0^2}$$

(γ) $$\left(3\omega_0^2-\omega_{1,2}^2\right)A_{1,2}=\omega_0^2 B_{1,2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_1=B_1}, \quad \boxed{A_2=-B_2}$$

Κανονικές Συντεταγμένες: $\quad X_1=x_1+x_2, \qquad X_2=x_1-x_2$



17. Ομοιογενής τετραγωνική τράπεζα στηρίζεται στα τέσσερα άκρα της με όμοια κατακόρυφα στηρίγματα, καθένα από τα οποία μπορεί να προσομοιωθεί με ένα ελατήριο με σταθερά ελατηρίου s_1. Πάνω στην τράπεζα είναι προσαρμοσμένος ηλεκτρικός κινητήρας, έτσι ώστε τα κέντρα μάζας της τράπεζας και του κινητήρα να βρίσκονται στην ίδια κατακόρυφο, το δε σύστημα Τράπεζα-Κινητήρας να έχει συνολική μάζα *M*. Από το κέντρο μάζας της τράπεζας είναι αναρτημένη, μέσω ελατηρίου σταθεράς s_2, μάζα *m*. Όταν ο κινητήρας βρίσκεται σε λειτουργία, με μία συχνότητα περιστροφής ω, τότε το σύστημα υφίσταται περιοδική διέγερση που ισοδυναμεί με την εφαρμογή κατακόρυφης περιοδικής «εξωτερικής» δύναμης $F(t)=F_0\cos(\omega t)$ στο κέντρο μάζας του συστήματος Τράπεζα-Κινητήρας.

(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης των μαζών *M* (μετατόπιση: x_1) και *m* (μετατόπιση: x_2), δεχόμενοι ότι τα ελατήρια είναι ιδανικά και ότι οι τριβές είναι αμελητέες.

(β) Δεχθείτε ότι, στη μόνιμη κατάσταση κίνησης του συστήματος, οι δύο μάζες *M* και *m* κινούνται με τη συχνότητα ω, της «εξωτερικής» διέγερσης και με διαφορετικά πλάτη, έτσι ώστε οι απομακρύνσεις τους από τις θέσεις ισορροπίας να είναι $x_1(t)=A\cos(\omega t)$ και $x_2(t)=B\cos(\omega t)$, αντίστοιχα, και υπολογίστε τα πλάτη $A=A(\omega)$ και $B=B(\omega)$, συναρτήσει της εξωτερικής συχνότητας ω, και των υπολοίπων χαρακτηριστικών του συστήματος, με τη μορφή πηλίκου οριζουσών.

(γ) Με βάση τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β), εξηγήστε, για ποιά συχνότητα $\omega=\omega_{\kappa\rho}=?$ του κινητήρα, ελαχιστοποιούνται οι κραδασμοί της τράπεζας M, λόγω της λειτουργίας του κινητήρα, και σχολιάστε («αντι-συντονισμός»).

(δ) Αν $s_1=as_2$ και $M=bm$, υπολογίστε, (συναρτήσει του $\omega_0^2=s_2/m$, και των *a*, *b*), τις τιμές της συχνότητας ω του κινητήρα για τις οποίες το πλάτος ταλάντωσης και των δύο μαζών *M* και *m* του συστήματος τείνει στο άπειρο και σχολιάστε.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Εξισώσεις κίνησης (τα παράλληλα ελατήρια αθροίζονται, οι μετατοπίσεις κάθε μάζας υπολογίζονται από τις θέσεις ισορροπίας)

$$\left\{\begin{matrix} M\ddot{x}_1=-4s_1x_1-s_2(x_1-x_2)+F_0\cos(\omega t) \\ m\ddot{x}_2=-s_2(x_2-x_1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} M\ddot{x}_1+(4s_1+s_2)x_1-s_2x_2=F_0\cos(\omega t) \\ m\ddot{x}_2+s_2x_2-s_2x_1=0 \end{matrix}\right\}$$

(β) Αντικαθιστώντας τα $x_1(t)=A\cos(\omega t)$ και $x_2(t)=B\cos(\omega t)$, και τις παραγώγους των, στις εξισώσεις κίνησης, έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} -\omega^2 M\, A + (4s_1 + s_2) A - s_2 B = F_0 \\ -s_2 A - \omega^2 m\, B + s_2 B = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \left[-\omega^2 M + (4s_1 + s_2)\right] A - s_2 B = F_0 \\ -s_2 A + \left[-\omega^2 m + s_2\right] B = 0 \end{Bmatrix}$$

Τα πλάτη A και B υπολογίζονται με τη μέθοδο των οριζουσών

$$A = \begin{vmatrix} F_0 & -s_2 \\ 0 & \left[-\omega^2 m + s_2\right] \end{vmatrix} \Big/ \Delta, \quad B = \begin{vmatrix} \left[-\omega^2 M + (4s_1 + s_2)\right] & F_0 \\ -s_2 & 0 \end{vmatrix} \Big/ \Delta,$$

όπου $\Delta = \begin{vmatrix} \left[-\omega^2 M + (4s_1 + s_2)\right] & -s_2 \\ -s_2 & \left[-\omega^2 m + s_2\right] \end{vmatrix}$

(γ) Αναπτύσσοντας τις ορίζουσες των αριθμητών: $A = \dfrac{F_0\left(s_2 - \omega^2 m\right)}{\Delta}$, $B = \dfrac{F_0 s_2}{\Delta}$, από όπου βλέπουμε ότι για τη συχνότητα $\omega = \omega_0 = s_2 / m$ έχουμε: $A = 0$, $B = \dfrac{F_0 s_2}{\Delta(\omega_0)} \neq 0$

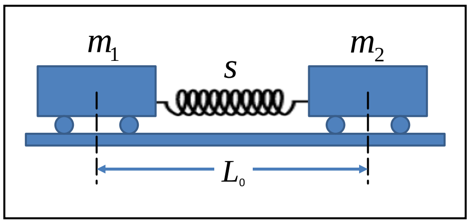
(δ) Τα πλάτη ταλάντωσης τείνουν στο άπειρο όταν ο κοινός παρονομαστής στους Δ=0, και, με βάση τις δεδομένες τιμές των s_1 και M, έχουμε

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left[-\omega^2 M + (4s_1 + s_2)\right] & -s_2 \\ -s_2 & \left[-\omega^2 m + s_2\right] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left[-\omega^2 bm + (4a+1)s_2\right] & -s_2 \\ -s_2 & \left[-\omega^2 m + s_2\right] \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \left[-\omega^2 bm + (4a+1)s_2\right] & -s_2 \\ -s_2 & \left[-\omega^2 m + s_2\right] \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow bm^2\omega^4 - bms_2\omega^2 - (4a+1)ms_2\omega^2 + (4a+1)s_2^2 - s_2^2 = 0$$

$$bm^2\omega^4 - (4a+1+b)ms_2\omega^2 + 4as_2^2 = 0 \Rightarrow b\omega^4 - (4a+1+b)\omega_0^2\omega^2 + 4a\omega_0^4 = 0$$

$$b\omega^4 - (4a+1+b)\omega_0^2\omega^2 + 4a\omega_0^4 = 0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \frac{(4a+1+b) \pm \sqrt{(4a+1+b)^2 - 16ab}}{2b}$$



18. Δύο βαγόνια αμαξοστοιχίας, με μάζες m_1 και m_2, συνδέονται με ελατήριο σταθεράς s. Το σύστημα ακινητεί, με την απόσταση ανάμεσα στα κέντρα των δύο βαγονιών να είναι ίση με L_0. Κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, δίνεται στιγμιαία ώθηση στο βαγόνι 1, η οποία του προσδίδει ταχύτητα $\upsilon_1(t=0) = \upsilon_{01}$.

(α) Θεωρήστε ένα στιγμιότυπο της κίνησης, κάποια χρονική στιγμή $t > 0$, όταν το κέντρο κάθε βαγονιού έχει απομακρυνθεί από την αρχική του θέση κατά $x_1(t)$ και $x_2(t)$, αντίστοιχα, και γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης που ικανοποιεί κάθε μία από τις συναρτήσεις $x_1(t), x_2(t)$, θεωρώντας αμελητέες τις τριβές από το δάπεδο.

(β) Εκμεταλλευτείτε τα χαρακτηριστικά συμμετρίας των διαφορικών εξισώσεων του ερωτήματος (α) και, με κατάλληλες πράξεις, δείξτε ότι ***η μεταβολή της απόστασης*** μεταξύ των βαγονιών $\Delta x(t) \equiv x_2(t) - x_1(t)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση απλού αρμονικού ταλαντωτή.

(γ) Με βάση το συμπέρασμα του ερωτήματος (β), δείξτε ότι $\Delta x(t) \equiv A\sin(\omega_0 t + \varphi)$, και προσδιορίστε τα μεγέθη (ω_0, A, φ), συναρτήσει των $(s, m_1, m_2, L_0, \upsilon_{01})$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $m_1\ddot{x}_1 = -s(x_1 - x_2), \qquad m_2\ddot{x}_2 = -s(x_2 - x_1)$

(β) $\left\{\begin{matrix} m_1\ddot{x}_1 = -s(x_1 - x_2) & (1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -s(x_2 - x_1) & (2) \end{matrix}\right\} \quad m_1(2) - m_2(1) \Rightarrow m_1 m_2(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -s(m_1 + m_2)(x_2 - x_1)$

$$\Rightarrow m_1 m_2 \Delta\ddot{x} = -s(m_1 + m_2)\Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta\ddot{x} + s\frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}\Delta x = 0$$

(γ) $\Delta\ddot{x} + s\frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}\Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\ddot{x} + \omega_0^2 \Delta x = 0}$, όπου $\omega_0^2 = s\frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}$

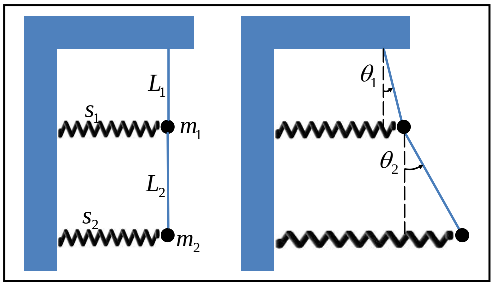
Επομένως $\Delta x(t) \equiv A\sin(\omega_0 t + \varphi)$

Αρχικές Συνθήκες $\Delta x(t=0) = L_0 \Rightarrow A\sin(\varphi) = L_0$ (3)

$\Delta\dot{x}(t=0) = \upsilon_o \Rightarrow A\omega_0 \cos(\varphi) = \upsilon_0$ (4)

$(3)/(4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan(\varphi) = L_0 / \omega_0 \upsilon_0}$

$(3)^2 + (4)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \sqrt{L_0^2 + \upsilon_0^2 / \omega_{02}}}$



19. Δύο ιδανικά εκκρεμή με μάζες m_1, m_2, και αβαρείς ράβδους μηκών L_1, L_2 αναρτώνται το ένα κάτω από το άλλο, και συνδέονται με ακλόνητο τοίχωμα μέσω ελατηρίων με σταθερές s_1, s_2, όπως στο Σχήμα **. Σε** κατάσταση ισορροπίας, οι ράβδοι είναι κατακόρυφοι και τα ελατήρια έχουν το φυσικό τους μήκος, ενώ το σύστημα βρίκεται μέσα σε ομογενές κατακόρυφο πεδίο βαρύτητας, με επιτάχυνση g.

Διαταράσσουμε το σύστημα, έτσι ώστε να έχουμε μικρές γωνιακές αποκλίσεις του κάθε εκκρεμούς από την κατακόρυφο, (τέτοιες ώστε $\sin\theta_{1,2} \approx \tan\theta_{1,2} \approx \theta_{1,2}$), και όλο το σύστημα να βρίσκετα πάντα στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο.

(α) Να γραφούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης για τις απομακρύνσεις των μαζών από την κατάσταση ισορροπίας τους σύμφωνα με τις παραπάνω προσεγγίσεις μικρών γωνιών.

(β) Υποθέτοντας κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (ΚΤΤ), να υπολογιστούν οι συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0, όταν $s_1 = s_2 = s$, $L_1 = L_2 = L$, $m_1 = m_2 = m$, και $(s/m) = (g/L) = \omega_0^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Κατά τον οριζόντιο άξονα, εξισώσεις κίνησης:

$$m_1\ddot{x}_1 = -s_1 x_1 - T_{1x} + T_{2x} \qquad (1a)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -s_2 x_2 - T_{2x} \qquad (1b)$$

Κατά τον κατακόρυφο άξονα (στην προσέγγιση μικρών γωνιών), εξισώσεις ισορροπίας:

$$\begin{aligned} &T_2 \cos\theta_2 = m_2 g \\ &T_1 \cos\theta_1 = m_1 g + T_2 \cos\theta_2 = (m_1 + m_2) g \end{aligned} \qquad (2)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -s_1 x_1 - T_{1x} + T_{2x} = -s_1 x_1 - (m_1 + m_2) g \tan\theta_1 + m_2 g \tan\theta_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -s_2 x_2 - T_{2x} = -s_2 x_2 - m_2 g \tan\theta_2$$

Όπου (στην προσέγγιση μικρών γωνιών), $\tan\theta_1 \approx x_1 / L_1$ $\quad \tan\theta_2 \approx (x_2 - x_1)/L_2$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -s_1 x_1 - (m_1 + m_2) g\, x_1 / L_1 + m_2 g (x_2 - x_1)/L_2$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -s_2 x_2 - m_2 g (x_2 - x_1)/L_2$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + s_1 x_1 + (m_1 + m_2) g\, x_1 / L_1 - m_2 g (x_2 - x_1)/L_2 = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + s_2 x_2 + m_2 g (x_2 - x_1)/L_2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + (s_1/m_1) x_1 + (1 + m_2/m_1) g\, x_1 / L_1 - (m_2/m_1) g (x_2 - x_1)/L_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + (s_2/m_2) x_2 + g (x_2 - x_1)/L_2 = 0$$

$$\ddot{x}_1 + \left[\left(\frac{s_1}{m_1} \right) + \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \frac{g}{L_1} + \frac{m_2}{m_1} \frac{g}{L_2} \right] x_1 - \frac{m_2}{m_1} \frac{g}{L_2} x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \left[\left(\frac{s_2}{m_2} \right) + \frac{g}{L_2} \right] x_2 - \frac{g}{L_2} x_1 = 0$$

(β) Υποθέτοντας κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (ΚΤΤ), να υπολογιστούν οι συχνότητες των ΚΤΤ, συναρτήσει του ω_0,

Όταν $s_1 = s_2 = s$, $L_1 = L_2 = L$, $m_1 = m_2 = m$, και $(s/m) = (g/L) = \omega_0^2$, παίρνουμε”

$$\ddot{x}_1 + 4\omega_0^2 x_1 - \omega_0^2 x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 - \omega_0^2 x_1 = 0$$

Αναζητώντας ΚΤΤ, $x_1 = A\cos(\omega t + \varphi)$ και $x_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$, παίρνουμε:

$$\left\{ \begin{aligned} &(4\omega_0^2 - \omega^2) A \;-\; \omega_0^2 B = 0 \\ &-\omega_0^2 A + \ddot{x}_2 (2\omega_0^2 - \omega^2) B = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} (4\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & (2\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \omega^4 - 6\omega_0^2 \omega^2 + 7\omega_0^4 = 0,$$

με ρίζες $\omega_{1,2}^2 = \left(3 \pm \sqrt{2}\right) \omega_0^2$

20. Ιδανική χορδή έχει γραμμική πυκνότητα μάζας ρ=0,002 kg/m, μήκος L=1m, και τείνεται με τάση Τ ανάμεσα στα δύο ακλόνητα άκρα της. (α) Να υπολογισθεί η τάση Τ ώστε η θεμελιώδης συχνότητα να συμπίπτει με το Λα της 3ης Οκτάβας (ω_0= 440 Hz). (β) Θέλουμε να υποδιαιρέσουμε σε 12 ημιτόνια το διάστημα συχνοτήτων από το Λα της 3ης Οκτάβας (ω_1= 440 Hz) έως το Λα της 4ης Οκτάβας (ω_{13}= 880 Hz), έτσι ώστε να έχουν σταθερό λόγο διαδοχικών συχνοτήτων: $\dfrac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \dfrac{\omega_n}{\omega_{n-1}} = \sigma\tau\alpha\theta.$ Να υπολογιστεί ο ζητούμενος λόγος συχνοτήτων. (γ) Να υπολογισθούν οι θέσεις x_i, $i = 1, \cdots, 12$ στις οποίες πρέπει να ακινητοποιείται η χορδή για να πραγματοποιείται ταλάντωση της χορδής με τις ανωτέρω συχνότητες («δακτυλοθεσία») και να δοθούν τα αποτελέσματα με μορφή πίνακα για τις διαδοχικές συχνότητες και τις αντίστοιχες θέσεις.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

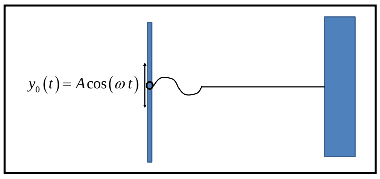
(α) Ακλόνητα άκρα: $k_n = n\dfrac{\pi}{L}$ θεμελιώδες στάσιμο κύμα $k = \dfrac{\pi}{L}$

$$\omega = ck = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\frac{\pi}{L} \quad \Rightarrow T = \rho\frac{L}{\pi}\omega_0^2 = 0,002\frac{\text{kg}}{\text{m}}\frac{1\text{m}}{\pi}\left(440\text{s}^{-1}\right)^2 \Rightarrow T = 123\ \text{N}$$

(β) $\dfrac{\omega_{n+1}}{\omega_n} = \dfrac{\omega_n}{\omega_{n-1}} = \delta \quad \Rightarrow \quad \omega_{12} = \omega_0\delta^{12} \Rightarrow \delta = \sqrt[12]{2} = 1,0595\ldots$

(γ) Θα ισχύει $\lambda_n = \lambda_0\dfrac{\omega_0}{\omega_n}$ και λ_0=2m, άρα:

ω (Hz)	440	466,18	493,92	523,31	554,44	587,43	622,38	659,42	698,65	740,22	784,26	830,93	880
λ (m)	1	0,94	0,89	0,84	0,79	0,75	0,69	0,67	0,63	0,59	0,56	0,53	0,5



21. Ιδανική χορδή μήκους L, που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x, έχει γραμμική πυκνότητα μάζας ρ, τείνεται με τάση T και η εγκάρσια κυμανσή της $y = y(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση $T\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Το ένα άκρο της χορδής $x = L$ στηρίζεται σε ακλόνητο σημείο. Το άλλο άκρο $x = 0$ είναι συνδεδεμένο σε κινητήρα, μέσω δακτυλιδιού αμελητέας μάζας που μπορεί να κινείται χωρίς τριβή σε ράβδο εγκάρσια προς τη χορδή.

