2ο Φυλλάδιο ασκήσεων

① 4.Α.Ι. Η 1η ομάδα πρέπει να παίξει με τις υπόλοιπες 15

Η 2η ομάδα με τις υπόλοιπες 14

Η 3η ομάδα με τις υπόλοιπες 13

⋮

Η 15η ομάδα με τη μια εναπομείνουσα.

$$N = \sum_{i=1}^{15} i \cdot 2 = 120 \cdot 2 \Rightarrow N = 240 \text{ αγώνες}$$

4.Β.Β. Αν Ω ο χώρος πιθανοτήτων και A το ενδεχόμενο να νικήσουμε

$$|\Omega| = \frac{\binom{49}{6}}{6!} \quad \text{και} \quad |A| = 1 \Rightarrow P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$P[A] = \frac{6!}{\binom{49}{6}}$$

$$\binom{49}{6} = \frac{(49)_6}{6!}$$

$$P[A] = \frac{(6!)^2}{(49)_6}$$

4.3.9 Έστω Ω ο χώρος πιθανοτήτων. Με 0 συμβολίζουμε την εύκολη άσκηση και με 1 την δύσκολη.

$$|\Omega| = \binom{18}{6\,6\,6} = \frac{18!}{6!\,6!\,6!} = \frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{6}\cdot 7\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{10}\cdot 11\cdot\cancel{12}\cdot 13\cdot 14\cdot\cancel{15}\cdot\cancel{16}\cdot 17\cdot 18}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{6}\cdot 1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{6}\cdot 1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 4\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{6}}$$

$$|\Omega| = 7\cdot 11\cdot 13\cdot 14\cdot 4\cdot 17\cdot 18$$

Το ενδεχόμενο Α να μοιραστούν οι ασκήσεις — 1 εύκολη, 5 δύσκολες σε κάθε ομάδα έχει μέτρο $|A| = 1$.

$$P[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} \Rightarrow P[A] = \frac{(6!)^3}{18!}$$

② Έστω Ω ο χώρος των πιθανοτήτων.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7\}^4$$

$$|\Omega| = 7^4$$

β) Έστω B το ενδεχόμενο να κατέβουν τουλάχιστον 2 στον ίδιο όροφο.

$$B = \{(1,1,1,1), (1,1,1,7), \dots, (1,\cancel{7},7,7), \dots\}$$

$$|B| = 7^3$$

$$\mathbb{P}[B] = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{7^3}{7^4} \Leftrightarrow \underline{\mathbb{P}[B] = \frac{1}{7}}$$

α) Έστω K το ενδεχόμενο να κατέβουν όλοι στον ίδιο όροφο.

$$K = \{(1,1,1,1), (2,2,2,2), \dots, (7,7,7,7)\}$$

$$|K| = 7$$

τότε το K^c θα είναι όλα τα υπόλοιπα ενδεχόμενα τότε το Γ^c θα είναι όλα τα υπόλοιπα ενδεχόμενα

Ισχύει για το ενδεχόμενο Α και κατέβουν όλοι σε διαφορετικό όροφο

$$A = \Omega - B \Rightarrow \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[\Omega] - \mathbb{P}[B] \Leftrightarrow \mathbb{P}[A] = 1 - \frac{1}{7}$$

$$\underline{\mathbb{P}[A] = \frac{6}{7}}$$

γ) Έστω Γ το ενδεχόμενο να κατέβουν ακριβώς 2 στον ίδιο όροφο.

$$|\Gamma| = 7 \cdot 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6$$

$$\mathbb{P}[\Gamma] = \frac{|\Gamma|}{|\Omega|} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6}{7^4} \Rightarrow \underline{\mathbb{P}[\Gamma] = \frac{6^2}{7^3}}$$

δ) Έστω Δ η πιθανότητα να κατέβουν τουλάχιστον 2 στον ίδιο όροφο.

