Cálculo (grado de ingeniería informática)
Undécima sesión de prácticas

1 Determine la menor distancia entre el punto $(2, 1, -1)$ y el plano $x + y - z = 1$.

2 Si la diagonal de una caja debe ser una constante L, ¿cuál es el máximo volumen posible?

3 Calcule las siguientes integrales:

$$\int\int_R (6x^2y^3 - 5y^4)dA,$$

donde $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$.

$\int\int_D x\sqrt{y^2 - x^2}dA$, donde $D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$.

$\int\int_D x\cos(y)dA$, donde D está delimitada por $y = 0, y = x^2, x = 1$.

$\int\int_D 2xydA$, donde D es la región triangular de vértices $(0, 0)$, $(1, 2)$ y $(0, 3)$.

4 Determinar el volumen del sólido dado:

El sólido bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y encima de la región del plano XY delimitada por $y = x^2$ y $x = y^2$.

1 Determine la menor distancia entre el punto $(2, 1, -1)$ y el plano $x + y - z = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}\ (1,1,-1) \\ P\ (2,1,1) \end{array}\right\} r \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = -1-t \end{cases}$$

$$(2+t) + (1+t) + (-1-t) - 1 = 0 \rightarrow t = 1$$

$$r\ (3, 2, -2)$$

$$\vec{rP} = (1, 1, -1) \rightarrow |\vec{rP}| = \sqrt{3}$$

La distancia sera $\sqrt{3}$

2 Si la diagonal de una caja debe ser una constante L, ¿cuál es el máximo volumen posible?

Caja $\left\{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\}$ con diagonal L

$$L^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$V = xyz$$

$$z^2 = L^2 - x^2 - y^2$$

$$V = xy\sqrt{L^2 - x^2 - y^2} = xy(L - x - y)$$

$$V' = L - x - y$$

$$L - x - y = 0 \begin{cases} > 0 & \text{diagonal mínima} \\ < 0 & \text{diagonal máxima} \end{cases}$$

3 Calcule las siguientes integrales:

$$\int\int_R (6x^2y^3 - 5y^4)dA,$$

donde $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 1\}$.

$\int\int_D x\sqrt{y^2 - x^2}dA$, donde $D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\}$.

$\int\int_D x\cos(y)dA$, donde D está delimitada por $y = 0, y = x^2, x = 1$.

$\int\int_D 2xydA$, donde D es la región triangular de vértices $(0,0)$, $(1,2)$ y $(0,3)$.

$$\iint_D (6x^2y^3 - 5y^4)\, dA = \int_0^1 \int_0^3 (6x^2y^3 - 5y^4)\, dx\, dy = \int_0^3 \left[\frac{3x^2y^4}{2} - y^5\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{3x^2}{2} - x\right) dx = \left[\frac{1}{2}x^3 - x\right]_0^3 = \frac{21}{2}$$

$$\iint_D \left(x\sqrt{y^2 - x^2}\right) dA = \int_0^1 \int_0^y \left(x\sqrt{y^2 - x^2}\right) dx\, dy \overset{t = y^2 - x^2}{=} \int_0^1 \int_0^y -\frac{1}{2}\sqrt{t}\, dt\, dy = -\frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^y t^{1/2}\, dt\, dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{2\sqrt{t}\,|t|}{3}\right]_0^y dy = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{2\sqrt{y^2-x^2}\,|y^2 - x^2|}{3}\right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{y^3}{3}\, dy = \left[\frac{y^4}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$\iint_D x\cos(y)\, dA = \int_{x=1}\int_0^{x^2} x\cos(y)\, dy\, dx = \int_{x=1} x \int_0^{x^2} \cos(y)\, dy\, dx = \int_{x=1} x\left[\operatorname{sen}(y)\right]_0^{x^2} dx = \int_{x=1} x \operatorname{sen}(x^2)\, dx$$

$$\underset{t = x^2}{=} \int \frac{\operatorname{sen}(t)}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(t) = \frac{-\cos(t)}{2} = \frac{-\cos(x^2)}{2} = \frac{-\cos(1)}{2}$$

4 Determinar el volumen del sólido dado:

El sólido bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y encima de la región del plano XY delimitada por $y = x^2$ y $x = y^2$.

$z = x^2 + y^2 \longrightarrow V = \pi 2r 2h = \pi 2 \frac{x}{2} 2y$

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = y^2 \end{array}\right\} V = \pi 2 \frac{y^2}{2} 2x^2 = 2\pi y^2 x^2$