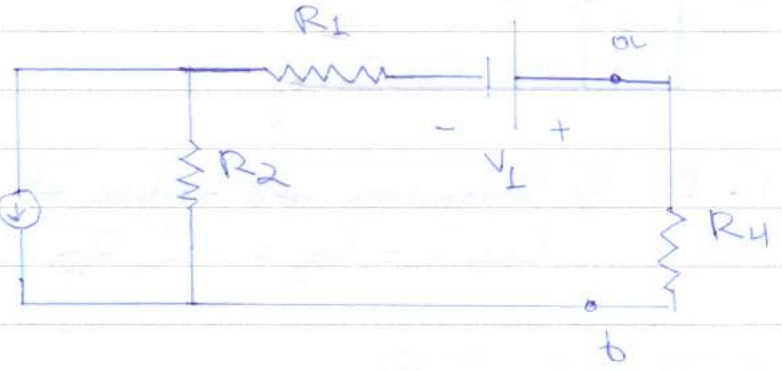
Όνομα: Παναγιώτης
Επώνυμο: Γιαννούλης
Ημ:
ΑΜ: 03117812

Ηλεκτρονική Ι / 1η Σειρά Ασκήσεων

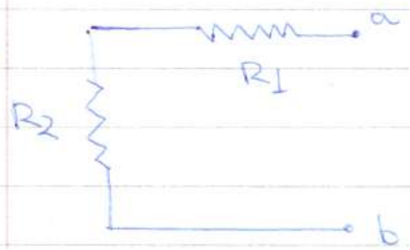
Άσκηση 1

1)



(i) Για την εύρεση της ισοδύναμης αντίστασης ανοιχτοκυκλώνουμε I_2 και βραχυκυκλώνουμε την V_1.

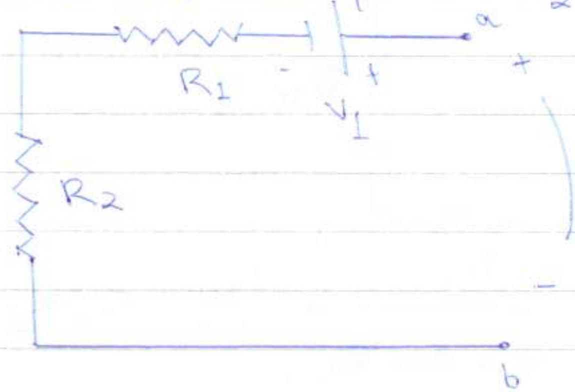
⇒



$$R_{TH} = R_1 + R_2$$

(ii) Για την εύρεση της V_{TH} θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαλληλίας.

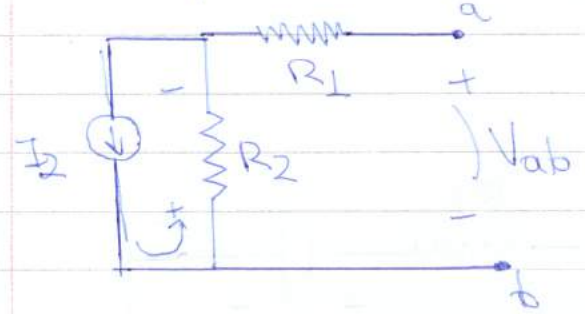
Ανοιχτοκυκλώνουμε την I_2:



V_{ab}

Οι R_1, R_2 δε διαρρέονται από ρεύμα οπότε
$V_{ab} = V_1 = V_{TH/1}$

Έπειτα βραχυκυκλώνουμε την V_1:



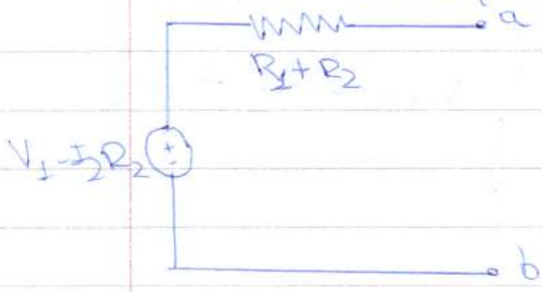
Η R_1 δε διαρρέεται από ρεύμα $\Rightarrow$

$$V_{ab} = -V_{R_2} = -I_2 R_2$$

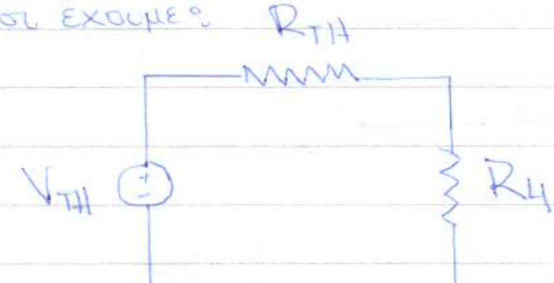
$$\Rightarrow V_{TH}/_2 = -I_2 R_2$$

Τελικά: $\boxed{V_{TH} = V_1 - I_2 \cdot R_2}$

Έτσι, το ισοδύναμο Thevenin είναι:



2) Έτσι έχουμε:

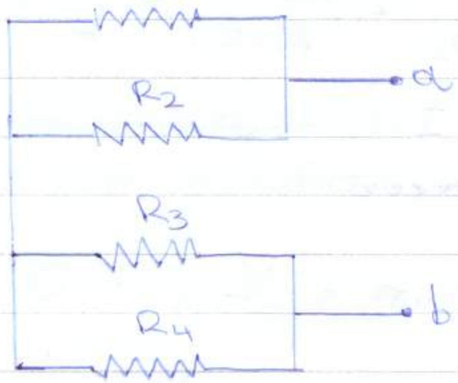


$$V_L = \frac{R_L}{R_{TH} + R_L} V_{TH} = \frac{R_L}{R_1 + R_2 + R_L} \cdot (V_1 - I_2 R_2) \Rightarrow$$

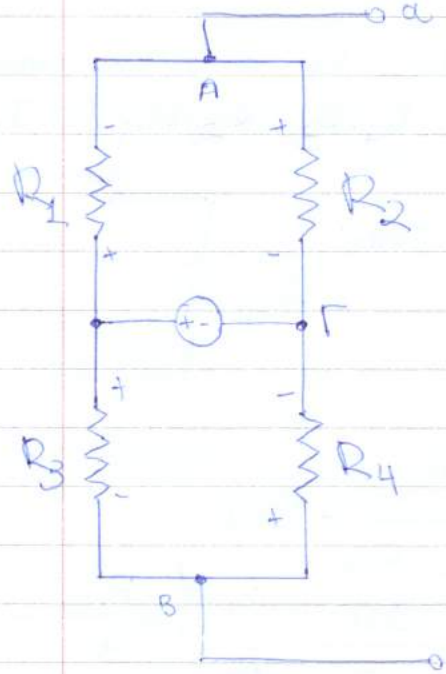
$$\Rightarrow \text{και} \quad i_L = \frac{V_L}{R_L} \Rightarrow \boxed{i_L = \frac{V_1 - I_2 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_L}}$$

Άσκηση 2

1) Βρίσκουμε την ισοδύναμη αντίσταση βραχυκυκλώνοντας την V_b.



$$R_{TH} = R_1 // R_2 + R_3 // R_4 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$$



$$V_{TH} = V_{A\Gamma} + V_{\Gamma B}$$

Οι R_1, R_2 είναι σε σειρά $\Rightarrow$

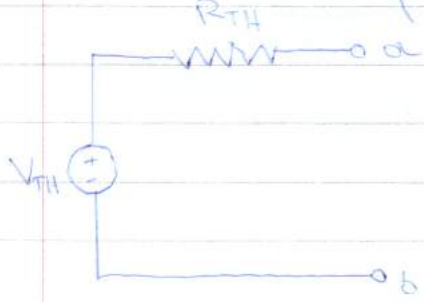
$$V_{A\Gamma} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V_b$$

και οι R_4, R_3 είναι σε σειρά $\Rightarrow$

$$V_{B\Gamma} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot V_b$$

Τελικά: $V_{\Gamma B} = - V_{B\Gamma} \Rightarrow V_{\Gamma B} = - \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_b$

Οπότε: $V_{TH} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) V_b$

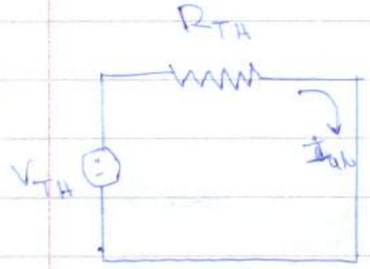


2) Για το ισοδύναμο Norton προφανώς η ισοδύναμη αντίσταση είναι η ίδια ⇒

$$R_{TH} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$$

Για να βρούμε το I_{ab} πηγαίνουμε στο ισοδύναμο Thevenin και βραχυκυκλώνουμε τους a, b ακροδέκτες

⇒



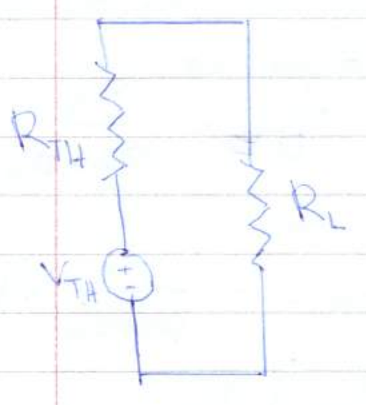
Όμως: $V_{TH} = 0 \Rightarrow$

$$I_{ab} = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = 0$$

Αυτό επιβεβαιώνεται εύκολα και από την ισορροπία της γέφυρας Wheatstone : $R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4 \Rightarrow I_{ab} = 0$.

Οπότε το ισοδύναμο Norton είναι:

3) Έχουμε:



$$V_L = \frac{R_L}{R_L + R_{TH}} \cdot V_{TH}$$

$$\Rightarrow V_L = \frac{10}{10 + \frac{2}{3} + \frac{12}{7}} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\right) \cdot 20\,V$$

$$= \frac{10}{\frac{210+14+36}{21}} \left(\frac{14-12}{21}\right) \cdot 20\,V =$$

$$= \frac{10}{260} \cdot 40\,V = \frac{40\cancel{0}}{26\cancel{0}}\,V$$

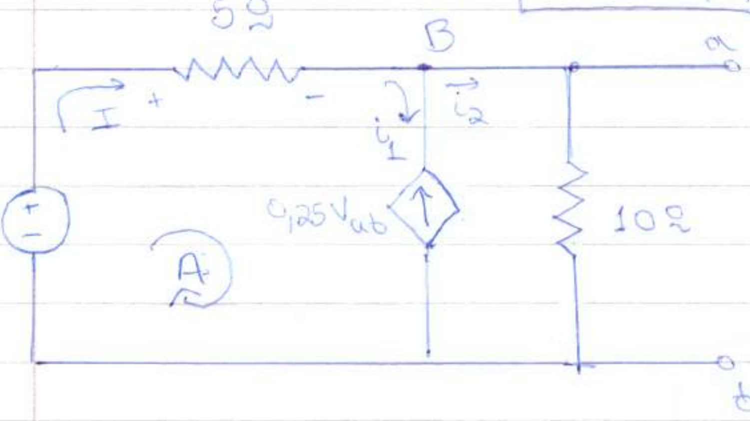
$$\Rightarrow \boxed{V_L = \frac{20}{13}\,V}$$

Άσκηση 3

1)

Βήμα 1ο

Για την εύρεση του ισοδύναμου Thevenin, επειδή έχουμε συνδυασμό εξαρτημένης και ανεξάρτητης πηγής αρχικά ανοιχτοκυκλώνουμε τους κόμβους a, b βρίσκουμε το V_{ab} και στη συνέχεια βραχυκυκλώνοντας τους a, b βρίσκουμε το $i_{ab} = i_{βρ}$



(1) $i_1 = -0{,}25 V_{ab}$

(2) $5I + V_{ab} = 30$ (Ν.Τ.Κ στον βρόχο A)

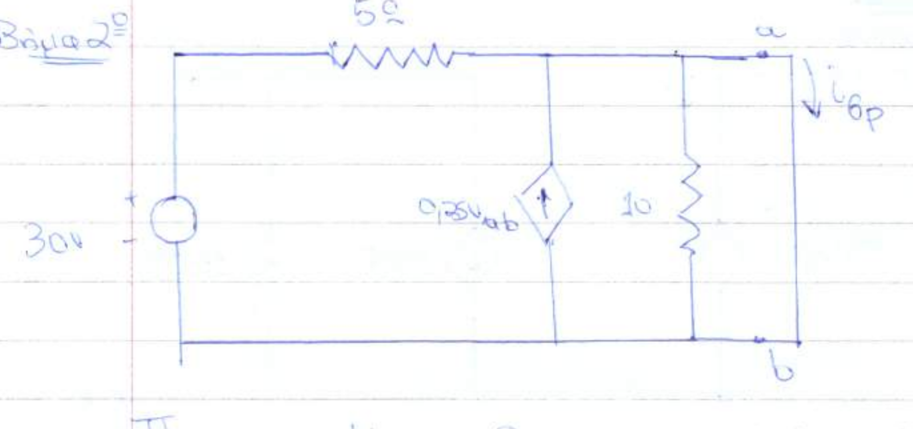
(3) $V_{ab} = 10 i_2$

(4) $I = i_1 + i_2$ (Ν.Ρ.Κ στον κόμβο B)

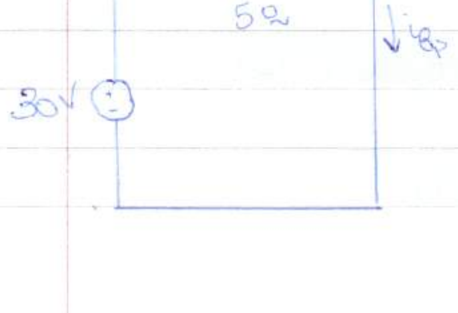
Άρα από (2,3,4): $5i_1 + 5i_2 + V_{ab} = 30$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} -\frac{5}{4}V_{ab} + 5\cdot\frac{V_{ab}}{10} + V_{ab} = 30 \Rightarrow \boxed{V_{ab} = 120V}$$

Βήμα 2ο



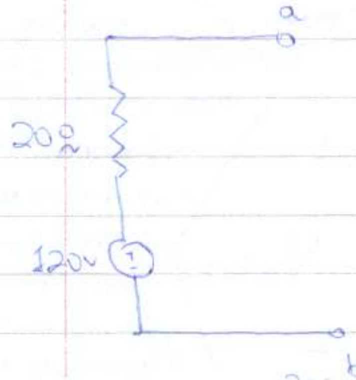
Προφανώς $V_{ab} = 0 \Rightarrow 0{,}25 \cdot V_{ab} = 0$. Τελικά έχουμε:



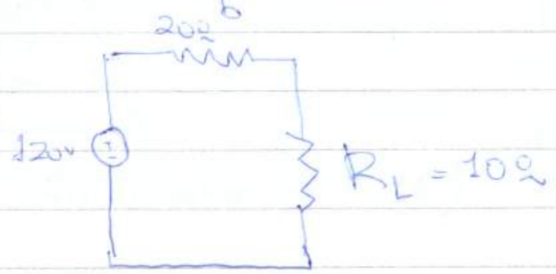
Άρα: $i_{βρ} = \frac{30}{5} A = 6A$

οπότε $R_{TH} = \frac{120}{6}\Omega = 20\Omega$

Έτσι, το ισοδύναμο Thevenin είναι:



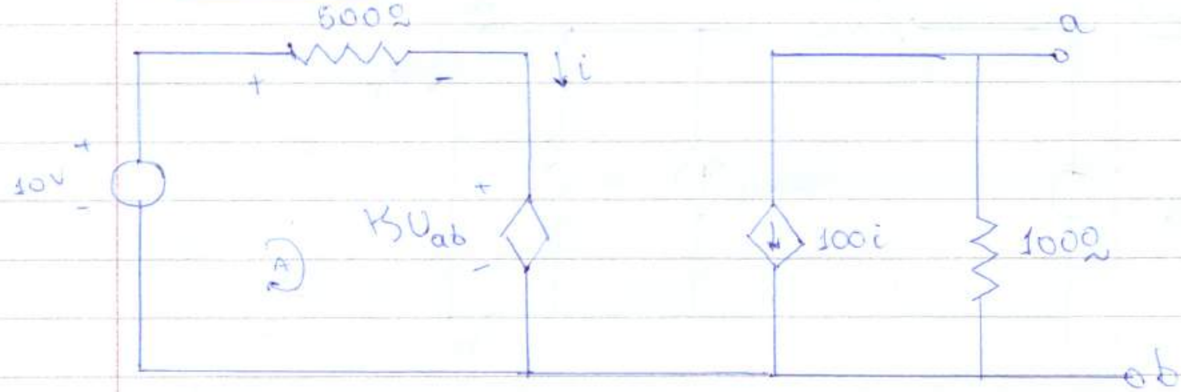
2)



- $V_L = \frac{R_L}{R_L + 20} V \Rightarrow V_L = \frac{10}{30} \cdot 120V \Rightarrow V_L = 40V$

Άρα: $\boxed{i_L = 4\ A}$

Άσκηση 4



- Ν.Τ.Κ στον Α: $500i + KU_{ab} = 10$ (1)

