Cálculo - Grado en Ingeniería Informática
Relación de Ejercicios (Funciones de varias variables)

1. Calcula la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2 \sin(2y)$ en el punto $(1, \pi/4)$ en la dirección dada por el vector $u = (3, -4)$.

2. Sea $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Demuestra que para cualquier vector $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ existe la derivada direccional $D_u f(0, 0)$, y calcularla.

3. Obtenga las derivadas parciales y las de segundo orden de la función $f(x, y) = x^2y^3 - 4xy$.

4. Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

admite derivadas parciales, pero no es diferenciable en $(0, 0)$.

5. Estudia la continuidad, existencia de las derivadas parciales y diferenciabilidad de la función $f(x, y)$ en el punto $(0, 0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

6. Estudia la continuidad de la función f y de las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{yx^2-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

7. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en el punto $(0, 0)$.

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{y^2+x^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Calcula la derivada direccional de la función $f(x, y) = x^2 \sin(2y)$ en el punto $(1, \pi/4)$ en la dirección dada por el vector $u = (3, -4)$.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(1, \frac{\pi}{4}\right) = x^2 \operatorname{sn}(2y) \\ \vec{u}(3, -4) \;;\; |\vec{u}| = \sqrt{25} = 5 \end{array}\right\} \quad D_{\vec{u}} f(1, \pi/4) = \frac{1}{|\vec{u}|} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{1}{|\vec{u}|} \lim_{h \to 0} \frac{f(1+3h, \pi/4 - 4h) - f(1, \pi/4)}{h} = \frac{1}{5} \lim_{h \to 0} \frac{(1+3h)^2 \operatorname{sn}(\pi/2 - 8h) - \operatorname{sn}(\pi/2)}{h}$$

$$\frac{1}{5} \lim_{h \to 0} \frac{(1 + 6h + 9h^2) \operatorname{sn}(\pi/2 - 8h) - \operatorname{sn}(\pi/2)}{h} = \frac{1}{5} \lim_{h \to 0} \frac{(18h + 6)\cos(8h) - (72h^2 + 48h + 8)\operatorname{sn}(8h)}{1}$$

$$= \frac{1}{5}\left((18 \cdot 0 + 6)\cos(8 \cdot 0) - (72 \cdot 0^2 + 48 \cdot 0 + 8)\operatorname{sn}(8 \cdot 0)\right) = \frac{6}{5}$$

2. Sea $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Demuestra que para cualquier vector $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ existe la derivada direccional $D_u f(0,0)$, y calcularla.

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0)=\sqrt{x^2+y^2} \\ \vec{u}\ (u_1,u_2)\ |\vec{u}|=u_1+u_2 \end{array}\right\} D_{\vec{u}} f(0,0)=\frac{1}{|\vec{u}|}\lim_{h\to 0}\frac{f(0+u_1h,\ 0+u_2h)-f(0,0)}{h}$$

$$=\frac{1}{u_1+u_2}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(u_1h)^2+(u_2h)^2}-\sqrt{0+0}}{h}=\frac{1}{u_1+u_2}\lim_{h\to 0}\frac{h(u_1+u_2)}{h}=\frac{u_1+u_2}{u_1+u_2}=1$$

3. Obtenga las derivadas parciales y las de segundo orden de la función $f(x, y) = x^2y^3 - 4xy$.

$f(x,y) = x^2y^3 - 4xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 - 4y$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial x}(x,y) = 2y^3$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y}(x,y) = 6xy^2 - 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4x$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = 6xy^2 - 4$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} = 6x^2y$$

4. Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

admite derivadas parciales, pero no es diferenciable en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-3y(x^2+y^2) - 2x(-3xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-3x^2y - 3y^3 + 6x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^2y - 3y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-3x(x^2+y^2) - 2y(-3xy)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-3x^3 - 3xy^2 + 6xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3xy^2 - 3x^3}{(x^2+y^2)^2}$$

Para verificar la continuidad:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \; ; \; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-3xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-3xy}{(x+y)^2 - 2xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-3xy}{(x+y)^2} - \frac{-3xy}{2xy}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-3xy}{(x+y)^2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Como es distinto de 0 no es continua y por lo tanto no son diferenciables en el punto (0,0)

5. Estudia la continuidad, existencia de las derivadas parciales y diferenciabilidad de la función $f(x, y)$ en el punto $(0, 0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\frac{xy^2}{x^3+y^3} = 0 \; ; \; xy^2 = 0 \; ; \; x = 0 \; ; \; y = 0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \; ; \; \lim \frac{xy^2}{x^3+y^3} = \lim_{(x,y)=(0,0)} \frac{xy^2}{(x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2}$

$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x+y)^3} - \frac{xy^2}{3x^2y} - \frac{xy^2}{3xy^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x+y)^3} - \frac{y}{3x} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

La función no es continua en $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2(x^3+y^3) - 3x^2(xy^2)}{(x^3+y^3)^2} = \frac{y^5 + x^3y^2 - 3x^3y^2}{(x^3+y^3)^2} = \frac{y^5 - 2x^3y^2}{(x^3+y^3)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy(x^3+y^3) - 3y^2(xy^2)}{(x^3+y^3)^2} = \frac{2x^4y + 2xy^4 - 3xy^4}{(x^3+y^3)^2} = \frac{2x^4y - xy^4}{(x^3+y^3)^2}$

Admite derivadas parciales pero al no ser continua no son diferenciables

6. Estudia la continuidad de la función f y de las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{yx^2-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{yx^2-y^3}{x^2+y^2} = 0 \ ; \ yx^2 - y^3 = 0 \ ; \ x^2 = y^2 \ ; \ x = y$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \ ; \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2-y^3}{x^2+y^2} \ ; \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3 - x^3 - 2x^2y - 3xy^2 - y^3}{(x+y)^2 - 2xy}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3 - x^3 - 2x^2y - 3xy^2 - y^3}{(x+y)^2} - \frac{(x+y)^3 - x^3 - 2x^2y - 3xy^2 - y^3}{2xy}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y) - \frac{x^3 - 2x^2y - 3xy^2 - y^3}{(x+y)^2} - \frac{(x+y)^3 - x^3 - 2x^2y - 3xy^2 - y^3}{2xy} = 0$$

Es continua en el punto $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2x(x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y + 2xy^3 - 2x^3y - 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Es continua en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2-3y^2)(x^2+y^2) - 2y(x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4 + x^2y^2 - 3x^2y^2 - 3y^4 - 2x^2y^2 + 2y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

No es continua en $(0,0)$ por lo que no es diferenciable pero si que se admiten

7. Estudia la continuidad de las siguientes funciones en el punto $(0,0)$.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{y^2+x^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) $\frac{x^2y}{y^2+x^4} = 0 \; ; \; x^2y = 0 \; ; \; x = 0 \; ; \; y = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Como el único punto en que $\frac{x^2y}{y^2+x^4}$ se anula es el $(0,0)$ y no se incluye $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

b) $\frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = 0 \; ; \; x^3y^3 = 0 \; ; \; x = 0 \; ; \; y = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Como el único punto en que $\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ se anula es el $(0,0)$ y no se incluye $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$