

3.- Análisis vectorial.

§3.1. Campos escalares y vectoriales (61); §3.2. Derivada de un vector respecto a un escalar (63); §3.3. Integral de un vector con respecto de una variable escalar (65); §3.4. Circulación de un vector (66); §3.5. Flujo de un campo vectorial (69); §3.6. Gradiente de un campo escalar (71); §3.7. Función potencial (73); §3.8. Divergencia de un campo vectorial (74); §3.9. Teorema de Gauss (76); §3.10. Rotacional de un campo vectorial (77); §3.11. Teorema de Stokes (78); §3.12. El operador nabla (80); Problemas (82)

§3.1. Campos escalares y vectoriales.- Consideremos una función tal que haga corresponder a cada punto del espacio el valor de una cierta magnitud física (función unívoca de punto); decimos, entonces, que ese espacio, como soporte de dicha magnitud física, es un *campo*; así, hablaremos de campos gravitatorios, eléctricos, de presiones, de temperaturas, ...

De acuerdo con el carácter de la magnitud física que define al campo distinguiremos dos tipos de campos:

Campo escalar: Toda función que haga corresponder a cada punto del espacio el valor de una magnitud escalar define un campo escalar (Figura 3.1). Como ejemplos de campos escalares tenemos los campos de temperatura, de presión, de densidad ...

Campo vectorial: Toda función que haga corresponder a cada punto del espacio el valor de una magnitud vectorial, esto es, un vector, define un campo vectorial (Figura 3.2). Como ejemplos de campos vectoriales tenemos el campo gravitatorio (\mathbf{g}), el eléctrico (\mathbf{E}), el magnético (\mathbf{B}), el de velocidades en una corriente fluida (\mathbf{v})

En general, el valor de la magnitud física que define al campo (escalar o vectorial) será función

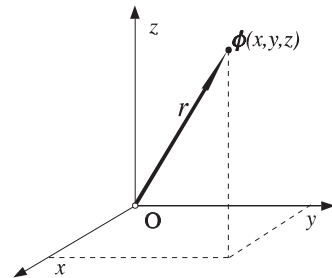


Figura 3.1

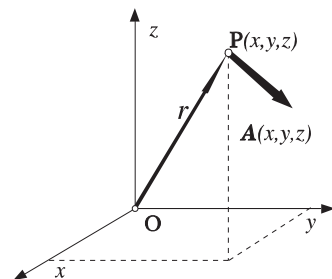


Figura 3.2

tanto de las coordenadas del punto como del tiempo. Así, escribiremos para los campos escalares y vectoriales anteriormente definidos

$$\phi(\mathbf{r}, t) \quad \text{y} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad [3.1]$$

o bien, en coordenadas cartesianas,

$$\phi(x, y, z, t) \quad \text{y} \quad \mathbf{A}(x, y, z, t) \quad [3.2]$$

Si el campo sólo es función de la posición, o sea si es $\phi(x, y, z)$ ó $\mathbf{A}(x, y, z)$, diremos que se trata de un *campo estacionario*; esto es, independiente del tiempo. Si, por el contrario, sólo es función del tiempo, y, por tanto, toma el mismo valor en un instante dado en todos los puntos del espacio en el que está definido, diremos que se trata de un *campo uniforme* y escribiremos $\phi(t)$ ó $\mathbf{A}(t)$.

Los campos escalares y los vectoriales admiten una representación gráfica que, si la realizamos de un modo adecuado, nos permitirá obtener una idea inmediata de algunas de las características del campo.

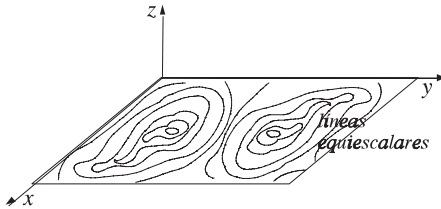


Figura 3.3

En el caso de un campo escalar, representado analíticamente por la magnitud escalar ϕ , función continua en todo el espacio (salvo, eventualmente en algunos puntos, líneas o superficies aisladas), se define la *superficie equiescalar* como el lugar geométrico de los puntos del espacio en los que la función ϕ toma un determinado valor.

Obsérvese que si en lugar de considerar un espacio ordinario de 3 dimensiones considerásemos un espacio de sólo 2 dimensiones, entonces hablaríamos de *líneas equiescalares* o *isolíneas*.

Es conveniente dibujar las superficies (o líneas) equiescalares correspondientes a valores del escalar ϕ regularmente espaciados, esto es, tales que

$$\phi_2 = \phi_1 + \Delta\phi ; \quad \phi_3 = \phi_2 + \Delta\phi ; \quad \dots \quad [3.3]$$

En la Figura 3.3 se representan las líneas equiescalares correspondientes a un cierto campo escalar bidimensional. En las regiones donde las líneas (o superficies) equiescalares están más apretadas la variación del escalar ϕ por unidad de desplazamiento (el gradiente) es más acusada. En algunos campos, como es el caso del representado en la Figura 3.3, pueden existir más de una línea o superficie equiescalares correspondientes a un mismo valor del escalar; pero las líneas o superficies equiescalares correspondientes a distintos valores de la magnitud escalar ϕ en ningún caso pueden cortarse, ya que ϕ es una función unívoca de punto (*i.e.*, en cada punto del espacio la función $\phi(x, y, z)$ sólo

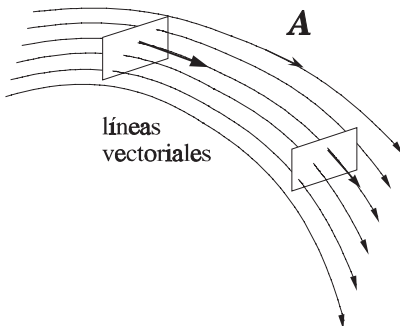


Figura 3.4

En la Figura 3.4 se representan las líneas equiescalares correspondientes a un cierto campo escalar bidimensional. En las regiones donde las líneas (o superficies) equiescalares están más apretadas la variación del escalar ϕ por unidad de desplazamiento (el gradiente) es más acusada. En algunos campos, como es el caso del representado en la Figura 3.3, pueden existir más de una línea o superficie equiescalares correspondientes a un mismo valor del escalar; pero las líneas o superficies equiescalares correspondientes a distintos valores de la magnitud escalar ϕ en ningún caso pueden cortarse, ya que ϕ es una función unívoca de punto (*i.e.*, en cada punto del espacio la función $\phi(x, y, z)$ sólo

toma un valor).

Cuando la magnitud física que define al campo tenga carácter vectorial, como por ejemplo la función vectorial $\mathbf{A}(x,y,z)$, se dibujarán unas líneas de modo que sean tangentes en cada uno de sus puntos a la dirección del vector \mathbf{A} en esos puntos; estas líneas son llamadas *líneas vectoriales* y nos mostrarán la dirección del vector \mathbf{A} en cada uno de los puntos del espacio donde el campo vectorial esté definido. La representación del módulo del vector \mathbf{A} en cada punto puede conseguirse espaciando las líneas vectoriales de modo que el número de ellas que atraviesen la unidad de superficie situada perpendicularmente a la dirección del campo en dicho punto sea igual a la intensidad del campo (módulo del vector \mathbf{A}) en dicho punto. También aquí, al ser $\mathbf{A}(x,y,z)$ una función unívoca de punto, las líneas vectoriales no pueden cortarse entre sí.

Puesto que el campo vectorial \mathbf{A} en cualquier punto del espacio es tangente a la línea vectorial que pasa por ese punto, si consideramos un desplazamiento elemental $d\mathbf{r}$ sobre la línea vectorial será $\mathbf{A} \times d\mathbf{r} = 0$ (condición de paralelismo), de modo que

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z} \quad [3.4]$$

son las ecuaciones diferenciales de la familia de líneas vectoriales asociadas al campo vectorial $\mathbf{A}(x,y,z)$.

Ejemplo I.- Líneas vectoriales.- Dado el campo vectorial $\mathbf{A} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$, obtener la ecuación general de las líneas vectoriales y representarlas gráficamente.

