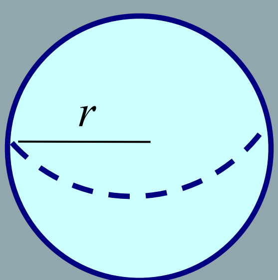
TEMA 2.3: ENERGÍA ELECTROSTÁTICA Y CAPACIDAD

CAPACIDAD DE UN CONDUCTOR CARGADO Y AISLADO

Se define la **<u>Capacidad</u>** de un conductor aislado como la cantidad de carga capaz de albergar en su superficie, matemáticamente se expresa como el cociente entre la carga y el potencial:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad (\text{Unidades: Faradio, F})$$

Ejemplo: Capacidad de un conductor esférico

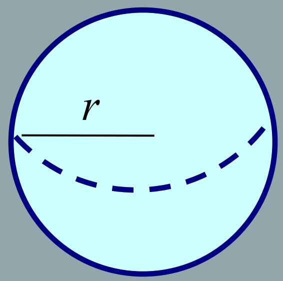


$$\left.\begin{array}{l} V = -\int \vec{E}\,.\,\vec{dl} \\ \text{Y} \\ \vec{E} = \dfrac{KQ}{r^2}\vec{u}_{\mathbf{r}} \end{array}\right\} \Rightarrow V = k\frac{Q}{r}$$

$$\left.\begin{array}{l} V = k\dfrac{Q}{r} \\ C = \dfrac{Q}{V} \end{array}\right\} \Rightarrow C = \frac{Q}{\dfrac{1}{4\pi\pi_0}\dfrac{Q}{r}} = 4\pi\pi_0 r$$

CAPACIDAD DE UN CONDUCTOR CARGADO Y AISLADO

Capacidad de un conductor esférico



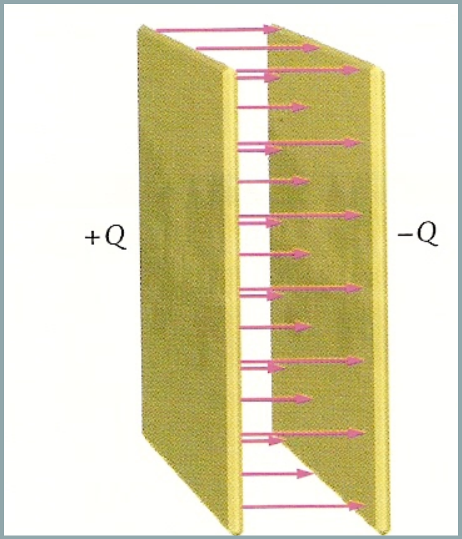
$$C = 4\pi\varepsilon_0 r$$

Propiedades:

- Mide la cantidad de carga que puede almacenar
- Es independiente de la carga y la diferencia de potencial
- Depende del tamaño y la forma del conductor.

SISTEMA BINARIO: CONDENSADOR

CONDENSADOR: conjunto de dos conductores A y B iguales y próximos, que reciben cargas iguales y opuestas



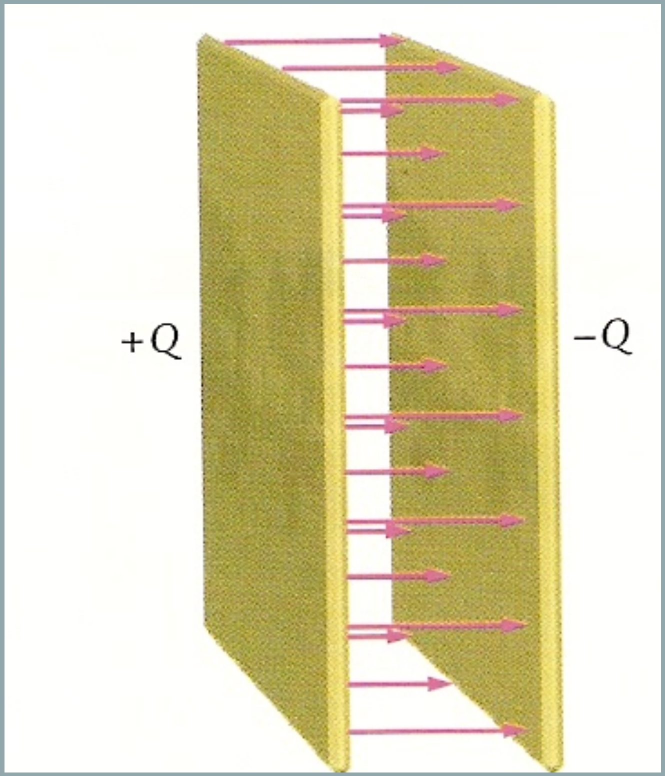
$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \qquad (\text{Unidades: Faradio, F})$$

CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR:

Se define la **capacidad de un condensador** como el cociente entre la carga de uno de los conductores Q y la diferencia de potencial $V_a - V_b = V_{ab}$ entre ellos