Ο κινητήρας προσδίδει στο δακτυλίδι κίνηση της μορφής $y(x=0,t) = y_0(t) = A\cos(\omega t)$, όπου ω είναι ελεγχόμενη συχνότητα διέγερσης (του κινητήρα) και A δεδομένο πλάτος. Αν η μόνιμη κίνηση της χορδής, για κάθε συχνότητα ω, είναι της μορφής $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$:

(α) Να υπολογιστεί η διαφορική εξίσωση την οποία ικανοποιεί η $f(x)$, να γραφεί η γενική μορφή της $f(x)$, καθώς και η ειδική λύση που είναι συνεπής με τη συγκεκριμένη συνοριακή συνθήκη στο σταθερό άκρο της χορδής, *x*=*L*.

(β) Να αντικατασταθεί η λύση $f(x)$ του ερωτήματος-α στην $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$, να εφαρμοστεί η συνοριακή συνθήκη στο *x=0*, $\left(y(x=0,t) = A\cos(\omega t)\right)$, και να υπολογισθούν οι συχνότητες διέγερσης ω, που μεγιστοποιούν το πλάτος ταλάντωσης, (που συμπεριφέρονται, επομένως, ως συχνότητες συντονισμού του συστήματος).

(γ) Να διερευνηθεί αν οι συχνότητες «συντονισμού» του ερωτήματος-β αντιστοιχούν σε άκρα, (γ_1) Ελεύθερο-Ελεύθερο, (γ_2) Ελεύθερο – Ακλόνητο, ή (γ_3) Ακλόνητο-Ακλόνητο ; Εξηγήστε.

.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Η $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$ θα ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση κύματος,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}t = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow f''(x)\cos(\omega t) = -\frac{\omega^2}{c^2}f(x)\cos(\omega t) \ :\Rightarrow f''(x) + k^2 f(x) = 0 \ \ (2), k = \omega/c$$

Η γενική λύση για την *f* είναι: $f(x) = C\sin(kx + \varphi)$

Συνοριακή συνθήκη στο *x*=*L*: $f(x = L) = 0 \Rightarrow C\,\mathrm{in}(kL + \varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = n\pi - kL, \quad n = 0,1,2,\ldots$

Άρα: $f(x) = C\sin\left(k(x-L)+n\pi\right)$

(β) Η συνάρτηση κύματος είναι: $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t) = C\sin\left(k(x-L)+n\pi\right)\cos(\omega t)$

Η συνοριακή συνθήκη στο *x=0,* $\left(y(x=0,t) = A\cos(\omega t)\right)$, γράφεται

$$C\sin(n\pi - kL)\cos(\omega t) = A\cos(\omega t) \Rightarrow C = \frac{A}{\sin(n\pi - kL)}$$

$$y(x,t) = f(x)\cos(\omega t) = \frac{A}{\sin(n\pi - kL)}\sin\left(k(x-L)+n\pi\right)\cos(\omega t)$$

Αντικαθιστώντας όπου $k = \omega/c$ έχουμε:

$$y(x,t) = \frac{A}{\sin\left(n\pi - [\omega L/c]\right)}\sin\left(n\pi + \left[\omega(x-L)/c\right]\right)\cos(\omega t)$$

Το πλάτος ταλάντωσης $C(\omega) = \dfrac{A}{\sin\left(n\pi - [\omega L/c]\right)}$ τείνει στο άπειρο όταν $\sin\left(n\pi - [\omega L/c]\right) = 0$

(γ) Άρα, οι συχνότητες συντονισμού είναι $\omega_n = n(\pi c/L)$ [Άκρα: Ακίνητο-Ακίνητο], και:

$$n\pi - [\omega L/c] = \varepsilon \to 0 \Rightarrow y(x,t) = \frac{A}{\varepsilon}\sin\left(\varepsilon + [\omega x/c] + n\pi\right)\cos(\omega t) \underset{x\to 0}{\rightarrow} \frac{A}{\varepsilon}\varepsilon\cos(\omega t) = A\cos(\omega t)$$

.

22. Ιδανική χορδή μήκους L, που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x, έχει μεταβλητή γραμμική πυκνότητα μάζας, $\rho(x) = \rho_0\left(1 + x^2/L^2\right)$ και τείνεται με τάση T.

(α) Να παραχθεί η διαφορική εξίσωση κύματος που ικανοποιεί μία εγκάρσια διαταραχή, $y = y(x,t)$, της χορδής, στην προσέγγιση των μικρών γωνιών, $(\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta)$, και να υπολογισθεί η ταχύτητα διάδοσης κύματος $c = \sqrt{T/\rho}$ και η σύνθετη μηχανική αντίσταση (κυματική αντίσταση) $\mathrm{Z} = \sqrt{T\rho}$, ως συνάρτηση της θέσης *x*, κατά μήκος του συστήματος.

(β) Στην περίπτωση που διεγείρουμε, στο άκρο $x = 0$, αρμονική ταλάντωση, $y(x=0,t) = A\cos(\omega t)$, σε μόνιμη κατάσταση, να υπολογίσετε το μήκος κύματος της διαταραχής που διαδίδεται στη χορδή, ως συνάρτηση της θέσης x, $\lambda = \lambda(x)$, και να σχεδιάσετε, κατά προσέγγιση (ποιοτικά), ένα στιγμιότυπο αυτής της κίνησης, τη χρονική στιγμή που η ταλάντωση αυτή φτάνει στο άκρο *x=L*.

(γ) Η παραπάνω χορδή συνδέεται στο σημείο *x=L* με ιδανική χορδή, που έχει μεγάλο μήκος και ομοιόμορφη γραμμική πυκνότητα μάζας ρ_2, και το σύστημα εξακολουθεί να τείνεται με τάση *T*. **(γ₁)** Πόση πρέπει να είναι η γραμμική πυκνότητα ρ_2 προκειμένου να μην έχουμε καθόλου ανακλώμενο κύμα στο σημείο *x=L* ; **(γ₂)** Πόση πρέπει να είναι η γραμμική πυκνότητα ρ_2 προκειμένου να έχουμε, στο σημείο *x=L*, ανάκλαση ισχύος κατά 25% ; Σε αυτή την περίπτωση, ποιές είναι οι τιμές των συντελεστών ανάκλασης πλάτους, διέλευσης πλάτους, και διέλευσης ισχύος ; Δίνονται:

Συντελεστές Ανάκλασης: Πλάτους: $r \equiv \dfrac{A_r}{A_i} = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$, Ισχύος: $R \equiv \left(\dfrac{A_r}{A_i}\right)^2 = \left(\dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$

Συντελεστές Διέλευσης: Πλάτους: $t \equiv \dfrac{A_t}{A_i} = \dfrac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$, Ισχύος: $T = \dfrac{Z_2 A_t^2}{Z_1 A_i^2} = \dfrac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$

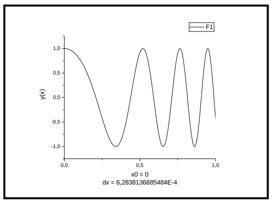
ΑΠΝΑΤΗΣΗ

(α) $\left(dm\right)\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=F_{y,o\lambda}$, που, στην προσέγγιση των μικρών γωνιών, μπορεί να γραφεί

$$\left(\rho\left(x\right)dx\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx}-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x}\right]=T\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx\Rightarrow\boxed{\rho\left(x\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}\qquad(1)$$

Η κυματική εξίσωση που περιγράφει η σχέση (1) παρουσιάζεται και με τη μορφή $\dfrac{1}{c^2\left(x\right)}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, όπου το μέγεθος $c\left(x\right)=\sqrt{T/\rho\left(x\right)}$ είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος κατά μήκος της χορδής, και η σύνθετη μηχανική αντίσταση $\mathrm{Z}\left(x\right)=\sqrt{T\rho\left(x\right)}$

(β) $c\left(x\right)=f\lambda\left(x\right)\quad\Rightarrow\lambda\left(x\right)=c\left(x\right)/f=\left(2\pi/\omega\right)\sqrt{T/\rho\left(x\right)}=\left(2\pi/\omega\right)\sqrt{T/\rho_0\left(1+x^2/L^2\right)}$



Δηλ., μήκος κύματος που μειώνεται, ως συνάρτηση του *x*.

Άρα το ποιοτικό διάγραμμα φαίνεται στο διπλανό σχήμα

(γ_1) Για να μην έχουμε καθόλου ανακλώμενο κύμα στο σημείο *x*=*L*, και δεδομένου ότι όλο το σύστημα τείνεται με την ίδια τάση *T*, για να μην υπάρχει ασυνέχεια στη σύνθετη μηχανική (κυματική) αντίσταση, θα πρέπει να μην υπάρχει ασυνέχεια στη γραμμική πυκνότητα μάζας, άρα, $\rho_2=\rho_1\left(x=L\right)\quad\Rightarrow\quad\rho_2=2\rho_0$.

(γ_2) Για να έχουμε, στο σημείο x=L, ανάκλαση ισχύος κατά 25% πρέπει

$$R\equiv\left(\frac{A_r}{A_i}\right)^2=\left(\frac{Z_1\left(x=L\right)-Z_2}{Z_1\left(x=L\right)+Z_2}\right)^2=0,25\Rightarrow Z_2=\frac{1-\sqrt{0,25}}{1+\sqrt{0,25}}Z_1\left(x=L\right)=\frac{Z_1\left(x=L\right)}{3}$$

$$Z_2=\frac{Z_1\left(x=L\right)}{3}\Rightarrow\sqrt{T\rho_2}=\frac{\sqrt{T2\rho_0}}{3}\Rightarrow\rho_2=\frac{2\rho_0}{9}$$

$$r\equiv\left(\frac{A_r}{A_i}\right)=\left(\frac{Z_1\left(x=L\right)-Z_2}{Z_1\left(x=L\right)+Z_2}\right)=\frac{Z_1\left(x=L\right)-\dfrac{Z_1\left(x=L\right)}{3}}{Z_1\left(x=L\right)+\dfrac{Z_1\left(x=L\right)}{3}}\Rightarrow r=0,5$$

$$t=\frac{A_t}{A_i}=\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}=\frac{3}{2}=1,5\,,\qquad\qquad T=\frac{Z_2A_t^2}{Z_1A_i^2}=\frac{4Z_1Z_2}{\left(Z_1+Z_2\right)^2}=\frac{3}{4}=0.75$$

23. Θεωρήσετε ιδανική ομοιογενή χορδή μήκους *α* και γραμμικής πυκνότητας *ρ*, καθώς και ιδανική ομοιογενή τετραγωνική μεμβράνη πλευράς *b* και επιφανειακής πυκνότητας *σ*, αμφότερα τα ελαστικά μέσα με ακλόνητα άκρα.

(α) Αν T_μ είναι η τάση ανά μονάδα μήκους με την οποία τείνεται ομοιόμορφα η μεμβράνη, να υπολογίσετε την τάση T_χ με την οποία πρέπει να τείνεται η χορδή, προκειμένου η συχνότητα του πρώτου εγκάρσιου κανονικού τρόπου ταλάντωσης των δύο ελαστικών μέσων να είναι κοινή, $f_{\chi(1)}=f_{\mu(1,1)}$, («κούρδισμα»).

(β) Στην περίπτωση αυτή, να υπολογίσετε το πηλίκο των συχνοτήτων για τον αμέσως επόμενο («δεύτερο») κανονικό τρόπο ταλάντωσης των δύο μέσων.

(γ) Περιγράψτε, (είτε αναλυτικά, $z = z(x, y, t)$, είτε με ένα απλό σχήμα), τους δύο διαφορετικούς τρόπους κίνησης της μεμβράνης, που αντιστοιχούν σε αυτόν τον «δεύτερο» κανονικό τρόπο ταλάντωσης.

(δ) Αν a=2b=1m, και η κοινή θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_{\chi(1)} = f_{\mu(1,1)} = 50\,\mathrm{Hz}$, να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων στα δύο μέσα.

(ε) Σε ένα κυματικό μέσο, στο οποίο η ταχύτητα διάδοσης κύματος δίνεται με τη μορφή $c = \sqrt{(\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \sigma\kappa\lambda\eta\rho\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma)/(\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \alpha\delta\rho\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma)}$, με ποιά μορφή θα δίνεται η μηχανική σύνθετη (κυματική) αντίσταση του ίδιου μέσου;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $f_{\chi(1)} = f_{\mu(1,1)} \Rightarrow 2\pi f_{\chi(1)} = 2\pi f_{\mu(1,1)} \Rightarrow \omega_{\chi(1)} = \omega_{\mu(1,1)} \Rightarrow c_\chi k_1 = c_\mu k_{1,1}$,

όπου $c_\chi = \sqrt{\dfrac{T_\chi}{\rho}}, c_\mu = \sqrt{\dfrac{T_\mu}{\sigma}}$

Για χορδή με σταθερά άκρα: $k_n = n\dfrac{\pi}{a}$, εδώ $n = 1$

Για μεμβράνη με σταθερά άκρα: $k_{n,m} = \sqrt{\left(n\dfrac{\pi}{b_1}\right)^2 + \left(m\dfrac{\pi}{b_2}\right)^2}$, εδώ $n = m = 1$ και $b_1 = b_2 = b$

Άρα: $c_\chi k_1 = c_\mu k_{1,1} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{T_\chi}{\rho}}1\dfrac{\pi}{a} = \sqrt{\dfrac{T_\mu}{\sigma}}\dfrac{\pi}{b}\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{T_\chi}{\rho}\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{T_\mu}{\sigma}\dfrac{2}{b^2} \Rightarrow \boxed{T_\chi = 2T_\mu \dfrac{\rho}{\sigma}\dfrac{a^2}{b^2}}$

(β) Πηλίκο των συχνοτήτων για τον αμέσως «επόμενο» κανονικό τρόπο ταλάντωσης των δύο μέσων.

$$\frac{\omega_{x,2}}{\omega_{m,(1,2)}} = \frac{\omega_{x,2}}{\omega_{m,(2,1)}} = \frac{\sqrt{\dfrac{T_x}{\rho}}2\dfrac{\pi}{a}}{\sqrt{\dfrac{T_\mu}{\sigma}}\dfrac{\pi}{b}\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{T_\chi}{T_\mu}\frac{\sigma}{\rho}}\frac{b}{a}\frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}\frac{a}{b}\frac{b}{a}\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{\frac{\omega_{x,2}}{\omega_{m,(1,2)}} = \frac{\omega_{x,2}}{\omega_{m,(2,1)}} = 2\sqrt{\frac{2}{5}}}$$

(γ) Περιγράψτε, (είτε αναλυτικά, $z = z(x, y, t)$, είτε με ένα απλό σχήμα) τους δύο διαφορετικούς τρόπους κίνησης που αντιστοιχούν σε αυτόν τον δεύτερο κανονικό τρόπο ταλάντωσης της μεμβράνης.