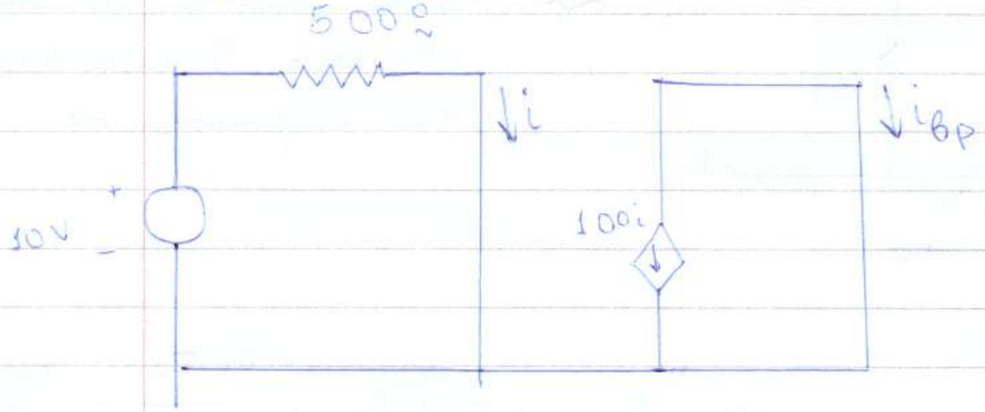
- $V_{ab} = -100 \cdot 100i = -10000\,i$ (2)

(1,2): $-\frac{5}{100} V_{ab} + K U_{ab} = 10$

→ Για κ=0 : $\boxed{V_{ab} = -200V}$

→ Για κ=0,1 : $V_{ab}\left(\frac{10}{100}-\frac{5}{100}\right) = 10$

$\Rightarrow \boxed{V_{ab} = 200V}$

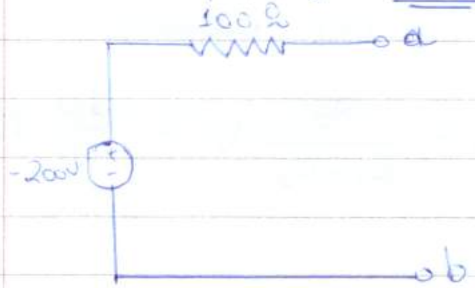


▷ $i_{βρ} = -100i$

▷ $i = \frac{10}{500}A = 0,02A$

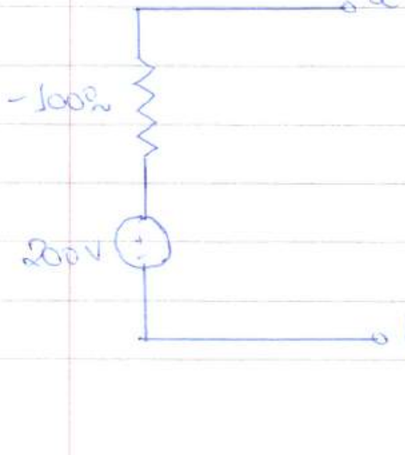
$\left.\right\} \boxed{i_{βρ} = -2A}$

1) Έτσι, έχουμε, για κ=0 :



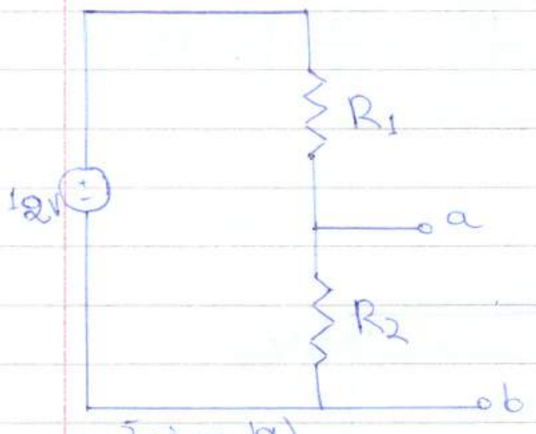
$R_{TH} = \frac{V_{ab}}{i_{βρ}} = \frac{-200}{-2}Ω = 100Ω$

2) Για κ=0,1 :



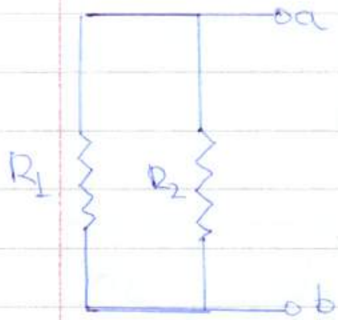
$R_{TH} = \frac{V_{ab}}{i_{βρ}} = \frac{200}{-2}Ω = -100Ω$

Ασκηση 5



$\rightsquigarrow$ Για την εύρεση του ισοδύναμου Thevenin βραχυκυκλώνουμε την πηγή τάσης $\Rightarrow$

Σχήμα (α)



$$\Rightarrow \quad R_{TH} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{200}{30} K\Omega \Rightarrow$$

$$R_{TH} = \frac{20}{3} K\Omega$$

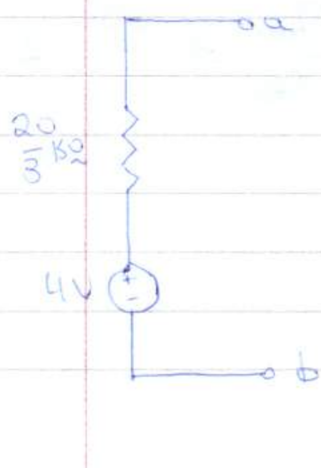
Σχήμα (β)

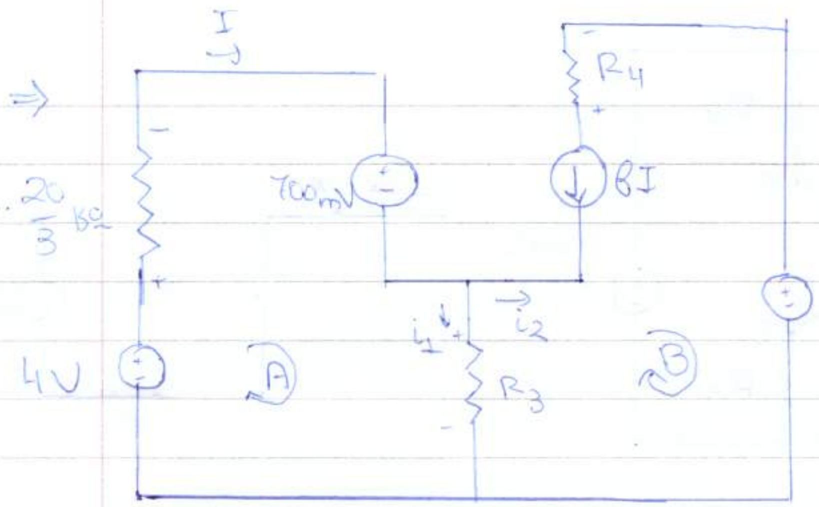
Τώρα, όσον αφορά το σχήμα (α), βλέπουμε ότι οι R_1, R_2 είναι σε σειρά, οπότε ισχύει:

$$V_{TH} = V_{ab} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot V = \frac{10}{30} \cdot 12V$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{TH} = 4\ V}$$

Επομένως το ισοδύναμο Thevenin είναι:





N.T.K. στον A: $\frac{20}{3} I \cdot 10^3 + 700 \cdot 10^{-3} + i_1 R_3 = 4$ (1)

N.T.K. στον B: $i_2 R_4 + 12 - i_1 R_3 = 0$ (2)

N.P.K.: $i_1 + i_2 = I$ και $i_2 = -\beta I$ $\Big\}$ $i_1 = I(\beta+1) \Rightarrow i_1 = 51 \cdot I$ (3)

(1,3): $\frac{20}{3} I \cdot 10^3 + 0,7 + 3\,10^3 \cdot 51 \cdot I = 4$

$\Rightarrow 20 \cdot 10^3 I + 2,1 + 3.000 \cdot 51 \cdot I = 12$

$\Rightarrow I = \frac{9,9}{173 \cdot 10^3} A \Rightarrow I = \frac{9,9}{173} mA = 0,057 mA$

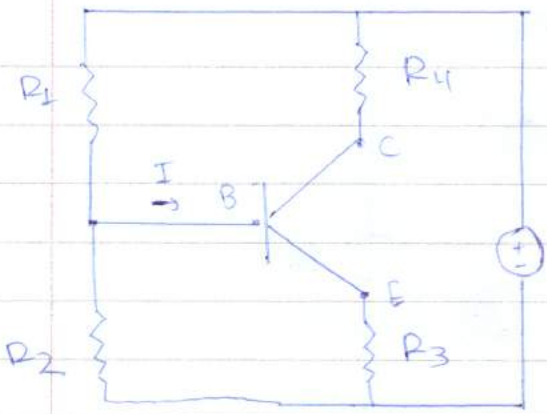
Οπότε $V_4 = R_4 \cdot 50 I \Rightarrow V_4 = 2 \cdot 0,057 \cdot 50 V$

$\Rightarrow \boxed{V_4 = 5,7 V}$

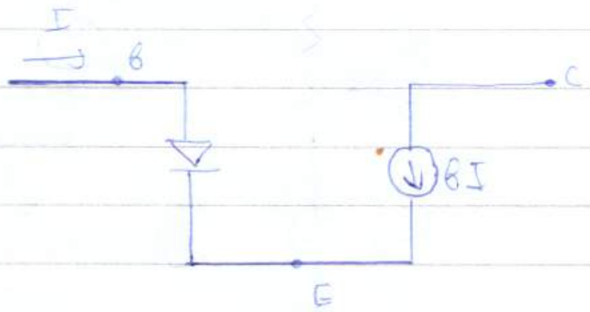
Λειτουργία του Κυκλώματος:

~~Είναι~~ +

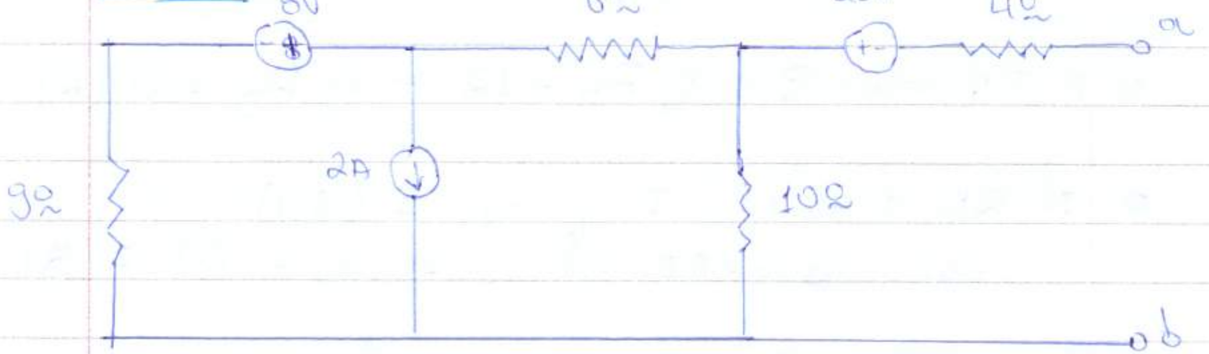
Ουσιαστικά, παρατηρούμε, ότι είναι ένα ισοδύναμο κύκλωμα ενισχυτή με διπολικό τρανζίστορ BJT στο οποίο εισέρχεται ρεύμα έντασης I και ρέει ρεύμα έντασης 50I και 51I.



και

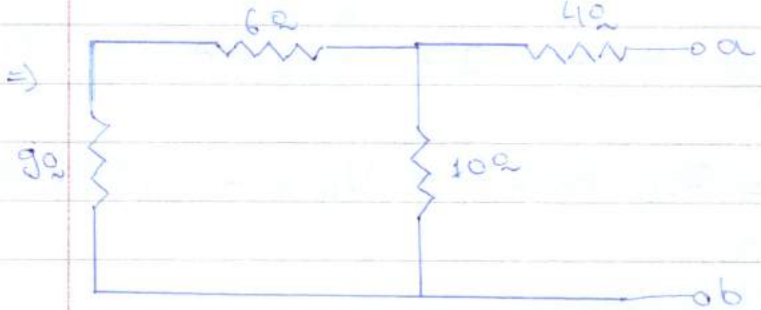


Άσκηση 6



▷ Για να υπολογίσουμε την ισοδύναμη αντίσταση βραχυκυκλώνουμε τις πηγές τάσης και ανοιχτοκυκλώνουμε τις πηγές ρεύματος.

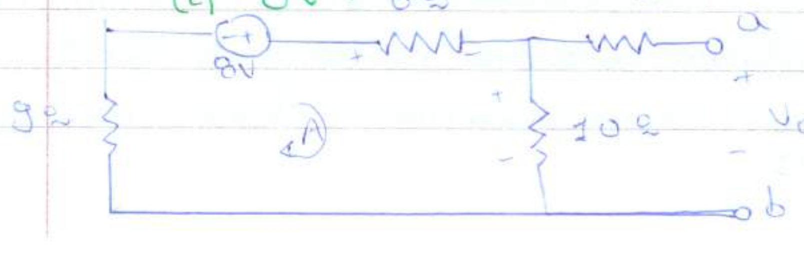
⇒



$$R_{TH} = (9+6)\,||\,10 + 4 = \frac{15 \cdot 10}{15+10} + 4 = \frac{150}{25} + 4 = 10\,\Omega$$

Για τον υπολογισμό του V_{TH} θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της επαλληλίας:

(i) 8V :



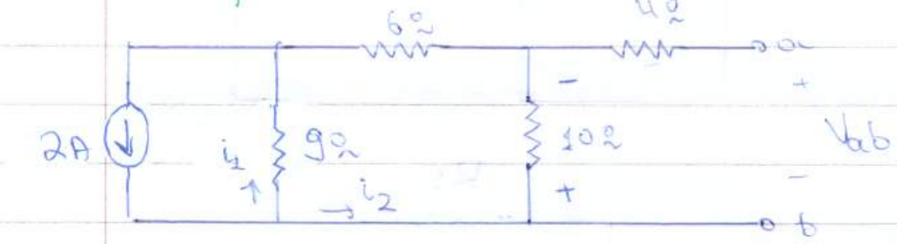
Ν.Τ.Κ. στον Α: $6i + 10i + 9i = 8$

$\Rightarrow 25i = 8 \Rightarrow i = \frac{8}{25}A$

Η αντίσταση 4Ω δε διαρρέεται από ρεύμα

Άρα: $V_{ab}/_1 = 10 \cdot \frac{8}{25} = \frac{16}{5}V$

(ii) 2A:

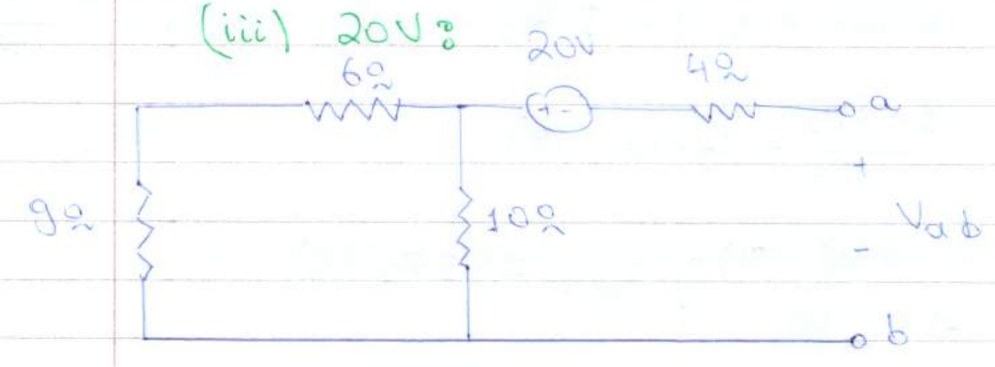


Η 4Ω δε διαρρέεται από ρεύμα $\Rightarrow$

$$i_2 = \frac{9}{10+6+9} \cdot 2\ A = \frac{18}{25}A$$

Άρα: $V_{10} = \frac{18}{25} \cdot 10\ V \Rightarrow V_{ab/2} = -V_{10} = -\frac{36}{5}V$

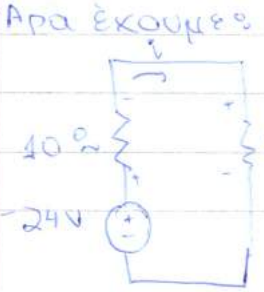
(iii) 20V:



Προφανώς: $V_{ab}/3 = -20V$

Άρα: $V_{TH} = \left(\frac{-36+16}{5} - 20\right)V = -24V$

Άρα έχουμε:



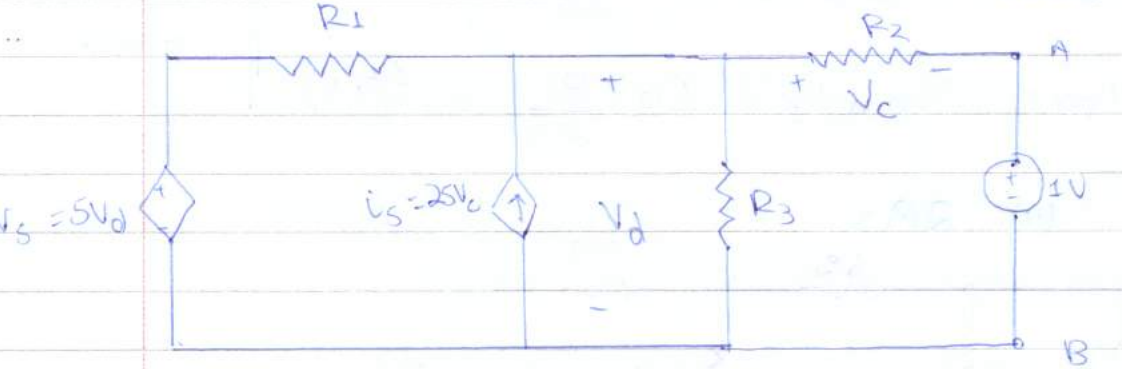
$\Rightarrow V_{14} = \frac{14}{24}(-24)V$

