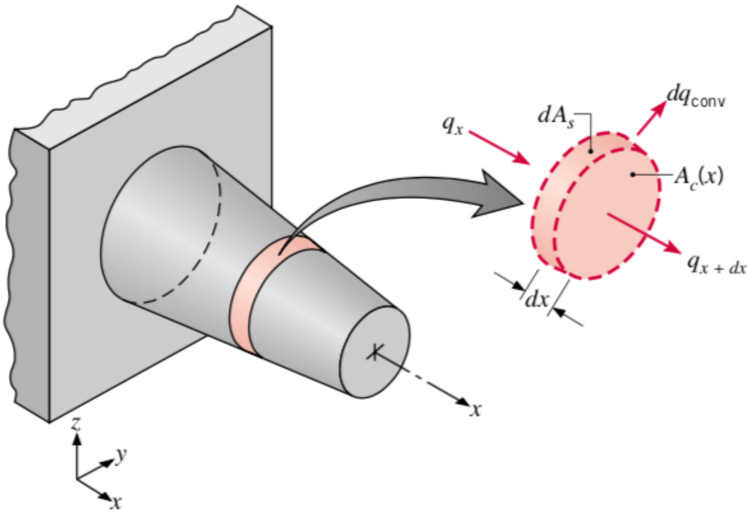
Desarrollemos una metodología simplificada para analizar el comportamiento térmico de las aletas o áreas extendidas. Consideremos una geometría (más o menos) general:



Haciendo un balance de calor en el cono, tenemos que el flujo de calor en la dirección x entre las caras anterior y posterior de un anillo obtenido por el corte transversal a la dirección x es:

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{\text{conv}}$$

En esta expresión estamos suponiendo que hay una ganancia o pérdida de calor convectivo por la superficie lateral del anillo que se refleja como el cambio en el flujo axial de calor.
La Ley de Fourier en la dirección *x,* tiene la forma:

$$q_x = -kA_c \frac{dT}{dx}$$

A_c es el área transversal, (esto es, perpendicular a la dirección x) de la aleta. El flujo de calor en la posición $x+dx$ puede escribirse de manera aproximada considerando su expansión en series de Taylor truncadas a primer orden:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx}\, dx$$

Sustituyendo la Ley de Fourier en la expresión anterior tenemos:

$$q_{x+dx} = -kA_c \frac{dT}{dx} - k\frac{d}{dx}\left(A_c \frac{dT}{dx}\right) dx$$

Por otro lado se tiene un diferencial del flujo convectivo se puede escribir en términos del diferencial de área usando la Ley de enfriamiento de Newton:

$$dq_{\text{conv}} = h\, dA_s (T - T_\infty)$$

sustituyendo las expresiones anteriores en el balance de calor encontramos: la siguiente relación para la temperatura como función de la coordenada *T(x)*:

$$\frac{d}{dx}\left(A_c\frac{dT}{dx}\right)-\frac{h}{k}\frac{dA_s}{dx}(T-T_\infty)=0$$

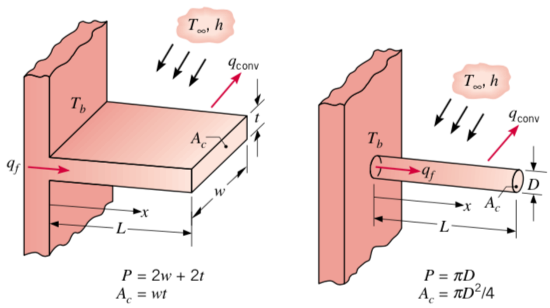
Recordando que en general, el área transversal Ac es una función de la coordenada axial x, esto es, $Ac(x)$, la ecuación anterior puede escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\left(\frac{1}{A_c}\frac{dA_c}{dx}\right)\frac{dT}{dx}-\left(\frac{1}{A_c}\frac{h}{k}\frac{dA_s}{dx}\right)(T-T_\infty)=0$$

En el caso para Ac constante que el área transversal sea una función lineal de la distancia a la placa, podemos escribir :

$$As= Px$$

donde P es el perímetro de la aleta.