Aplicaremos la expr. [3.4] para obtener las ec^{es}.dif^{es}. de las líneas vectoriales; i.e.,

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

de donde se sigue

$$\begin{cases} x dx + y dy = 0 \\ dz = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \text{cte.} \\ z = \text{cte.} \end{cases}$$

de modo que las líneas vectoriales son circunferencias concéntricas con el eje z , contenidas en los planos $z=\text{cte}$ y recorridas en el sentido antihorario, como se ilustra en la Figura 3.5. Obsérvese que $A^2 = y^2 + x^2 = r^2$, de modo que el radio de cada una de las circunferencias es igual al módulo del vector campo en los puntos de la misma, que permanece constante.

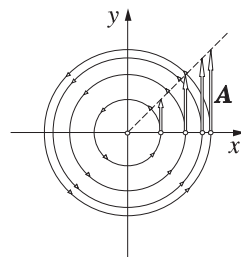


Figura 3.5

§3.2. Derivada de un vector respecto a un escalar.- En el párrafo anterior hemos tratado con vectores variables; esto es, función de una o más variables independientes, que bien pueden ser las coordenadas cartesianas (x,y,z) del espacio y el tiempo t . El estudio de estos vectores variables puede reducirse al de las fun-

ciones ordinarias sin más que referirlos a un sistema de ejes fijos. En un tal sistema, las componentes de un vector variable resultan ser funciones, en el sentido más usual de la palabra, de las variables independientes. Se estudian así, sin dificultad, los conceptos de continuidad, derivación, integración, ...

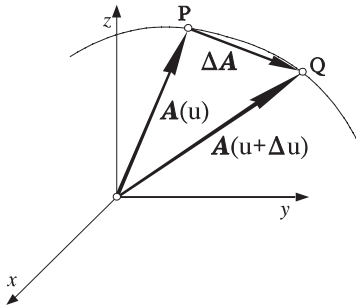


Figura 3.6

Así, en el caso de un vector que sea función de una única variable independiente u , esto es, una función (que supondremos continua) de la variable escalar u , $A(u)$, si el escalar experimenta un incremento Δu , el vector experimentará una variación $\Delta A = A(u + \Delta u) - A(u)$, cuyo significado queda explícito en la Figura 3.6. En completo paralelismo con la definición ordinaria de derivada, definimos la derivada del vector $A(u)$ con respecto al escalar u como

$$\frac{dA}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta u} \quad [3.5]$$

en el supuesto de que dicho límite exista.

La derivada dA/du es un vector que tiene la dirección hacia la que tiende el vector ΔA cuando Δu tiende a cero. Como ΔA es la cuerda del arco descrito por el extremo del vector A , resulta que la derivada dA/du está dirigida según la tangente a la curva descrita por el extremo del vector A cuando se va incrementando el valor del escalar u , pues en el límite dicha cuerda pasa a la posición tangente a la curva.

Si es $A = A_x(u)\mathbf{i} + A_y(u)\mathbf{j} + A_z(u)\mathbf{k}$, por la propiedad distributiva de la derivación tenemos

$$\frac{dA}{du} = \frac{dA_x}{du}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{du}\mathbf{j} + \frac{dA_z}{du}\mathbf{k} \quad [3.6]$$

y con notación matricial escribiremos

$$\frac{dA}{du} = \frac{d}{du} \begin{pmatrix} A_x(u) \\ A_y(u) \\ A_z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dA_x(u)/du \\ dA_y(u)/du \\ dA_z(u)/du \end{pmatrix} \quad [3.7]$$

De la definición de derivada de un vector y del álgebra vectorial se siguen con facilidad las siguientes propiedades, que damos sin demostrar, siendo $A(u)$, $B(u)$... vectores funciones de la variables escalar u , m un escalar y $\phi(u)$ una función escalar:

$$\frac{d}{du}(A \pm B) = \frac{dA}{du} \pm \frac{dB}{du} \quad [3.8]$$

$$\frac{d}{du}(mA) = m \frac{dA}{du} \quad \frac{d}{du}(\phi A) = \phi \frac{dA}{du} + A \frac{d\phi}{du} \quad [3.9]$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} \quad \frac{d}{du}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B} \quad [3.10]$$

$$\frac{d}{du} \left(\frac{d\mathbf{A}}{du} \right) = \frac{d^2\mathbf{A}}{du^2} = \frac{d^2A_x}{du^2} \mathbf{i} + \frac{d^2A_y}{du^2} \mathbf{j} + \frac{d^2A_z}{du^2} \mathbf{k} \quad [3.11]$$

Si en lugar de una sola variable independiente aparecen dos o más, habrá que introducir *derivadas parciales* con respecto a ellas. Las fórmulas anteriores se transforman con cambios evidentes sustituyendo las derivadas totales por parciales.

En el caso de un campo vectorial $\mathbf{A}(x,y,z,t)$, esto es

$$\mathbf{A} = A_1(x,y,z,t)\mathbf{i} + A_2(x,y,z,t)\mathbf{j} + A_3(x,y,z,t)\mathbf{k}$$

tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} &= \frac{\partial A_1}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial A_2}{\partial x} \mathbf{j} + \frac{\partial A_3}{\partial x} \mathbf{k} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} &= \frac{\partial A_1}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial A_2}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial A_3}{\partial y} \mathbf{k} \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} &= \frac{\partial A_1}{\partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial A_2}{\partial z} \mathbf{j} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \mathbf{k} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= \frac{\partial A_1}{\partial t} \mathbf{i} + \frac{\partial A_2}{\partial t} \mathbf{j} + \frac{\partial A_3}{\partial t} \mathbf{k} \end{aligned} \quad [3.12]$$

Como suponemos que los versores ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) son fijos, se tiene como definición de diferencial del vector \mathbf{A}

$$d\mathbf{A} = dA_1 \mathbf{i} + dA_2 \mathbf{j} + dA_3 \mathbf{k} \quad [3.13]$$

$$\text{siendo} \quad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x} dx + \frac{\partial A_i}{\partial y} dy + \frac{\partial A_i}{\partial z} dz + \frac{\partial A_i}{\partial t} dt \quad [3.14]$$

con $i = 1, 2, 3$. En particular, si es $\mathbf{A} = \mathbf{A}(u)$, será

$$dA_i = \frac{dA_i}{du} du \quad [3.15]$$

§3.3. Integral de un vector con respecto de una variable escalar.- De la definición de derivada de un vector respecto de una variable escalar se sigue, como operación inversa, la integración. Así, dado un vector variable $\mathbf{A} = \mathbf{A}(u)$, definiremos la integral *indefinida* de $\mathbf{A}(u)$ como

$$\int \mathbf{A}(u) du = \mathbf{i} \int A_1(u) du + \mathbf{j} \int A_2(u) du + \mathbf{k} \int A_3(u) du + \mathbf{C} \quad [3.16]$$

$$\text{o sea} \quad \int \mathbf{A}(u) du = \mathbf{B}(u) + \mathbf{C} \quad [3.17]$$

siendo $\mathbf{B}(u)$ el vector cuyas componentes son las integrales anteriores y \mathbf{C} un vector constante arbitrario. Evidentemente es

$$A(u) = \frac{dB(u)}{du} \quad [3.18]$$

Análogamente se define la integral *definida* de $A(u)$ entre los valores $u=\alpha$ y $u=\beta$, obteniéndose la siguiente generalización de la regla de BARROW:

$$\int_{\alpha}^{\beta} A(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dB(u)}{du} du = [B(u) + C]_{\alpha}^{\beta} = B(\beta) - B(\alpha) \quad [3.19]$$

§3.4. Circulación de un vector.- Supongamos definido un arco de curva regular por el vector de origen fijo O, $r(t)$, siendo t un parámetro escalar (no necesariamente el tiempo), y dado un campo vectorial $A(r)$, función continua de punto. Podemos definir la integral del producto escalar $A \cdot dr$; esto es,

$$\int_{\alpha}^{\beta} A \cdot dr \quad [3.20]$$

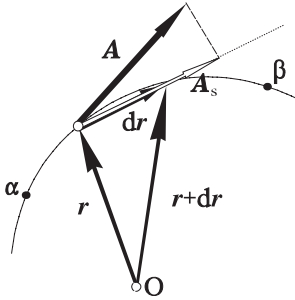


Figura 3.7

donde C es la curva sobre la que se efectúa la integración, α y β , son los puntos inicial y final sobre dicha curva y dr es un desplazamiento infinitesimal sobre la misma. Puesto que $A \cdot dr$ es un escalar, está claro que la integral [3.20] dará como resultado un escalar. Dicha integral se denomina *circulación del vector $A(r)$ sobre la curva C, entre los puntos α y β* .

