Árboles

EEDD - GRADO EN ING. INFORMATICA - UCO

Montículos

ChangeLog

1/4/2025
- Adaptado el diseño de heap para usar un array externo como zona de almacenamiento.
2/4/2025
- Modificada especificación para usar un objeto comparador que induce el orden del heap.

EEDD - GRADO EN ING. INFORMATICA - UCO

Motivación

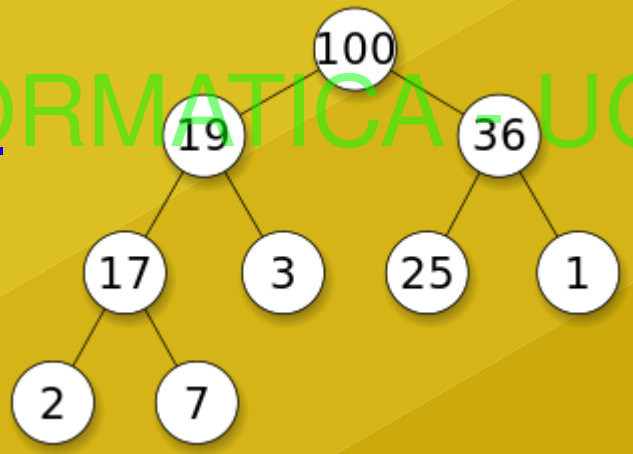
- Queremos diseñar un enrutador de paquetes con prioridad.
- ¿**Qué**? Hay tres operaciones básicas a especificar:
  - **Añadir** un nuevo paquete a la cola.
  - **Consultar** el paquete de mayor prioridad.
  - **Eliminar** el paquete de mayor prioridad.
- ¿**Cómo**? ¿Qué complejidades tendríamos?

Contenidos

- Definición de un montículo.
- Representación acotado de un árbol binario.
- Árboles cuasi-completos.
- Operaciones de flotado y hundimiento.
- Aplicaciones de los montículos: ordenación y colas de prioridad.

Heap

- Montículo: es un árbol binario que mantiene dos invariantes:
  - En cada subárbol, la raíz es < (>) que todos sus descendientes.
  - Es un árbol binario cuasi-completo.
- Usado para:
  - Ordenar (algoritmo HeapSort).
  - Implementar una cola de prioridad.



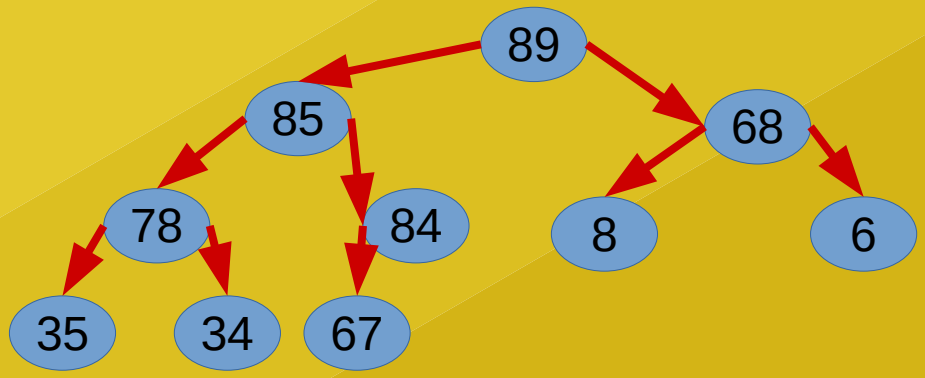
Heap

- Dibuja un árbol binario que cumpla las invariantes de montículo máximo para la secuencia de valores:
  - {68,34,78,84,67,6,8,35,89,85}

¿?