$\Rightarrow V_{14} = -14V$

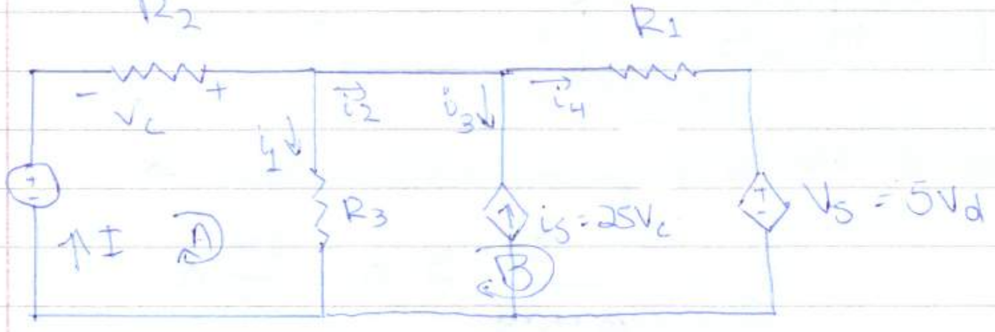
και άρα $\boxed{i = -1A}$

Άσκηση 7

▷ Για να βρούμε το ισοδύναμο Thevenin στα άκρα A, B επειδή έχουμε μόνο εξαρτημένες πηγές προσθέτουμε μία πηγή τάσης 1V στα AB και ψάχνουμε το i_{AB}



⇒



■ $I = i_1 + i_3 + i_4 \quad (1) \quad$ (Ν.Ρ.Κ)

■ Ν.Τ.Κ. στον Α: $1 + IR_2 = i_1 R_3 \Rightarrow i_1 = \frac{1 + IR_2}{R_3} \quad (2)$

$(1,2)$: $I = \frac{1 + IR_2}{R_3} + i_3 + i_4 \quad (3)$

■ $\left. \begin{array}{l} i_3 = -25V_c \quad (4) \\ V_c = -IR_2 \quad (5) \end{array} \right\} i_3 = 25IR_2 \quad (6)$

$(3,6)$: $I = \frac{1 + IR_2}{R_3} + 25IR_2 + i_4 \quad (7)$

■ Ν.Τ.Κ. στον Β: $i_4 R_1 + 5V_d = i_1 R_3$

$\Rightarrow i_4 R_1 + 5 i_1 R_3 = i_1 R_3 \Rightarrow i_4 = \frac{-4\left(\frac{1 + IR_2}{R_3}\right) \cdot R_3}{R_1}$

$\Rightarrow i_4 = \frac{-4(1 + IR_2)}{R_1} \quad (8)$

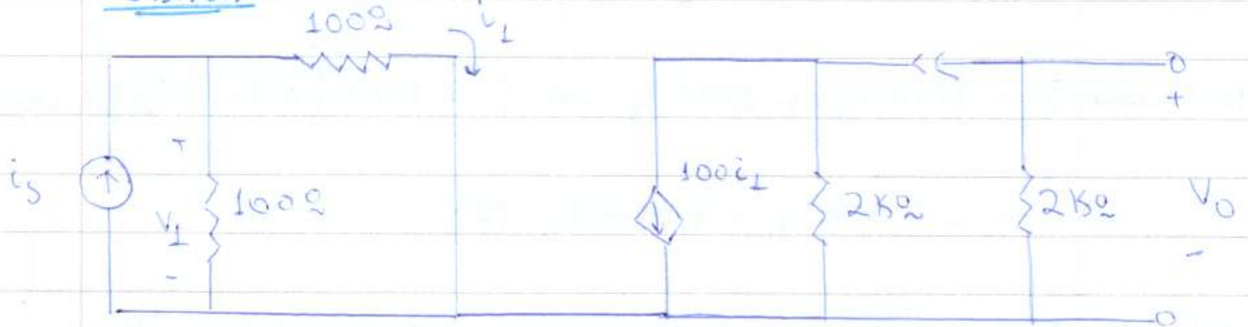
$$(7,8) \Rightarrow I = \frac{1}{R_3} + I\frac{R_2}{R_3} + 25 I R_2 - \frac{4}{R_1} - \frac{4 I R_2}{R_1}$$

$$\Rightarrow I\left(1 - \frac{R_2}{R_3} - 25R_2 + 4\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{1}{R_3} - \frac{4}{R_1}$$

$$\boxed{\Rightarrow I = \frac{\frac{1}{R_3} - \frac{4}{R_1}}{1 - \frac{R_2}{R_3} - 25R_2 + 4\frac{R_2}{R_1}}}$$

Άρα, $R_{TH} = \frac{1}{I}$

<u>Άσκηση</u> 8



$$i_1 = \frac{100}{100+100} i_s \Rightarrow i_1 = \frac{1}{2} i_s \quad (1)$$

$$V_1 = 100\, i_1 \quad (2)$$

~~V_{out}~~

$$V_{out} = -100\, i_1 \frac{2\cdot 2}{2+2} 10^3 \Rightarrow V_{out} = -V_1\, 10^3$$

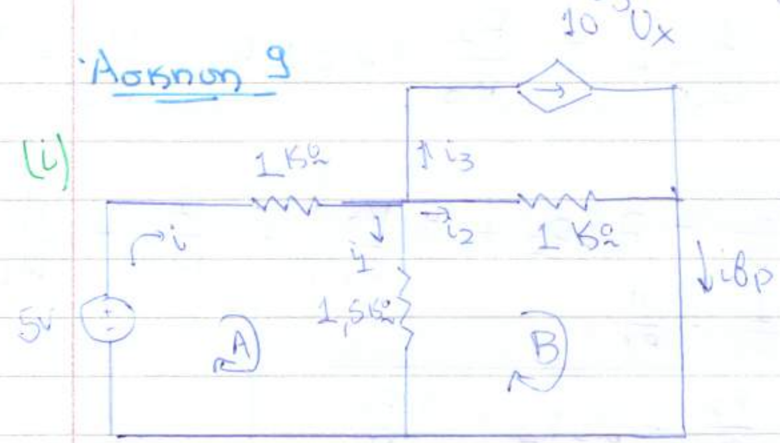
Άρα: $\boxed{\frac{V_o}{V_1} = -10^3}$

και $i_o = -\frac{100\, i_1}{2} \Rightarrow \frac{i_o}{i_1} = -50$ άρα $\boxed{\frac{i_o}{i_s} = -25}$

Για την εύρεση του ισοδύναμου Thevenin βραχυκυκλώνουμε τα Α,Β και βρίσκουμε το $i_{βρ}$ και ανοιχτοκυκλώνουμε τα Α, Β και βρίσκουμε V_{AB}.

Άσκηση 9

(i)



$i = i_1 + i_2 + 10^{-3} V_x$
και $V_x = 1500\, i_1$ $\Big\}$ $i = i_1 + i_2 + 1,5\, i_1$

$\Rightarrow i = 2,5\, i_1 + i_2 \quad (1)$

ΔΝ.Τ.Κ. στον Α: $5 = 1000\, i_1 + 1500\, i_1 \Rightarrow 5 = 1000\left(2,5 i_1 + i_2\right) + 1500\, i_1$

$\Rightarrow 5 = 4000\, i_1 + 1000\, i_2 \quad (2)$

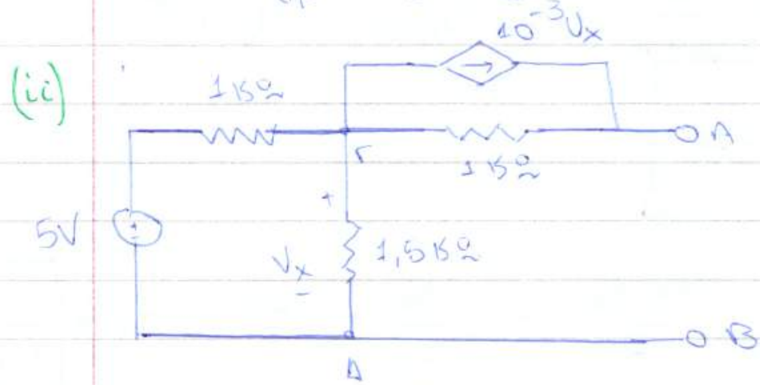
ΔΝ.Τ.Κ. στον Β: $1000\, i_2 = 1500\, i_1 \Rightarrow i_2 = 1,5\, i_1 \quad (3)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow i_1 = 0,0009 \text{ A} \Rightarrow i_2 = 0,00135 \text{ A}$

$\Rightarrow i_3 = 1,5 i_1 = 0,00135 \text{ A}$ Άρα: $\boxed{i_{βρ} = 2,7 \text{ mA}}$

αφού $i_{βρ} = i_2 + i_3$

(ii)



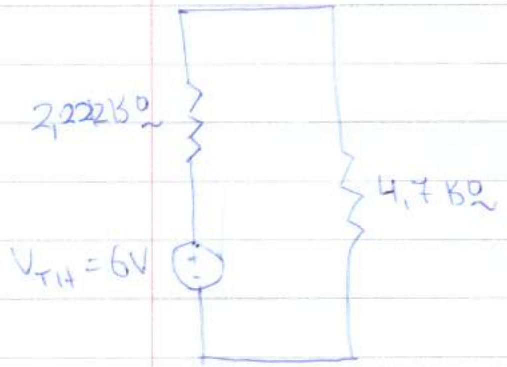
$V_x = \dfrac{1500}{2500} \cdot 5 = 3V$

$i = 10^{-3} \cdot 3 \text{ A} = 0,003 \text{ A}$

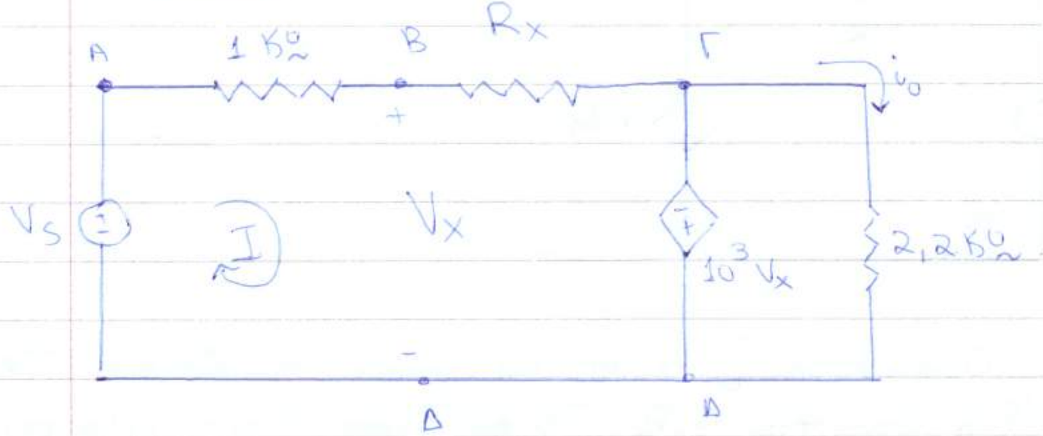
$\Rightarrow V_{TH} = V_{AB} = V_{\Gamma\Delta} + V_{A\Gamma} = 3 + 3\cdot 10^{-3} \cdot 10^{3} = 6V$

Τελικά: $R_{TH} = \frac{6 \cdot 10^{3}}{2,7} = 2,22 K\Omega$

$V_0 = \frac{4,7}{4,7+2,222} \cdot 6\ V \Rightarrow \boxed{V_0 = 4,073V}$



Άσκηση 10



$\frac{i_0}{v_S} = -0,227 \frac{A}{V}$

$V_{B\Delta} = V_x = V_{BA} + V_S$ ή $V_x = V_{B\Gamma} + V_{\Gamma\Delta} = R_x \cdot i_S - 10^3 V_x$

$\Rightarrow (10^3 + 1) V_x = R_x \cdot i_S \Rightarrow V_x = \frac{R_x \cdot i_S}{1001}$ (1)

Ν.Τ.Κ. στον (Ι):

$V_S - i_S 1000 - R_x i_S + 1000 V_x = 0$

$\Rightarrow i_S 1000 + R_x i_S - 1000 \frac{R_x}{1001} i_S = V_S$

$\Rightarrow i_S = \frac{1001 V_S}{1.001 \cdot 00 + R_x}$

Ν.Τ.Κ. στον (ΙΙ) : $2{,}2\, i_0 \cdot 10^3 = -10^3 \cdot V_x$

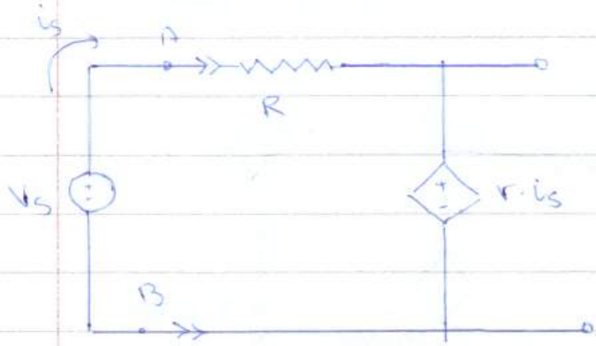
$$\Rightarrow 2{,}2\, i_0 = -\frac{R_x \cdot i_s}{1001} \Rightarrow 2{,}2\, i_0 = -\frac{R_x}{1001} \cdot \frac{1001\, V_s}{1.001.000 + R_x}$$

$$\Rightarrow \frac{i_0}{V_s} = -\frac{1}{2{,}2} \cdot \frac{R_x}{1.001.000 + R_x}$$

$$\Rightarrow -0{,}227 = -\frac{1}{2{,}2} \cdot \frac{R_x}{1.001.000 + R_x}$$

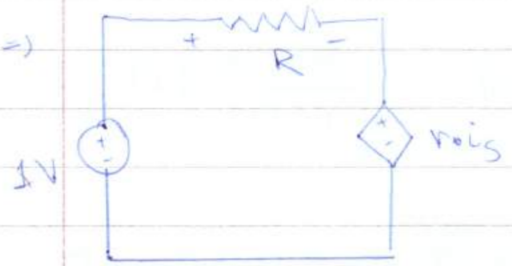
$$\Rightarrow \boxed{R_x = 998.600{,}48\ \Omega}$$

Άσκηση 11



Ουσιαστικά ζητείται να βρούμε το ισοδύναμο Thevenin δεξιά από τα A, B. Το κύκλωμα σ' αυτό το σημείο αποτελείται από μια εξαρτημένη πηγή και μια αντίσταση. ~~στη~~ Άρα, για την εύρεση του ισοδύναμου Thevenin προσθέτουμε στα A, B μια δική μας πηγή τάσης 1V.

$\Rightarrow$

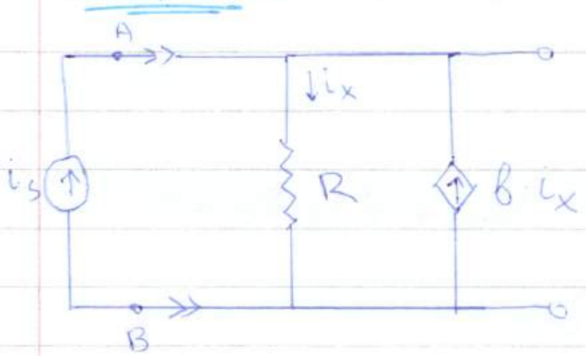


$$\text{Ν.Τ.Κ.}: \ 1 = i_s R + r \cdot i_s$$

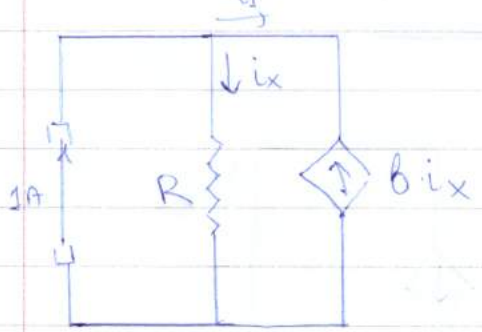
$$\Rightarrow i_s = \frac{1}{R + r}$$

$$\text{Άρα}: \ R_{TH} = \frac{V}{i} = \frac{1}{\frac{1}{R+r}} = R + r$$

Άσκηση 12



→ Ψάχνουμε το ισοδύναμο Thevenin δεξιά των A, B.



$$\left.\begin{aligned} i_x + i_1 &= 1 \\ i_1 &= -6 i_x \end{aligned}\right\} \quad i_x - 6 i_x = 1 \Rightarrow i_x(1-6) = 1$$

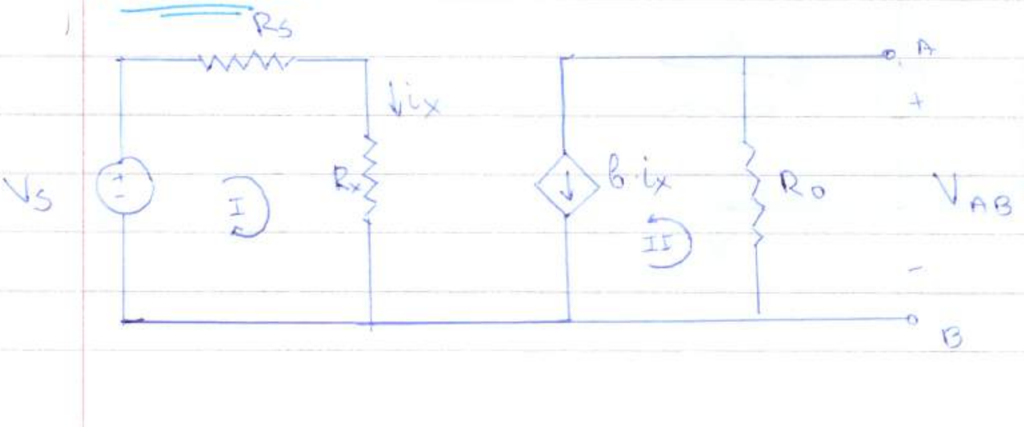
$$\Rightarrow i_x = \frac{1}{1-6}$$

$$\Rightarrow i_1 = 1 - \frac{1}{1-6} \Rightarrow i_1 = \frac{1-6-1}{1-6}$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{6}{6-1}$$ Άρα: $V = i_x \cdot R \Rightarrow V = \frac{1}{1-6} \cdot R$