SISTEMA BINARIO: CONDENSADOR

Condensador de Placas Plano-Paralelas:

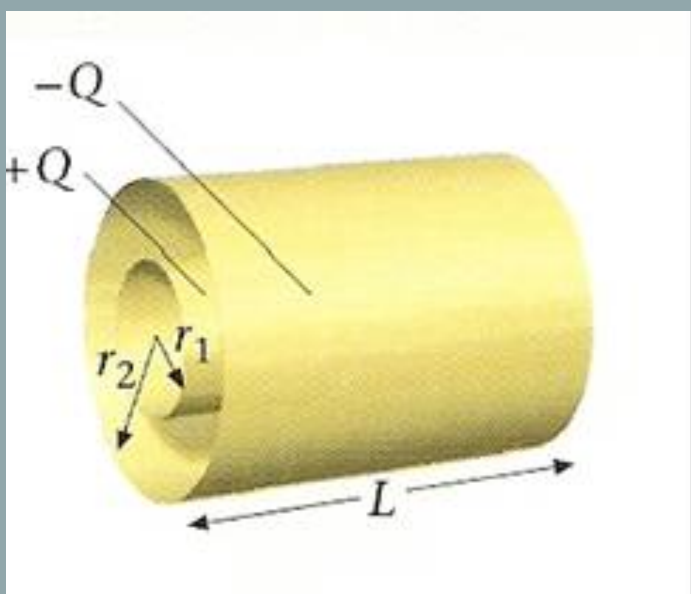


$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \Rightarrow \quad \Delta V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

SISTEMA BINARIO: CONDENSADOR

Ejercicio: Un cable coaxial entre dos ciudades tiene un radio interior r_1 y un radio exterior de r_2. Su longitud es de L m. Considerar este cable como un condensador cilíndrico y calcular su capacidad.



$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L r} \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} Ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

$$\boxed{\frac{C}{l} = \frac{1}{2k\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}$$

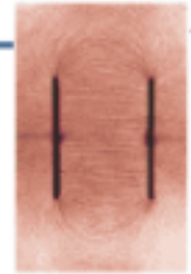
SISTEMA BINARIO: CONDENSADOR

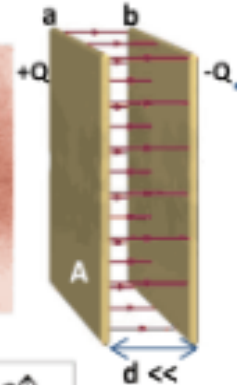
CÁLCULO DE LA CAPACIDAD

Condensador de placas paralelas

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$

*Aplicación: micrófono condensador





Dentro del condensador:

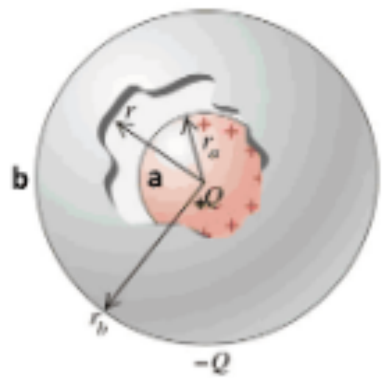
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$V_{ab} = E.d = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} d$$

Cuando A↑ o d↓ -> C↑

Condensador esférico

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\varepsilon_0 (4\pi r_a r_b)}{r_b - r_a}}$$



Dentro del condensador:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

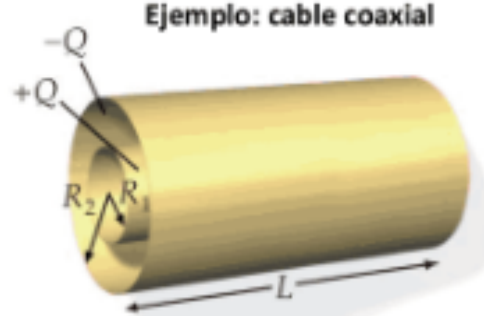
$$V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}\right)$$

Condensador cilíndrico

$$\boxed{C = \frac{Q}{V_{R1} - V_{R2}} = \frac{2\pi L \varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}}$$

(C~L)

Ejemplo: cable coaxial

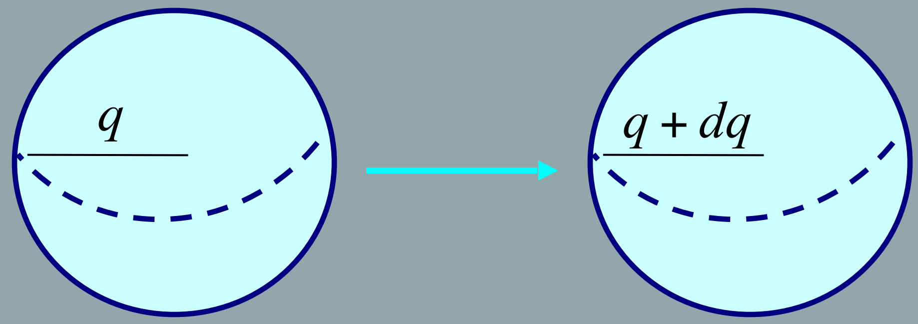


Dentro del condensador:

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0 r}\hat{r}$$

$$V_{R1} - V_{R2} = \frac{Q}{2\pi L \varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

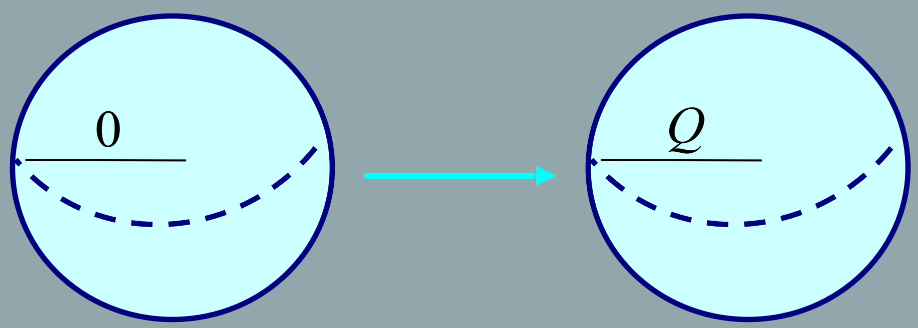
ENERGÍA ELECTROESTÁTICA ALMACENADA EN UN CONDENSADOR



$$dU = V_q dq = \frac{q}{C} dq$$

$$C = \frac{q}{V_q} \Rightarrow V_q = \frac{q}{C}$$

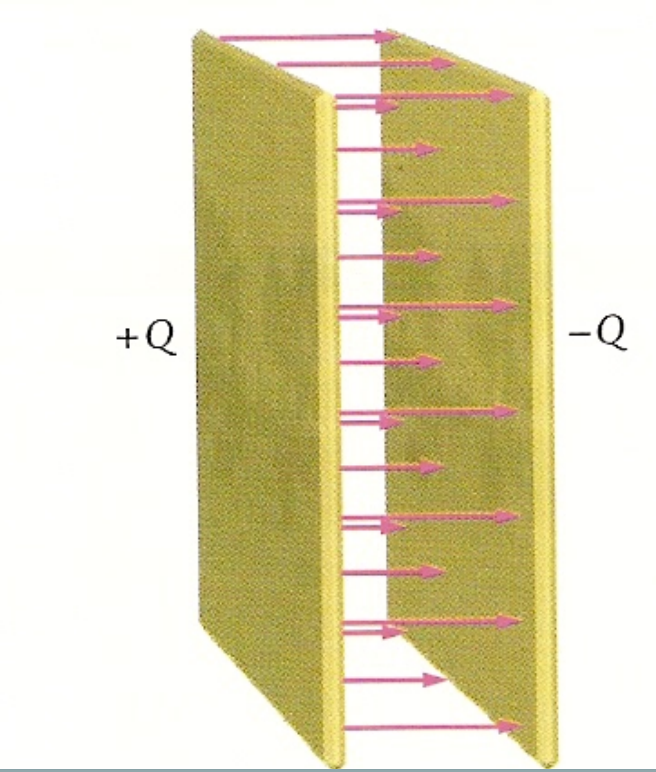
Energía Total Almacenada



$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q V_{ab} = \frac{1}{2} V_{ab}^2 C$$

ENERGÍA ELECTROESTÁTICA ALMACENADA EN UN CONDENSADOR



$$U = \frac{1}{2} V_{ab}^2 C = \frac{1}{2} (Ed)^2 (\varepsilon_0 S/d) = \frac{1}{2} E^2 \varepsilon_0 Sd$$

Sd representa el volummen

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

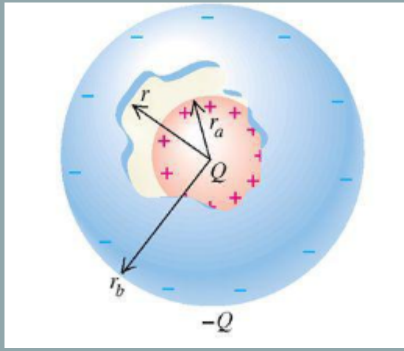
$$\left.\begin{array}{l} \Delta V = Ed \\ C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d} \end{array}\right\} U \rightarrow \frac{1}{2} C V^2 \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} E^2 d^2$$

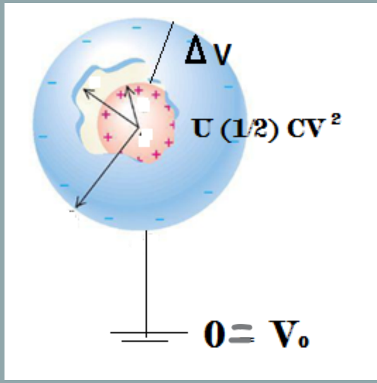
$$\rightarrow \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 (Sd) \rightarrow \frac{U}{\text{volumen}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \int$$

¿Pregunta?