(δ) Αν a=2b=1m, και η κοινή θεμελιώδης συχνότητα είναι $f_{\chi(1)} = f_{\mu(1,1)} = 50\,\mathrm{Hz}$, να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων στα δύο μέσα.

(δ_1) Από: $f_{\chi(1)} = 50\,\mathrm{Hz} \Rightarrow \omega_{\chi(1)} = 2\pi f_{\chi(1)} = 100\pi\ \mathrm{s}^{-2}$. Αλλά: $\omega_{\chi(1)} = c_\chi k_1 = c_\chi\left(1\dfrac{\pi}{a}\right)$

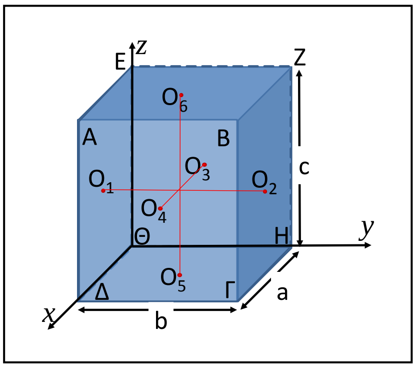
Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις: $100\pi\ \mathrm{s}^{-2} = c_\chi\dfrac{\pi}{a} \Rightarrow c_\chi = 100a\ s^{-1} \Rightarrow \boxed{c_\chi = 100\ m/s}$

(δ_2) Από: $f_{\mu(1,1)} = 50\,\mathrm{Hz} \Rightarrow \omega_{\mu(1,1)} = 2\pi f_{\mu(1,1)} = 50\ \mathrm{s}^{-1}$.

Αλλά: $\omega_{\mu(1,1)} = c_\mu k_{1,1} = c_\mu\sqrt{2\left(1\dfrac{\pi}{b}\right)^2} = c_\mu\dfrac{\pi}{b}\sqrt{2} = c_\mu\dfrac{\pi}{a}2\sqrt{2}$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις: $100\pi\ \mathrm{s}^{-2} = c_\mu\dfrac{\pi}{a}2\sqrt{2} \Rightarrow c_\mu = \dfrac{100a}{2\sqrt{2}}\ s^{-1} \Rightarrow \boxed{c_\mu = \dfrac{50}{\sqrt{2}}\ m/s}$

(ε) $c=\sqrt{\dfrac{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \sigma\kappa\lambda\eta\rho\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma}{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \alpha\delta\rho\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma}}$, $\quad Z=\sqrt{(\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \sigma\kappa\lambda\eta\rho\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma)\times(\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\ \alpha\delta\rho\acute{\alpha}\nu\varepsilon\iota\alpha\varsigma)}$



24. (α) Δωμάτιο διαστάσεων $(a\times b\times c)$ έχει την μπροστινή του πλευρά (ΑΒΓΔ) ανοικτή και τις άλλες 5 πλευρές του με ακλόνητα τοιχώματα. Το δωμάτιο βρίσκεται σε χώρο όπου η ταχύτητα διάδοσης του ήχου είναι c=300 m/s, και η κυματική εξίσωση για την αντίστοιχη ***<u>μεταβολή πίεσης p</u>*** λόγω του ήχου, είναι της μορφής $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$.

(α₁) Δείξτε ότι μέσα στο δωμάτιο αυτό μπορούν να υπάρχουν στάσιμα ηχητικά κύματα της μορφής

$$p(x,y,z,t)=A\cos(k_x x+\theta_x)\cos(k_y y+\theta_y)\cos(k_z z+\theta_z)\cos(\omega t)$$

αρκεί τα (k_x,k_y,k_z), c, ω, να ικανοποιούν μία σχέση την οποία να βρήτε.

(α₂) Αν ***<u>στις ακλόνητες πλευρές</u>*** η μεταβολή πίεσης είναι τέτοια ώστε η κάθετη παράγωγός της είναι $(\partial p/\partial n)=0$, ενώ ***<u>στην ανοικτή πλευρά</u>*** η μεταβολή πίεσης είναι $p=0$, να υπολογίσετε τη σχέση που δίνει τις συχνότητες των στάσιμων κυμάτων και να σχεδιάστε τις μορφές στάσιμων κυμάτων για τη συνάρτηση μεταβολής πίεσης p, κατά μήκος των ευθειών που συνδέουν τα κέντρα των απέναντι πλευρών O_iO_{i+1}, $i=1,3,5$. (α3) Υπολογίστε τη θεμελιώδη συχνότητα ηχητικού συντονισμού αυτού του δωματίου, αν: a=1 m, $b=a\sqrt{3}$, c=3a.

(β) Ιδανική χορδή με μήκος L και γραμμική πυκνότητα μάζας $\rho_1(x)=\rho_0(1+ax)$, $(0\le x\le L)$, συνδέεται, στο σημείο $x=L$, με δεύτερη ιδανική χορδή πολύ μεγάλου μήκους, με σταθερή γραμμική πυκνότητα μάζας $\rho_2=4\rho_0$, και όλο το σύστημα τείνεται με τάση Τ. **(β₁)** Ποιά τιμή πρέπει να έχει η σταθερά a, ώστε να μην υπάρχει ανάκλαση στο σημείο σύνδεσης των δύο χορδών (x=L); **(β₂)** Αν στο άκρο x=0 διεγείρεται αρμονικό κύμα κυκλικής συχνότητας ω και πλάτους A_0, να βρεθούν οι συναρτήσεις που περιγράφουν το μήκος κύματος $\lambda=\lambda(x)$ και το πλάτος $A=A(x)$ ως συνάρτηση του x για $0\le x\le 2L$, δεδομένου ότι δεν υπάρχουν ενεργειακές απώλειες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α1) Αντικαθιστώντας την $p(x,y,z,t)=A\cos(k_x x+\theta_x)\cos(k_y y+\theta_y)\cos(k_z z+\theta_z)\cos(\omega t)$

στην εξίσωση κύματος: $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\nabla^2 p\Rightarrow-\frac{\omega^2}{c^2}p=-\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)p \quad\Rightarrow\quad \omega=c\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2}$

(α2) Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα του δωματίου

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x=0,y,z,t)=0\Rightarrow\sin(\theta_x)=0\quad\Rightarrow\theta_x=0,\qquad p(x=a,y,z,t)=0\Rightarrow k_x=(2l-1)\frac{\pi}{2a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x,y=0,z,t)=0\Rightarrow\sin(\theta_y)=0\quad\Rightarrow\theta_y=0,\qquad \frac{\partial p}{\partial x}(x,y=b,z,t)=0\Rightarrow k_x=m\frac{\pi}{b}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x,y,z=0,t)=0\Rightarrow\sin(\theta_z)=0\quad\Rightarrow\theta_z=0,\qquad \frac{\partial p}{\partial x}(x,y,z=c,t)=0\Rightarrow k_z=n\frac{\pi}{c}$$

$$\omega_{lmn} = c\sqrt{k_{x,l}^2 + k_{y,m}^2 + k_{z,n}^2} = c\pi\sqrt{\frac{(2l-1)^2}{4a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}}$$

(α3) Αν a=1m, $b = a\sqrt{3}$, c=3a, η θεμελιώδης συχνότητα ηχητικού συντονισμού δίνεται από τη σχέση $\omega_{111} = c\pi\sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = c\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}} = c\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{25}{36}} = c\frac{\pi}{a}\frac{5}{6} \approx 785,4Hz$

(β1) Για να μην υπάρχει ανάκλαση στο x=L, πρέπει να ταυτίζονται οι σύνθετες κυματικές αντιστάσεις και, επειδή τείνονται με την ίδια τάση οι δύο χορδές, πρέπει να ταυτίζονται οι γραμμικές πυκνότητες $\rho_1(x=L) = \rho_2 = 4\rho_0 \Rightarrow \rho_0(1+aL) = 4\rho_0 \Rightarrow a = 3/L$

Άρα $\rho_1 = \rho_0(1+3x/L)$

(β2) Η συχνότητα ω είναι κοινή σε όλο το σύστημα (σχέση ταλαντωτή-διεγέρτη), οπότε:

$$\omega = ck = c(x)2\pi/\lambda(x) \Rightarrow \lambda(x) = 2\pi c(x)/\omega = (2\pi/\omega)\sqrt{T}\Big/\sqrt{\rho(x)} = \frac{(2\pi/\omega)\sqrt{T}}{\sqrt{\rho_0(1+3x/L)}}$$

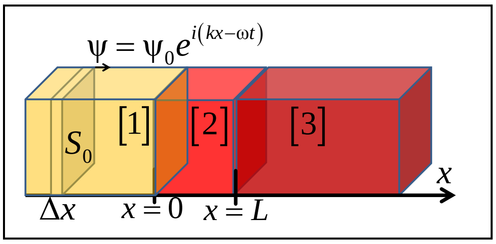
Διατήρηση ισχύος: $P_{\alpha\rho\chi} = P_1(x) = P_2 \Rightarrow A_0^2 z_0\omega^2 = A_1^2(x)z_1(x)\omega^2 = A_2^2 z_2\omega^2$

$$A_0^2 z_0 = A_1^2(x)z_1(x) \Rightarrow A_1^2(x) = A_0^2\frac{z_0}{z_1(x)} = A_0^2\frac{\sqrt{T\rho_0}}{\sqrt{T\rho_0(1+3x/L)}}$$

$$A_1(x) = \frac{A_0}{\sqrt[4]{(1+3x/L)}}, \quad 0 \le x \le L, \quad A_2(x) = \frac{A_0}{\sqrt[4]{4}} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}, \quad L \le x \le 2L$$

25. Όταν σε ένα γεωλογικό στρώμα διατομής S_0 διαδίδονται επίπεδα διαμήκη σεισμικά κύματα κατά μήκος της διεύθυνσης x (κάθετα στη διατομή S_0), τότε η εξίσωση κίνησης, για την απομάκρυνση ψ από την κατάσταση ισορροπίας, ενός στοιχειώδους όγκου $S_0\Delta x$, έχει τη μορφή: $(\rho S_0\Delta x)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) \approx (S_0 E)\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Delta x\right)$, όπου ρ: η πυκνότητα, και E: το μέτρο ελαστικότητας του Young του γεωλογικού στρώματος.

(α) Γράψτε τη θεμελιώδη σχέση της Μηχανικής ***από την οποία προκύπτει*** η παραπάνω μορφή και εξηγείστε τη φυσική σημασία κάθε μίας από τις παρενθέσεις της σχέσης που δίδεται. Κάνοντας τις κατάλληλες απλοποιήσεις, γράψτε τη διαφορική εξίσωση για τα αντίστοιχα διαμήκη κύματα, και υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης c αυτών των κυμάτων.



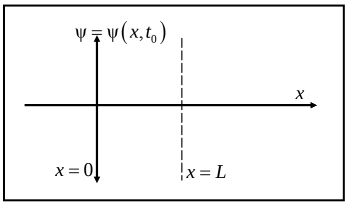
(β) Σε μία σειρά γεωλογικών στρωμάτων [1] $(-\infty < x \le 0)$, [2] $(0 \le x \le L)$, [3] $(L \le x \le \infty)$, όπως στο σχήμα, διαδίδεται δεξιά οδεύον αρμονικό κύμα, πλάτους Ψ_0=1 cm και συχνότητας f=50Hz. Τα στρώματα [1] και [3] είναι ομοιογενή, ενώ στο [2] η χημική σύνθεση και οι ιδιότητες μεταβάλλονται συναρτήσει του x, όπως φαίνεται στον Πίνακα

	[1]	[2]	[3]
E (GPa=10^9 N/m^2)	E_0=54	$E_0\, e^{3x/L}$	$E_0\, e^3$
ρ (gr/cm^3)	ρ_0 =6	$\rho_0\, e^{x/L}$	$\rho_0\, e^1$

Η σύνθετη μηχανική (κυματική) αντίσταση (του συστήματος που περιγράφεται στην εκφώνηση) είναι: (Δύναμη)/(Μονάδα Ταχύτητας): $Z = S_0\sqrt{E\rho}$, και η ισχύς του αντίστοιχου κύματος, είναι $P = A^2\omega^2 Z/2$, ενώ το σύστημα χαρακτηρίζεται από μηδενικές απώλειες. Να υπολογίσετε την ταχύτητα διάδοσης *c*, τη σύνθετη μηχανική αντίσταση ανά μονάδα διατομής και το μήκος κύματος *λ*, σε κάθε γεωλογικό στρώμα,, συμπληρώνοντας τον επόμενο Πίνακα.

(γ) Λαμβάνοντας υπόψη σας ότι δεν υπάρχουν φαινόμενα ανάκλασης, (επειδή οι ιδιότητες των στρωμάτων μεταβάλλονται με συνεχή τρόπο), να υπολογίσετε το πλάτος Ψ, σε κάθε γεωλογικό στρώμα και να συμπληρώσετε τις τιμές, επίσης στον Πίνακα που ακολουθεί.

	[1]	[2]	[3]
c (m/s)			
Z/S_0 (kg/s/m^2)			
λ (m)			
Ψ (cm)			



(γ) Να σχεδιάσετε στο διπλανό σχήμα ένα στιγμιότυπο του κύματος $\psi = \psi(x,t_0) = \psi_0(x)e^{i(k(x)x-\omega t_0)}$, για t_0 τέτοιο ώστε το κύμα να βρίσκεται και στις τρεις περιοχές [1], [2], [3]. Να υπολογίσετε τους συντελεστές ανάκλασης πλάτους $r = (Z_1 - Z_3)/(Z_1 + Z_3)$, διάδοσης πλάτους $t = 2Z_1/(Z_1 + Z_3)$, αν απουσίαζε το μεταβατικό στρώμα [2].

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $dm\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) = F_{\text{ολ},x} \quad \Rightarrow \quad (\rho S_0\Delta x)\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) \approx (S_0E)\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Delta x\right) \quad \Rightarrow \quad (\rho)\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) \approx (E)\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)$

$dm = (\rho S_0\Delta x)$, επιτάχυνση: $\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)$, $F_{\text{ολ},x} \approx (S_0E)\left(\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Delta x\right)$, Ταχύτητα διάδοσης: $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

(β) Ταχύτητα διάδοσης

[1]: $c = \sqrt{\dfrac{E_0}{\rho_0}} = \sqrt{\dfrac{54\times10^9 kgms^{-2}m^{-2}}{6\times10^{-3}kg/10^{-6}m^3}} = \sqrt{9\times10^{9+3-6}\dfrac{kgm^4s^{-2}m^{-2}}{kg}} \Rightarrow c = 3\times10^3\dfrac{m}{s}$

[2]: $c = \sqrt{\dfrac{E_0e^{3x/L}}{\rho_0e^{x/L}}} = \sqrt{\dfrac{E_0}{\rho_0}e^{2x/L}} = \sqrt{\dfrac{E_0}{\rho_0}}e^{x/L} = 3e^{x/L}\times10^3\dfrac{m}{s}$,

[3]: $c = 3e^1\times10^3\dfrac{m}{s}$,

Σύνθετη μηχανική (κυματική) αντίσταση

[1]: $Z/S_0 = \sqrt{E_0\rho_0} = \sqrt{54\times10^9\dfrac{kgm/s^2}{m^2}6\times10^{-3}\dfrac{kg}{10^{-6}m^3}} \Rightarrow Z/S_0 = 18\times10^6\dfrac{kg}{s}\dfrac{1}{m^2}$

[2]: $Z/S_0 = \sqrt{E_0e^{3x/L}\rho_0e^{x/L}} = 18e^{2x/L}\times10^6\dfrac{kg}{s}\dfrac{1}{m^2}$, [3]: $Z/S_0 = 18e^2\times10^6\dfrac{kg}{s}\dfrac{1}{m^2}$,

Μήκος κύματος

$\lambda[1] = \dfrac{c[1]}{f} = \dfrac{3\times10^3}{50s^{-1}}\dfrac{m}{s} = 60m$,

$$\lambda[2]=\frac{c[2]}{f}=\frac{3e^{x/L}\times 10^3}{50s^{-1}}\frac{m}{s}=60e^{x/l}m\,,$$

$$\lambda[3]=\frac{c[3]}{f}=\frac{3e^{1}\times 10^3}{50s^{-1}}\frac{m}{s}=60e^{1}m$$

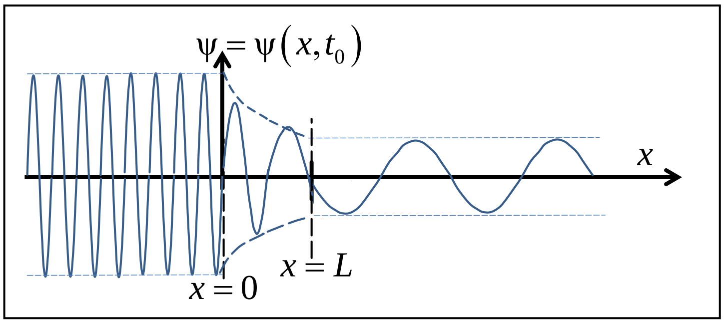
Πλάτος Ταλάντωσης: από διατήρηση ενέργειας και επειδή η συχνότητα είναι ίδια στα 1,2,3:

$$P=\psi^2\omega^2 Z/2=const \quad \Rightarrow \psi^2[1]Z[1]=\psi^2[2]Z[2]=\psi^2[3]Z[3]$$

$$\psi[2]=\psi[1]\sqrt{Z[1]/Z[2]}=\psi[1]e^{-x/L} \quad \Rightarrow \quad \psi[3]=\psi[1]e^{-1}$$

	[1]	[2]	[3]
c (m/s)	3×10^3	$3\times10^3\times e^{x/L}$	$3\times10^3\times e^1$
Z/S_0 (kg/s/m^2)	18×10^6	$18\times10^6\times e^{2x/L}$	$18\times10^6\times e^2$
λ (m)	60	$60\times e^{x/L}$	$60\times e^1$
Ψ (cm)	1	$1\times e^{-x/L}$	$1\times e^{-1}$

Σχηματική παράσταση



$$r=\frac{(Z_1-Z_3)}{(Z_1+Z_3)}=\frac{1-e^2}{1+e^2}$$

$$r=\frac{2Z_1}{(Z_1+Z_3)}=\frac{2}{1+e^2}$$

26. **(α)** Υπολογίστε τη σχέση διασποράς, [$\omega=\omega(k)$, ή, $\lambda=\lambda(f)$ που ικανοποιεί ένα οδεύον κύμα $y=y_0e^{i(kz-\omega t)}$ όταν διαδίδεται σε μη-ιδανικό κυματικό μέσο με εξίσωση κύματος

$$c^2\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}=\omega_0^2 y+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \qquad [\text{ Υπενθύμιση: } \omega=2\pi f, \quad k=2\pi/\lambda\ ]$$

(β) Από τη σχέση διασποράς του ερωτήματος (α), βρήτε την περιοχή συχνοτήτων για την οποία το κυματάνυσμα k δεν είναι πραγματικό, άρα ***<u>δεν μπορεί να υπάρχει</u>*** οδεύον κύμα.