$$\Delta = B - \Gamma \Rightarrow \mathbb{P}[\Delta] = \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[\Gamma] = \frac{1}{7} - \frac{6^2}{7^3} = \frac{7^2 - 6^2}{7^3} = \frac{49 - 36}{7^3}$$

$$\underline{\mathbb{P}[\Gamma] = \frac{13}{7^3}}$$

② α) $n_1 = 52!$ τρόπους

β) Έστω Ω ο χώρος πιθανοτήτων

$$|\Omega| = \binom{52}{7}$$

Οι πιθανοί συνδυασμοί φύλλων (αποκλείοντας την ύπαρξη τετράδας) είναι

(i) $3+3+1$: ενδεχόμενο A

(ii) $3+1+1+1+1$: ενδ. B

(iii) $3+2+2$: ενδ. Γ

(iv) $3+2+1+1$: ενδ. Δ

(i) $|A| = 13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} \cdot 11 \cdot \binom{4}{1}$

(ii) $|B| = 13 \binom{4}{3} \cdot 12 \binom{4}{1} \cdot 11 \binom{4}{1} \cdot 10 \binom{4}{1} \cdot 9 \binom{4}{1}$

(iii) $|\Gamma| = 13 \binom{4}{3} \cdot 12 \binom{4}{2} \cdot 11 \binom{4}{2}$

(iv) $|\Delta| = 13 \binom{4}{3} \cdot 12 \binom{4}{2} \cdot 11 \binom{4}{1} \cdot 10 \binom{4}{1}$

Έστω E το ενδεχόμενο να έχουμε τουλάχιστον 3 φύλλα ίδια:

$$A \cup B \cup \Gamma \cup \Delta = E$$

$$\mathbb{P}[E] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[\Gamma] + \mathbb{P}[\Delta] = \frac{|A|+|B|+|\Gamma|+|\Delta|}{|\Omega|}$$

$$\mathbb{P}[E] = \frac{13^4 \cdot \binom{4}{3}^5 \cdot 12^4 \binom{4}{2}^2 \cdot 11^4 \binom{4}{1}^7 \cdot 10 \cdot 9}{\binom{52}{7}}$$

④ A. Έστω Ω ο χώρος πιθανοτήτων (δηλ. πιθανών μοιρασιών)

α) $|\Omega| = \binom{52}{13\ 13\ 13\ 13} = \frac{52!}{(13!)^4}$

β) Έστω A το ενδεχόμενο ένας παίκτης να έχει 4 άσσους. Τα υπόλοιπα φύλλα πρέπει να μοιραστούν, 9 τυχαία στον παίκτη αυτόν και 13 τυχαία σε καθέναν από τους άλλους 3.

$$|A| = \binom{48}{9\ 13\ 13\ 13} = \frac{48!}{9! \cdot (13!)^3}$$

γ) Αντίστοιχα για το ενδεχόμενο B να έχει κάθε παίκτης από έναν άσσο

$$|B| = \binom{48}{12\,12\,12\,12} = \frac{48!}{(12!)^4}$$

Β. Έστω Ω ο χώρος πιθανοτήτων.

$$|\Omega| = \binom{52}{7}$$

α) Πιθανά σενάρια:

(i) Α: $4+3$

(ii) Β: $4+2+1$

(iii) Γ: $4+1+1$

έστω Δ το σενάριο να μοιραστούν 4 ίδια

$$|\Delta| = |A| + |B| + |\Gamma| + |\Delta| = 13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3} + 13 \cdot 12 \binom{4}{2} + 11 \binom{4}{1} + 13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{1} \cdot 11 \binom{4}{1}$$

$$\mathbb{P}[\Delta] = \frac{|\Delta|}{|\Omega|} \to \mathbb{P}[\Delta] = \frac{13 \cdot 12 \binom{4}{3} + 13 \cdot 12 \binom{4}{2} + 11 \binom{4}{1} + 13 \cdot 12 \cdot 11 \binom{4}{1}^2}{\binom{52}{7}}$$

$$\mathbb{P}[\Delta] = \frac{|\Delta|}{|\Omega|} \Rightarrow \mathbb{P}[\Delta] = \frac{13\cdot 12\binom{4}{3} + 13\cdot 12\binom{4}{2} + 11\binom{4}{1} + 13\cdot 12\cdot 11\binom{}{1}}{\binom{52}{7}}$$

β) Πιθανά σενάρια:

(i) $A: 3+3+1$

(ii) $B: 3+2+1+1$

(ii) $\Gamma: 3+2+2$

(iv) $\Delta: 3+1+1+1+1$

έστω E το σενάριο να μοιραστούν ακριβώς 3 ίδια φύλλα

$$|E| = |A| + |B| + |\Gamma| + |\Delta| =$$

$$= 13\binom{4}{3}\cdot 12\binom{4}{3} + 11\binom{4}{1} + 13\binom{4}{3} + 12\binom{4}{2}\cdot 11\binom{4}{1}\cdot 10\binom{4}{1} + 13\binom{4}{3}\cdot 12\binom{4}{2}\cdot 11\binom{4}{2} +$$

$$+ 13\binom{4}{3}\cdot 12\binom{4}{1}\cdot 11\binom{4}{1}\cdot 10\binom{4}{1}$$

$$\mathbb{P}[E] = \frac{|E|}{|\Omega|} \Rightarrow \mathbb{P}[E] = \frac{13\cdot 12\cdot 11\binom{4}{3}\left[\binom{4}{3}\binom{4}{1} + \binom{4}{2}\binom{4}{1}^2\cdot 10 + \binom{4}{2}^2 + \binom{4}{1}^3\cdot 10\right]}{\binom{52}{7}}$$

γ) Έστω Α το ενδεχόμενο να έχουμε 7 φύλλα ίδιου χρώματος

$$|A| = 4 \cdot \binom{13}{7}$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} \Rightarrow \mathbb{P}[A] = \frac{4 \cdot \binom{13}{7}}{\binom{52}{7}}$$

⑥ Έστω ότι τα ζευγάρια αποτελούνται από άντρες και γυναίκες

$$|\Omega| = \binom{8}{2\,2\,2\,2} = \frac{8!}{(2!)^4} = \frac{1 \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{4} \cdot 5 \cdot \cancel{6}^{3} \cdot 7 \cdot 8}{2^{\cancel{3}} \cdot \cancel{2}} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = (7)_5$$

Έστω Α το ενδεχόμενο να μην είναι κανείς με το ζευγάρι του.

Πιθανές επιλογές

$1_Γ 1_Α \rightarrow 1_Γ$ < $2_Α$, $3_Α$, $4_Α$

$2_Γ 2_Α \rightarrow 2_Γ$ < $1_Α$, $3_Α$, $4_Α$

$3_Γ 3_Α \rightarrow 3_Γ$ < $1_Α$, $2_Α$, $4_Α$

$4_Γ 4_Α \rightarrow 4_Γ$ < $1_Α$, $2_Α$, $3_Α$

$1_Γ - 2_Α$
- $\rightarrow 2_Γ - 1_Α \rightarrow 3_Γ - 4_Α \rightarrow 4_Γ - 3_Α$
- $\rightarrow 2_Γ - 4_Α \rightarrow 3_Γ - 1_Α \rightarrow 4_Γ - 3_Α$

$1_Γ - 3_Α$
- $\rightarrow 2_Γ - 1_Α \rightarrow 3_Γ - 4_Α \rightarrow 4_Γ - 2_Α$
- $\rightarrow 2_Γ - 4_Α \rightarrow 3_Γ - 2_Α \rightarrow 4_Γ - 1_Α$

$1_Γ - 4_Α$
- $\rightarrow 2_Γ - 1_Α \rightarrow 3_Γ - 2_Α \rightarrow 4_Γ - 3_Α$
- $\rightarrow 2_Γ - 3_Α$
  - $\rightarrow 3_Γ - 1_Α \rightarrow 4_Γ - 2_Α$
  - $\rightarrow 3_Γ - 2_Α \rightarrow 4_Γ - 1_Α$

$$1_Γ-4_Α \to \begin{cases} 2_Γ-1_Α \to 3_Γ-2_Α \to 4_Γ-3_Α \\ 2_Γ-3_Α \to \begin{cases} 3_Γ-1_Α \to 4_Γ-2_Α \\ 3_Γ-2_Α \to 4_Γ-1_Α \end{cases} \end{cases}$$

$$4_Γ 4_Α \longrightarrow 4_Γ < \begin{matrix} 1_Α \\ 2_Α \\ 3_Α \end{matrix}$$

συνεπώς $|A| = 7$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7}{(7)_5} \Rightarrow \mathbb{P}[A] = \frac{1}{(6)_4}$$

