CÁLCULO

Derivación de funciones de una variable (Parte I)

Derivación de funciones de una variable (Parte I)

- Definición de función derivable en un punto.
- Derivabilidad y continuidad.
- Propiedades de las derivadas.

Función derivable en un punto

Definición

Sean $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in X$. Diremos que la función f es *derivable en* x_0 si existe el límite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Este límite se denomina derivada de f en x_0 y se denota por $f'(x_0)$.

Escribiendo $x - x_0 = h$, entonces la definición de la derivada es:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ejemplo: Sea $f(x) = x^2$ una función. Hallar $f'(x)$ usando la definición de derivada.

Solución:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ una función $(x \neq 0)$. Hallar $f'(x)$ usando la definición de derivada.

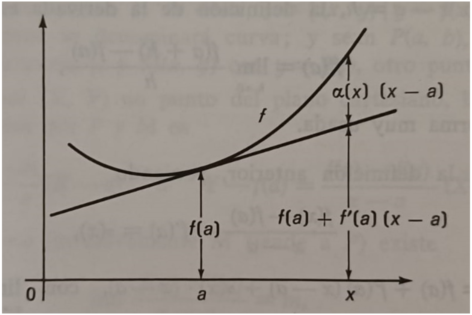
Solución:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x-x-h}{h(x+h)x} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}.
\end{aligned}
$$

Proposición

Sean $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $a \in X$. Si la función f tiene derivada en a, entonces existe una recta, y sólo una, que es tangente a la gráfica cartesiana de f en dicho punto, y que tiene por ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$



Ejemplo: Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \frac{4}{3x}$ en el punto $x = 2$.

Solución:

La recta tangente tiene la forma: $y = f(2) + f'(2)(x - 2)$.

- $f(2) = \frac{4}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3}$.
- $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\frac{4}{3x} - \frac{2}{3}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{-2}{3x} = -\frac{1}{3}$.

La recta tangente es: $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(x - 2)$.

Definición de derivada considerando límites infinitos

Definición

Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in X$. Se dice que la derivada de f es $+\infty$ en el punto $x = x_0$, si f es **continua** en x_0 y existe el límite infinito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty.$$

Análogamente se define $f'(x_0) = -\infty$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Observa que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$. Sin embargo, la derivada de f no existe, ya que no es continua en el punto $x = 0$.

Derivabilidad y continuidad

Proposición

Si una función f tiene derivada finita en un punto $x = x_0$, entonces f es continua en $x = x_0$.

Observa que no toda función continua en $x = x_0$ tiene que ser también derivable en $x = x_0$.

La función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero no es derivable en ese punto.

- $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1.$
- $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1.$

Por tanto, $f'(0) = \displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ no existe.

Propiedades de las derivadas

Proposición

Sean $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables en un punto $a \in X$. Entonces las funciones $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$ son derivables en a, y también lo es $\frac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$.

Además se tiene que:

- $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.
- $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}$.

Proposición (regla de la cadena)

Sea $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que tiene derivada finita en un punto $a \in X$. Sea $g : Y \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función (Y contiene a $f(X)$) que tiene derivada finita en el punto $b = f(a) \in Y$.
Entonces la función compuesta $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ es derivable en a, y su derivada es:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

Ejemplo: Calcula la derivada de la función $h(x) = (\ln(x))^2$.

Solución: Considerando las funciones $g(x) = x^2$ y $f(x) = \ln(x)$, entonces $h = g \circ f$.

Por tanto: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 2\ln(x)\frac{1}{x} = \frac{2\ln(x)}{x}$.

Derivación de funciones implícitas

- Una función f está definida de manera explícita si está expresada como $y = f(x)$.
- Una función f está definida de manera implícta si no lo está de la forma explícita.

Observación: Las funciones definidas de manera implícita se pueden derivar directamente, sin necesidad de despejar una de las variables.

Ejemplo: Derivar la ecuación $x^2 + y^2 = 4$.

Solución:

P1. **Sustituir $y = f(x)$.** En este caso, se tiene que:

$$x^2 + f(x)^2 = 4$$

P2. **Derivar ambos lados de la igualdad.** Para este caso:

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0$$

P3. **Despejar $f'(x)$.** Para el ejemplo se obtiene:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}.$$

P4. **Deshacer el cambio $y = f(x)$.** Se vuelve a la notación inicial:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

CÁLCULO

Derivación de funciones de una variable (Parte II)

Derivación de funciones de una variable (Parte II)

- Dos teoremas importantes.
  - Teorema de Rolle.
  - Teorema del valor medio.
- Aplicaciones de la derivada.
  - Monotonía y cálculo de extremos de una función.

Teorema de Rolle

- Determina que si una función es derivable y alcanza dos veces el mismo valor, entonces necesariamente en algún punto intermedio la pendiente de la recta tangente es cero.