Heap

- Dibuja un árbol binario que cumpla las invariantes de montículo máximo para la secuencia de valores:
  - {68,34,78,84,67,6,8,35,89,85}



Heap

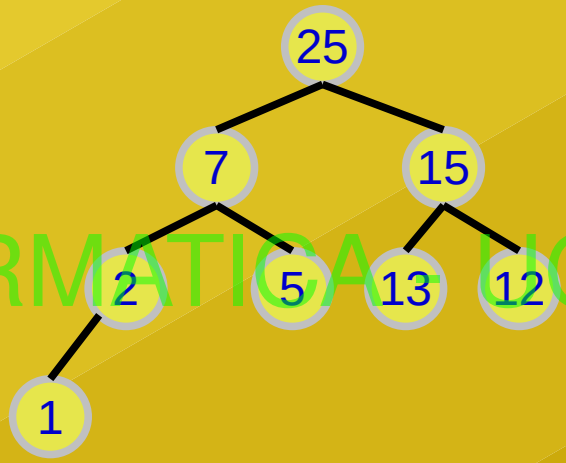
- TAD Heap[G].
  - **Makers**:
    - make(data:DArray[T], comp:Comp)
      - Post-c: size()=data.size()
  - **Observers**:
    - isEmpty():Bool
    - size():Integer
      - post-c: isEmpty() || size()>0
    - item():T //return the heap's root item.
  - **Mutators**:
    - insert(it:T) //insert a new item.
      - Post-c: not isEmpty()
      - Post-c: size()=(old.size()+1)
    - remove() //remove the root node.
      - Pre-c: not isEmpty()
      - Post-c: size()=(old.size()-1)
  - **Invariants**:
    - It is a complete binary tree.
    - isEmpty() || For each not empty left|right subtree, comp(root item, subtree item)

```
Comp[T]::operator(a:T,b:T):Bool
//Return true if a is before in order to b
```

Heap

- Operación de inserción:
  - insertar en la primera hoja disponible (árbol binario quasi-completo).
  - Comprobar invariante en el sub-árbol.
  - Si no se cumple, intercambiar el nodo hijo con el padre (“Flotar”) y repetir comprobación en nivel superior.

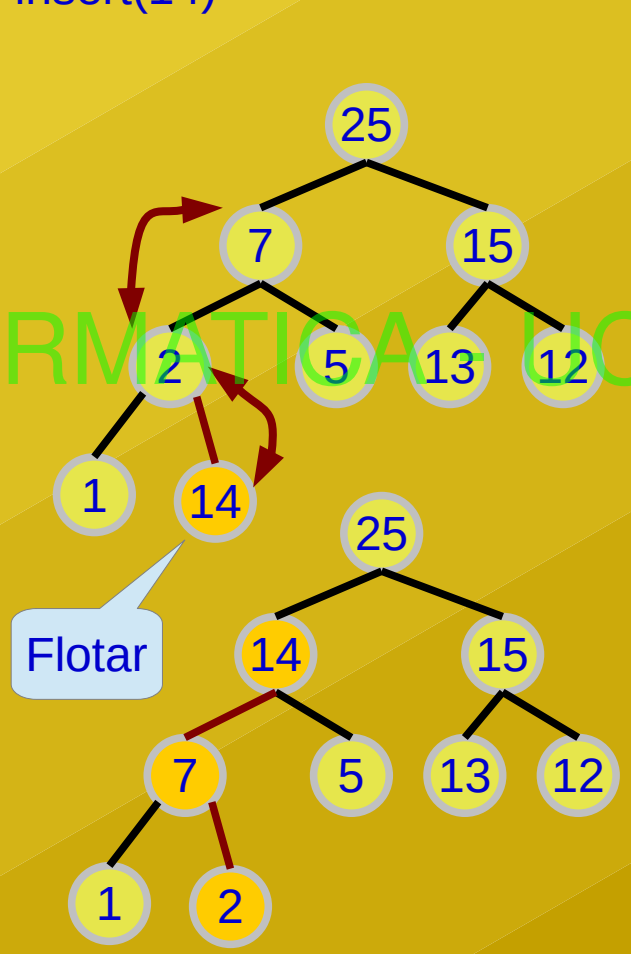
insert(14)



¿?

Heap

- Operación de inserción:
  - insertar en la primera hoja disponible (árbol binario quasi-completo).
  - Comprobar invariante “heap” en el sub-árbol.
  - Si no se cumple, intercambiar el nodo hijo con el padre (“Flotar”) y repetir comprobación en nivel superior.



