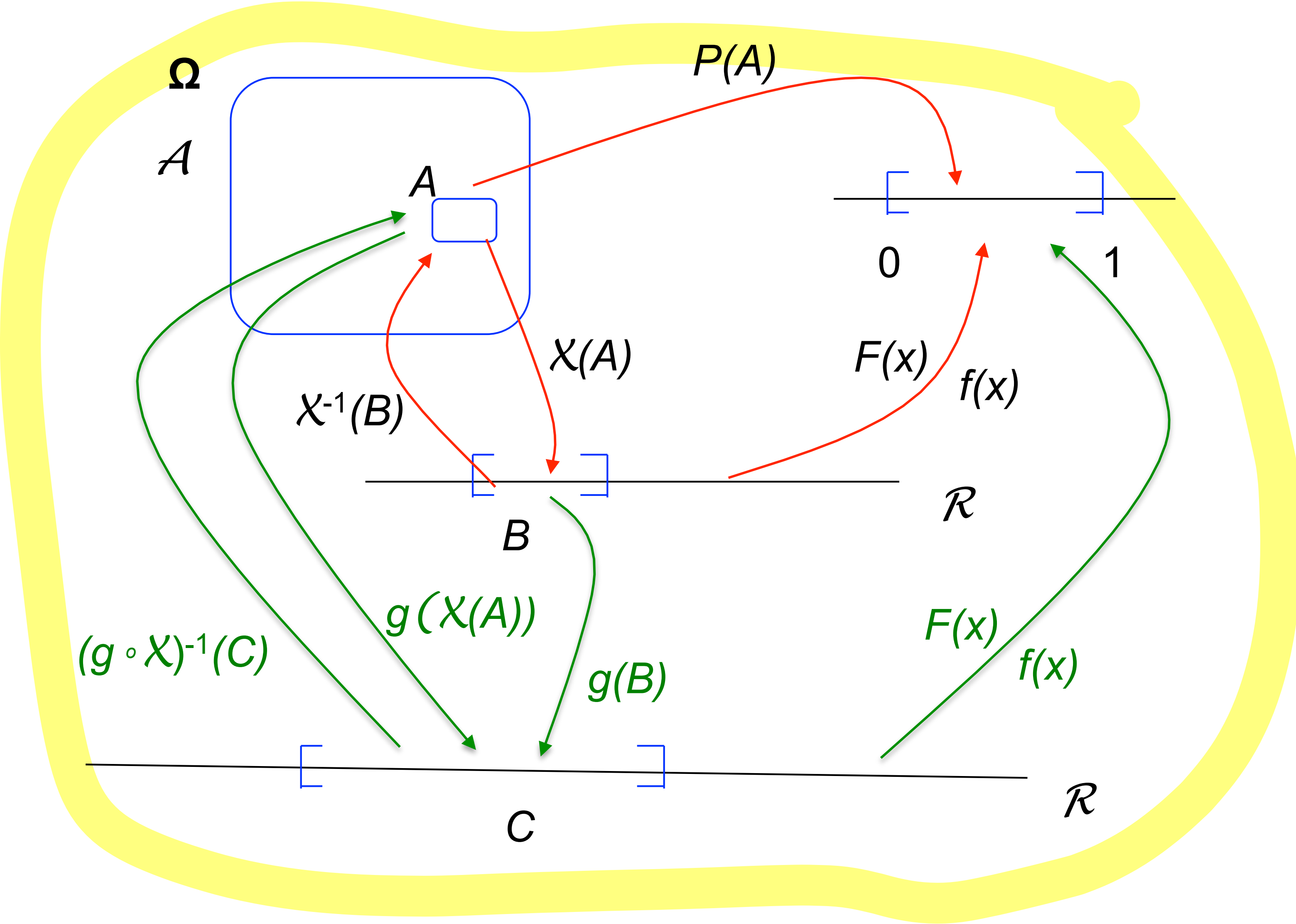
Variable aleatoria univariante: momentos

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE CÓRDOBA
Universidad de Córdoba
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Valor esperado

Sea $\mathcal{X}$ una v.a. y sea $g : R \to R$. Se define el valor esperado de la v.a. $g(\mathcal{X})$ como:



Valor esperado

Sea X una v.a. y sea $g: R \to R$. Se define el valor esperado de la v.a. *g(X)* como:

1. $E[g(X)] = \sum_{x_i \in S} g(x_i) f(x_i) = \sum_{x_i \in S} g(x_i) P(X = x_i)$ (Caso discreto)

2. $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx$ (Caso continuo)

Supuestos:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{x_i \in S} |g(x_i)| f(x_i) \quad < +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f(x)\, dx \quad < +\infty \end{array}\right\}$$

Es decir que tanto la suma como la integral son absolutamente convergentes

Esperanza matemática

- Si la función *g(X)* anterior es la identidad (*g(x)=x*), a *E[X]* se le denomina esperanza matemática o simplemente esperanza de la v.a. X, siendo habitual notarla por μ .