ENERGÍA ELECTROESTÁTICA ALMACENADA EN UN CONDENSADOR

Densidad de Energía





$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

- Es la energía potencial almacenada por el condensador por unidad de volumen.
- Es proporcional al cuadrado del módulo del campo eléctrico entre las placas o cortezas del conductor
- Unidad: J/m^3

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

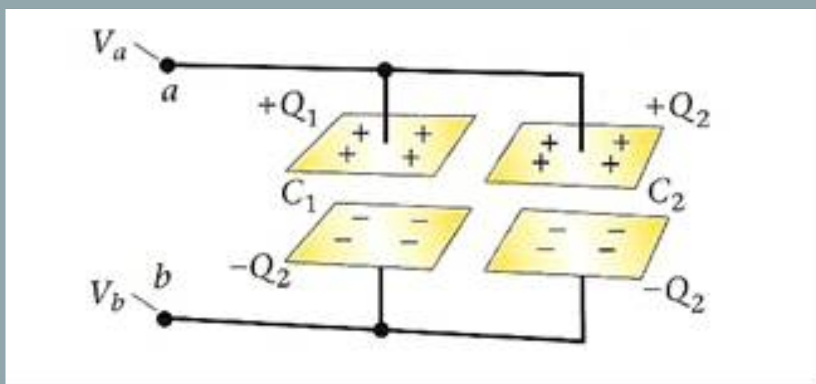
Combinación en Paralelo

Paralelo = mismo potencial
Serie = misma carga

<u>Propiedades</u>:

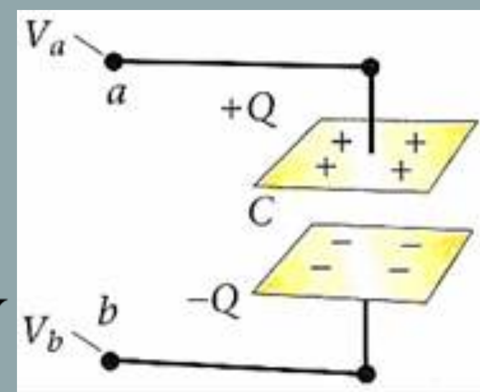
•La diferencia de potencial es la misma entre las placas de cada condensador.

•La carga total almacenada es $Q=Q_1+Q_2$



$$Q_1 = C_1\Delta V$$
$$Q_2 = C_2\Delta V$$

$$Q = C_{eq}\Delta V$$



<u>Capacidad equivalente</u>:

$$C_{eq}\Delta V = C_1\Delta V + C_2\Delta V \quad \Rightarrow \quad C_{eq} = C_1 + C_2$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots}$$

ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

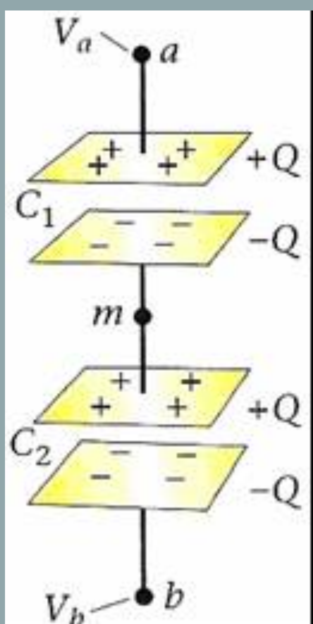
Combinación en Serie

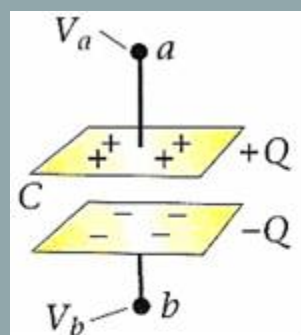
Propiedades:

- La carga almacenada es igual en todas las placas
- La diferencia de potencial total es la suma de las diferencias de potencial a través de los condensadores individuales.

$$\Delta V = V_a - V_b = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \qquad C_{eq} = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{C_{eq}}$$

$$\Delta V = V_a - V_b = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

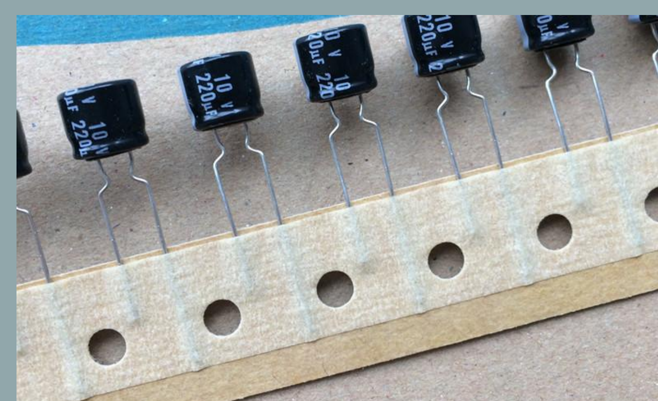




$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Capacidad equivalente:

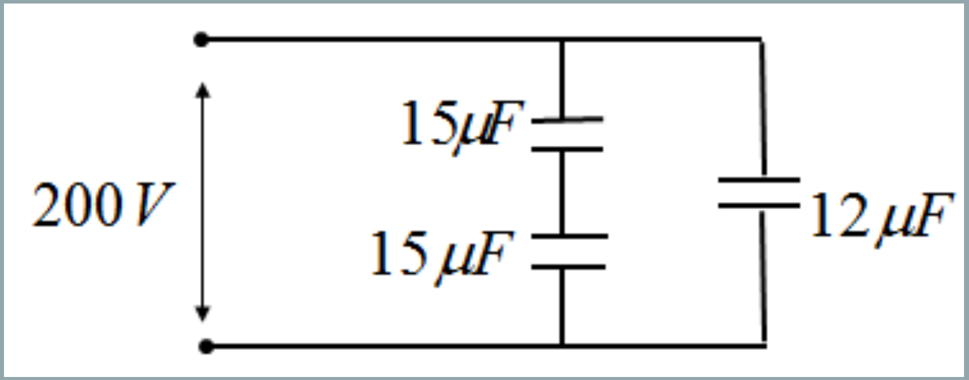
$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots}$$



ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

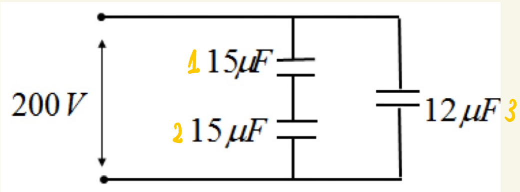
Ejercicio: Calcular para el dispositivo

a) La capacidad total efectiva entre los terminales
b) La carga almacenada en cada uno de los condensadores
c) La energía total almacenada



Ejercicio: Calcular para el dispositivo

a) La capacidad total efectiva entre los terminales
b) La carga almacenada en cada uno de los condensadores
c) La energía total almacenada



a) $\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$ $\quad C_{12} = \frac{15}{2} = 7{,}5\ \mu F$

$C_{eq} = C_{12} + C_3 = 7{,}5 + 12 = 19{,}5\ \mu F$

b) $Q_{12} = Q_1 = Q_2 = C_{12}\Delta V = 7{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 200 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}\ C$

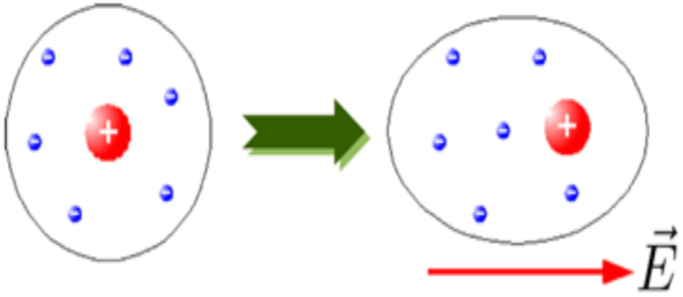
$Q_3 = C_3 \Delta V = 12 \cdot 10^{-6}\ 200 = 2{,}4 \cdot 10^{-3}\ C$

c) $E_T = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2}\ 19{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 200^2 = 0{,}39\ F$

DIELÉCTRICOS

Dipolos inducidos

- Un átomo posee un núcleo positivo y una nube de electrones con carga negativa
- El núcleo se ve desplazado en el sentido del campo y los electrones en sentido contrario:



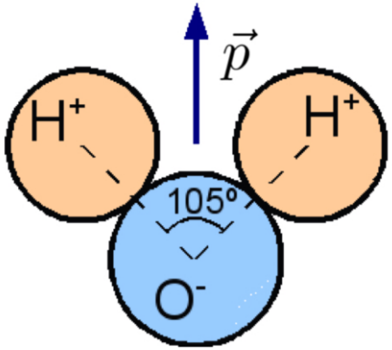
- El átomo se encuentra **polarizado**

DIELÉCTRICOS

Alineamiento de moléculas polares

- Algunas moléculas presentan un momento dipolar no nulo en ausencia de un campo eléctrico externo
  - Ejemplo: molécula de agua

Moléculas polares



- Ante un campo eléctrico externo estas **moléculas polares** tienden a girar, de forma que su momento dipolar quede paralelo al campo