Heap

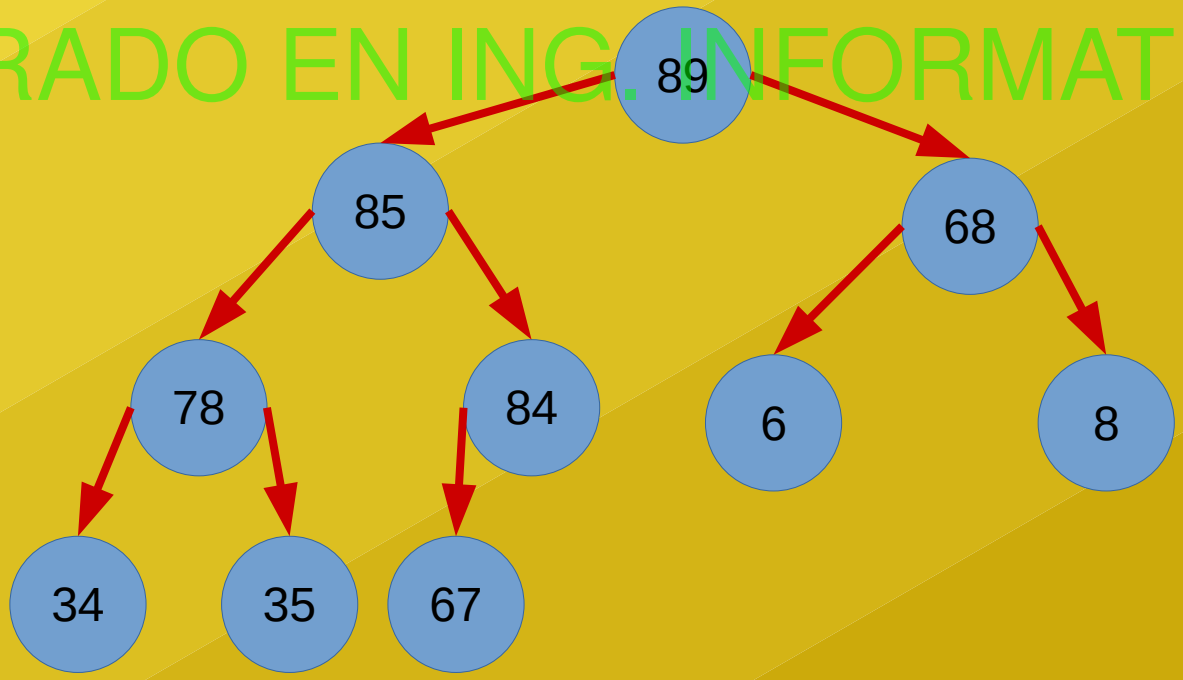
- Crear el montículo máximo para la secuencia:
  - {68,34,78,84,67,6,8,35,89,85}

EEDD - GRADO EN ING. INFORMATICA - UCO

¿?

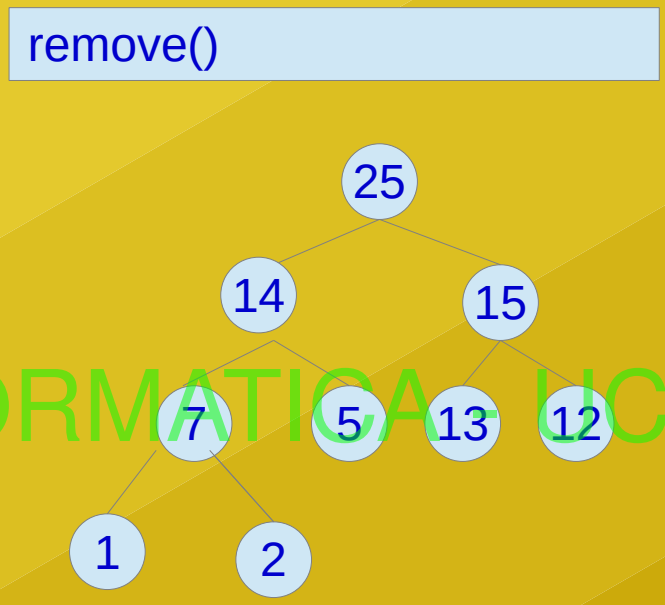
Heap

- Crear el montículo máximo para la secuencia:
  - {68,34,78,84,67,6,8,35,89,85}



Heap

- Operación de borrado:
  - Borrar siempre la raíz.
  - Intercambiar la raíz con el item de la última hoja, y borrar esa hoja.
  - Si no se cumple invariante intercambiar el nodo padre con hijo mayor/menor (“Hundir”) y repetir comprobación en nivel inferior.



¿?

