MATEMATICAS AVANZADAS PARA LA INGENIERIA

1. Demostrar las siguientes relaciones

a) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z}_1 - \overline{z}_2$

según la definición:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$
$$= (x_1 + iy_1) + (-x_2 - iy_2)$$
$$= (x_1 + iy_1) - (-x_2 - iy_2)$$
$$= \overline{z}_1 - \overline{z}_2$$

b) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Según su definicion: $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{|z_2|^2} \quad \text{tenemos:}$$

$$\left(\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\right)\left(\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2}\right) = \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2i^2}{x_2^2 - y_2^2i^2}$$
$$= \frac{x_1x_2 - x_1y_2i + y_1x_2i + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$
$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad \therefore \quad |z_2^2| = x_2^2 + y_2^2$$

c) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$

Según la definición:

$$\overline{z}_1 = x_1 - iy_1 \; ; \; \overline{z}_2 = x_2 - iy_2$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 - y_1y_2$$
$$= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$\overline{z_1z_2} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$\overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1$$
$$= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 - x_2y_1)$$
$$\overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$$

d) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Segun su definición

Conjugados

$z_1 = x_1 + iy_1 \quad ; \quad z_2 = x_2 + iy_2$

$\overline{z_1} = x_1 - iy_1 \quad ; \quad \overline{z_2} = x_2 - iy_2$

$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2$

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \therefore$

$\overline{z_1 + z_2} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2)$

2. Hallar las soluciones reales de las ecuaciones.

2. $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$

$= (6x + 1 + 3xi - 2i) + (x + 2y + 2xi - iy)$

$= 6x + 1 + 3i - 2i + x + 2y + 2xi - iy$

$= 7x + 5ix - 2i + 2y - iy + 1$

$= (7x + 2y + 1) + (5x - 2y - y)i$

parte real = parte imaginaria

$\begin{bmatrix} 7x + 2y + 1 = 5 \\ -2 - y + 5x = 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}$

De ①

$7x + 1 = 5 - 2y$

$7x = 4 - 2y$

$x = \dfrac{4 - 2y}{7}$

De ② sustituir ①

$-2 - y + 5\left(\dfrac{4 - 2y}{7}\right) = 6$

$\dfrac{-17y + 20}{7} - 2 = 6$

$-17y + 20 = 56$

$-17y = 56 - 20$

$y = -\dfrac{36}{17}$

$x = \dfrac{20}{17}$

Sustituir

3. $(x-iy)(a-ib)=i^5$, donde a, b son las numeros reales dados $|a|\neq|b|$

Tenemos $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

∴

$$=(xa-(-y)(-b))+(x(-b)+(-y)a)i$$

$$=(ax-by)+(-bx-ay)i$$

$a=x$
$b=-y$
$c=a$
$d=-b$

$$ax-by-ibx-iay=i^4 i \quad -1$$

$$=i(i^2)^2$$

$$=1^2 i$$

$(ax-by)+i(-ay-bx)=i$ reescribir deforma binomica

$$(ax-by)+i(-ay-bx)=0+i$$

$\mathbb{R}=i$ ∴

$$\begin{bmatrix} ax-by=0 \\ -ay-bx=1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow ① \\ \longrightarrow ② \end{matrix}$$

Para ①

$$ax-by=0$$

$$ax=by$$

$$x=\frac{by}{a} \quad a\neq 0$$

Sustiuir ① en ②

$$-ay-b\left(\frac{by}{a}\right)=1$$

$$-ay-\frac{b^2y}{\cancel{a}}=1\,a$$

$$-ay-b^2y=a$$

$$-y(a^2+b^2)=a$$

$$-1\left[-y=\frac{a}{a^2+b^2}\right]$$

$$y=-\frac{a}{a^2+b^2}$$

$a\neq 0$
$a\neq ib$
$a\neq -ib$

para x sustiuir

$$x=\frac{b\left(-\frac{a}{a^2+b^2}\right)}{\frac{a}{1}} \longrightarrow x=\frac{-\frac{ab}{a^2+b^2}}{\frac{a}{1}}=\boxed{-\frac{\cancel{a}b}{\cancel{a}(a^2+b^2)}}$$

4) $\frac{1}{z-i}+\frac{2+i}{1+i}=\sqrt{2}$, donde $z=x+iy$

$$\frac{1}{(x+iy)-i}+\frac{2+i}{1+i}=\sqrt{2}$$

$$=\frac{1}{x+iy-i}+\frac{3-i}{2}$$

mcm

$2(x+iy-i)$

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}(x+iy-i)}+\frac{(3-i)(x+iy-i)}{2(x+iy-i)}$$

$$=\frac{3x-ix+y+3iy+1-3i}{2(x+iy-i)}$$

$$=\frac{3x^2+2x+3y^2-6y+3+i(1-x^2-y^2)}{2x^2+2+2y^2-4y}$$

No se puede resolver

$$=\begin{cases}\dfrac{3x^2+3y^2+3+2(x-3y)}{2(y^2-2y+x^2+1)}=\sqrt{2}\\[2ex] \dfrac{-x^2-y^2+1}{2y^2-4y+2x^2+2}i=\sqrt{2}\end{cases}$$

$R\neq i$

5

Presentar el numero complejo $\frac{1}{(a+ib)^2} + \frac{1}{(a-ib^2)}$ en la forma algebraica

$$= \frac{(a-ib)^2}{(a+ib)^2(a-ib)^2} + \frac{(a+ib)^2}{(a+ib)^2(a-ib)^2}$$

$$= \frac{(a-ib)^2+(a+ib)^2}{(a+ib)^2(a-ib)^2}$$