(γ) Για την περιοχή συχνοτήτων για την οποία ***<u>μπορεί να υπάρχει</u>*** οδεύον κύμα, να υπολογίστε την ταχύτητα φάσης, $\upsilon_{ph}=\omega/k$, την ταχύτητα ομάδας, $\upsilon_{gr}=d\omega/dk$, και το γινόμενό τους $\upsilon_{ph}\,\upsilon_{gr}$. Όλα τα δύο μεγέθη να υπολογιστούν συναρτήσει των (ω,ω_0,c)

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Αν αντικαταστήσουμε, στην εξίσωση κύματος, το οδεύον κύμα $y=y_0e^{i(kz-\omega t)}$, και εκτελέσουμε τις αντίστοιχες παραγωγίσεις, παίρνουμε την σχέση διασποράς των κυμάτων, η οποία είναι $\quad -c^2k^2y=\omega_0^2y-\omega^2y \;\Rightarrow\; \omega^2=\omega_0^2+c^2k^2 \Rightarrow \boxed{\omega=\sqrt{\omega_0^2+c^2k^2}}$

Επίσης: $\omega^2=\omega_0^2+c^2k^2 \Rightarrow c^2k^2=\omega^2-\omega_0^2 \Rightarrow c^2\dfrac{4\pi^2}{\lambda^2}=4\pi^2\left(f^2-f_0^2\right) \Rightarrow \lambda=\dfrac{c}{\sqrt{f^2-f_0^2}}$

(β) Αν θεωρήσουμε ότι η συχνότητα ω του οδεύοντος κύματος είναι επιλέξιμη από τον πομπό (πηγή εκπομπής) του κύματος, και επιλύσουμε την σχέση διασποράς ως προς το κυματάνυσμα διάδοσης k, τότε έχουμε $k = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{c}$.

Άρα, για $\omega > \omega_0$ το κυματάνυσμα είναι πραγματικό και μπορούμε να έχουμε οδεύον κύμα

Για $\omega < \omega_0$ το κυματάνυσμα είναι φανταστικό και γράφεται ως $k = i\kappa = i\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}\big/c$, οπότε το κύμα έχει τη μορφή $y = y_0 e^{i(kz-\omega t)} = y_0 e^{i(i\kappa z-\omega t)} = \left(y_o e^{-\kappa z}\right)e^{-i\omega t}$.

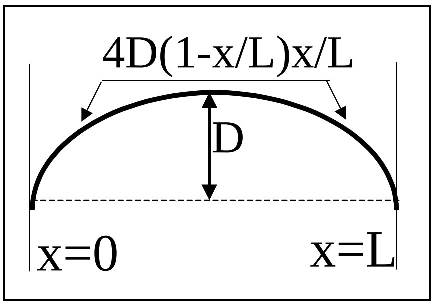
Δηλαδή, για $\omega < \omega_0$, το κύμα υφίσταται εκθετική απόσβεση πλάτους και, επομένως, δεν μπορούμε έχουμε διάδοση οδεύοντος κύματος (περιοχή απόσβεσης).

(γ) Για συχνότητες $\omega > \omega_0$, μπορούμενα έχουμε οδεύοντα κύματα με κυματάνυσμα $k = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{c}$, και η ταχύτητα φάσης συναρτήσει της συχνότητας είναι: $\upsilon_{ph} = \dfrac{\omega}{k} = c\dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}$.

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + c^2k^2} \Rightarrow$ ταχύτητα ομάδας: $\upsilon_{gr} = \dfrac{d\omega}{dk} = \dfrac{kc^2}{\sqrt{\omega_0^2 + k^2c^2}} = \dfrac{kc^2}{\omega} = \dfrac{c}{\omega}\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$

Το γινόμενο $\upsilon_{ph}\,\upsilon_{gr} = c\dfrac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}\,c\dfrac{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{\omega} = c^2$

27. Μεταλλική γέφυρα μήκους L, που εκτείνεται κατά μήκος του άξονα x, συμπεριφέρεται ως μη-ιδανική χορδή της οποίας οι εγκάρσιες ταλαντώσεις υπακούουν την κυματική εξίσωση $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \omega_0^2 y$, όπου ω_0^2 μία θετική σταθερά. α) Υπολογίστε τη σχέση διασποράς ω=ω(k) για στάσιμα ή/και οδεύοντα εγκάρσια κύματα της γέφυρας. β) Αν τα δύο άκρα της γέφυρας είναι είναι ακλόνητα, βρείτε τους κυματαριθμούς k_n και τις ιδιοσυχνότητες ω_n των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (ή στασίμων κυμάτων), $y(x,t)=f(x)\cos(\omega t+\varphi)$. γ) Οταν φυσάει ένα μόνιμο ρεύμα αέρα, η γέφυρα υφίσταται μία μόνιμη εγκάρσια παραμόρφωση η οποία δίνεται από τη σχέση: $y(x)=f_0(x)= 4D\dfrac{x}{L}\left(1-\dfrac{x}{L}\right)$. Αν θεωρήσουμε ως αρχή των χρόνων, t=0, τη χρονική στιγμή κατά την οποία παύει απότομα το ρεύμα αέρος που είναι υπεύθυνο για την παραμόρφωση, χωρίς καμία άλλη διαταραχή, δείξτε ότι η χρονική εξέλιξη της κίνησης της χορδής περιγράφεται από μία σχέση της μορφής $y(x,t) = \sum_n A_n \sin(k_n x + \varphi_{xn})\cos(\omega_n t + \varphi_{tn})$, προσδιορίστε τις σταθερές, k_n, ω_n, A_n, φ_{xn}, φ_{tn}, και υπολογίσετε την κίνηση της γέφυρας $y=y(x,t)$, για t>0.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Οδεύοντα κύματα: αντικαθιστώντας την $y = Ae^{i(kx-\omega t)}$ στην κυματική εξίσωση $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \omega_0^2 y$ παίρνουμε

$$\Rightarrow -\omega^2 y = c^2\left(-k^2\right)y + \omega_0^2 y \Rightarrow \omega^2 = k^2c^2 - \omega_0^2 \quad \Rightarrow \omega = \sqrt{k^2c^2 - \omega_0^2}$$

(β) Στάσιμα κύματα: αντικαθιστώντας την $y = f\left(x\right)\cos\left(\omega t\right)$ στην κυματική εξίσωση $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \omega_0^2 y$ παίρνουμε

$$-\omega^2 f\cos\left(\omega t\right) = c^2 f''\cos\left(\omega t\right) + \omega_0^2 f\cos\left(\omega t\right) \quad \Rightarrow \quad -\omega^2 f = c^2 f'' + \omega_0^2 f$$

$$\Rightarrow \quad f'' + \frac{\left(\omega_0^2 + \omega^2\right)}{c^2} f = 0 \quad \Rightarrow \quad f'' + k^2 f = 0, \qquad k^2 = \frac{\left(\omega_0^2 + \omega^2\right)}{c^2}, \quad f = A\sin\left(kx + \varphi\right)$$

.

Ακλόνητα άκρα: $\varphi = 0, \qquad k_n = n\frac{\pi}{L},$

και ιδοσυχνότητες: $k_n^2 = \frac{\left(\omega_0^2 + \omega_n^2\right)}{c^2} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{n^2\frac{\pi^2}{L^2}c^2 - \omega_0^2}, \qquad \omega_n > 0 \Rightarrow n > \frac{\omega_0 L}{\pi c}$

(γ) Από <u>την αρχική συνθήκη ταχυτήτων</u> :

$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$, προκύπτει: $-\sum_n A_n\omega_n \sin(k_n x)\sin(\varphi_{tn}) = 0 \Rightarrow \varphi_{tn} = 0$.

Άρα η τελική μορφή είναι : $y(x,t) = \sum_n A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$.

Για τον υπολογισμό των συντελεστών A_n εφαρμόζουμε την <u>αρχική συνθήκη απομακρύνσεων</u>: $y(x,t=0) = 4D(1-x/L)x/L \Rightarrow \sum_n A_n \sin(k_n x) = 4D(1-x/L)x/L$, οπότε οι συντελεστές A_n υπολογίζονται ως συντελστές Fourier της αρχικής απομάκρυνσης

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L 4D\left(1-\frac{x}{L}\right)\frac{x}{L}\sin(k_n x)dx = \frac{8D}{L^2}\int_0^L x\sin(k_n x)dx - \frac{8D}{L^3}\int_0^L x^2\sin(k_n x)dx =$$

$$= \frac{8D}{\left(Lk_n\right)^2}\int_{x=0}^{x=L}(k_n x)\sin(k_n x)d(k_n x) - \frac{8D}{\left(k_n L\right)^3}\int_{x=0}^{x=L}(k_n x)^2\sin(k_n x)d(k_n x) =$$

$$A_n = \frac{8D}{\left(n\pi\right)^2}\int_0^{n\pi}\theta\sin(\theta)d(\theta) - \frac{8D}{\left(n\pi\right)^3}\int_0^{n\pi}(\theta)^2\sin(\theta)d(\theta) \equiv \frac{8D}{\left(n\pi\right)^2}I_1 - \frac{8D}{\left(n\pi\right)^3}I_2$$

Τα δύο ολοκληρώματα υπολογίζονται ως εξής :

$$I_1 = \int_0^{n\pi}\theta\sin(\theta)d(\theta) = \sin(\theta)\Big|_o^{n\pi} - \theta\cos(\theta)\Big|_o^{n\pi} = (0-0) - (n\pi\cos n\pi - 0\cos 0) = n\pi(-1)^{n+1}$$

$$I_1 = \int_0^{n\pi}\theta^2\sin(\theta)d(\theta) = 2\theta\sin(\theta)\Big|_o^{n\pi} - \theta^2\cos(\theta)\Big|_o^{n\pi} + 2\cos(\theta)\Big|_o^{n\pi} =$$

$$= (0-0) - (n^2\pi^2\cos n\pi - 0) + 2(\cos n\pi - \cos 0) = n^2\pi^2(-1)^{n+1} + 2[(-1)^n - 1]$$

Επομένως :

$$A_n = \frac{8D}{n^2\pi^2}n\pi(-1)^{n+1} - \frac{8D}{n^3\pi^3}\left[n^2\pi^2(-1)^{n+1} + 2[(-1)^n - 1]\right] = \frac{16D}{n^3\pi^3}\left[1 - (-1)^n\right]$$

Τελικά : $A_n = \dfrac{32D}{n^3\pi^3}$, $\quad n = 1,3,5,...$ $\qquad A_n = 0, \quad n = 2,4,6,...$ και για : $\omega_n > 0 \Rightarrow n > \dfrac{\omega_0 L}{\pi c}$

28. (α) Δείξτε ότι για ένα κύμα που οδεύει προς τα δεξιά ισχύει : $\dfrac{\partial y}{\partial t} = -c\dfrac{\partial y}{\partial x}$.

(β) Δίδεται παλμός που περιγράφεται από την συνάρτηση : $y(z,t) = \dfrac{b^3}{b^2 + (z-\upsilon t)^2}$.

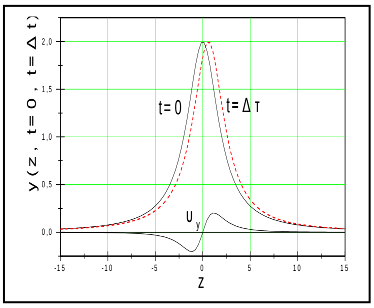
(β1) Σχεδιάστε τη μορφή του παλμού για t=0. (β2) Υπολογίστε τη σωματιδιακή ταχύτητα και δείξτε ποιοτικά πώς συνδέεται με τη μεταβολή του παλμού

Απάντηση

(α) $y = f(x-ct), \qquad u = x - ct$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t} = -c\dfrac{\partial f}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{\partial y}{\partial t} = -c\dfrac{\partial y}{\partial x}$$

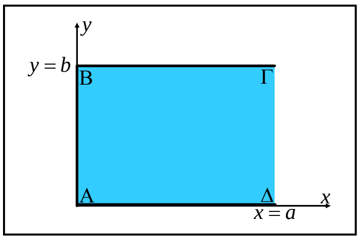
(β) $\upsilon_y = \dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{2\upsilon(z-\upsilon t)b^3}{\left[b^2 + (z-\upsilon t)^2\right]^2}$, για t=0, έχουμε : $\upsilon_y(t=0) = \left.\dfrac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = \dfrac{2\upsilon z b^3}{\left[b^2 + z^2\right]^2}$



Επίσης, από την προηγούμενη άσκηση, (αλλά, για δεξιά οδεύον), $\dfrac{\partial y}{\partial t} = -\upsilon\dfrac{\partial y}{\partial x}$

γ) Όπως φαίνεται από το σχήμα, η κατανομή εγκάρσιων ταχυτήτων, (αρνητική, για το αριστερό πτερύγιο του παλμού, και θετική για το δεξιό πτερύγιο του παλμού), είναι υπεύθυνη για μία συνολική μετατόπιση του παλμού προς τα δεξιά (εστιγμένη γραμμή).

29. Λεπτή ιδανική μεμβράνη, ομοιογενής και ισότροπη, που εκτείνεται στο επίπεδο $x-y$ έχει επιφανειακή πυκνότητα μάζας $\sigma \equiv dm/dS = \sigma\tau\alpha\theta.$. Η μεμβράνη ΑΒΓΔΑ έχει ορθογώνιο σχήμα και διαστάσεις $(a\times b)$ και είναι τεντωμένη με ισότροπη δύναμη ανά



μονάδα μήκους ίση με Τ. Οι τρείς διαδοχικές πλευρές της μεμβράνης είναι στερεωμένες ακλόνητα και η τέταρτη πλευρά (διάστασης: b) είναι ελεύθερη, όπως στο σχήμα Μικρές εγκάρσιες διαραχές της μεμβράνης από την κατάσταση ισορροπίας, κατά $z = z(x,y,t)$, ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση κύματος $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

(α) Αναζητήστε τους Κανονικούς Τρόπους Ταλάντωσης της μεμβράνης με τη μορφή $z(x,y,t) = X(x)Y(y)\sin(\omega t)$ και δείξτε ότι οι συναρτήσεις $X(x), Y(y)$ μπορεί να είναι κατάλληλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις της θέσης.

(β) Εφαρμόστε τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, σε κάθε άκρο της μεμβράνης, και υπολογίστε τις παραμέτρους των $X(x), Y(y)$, καθώς και την έκφραση που δίνει τις συχνότητες των κανονικών τρόπων ταλάντωσης.