La definición de una integral de esta clase, llamada *integral curvilínea*, es muy semejante a la definición de RIEMANN de la integral definida. El trozo de curva, entre los puntos α y β se divide en un gran número de pequeños elementos Δr_i ; en cada elemento se toma un punto interior al mismo y se determina el valor de $A(r)$ en dicho punto; y, finalmente, se calcula el producto escalar de cada incremento Δr_i por el valor correspondiente de A_i , y se suman todos esos productos. La integral curvilínea queda entonces definida como el límite de dicha suma (en el supuesto de que dicho límite exista) a medida que el número de elementos se hace cada vez mayor, tendiendo a infinito, de tal manera que cada elemento tenderá a cero. Esta definición puede expresarse en forma compacta por

$$\int_{\alpha}^{\beta} A \cdot dr = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N A_i \cdot \Delta r_i \quad [3.21]$$

La evaluación de una integral curvilínea puede llevarse a cabo de la forma siguiente. Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z) de modo que, siendo $A(x,y,z) = A(t)$, será

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad d\mathbf{r} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \right) dt \quad [3.22]$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_{\alpha}}^{t_{\beta}} \left[A_1(t) \frac{dx}{dt} + A_2(t) \frac{dy}{dt} + A_3(t) \frac{dz}{dt} \right] dt \quad [3.23]$$

$$\text{o también} \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad [3.24]$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_{\alpha}}^{x_{\beta}} A_1(x,y,z) dx + \int_{y_{\alpha}}^{y_{\beta}} A_2(x,y,z) dy + \int_{z_{\alpha}}^{z_{\beta}} A_3(x,y,z) dz \quad [3.25]$$

Ejemplo II.- Dado el campo vectorial $\mathbf{A} = 2xy\mathbf{i} + (x^2+2yz^3)\mathbf{j} + 3y^2z^2\mathbf{k}$, calcular su circulación entre los puntos (0,0,0) y (1,2,3) a lo largo del camino definido: **a)** por la línea quebrada determinada por los puntos (0,0,0), (1,0,0) (1,2,0) y (1,2,3); **b)** por la recta que pasa por los dos puntos.

a) A partir de la expresión [3.25], se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{x=0}^1 (2xy) dx + \int_{y=0}^2 (x^2+2yz^3) dy + \int_{z=0}^3 (3y^2z^2) dz = \\ &= \int_0^1 (0) dx + \int_0^2 dy + \int_0^3 12z^2 dz = 0 + 2 + 108 = 110 \end{aligned}$$

b) Las ecuaciones de dicha recta son $x/1 = y/2 = z/3$, o bien, en forma paramétrica

$$x = t \quad y = 2t \quad z = 3t$$

correspondiendo los puntos extremos a $t=0$ y $t=1$, respectivamente, y siendo entonces

$$\begin{aligned} dx/dt &= 1 & dy/dt &= 2 & dz/dt &= 3 \\ \mathbf{A} &= 4t^2\mathbf{i} + (t^2+108t^4)\mathbf{j} + 108t^4\mathbf{k} \end{aligned}$$

de modo que, aplicando [3.23], tenemos

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 [4t^2 + 2(t^2 + 108t^4) + 3(108t^4)] dt = \int_0^1 [6t^2 + 540t^4] dt = 110$$

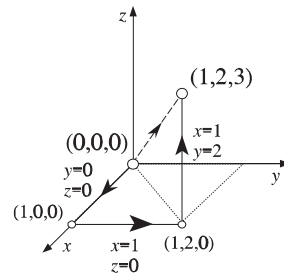


Figura 3.8

Si se invierte el sentido de la circulación, esto es si se invierte el sentido de $d\mathbf{r}$, cambia el signo de la integral [3.20], o sea

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\beta}^{\alpha} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad [3.26]$$

Si coinciden los puntos inicial y final, esto es si la integral curvilínea se evalúa sobre una curva cerrada, es costumbre emplear una notación especial,

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad [3.27]$$

Por otra parte, si \mathbf{A} es un vector constante, esto es, si se trata de un campo vectorial uniforme, entonces tenemos que

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot \int_{\alpha}^{\beta} d\mathbf{r} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\alpha} \mathbf{P}_{\beta} \quad [3.28]$$

de modo que

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad [3.29]$$

ya que $\mathbf{P}_{\alpha} \mathbf{P}_{\beta} = 0$.

Generalmente la circulación del vector \mathbf{A} entre los puntos α y β es función de la curva que una dichos puntos; *i.e.*, del camino seguido para ir del primer punto al segundo; es decir,

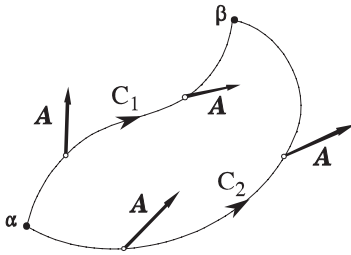


Figura 3.9

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad [3.30]$$

y será preciso especificar el camino seguido entre los puntos α y β para calcular la circulación

del campo vectorial \mathbf{A} entre dichos puntos (Figura 3.9).

No obstante, en la física, o lo que es lo mismo, en la Naturaleza, existen algunos campos sumamente importantes en los que se verifica que su circulación es independiente del camino que se siga para realizar la integración de [3.20] entre los puntos α y β . Tales campos vectoriales reciben el nombre de *campos conservativos o irrotacionales* (por las razones que se verán más adelante). En un campo conservativo, a causa de que su circulación no depende del camino seguido entre dos puntos dados, ésta puede calcularse como la diferencia de valores que toma una cierta función escalar de punto llamada *función potencial*. Son campos conservativos el gravitatorio y el electrostático. No son conservativos el campo eléctrico de inducción, ni el campo de velocidades en una corriente fluida con remolinos.

La condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial \mathbf{A} sea conservativo es que sea nula la circulación de \mathbf{A} a lo largo de cualquier línea cerrada del espacio en el que está definido el campo. O sea que

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad [3.31]$$

ya que entonces

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\beta}^{\alpha} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad [3.32]$$

lo que implica que

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad [3.33]$$

o sea que la circulación del campo entre dos puntos dados no depende del camino que sigamos para unir dichos puntos.

§3.5. Flujo de un campo vectorial.-

Imaginemos un elemento de superficie suficientemente pequeño como para que podamos considerarlo como plano; dicho elemento de superficie es representable mediante un vector, $d\mathbf{S}$, cuyo módulo es el área del elemento, cuya dirección es normal al plano del mismo y cuyo sentido es el del avance de un tornillo que girase según el sentido atribuido arbitrariamente al contorno del elemento de superficie (Figura 3.10).

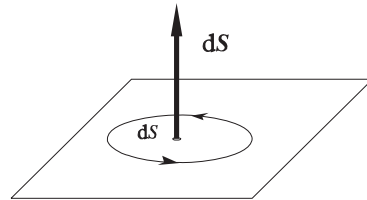


Figura 3.10

Consideremos un campo vectorial \mathbf{A} y un tal elemento de superficie $d\mathbf{S}$; al ser infinitesimal dicho elemento, el vector \mathbf{A} puede considerarse constante en toda la extensión de dicho elemento de superficie (Figura 3.11). Se define el *flujo elemental* del campo vectorial \mathbf{A} a través del elemento de superficie $d\mathbf{S}$ como el producto escalar

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad [3.34]$$

o sea

$$d\Phi = A dS \cos \theta = A dS' \quad [3.35]$$

Puesto que dS' es la proyección del elemento de superficie dS en la dirección normal al campo vectorial \mathbf{A} , y recordando lo que dijimos para la representación de los campos vectoriales mediante líneas vectoriales, vemos que el flujo elemental $d\Phi$ es igual al número de líneas vectoriales que atraviesan la superficie dS .

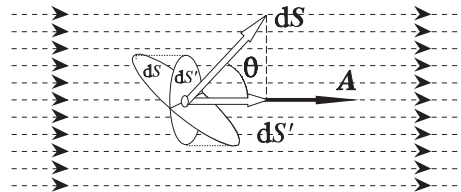


Figura 3.11

Ahora, consideremos una superficie S colocada en una región cualquiera del espacio en el que existe un campo vectorial \mathbf{A} . Dividamos dicha superficie en superficies elementales $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots$ y tracemos los versores normales $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots$ a cada una de dichas superficies elementales (Figura 3.12), de modo que

$$\Delta S_i = \mathbf{e}_i \Delta S_i \quad [3.36]$$

Los versores \mathbf{e}_i apuntarán siempre hacia fuera (convexidad) de la superficie S . El flujo del campo vectorial \mathbf{A} a través de toda la superficie S se define como la *integral de superficie*

$$\Phi = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \mathbf{A}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i \quad [3.37]$$

con consideraciones análogas a las que hicimos cuando definíamos la integral curvilínea en el apartado anterior.