- Propiedades: 1. $E[k] = k$ 2. $E[a + bX] = a + bE[X]$

Momentos

- Momento de orden *k* respecto del parámetro *c*.

$$M_k^c = E\left[(X - c)^k\right]$$

- Si $c = 0$. Momentos respecto al origen.

$$\alpha_k = E\left[X^k\right]$$

- Si $c = \mu_X$. Momentos centrales.

media de la variable

$$\mu_k = E\left[(X - \mu_X)^k\right]$$

Media de una v.a.

- $\mu_X = \mu = \alpha_1 = E[X]$ "Media o valor medio" de la distribución de la v.a. X

$$\mu = \sum_{x_i \in S} x_i f(x_i) \quad ; \quad \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$ "Es una medida de centralización".

* 17

- En general, la media no tiene porque existir.

Varianza de una v.a.

- $\sigma_X^2 = \sigma^2 = \mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right]$ "Varianza" de la distribución de la v.a. X.

$\sigma^2 = \sum_{x_i \in S} (x_i - \mu)^2 f(x_i)$; $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$ "Es una medida de dispersión".

- Desviación típica de la v.a.

$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$ "Viene expresada en la mismas unidades que la v.a."

- Propiedades:

1. $\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$ "Teorema de Konning"
2. Si $Y = a + bX$ siendo $X \in D(\mu_X, \sigma_X^2)$. Entonces: $\sigma_Y^2 = b^2 \sigma_X^2$

Supongamos el experimento consistente en lanzar una moneda tres veces.

La distribución de probabilidad ya se ha calculado previamente y era:

X	0	1	2	3	
P(x)	1/8	3/8	3/8	1/8	∑=1

$$\mu = \alpha_1 = E[X] = \sum_{\forall x \in S} x\,p(x) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\alpha_2 = \sum_{\forall x \in S} x^2\,p(x) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Coeficiente de variación.

$$c.v. = \frac{\sigma}{\mu}$$

"Es una medida de dispersión adimensional", por tanto permite comparar dispersiones entre variable distintas.

Suele expresarse en %.

Supongamos el experimento consistente en lanzar una moneda tres veces.

La distribución de probabilidad ya se ha calculado previamente y era:

X	0	1	2	3	
P(x)	1/8	3/8	3/8	1/8	∑=1

$$\mu = \alpha_1 = E[X] = \sum_{\forall x \in S} x\,p(x) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$$

$$\alpha_2 = \sum_{\forall x \in S} x^2\,p(x) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{c.v.} = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{3/4}}{3/2} = 0.5773 \Rightarrow 57.73\%$$

Coeficiente de variación.

$$c.v. = \frac{\sigma}{\mu}$$

"Es una medida de dispersión adimensional", por tanto permite comparar dispersiones entre variable distintas.

Suele expresarse en %.

Desigualdad de Tchebycheff.

$$P\left(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Formulaciones equivalentes:

$$P\left(|X - \mu| < k\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$P\left(|X - \mu| \geq k\sigma\right) < \frac{1}{k^2}$$

Sea X una variable aleatoria con f.d.d. la mostrada. Determinar el valor de la constante k para que la función anterior sea una verdadera función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+k & ; \quad 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$$

Para que una función sea una verdadera f.d.d., debe cumplir:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in \Re \qquad \Rightarrow k \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} (2x+k)\,dx + \int_{1}^{\infty} 0dx = 1$$

$$\int_{0}^{1} (2x+k)\,dx = \left[x^2 + kx\right]_0^1 = 1 + k = 1 \Rightarrow \boxed{k = 0}$$

Luego la función de densidad de la variable aleatoria es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad 0 \leq X \leq 1 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$$

Calcular la función de Distribución de la f.d.d. anterior.