(γ) Αν $\sigma \equiv dm/dS = 40\,\text{g/m}^2$, $T = 100\,\text{N/m}$, και $a = 2b = 40\,\text{cm}$, να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων στην μεμβράνη, η συχνότητα του «πρώτου» κανονικού τρόπου ταλάντωσης και να περιγραφεί η μορφή αυτού του τρόπου ταλάντωσης, είτε μέσω της μαθηματικής έκφρασης $f(x,y) = X(x)Y(y)$ είτε με τη βοήθεια κατάλληλου σχήματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \qquad z(x,y,t) = X(x)Y(y)\sin(\omega t)$$

$$X''(x)Y(y)\sin(\omega t) + X(x)Y''(y)\sin(\omega t) = -\frac{\omega^2}{c^2}X(x)Y(y)\sin(\omega t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \left\{\frac{X''(x)}{X(x)} + = -k_x^2, \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_y^2\right\}, \quad k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$X(x) = A\sin(k_x x + \theta), \quad Y(y) = B\sin(k_y y + \varphi)$$

(β) Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών

$$X(x=0) = 0 \Rightarrow A\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\theta = 0}, \quad X'(x=a) = 0 \Rightarrow Ak\cos(k_x a) = 0 \Rightarrow \boxed{k_x = (2n-1)\frac{\pi}{2a}}$$

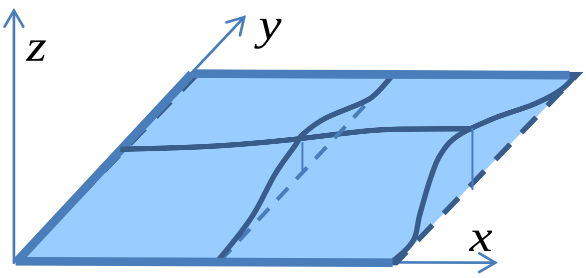
$$Y(y=0) = 0 \Rightarrow B\sin(\varphi) = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi = 0}, \quad Y(y=b) = 0 \Rightarrow B\sin(k_y b) = 0 \Rightarrow \boxed{k_y = m\frac{\pi}{b}}$$

Από (α): $$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \omega = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \Rightarrow \omega_{nm} = c\pi\sqrt{\frac{(2n-1)^2}{4a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

(γ) Αν $\sigma \equiv dm/dS = 40\,\text{g/m}$, $T = 100\,\text{N/m}$, και $a = 2b = 40\,\text{cm}$, να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης των εγκάρσιων κυμάτων στην μεμβράνη, η συχνότητα του «πρώτου» κανονικού τρόπου ταλάντωσης

$$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \sqrt{\frac{10^2\,\text{kg s}^{-2}}{4\times 10^{-2}\,\text{kg m}^{-2}}} \Rightarrow \boxed{c = 50\,\text{m/s}}$$

$$\left\{a = 2b, \quad \omega_{nm} = c\pi\sqrt{\frac{(2n-1)^2}{4a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\right\} \Rightarrow$$



$$\omega_{11} = \frac{c\pi}{b}\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{1}} \Rightarrow \boxed{\omega_{11} = \frac{c\pi}{4b}\sqrt{17} = \frac{c\pi}{2a}\sqrt{17}}$$

$$\omega_{11} = \frac{50\pi\,\text{ms}^{-1}}{0.8\,\text{m}}\sqrt{17} \Rightarrow \boxed{\omega_{11} = \frac{500\pi\sqrt{17}}{8}\text{s}^{-1}}$$

30. Ορθογώνια μεμβράνη με <u>επιφανειακή πυκνότητα μάζας σ</u>, είναι παράλληλη στο επίπεδο (x,y) και καταλαμβάνει την περιοχή $(0 \le x \le a)$, $(0 \le y \le b)$, με $2a = 3b$. Η μεμβράνη τείνεται ισότροπα με δύναμη ανά μονάδα μήκους ίση με *T*, και έχει ακλόνητες τις πλευρές που είναι παράλληλες στον άξονα-x και ελεύθερες τις πλευρές που είναι παράλληλες στον άξονα-y.

(α) Να διατυπωθούν οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα σύνορα της μεμβράνης

(β) Να ευρεθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (ΚΤΤ) του συστήματος, δηλ. οι κινήσεις με ενιαία συχνότητα: $z(x,y,t)=f(x,y)\cos(\omega t)$, άρα, να βρεθεί η γενική μορφή της $f=f(x,y)$ και η γενική σχέση που δίνει τις συχνότητές τους (με βάση το ερώτημα-α).

(γ) Με βάση τις απαντήσεις των (α)-(β), να υπολογιστούν οι συχνότητες και να περιγραφούν οι γεωμετρικές παραμορφώσεις των τριών πρώτων ΚΤΤ, από την άποψη του συνδυασμού δεικτών. [Κάντε ένα ποιοτικό σκαρίφημα-κάτοψη της μεμβράνης, σημειώνοντας: (i) με διακεκομμένες γραμμές τα σημεία τα οποία μένουν ακίνητα (όταν υπάρχουν), και (ii) με τα πρόσημα «±» τις «κοιλίες» που βρίσκονται «πάνω» και «κάτω» από το επίπεδο του σχήματος αντίστοιχα, σε μία τυχαία γενική φάση της ταλάντωσης]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Να διατυπωθούν οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στα σύνορα της μεμβράνης

$$z(x,y=0,t)=0, \qquad z(x,y=b,t)=0 \qquad \text{: ακλόνητα άκρα}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x=0,y,t)}=0, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x=a,y,t)}=0 \qquad \text{: ελεύθερα άκρα}$$

(β) Να ευρεθούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (ΚΤΤ) του συστήματος, δηλ. οι κινήσεις με ενιαία συχνότητα: $z(x,y,t)=f(x,y)\cos(\omega t)$, άρα, να βρεθεί η γενική μορφή της $f=f(x,y)$ και η γενική σχέση που δίνει τις συχνότητές τους (με βάση το ερώτημα-α).

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\\ z(x,y,t)=f(x,y)\cos(\omega t)\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\cos(\omega t)=-\frac{\omega^2}{c^2}f\cos(\omega t)$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\dfrac{\omega^2}{c^2}f\\ f(x,y)=X(x)Y(y)\end{array}\right\}\Rightarrow X''Y+XY''=-\frac{\omega^2}{c^2}XY\Rightarrow\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=-\frac{\omega^2}{c^2}$$

Θέτουμε: $\dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2}=-k_x^2$, $\dfrac{1}{Y}\dfrac{d^2Y}{dy^2}=-k_y^2$, με $k_x^2+k_y^2=\omega^2/c^2$

Οι λύσεις είναι της μορφής: $X=A\cos(k_x x+\theta)$, $Y=B\sin(k_y y+\phi)$

Οριακές συνθήκες:

$$z(x,y=0,t)=0\Rightarrow\boxed{\phi=0} \qquad z(x,y=b,t)=0\Rightarrow k_y b=0\Rightarrow\boxed{k_y=m\frac{\pi}{b}}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x=0,y,t)}=0\Rightarrow\sin(\theta)=0\Rightarrow\boxed{\theta=0}\ , \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(x=a,y,t)}=0\Rightarrow\sin(k_x a)=0\Rightarrow\boxed{k_x=n\frac{\pi}{a}}$$

$$f(x,y)=X(x)Y(y)=A\cos(k_x x)\sin(k_y y)$$

(γ) Με βάση τις απαντήσεις των (α)-(β), να υπολογιστούν οι συχνότητες και να περιγραφούν οι γεωμετρικές παραμορφώσεις των τριών πρώτων ΚΤΤ, από την άποψη του συνδυασμού δεικτών.

$$k_x^2 + k_y^2 = \omega^2 / c^2 \Rightarrow \boxed{\omega_{nm} = c\pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}}$$

[Κάντε ένα ποιοτικό σκαρίφημα-κάτοψη της μεμβράνης, σημειώνοντας: (i) με διακεκομμένες γραμμές τα σημεία τα οποία μένουν ακίνητα (όταν υπάρχουν), και (ii) με τα πρόσημα «±» τις «κοιλίες» που βρίσκονται «πάνω» και «κάτω» από το επίπεδο του σχήματος αντίστοιχα, σε μία τυχαία γενική φάση της ταλάντωσης]

31. Η εξίσωση κύματος μη-ιδανικής χορδής γράφεται: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ac^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, όπου c=10 cm/s και a=0.5 cm^2. (α) Να υπολογίσετε τη σχέση διασποράς ενός αρμονικού κύματος που διαδίδεται σε αυτό το μέσο. (β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα φάσης $\upsilon_{ph} = \omega/k$, για ένα μονοχρωματικό κύμα με συχνότητα $\omega_0 = 10 s^{-1}$. (γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα ομάδας $\upsilon_{gr} = d\omega/dk$, για ένα κυματοπακέτο με την ίδια κεντρική συχνότητα $\omega_0 = 10 s^{-1}$. (δ) Αν το φασματικό εύρος του κυματοπακέτου είναι $\Delta\omega = 2s^{-1}$, να υπολογίσετετο χρονικό του εύρος Δt.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ac^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = c^2 k^2 + ac^2 k^4 \quad \Rightarrow \quad \omega = ck\sqrt{1 + ak2}$

(β) $\upsilon_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$, όπου το k_0 προκύπτει ως λύσης της εξίσωσης-σχέσης διασποράς

$$\omega^2 = c^2 k^2 + ac^2 k^4 \quad \Rightarrow \quad ac^2 k_0^4 + c^2 k_0^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow k_0^2 = \left(-c^2 \pm \sqrt{c^4 + 4ac^2\omega_0^2}\right) \Big/ 2ac^2$$

$$k_0^2 = \frac{\sqrt{1 + 4\left(a\,\omega_0^2 / c^2\right)} - 1}{2a} \quad \Rightarrow \quad k_0^2 = 0,732 cm^{-2} \quad \Rightarrow \quad k_0 = 0,85 cm^{-1}$$

$$\upsilon_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0} = \frac{10 s^{-1}}{0.85 cm^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_{ph} = 11.76\, cm/s$$

(γ) Η ταχύτητα ομάδας $\upsilon_{gr} = d\omega/dk$, για ένα κυματοπακέτο με την ίδια κεντρική συχνότητα $\omega_0 = 10 s^{-1}$..

$$\upsilon_{gr} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} = c\frac{1 + 2ak_0^2}{\sqrt{1 + ak_0^2}} = 1.48c = 14.8\, cm/s$$

(δ) Αν το φασματικό εύρος του κυματοπακέτου είναι $\Delta\omega = 2s^{-1}$, το χρονικό του εύρος Δt.

32. Ιδανική ελαστική χορδή, με γραμμική πυκνότητα $dm/dx = \rho$, εκτείνεται από $x \to -\infty$ μέχρι x=0, τείνεται με τάση Τ, και διαδίδεται πάνω της ένα δεξιά οδεύον αρμονικό κύμα με μιγαδική αναπαράσταση $y_1(x,t) = Ae^{i(k_1 x - \omega_1 t)}$. Το άκρο της χορδής που βρίσκεται στο x=0 είναι συνδεδεμένο σε μία διάταξη απορρόφησης των ταλαντώσεων, από την οποία υφίσταται εγκάρσια δύναμη $F_y = -b\upsilon_y$, όπου b μία θετική σταθερά απόσβεσης και υ_y η εγκάρσια ταχύτητα της χορδής στο x=0.

(α) Προσδιορίστε το κυματάνυσμα k_1 και το αντίστοιχο μήκος κύματος λ_1, συναρτήσει των (ρ, T, ω_1)

(β) Δείξτε ότι η οριακή συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση απομάκρυνσης της χορδής από την κατάσταση ισορροπίας $y(x,t)$ στο σημείο x=0, είναι : $\left(-b\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(x=0,t)}\right) - \left(T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(x=0,t)}\right) = 0$.

(β) Αν το ανακλώμενο κύμα, στο x=0, έχει τη μορφή $y_2(x,t) = Be^{i(\pm k_2 x - \omega_2 t)}$, να επιλεγεί το ορθό πρόσημο $(\pm)$ στον εκθέτη, να βρεθούν οι τιμές των ω_2, k_2, συναρτήσει των μέχρι στιγμής δεδομένων, και να υπολογιστεί ο συντελεστής ανάκλασης $r=B/A$.

(γ) Να υπολογιστεί μία κατάλληλη σταθερά απόσβεσης b (συναρτήσει των T και ρ) ώστε να μην υπάρχει καθόλου ανακλώμενο κύμα. Σχολιάστε το αποτέλεσμά σας σε σχέση με τη σύνθετη κυματική αντίσταση της χορδής (προσαρμογή αντιστάσεων για απόλυτη απορρόφηση).

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\omega_{1,n}}{\omega_{1+i,n}} = k^i \Rightarrow \dfrac{\omega_{1,n}}{\omega_{1+i,n}} = 1/\sqrt[3]{2^i} \\ \omega_{i,n} = n\dfrac{\pi}{L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho_i}} \end{cases}\right\} \Rightarrow \sqrt{\frac{\rho_{1+i}}{\rho_1}} = 1/\sqrt[3]{2^i} \Rightarrow \boxed{\rho_{1+i} = \rho_1 / 2^{\frac{2i}{3}}},$$

(γ) $\omega_{1,n} = n\dfrac{\pi}{L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho_1}} \Rightarrow f_{1,n} = \dfrac{\omega_{1,n}}{2\pi} \Rightarrow f_{1,1} = \dfrac{1}{2L}\sqrt{\dfrac{T}{\rho_1}} \Rightarrow \boxed{T = 4L^2 f_{1,1}^2 \rho_1}$

$$T = 4L^2 f_{1,1}^2 \rho_1 = 4m^2 (264)^2 s^{-2} 10^{-2} kgm^{-1} \Rightarrow \boxed{T = 2787{,}84N}$$

33. Μια ορθογώνια μεμβράνη με πλευρές a και b=2a, έχει επιφανειακή πυκνότητα σ, βρίσκεται υπό ισότροπη τάση T ανά μονάδα μήκους και έχει σταθερές και τις τέσσερις πλευρές της.

α) Βρήτε τις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης της μεμβράνης και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις ταλάντωσης $u_{mn}(x,y)$.

β) Προσδιορίστε τις εκφυλισμένες ταλαντώσεις για τις δέκα χαμηλότερες ιδιοσυχνότητες.

β) Αν b=a, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του τετραγώνου είναι κόμβοι εκείνων των τρόπων ταλάντωσης που αντιστοιχούν στο συνδυασμό των ιδιοσυναρτήσεων ($u_{mn} \pm u_{nm}$).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Με βάση την σταθερότητα των τεσσάρων πλευρών της μεμβράνης, προσδιορίζονται οι διακριτές τιμές των συνιστωσών $k_{x,n} = n\dfrac{\pi}{a}, \quad k_{y,m} = m\dfrac{\pi}{b} = m\dfrac{\pi}{2a}$

Από τη σχέση $c=\dfrac{\omega}{k}\Rightarrow \omega=ck=c\sqrt{k_x^2+k_y^2}=c\sqrt{n^2\dfrac{\pi^2}{a^2}+m^2\dfrac{\pi^2}{4a^2}}\Rightarrow \boxed{\omega_{nm}=\dfrac{c\pi}{2a}\sqrt{4n^2+m^2}}$

(β) $\omega_{nm}=\dfrac{c\pi}{2a}\sqrt{4n^2+m^2}=\dfrac{c\pi}{2a}\sqrt{(2n+m)^2-4nm}$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται: οι τάξεις (n,m) (στην πρώτη σειρά) και ο όρος $\sqrt{4n^2+m^2}$ (στη δεύτερη σειρά). Οι διαγραμμισμένες τιμές δείχνουν εκφυλισμένους τρόπους ταλάντωσης, δηλαδή., ταλαντώσεις με διαφορετικούς γεωμετρικούς σχηματισμούς στη μεμβράνη αλλά με ίδια συχνότητα.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(1,4)	(2,2)	(2,3)	(1,5)	(2,4)	(3,1)	(1,6)	(3,2)
$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{17}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{32}$	$\sqrt{37}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{40}$

(γ) Οι γραμμικοί συνδυασμοί:

$$u_{nm}\pm u_{mn}=\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(m\frac{\pi}{a}y\right)\pm\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{a}y\right)$$

μελετώνται κατά μήκος των δύο διαγωνίων: $y=x$ και $y=a-x$

Κατά μήκος της πρώτης διαγωνίου $y=x$ έχουμε:

$u_{nm}\pm u_{mn}=\sin\left(n\dfrac{\pi}{a}x\right)\sin\left(m\dfrac{\pi}{a}x\right)\pm\sin\left(m\dfrac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\dfrac{\pi}{a}x\right)$, οποίος μηδενίζεται για το πρόσημο (+)

Κατά μήκος της δεύτερης διαγωνίου $y=a-x$ έχουμε:

$$u_{nm}\pm u_{mn}=\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(m\frac{\pi}{a}(a-x)\right)\pm\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{a}(a-x)\right)=$$

$$=\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(m\pi-m\frac{\pi}{a}x\right)\pm\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\pi-n\frac{\pi}{a}x\right)=$$

$$=\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)(-1)^{m-1}\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\pm\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)(-1)^{n-1}\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)=$$

$$=(-1)^{m-1}\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\pm(-1)^{n-1}\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{u_{nm}\pm u_{mn}\left((-1)^{m-1}\pm(-1)^{n-1}\right)\sin\left(m\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(n\frac{\pi}{a}x\right)}$$

ο οποίος μηδενίζεται για το πρόσημο (-), όταν (n,m) άρτιοι, ή (nm) περιττοί
για το πρόσημο (+), όταν n: άρτιος και m: περιττός, ή, αντίστροφα.