DIELÉCTRICOS

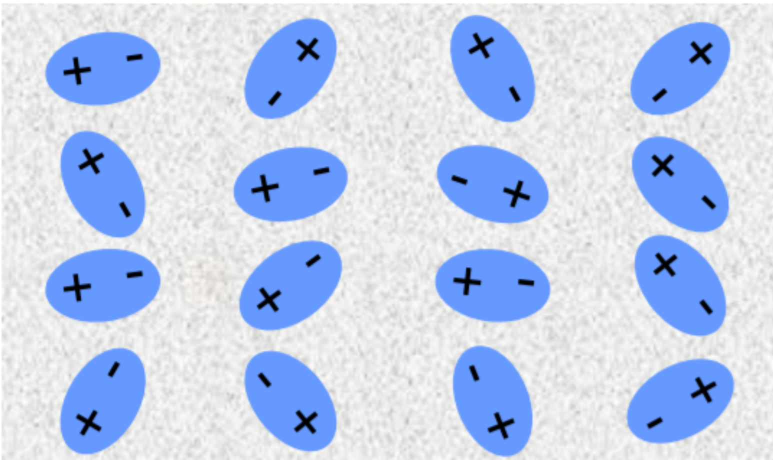
Polarización

- Materiales con átomos o moléculas no polares:
  - Aparecerá en cada átomo un momento dipolar paralelo al campo eléctrico
- Materiales con moléculas polares:
  - Cada molécula experimenta un momento de fuerzas que tiende a alinearla con el campo
    - La alineación no es perfecta debido al efecto de agitación térmica

En ambos casos tenemos un **dieléctrico polarizado**: muchos pequeños dipolos orientados paralelos al campo eléctrico aplicado

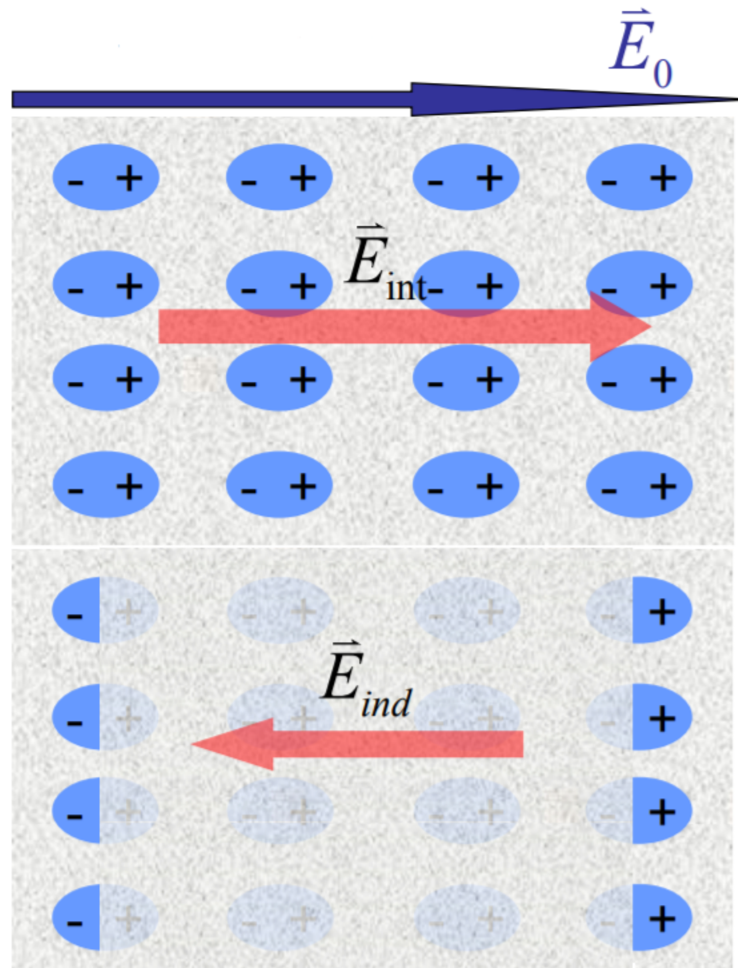
DIELÉCTRICOS. POLARIZACION

Campo E=0. Orientación de los átomos o moléculas al azar



Aplicando el principio de superposición, el campo en el material, $\boldsymbol{E_{int}}$, es el que se aplica $\boldsymbol{E_0}$ menos el inducido $\boldsymbol{E_{ind}}$ por la polarización

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}_0 - \vec{E}_{ind}$$



Campo $\vec{E} \neq 0$ los dipolos (átomos) se orientan.

DIELÉCTRICOS. POLARIZACION

Al aplicar el campo eléctrico, el material se polariza, dando lugar a la aparición de cargas de polarización, o carga polarizada, que antes no existían.