Συνεπώς: $R_{TH} = \frac{V}{1} = \frac{R}{1-6}$

Άσκηση 13



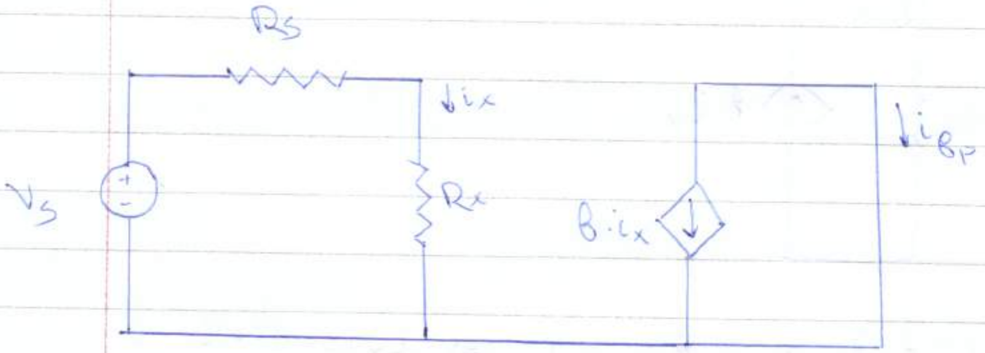
☒ N.T.K. στον I: $i_x R_S + i_x R_x = V_S$ (1)

$$\Rightarrow i_x = \frac{V_S}{R_S + R_x}$$

☒ N.T.K. στον II: $V_{AB} + \beta i_x R_0 = 0$

$$\Rightarrow V_{AB} = -\beta i_x R_0 \quad (2)$$

Άρα: $\boxed{V_{AB} = -\beta \frac{V_S}{R_S + R_x} \cdot R_0}$

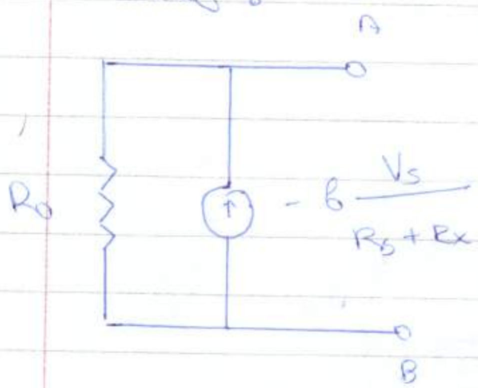


☒ $i_{\beta p} = -\beta i_x$

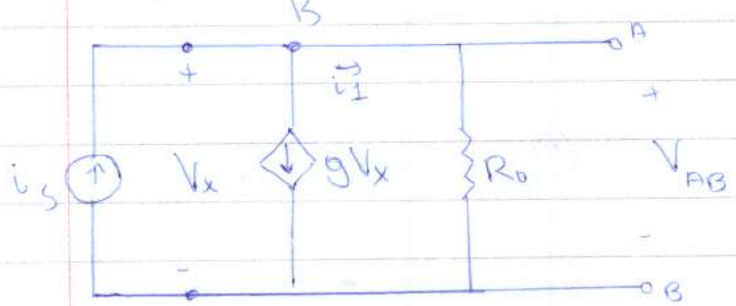
☒ $i_x = \frac{V_S}{R_S + R_x} \Rightarrow i_{\beta p} = -\beta \frac{V_S}{R_S + R_x}$

Άρα: $R_N = \frac{V_{AB}}{i_{\beta p}} = \frac{-\beta \frac{V_S}{R_S + R_x} \cdot R_0}{-\beta \frac{V_S}{R_S + R_x}} = R_0$

Συνεπώς:



Άσκηση 14

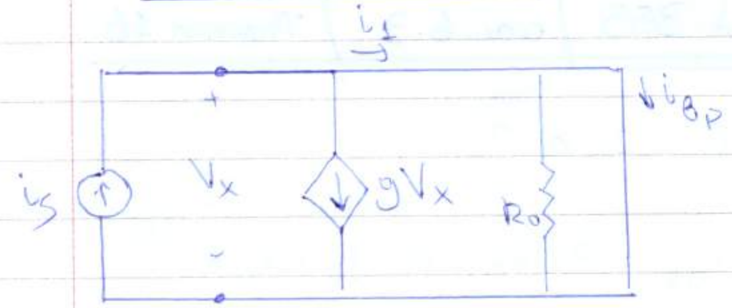


N.P.K στον K: $i_s = i_1 + gV_x \Rightarrow i_1 = i_s - gV_x$

$V_{AB} = i_1 R_0$ και $V_x = V_{AB}$

$\Rightarrow V_{AB} = (i_s - gV_x)R_0 \Rightarrow V_{AB} = i_s R_0 - gV_{AB}R_0$

$$\Rightarrow V_{AB} = \frac{i_s R_0}{1+gR_0}$$

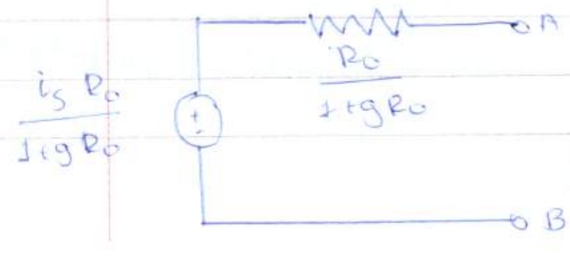


N.P.K.: $i_s = i_{\beta\rho} + gV_x$

όμως $V_x = 0 \Rightarrow i_s = i_{\beta\rho}$

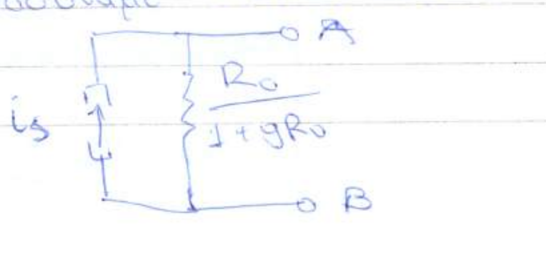
Άρα: $R_{TH} = \frac{V_{AB}}{i_{\beta\rho}} = \frac{R_0}{1+gR_0}$

έτσι έχουμε:

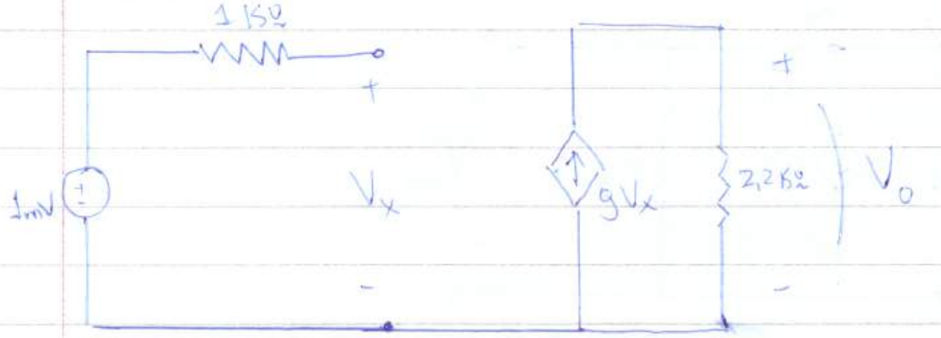


$\Rightarrow$

Το ισοδύναμο Norton είναι:



Άσκηση 15



Στην αντίσταση 1 KΩ δε διέρχεται ρεύμα $\Rightarrow V_x = 1mV$ και από N.T.K στον I:

$$V_o = 2{,}2 g V_x \Rightarrow V_o = 2{,}2 g \cdot 10^{-3} 10^{3}$$

$$\Rightarrow g = \frac{10}{2{,}2} \Rightarrow \boxed{g = 4{,}54}$$

Sedra Smith σελ. 355 / ασκ. 6.3 / Άσκηση 16

Ισχύει η σχέση $i_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$

Γνωρίζουμε ότι $V_{BE} = 30 V_T \Rightarrow I_S = i_C e^{-30}$

Άρα: $I_S = 200 \cdot 10^{-3} e^{-30} A = 1{,}87 \cdot 10^{-17} A$

Επιπλέον έχουμε: $I_S = \dfrac{A_E \, q \, D_n \, n_i^2}{N_A \cdot W}$ όπου A_E το εμβαδόν διατομής της ένωσης βάσης-εκπομπού $\Rightarrow A_E' = 32 A_E$ συνεπάγεται: $I_S' = 32 I_S$ άρα:

$$I_S' = 32 \cdot 1{,}87 \cdot 10^{-17} A = 5{,}98 \cdot 10^{-16} A$$

Επομένως έχουμε: $i_C' = I_S' e^{30} \Rightarrow i_C' = 5{,}98 \cdot 10^{-16} e^{30} A$

$$\Rightarrow \boxed{i_C' = 6{,}33 \cdot 10^{-3} A}$$

Τέλος, ισχύει ο τύπος $i_C'' = I_S'' e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$

Άρα: $\frac{V_{BE}}{V_T} = \ln \frac{i_C''}{I_S''} \Rightarrow V_{BE} = V_T \ln \frac{i_C''}{I_S''}$

$\Rightarrow V_{BE} = V_T \ln \frac{1\,mA}{5{,}9 \cdot 10^{-10} A} \Rightarrow \boxed{V_{BE} = 28{,}14\ V_T\ V}$

Sedra Smith σελ. 355 | ασκ. 6.4 | Άσκηση 17

Έστω $I_{S/1}$ το ρεύμα κορεσμού του πρώτο τρανζίστορ και $I_{S/2}$ το ρεύμα κορεσμού του δεύτερου τρανζίστορ.

$$\Rightarrow \frac{I_{S/1}}{I_{S/2}} = \frac{A_{E1}}{A_{E2}} = \frac{(200\,\mu m)^2}{(0,4\,\mu m)^2} = 250.000$$

Άρα: $I_{S/1} = 250.000\, I_{S/2}$

→ Από τα δεδομένα έχουμε $i_{C1} = i_{C2} \Rightarrow$

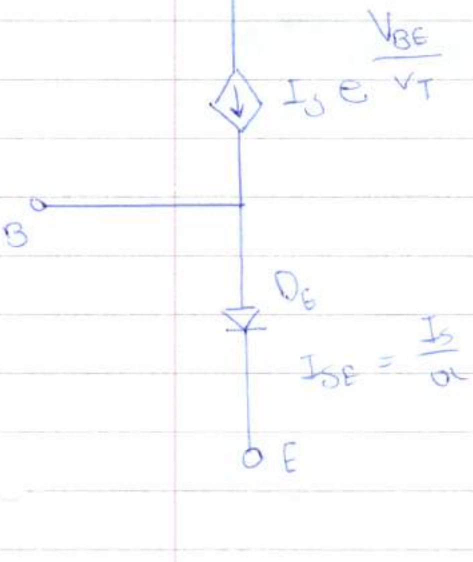
$$\Rightarrow I_{S/1}\, e^{\frac{V_{BE_1}}{V_T}} = I_{S/2}\, e^{\frac{V_{BE_2}}{V_T}} \Rightarrow 250000\, I_{S/2}\, e^{\frac{V_{BE1}}{V_T}} = I_{S/2}\, e^{\frac{V_{BE_2}}{V_T}}$$

$$\Rightarrow e^{\frac{V_{BE1}}{V_T} - \frac{V_{BE2}}{V_T}} = \frac{1}{250.000} \Rightarrow \frac{V_{BE1}}{V_T} - \frac{V_{BE2}}{V_T} = \ln\frac{1}{250.000}$$

$$\Rightarrow V_{BE_1} - V_{BE_2} = V_T \ln\left(\frac{1}{250.000}\right) = -12,429 \cdot V_T$$

Sedra Smith σελ. 356 | ασκ. 6.16 | Άσκηση 18

$i_C = 1\,mA$, $V_{BE} = 0,7\,V$, $i_B = 10\,\mu A$

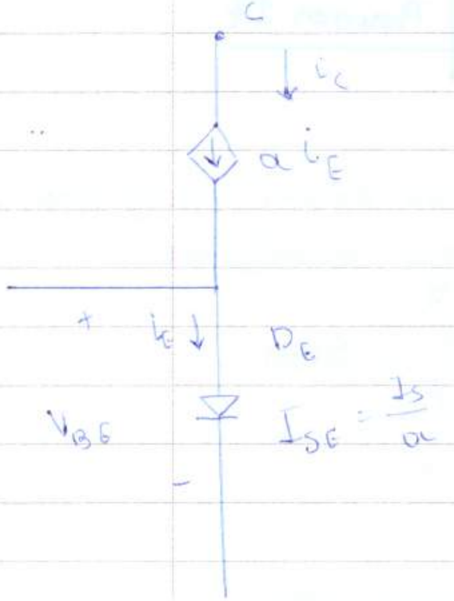


$$i_C = I_S\, e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$$

$$\Rightarrow I_S = i_C\, e^{-\frac{V_{BE}}{V_T}}$$

$$\Rightarrow I_S = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{e^{0,7/0,025}}\ A$$

$$\Rightarrow I_S = 6,91 \cdot 10^{-16}\ A$$



$i_c = a i_E$

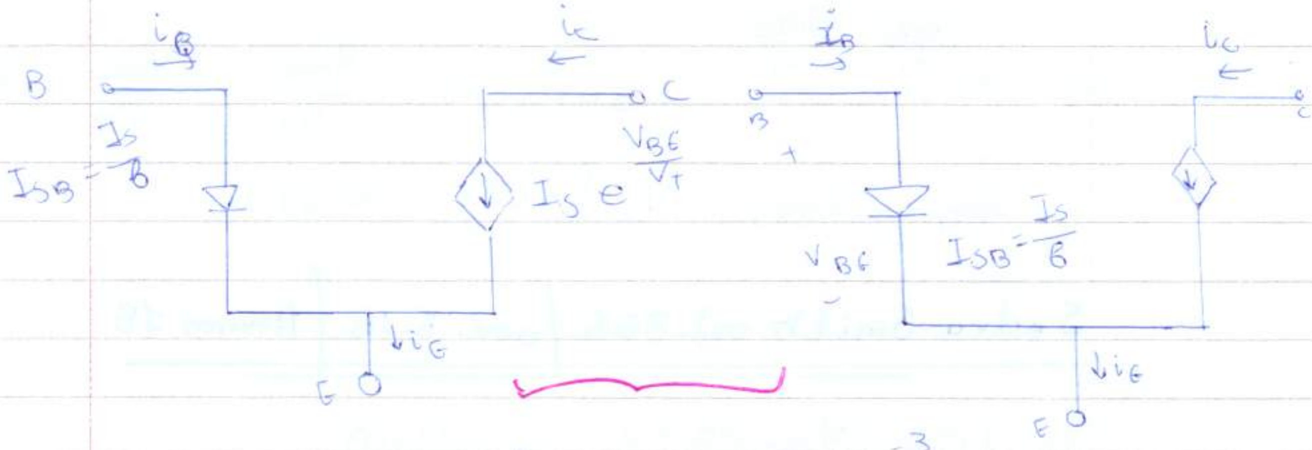
$\Rightarrow a = \dfrac{i_c}{i_E}$

και $i_E = i_B + i_c$

$\Rightarrow i_E = 1 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-6} A = $
$= 1{,}01 \cdot 10^{-3} A$

Άρα: $a = \dfrac{1 \cdot 10^{-3}}{1{,}01 \cdot 10^{-3}} = 0{,}99$

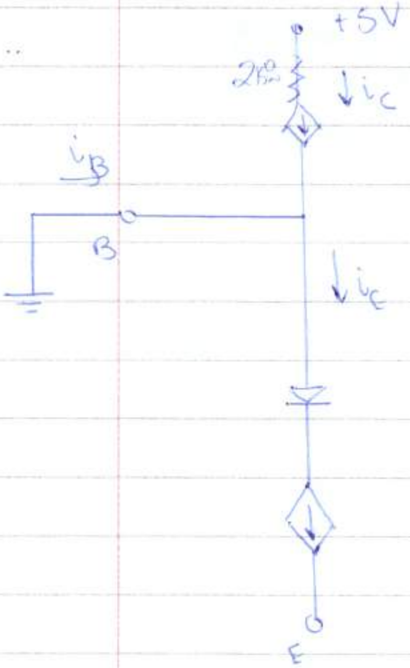
οπότε $I_{SE} = \dfrac{6{,}91 \cdot 10^{-16}}{0{,}99} A = 6{,}98 \cdot 10^{-16} A$



Ξέρουμε ότι $\beta = \dfrac{i_c}{i_B} \Rightarrow \beta = \dfrac{1 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-6}} = 100$

Άρα $I_{SB} = \dfrac{I_s}{\beta} = \dfrac{6{,}91 \cdot 10^{-16}}{100} = 6{,}91 \cdot 10^{-18} A$

Άσκηση 19 / Sedra Smith σελ. 356 / ασκ. 6.17



$\beta = 100$, $I_S = 5 \cdot 10^{-15}$ A , $i_E = 2$ mA

$i_E = i_B + i_C$

και $i_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$

$i_C = \frac{\beta}{\beta+1} i_E \Rightarrow i_C = \frac{100}{101} \cdot 2 \cdot 10^{-3}$ A