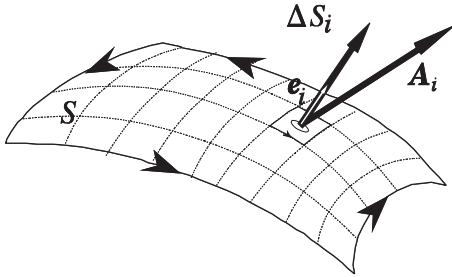


Figura 3.12

La integral de superficie, y por tanto el flujo, son claramente magnitudes escalares. El valor del flujo de un campo vectorial a través de una superficie puede ser un número positivo, negativo y nulo. Si el flujo es positivo, se denomina *flujo saliente*; si es negativo, se denomina *flujo entrante*; si es cero, no hay flujo neto.

El nombre de *flujo* se debe a una aplicación de la ec. [3.37] al estudio de las corrientes fluidas. Supongamos que tenemos

una corriente de partículas, todas moviéndose hacia la derecha con una misma velocidad \mathbf{v} (Figura 3.13). Aquellas partículas que atraviesan el elemento de superficie $d\mathbf{S}$ durante un intervalo de tiempo Δt estarían contenidas en un cilindro de base $d\mathbf{S}$, generatriz paralela a \mathbf{v} y longitud $v\Delta t$. El volumen de tal cilindro es $v\Delta t dS \cos \theta$. Supongamos que haya n partículas por unidad de volumen; entonces, el número total de partículas que atraviesan la superficie $d\mathbf{S}$ por unidad de tiempo, o *flujo de partículas*, es

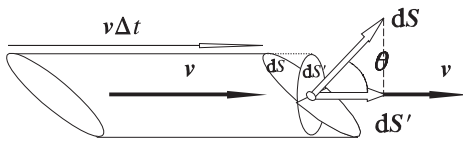


Figura 3.13

$$n v dS \cos \theta = n \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad [3.38]$$

y el número total de partículas que pasarán a través de una superficie finita, S , será

$$\Phi = \int_S n \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad [3.39]$$

expresión similar a la [3.37], con $\mathbf{A} = n\mathbf{v}$. Se comprenderá que el nombre de

flujo dado a la ec. [3.37] no significa que, en general, haya movimiento real de algo material a través de una superficie.

Si la integral de superficie que define al flujo del campo vectorial se extiende sobre una superficie cerrada, entonces se utiliza la notación

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad [3.40]$$

Interpretando el flujo como el número de líneas vectoriales que atraviesan una superficie, si ésta es cerrada y el flujo es positivo (saliente) habrá más flujo saliente

(+) que entrante (-), de modo que salen más líneas vectoriales desde el interior de la superficie que las que entran en la misma; diremos que dentro de la superficie hay una *fente* o creación de líneas vectoriales. Por el contrario, si el flujo a través de una superficie cerrada es negativo, diremos que hay un *sumidero* o desaparición de líneas vectoriales en el interior de la superficie cerrada, ya que entran más líneas que las que salen. Por último, si el flujo a través de una superficie cerrada es nulo, todas las líneas vectoriales que penetran en la superficie saldrán por otros puntos de la misma, de modo que el efecto neto es que ni se crean ni se destruyen líneas vectoriales en el interior de la superficie cerrada.

La integral de superficie $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ depende, en general, de la superficie de integración y los casos en que no depende de dicha superficie son particularmente interesantes.

Diremos que un campo vectorial es *solenoidal* si

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad [3.41]$$

para cualquier superficie sumergida en el campo. Ya hemos dicho que esto equivale a afirmar que el número de líneas vectoriales que salen por unos puntos de la superficie es igual al número de las que entran por otros

puntos de la misma, de modo que ni nacen ni mueren líneas vectoriales en el interior de la superficie cerrada. El campo gravitatorio sólo es solenoidal en aquellas regiones que no contienen masas gravitatorias, pues éstas actúan como sumideros de líneas de fuerza gravitatoria. Lo mismo ocurre con el campo electrostático (Figura 3.14): sólo es solenoidal donde no existan cargas eléctricas. El campo magnético \mathbf{B} es solenoidal en todos los puntos del espacio, ya que las líneas de inducción magnéticas son cerradas.

De lo anteriormente expuesto se sigue fácilmente que las *fuentes* y *sumideros* de un *campo* representan las *fuentes escalares* (positivas, fuentes; negativas, sumideros) del campo. Así, la fuente u origen escalar del campo gravitatorio es la *masa gravitatoria*, que se comporta como sumidero del campo. La fuente u origen escalar del campo electrostático es la carga eléctrica: las cargas positivas representan las fuentes y las negativas los sumideros de campo. Obviamente, el campo magnético \mathbf{B} no tiene fuentes escalares; *i.e.*, su origen no es de naturaleza escalar, sino vectorial (cargas en movimiento).

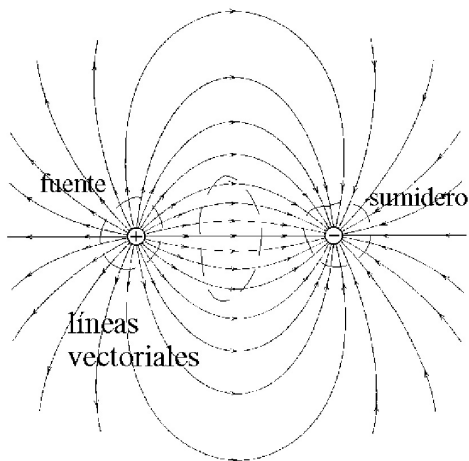


Figura 3.14

§3.6. Gradiente de un campo escalar.- Dada una función escalar $\phi(x,y,z)$, función continua y derivable de las coordenadas espaciales (x,y,z) , su diferencial

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \quad [3.42]$$

puede expresarse como el producto escalar de dos vectores: uno de componentes (dx, dy, dz) , que es el diferencial ($d\mathbf{r}$) del vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; el otro el vector de componentes $(\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z)$, que se denomina *gradiente* de ϕ , y se designa por **grad** ϕ , o bien por $\nabla\phi$; es decir

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad [3.43]$$

y es

$$d\phi = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} \quad [3.44]$$

Una interpretación geométrica del gradiente se obtiene observando que la ecuación

$$\phi(x, y, z) = \text{cte.}$$

representa una familia de superficies (una superficie para cada valor de la constante); la superficie S de la familia que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ tendrá de ecuación

$$\phi = \phi(x_0, y_0, z_0)$$

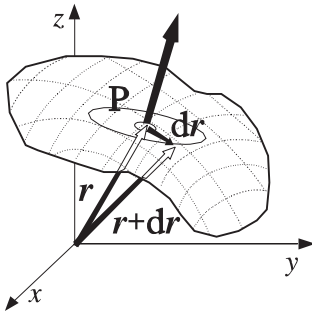


Figura 3.15

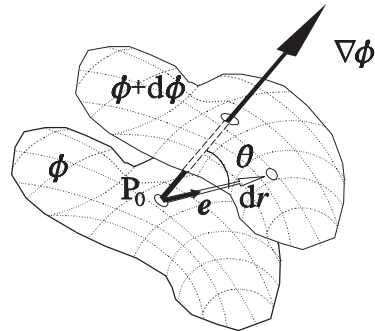


Figura 3.16

Entonces, para cualquier punto en un entorno suficientemente restringido de P_0 (Figura 3.15), será $d\phi=0$, esto es, $\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0$; lo que indica que $\nabla\phi$ es perpendicular a $d\mathbf{r}$. Por tanto, el vector $\nabla\phi_0$ (i.e., el gradiente en el punto P_0) es perpendicular a todas las tangentes a la superficie S en el punto P_0 , i.e., normal a la superficie en dicho punto.