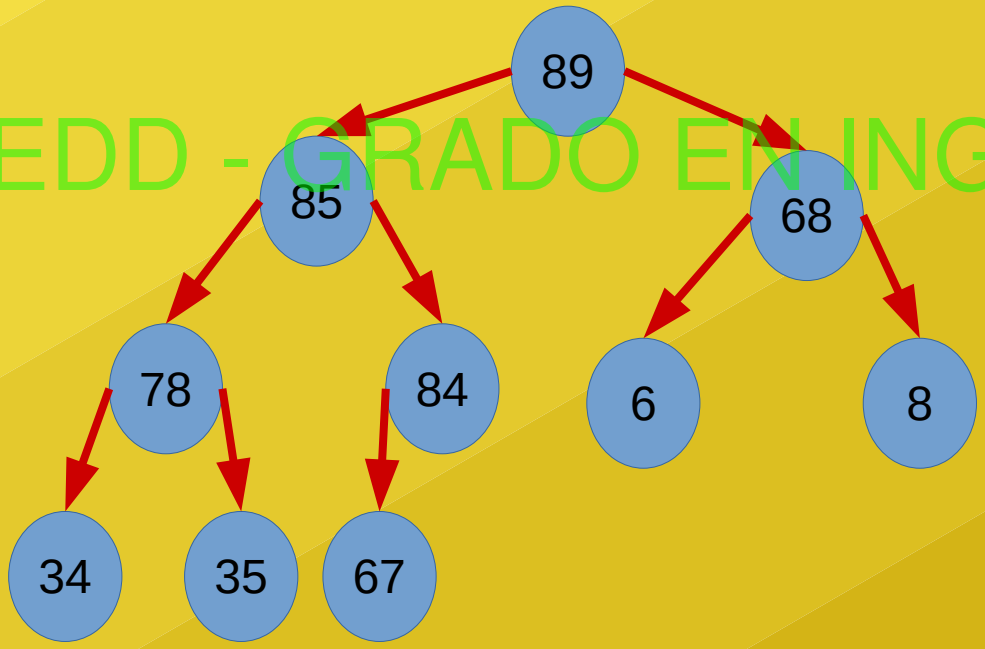
Heap

- Operación de borrado:
  - Borrar siempre la raíz.
  - Intercambiar la raíz con el item de la última hoja, y borrar esa hoja.
  - Si no se cumple invariante “heap”, intercambiar el nodo padre con hijo mayor/menor (“Hundir”) y repetir comprobación en nivel inferior.

Heap

- Dado el montículo siguiente, eliminar la cima.

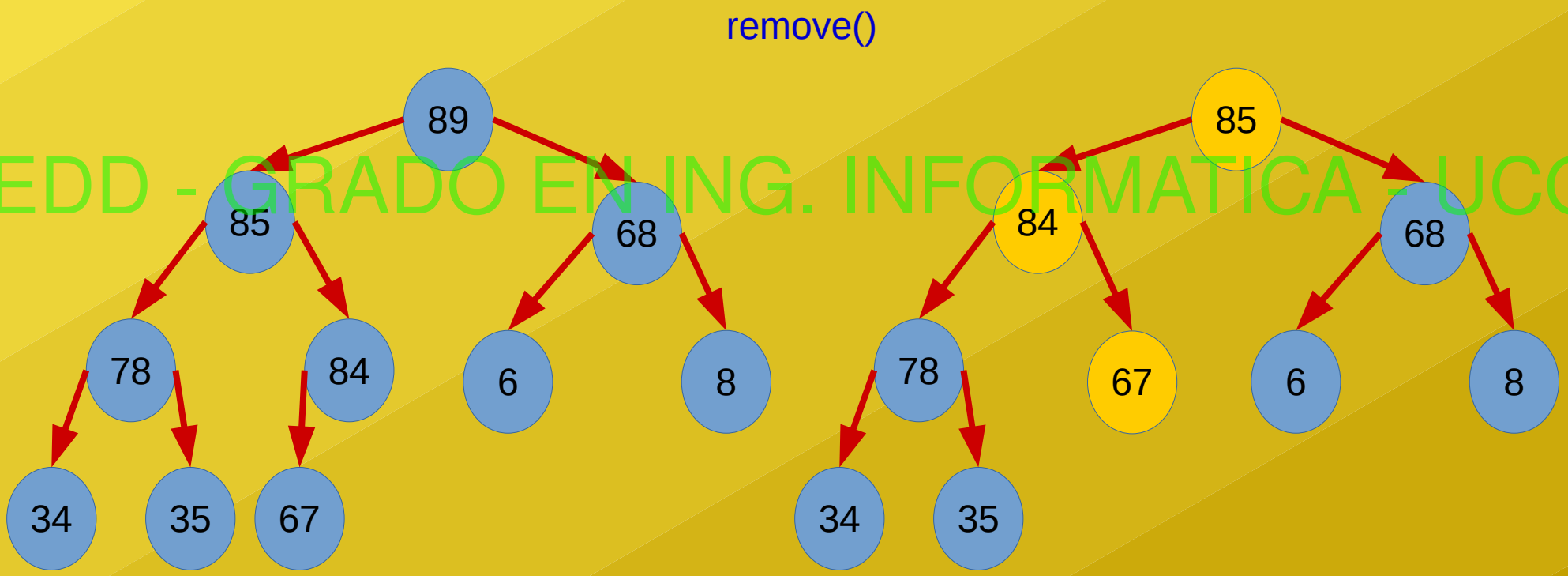
remove()