(7) α) $\Omega = \{1,2,3,4\}^6$

$|\Omega| = 4^6$

β)

1º ξενοδοχείο	2º ξενοδοχείο	3º ξενοδοχείο	4º ξενοδοχείο
παρουσία	παρουσία	παρουσία	
παρουσία	παρουσία		παρουσία
παρουσία		παρουσία	παρουσία
	παρουσία	παρουσία	παρουσία

Το πλήθος των πιθανών ζευγαριών είναι 6.5.6 και υπάρχουν 4 τρόποι κατανομής στα ξενοδοχεία. Αν Α το σενάριο να συναντηθούν ανά ζεύγη, τότε

$|A| = 6^2.5.4$

Scanné avec CamScanner

$$\mathbb{P}[A] = \frac{4\cdot 5\cdot 6^2}{4^6} = \frac{5\cdot 6^2}{4^5} \Rightarrow \mathbb{P}[A] = \frac{45}{4^4}$$

γ)

1ο ξενοδοχείο	2ο ξενοδοχείο	3ο ξενοδοχείο	4ο ξενοδοχείο
ζεύγος	ζεύγος	solo	solo
ζεύγος	solo	ζεύγος	solo
ζεύγος	solo	solo	ζεύγος
solo	ζεύγος	solo	ζεύγος
solo	solo	ζεύγος	ζεύγος
solo	ζεύγος	ζεύγος	solo

↳ οι πιθανές κατανομές είναι 6.

Πιθανά ζεύγη: $\frac{6!}{2^2}$

Έστω B το ενδεχόμενο να συναντηθούν 2-2-1-1

$$|B| = 6\cdot\frac{6!}{2^2} = \frac{3\cdot 6!}{2}$$

$$\mathbb{P}[B] = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3\cdot 6!/2}{4^6} \Rightarrow \mathbb{P}[B] = \frac{3\cdot 6!}{2\cdot 4^6}$$

⑤ α) $|\Omega| = k!$

Θεωρούμε τις θέσεις αριθμημένες από 1 ως k, τα πιθανά ενδεχόμενα είναι:

- ✓ $A=1$ και $B=k$
- ✓ $A=k$ και $B=1$
- ✓ $A,B \in \{2,\dots,k-1\}$ με $|A-B|=1$
- ✓ $A=1$ και $B=2$
- ✓ $A=2$ και $B=1$

γ) Στην 3 περίπτωση, υπάρχουν $2k^*$ πιθανές διατάξεις ώστε $|A-B|=1$ (k^* για $A>B$ και επιπλέον k^* για $A<B$), όπου $k^* = k-2$
Συνολικά, οι $A-B$ έχουν $2(k-2)+4 = 2k$ πιθανές διατάξεις στις οποίες κάθονται δίπλα. Για καθεμία από αυτές, οι υπόλοιποι $(k-2)$ καθήμενοι έχουν $(k-2)!$ πιθανές διατάξεις. Έτσι, για το ενδεχόμενο A, οι A και B να βρεθούν σε διπλανές θέσεις, ισχύει: $|A| = 2k\cdot(k-2)!$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2k\cdot(k-2)!}{k!} = \frac{2\cancel{k}\cancel{(k-2)!}}{\cancel{(k-2)!}\,(k-1)\cdot\cancel{k}} \Rightarrow \mathbb{P}[A] = \frac{2}{k-1}$$

β) Όμοια με το ερώτημα (α), τα σενάρια στα οποία οι A-B κάθονται δίπλα, είναι

✓ $A=1$ και $B=2$

✓ $A=2$ και $B=1$

✓ $A, B \in \{2, \ldots, k-1\}$ με $|A-B|=1$

Συνεπώς για το ενδεχόμενο B, οι A και B να βρεθούν σε διπλανές θέσεις, ισχύει:

$|B| = [2(k-2)+2] \cdot (k-2)! = 2(k-1)\cdot(k-2)!$

$P[B] = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2\cancel{(k-1)}\cancel{(k-2)!}}{\cancel{(k-2)!}\cancel{(k-1)}k} \Rightarrow P[B] = \frac{2}{k}$