$\Rightarrow \boxed{i_C = 1{,}98 \text{ mA}}$

Άρα, $i_B = i_E - i_C = 2\text{ mA} - 1{,}98\text{ mA} = 0{,}02\text{ mA}$

Επίσης $V_{BE} = V_T \ln \frac{i_C}{I_S} = V_T \frac{1{,}98\text{ mA}}{5 \cdot 10^{-15}\text{ A}} = 0{,}67$ V

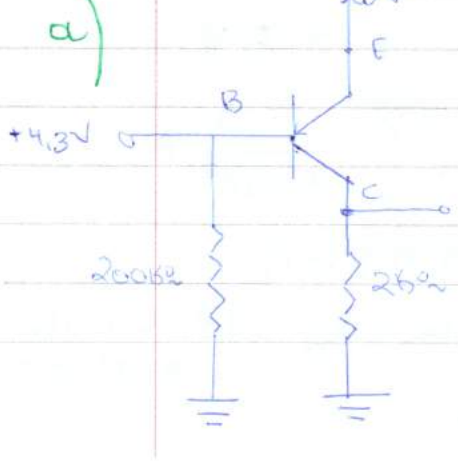
Όμως: $V_{BE} = V_B - V_E \overset{V_B = 0}{\Longrightarrow} V_E = -V_{BE} \Rightarrow \boxed{V_E = -0{,}67\text{V}}$

Επιπλέον: $i_C = \frac{(5 - V_C)}{2 \cdot 10^3} \Rightarrow (5 - V_C) = 2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}98 \cdot 10^{-3}$

$\Rightarrow V_C = (5 - 3{,}96)\text{ V} \Rightarrow \boxed{V_C = 1{,}04\text{V}}$

Άσκηση 20 / Sedra Smith σελ. 357 / ασκ. 6.29

α)



Το ρεύμα που διαρρέει την βάση είναι ίσο με:

$i_B = \frac{4{,}3}{200 \cdot 10^3}\text{ A} = 0{,}0215\text{ mA}$

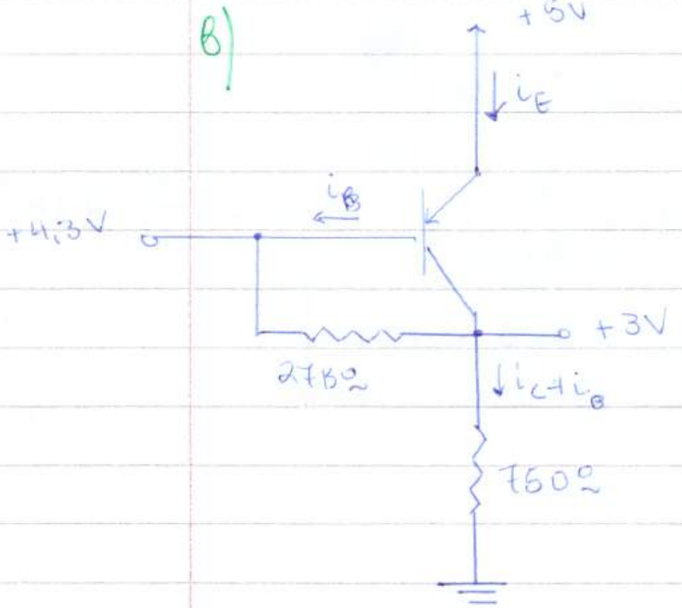
Το ρεύμα του συλλέκτη είναι ίσο με:

$i_C = \frac{2}{2 \cdot 10^3}\text{ A} = 1\text{ mA}$

$\Rightarrow i_E = i_C + i_B = 1,0215\ mA$

Οπότε $\beta = \frac{i_C}{i_C} \Rightarrow \beta = \frac{1}{0,025} = 46,5$

β)

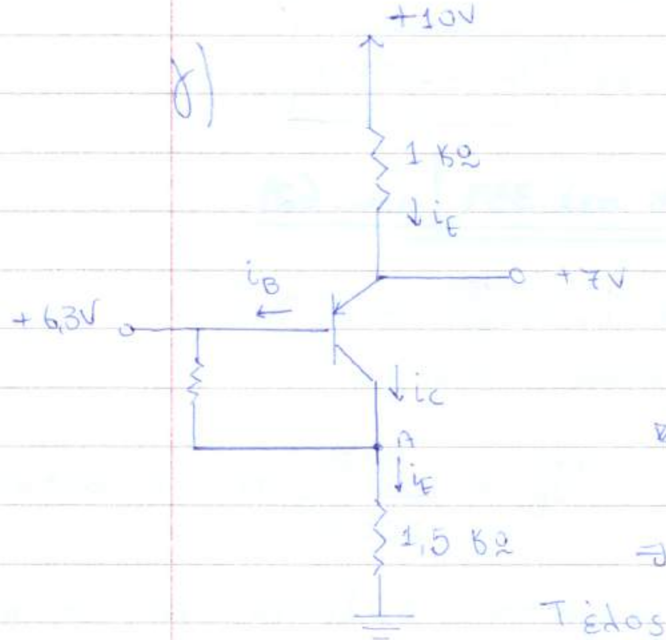


$i_B = \frac{1,3}{27\cdot 10^3}\ A = 0,0481\ mA$

$i_C + i_B = \frac{3}{750} = 4\ mA \Rightarrow \boxed{i_C = 3,951\ mA}$ και $\boxed{i_E = 4mA}$

Συνεπώς: $\beta = \frac{i_C}{i_B} = 82,07$

γ)



$i_E = \frac{3}{1\cdot 10^3}\ A = 3\ mA$

$V_A = 3\cdot 10^{-3}\cdot 1,5\cdot 10^{3}\ V = 4,5\ V$

$i_B = \frac{6,3 - 4,5}{45\cdot 10^3}\ A$

$\Rightarrow i_B = 0,04\ mA$

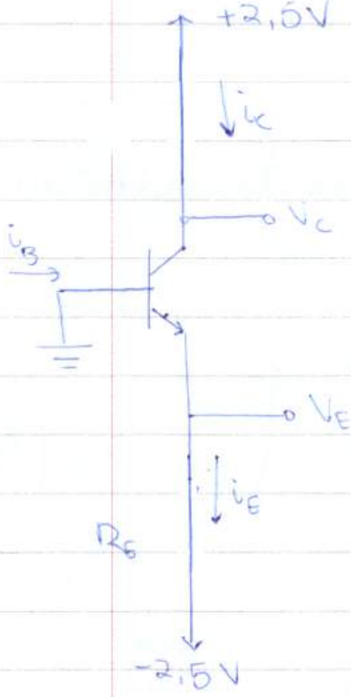
Τέλος, $i_C = i_E - i_B = (3 - 0,04)\ mA = 2,96\ mA$

Συνεπώς: $\beta = \frac{i_C}{i_B} = \frac{2,96}{0,04} = 74$.

Άσκηση 21 | Sedra Smith σελ. | Ασκ. 6.31

$I_S = 5 \cdot 10^{-15}$ A

$V_{BE} = 0,7$ V



$$i_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$$

$$\Rightarrow i_C = 5 \cdot 10^{-15} e^{\frac{0,7}{0,025}} \text{ A}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_C = 7 \text{ mA}}$$

Όμως: $50 < \beta < 200$ και $\beta = \frac{i_C}{i_B}$

$$\Rightarrow 50 < \frac{i_C}{i_B} < 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{200} i_C < i_B < \frac{1}{50} i_C$$

Άρα $\boxed{0,035 \text{ mA} < i_B < 0,14 \text{ mA}}$

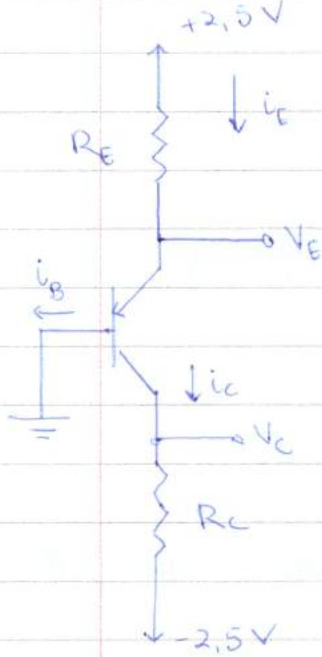
Όμως: $i_E = i_B + i_C$ συνεπώς:

$$0,035 \text{ mA} + i_C < i_B + i_C < 0,14 \text{ mA} + i_C$$

$$\Rightarrow (0,035 + 7) \text{ mA} < i_E < (0,14 + 7) \text{ mA}$$

$$\Rightarrow \boxed{7,035 \text{ mA} < i_E < 7,14 \text{ mA}}$$

Άσκηση 22 / Sedra Smith σελ. 358 / Ασκ. 6.32



→ $i_E = 0,5\,mA$

→ $V_C = -0,5\,V$

→ $V_{EB} = 0,64\,V$ όταν $I_E = 0,1\,mA$ και $\beta = 100$

$i_E = i_B + i_C$

$\Rightarrow i_C = \beta \cdot i_B$

$\Rightarrow i_C = I_S\, e^{\frac{V_{EB}}{V_T}}$

$\Rightarrow i_E = \frac{I_C}{\beta} + i_C$

$i_E = i_C\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)$

Για $i_E = 0,1\,mA$: $V_{EB} = 0,64\,V$

Ξέρουμε ότι ισχύει: $i_E = \frac{\beta+1}{\beta} I_S\, e^{\frac{V_{EB}}{V_T}}$

$\Rightarrow I_S = \frac{\beta}{\beta+1}\, i_E\, e^{-\frac{V_{EB}}{V_T}}$

$\Rightarrow I_S = \frac{100}{101}\, 0,1 \cdot 10^{-3}\, e^{-\frac{0,64}{0,025}}$

$\Rightarrow \boxed{I_S = 7,5 \cdot 10^{-13}\,A}$

Επομένως: για $i_E = 0,5\,mA$ θα ισχύει:

$$i_B = \frac{i_E}{\beta+1} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3}}{101}\,A = 0,00495\,mA$$

Όμως: $i_C = \beta \cdot i_B \Rightarrow i_C = 100 \cdot 0,00495\,mA = 0,495\,mA$

Επιπλέον ισχύει: $R_C = \dfrac{V_C - (-2,5)}{i_C}$

$\Rightarrow R_C = \dfrac{-0,5 + 2,5}{0,495 \cdot 10^{-3}}\ \Omega \Rightarrow R_C = \dfrac{2}{0,495}\ K\Omega$

$\Rightarrow \boxed{R_C = 4,04\ K\Omega}$

$\sim \underbrace{i_C = I_S e^{\frac{V_{EB}}{V_T}} \quad \text{και} \quad i_C = a \cdot i_E}$

$i_E = \dfrac{I_S}{a} e^{\frac{V_{EB}}{V_T}} \Rightarrow \dfrac{a \cdot i_E}{I_S} = e^{\frac{V_{EB}}{V_T}}$

$\Rightarrow V_{EB} = V_T \ln \dfrac{a\ i_E}{I_S} \Rightarrow V_{EB} = 0,025 \ln \dfrac{\frac{100}{101} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3}}{7,5 \cdot 10^{-13}}\ V$

$\Rightarrow V_{EB} = 0,507\ V$ όμως $V_B = 0 \Rightarrow \boxed{V_E = 0,507\ V}$

Γνωρίζουμε ότι για να λειτουργεί ένα pnp τρανζίστορ στην ενεργό περιοχή πρέπει $V_C \leq V_B + 0,4V$

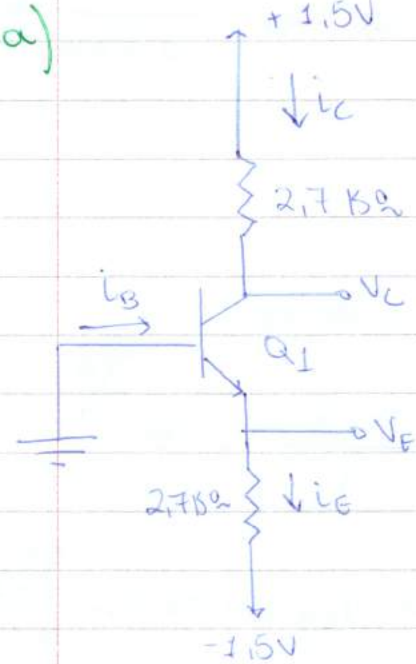
$\Rightarrow V_{C/max} = V_B + 0,4$ όμως $V_B = 0 \Rightarrow V_{C/max} = 0,4V$

Οπότε $R_{C/max} = \dfrac{V_{C/max} - (-25)}{i_C} = \dfrac{0,4 + 2,5}{i_C}$

$\Rightarrow R_{C/max} = \dfrac{2,9}{4,95 \cdot 10^{-4}}\ \Omega = 5858\ \Omega$

Άσκηση 23 | Sedra Smith σελ. 358 | ασκ. 6.35

α) $|V_{BE}| = 0{,}8V$ και $\beta = 50$



$V_{BE} = 0{,}8V$ και με $V_B = 0 \Rightarrow \boxed{V_E = -0{,}8V}$

και $i_E = \dfrac{V_E - (-1{,}5)}{R_E} \Rightarrow \boxed{i_E = 0{,}259 \text{ mA}}$

Ισχύει $i_B = \dfrac{i_E}{\beta + 1} \Rightarrow i_B = \dfrac{0{,}259}{51} \text{ mA} = 0{,}00508 \text{mA}$

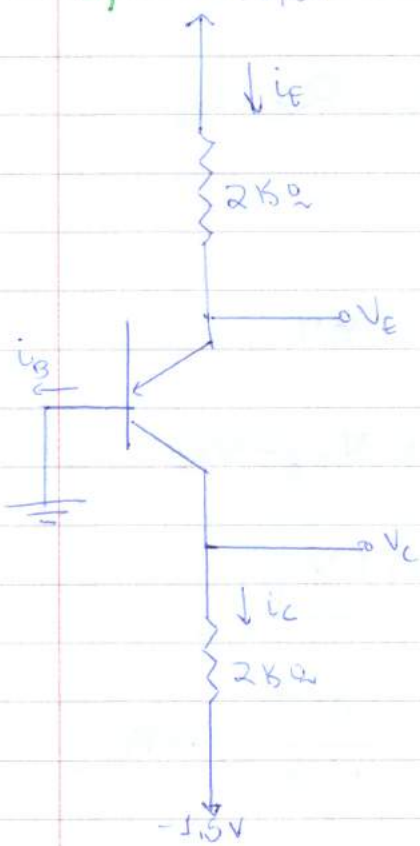
Όμως $i_C = \beta \cdot i_B \Rightarrow i_C = 50 \cdot 0{,}00508 \text{mA}$

$\Rightarrow \boxed{i_C = 0{,}254 \text{ mA}}$

$R_C = \dfrac{1{,}5 - V_C}{i_C} \Rightarrow R_C\, i_C - 1{,}5 = -V_C$

$\Rightarrow V_C = 1{,}5 - 2{,}7 \cdot 0{,}254 \Rightarrow V_C = 0{,}813V$

β)



$\Rightarrow V_{EB} = 0,8V \xrightarrow{V_B=0}$

$\Rightarrow \boxed{V_E = 0,8V}$

Άρα: $i_E = \frac{1,5-0,8}{2} mA$

$\Rightarrow \boxed{i_E = 0,35mA}$

και επιπλέον $i_B = \frac{i_E}{\beta+1}$

$\Rightarrow i_B = \frac{0,35}{51} mA$

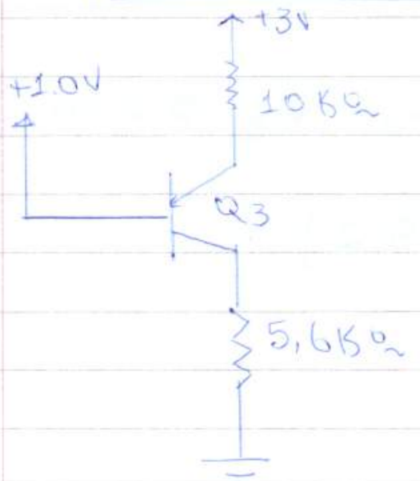
$\Rightarrow \boxed{i_B = 0,00686mA}$

και άρα: $\boxed{i_C = \beta \cdot i_B = 0,3431 mA}$

$V_C = 2\cdot 10^3 i_C - 1,5 \Rightarrow V_C = (2\cdot 0,3432 - 1,5)V$

$\Rightarrow \boxed{V_C = -0,81V}$

γ)



$V_{EB} = 0,8V$ και $V_B = 1V$

Οπότε $V_{EB} = V_E - V_B \Rightarrow$

$V_E = 0,8V + 1V = 1,8V$

Άρα: $i_E = \frac{3-1,8}{10} mA$

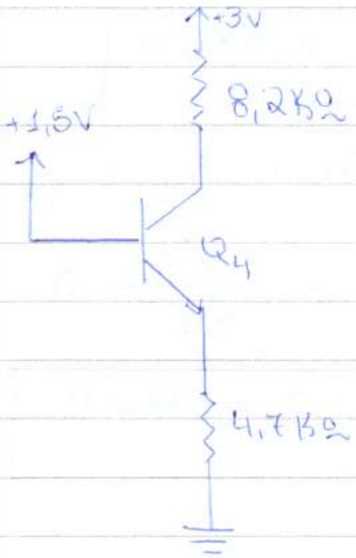
$\Rightarrow \boxed{i_E = 0,12mA}$

$i_C = \alpha \cdot i_E \Rightarrow i_C = 1,18 \cdot 10^{-4}$ A

$\Rightarrow \boxed{i_C = 0,118 \text{ mA}}$ και $V_C = R_C \cdot i_C$

$\Rightarrow \boxed{V_C = 0,66V}$

5)