34. Θεωρήστε ότι σε χώρο άπειρης έκτασης έχει αναπτυχθεί ηλεκτρικό πεδίο της μορφής $\vec{E}(\vec{r},t)=kE_0(-y\hat{x}+x\hat{y})\cos(\omega t)$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0,\qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},\qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

(α) Να υπολογίσετε την ένταση του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}=\vec{B}(\vec{r},t)$

(β) Να υπολογίσετε την πυκνότητα φορτίου $\rho=\rho(\vec{r},t)$ και ρεύματος $\vec{j}=\vec{j}(\vec{r},t)$.

(γ) Να υπολογίσετε το διάνυσμα Poynting $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$ του Η/Μ κύματος, καθώς και τη μέση χρονική τιμή του, σε χρονικό διάστημα μίας περιόδου T=2π/ω, για κάθε $\vec{r}$.

(δ) Να δείξετε ότι τα μεγέθη $\rho = \rho(\vec{r},t)$ και $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},t)$ ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας, και να εξηγήσετε, με φυσικά επιχειρήματα, πως συμβιβάζονται οι τιμές των δύο μεγεθών.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E} = kE_0\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ -y & x & 0\end{vmatrix}\cos(\omega t) = \hat{z}2kE_0\cos(\omega t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \hat{z}(2kE_0/\omega)\sin(\omega t)}$$

(β) $$\rho = \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \varepsilon_0 kE_0\left[\frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial(x)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z}\right] \Rightarrow \boxed{\rho = 0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow \vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0}0 - \varepsilon_0(-k\omega E_0)(-y\hat{x}+x\hat{y})\sin(\omega t)$$

Τελικά $$\boxed{\vec{j} = \varepsilon_0 k\omega E_0(-y\hat{x}+x\hat{y})\sin(\omega t)}$$

(γ) Το διάνυσμα Poynting

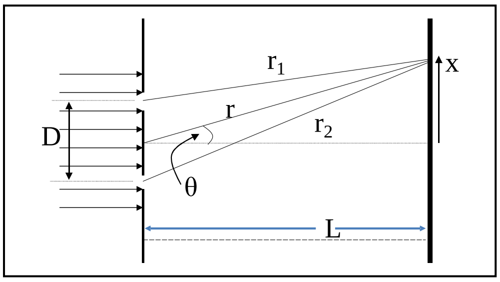
$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ -y & x & 0\\ 0 & 0 & 2/\omega\end{vmatrix}(kE_0)^2\cos(\omega t)\sin(\omega t) \Rightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{(kE_0)^2}{\mu_0}(x\hat{x}+y\hat{y})\cos(\omega t)\sin(\omega t)}$$

και $$\left\langle\vec{S}\right\rangle_t = \frac{(kE_0)^2}{\mu_0}(x\hat{x}+y\hat{y})\frac{1}{T}\int_o^T\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,dt \Rightarrow \boxed{\left\langle\vec{S}\right\rangle_t = 0}$$

(δ) Τα μεγέθη $\rho = \rho(\vec{r},t)$ και $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r},t)$ ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας,

Διότι $\rho = 0 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, και $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0$, Άρα $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

Εξάλλου, παρότι $\rho = 0$, μπορεί να υπάρχει μη-μηδενικό ρεύμα και πυκνότητα ρεύματος από την κίνηση, π.χ., ετερόσημων φορτίων, με αντίθετες ταχύτητες, οπότε τα φορτία αλληοαναιρούνται, αλλά τα ρεύματα αθροίζονται, άρα συμβιβάζονται οι τιμές των δύο μεγεθών.



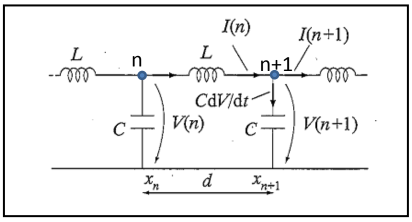
35. Αδιαφανές τοίχωμα φέρει δύο παράλληλες λεπτές σχισμές, (κάθετες στο επίπεδο του σχήματος), σε απόσταση D και είναι παράλληλο σε επίπεδο παρατήρησης, το οποίο απέχει απόσταση L>>D. Στο τοίχωμα πέφτει, κάθετα προς αυτό, επίπεδο κύμα, (το οποίο ταλαντώνεται κάθετα στο επίπεδο του σχήματος), με μήκος κύματος λ. Θεωρείστε πως από κάθε σχισμή εξέρχεται διαταραχή πλάτους y_0, και αγνοείστε τη μεταβολή πλάτους με την απόσταση r. α) Να υπολογιστεί η συνολική διαταραχή στο επίπεδο παρατήρησης, ως συνάρτηση της απόστασης x από το επίπεδο συμμετρίας της διάταξης. β) Βρείτε την απόσταση, κατά μήκος του άξονα x, ανάμεσα σε δύο διαδοχικά ακρότατα της συνολικής διαταραχής. (γ) Υποθέτουμε ότι οι δύο σχισμές απέχουν μεταξύ τους 1mm, φωτίζονται από μονοχρωματική ακτινοβολία λ=500 nm, και καλύπτουμε τη μία από τις δύο σχισμές με διαφανές πλακίδιο δείκτη διάθλασης n=1.5. Υπολογίστε το πάχος του πλακιδίου έτσι ώστε το κεντρικό μέγιστο (στο επίπεδο παρατήρησης) να μετατοπιστεί στη θέση που βρισκόταν το επόμενο μέγιστο όταν και οι δύο σχισμές ήταν ακάλυπτες

[Υπόδειξη: Θεωρείστε ότι η γωνία θ, ως προς τη μεσοκάθετο στις δύο σχισμές, είναι τόσο μικρή ώστε: $\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta \approx \sin\theta \approx \tan\theta$].

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(γ) Εφ’ όσον οι τάξεις περίθλασης μεταβάλλονται κατά $\Delta n = 1$, αυτό σημαίνει ότι, με την παρεμβολή του πλακιδίου στη μία από τις δύο σχισμές, έχει δημιουργηθεί επιπλέον αρχική διαφορά φάσης $\Delta\varphi = 2\pi$, επομένως η διαφορά οπτικού δρόμου είναι

$$\Delta(\mathrm{O\Delta}) = \lambda \Rightarrow nD = \lambda \Rightarrow D = \frac{\lambda}{n} = \frac{500nm}{1.5} = 333.33nm$$



36. Γραμμή μεταφοράς Σε μία επαλληλία στοιχείων αυτεπαγωγής και χωρητικότητας, όπως στο σχήμα, η διαφορά δυναμικού μεταξύ των κόμβων n και n+1, συναρτήσει της μεταξύ τους αυτεπαγωγής L γράφεται $V_n - L\frac{di}{dt} = V_{n+1}$, και το ρεύμα, που διαρρέει τον πυκνωτή που είναι συνδεδεμένος στον κλάδο n, συναρτήσει της χωρητικότητας του κλάδο, γράφεται $I_{n-1} = I_n + \frac{dQ_n}{dt}$. (α) Δείξτε ότι, στο όριο του συνεχούς (γραμμή μεταφοράς), (οπότε: $x_n \to x$ και $x_{n+1} \to x + dx$), αν L_0: αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους, και C_0: χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους, οι δύο παραπάνω εξισώσεις έχουν τη μορφή $L_0(\partial I/\partial t) = -(\partial V/\partial x)$ και $C_0(\partial V/\partial t) = -(\partial I/\partial x)$, που είναι γνωστές και ως εξισώσεις των «πεδίων» $I = I(x,t)$ και $V = V(x,t)$. (β) Δείξτε ότι από τις δύο εξισώσεις προκύπτει η ίδια εξίσωση κύματος για τα μεγέθη V και I της γραμμής μεταφοράς, και υπολογίστε την κοινή ταχύτητα κύματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Η διαφορά δυναμικού από τον κόμβο n μέχρι τον κόμβο n+1 οφείλεται στην τάση από αυτεπαγωγή :

$$V_n - L\frac{di}{dt} = V_{n+1} \qquad (1\alpha)$$

Το ρεύμα I_{n-1}, που φθάνει στον κόμβο n, διακλαδίζεται εν μέρει στο ρεύμα I_n, που διαρρέει το πηνίο που βρίσκεται ανάμεσα στους κόμβους n και n+1, και εν μέρει προς τον πυκνωτή που είναι συνδεδεμένος στον κόμβο n, μεταβάλλοντας το φορτίο του με ρυθμό $\frac{dQ_n}{dt}$, επομένως :

$$I_{n-1} = I_n + \frac{dQ_n}{dt} \qquad (1\beta)$$

(α) Στο όριο του συνεχούς: $f_n(t) \to f(x,t)$ και $f_{n\pm1}(t) \to f(x \pm dx, t)$,

οπότε οι δύο εξισώσεις (1α) και (1β) γράφονται

$$V(x) - (L_0 dx)\frac{\partial I}{\partial t} = V(x+dx) \Rightarrow V(x) - (L_0 dx)\frac{\partial I}{\partial t} = V(x) + \frac{\partial V}{\partial x}dx \Rightarrow \boxed{L_0\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial x}} \qquad (2\alpha)$$

$$I(x-dx) = I(x) + \frac{\partial}{\partial t}\left(VC_0 dx\right) \Rightarrow I(x) + \frac{\partial I}{\partial x}(-dx) = I(x) + C_0 dx \frac{\partial V}{\partial t} \Rightarrow \boxed{C_0 \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x}} \qquad (2\beta)$$

(β) Από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με μερικές παραγώγους (2α) (2β), για τα «πεδία» $I = I(x,t)$ και $V = V(x,t)$, μπορούμε να παράγουμε τις εξισώσεις κύματος (δεύτερης τάξης) για το καθένα από αυτά, ως εξής

$$\frac{\partial}{\partial t}(2a) \quad \Rightarrow \quad L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) \overset{(2\beta)}{\Rightarrow} L_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{C_0}\frac{\partial I}{\partial x}\right) \Rightarrow \boxed{L_0 C_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}}$$

Όμοια, παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την (2β) $\left[\frac{\partial}{\partial t}(2\beta)\right]$ και απαλείφοντας την συνάρτηση του ρεύματος μέσω της (2α) παίρνουμε τελικά $\boxed{L_0 C_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}$.

Όπως φαίνεται, και τα δύο πεδία ικανοποιούν την ίδια διαφορική εξίσωση κύματος, με την ίδια ταχύτητα διάδοσης $c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$

(ε) Αν $V = V_0 e^{i(kx-\omega t)}$ και $I = I_0 e^{i(kx-\omega t)}$ είναι οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης, όπου $\frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0'}}$, τότε, από την εξίσωση (2α) (ή, αντίστοιχα, (2β)), έχουμε:

$$L_0 \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow L_0\left(-i\omega\right) I = -\left(ik\right) V \Rightarrow \frac{V}{I} = L_0 \frac{\omega}{k} = L_0 c = L_0 \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \Rightarrow \boxed{\frac{V}{I} \equiv Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}}$$

Το μέγεθος αυτό ονομάζεται χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση, εξαρτάται από την αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους και την χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους, και χαρακτηρίζει την γραμμή μεταφοράς, ανεξάρτητα από το μήκος της.

37. Συχνότητα αποκοπής σε Οπτική Ίνα. Μία οπτική ίνα (ΟΙ) από γυαλί τετραγωνικής διατομής πλευράς a, συμπεριφέρεται ως κυματοδηγός στην ορατή περιοχή του Η-Μ φάσματος. Στις δύο δευθύνσεις x και y, κάθετα στον άξονα z της ΟΙ, δημιουργούνται στάσιμα Η-Μ κύματα και οι οριακές συνθήκες επιβάλουν περιορισμούς στους (εγκάρσιους) κυματικούς αριθμούς k_x και k_y που δίδονται από τις σχέσεις: k_x=nπ/a, και k_y=mπ/a όπου n,m=1,2,3,... οι τάξεις των εγκάρσιων (στασίμων) τρόπων ταλάντωσης του Η-Μ πεδίου στο εσωτερικό του κυματοδηγού.

(α) Θεωρείστε ότι η σχέση διαποράς του Η-Μ κύματος στο γυαλί δίδεται από τη σχέση $\omega^2=(c^2/n^2)k^2$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό και n=1.52 ο δείκτης διάθλασης του γυαλιού, και υπολογίστε τη συχνότητα αποκοπής κάτω από την οποία δεν έχουμε διάδοση οδεύοντος κύματος κατά μήκος του άξονα z.

(β) Υπολογίστε την ελάχιστη τιμή της διάστασης a ώστε να έχουμε διάδοση δέσμης laser ερυθρού χρώματος (λ=800 nm).

(γ) Υπολογίστε τη φασική ταχύτητα υ_φ και την ομαδική ταχύτητα υ_g ως και δείξτε ότι $\upsilon_g\upsilon_\varphi=(c/n)^2$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Από την σχέση διασποράς που δίδεται

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\eta^2 \Rightarrow \left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)=\frac{\omega^2}{c^2}\eta^2 \Rightarrow k_z^2=\frac{\omega^2}{c^2}\eta^2-k_x^2-k_y^2 \Rightarrow$$

$$k_z=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\eta^2-k_x^2-k_y^2} \Rightarrow \boxed{k_z=\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\eta^2-\frac{\pi^2}{a^2}\left(n^2+m^2\right)}}$$

Για να έχουμε διάδοση κατά τον άξονα-z πρέπει να είναι πραγματικό μέγεθος το k_z, επομένως, θα πρέπει να ισχύει: $\frac{\omega^2}{c^2}\eta^2-\frac{\pi^2}{a^2}\left(n^2+m^2\right)>0 \Rightarrow \boxed{\omega>\frac{c}{\eta}\frac{\pi}{a}\sqrt{\left(n^2+m^2\right)}}$

(β) $$\omega>\frac{c}{\eta}\frac{\pi}{a}\sqrt{\left(n^2+m^2\right)} \Rightarrow \boxed{a>\frac{\lambda}{2\eta}\sqrt{\left(n^2+m^2\right)}} \Rightarrow \boxed{a_{\min}=\frac{\lambda}{2\eta}\sqrt{2}}$$

(γ) Η σχέση διασποράς (από το πρώτο ερώτημα) είναι : $\omega=\frac{c}{\eta}\sqrt{\left(\left(n\frac{\pi}{a}\right)^2+\left(mk\frac{\pi}{a}\right)^2+k_z^2\right)}$

Οπότε $\upsilon_{ph}=\frac{\omega}{k_z}$, $\upsilon_{gr}=\frac{d\omega}{dk_z}$, που υπολογίζονται από την προηγούμενη σχέση

38. (α) Στην εξίσωση κύματος σε 2- και 3-διαστάσεις, εκφράστε την Λαπλασιανή σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, για κάθε μία περίπτωση, και εφαρμόστε την μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών, για την περίπτωση κυλινδρικά-συμμετρικού $y(r_\perp,\theta,\varphi)=y(r_\perp)$ και σφαιρικά-συμμετρικού $y(r,\theta,\varphi)=y(r)$ κύματος, αντίστοιχα. Όπου, $r_\perp$: η κάθετη απόσταση από τον άξονα κυλινδρικής συμμετρίας και r: η απόσταση από τε κέντρο σφαιρικής συμμετρίας, αντίστοιχα. (β) Προσδιορίστε την συνάρτηση πλάτους $A=A(r_\perp)$ και $A=A(r)$ του οδεύοντος κύματος, $y(r_\perp)=A(r_\perp)e^{i(kr_\perp-\omega t)}$ και $y(r)=A(r)e^{i(kr-\omega t)}$, για τις δύο περιπτώσεις, αντίστοιχα. (γ) Λαμβάνοντας υπόψη σας ότι η ένταση του κύματος, δηλ., η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας, την οποία μεταφέρει ένα κύμα, είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του, (ή, ισοδύναμα, ανάλογη του y^*y, όπου y^*: ο μιγαδικός συζυγής του y, για την περίπτωση της μιγαδικής αναπαράστασης, αντίστοιχα), δείξτε ότι τα πλάτη $A=A(r_\perp)$ και $A=A(r)$, που υπολογίστηκαν στο ερώτημα (β) είναι συνεπή με την διατήρηση της ενέργειας

$$\nabla^2 f=\frac{1}{r_\perp}\frac{\partial}{\partial r_\perp}\left(r_\perp\frac{\partial f}{\partial r_\perp}\right)+\frac{1}{r_\perp^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},\ \nabla^2 f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Στην περίπτωση σφαιρικής συμμετρίας, ένα σφαιρικό οδεύον κύμα περιγράφεται από μία έκφραση της μορφής $y(r,t)=f(r)e^{i(kr-\omega t)}$, οπότε, η αντικατάστασή του στην εξίσωση κύματος δίνει

$$\nabla^2 y=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow e^{-i\omega t}\nabla^2\left(f(r)e^{ikr}\right)=\frac{-\omega^2}{c^2}e^{-i\omega t}f(r)e^{i(kr)} \Rightarrow \nabla^2\left(f(r)e^{ikr}\right)=\frac{-\omega^2}{c^2}f(r)e^{i(kr)},$$