¿?

Heap

- Dado el montículo siguiente, eliminar la cima.

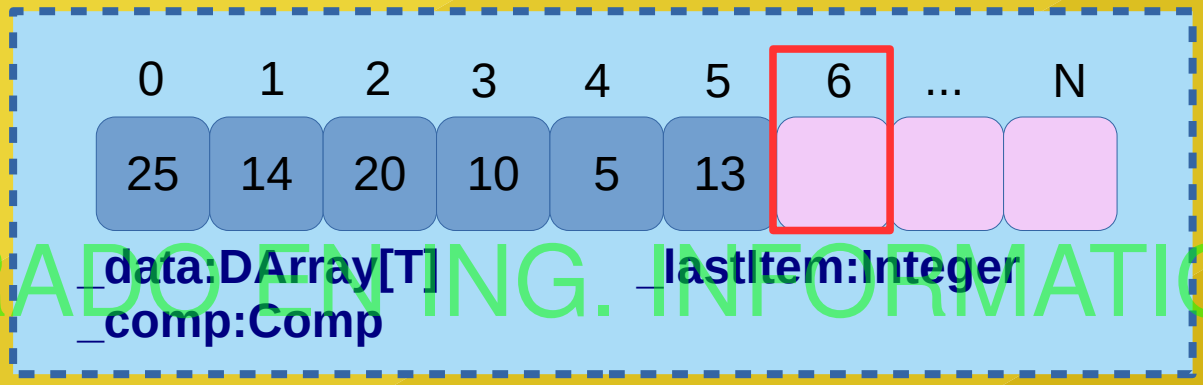


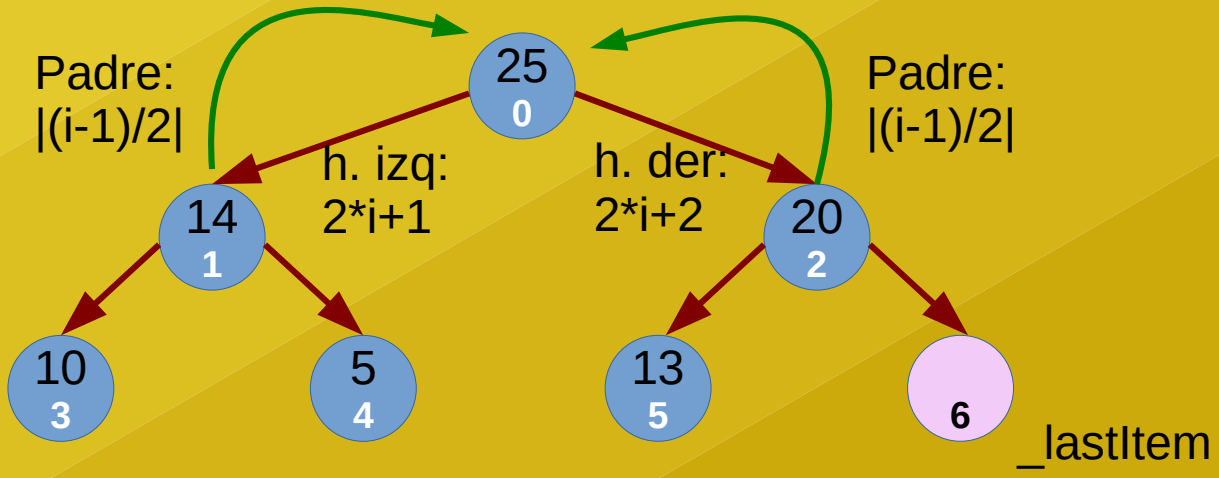
Heap

- Diseño.
  - ¿cómo floto una hoja?
  - ¿cómo localizo la hoja a crear/eliminar manteniendo la invariante árbol cuasi-completo?