Además, obsérvese que de $d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$ se sigue que

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla \phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla \phi \cdot \mathbf{e} = |\nabla \phi| \cos \theta \quad [3.45]$$

siendo $ds = |d\mathbf{r}|$ (i.e., $d\mathbf{r}/ds = \mathbf{e}$ es un versor en la dirección del desplazamiento elemental $d\mathbf{r}$) y θ el ángulo formado por los vectores $\nabla\phi$ y $d\mathbf{r}$ (Figura 3.16). La expresión anterior se denomina *derivada direccional* o derivada de ϕ en la dirección de \mathbf{e} . De aquí se sigue que $d\phi/ds$ varía con el valor del ángulo θ , presentándose su valor máximo (igual a $|\nabla\phi|$) para $\theta=0$. Esto es:

la variación máxima de ϕ en el punto P_0 se presenta en la dirección de $\nabla\phi$

en el punto P_0 ; o sea, en la dirección normal a la superficie equiescalar S en el punto P_0 .

El resultado anterior nos permite definir el gradiente de un campo escalar como un vector cuya dirección y sentido corresponden al del máximo crecimiento de ϕ y cuyo módulo es el valor de dicho crecimiento por unidad de desplazamiento en esa misma dirección (*derivada direccional*).

Obsérvese que, dado un campo escalar $\phi(x,y,z)$, podemos obtener a partir de él un campo vectorial

$$\mathbf{A}(x,y,z) = \nabla \phi(x,y,z) \quad [3.46]$$

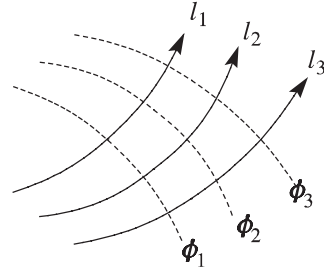


Figura 3.17

que hace corresponder a cada punto del espacio (en el que está definido el campo escalar ϕ) un vector $\mathbf{A}(x,y,z)$ que es el gradiente del campo escalar en ese mismo punto.

Como consecuencia de la representación de los campos escalares y vectoriales por superficies (o líneas) equiescales y líneas vectoriales, respectivamente, y al ser el vector gradiente en un punto perpendicular a la superficie (o línea) equiescalar que pasa por dicho punto, resulta que las líneas vectoriales (que son tangentes a $\nabla\phi$) cortarán ortogonalmente a las superficies (o líneas) equiescales (Figuras 3.17 y 3.18).

§3.7. Función potencial.- Ahora podemos calcular la circulación del vector $\mathbf{A}=\nabla\phi$ a lo largo de un camino cualquiera que una dos puntos dados, α y β , del espacio (Figura 3.19). Tenemos

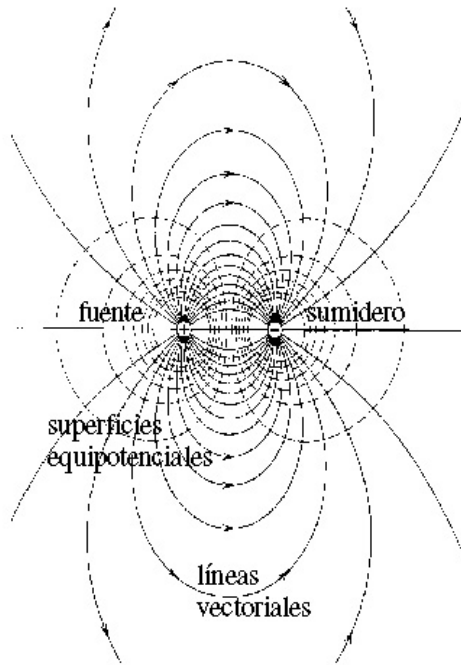


Figura 3.18

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} d\phi = \phi_{\beta} - \phi_{\alpha} \quad [3.47]$$

de modo que la circulación del vector $\nabla\phi$ es independiente del camino seguido para ir desde el punto α al punto β , ya que dicha circulación sólo depende de los valores que toma la función escalar de punto ϕ (i.e., el campo escalar) en los puntos α y β . Así, podemos afirmar que *el campo de gradiente es un campo vectorial conservativo*.

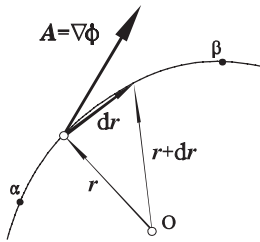


Figura 3.19

Si tenemos un campo vectorial \mathbf{A} tal que se pueda obtener a partir de un campo escalar ϕ , mediante la operación $\mathbf{A} = \nabla\phi$, el campo vectorial \mathbf{A} será conservativo y la función $\phi(x,y,z)$ se denomina su *función potencial*¹. Inversamente, todo campo vectorial \mathbf{A} que sea conservativo se podrá obtener a partir de un campo escalar o función potencial ϕ mediante la operación $\mathbf{A} = \nabla\phi$.

Ejemplo III.- El campo vectorial \mathbf{A} definido en el Ejemplo II es conservativo (se demostrará en el Ejemplo IV). Obtener su función potencial.

Calculamos la circulación del campo vectorial a lo largo del camino definido por la línea quebrada determinada por los puntos $(0,0,0)$, $(x,0,0)$, $(x,y,0)$ y (x,y,z) ; esto es,

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^x (2xy) dx + \int_0^y (x^2 + 2yz^3) dy + \int_0^z (3y^2 z^2) dz = \\ &= \int_0^x (0) dx + \int_0^y x^2 dy + \int_0^z 3y^2 z^2 dz = x^2 y + y^2 z^3 \end{aligned}$$

de modo que $\phi_\beta - \phi_\alpha = x^2 y + y^2 z^3$, y puesto que las coordenadas del punto β son genéricas, será

$$\phi(x,y,z) = x^2 y + y^2 z^3 + \text{cte.}$$

§3.8. Divergencia de un campo vectorial.- Consideremos un campo vectorial \mathbf{A} y un elemento de volumen que contiene al punto P. Definiremos la divergencia del campo vectorial en el punto P como el límite a que tiende el cociente entre el flujo del campo vectorial a través de la superficie S que delimita al elemento de volumen ΔV y dicho elemento de volumen, cuando $\Delta V \rightarrow 0$ encerrando siempre al punto P (Figura 3.20). Esto es, designándola por $\text{div } \mathbf{A}$ o bien por $\nabla \cdot \mathbf{A}$, será

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad [3.48]$$

donde la integral se extiende a la superficie S que delimita al elemento de volumen ΔV . Conforme tiende a cero el elemento de volumen, el punto P siempre permanece en su interior. Se puede demostrar que esta definición es independiente de la forma del elemento de volumen. De la definición anterior, y si consideramos ΔV como la

¹ Cuando el campo vectorial conservativo es un *campo de fuerzas*, se define el *potencial* (Φ) de modo que su diferencia de valores en dos puntos es igual a la circulación del campo de fuerzas entre esos puntos, cambiada de signo. De este modo, resulta ser $\Phi = -\phi$. Ampliaremos este concepto en la Lec. 10.

unidad de volumen, se puede interpretar la divergencia de un campo vectorial en un punto P como el flujo de dicho campo a través de una superficie que delimita la unidad de volumen en torno al punto P . De otro modo, la $\text{div } \mathbf{A}$ en un punto representa el número de líneas vectoriales que nacen o mueren en la unidad de volumen colocada en dicho punto. Evidentemente, la divergencia de un campo vectorial es una *función escalar de punto*.

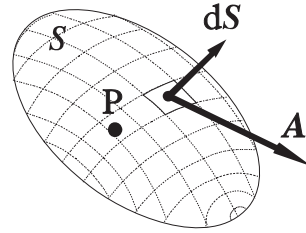


Figura 3.20

El campo vectorial \mathbf{A} será *solenoidal* cuando en todos los puntos del espacio donde está definido se verifica que $\text{div } \mathbf{A} = 0$; es decir, que en ningún punto de dicho espacio nacen ni mueren líneas vectoriales. Ya vimos anteriormente que el campo magnético es solenoidal en todo el espacio, ya que las líneas de inducción magnética son cerradas.

Puesto que en la definición de la divergencia de un campo vectorial no hemos hecho mención a algún sistema de coordenadas, resulta obvio que ésta es independiente del sistema de coordenadas elegido; sin embargo, su expresión sí depende del sistema de coordenadas y deberá determinarse a partir de la evaluación de la definición [3.48] en dicho sistema de coordenadas.