οπότε, ορίζοντας ως $k^2\equiv(\omega/c)^2$, έχουμε $\nabla^2\left(f(r)e^{ikr}\right)+k^2 f(r)e^{i(kr)}=0$

Αντικαθιστώντας την Λαπλασιανή σε σφαιρικές συντεταγμένες, και λαμβάνοντας υπόψη μας ότι οι γωνιακές παράγωγοι $\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}$ είναι μηδέν λόγω της σφαιρικής συμμετρίας, έχουμε:

$$\nabla^2\left(f(r)e^{ikr}\right)+k^2 f(r)e^{i(kr)}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(f(r)e^{ikr}\right)+k^2 f(r)e^{i(kr)}=0 \qquad (1)$$

(β) Μετασχηματίζουμε το ακτινικό κομμάτι της Λαπλασιανής

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right)=\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial\left(r^2\right)}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right]=\frac{1}{r^2}\left[2r\frac{\partial F}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right]=\frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \qquad (2)$$

και αντικαθιστούμε όπου $F=f(r)e^{i(kr)}$ για να υπολογίσουμε τους δύο όρους

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(f(r)e^{ikr}\right)=\frac{\partial f}{\partial r}e^{ikr}+\left(ik\right)f(r)e^{ikr}=\left[\frac{\partial f}{\partial r}+\left(ik\right)f(r)\right]e^{ikr} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(f(r)e^{ikr}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial r}+\left(ik\right)f(r)\right]e^{ikr}\right)=e^{ikr}\frac{\partial}{\partial r}\left(\left[\frac{\partial f}{\partial r}+\left(ik\right)f(r)\right]\right)+\left(ik\right)\left[\frac{\partial f}{\partial r}+\left(ik\right)f(r)\right]e^{ikr}=$$

$$=e^{ikr}\left(\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\left(ik\right)\frac{\partial f}{\partial r}\right]\right)+\left(ik\right)\left[\frac{\partial f}{\partial r}+\left(ik\right)f(r)\right]e^{ikr}=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2\left(ik\right)\frac{\partial f}{\partial r}-k^2 f\right]e^{ikr}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(f(r)e^{ikr}\right)=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2\left(ik\right)\frac{\partial f}{\partial r}-k^2 f\right]e^{ikr} \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας τις (3), (4) στην (2) και το αποτέλεσμα στην (1) παίρνουμε:

$$\frac{2}{r}\left[\frac{\partial f}{\partial r}+\left(ik\right)f(r)\right]e^{ikr}+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+2\left(ik\right)\frac{\partial f}{\partial r}-k^2 f\right]e^{ikr}+k^2 fe^{i(kr)}=0\Rightarrow$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+2ik\left(\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r}f(r)\right)\right]e^{ikr}=0$$

Απαιτώντας να μηδενίζεται και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της τελευταίας παράστασης, έχουμε:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}=0 \quad (5a), \qquad \frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r}f(r)=0 \quad (5\beta)$$

Ολοκληρώνουμε την (5α), (χρησιμοποιώντας, αντίστροφα την (2)), και παίρνουμε:

$$(5a)\rightarrow\frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}=0\Rightarrow\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)=0\Rightarrow r^2\frac{\partial f}{\partial r}=C_1$$

$$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{C_1}{r^2}\Rightarrow f=\int\frac{C_1}{r^2}dr\Rightarrow f=-\frac{C_1}{r}+C_2$$

Αντικαθιστούμε την τελευταία σχέση στην (5β) και παίρνουμε:

$$(5\beta)\rightarrow\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r}f(r)=0\Rightarrow\frac{C_1}{r^2}-\frac{C_1}{r^2}+\frac{C_2}{r}=0\Rightarrow C_2=0\Rightarrow\boxed{f(r)=\frac{C}{r}}$$

Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε για την περίπτωση κυλινδρικής συμμετρίας

(γ) Αν λάβουμε υπόψη μας ότι η ένταση του κύματος, (ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας) είναι ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου του πλάτους, τότε, για λόγους διατήρησης της ενέργειας, θα πρέπει η ισχύς που διαρρέει κάθε κλειστή επιφάνεια με την

συμμετρία του συστήματος να είναι η ίδια (ανεξάρτητη από την έκταση της κλειστής επιφάνειας)
Στην περίπτωση της σφαιρικής συμμετρίας θα πρέπει

$$P=\left(y^{*}y\right)4\pi r^{2}=\sigma\tau\alpha\theta.\Rightarrow f^{2}4\pi r^{2}=\sigma\tau\alpha\theta.\Rightarrow \boxed{f=\frac{C}{r}}$$

Με ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε για την περίπτωση κυλινδρικής συμμετρίας

39. Γραμμή μεταφοράς αποτελείται από δύο παράλληλες μεταλλικές ταινίες μεγάλου μήκους, πλάτους b η κάθε μία, που βρίσκονται σε σταθερή απόσταση $a\,(a<<b)$, η μία από την άλλη. Μεταξύ των δύο ταινιών παρεμβάλλεται μονωτικό υλικό με διηλεκτρική σταθερά ε και μαγνητική διαπερατότητα μ. (α) Υπολογίστε την χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους $C_0=\frac{\Delta C}{\Delta l}$ και την αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους $L_0=\frac{\Delta L}{\Delta l}$. (β) Χρησιμοποιείστε τα αποτελέσματα από την Άσκηση 11 της 3^{ης} Σειράς Ασκήσεων (βλ. λύσεις στο mycourses) και υπολογίστε (β_1) την ταχύτητα διάδοσης ενός ηλεκτρικού σήματος μέσω της γραμμής μεταφοράς, και (β_2) την χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση της γραμμής μεταφοράς, (γ) Χρησιμοποιείστε τα αποτελέσματα και τα συμπεράσματα από την Άσκηση 8 της 3^{ης} Σειράς Ασκήσεων (βλ. λύσεις στο mycourses) και υπολογίστε την Ωμική αντίσταση που πρέπει να συνδέσουμε στον τερματισμό της γραμμής μεταφοράς, προκειμένου να μην έχουμε καθόλου ανακλώμενο κύμα, αν $b=10a$ και ανάμεσα στις μεταλλικές ταινίες παρεμβάλλεται μονωτικό υλικό με $\mu=\mu_0,\ \ \varepsilon=4\varepsilon_0$, όπου μ_0,ε_0, η μαγνητική διαπερατότητα και η διηλεκτρική σταθερά του κενού.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Θεωρούμε τμήμα μήκους Δl της γραμμής μεταφοράς.

Όσον αφορά στον υπολογισμό της χωρητικότητας ανά μονάδα μήκους $C_0=\frac{\Delta C}{\Delta l}$, το τμήμα μήκους Δl, ισοδυναμεί με δύο επίπεδους παράλληλους οπλισμούς, εμβαδού $S=\Delta l\cdot b$, οι οποίοι βρίσκονται σε απόσταση a μεταξύ τους, ενώ μεταξύ τους παρεμβάλλεται υλικό με διηλεκτρική σταθερά ε. επομένως η χωρητικότητα αυτού του τμήματος είναι :

$$\Delta C=\varepsilon\frac{\Delta l\cdot b}{a}\Rightarrow\boxed{C_0\equiv\frac{\Delta C}{\Delta l}=\varepsilon\frac{b}{a}}$$

Όσον αφορά στον υπολογισμό της αυτεπαγωγής ανά μονάδα μήκους $L_0=\frac{\Delta L}{\Delta l}$, το τμήμα μήκους Δl, ισοδυναμεί με δύο επίπεδους παράλληλους αγωγούς εύρους b. Όταν αυτοί οι αγωγοί διαρρέονται από ίσα και αντίθετα ρεύματα έντασης I, και επομένως, επιφανειακής πυκνότητας ρεύματος $J=\frac{I}{b}$, μπορούμε να θεωρήσουμε (επειδή $a<<b$ και, κατά μείζονα λόγο, το μήκος είναι πολύ μεγαλύτερο από το b), ότι το μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν εκτός των αγωγών και είναι $B=\mu J=\mu\frac{I}{b}$ στο χώρο μεταξύ των. Η μαγνητική ροή που διαρρέει την διατομή του τμήματος μήκους Δl (με εμβαδόν $S=a\Delta l$) είναι ίση με

$\Phi = S\,B = (a\Delta l)\left(\mu \frac{I}{b}\right) = \left(\mu \frac{a\Delta l}{b}\right) I = \Delta L \cdot I$, επομένως, η αυτεπαγωγή του Τμήματος είναι $\Delta L = \left(\mu \frac{a\Delta l}{b}\right) \Rightarrow \boxed{L_0 \equiv \frac{\Delta L}{\Delta l} = \mu \frac{a}{b}}$.

(β$_1$) Ταχύτητα διάδοσης $c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu \frac{a}{b} \varepsilon \frac{b}{a}}} \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}}$

(β$_2$) Αν $V = V_0 e^{i(kx-\omega t)}$ και $I = I_0 e^{i(kx-\omega t)}$ είναι οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης, όπου $\frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}$, τότε, από τις εξισώσεις πεδίου (βλ. Άσκηση 11, 3^{ης} Σειράς), έχουμε:

$$L_0 \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow L_0(-i\omega) I = -(ik)V \Rightarrow \frac{V}{I} = L_0 \frac{\omega}{k} = L_0 c = L_0 \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} \Rightarrow \boxed{\frac{V}{I} \equiv Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}}$$

$Z = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{\mu a/b}{\varepsilon b/a}} \Rightarrow Z = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, και για την περίπτωση που $b = 10a$ και ανάμεσα στις μεταλλικές ταινίες παρεμβάλλεται μονωτικό υλικό με $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = 4\varepsilon_0$, τελικά:

$$Z = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \Rightarrow Z = 0{,}1\sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = 0{,}05\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \Longrightarrow Z = 0{,}05 \cdot 376{,}7\Omega = 18{,}84\Omega.$$

40. Γραμμή μεταφοράς έχει τη μορφή ομοαξονικού καλωδίου που αποτελείται από ευθύγραμμους κυλινδρικούς φλοιούς, ακτίνων r_1 και r_2, αντίστοιχα, και αμελητέου πάχους, μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται μονωτικό υλικό με διηλεκτρική σταθερά ε και μαγνητική διαπερατότητα μ. Απαντήστε στα ίδια ερωτήματα με την προηγούμενη άσκηση, υποθέτοντας $r_1 = 0.9 r_2$.

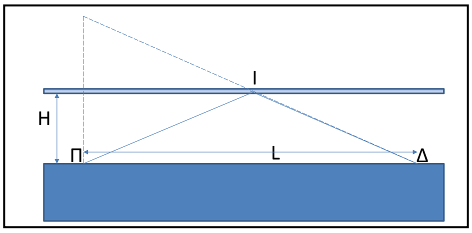
ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Θεωρούμε τμήμα μήκους Δl της γραμμής μεταφοράς.

Η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους υπολογίζεται: $C_0 = \frac{\Delta C}{\Delta l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(r_2/r_1\right)}$,

Η αυτεπαγωγή ανά μονάδα μήκους υπολογίζεται: $L_0 = \frac{\Delta L}{\Delta l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(r_2/r_1\right)$,

Τα κυματικά μεγέθη (ταχύτητα και σύνθετη αντίσταση) υπολογίζονται όπως στην προηγούμενη άσκηση.



41. Δέκτης ραδιοφωνικών κυμάτων λαμβάνει ταυτοχρόνως δύο σήματα. Το ένα σήμα προέρχεται κατ' ευθείαν από έναν πομπό ο οποίος απέχει 500 km. Το δεύτερο σήμα προέρχεται από το ίδιο πομπό μέσω ανάκλασής του σε τμήμα της ιονόσφαιρας το οποίο ευρίσκεται σε ύψος 200 km, από την επιφάνεια της γής. Οταν η συχνότητα του εκπεμπόμενου σήματος είναι 10 MHz, στον δέκτη παρατηρείται μία αργή αυξομείωση της έντασης με ρυθμό 6 πλήρης αυξομειώσεις σε ένα λεπτό. Υπολογίστε την κατακόρυφη συνιστώσα κίνησης της ιονόσφαιρας. Δεχθείτε ότι η επιφάνεια της Γης είναι επίπεδη και ότι η ιονόσφαιρα λειτουργεί, για το εκπεμπόμενο σήμα, ως ιδανικός ανακλαστήρας παράλληλος στην επιφάνειας της Γης.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αν Π και Δ ο πομπός και ο δέκτης, αντίστοιχα, και Ι το σημείο ανάκλασης στην ιονόσφαιρα, τότε η διαφορά οπτικού δρόμου ανάμεσα στην κατ' ευθείαν διαδιδόμενη και στην εξ' ανακλάσεως είναι : $\Delta(\mathrm{O\Delta}) = 2\sqrt{H^2 + (L/2)^2} - L$

Η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής των δύο διαδρομών είναι:

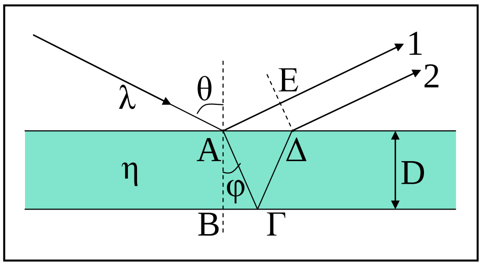
$$\Delta(\mathrm{O\Delta}) = n\lambda \Rightarrow \sqrt{(2H)^2 + L^2} - L = n\lambda$$

Αν μεταβάλλεται η απόσταση Η λόγω της κατακόρυφης συνιστώσας της κίνησης της ιονόσφαιρας, αλλάζει και η συνθήκη συμβολής

$$\frac{d}{dt}\left[\sqrt{(2H)^2 + L^2} - L\right] = \frac{dn}{dt}\lambda \Rightarrow \frac{1}{2}\left[(2H)^2 + L^2\right]^{-1/2} 2(2H)\frac{dH}{dt} = \frac{dn}{dt}\lambda \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = \frac{dn}{dt}\lambda \frac{\sqrt{(2H)^2 + L^2}}{2H}}$$

Όπου, στο δεξί σκέλος το Η μπορεί να ληφθεί περίπου σταθερό και ίσο με 200 km, ενώ το $\frac{dn}{dt} = 6\,\mathrm{min}^{-1}$, από τον ρυθμό αυξομείωσης της έντασης.



42. Μονοχρωματικό φως μήκους κύματος λ, πέφτει σε λεπτό φιλμ πάχους D, με δείκτη διάθλασης η. α) Δείξτε ότι η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής των δύο πρώτων ανακλάσεων, από την άνω και κάτω επιφάνεια του φιλμ, είναι $2D\eta\cos\varphi = (2k-1)\lambda/2$, όπου φ η γωνία διάθλασης στο εσωτερικό του φιλμ, και $k = 1, 2, \ldots$. β) Δείξτε ότι, αν το πλακίδιο φωτιστεί με πολυχρωματικό φως, η ποσοστιαία μεταβολή του παρατηρούμενου μήκους κύματος dλ/λ, γύρω από την γωνία εξωτερικής ανάκλασης των 45°, είναι ανάλογη της μεταβολής dθ της γωνίας παρατήρησης, και υπολογίστε το συντελεστή αναλογίας αν $\eta = \sqrt{2}$, (υποθέστε k=1).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Κατά την ανάκλαση των ακτίνων 1 και 2, η μεν 1 υφίσταται μία στιγμιαία μεταβολή φάσης κατά π, λόγω ανάκλασης σε οπτικά πυκνότερο μέσο, ενώ η 2 δεν υφίσταται ανάλογη μεταβολή φάσης, επειδή ανακλάται σε οπτικά αραιότερο μέσο. Αυτή η επιπλέον διαφορά φάσης ισοδυναμεί με διαφορά οπτικού δρόμου κατά λ/2, οπότε η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής των ακτίνων 1 και 2 είναι :

«διαφορά οπτικού δρόμου» = «περιττά πολλαπλάσια μισού μήκους κύματος».