En este caso, la ecuación que representa el balance de energía en la aleta es:

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{hP}{kA_c}(T-T_\infty)=0$$

Si ahora definimos $\theta(x)$ como el exceso de temperatura sobre la temperatura lejos de la aleta:

$$\theta(x)\equiv T(x)-T_\infty$$

La ecuación anterior toma la forma:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

donde el parámetro m está definido por la ecuación:

$$m^2 \equiv \frac{hP}{kA_c}$$

La solución general a la ecuación para $\theta(x)$ es de tipo exponencial

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Donde C_1 y C_2 son constantes de integración. Para estas variables tenemos que especificar los valores de frontera.
Una condición de frontera natural es considerar que se conoce la temperatura en el punto donde se encuentran la aleta y la superficie que se expande. Llamemos a este punto $x= 0$.
Entonces $\theta(x = 0)$

$$\theta(0) = T_b - T_\infty \equiv \theta_b$$

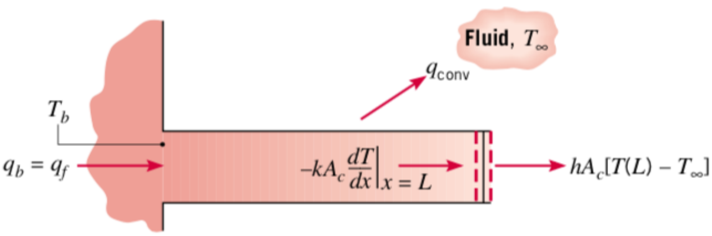
Ahora debemos determinar la condición de frontera en el extremo opuesto a la base de la aleta. Consideraremos cuatro casos:

Caso A)
Supongamos que la temperatura en $x= L$ está determinada por una condición de tipo convectivo. Haciendo el balance de calor en el extremo de la aleta, tendremos que:

$$hA_c[T(L) - T_\infty] = -kA_c \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}$$

$$h\theta(L) = -k \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L}$$

La segunda expresión es el balance de calor expresado en función de $\theta(x = L)$



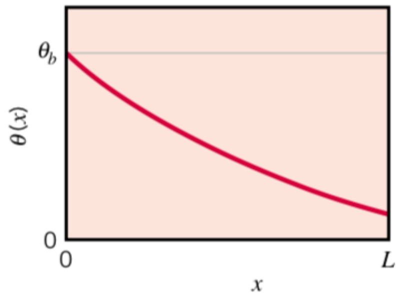
por lo que las ecuaciones que determinan las constantes de integración son:

$$\theta_b = C_1 + C_2$$

$$h(C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) = km(C_2 e^{-mL} - C_1 e^{mL})$$

y la solución general es

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + (h/mk)\sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk)\sinh mL}$$



Con la expresión para la temperatura, podemos calcular fácilmente el calor que sale por la base de la aleta:

$$q_f = q_b = -kA_c \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = -kA_c \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}$$

$$q_f = \sqrt{hPkA_c}\,\theta_b \frac{\sinh mL + (h/mk)\cosh mL}{\cosh mL + (h/mk)\sinh mL}$$

Tarea 10 Obtener las expresiones anteriores y graficar

Caso B)

Supongamos que el extremo de la aleta está aislado térmicamente. La derivada de la temperatura con respecto a la coordenada axial *x* es cero. Esto es:

$$\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L} = 0$$

Con un procedimiento análogo tenemos que la distribución de temperaturas a lo largo de la dirección *x* es:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$$

y el flujo de calor:

$$q_f = \sqrt{hPkA_c}\theta_b \tanh mL$$

Caso C)

Supongamos que conocemos la temperatura de extremo en *x*= *L*

$$\theta(L) = \theta_L$$

Una vez que determinamos las constantes de integración, podemos calcular la distribución de temperaturas

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{(\theta_L/\theta_b)\sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL}$$

y con esta expresión encontramos el flujo de calor en la base:

$$q_f = \sqrt{hPkA_c}\theta_b \frac{\cosh mL - \theta_L/\theta_b}{\sinh mL}$$

Caso D)

Como un caso especial de la solución anterior, podemos pensar en una aleta muy larga en la que la temperatura del extemo tienda a cero:

$$L \rightarrow \infty, \theta_L \rightarrow 0$$

La solución toma la forma:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-mx}$$

y el flujo de calor es

$$q_f = \sqrt{hPkA_c}\theta_b$$