Ahora buscaremos la expresión de $\text{div } \mathbf{A}$ en coordenadas cartesianas. Para ello, elegiremos la forma del elemento de volumen ΔV del modo más conveniente para que la integral de superficie de la ec. [3.48] resulte lo más sencilla posible. Así, tomaremos como elemento de volumen un paralelepípedo de aristas Δx , Δy , Δz , como se muestra en la Figura 3.21, de modo que $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.

Para calcular $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ calcularemos el flujo de \mathbf{A} a través de cada una de las seis caras del paralelepípedo y sumaremos los resultados. Así, el flujo a través de la cara 1 es sólo debido a la componente A_y del vector \mathbf{A} y, como es un flujo entrante en el elemento de volumen, lo consideramos negativo:

$$-A_y(1) \Delta x \Delta z$$

y a través de la cara 2 tenemos un flujo positivo (saliente) dado por

$$A_y(2) \Delta x \Delta z = \left[A_y(1) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \Delta y \right] \Delta x \Delta z$$

de modo que el flujo ligado a esas dos caras es

$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

y, de modo análogo, se tiene para las otras dos parejas de caras

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \quad \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

de modo que, sumando las expresiones anteriores, obtenemos el flujo total a través de las seis caras del paralelepípedo;

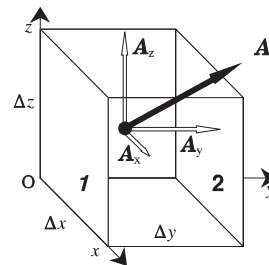


Figura 3.21

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

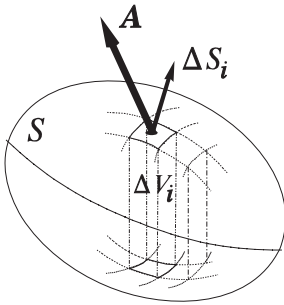
entonces, de la definición de **div** \mathbf{A} , se sigue

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$$

de modo que la *expresión cartesiana de la divergencia* del campo vectorial \mathbf{A} es

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad [3.49]$$

§3.9. Teorema de Gauss.- Consideremos un campo vectorial \mathbf{A} definido en todos los puntos de un volumen V y de la superficie S que lo delimita. Subdividamos dicho volumen en pequeños elementos ΔV_i , como se ilustra en la Figura 3.22; entonces, para cada uno de esos elementos de volumen, podemos escribir



$$(\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V_i = \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad [3.50]$$

estando extendida la integral a la superficie S_i total (i.e., bases y caras laterales) que delimita al elemento de volumen ΔV_i . Tendremos una ecuación como la [3.50] para cada uno de los elementos de volumen en que hemos descompuesto el volumen total V . Cuando sumamos miembro a miembro todas esas ecuaciones, tenemos

Figura 3.22

$$\sum_i (\nabla \cdot \mathbf{A}) \Delta V_i = \sum_i \oint_{S_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad [3.51]$$

Los términos que aparecen en el segundo miembro de la expresión anterior representan el flujo a través de cada una de las superficies que delimitan cada uno de los elementos de volumen ΔV_i . Se observará que al sumar todos esos flujos, los correspondientes a las caras comunes de dos elementos vecinos (Figura 3.22) se compensarán, de modo que la suma del segundo miembro de [3.51] representa simplemente el flujo a través de las caras exteriores de los elementos de volumen ΔV_i ; o sea, el flujo a través de la superficie S que delimita al volumen total V . Si pasamos al límite, para elementos de volumen ΔV_i cada vez más pequeños, el sumatorio del primer miembro de [3.51] se convierte en una integral, y nos queda

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad [3.52]$$

donde las integrales de volumen y de superficie se extienden, respectivamente, al volumen total V y a la superficie S que lo delimita. El resultado anterior constituye la expresión del **TEOREMA DE GAUSS**, que se enuncia en la siguiente forma:

La integral de la divergencia de un campo vectorial en un volumen V es igual al flujo de dicho campo a través de la superficie S que delimita al citado volumen V .

El teorema de Gauss nos permite asegurar que en un campo solenoidal la divergencia del campo es nula en todos los puntos del espacio. Esto es, para un campo solenoidal es

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad [3.53]$$

§3.10. Rotacional de un campo vectorial.- Consideremos, de nuevo, un campo vectorial \mathbf{A} y un elemento de volumen ΔV que contiene al punto P . Definiremos el rotacional del campo vectorial en el punto P , y lo designaremos por $\text{rot } \mathbf{A}$ o bien por $\nabla \times \mathbf{A}$, como

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{dS} \times \mathbf{A} \quad [3.54]$$

donde la integral se extenderá a la superficie S que delimita al elemento ΔV considerado, el cual, al tender a cero, deberá contener siempre al punto P (Figura 3.23). Si comparamos esta definición con la dada anteriormente para $\text{div } \mathbf{A}$, veremos que existe un cierto parecido entre ambas. Obsérvese que en tanto que, en cierto modo, la $\text{div } \mathbf{A}$ es una medida de la componente normal del campo en la superficie del elemento ΔV , el $\text{rot } \mathbf{A}$ lo es de la componente tangencial a dicha superficie. Evidentemente, el $\text{rot } \mathbf{A}$ es una *función vectorial de punto*.

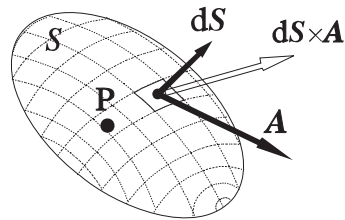


Figura 3.23

La definición que hemos dado para el $\text{rot } \mathbf{A}$ es independiente del sistema de coordenadas considerado; sin embargo, su expresión depende del sistema de coordenadas que elijamos y se determinará evaluando la definición [3.54] en dicho sistema de coordenadas.

Buscaremos ahora la expresión del $\text{rot } \mathbf{A}$ en coordenadas cartesianas. Para ello, debemos elegir la forma del elemento del volumen ΔV de modo que la integral de superficie que aparece en [3.54] sea fácil de calcular. Tomaremos como elemento de volumen un paralelepípedo rectangular de aristas Δx , Δy y Δz , de modo que $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

Para la componente x de $\text{rot } \mathbf{A}$ sólo contribuyen las caras perpendiculares a los ejes y y z ; entonces será

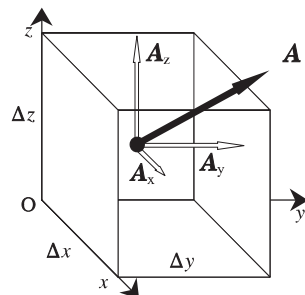


Figura 3.24

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \{ [-A_y(x, y, \Delta z) + A_y(x, y, 0)] \Delta x \Delta y + [A_z(x, \Delta y, z) - A_z(x, 0, z)] \Delta x \Delta z \}$$

y desarrollando en serie de TAYLOR y pasando al límite se tiene

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

y, análogamente, para las componentes y y z de **rot** \mathbf{A} se tiene

$$(\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

de modo que **rot** \mathbf{A} se expresa en coordenadas cartesianas en la forma

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

o bien

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} \quad [3.55]$$

§3.11. Teorema de Stokes.- Veamos ahora una definición alternativa del rotacional de un campo vectorial, equivalente a la dada en el apartado anterior, que resulta más conveniente en ciertas aplicaciones.