Η διαφορά οπτικού δρόμου Δ(ΟΔ) των δύο ακτίνων είναι:

$$\eta(\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma\Delta}) - \mathrm{AE} = 2\eta\frac{D}{\cos\varphi} - \mathrm{AE} = \eta\frac{2D}{\cos\varphi} - \mathrm{A\Delta}\sin\theta$$

$$= \eta\frac{2D}{\cos\varphi} - 2\mathrm{B\Gamma}\sin\theta = \eta\frac{2D}{\cos\varphi} - 2D\tan\varphi\sin\theta$$

Αλλά, από το νόμο του Snell έχουμε $\sin\theta = \eta\sin\varphi$, οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\Delta(\text{ΟΔ}) = \eta\frac{2D}{\cos\varphi} - 2D\eta\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} \Rightarrow \Delta(\text{ΟΔ}) = \frac{2D\eta\left(1-\sin^2\varphi\right)}{\cos\varphi} \Rightarrow \Delta(\text{ΟΔ}) = 2D\eta\cos\varphi,$$

και η συνθήκη ενισχυτικής συμβολής γίνεται $\boxed{2D\eta\cos\varphi = (2k-1)\frac{\lambda}{2}}$

(β) $k=1 \Rightarrow 2D\eta\cos\varphi = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2D\eta\cos\varphi \Rightarrow d\lambda = -2D\eta\sin\varphi d\varphi \Rightarrow \frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}d\varphi$

Αλλά, αν $\eta = \sqrt{2}$ και $\theta = 45^o \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε

$\sin\theta = \eta\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\sin\theta}{\eta} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2}$, και $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Αντικαθιστώντας στην dλ/λ, έχουμε : $\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}d\varphi = -\frac{d\varphi}{\sqrt{3}}$

Από νόμο Snell $\sin\theta = \eta\sin\varphi \Rightarrow \cos\theta d\theta = \eta\cos\varphi d\varphi \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}d\theta = \sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2}d\varphi \Rightarrow d\varphi = \frac{d\theta}{\sqrt{3}}$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε $\boxed{\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{1}{3}d\theta}$

43. Χορδή μήκους L και μεταβλητής γραμμικής πυκνότητας $\rho = \rho(x)$ εκτείνεται κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα x, μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας. Στα κάτω άκρο της είναι προσδεμένη μάζα m. Να παράγετε τη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την διάδοση, κατά μήκος του x, μίας διαταραχής $y(x,t)$, (κάθετης στον άξονα της χορδής),

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Γράφουμε την εξίσωση κίνησης για ένα διαφορικό τμήμα dx της χορδής, που βρίσκεται σε απόσταση x από το σημείο ανάρτησης. Το τμήμα αυτό έχει διαφορική μάζα $dm = \rho(x)dx$. Σε κάθε σημείο x της χορδής, η τάση, λόγω ανάρτησης σε ομογενές πεδίο βαρύτητας, είναι ίση με το βάρος της υπόλοιπης χορδής, $T(x) = \int_x^L g dm = g\int_x^L \rho(x')dx'$.

Η διαφορική εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$\rho(x)dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_{o\lambda,y} = T(x+dx)\tan\theta(x+dx) - T(x)\tan\theta(x) =$$

$$= \left[T(x) + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right]\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{x+dx} - T(x)\tan\theta(x) =$$

$$= \left[T(x) + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right]\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx\right] - T(x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x =$$

$$= T(x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x + T(x)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)dx + \frac{\partial T}{\partial x}dx\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)(dx)^2 - T(x)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x =$$

Μετά τις αναγωγές όμοιων όρων και θεωρώντας αμελητέους όρους ανάλογους του $(dx)^2$,

έχουμε $$\rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T(x)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial T}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

η οποία είναι μία διαφορική χωρίς σταθερούς συντελεστές.

44. Θεωρήστε ιδανική χορδή μήκους L, με γραμμική πυκνότητα μάζας ρ, που τείνεται με τάση T, κατά μήκος του άξονα x. Το άκρο της $x=L$ είναι στερεωμένο σε ακίνητο στήριγμα, ενώ το άλλο άκρο, $x=0$, μπορεί να κινείται χωρίς τριβές επί του οριζόντιου άξονα y, με τη βοήθεια δακτυλιδιού μάζας m, στο οποίο ασκείται εξωτερική δύναμη $F_y=F_0\cos(\omega t)$, με ελεγχόμενη συχνότητα ω.

(α) Υποθέστε, για την χορδή, μόνιμη κατάσταση κίνησης, $y(x,t)=f(x)\cos(\omega t)$, και βρείτε την διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση $f=f(x)$, και τη γενική της λύση.

(β) Στη γενική λύση, που προκύπτει για την $f(x)$, από την διαφορική εξίσωση του ερωτήματος (α), εφαρμόστε τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες του προβλήματος και προσδιορίστε τις σταθερές της γενικής λύσης. [Στο $x=0$, υπολογίστε την συνολική δύναμη που επιταχύνει το δακτυλίδι].

(γ) Υποθέτοντας «απειρισμό» του πλάτους ταλάντωσης, προσδιορίστε τη συνθήκη υπολογισμού των συχνοτήτων συντονισμού του συστήματος, με τη μορφή $\tan\left[g(\omega)\right]=h(\omega)$, και προσδιορίστε τις συναρτήσεις $g(\omega), h(\omega)$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $$\left.\begin{cases}\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\\ y(x,t)=f(x)\cos(\omega t)\end{cases}\right\}\Rightarrow f''\cos(\omega t)=-\frac{\omega^2}{c^2}f\cos(\omega t)\Rightarrow f''+\frac{\omega^2}{c^2}f=0$$

Ορίζουμε : $k^2=\omega^2/c^2$, οπότε η γενική λύση της προηγούμενης διαφορικής γράφεται :

$$f(x)=A\sin(kx+\theta)$$

(β) Εφαρμόζουμε τις συνοριακές συνθήκες

Το άκρο $x=L$ είναι μονίμως ακίνητο : $f(x=L)=0\Rightarrow A\sin(kL+\theta)=0\Rightarrow \boxed{\theta=-kL}$

Στο άκρο $x=0$ υπάρχει σημειακή μάζα που επιταχύνεται από την συνισταμένη δύναμη που προκύπτει από την κάθετη στη χορδή προβολή της τάσης και από την εξωτερική δύναμη:

$$m\,\ddot{y}\big|_{x=0}=F+T\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=0}\Rightarrow -\omega^2 mA\sin(\theta)\cos(\omega t)=F_0\cos(\omega t)+kTA\cos(\theta)\cos(\omega t)$$

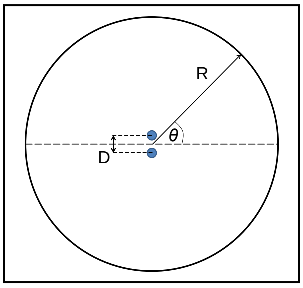
$$kTA\cos(\theta)+\omega^2 mA\sin(\theta)=-F_0\Rightarrow kTA\cos(-kL)+\omega^2 mA\sin(-kL)=-F_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left[kT\cos(kL)-\omega^2 m\sin(kL)\right]=-F_0\Rightarrow \boxed{A=\frac{F_0}{\omega^2 m\sin(kL)-kT\cos(kL)}}$$

(γ) Αν ορίσουμε ως συχνότητες συντονισμού εκείνες τις συχνότητες για τις οποίες, (για πεπερασμένο πλάτος διεγείρουσας δύναμης, $F_0\neq 0$), έχουμε απειρισμό του πλάτους ταλάντωσης, θα πρέπει

$$\omega^2 m\sin(kL) - kT\cos(kL) = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^2 m\sin(kL) = kT\cos(kL) \Rightarrow \tan(kL) = \frac{kT}{\omega^2 m} \Rightarrow \boxed{\tan\left(\omega\frac{L}{c}\right) = \frac{T}{cm\omega}}$$

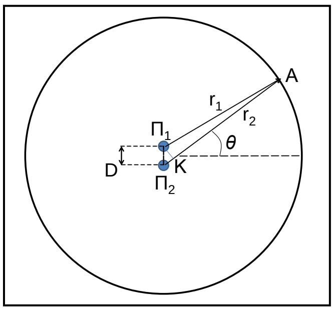


45. Δύο κεραίες εκπομπής σύμφωνης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, συχνότητας $f = 3MHz$, είναι τοποθετημένες, στο οριζόντιο επίπεδο, σε απόσταση $D = 100m$ μεταξύ τους, και εκπέμπουν, όσον αφορά στο οριζόντιο επίπεδο, με κυκλικά ομοιόμορφο τρόπο η κάθε μία. Μεταξύ των δύο κεραιών μπορεί να δημιουργηθεί ελεγχόμενη αρχική διαφορά φάσης $\Delta\varphi_0$. (α) Υπολογίστε την γωνιακή κατανομή $I = I(\theta)$ της συνολικής έντασης στο οριζόντιο επίπεδο, ως συνάρτηση της γωνίας θ, σε σχέση με την μεσοκάθετο ως προς τις δύο πηγές, σε απόσταση $R >> D$, από το μέσον των δύο κεραιών, όταν η αρχική διαφορά φάσης τους είναι $\Delta\varphi_0 = \pi$, και προσδιορίστε τις γωνίες μέγιστης και ελάχιστης εκπομπής.

(β) Υπολογίστε την ελάχιστη κατάλληλη διαφορά φάσης που πρέπει να εισάγει κανείς μεταξύ των δύο κεραιών ώστε, επί του οριζόντιου επιπέδου, να κατευθύνει την μέγιστη εκπεμπόμενη ισχύ κατά μήκος της μεσοκαθέτου ως προς την ευθεία που συνδέει τις δύο κεραίες. Σε αυτή την περίπτωση, σε ποια γωνία καταγράφεται το επόμενο μέγιστο εκπομπής.

[Υποδείξεις: Θεωρήστε ότι η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι $c = 3\times10^8 ms^{-1}$, και κάντε τις κατάλληλες προσεγγίσεις, κατά τους υπολογισμούς, δεδομένου ότι $R >> D$]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 3Γ



Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, συχνότητα $f = 3MHz$, ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων $c = 3\times10^8 ms^{-1}$, και τη θεμελιώδη σχέση της κυματικής $c = f\lambda$ υπολογίζουμε το μήκος κύματος της ακτινοβολίας

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8 ms^{-1}}{3\times10^6 s^{-1}} \Rightarrow \boxed{\lambda = 100m}.$$ Άρα $\lambda = D$.

Θεωρούμε σημείο παρατήρησης Α, το οποίο απέχει από τις πηγές Π_1 και Π_2 αποστάσεις r_1 και r_2, αντίστοιχα. Επειδή οι πηγές είναι σύμφωνες, στο σημείο Α αθροίζονται τα πλάτη και η ένταση υπολογίζεται ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου του συνολικού πλάτους. Επειδή οι κεραίες εκπέμπουν με κυκλικά ομοιόμορφο τρόπο, στο οριζόντιο επίπεδο, το συνολικό πλάτος του κύματος στο σημείο Α είναι

$$E_{o\lambda} = E_1(r_1) + E_2(r_2) = \frac{E_0}{f(r_1)}e^{i(kr_1 - \omega t)} + \frac{E_0}{f(r_2)}e^{i(kr_2 - \omega t + \Delta\varphi_0)},$$ όπου

$f(r)$: αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση (του τύπου $\sim r^{-1}$, ή $\sim r^{-1/2}$, για σφαιρικά ή κυλινδρικά κύματα, αντίστοιχα).

Ο όρος kr στον παράγοντα φάσης των δύο οδευόντων σφαιρικών κυμάτων έχει τάξη μεγέθους $kr \approx \frac{2\pi}{\lambda}R = \frac{2\pi}{10^2 m}10^5 m \Rightarrow kr \approx 2\pi\times10^3$. Επομένως, οι μικρομεταβολές των r_1 και r_2, καθώς αλλάζει η γωνία θ, είναι αισθητές ως πολλαπλάσια του 2π. Αντίθετα, στους παρονομαστές των πλατών μπορεί να θεωρηθεί, με καλή προσέγγιση, ότι $f(r_1) \approx f(r_2) = f(r)$. Επίσης, με βάση την πολύ μεγάλη απόσταση R του σημείου παρατήρησης σε σχέση με την απόσταση D των δύο πηγών, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η γωνία που σχηματίζουν και οι δύο αποστάσεις r_1 και r_2 με την μεσοκάθετο στις πηγές είναι περίπου ίδια και ίση με θ. Με βάση τις προηγούμενες προσεγγίσεις, αν φέρουμε την Π_1Κ κάθετο στην Π_2Α έχουμε $r_2 \approx r_1 + \Pi_2\mathrm{K} = r_1 + D\sin\theta$, και αυτό για τον υπολογισμό των παραγόντων φάσης μόνο, σύμφωνα με τα παραπάνω, οπότε:

$$E_{ολ} = \frac{E_0}{r_1} e^{i(kr_1-\omega t)} + \frac{E_0}{r_2} e^{i(kr_2-\omega t)} \approx \frac{E_0}{R} e^{-i(\omega t)}\left(e^{i(kr_1)} + e^{i(kr_2+\Delta\varphi_0)}\right) \approx \frac{E_0}{R} e^{i(kr_1-\omega t)}\left(1+e^{i\left[k(r_2-r_1)+\Delta\varphi_0\right]}\right)$$

Αντικαθιστούμε την διαφορά $r_2 - r_1 \approx D\sin\theta$ και διαμορφώνουμε την παράσταση ως εξής

$$E_{ολ} \approx \frac{E_0}{R} e^{i(kr_1-\omega t)}\left(1+e^{i[kD\sin\theta+\Delta\varphi_0]}\right) = \frac{E_0}{R} e^{i\left(kr_1+k\frac{D}{2}\sin\theta-\omega t+\Delta\varphi_0/2\right)}\left(e^{i\left[k\frac{D}{2}\sin\theta+\Delta\varphi_0/2\right]} + e^{-i\left[k\frac{D}{2}\sin\theta+\Delta\varphi_0/2\right]}\right) =$$

$$= \frac{2E_0}{R} e^{i\left(kr_1+k\frac{D}{2}\sin\theta-\omega t+\Delta\varphi_0/2\right)}\left(\frac{e^{i\left[k\frac{D}{2}\sin\theta+\Delta\varphi_0/2\right]} + e^{-i\left[k\frac{D}{2}\sin\theta+\Delta\varphi_0/2\right]}}{2}\right)$$

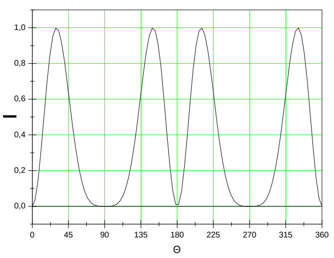
$$= \frac{2E_0}{R} e^{i\left(kr_1+k\frac{D}{2}\sin\theta-\omega t+\Delta\varphi_0/2\right)} \cos\left(k\frac{D}{2}\sin\theta+\Delta\varphi_0/2\right)$$

Η ένταση είναι ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου του συνολικού πεδίου

$$I \propto E^*_{ολ}E_{ολ} = \left(\frac{2E_0}{R}\right)^2 \cos^2\left(k\frac{D}{2}\sin\theta+\Delta\varphi_0/2\right)$$

Αντικαθιστώντας όπου $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ και $D = \lambda$ παίρνουμε

$$I \propto \frac{4E_0^2}{R^2}\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}\sin\theta+\Delta\varphi_0/2\right) \Rightarrow \boxed{I \propto \frac{4E_0^2}{R^2}\cos^2\left(\pi\sin\theta+\Delta\varphi_0/2\right)}$$



Επομένως, οι γωνίες ελάχιστης εκπομπής είναι κατά μήκος της μεσοκαθέτου στην ευθεία που ενώνει τις δύο κεραίες, θ=0° και θ=180°, αλλά και της ευθείας που ενώνει τις δύο κεραίες, θ=90° και θ=270°. Οι γωνίες μέγιστης εκπομπής είναι κατά μήκος των γωνιών θ=30° και θ=210° και θ=150° και θ=330°

Τα αποτελέσματα είναι αναμενόμενα, δεδομένου ότι οι δύο κεραίες έχουν αρχική διαφορά φάσης $\Delta\varphi_0 = \pi$ και επομένως, κατά μήκος της μεσοκαθέτου, εξακολουθούν τα δύο κύματα να έχουν διαφορά φάσης-π αφού διανύουν την ίδια απόσταση. Επίσης, κατά μήκος του άξονα που ενώνει της δύο κεραίες, η διαφορά φάσης μεταξύ των δύο κυμάτων είναι ίση με π (180°) αφού η μεταξύ τους απόσταση είναι ίση με ένα μήκος κύματος.

(γ) Για να κατευθύνουμε την μέγιστη εκπεμπόμενη ισχύ κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τις δύο κεραίες, πρέπει να έχουμε αρχική διαφορά φάσης $\Delta\varphi_0 = 0$, οπότε το επόμενο μέγιστο εκπομπής παρατηρείται στις 90^0, ως προς την μεσοκάθετο, αφού εκεί η διαφορά δρόμου είναι ίση ακριβώς με ένα μήκος κύματος.