Teorema de Rolle

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = 0.$$

Ejercicio: Demuestra que la ecuación $x^3 - 3x + 10 = 0$ no puede tener dos soluciones distintas en el intervalo $(0, 1)$.

Proof. Supongamos que la ecuación tiene dos soluciones a, b con $0 < a < b < 1$.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = x^3 - 3x + 10$.

- f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).
- $f(a) = f(b) = 0$.

Entonces, por Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Es decir, $3c^2 - 3 = 0$, lo que implica que $c = 1$ ó $c = -1$. Pero lo anterior contradice el hecho de que

$$0 < a < c < b < 1$$

Por tanto, la ecuación $x^3 - 3x + 10 = 0$ no puede tener dos soluciones distintas en el intervalo $(0, 1)$.

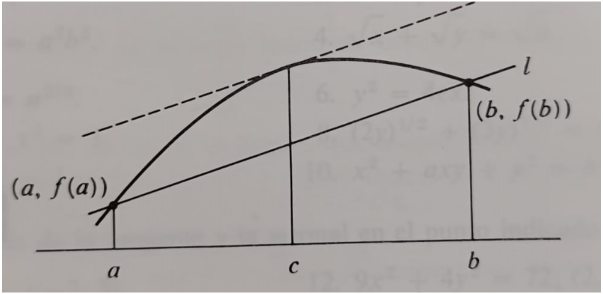
Teorema del Valor Medio

- Es una generalización del Teorema de Rolle ya que establece que, bajo las mismas condiciones, siempre va a existir un valor intermedio donde la recta tangente a f tiene la misma pendiente que la pendiente media de la gráfica entre a y b.

Teorema del Valor Medio

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces existe un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



- El número $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.
- Decir que existe un número c tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es equivalente a decir que la gráfica de f posee al menos un punto $(c, f(c))$ en el que la recta tangente es paralela a la recta l.

Definición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y $c \in [a, b]$. Entonces:

- f tiene un **mínimo local (o relativo)** en c si existe $\delta > 0$ tal que $f(c) \leq f(x)$ para cualquier $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$.
- f tiene un **mínimo global (o absoluto)** en c si se verifica que $f(c) \leq f(x)$ para cualquier $x \in [a, b]$.
- f tiene un **máximo local (o relativo)** en c si existe $\delta > 0$ tal que $f(c) \geq f(x)$ para cualquier $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$.
- f tiene un **máximo global (o absoluto)** en c si se verifica que $f(c) \geq f(x)$ para cualquier $x \in [a, b]$.

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f tiene un máximo y un mínimo global.

Teorema

Si f posee un máximo o mínimo local en c, entonces o bien $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Proof.

Si $f'(c) > 0$ o $f'(c) < 0$, entonces existen números x_1 y x_2 bien próximos a c tales que:

$$f(x_1) < f(c) < f(x_2).$$

Por tanto, no existe un máximo o un mínimo local en c.

Definición

Sea $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Un punto $c \in X$ es un *punto crítico* si una de las siguientes condiciones se satisface.

(i) $f'(c) = 0$.

(ii) $f'(c)$ no existe.

(iii) Si $X = [a, b]$ y $c = a$ ó $c = b$; si $X = [a, b)$ y $c = a$; ó si $X = (a, b]$ y $c = b$.

Criterio de la Primera Derivada

Sea $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $x = c$ y c punto crítico de f. Si existe un intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c - \delta, c)$ y $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c, c + \delta)$, entonces $f(c)$ es un máximo local. Si ambas desigualdades se invierten entonces $f(c)$ es un mínimo local.

Criterio de la Segunda Derivada

Sea $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Sea $c \in X$ tal que $f'(c) = 0$.

- Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un valor mínimo local.
- Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un valor máximo local.

Ejemplo: Calcula los puntos críticos y los valores extremos locales de la función $f(x) = x^3 - x$.

Solución: $f'(x) = 3x^2 - 1$.
Los puntos críticos son $x_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ y $x_2 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

$$f''(x) = 6x$$

Como $f''(x_1) < 0$ y $f''(x_2) > 0$, entonces por el Criterio de la Segunda Derivada, se deduce que $f(x_1) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ es un máximo local y que $f(x_2) = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$ es un mínimo local.

Ejercicio: La suma de dos números no negativos es 3. Hallar los dos números si el cuadrado del doble del primero menos el doble del cuadrado del segundo es mínimo.

Solución: Sea x uno de los números. Entonces, el segundo número puede ser considerado como $3 - x$.
Se desea calcular el valor mínimo de:

$$f(x) = (2x)^2 - 2(3-x)^2, \qquad 0 \leq x \leq 3.$$

Como $f'(x) = 8x + 4(3-x) = 4x + 12 = 4(x+3)$, entonces $f'(x) > 0$ en $(0,3)$.

Como f es continua en $[0,3]$, entonces f es creciente en $[0,3]$. Por tanto, el valor mínimo de f se alcanza en $x = 0$.

Los números buscados son 0 y 3.