Heap

- Diseño de un árbol binario usando un DArray.



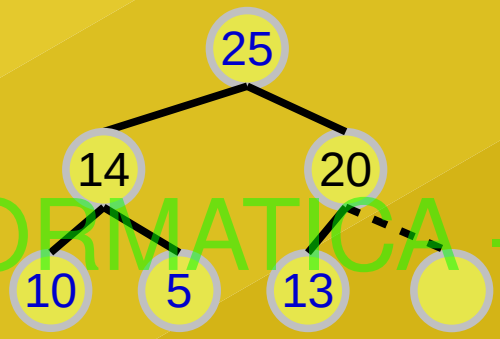


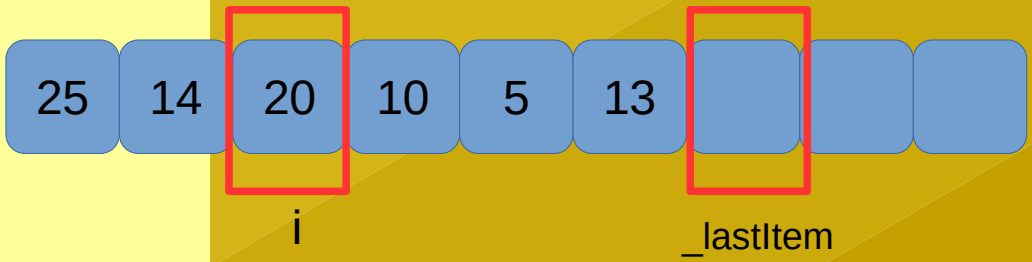
Heap

- Heap[T]: diseño.

```
Heap[T]::create(Var data:DArray[T], comp:Comp[T])
  _data <- data
  _lastItem <- data.size()
  _comp <- comp
  heapify()
Heap[T]::isEmpty:Bool
  return _lastItem == 0
Heap[T]::size():Integer
  return _lastItem
Heap[T]::item():T //O( )
  pre-c: not isEmpty()
  return _data[0]


leftChild(i:Integer):Integer
  return i*2+1
rightChild(i:Integer):Integer
  return i*2+2
parent(i:Integer):Integer
  return (i-1) div 2
```