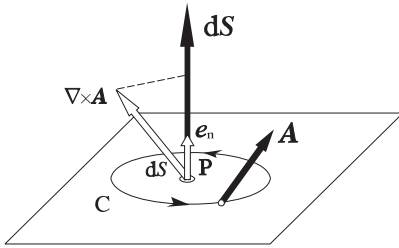


Figura 3.25

Sea un campo vectorial \mathbf{A} y un elemento de superficie ΔS (suficientemente pequeño como para que podamos considerarlo plano) que contiene a un punto P . Calculemos la circulación del campo vectorial \mathbf{A} a lo largo del contorno de dicho elemento de superficie y calculemos el límite a que tiende el coeficiente entre dicha circulación y el área del elemento de superficie cuando $\Delta S \rightarrow 0$ conteniendo siempre al punto P . Ese valor límite

es, por definición, la proyección del rotacional del campo vectorial \mathbf{A} en el punto P en la dirección de la normal, $\mathbf{e}_n = \Delta S / \Delta S$, al elemento de superficie considerado;

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad [3.56]$$

Consideremos, ahora, un campo vectorial \mathbf{A} definido en todos los puntos de una superficie arbitraria S y en los puntos de la curva C que la limita, en la que elegimos un sentido de circulación, como se muestra en la Figura 3.26. Subdividamos esa superficie en elementos ΔS_i , en los que el sentido de circulación en sus respectivos contornos viene impuesto por el establecido anteriormente; entonces, en virtud de la definición anterior de $\nabla \times \mathbf{A}$, para cada uno de esos elementos podemos escribir

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad [3.57]$$

efectuándose la integral a lo largo del contorno del elemento de superficie correspondiente. Tendremos una ecuación como la anterior para cada uno de los elementos de superficie en que hemos descompuesto la superficie total S . Si sumamos miembro a miembro todas esas ecuaciones, tenemos

$$\sum_i (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \sum_i \oint_{C_i} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad [3.58]$$

Los términos que aparecen en el segundo miembro de [3.58] representan la circulación del campo a lo largo de cada una de las líneas que delimita cada uno de los elementos de superficie $\Delta \mathbf{S}_i$. Se observará que al sumar todas esas circulaciones, las correspondientes a los recorridos interiores se compensan, ya que cada uno de ellos es común a dos circuitos vecinos y es recorrido dos veces en sentidos opuestos, de modo que el sumatorio del segundo miembro de [3.58] representa simplemente la circulación del campo sobre el contorno exterior C de la superficie S . Si pasamos al límite, para elementos de superficie cada vez más pequeños, el sumatorio del primer miembro de [3.58] se convierte en una integral, y nos queda

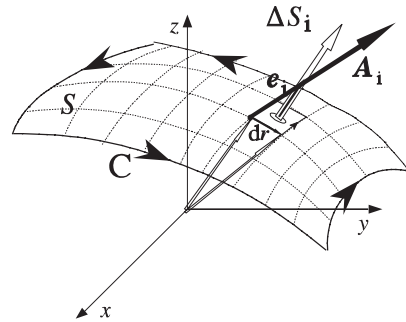


Figura 3.26

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad [3.59]$$

donde las integrales se extienden a la superficie total S y a su contorno C . El resultado anterior constituye la expresión del TEOREMA DE STOKES, que se enuncia en la forma siguiente:

La circulación de un campo vectorial sobre una línea cerrada es igual al flujo del rotacional del campo a través de una superficie cualquiera limitada por dicha línea cerrada.

Como ya sabemos, el rotacional de un campo vectorial es una función vectorial de punto. Cuando en todos los puntos del espacio donde está definido el campo vectorial \mathbf{A} se verifica que $\text{rot } \mathbf{A} = 0$, se dice que el campo vectorial \mathbf{A} es *irrotacional*.

Si es $\mathbf{A} = \text{grad } \phi$, esto es, si el campo vectorial deriva de un campo escalar (potencial), \mathbf{A} será un campo irrotacional, pues por aplicación del teorema de Stokes a una superficie arbitraria situada en el campo, se tiene

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \oint_C d\phi = 0 \quad [3.60]$$

de modo que, puesto que S es arbitraria, deberá ser $\text{rot } \mathbf{A} = 0$, o sea que

$$\text{rot}(\text{grad} \phi) = \nabla \times (\nabla \phi) = 0 \quad [3.61]$$

lo que significa que

todo campo vectorial irrotacional es conservativo, y todo campo vectorial conservativo es irrotacional

de modo que decir *campo conservativo* o *campo irrotacional* es equivalente.

Ejemplo IV.- Demostrar que el campo vectorial \mathbf{A} definido en el Ejemplo II es conservativo.

Simplemente, verificaremos si su rotacional es nulo; esto es,

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + 2yz^3 \\ 3y^2z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6yz^2 - 6yz^2 \\ 0 - 0 \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

§3.12. El operador nabla.- Las notaciones $\nabla \phi$, $\nabla \cdot \mathbf{A}$ y $\nabla \times \mathbf{A}$ que hemos utilizado anteriormente para designar operadores tan diversos como el *gradiente de un campo escalar* ($\text{grad} \phi$), la *divergencia de un campo vectorial* ($\text{div} \mathbf{A}$) y el *rotacional de un campo vectorial* ($\text{rot} \mathbf{A}$) se explican considerando el signo operativo ∇ de HAMILTON, que se denomina *nabla*, que puede considerarse como un *operador vectorial diferencial* de componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$; esto es

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad [3.62]$$

conviniendo en considerar las derivadas parciales $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$, $\partial\phi/\partial z$, como un producto simbólico de $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ por la función $\phi(x,y,z)$, con lo que resulta que el operador ∇ puede multiplicarse escalar y vectorialmente por otros vectores, obteniéndose:

$$\text{grad} \phi = \nabla \phi = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \quad [3.63]$$

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) = \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned} \quad [3.64]$$

$$\text{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad [3.65]$$

o bien, expresando los vectores con notación matricial:

$$\nabla \phi = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \\ \partial\phi/\partial z \end{pmatrix} \quad [3.66]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad [3.67]$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad [3.68]$$

Esta notación simbólica abrevia las expresiones y es muy útil en las aplicaciones. El alumno puede demostrar fácilmente que

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad} \phi) &= \nabla \times (\nabla \phi) = 0 \\ \text{div}(\text{rot} \mathbf{A}) &= \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \end{aligned} \quad [3.69]$$

Problemas

3.1.- Dado el vector $A = 2ti + t^2j + k$, calcular $\left| \frac{dA}{dt} \right|$ y $\frac{d|A|}{dt}$ para $t=2$.

3.2.- Indicar la diferencia existente entre el módulo de la derivada de un vector y la derivada del módulo del mismo vector.

3.3.- Demostrar que la derivada de un vector de módulo constante es otro vector normal al dado.

3.4.- Demostrar que la dirección del vector $A(t)$ permanecerá constante si se verifica que

$$A \times \frac{dA}{dt} = 0$$

3.5.- Si es $r = a \cos \omega t + b \sin \omega t$, siendo a y b vectores constantes no-colineales y ω una constante escalar, demostrar que

$$\text{a) } r \times \frac{dr}{dt} = \omega (a \times b)$$

$$\text{b) } \frac{d^2 r}{dt^2} + \omega^2 r = 0$$

$$\text{c) } r \cdot \left(\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2 r}{dt^2} \right) = 0$$

3.6.- Demostrar las siguientes igualdades vectoriales:

$$\text{a) } A \cdot \frac{dA}{dt} = A \frac{dA}{dt}$$

$$\text{b) } \frac{d}{dt} \left(A \times \frac{dA}{dt} \right) = A \times \frac{d^2 A}{dt^2}$$

$$\text{c) } \frac{d}{dt} \left(A \cdot \frac{dA}{dt} \times \frac{d^2 A}{dt^2} \right) = A \cdot \frac{dA}{dt} \times \frac{d^3 A}{dt^3}$$

3.7.- Dado el vector $A = (t+1)i + t^2j + 2tk$, calcular:

$$\text{a) } \int A dt \quad \text{y} \quad \text{b) } \int_{-1}^2 A dt$$

3.8.- Dado el vector $A = x^2yi + (xz - y^2)j + 3xz^2k$, calcular todas las derivadas parciales, de primer y de segundo orden, respecto a las variables (x,y,z) , así como dA .

3.9.- Resolver la ecuación vectorial $d^2r/dt^2 = -gk$, donde g es una constante, dado que para $t=0$ sea $r(0)=0$ y $v(0) = dr/dt|_{t=0} = v_0(\cos\theta_0 j + \sin\theta_0 k)$. Interpretese físicamente el resultado.

3.10.- Demostrar las siguientes igualdades vectoriales

$$\text{a) } \int C \cdot \frac{dA}{dt} dt = C \cdot A + \text{cte}$$

$$\text{b) } \int \frac{dA}{dt} \cdot \frac{d^2 A}{dt^2} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{dA}{dt} \right)^2 + \text{cte}$$

siendo C un vector constante.

3.11.- Consideremos la función definida por el módulo del vector de posición de los puntos del espacio con respecto al origen de coordenadas. **a)** ¿Define dicha función un campo escalar? **b)** ¿Cómo son las superficies equiescalares de dicho campo?

3.12.- La función $\phi = x^2 + y^2 - z$ define un campo escalar. ¿Cómo son las superficies equiescalares de dicho campo?