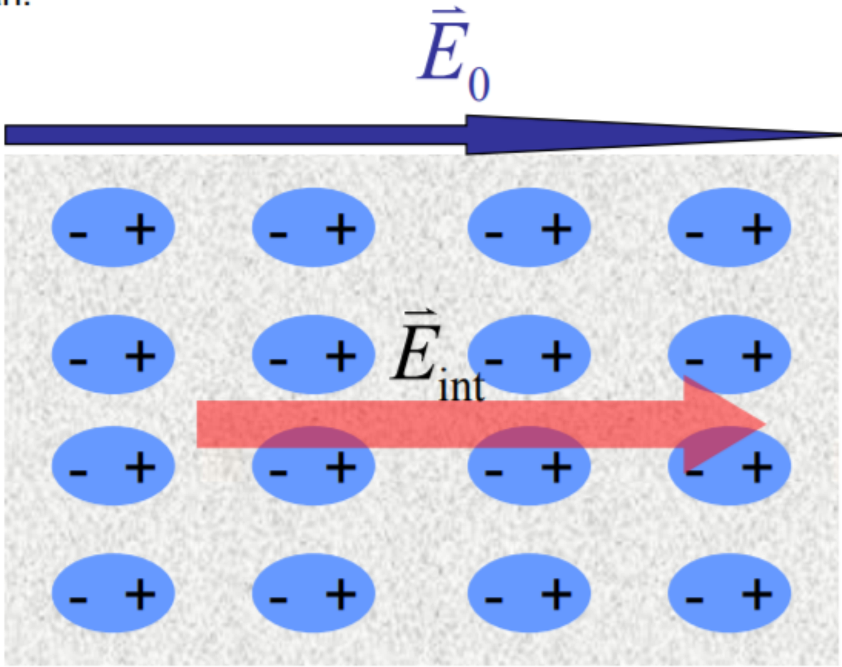
Se puede obtener el campo en el interior del material si conocemos el campo aplicado y la constante de permeabilidad dieléctrica ε del material (es una propiedad de cada material).

Se llama constante de permeabilidad dieléctrica relativa, ε_r o k_r, a:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

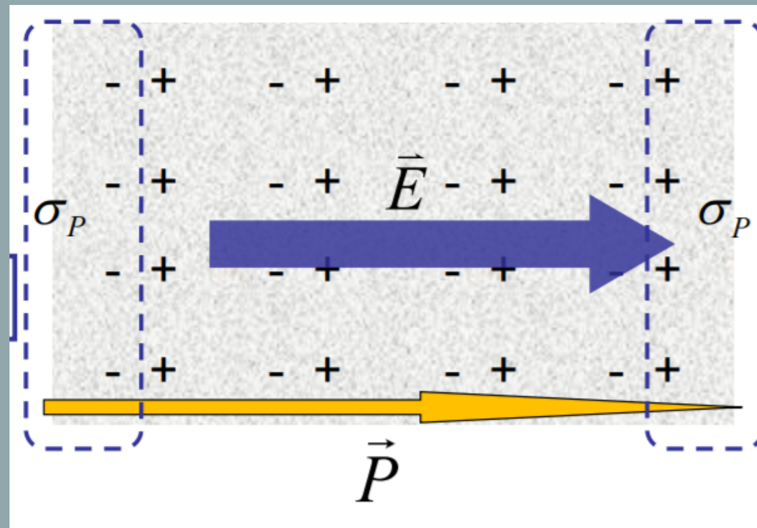
Su valor siempre es mayor que 1, en general, ya que los dieléctricos hacen que el campo eléctrico en su interior sea menor que el aplicado:

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{E}_0 - \vec{E}_{ind} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}$$



Nota: Supondremos la situación más sencilla en que los materiales son isótropos, homogéneos y lineales, para los cuales ε_r es constante y mayor que 1.
Hay materiales en que ε no es constante y una dependencia funcional complicada.

DIELÉCTRICOS



El material dieléctrico se polariza al ser introducido entre las placas del condensador, ya que hay un campo eléctrico en su interior. La polarización del dieléctrico es:

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$$

la densidad superficial de carga de polarización es: $\sigma_P = \vec{n}\vec{P} = \pm \chi_e \varepsilon_0 E$

<u>Se definen las siguientes constantes:</u>

Constante dieléctrica del medio material: ε

Constante dieléctrica relativa:

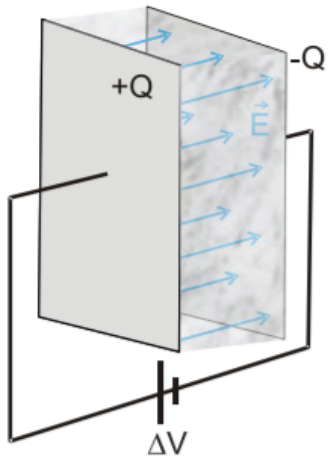
$$\varepsilon_r = \kappa = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

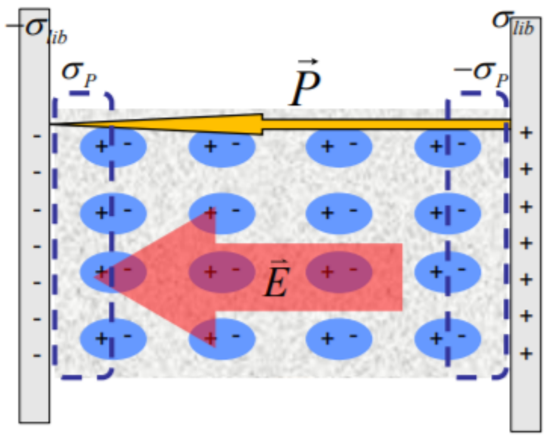
χ_e Suceptibilidad eléctrica

DIELÉCTRICOS

Calculemos qué relación existe entre ε_r y χ. Hay que distinguir entre cargas libres y cargas polarizadas.