$V_{BE} = 0,8V$

$\Rightarrow V_E = V_B - V_{BE}$

$\Rightarrow \boxed{V_E = 0,7 V}$

$\Rightarrow i_E = \frac{0,7}{4,7}$ mA

$\Rightarrow \boxed{i_E = 0,148 \text{ mA}}$

Ισχύει: $i_B = \frac{i_E}{\beta+1} \Rightarrow i_B = \frac{0,1489}{51}$ mA

$\Rightarrow \boxed{i_B = 0,002 \text{ mA}}$ και $\boxed{i_C = \beta i_B = 0,146\text{mA}}$

$R_C = \frac{3 - V_C}{i_C} \Rightarrow i_C \cdot 8,2 \cdot 10^3 = 3 - V_C$

$\Rightarrow V_C = (3 - 0,146 \cdot 8,2)$ V

$\Rightarrow \boxed{V_C = 1,802V}$

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

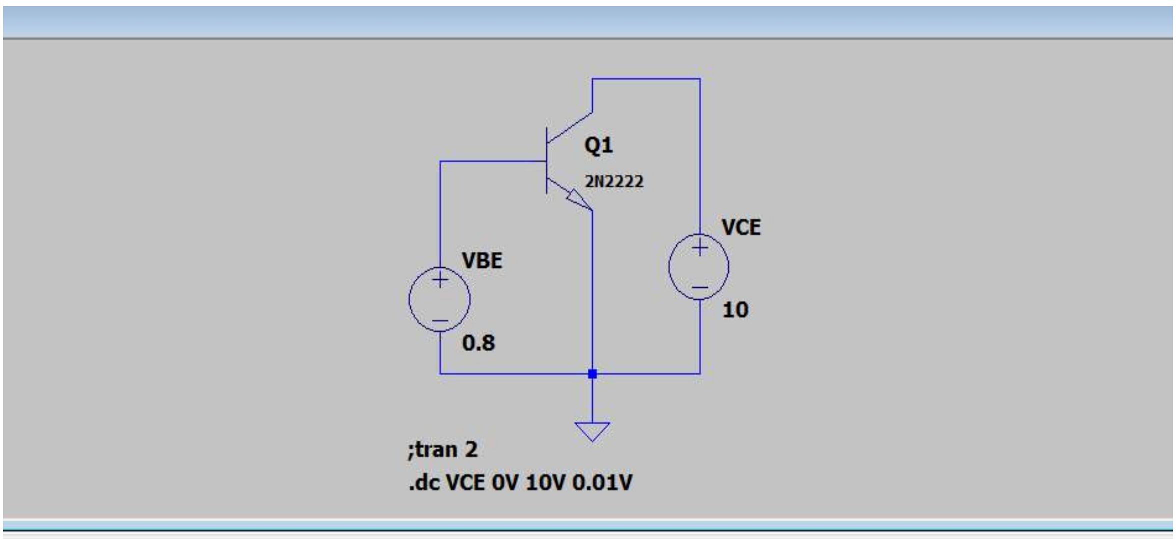
Ηλεκτρονική 1η σειρά ασκήσεων
ΗΜΜΥ 4ο Εξάμηνο
Ονοματεπώνυμο: Γιαννούλης Παναγιώτης
Α.Μ. : 031 17 812

ΑΣΚΗΣΗ 24:

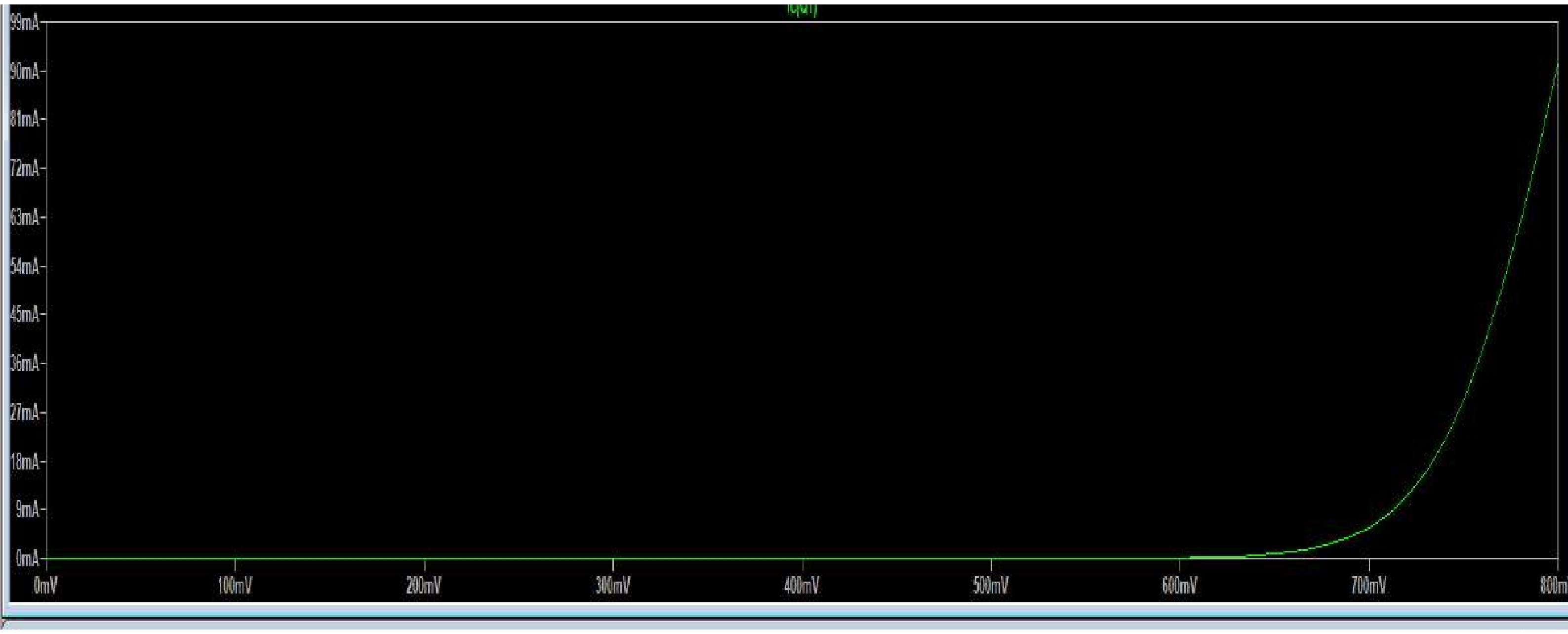
1. Από την γραφική παράσταση του I_c συναρτήσει του V_{BE} μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι μέχρι περίπου τα 640mV η V_{BE} δεν είναι αρκετή για να πολώσει το τρανζίστορ οπότε το I_C είναι σχεδόν μηδενικό. Από τα 640mV και μετά όμως αυξάνεται εκθετικά σύμφωνα με την γνωστή σχέση:

$$I_C = I_S e^{\frac{V_{BE}}{V_T}}$$

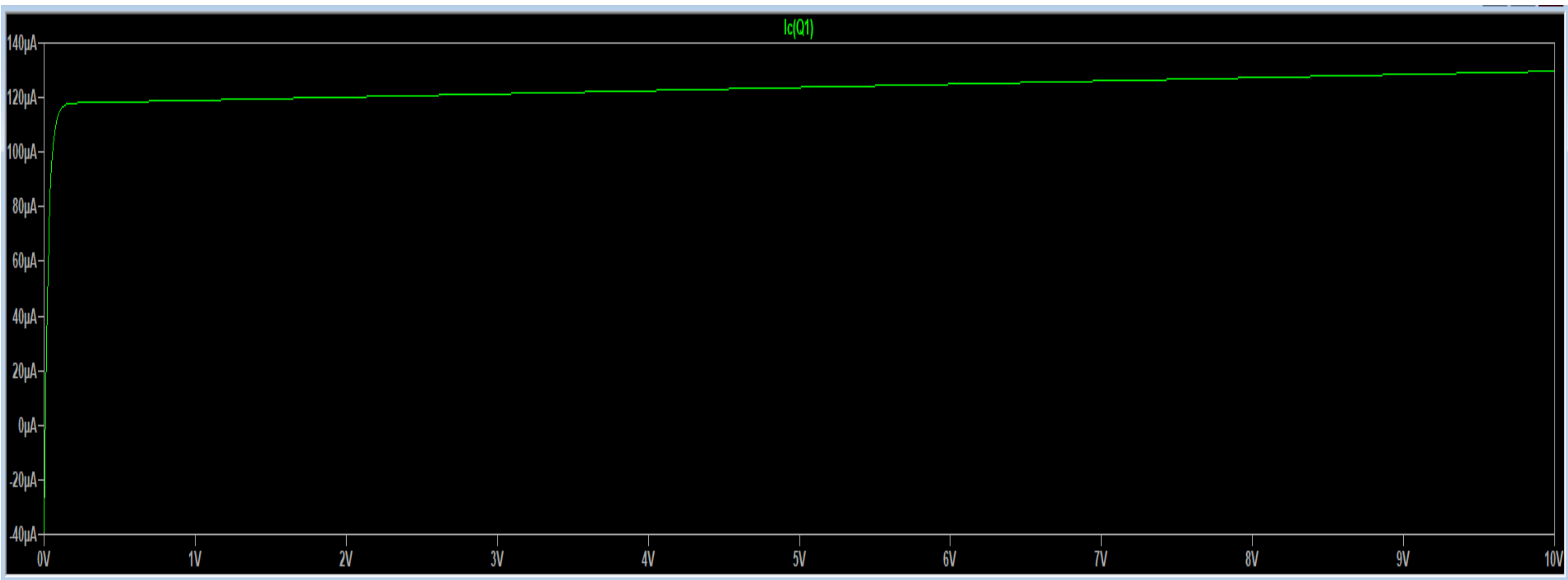
2. Από τη γραφική παράσταση του I_C συναρτήσει της V_{CE} παρατηρούμε αρχικά μια απότομη αύξηση του ρεύματος. Στη συνέχεια το ρεύμα σχεδόν σταθεροποιείται έχοντας μια ελάχιστη θετική κλίση. Τέλος παρατηρούμε ότι το ρεύμα συλλέκτη αυξάνει τάξεις μεγέθους με την αύξηση του V_{BE}. Αυτή η συμπεριφορά είναι απόλυτα φυσιολογική αφού η σχέση των δύο είναι εκθετική.



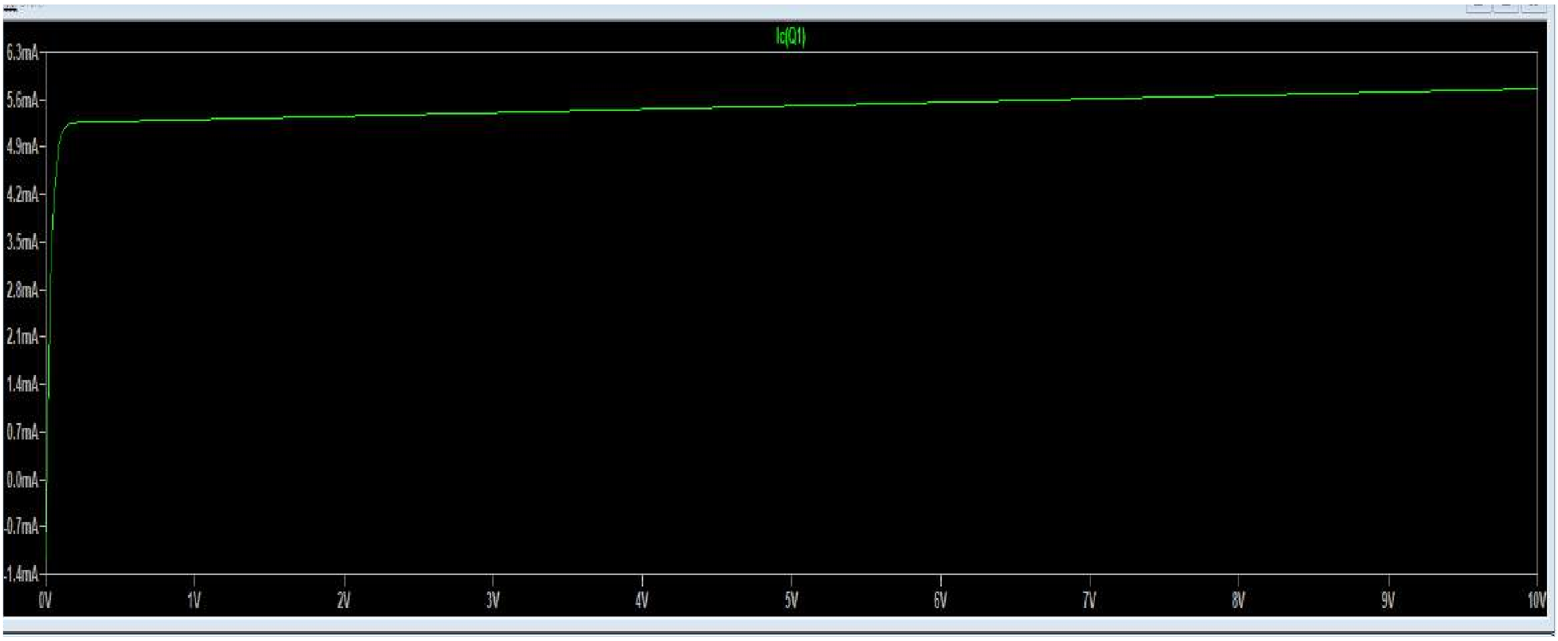
Σχ. 1: Κύκλωμα σχεδιασμένο στο LTSpice



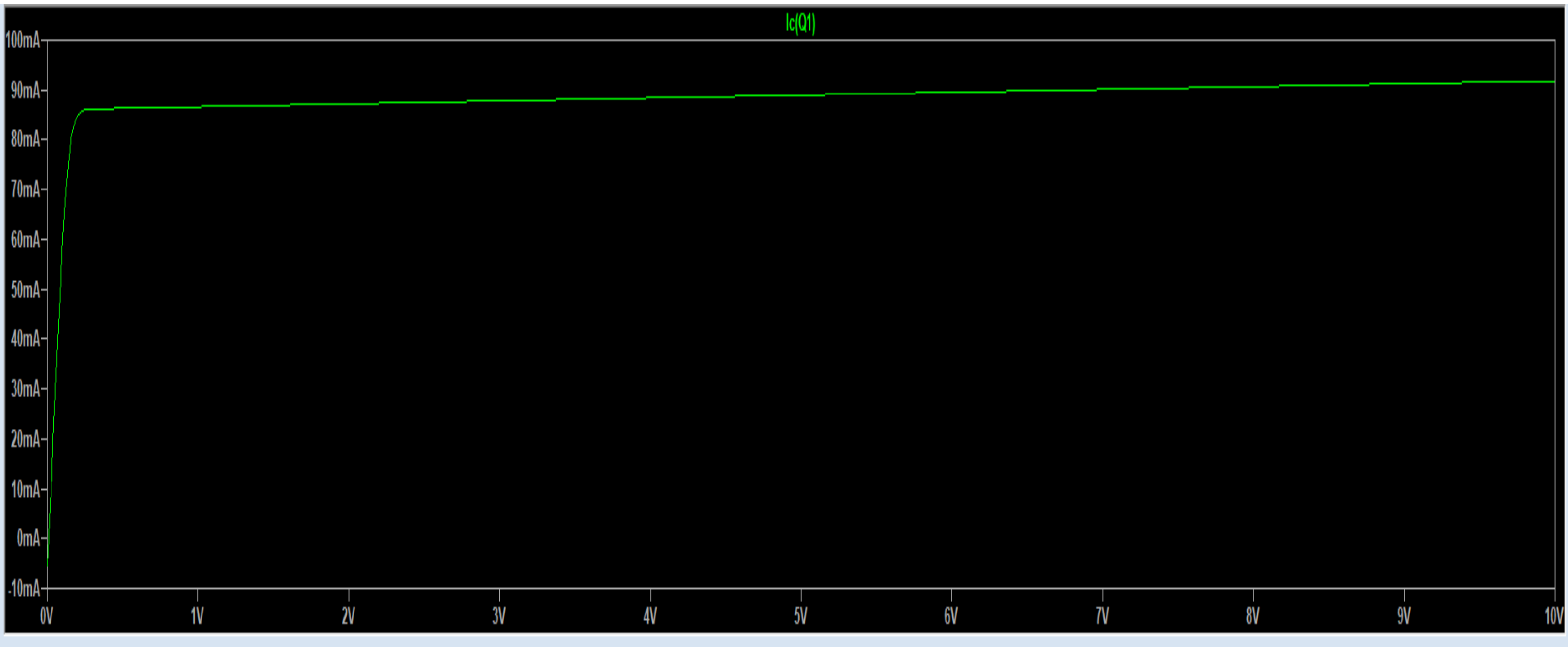
Σχ.2 : Γραφική παράσταση V_{BE} – I_C



Σχ.3 : Γραφική παράσταση V_{CE} – I_C με V_{BE} = 0.6V



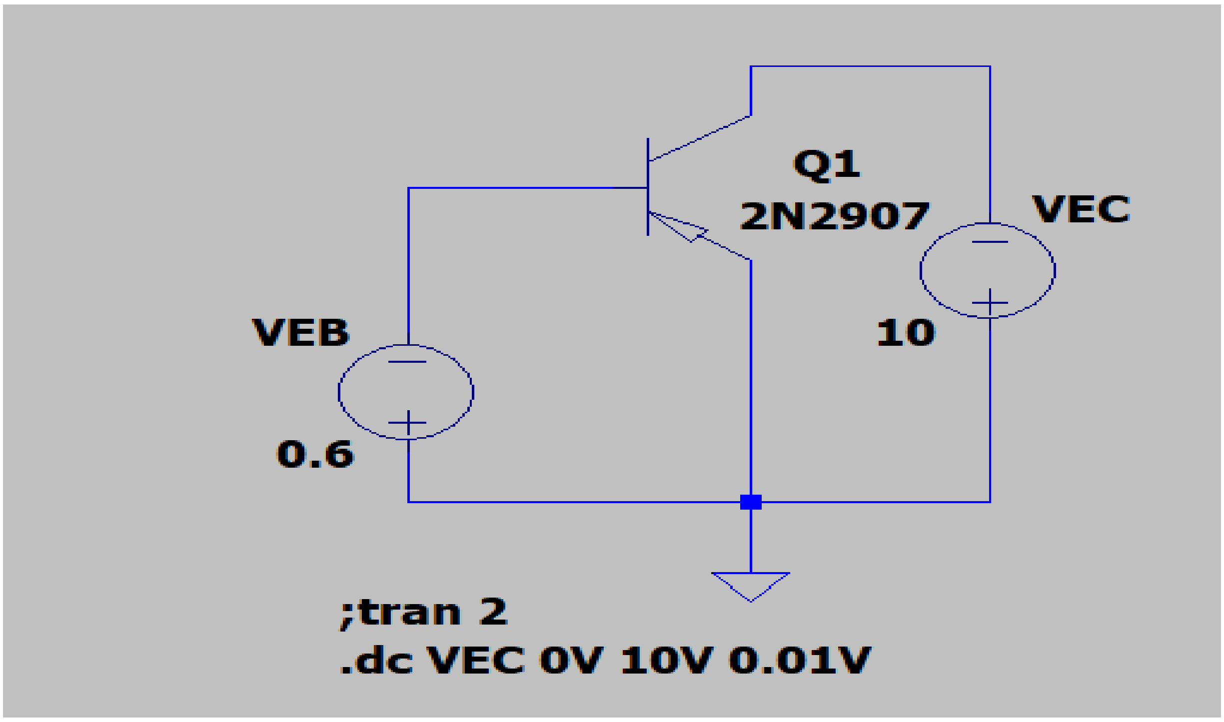
Σχ.4: Γραφική παράσταση V_{CE} – I_C με V_{BE} = 0.7V