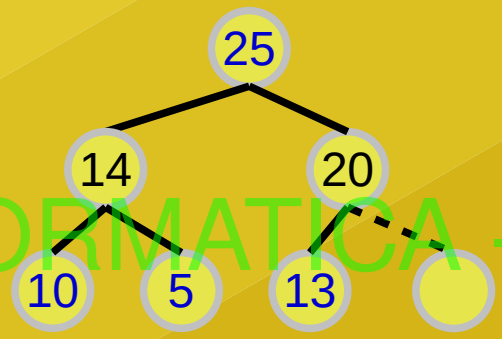



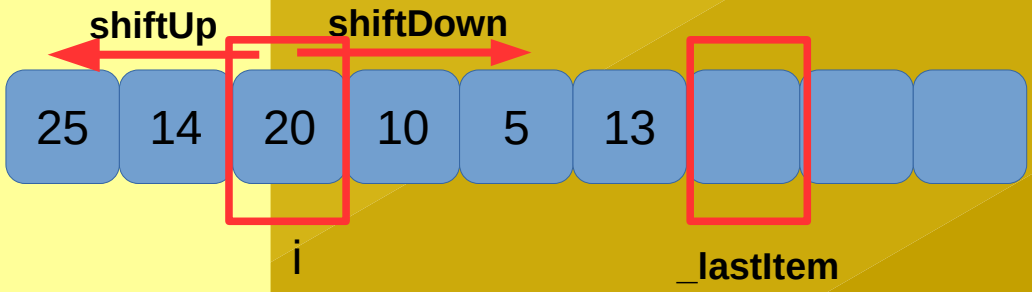


Heap

- Heap[T]: diseño.

```
Heap[T]::shiftUp(i:Integer): //O( )
  If i>0 and comp_(_data[i], _data[parent(i)]) Then
    swap(_data[i], _data[parent(i)])
    shiftUp(parent(i))
  EndIf
Heap[T]::shiftDown(i:Integer): //O( )
  Var: n, lC, rC:Integer
  n ← i
  lC ← leftChild(i)
  rC ← rightChild(i)
  If lC<_lastItem And comp_(_data[lC],_data[n]) Then
    n ← lC
  EndIf
  If rC<_lastItem And comp_(_data[rC],_data[n]) Then
     n ← rC
  EndIf
  If i <> n Then
    swap(_data[i], _data[n])
    shiftDown(n)
  EndIf
```



Heap

- Heap[T]: diseño.

```
Head[T]::insert(T item) //O( )
  If _lastItem =_data.size() Then
     _data.pushBack(item)
  Else
     _data[_lastItem] ← item
  shiftUp(_lastItem)
  _lastItem ← _lastItem + 1

Head[T]::remove() // O( )
  Pre-c: not isEmpty()
  _lastItem ← _lastItem – 1
  If _lastItem > 0 Then
    swap(_data[0],_data[_lastItem])
    ShiftDown(0)
  End-If
```

Heap

- Algoritmo HeapSort: Paso 1 (heapify).


```
//Make the array to be a heap.
Head[T]::heapify() //O( )*
  If size()>0 Then
    For i ← (size() div 2)-1 To 0  Inc -1 do
       shiftDown(i)
```

(0 * n/2) + (1 * n/4) + (2 * n/8) + ... + (h * 1) < N -> O(N)

Total=11 < 15

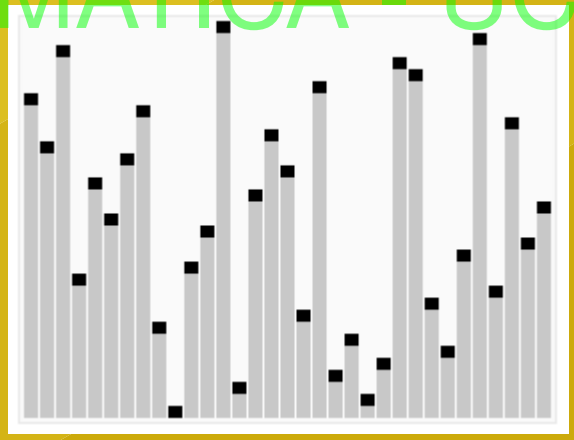
*Ver: stackoverflow.com/questions/9755721/how-can-building-a-heap-be-on-time-complexity

Heap

- Algoritmo HeapSort: Paso 2.
  - Los montículos fueron inventados para ordenar vectores.


```
Algorithm Heapsort(Var data:Array[T],
                   comp:Comp[T])
Var
  heap:Heap[T]
Begin
  heap := Head[T]::create(data,comp) //heapify
  While Not heap.isEmpty() Do
     heap.remove()
End.
```

¿O( )?



fuente: Wikipedia

Heap

- Resumiendo.
  - Un Heap es una ED usada para tener disponible con O(1) el máximo/mínimo elemento de un conjunto y mejor desempeño en inserción que una lista ordenada.
  - Es un tipo de árbol binario que mantiene dos invariantes:
    - Es un árbol binario completo.
    - En todos los sub árboles, la raíz es mayor/menor que todos sus descendientes.
  - Se inventaron para ordenar vectores: algoritmo Heapsort.
  - También se usan para implementar una cola de prioridad.
  - También nos permite seleccionar los K mayores/menores elementos de un conjunto, por ejemplo para buscar los K vecinos más cercanos.

Referencias

- Lecturas recomendadas:
  - Caps. 10, 11 y 12 de “Estructuras de Datos”, A. Carmona y otros. U. de Córdoba. 1999.
  - Caps 9 y 13.5 de *“Data structures and software develpment in an object oriented domain”*, Tremblay J.P. y Cheston, G.A. Prentice-Hall, 2001.
  - Wikipedia:
    - en.wikipedia.org/wiki/Heap_(data_structure)