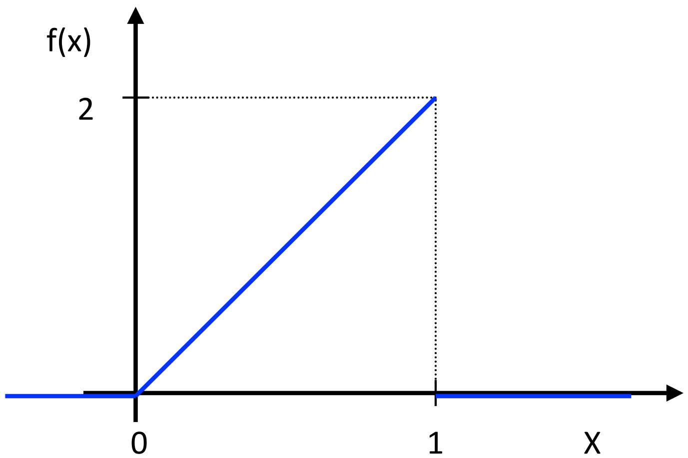
La función de densidad de la variable aleatoria es: $f(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad 0 \le X \le 1 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$

La función de Distribución de la v.a. es tal que: $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$$x < 0 \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

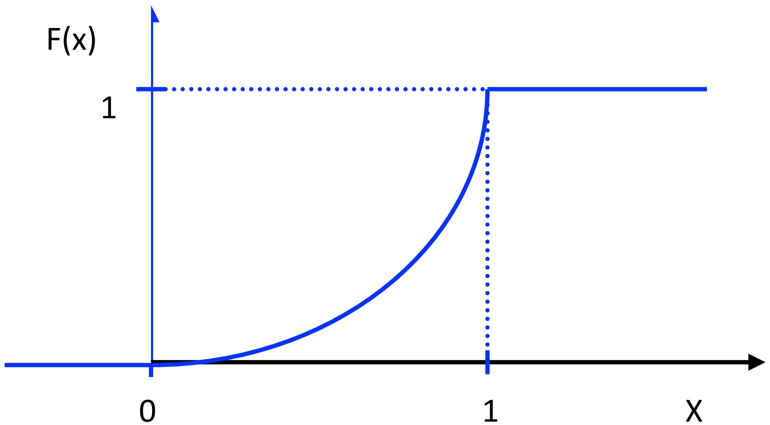
$$0 \le X \le 1 \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} 2t\,dt = \left[t^2\right]_0^x = x^2$$

$$x > 1 \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} 2t\,dt + \int_{1}^{x} 0\,dt = 1$$



Luego la función de densidad de la variable aleatoria queda como:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < 0 \\ x^2 & ; \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$



Dadas la f.d.d. y la f.d.D. calcular las probabilidades que siguen:

$$\text{f.d.d.: } f(x)=\begin{cases} 2x & ; \quad 0\le X\le 1 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases} \qquad \text{f.d.D.: } F(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad X<0 \\ x^2 & ; \quad 0\le X\le 1 \\ 1 & ; \quad X>1 \end{cases}$$

$$P(0.25\le X\le 0.75)=\begin{cases} \int_{0.25}^{0.75} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{0.25}^{0.75} = 0.75^2-0.25^2=0.5 \\ F(0.75)-F(0.25) = 0.75^2-0.25^2=0.5 \end{cases}$$

$$F(0.75)=P(X\le 0.75)$$

$$F(0.25)=P(X\le 0.25)$$

$$P(0.15< X\le 0.85)=\begin{cases} \int_{0.15}^{0.85} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{0.15}^{0.85} = 0.85^2-0.15^2=0.7 \\ F(0.85)-F(0.15)=0.85^2-0.15^2=0.7 \end{cases}$$

$$P(|X-2|\le 0.5)= P(-0.5\le X-2\le 0.5)=P(1.5\le X\le 2.5)=0$$

Sea X una variable aleatoria con f.d.d. la mostrada. Determinar el valor de la desviación típica.

$$f(x)=\begin{cases} 2x & ; \quad 0 \le X \le 1 \\ 0 & ; \quad \text{resto} \end{cases}$$

$$\mu=\alpha_1=E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \mu=\int_0^1 x\,2x\,dx=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$\sigma^2=\mu_2=V(X)=E(X-\mu)^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

$$\sigma^2=\int_0^1\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 2x\,dx=\frac{1}{18}$$

$$\sigma^2=\alpha_2-\alpha_1^2$$

$$\alpha_2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\,2x\,dx=\left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sigma^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

$$\sigma=+\sqrt{\sigma^2} \qquad \sigma=+\sqrt{\frac{1}{18}}=0.2357 \qquad \text{c.v.}=\frac{\sigma}{\mu}=\frac{0.2357}{2/3}=0.3535$$