Aplicamos la ley de Gauss teniendo en cuenta ambas cargas: libres y polarizadas (sin usar la constante dieléctrica del dieléctrico).





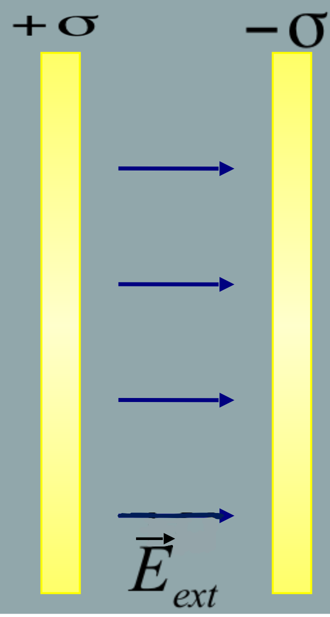
$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{Total en el interior}}}{\varepsilon_o} = \frac{Q_{lib}+Q_{pol}}{\varepsilon_o}$$

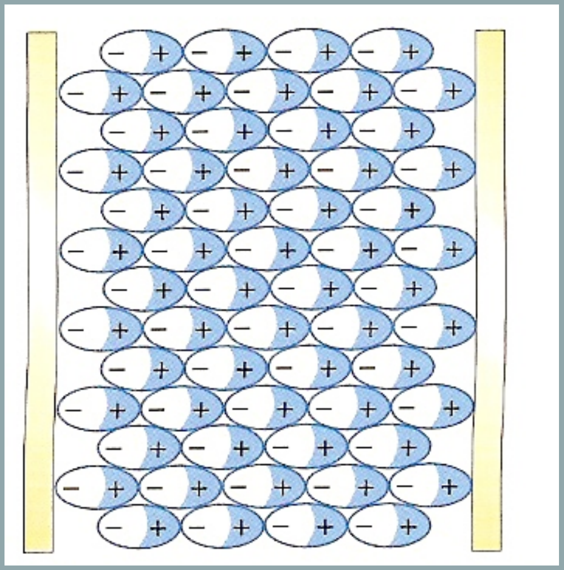
$$|\vec{E}|\,A = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o} = \frac{Q_{lib}+Q_{pol}}{\varepsilon_o} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q_{lib}/A}{\varepsilon_o} + \frac{Q_{pol}/A}{\varepsilon_o} = \frac{\sigma_{lib}}{\varepsilon_o} + \frac{\sigma_{pol}}{\varepsilon_o}$$

$$|\vec{E}| = \frac{|\sigma_{lib}|}{\varepsilon_o} - \frac{|\sigma_{pol}|}{\varepsilon_o} = |\vec{E}_o| - \frac{|\vec{P}|}{\varepsilon_o} = |\vec{E}_o| - \frac{\chi\varepsilon_o|\vec{E}|}{\varepsilon_o} \Rightarrow |\vec{E}_o| = (1+\chi)|\vec{E}| = \varepsilon_r|\vec{E}| \Rightarrow \varepsilon_r = 1+\chi$$

$$\boxed{\text{Como } \varepsilon_r > 1 \quad \Rightarrow \quad \chi > 0 \text{ siempre}}$$

DIELÉCTRICOS



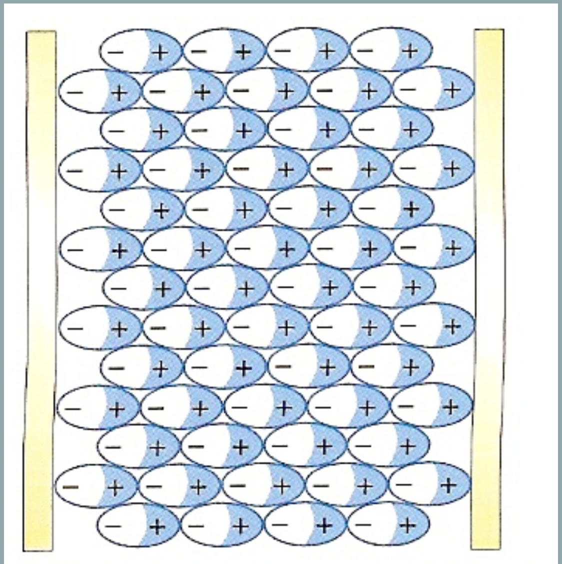


$$\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\dfrac{Q}{A} \\ C_{vacío} = \dfrac{Q}{V_{ab}} = \dfrac{Q}{Ed} \end{array}\right\} \Rightarrow C_{vacío} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

$$\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{Q}{A} \\ C_{dielectrico} = \dfrac{Q}{Ed} \end{array}\right\} \Rightarrow C_{dielectrico} = \varepsilon \frac{A}{d}$$

$$\frac{C_{dielectrico}}{C_{vacío}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r$$

DIELÉCTRICOS



Densidad de energía:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$