Σχ.5 : Γραφική παράσταση V_{CE} – I_C με V_{BE} = 0.8V

➢ ΑΣΚΗΣΗ 25:

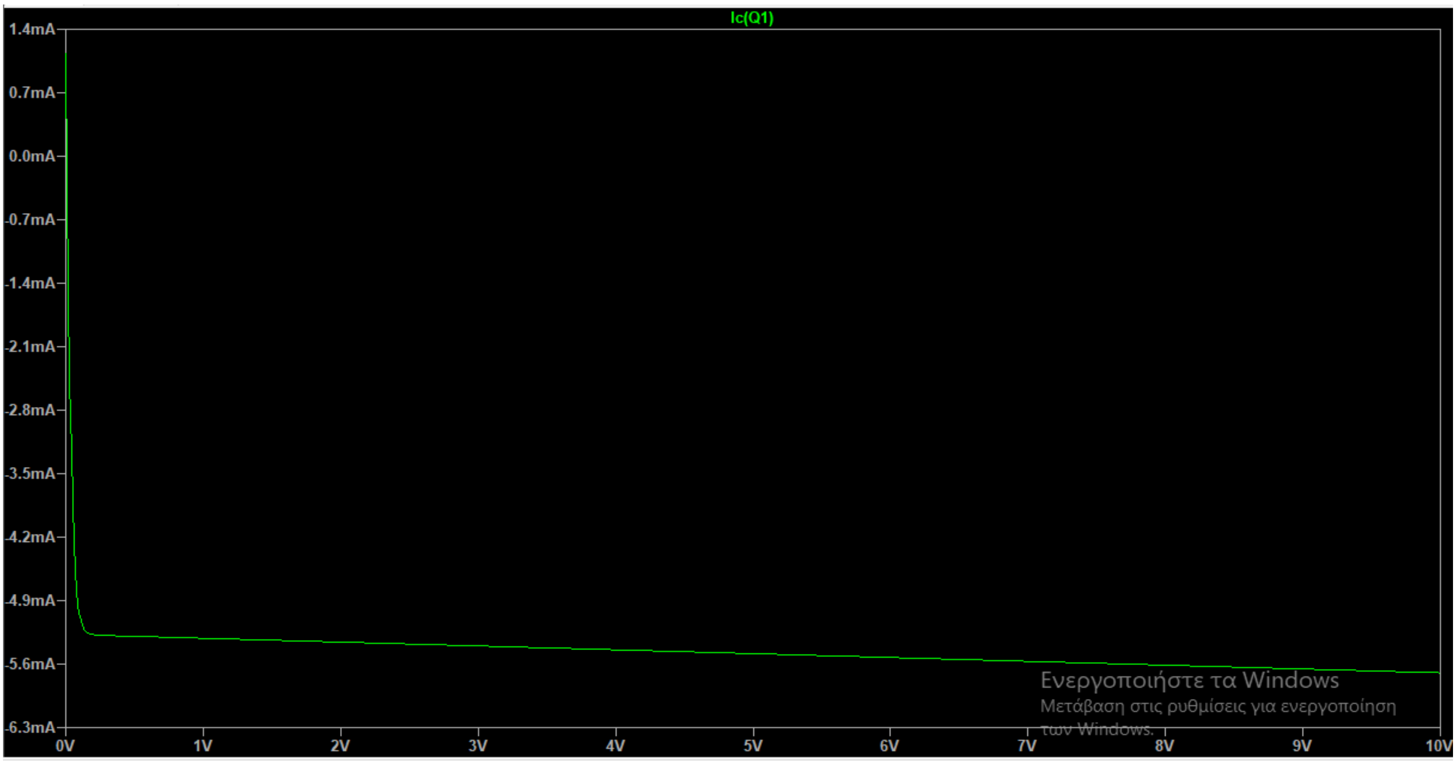
1. Όσον αφορά το pnp τρανζίστορ τα αποτελέσματα ουσιαστικά ταυτίζονται με αυτά του npn. Από την γραφική παράσταση του I_c συναρτήσει του V_{BE} ότι μέχρι περίπου τα 640mV η V_{BE} δεν επαρκεί για να πολώσει το τρανζίστορ οπότε το I_C είναι σχεδόν μηδενικό. Από τα 640mV και μετά όμως αυξάνεται εκθετικά κατ' απόλυτη τιμή.
2. Τα συμπεράσματα είναι όμοια με αυτά της προηγούμενης άσκησης.



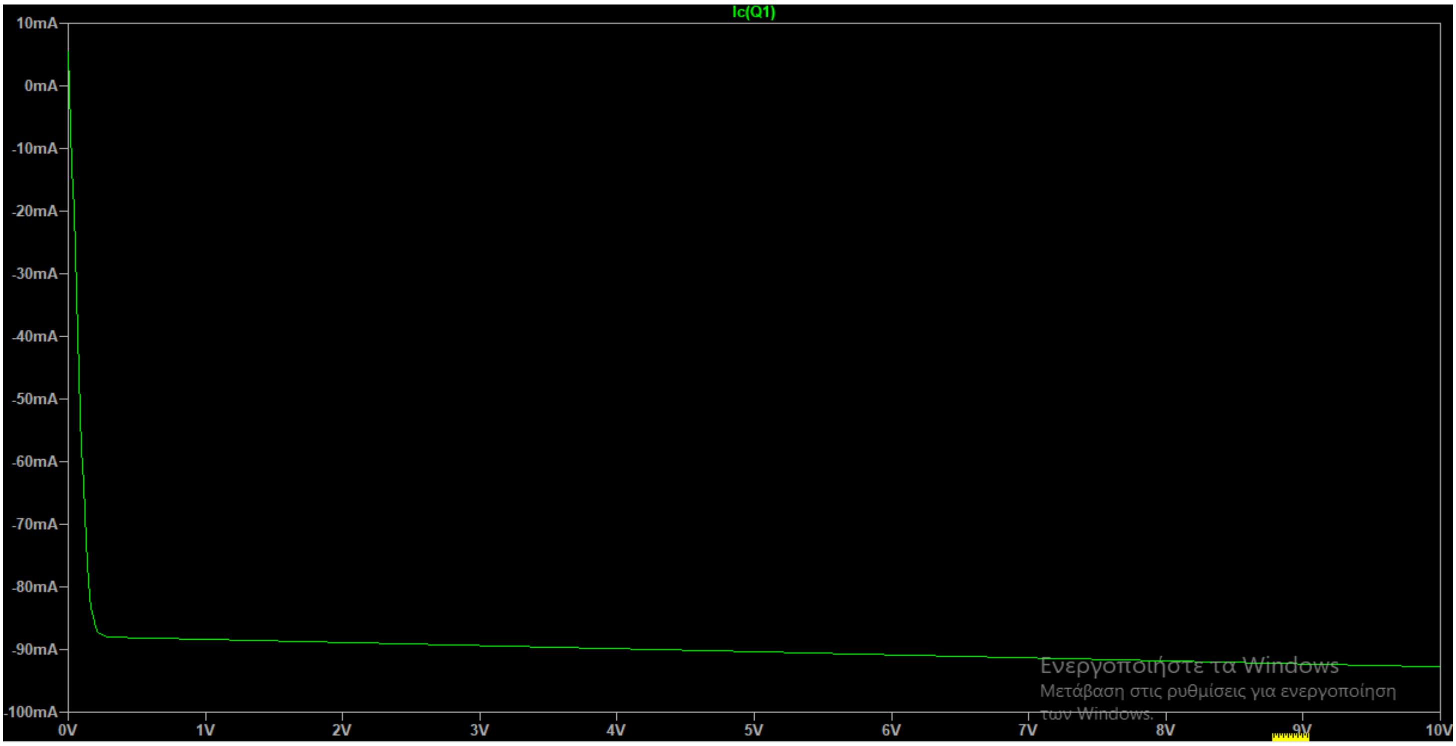
Σχ. 6: Κύκλωμα σχεδιασμένο στο LTSpice

Σχ.7 : Γραφική παράσταση V_{EB} – I_C

Σχ.8: Γραφική παράσταση V_{CE} – I_C με V_{EB} = 0.6V

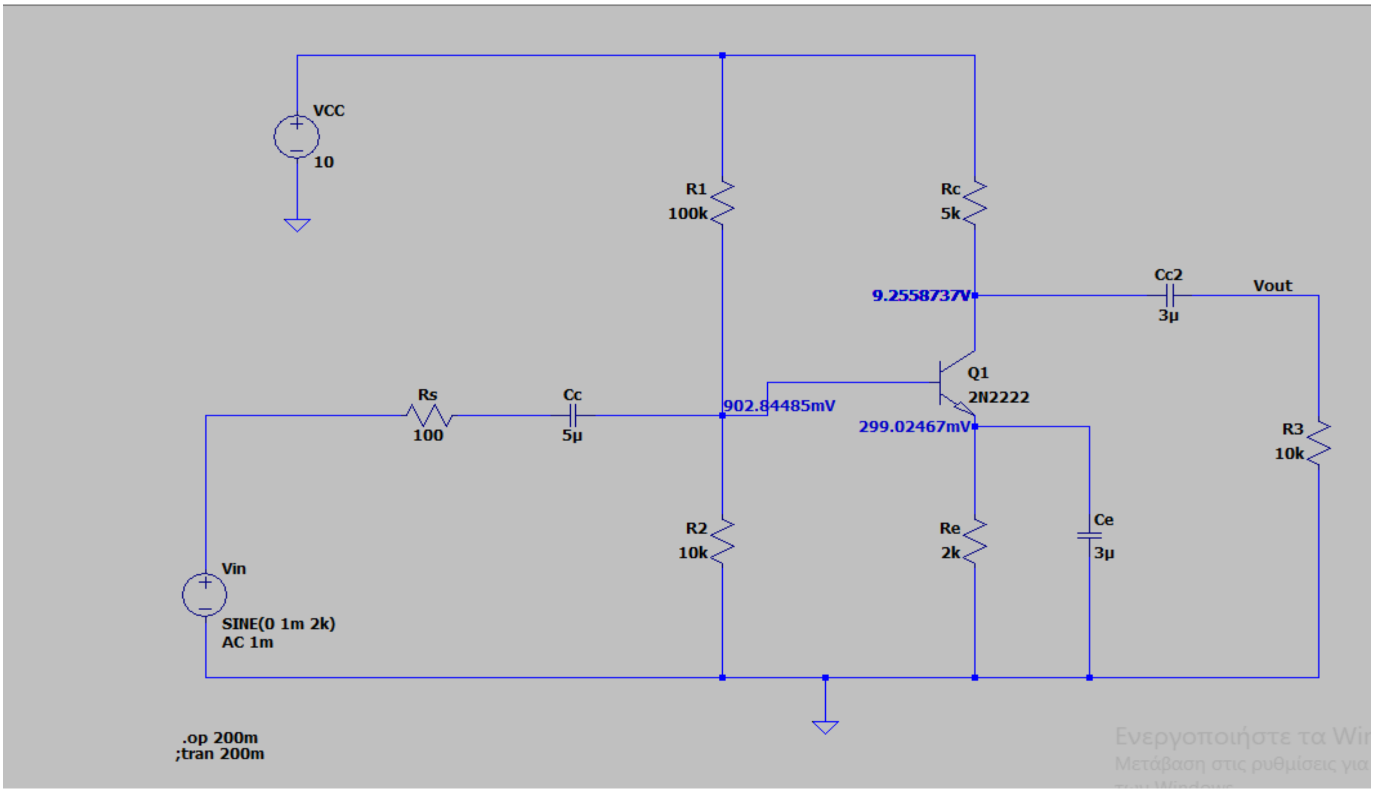


Σχ.9: Γραφική παράσταση V_{CE} – I_C με V_{EB} = 0.7V



Σχ.10: Γραφική παράσταση V_{CE} – I_C με V_{EB} = 0.8V

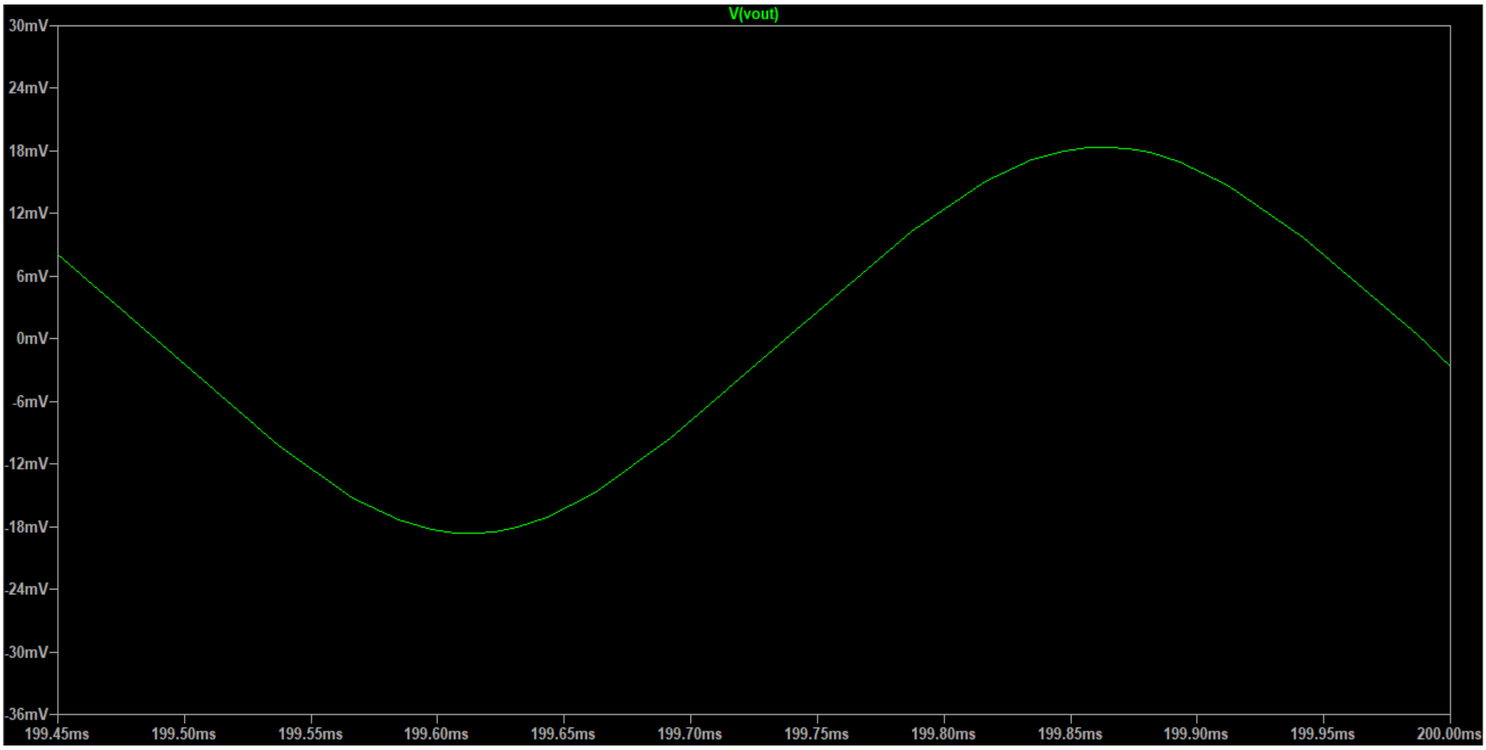
➢ ΑΣΚΗΣΗ 26:



Σχ. 11: Κύκλωμα σχεδιασμένο στο LTSpice

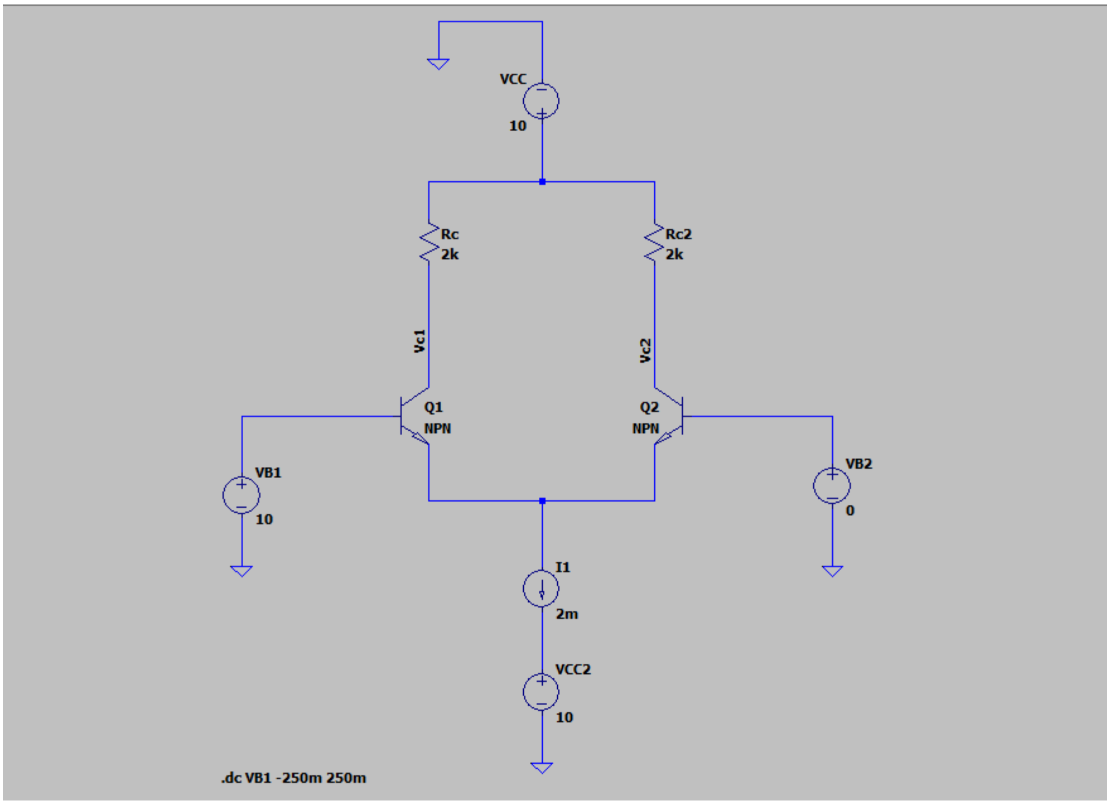
```
       --- Operating Point ---

V(n004):        0               voltage
V(n001):        10              voltage
V(n005):        4.51422e-016    voltage
V(n003):        0.902845        voltage
V(n002):        9.25587         voltage
V(n006):        0.299025        voltage
V(vout):        2.77676e-013    voltage
Ic(Q1):         0.000148825     device_current
Ib(Q1):         6.87068e-007    device_current
Ie(Q1):         -0.000149512    device_current
I(Cc):          4.51422e-018    device_current
I(Cc2):         -2.77676e-017   device_current
I(Ce):          8.97074e-019    device_current
I(R3):          -2.77676e-017   device_current
I(Re):          -0.000149512    device_current
I(R2):          -9.02845e-005   device_current
I(Rc):          -0.000148825    device_current
I(R1):          -9.09716e-005   device_current
I(Rs):          4.51422e-018    device_current
I(Vcc):         -0.000239797    device_current
I(Vin):         4.51422e-018    device_current
```

Σχ. 12: Τιμές των ρευμάτων και τάσεων του κυκλώματος



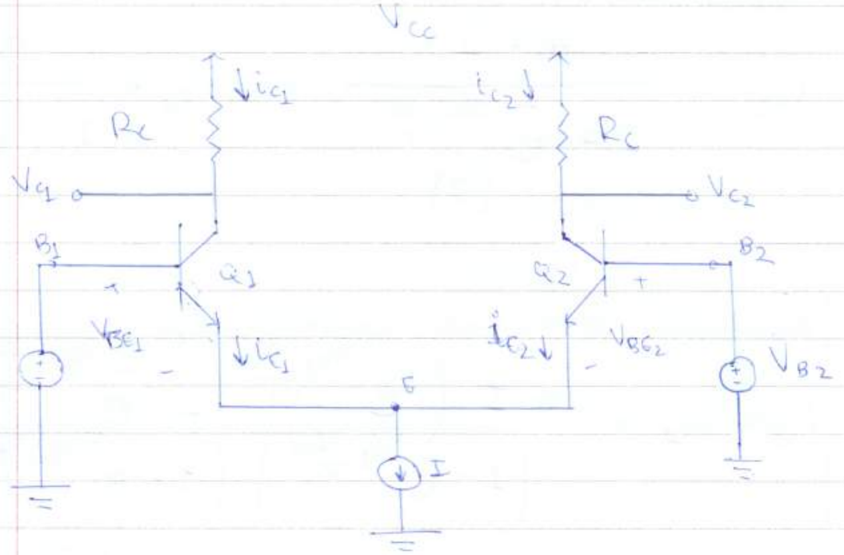
Σχ. 13: Κυματομορφή της τελευταίας περιόδου του σήματος της τάσης Vout

➢ ΑΣΚΗΣΗ 27:



Σχ. 14: Κύκλωμα σχεδιασμένο στο LTSpice

Άσκηση 27



Ισχύει $i_{C1} = I_S e^{\frac{V_{B1E}}{V_T}}$ και $i_{C2} = I_S e^{\frac{V_{B2E}}{V_T}}$

$\Rightarrow i_{C1} = I_S e^{\frac{V_{B1} - V_E}{V_T}}$ και $i_{C2} = I_S e^{\frac{V_{B2} - V_E}{V_T}}$

$\Rightarrow \frac{i_{C1}}{i_{C2}} = e^{\frac{V_{B1} - V_E - (V_{B2} - V_E)}{V_T}}$

$$\Rightarrow \frac{i_{C1}}{i_{C2}} = e^{\frac{V_{B1} - V_{B2}}{V_T}} \quad (1)$$

Από Ν.Ρ.Κ. στον κόμβο Ε έχουμε:

$i_{E1} + i_{E2} = I$

Όμως $i_{E1} = \frac{i_{C1}}{\alpha}$ και $i_{E2} = \frac{i_{C2}}{\alpha}$

Άρα: $\frac{i_{C1}}{\alpha} + \frac{i_{C2}}{\alpha} = I \Rightarrow i_{C1} + i_{C2} = \alpha I \quad (2)$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2): προκύπτει:

$$i_{C_1} = \frac{a \cdot I}{1 + e^{-\frac{V_{B1} - V_{B2}}{V_T}}} \quad (3) \qquad \text{και} \qquad i_{C_2} = \frac{a \cdot I}{1 + e^{\frac{V_{B1} - V_{B2}}{V_T}}} \quad (4)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη οπότε έχουμε:

$$i_{C_1} - i_{C_2} = \frac{a \cdot I \left(e^{\frac{V_{B1} - V_{B2}}{V_T}} - e^{-\frac{V_{B1} - V_{B2}}{V_T}} \right)}{\left(1 + e^{\frac{V_{B1} - V_{B2}}{V_T}}\right)\left(1 + e^{\frac{V_{B1} - V_{B2}}{V_T}}\right)}$$

• Τελικά: $i_{C_1} - i_{C_2} = I \cdot \tanh\left(\frac{V_{B1} - V_{B2}}{2V_T}\right)$

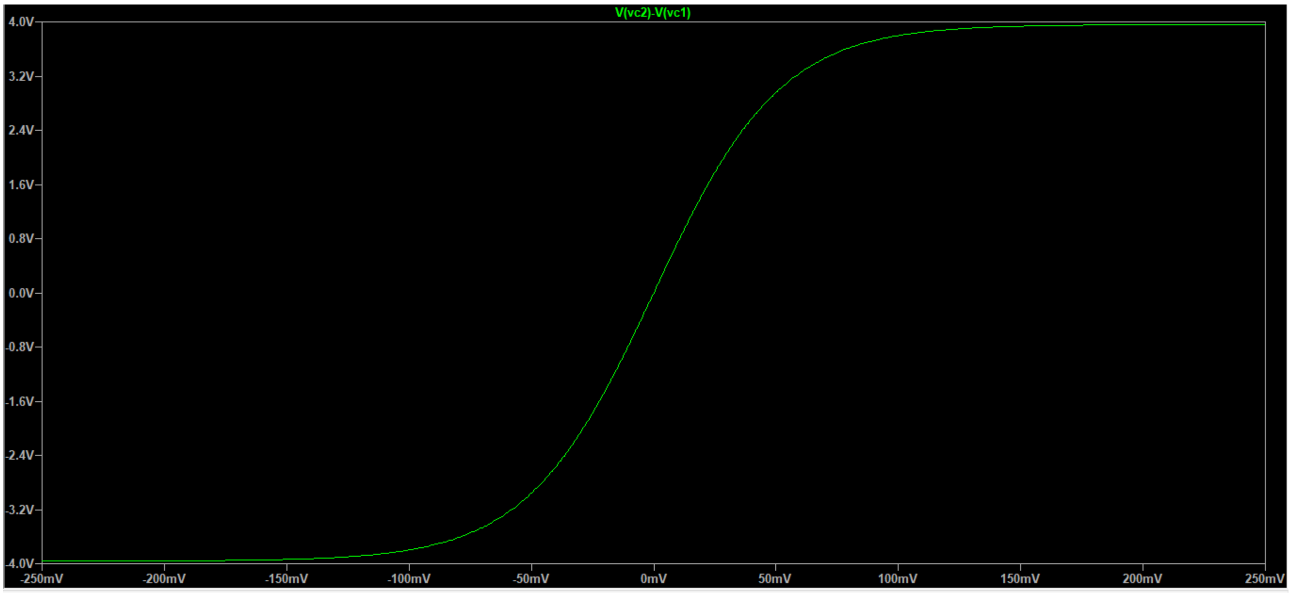
Τώρα για $i_{E_1} = 0{,}99I$ έχουμε $i_{C_1} = a \cdot 0{,}99I$

$$\overset{(3)}{\Longrightarrow} \cancel{a} \cdot 0{,}99 \cancel{I} = \frac{\cancel{a \cdot I}}{1 + e^{-\frac{V_{B1} - V_{B2}}{V_T}}}$$

$$\Rightarrow \left(1 + e^{\frac{V_{B2} - V_{B1}}{V_T}}\right) \cdot 0{,}99 = 1 \Rightarrow$$

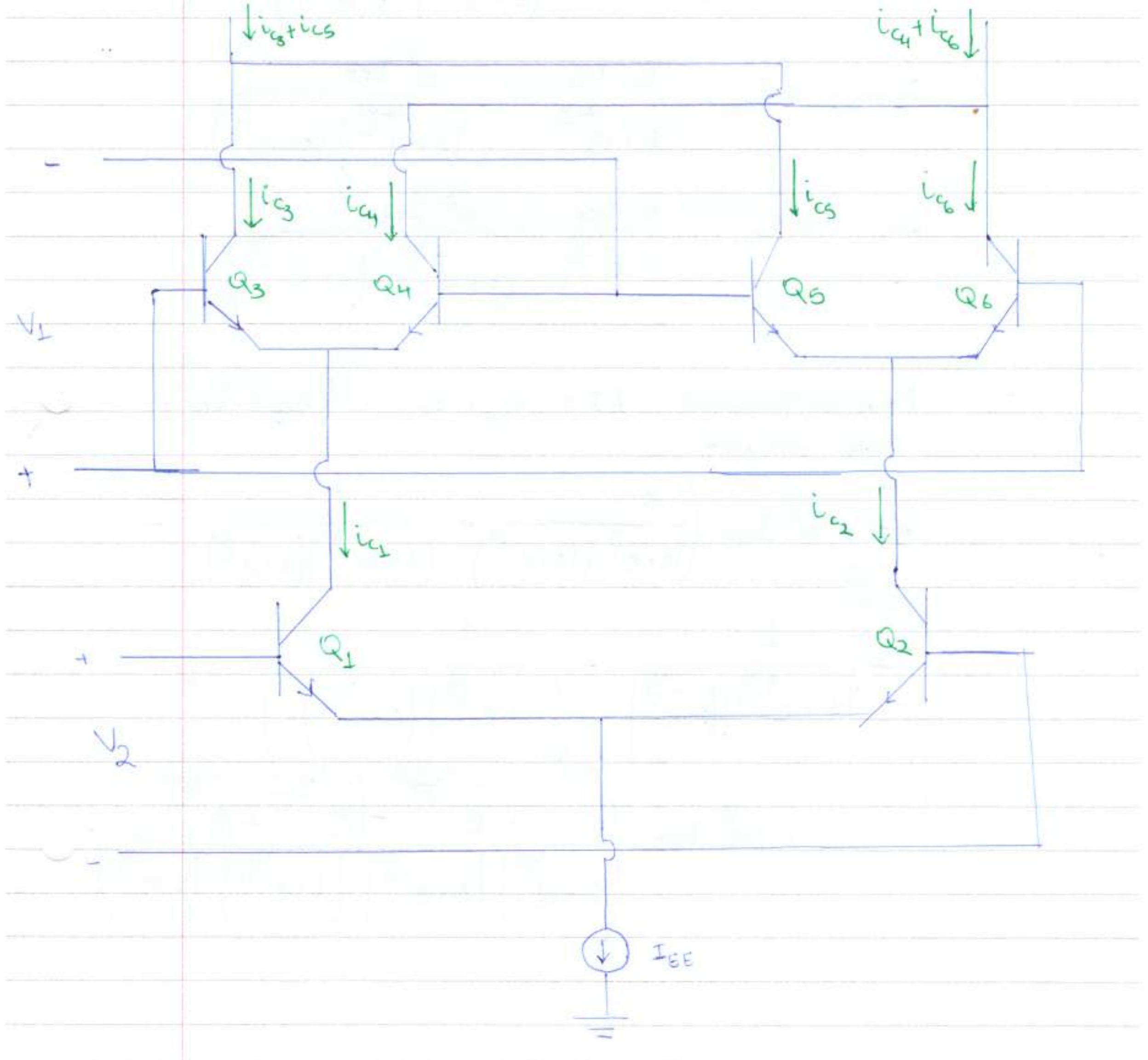
$$\Rightarrow V_T \ln\left(\frac{1}{0{,}99} - 1\right) = V_{B2} - V_{B1}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{B1} - V_{B2} = 114{,}88 \text{ mV}}$$



Σχ.15: Γραφική παράσταση $V_{C2} - V_{C1}$ συναρτήσει της V_{B1}

Άσκηση 28



▸ Βασιζόμενοι στην άσκηση 27 λαμβάνουμε τα εξής:

$$i_{c_1} = \frac{a\, I_{EE}}{1 + e^{-\frac{V_2}{V_T}}} \quad \text{και} \quad i_{c_2} = \frac{a\, I_{EE}}{1 + e^{\frac{V_2}{V_T}}}$$

Ομοίως:

$$i_{c_3} = \frac{a\, i_{c_1}}{1 + e^{-\frac{V_1}{V_T}}} = \frac{a^2\, I_{EE}}{\left(1 + e^{-\frac{V_1}{V_T}}\right)\left(1 + e^{-\frac{V_2}{V_T}}\right)}$$

και $i_{C_4} = \dfrac{a\, i_{C_1}}{1+e^{\frac{V_1}{V_T}}} = \dfrac{a^2 I_{EE}}{\left(1+e^{+\frac{V_1}{V_T}}\right)\left(1+e^{-\frac{V_2}{V_T}}\right)}$

Επίσης: $i_{C_5} = \dfrac{a \cdot i_{C_2}}{1+e^{+\frac{V_1}{V_T}}} = \dfrac{a^2 I_{EE}}{\left(1+e^{+\frac{V_1}{V_T}}\right)\left(1+e^{\frac{V_2}{V_T}}\right)}$

και $i_{C_6} = \dfrac{a\, i_{C_2}}{1+e^{-\frac{V_1}{V_T}}} = \dfrac{a^2 \cdot I_{EE}}{\left(1+e^{-\frac{V_1}{V_T}}\right)\left(1+e^{+\frac{V_2}{V_T}}\right)}$

Άρα η διαφορά $\Delta I = i_{C_3} + i_{C_5} - \left(i_{C_4} + i_{C_6}\right)$ είναι ίση με:

$$\Delta I = a^2 I_{EE}\left(\frac{1}{\left(1+e^{\frac{V_1}{V_T}}\right)\left(1+e^{\frac{V_2}{V_T}}\right)} + \frac{1}{\left(1+e^{-\frac{V_1}{V_T}}\right)\left(1+e^{-\frac{V_2}{V_T}}\right)} - \frac{1}{\left(1+e^{+\frac{V_1}{V_T}}\right)\left(1+e^{-\frac{V_2}{V_T}}\right)} - \frac{1}{\left(1+e^{-\frac{V_1}{V_T}}\right)\left(1+e^{\frac{V_2}{V_T}}\right)}\right) =$$

$$= \ldots = a^2 I_{EE}\,\frac{e^{\frac{V_1+V_2}{V_T}} + e^{-\frac{V_1+V_2}{V_T}} - \left(e^{\frac{V_2-V_1}{V_T}} + e^{\frac{V_1-V_2}{V_T}}\right)}{\left(1+e^{\frac{V_1}{V_T}}\right)\left(1+e^{-\frac{V_1}{V_T}}\right)\left(1+e^{\frac{V_2}{V_T}}\right)\left(1+e^{-\frac{V_2}{V_T}}\right)}$$