3.13.- Consideremos la función definida por el vector de posición de los puntos del espacio con respecto al origen de coordenadas. **a)** ¿Define dicha función un campo vectorial? **b)** ¿Cómo son las líneas vectoriales de dicho campo?

3.14.- Un campo escalar estacionario, $\phi(r)$, está definido por la función $\phi = r^2 - 2a \cdot r$, donde a es un vector constante. **a)** Demostrar que las superficies equiescalares son esféricas. **b)** Determinar el menor valor posible que tomará el campo escalar y el punto(s) donde lo toma.

3.15.- Si es $A = (x+y)i + xyj$, calcular $\int A dr$ sobre los siguientes recorridos: **a)** $y=x$ desde

(0,0) hasta (1,1); **b)** la línea quebrada determinada por los puntos (0,0), (1,0) y (1,1); **c)** ídem por los puntos (0,0), (0,1) y (1,1); **d)** sobre la curva $y=x^2$ entre los puntos (0,0) y (1,1); **e)** ídem sobre la curva $x=y^2$; **f)** sobre la trayectoria cerrada definida por las curvas $y=x^2$ y $x=y^2$; **g)** ¿Es conservativo este campo?

3.16.- Calcular $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$, donde

$$\mathbf{A} = (2x-y+z)\mathbf{i} + (x+y-z)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$$

sobre la elipse de ecuación $x^2/9 + y^2/4 = 1$. ¿Es conservativo este campo?

3.17.- Calcular el flujo del campo vectorial definido por $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a través de las superficies siguientes: **a)** la superficie de un cubo de arista unidad delimitado por los planos coordenados y los planos $x=1$, $y=1$ y $z=1$; **b)** la superficie esférica de radio unidad y centrada en el origen de coordenadas.

3.18.- Calcular el flujo del campo eléctrico

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \text{ a través de una superficie es-}$$

férica de radio R centrada en el origen de coordenadas.

3.19.- Hallar los *gradientes* de los campos escalares siguientes:

a) $\phi = x^2 + y^2 + z^2$

b) $\phi = xy^3 + yz^3 + zx^3$

c) $\phi = x^2y/z^3$

d) $\phi = x \sin(yz) + y \cos(xz)$

e) $\phi = x \cos x + xyz$

3.20.- Determinar la ecuación del plano tangente al paraboloide elíptico $z = x^2 + 2y^2$, en el punto de coordenadas (2,1,6).

3.21.- a) Calcular la derivada direccional de la función $\phi = 2xz - y^2$ en la dirección del vector $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ en el punto P(1,3,2). **b)** Determinar, en dicho punto, la dirección del máximo crecimiento de ϕ , así como el valor de dicho crecimiento por unidad de longitud en la citada dirección.

3.22.- Calcular $\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})$, siendo \mathbf{A} un vector constante y \mathbf{r} el vector de posición.

3.23.- Dado el campo vectorial definido por

$$\mathbf{A} = (x^3+yz)\mathbf{i} + (y^3+xz)\mathbf{j} + (z^3+xy)\mathbf{k}$$

calcular: **a)** $\text{div} \mathbf{A}$; **b)** $\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$, siendo S la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

3.24.- a) Demostrar que el campo vectorial \mathbf{A} definido en el Problema 3.23 es conservativo. **b)** Determinar una función escalar ϕ tal que sea $\mathbf{A} = \text{grad } \phi$. **c)** Calcular la circulación del campo \mathbf{A} entre los puntos (0,0,0) y (1,3,-2).

3.25.- Sea el campo vectorial

$$\mathbf{A} = (1+yz)\mathbf{i} + (1+xz)\mathbf{j} + (1+xy)\mathbf{k}$$

a) Calcular la circulación de este campo vectorial entre los puntos (0,0,0) y (1,2,3) a lo largo de la recta que los une. **b)** Demostrar que este campo es conservativo y determinar la función potencial correspondiente. **c)** Recalcular el primer apartado mediante la función potencial.

3.26.- Sea el campo vectorial $\mathbf{A} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. **a)** ¿Es conservativo? **b)** Calcular su circulación a lo largo de media vuelta de la hélice cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = 2 \cos \theta, \quad y = 2 \sin \theta, \quad z = 3 \theta$$

entre el punto (2,0,0) y el (-2,0,3 π). **c)** Ídem a lo largo de la recta que une esos dos puntos. **d)** Ídem a lo largo de la poligonal definida por los puntos (2,0,0), (2,2,0), (-2,2,0), (-2,0,0) y (-2,0,3 π).

3.27.- Sea el campo vectorial

$$\mathbf{A} = (2x+yz)\mathbf{i} + (2y+xz)\mathbf{j} + (2z+xy)\mathbf{k}$$

a) Evaluar su circulación entre los puntos (0,0,0) y (1,1,1) a lo largo de la curva definida por $y = x^2$; $z = x$. **b)** Demostrar que el campo es conservativo y determinar la función de potencial. **c)** Reevaluar el primer apartado utilizando la función potencial.

3.28.- Sea \mathbf{A} un campo vectorial que deriva de una función potencial $\phi = 1/r$, siendo \mathbf{r} el vector de posición de los puntos del espacio en el que está definido dicho campo. Determinar las coordenadas del punto del espacio en el que se verifica que $|\mathbf{A}| = |\mathbf{r}|$, teniendo \mathbf{A} la dirección del eje x y el sentido de las x decrecientes, en dicho punto.

3.29.- Sea el campo vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{r}/r$, donde \mathbf{r} es el vector de posición. **a)** Demostrar que el campo es potencial y obtener su función potencial. **b)** Calcular la circulación del campo entre los puntos (1,0,0) y (0,0,1) a lo largo de un arco de circunferencia que pasa por dichos puntos y cuyo centro es el origen de coordenadas: **i)** directamente; **ii)** utilizando la función potencial.

3.30.- Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial

$$\mathbf{A} = (2x-y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2zk\mathbf{k}$$

siendo S y C la superficie y el contorno, respectivamente, del hemisferio superior de una esfera de radio unidad centrada en el origen de coordenadas.

3.31.- Si es $f(r)$ una función arbitraria de r , siendo \mathbf{r} el vector de posición de un punto del espacio con respecto al origen de coordenadas, demostrar que:

$$\text{a)} \quad \nabla f(r) = f' \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\text{b)} \quad \nabla \cdot [f(r) \mathbf{e}_r] = 2 \frac{f}{r} + f'$$

$$\text{c)} \quad \nabla \times [f(r) \mathbf{e}_r] = 0$$

$$\text{d)} \quad \nabla^2 [f(r)] = \nabla \cdot [\nabla f(r)] = f'' + 2 \frac{f'}{r}$$

3.32.- Demostrar que:

$$\text{a)} \quad \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

$$\text{b)} \quad \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \right) = 0$$

$$\text{c)} \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \right) = 0$$

$$\text{d)} \quad \nabla \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] = 0$$

3.33.- Dado el campo vectorial $\mathbf{A} = k\mathbf{e}_r/r^2$, siendo k una constante: **a)** Demostrar que dicho campo es solenoidal en todos los puntos del espacio salvo en el origen de coordenadas; **b)** Calcular el flujo del campo a través de una superficie cerrada cualquiera que rodea al origen de coordenadas; **c)** Ídem para una superficie cerrada que no rodea al origen; **d)** Demostrar que el campo es conservativo; **e)** Encontrar una función escalar (potencial) tal que $\mathbf{A} = -\text{grad } \phi$. **f)** Para el campo gravitatorio es $k=-Gm$, y para el campo electrostático es $k=q/4\pi\epsilon_0$; aplicar los resultados anteriores a estos dos campos y discutir los resultados.

3.34.- Calcular el flujo del campo vectorial $\mathbf{A} = kr^3\mathbf{e}_r$ a través de una superficie esférica,

de radio R , centrada en el origen de coordenadas. (Utilizar el teorema de Gauss).

3.35.- Consideremos un fluido en movimiento en el que tanto la densidad ρ como la velocidad de cada uno de sus elementos de volumen sean función de las coordenadas espaciales y del tiempo, esto es, $\rho = \rho(x, y, z, t)$ y $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$. **a)** Demostrar que si no existen ni *fuentes* ni *sumideros* en un cierto volumen finito ocupado por el fluido se cumple

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

que es la llamada *ecuación de continuidad*. **b)** ¿Qué ocurre si $\rho = \text{cte}$ (fluido incomprensible) y se verifica la ecuación de continuidad?