Cálculo (grado de ingeniería informática)
Décima sesión de prácticas

1 Determine los máximos, mínimos y puntos de silla de las siguientes funciones.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4.$$

2 Una zona montañosa tiene un perfil de elevación dado por la siguiente función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (en metros sobre el nivel del mar)

$$h(x, y) = 1000 \sin(x) + 500 \sin(y) + 2000$$

a) Hallar las coordenadas de la cima de una de las montañas y su elevación. Justificar que las coordenadas escogidas corresponden a las de una cima.

b) Un alpinista se halla en el punto de coordenadas $(0, 0)$ y comienza a caminar siguiendo la bisectriz del primer cuadrante. Determinar si está ascendiendo o descendiendo.

3

Se dispone de una cantidad de cartón igual a 1 metro cuadrado para contruir una caja con forma de paralelepípedo. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que su volumen sea máximo?

4 Estudiar los máximos y mínimos, tanto absolutos como relativos de las siguientes funciones

$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + 1 - x$ en la región limitada por las rectas $x = \pm 2$, $y = \pm 2$.

1 Determine los máximos, mínimos y puntos de silla de las siguientes funciones.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4.$$

Derivadas parciales $f_x(x,y) = 2x + 2xy$

$f_y(x,y) = 2y + x^2$

$f_{xx}(x,y) = 2y + 2$

$f_{xy}(x,y) = 2x$

$f_{yy}(x,y) = 2$

$f_x(x,y) = 0 \rightarrow 2x + 2xy = 0 \rightarrow 2x(y+1) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -1$

$f_y(x,y) = 0 \rightarrow 2y + x^2 = 0 \rightarrow y = \frac{-x^2}{2}$

Sustituimos ambas

$f_x(x,y)$: $x(2y+2) = 0 \rightarrow x(-x^2+2) = 0 \rightarrow x \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$

$f_y(x,y)$: $2y + x^2 = 0 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0$

$-2 + x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \; ; \; y = 0 \\ x = -1 \; ; \; y = -1 \\ x = 1 \; ; \; y = -1 \\ x = -\sqrt{2} \; ; \; y = -1 \\ x = \sqrt{2} \; ; \; y = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (0,0) \\ (-1,-1) \\ (1,-1) \\ (-\sqrt{2},-1) \\ (\sqrt{2},-1) \end{array}$$

$$\text{Hess} f = \begin{pmatrix} 2y+2 & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix} = 4y + 4 - 4x^2$$

$D < 0$ punto silla

$D > 0$ y $f_{xx} > 0$ mínimo local

$D > 0$ y $f_{xx} < 0$ máximo local

$\text{Hess} f(0,0) = 4 > 0 \quad f_{xx} > 0$ mínimo local $(0,0)$

$\text{Hess} f(-1,-1) = -4 < 0$ pto silla $(-1,-1)$

$\text{Hess} f(1,-1) = -4 < 0$ pto silla $(1,-1)$

$\text{Hess} f(-\sqrt{2},1) = -8 < 0$ pto silla $(-\sqrt{2},1)$

$\text{Hess} f(\sqrt{2},1) = -8 < 0$ pto silla $(\sqrt{2},1)$

2 Una zona montañosa tiene un perfil de elevación dado por la siguiente función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (en metros sobre el nivel del mar)

$$h(x, y) = 1000\sin(x) + 500\sin(y) + 2000$$

a) Hallar las coordenadas de la cima de una de las montañas y su elevación. Justificar que las coordenadas escogidas corresponden a las de una cima.

b) Un alpinista se halla en el punto de coordenadas $(0, 0)$ y comienza a caminar siguiendo la bisectriz del primer cuadrante. Determinar si está ascendiendo o descendiendo.

a) $h(x,y) = 1000 \operatorname{sen}(x) + 500 \operatorname{sen}(y) + 2000$

$$\left.\begin{array}{l} f^x = 1000\cos x = 0 \;;\; x = \frac{\pi}{2} \\ f^y = 500\cos y = 0 \;;\; y = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Hess} f = \begin{pmatrix} -1000 \operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & -500 \operatorname{sen} y \end{pmatrix} = 500000 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$\text{Hess} f \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 500000 > 0 \quad f^{xx} < 0$ pto máximo

b) $D_{\vec{u}} h(0,0) =$

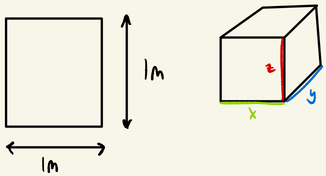
$\vec{u} = (1,1)$

$\nabla \vec{h}(0,0) = (1000, 500)$

$\vec{u} \, \nabla \vec{h} > 0$; es positivo por lo que esta ascendiendo

3

Se dispone de una cantidad de cartón igual a 1 metro cuadrado para contruir una caja con forma de paralelepípedo. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que su volumen sea máximo?



$$V_{max} = xyz$$

$$A = 2(xy + xz + yz) = 1 \longrightarrow xy + xz + yz = \frac{1}{2}$$

$$f(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

$$= xyz + \lambda\left(xy + xz + yz - \frac{1}{2}\right)$$

$$f_x = yz + \lambda(y+z) = 0 \to \lambda = \frac{-yz}{y+z}$$

$$f_y = xz + \lambda(x+z) = 0 \to \lambda = \frac{-xz}{x+z}$$

$$f_z = xy + \lambda(x+y) = 0 \to \lambda = \frac{-xy}{x+y}$$

$$f_\lambda = xy + xz + yz - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{-yz}{y+z} = \frac{-xz}{x+z} \to -xyz - yz^2 = -xyx - xz^2 \to y = x$$

$$\frac{-xz}{x+z} = \frac{-xy}{x+y} \to -xyz - x^2z = -xyz - x^2y \to y = z$$

$$x = z = y$$

$$xy + xz + yz = \frac{1}{2} \to x^2 + x^2 + x^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow 3x^2 = \frac{1}{2} \to x^2 = \frac{1}{6} \to x = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$x = y = z = \frac{\sqrt{6}}{6} = 0{,}408248 \text{ m}$$

4 Estudiar los máximos y mínimos, tanto absolutos como relativos de las siguientes funciones

$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + 1 - x$ en la región limitada por las rectas $x = \pm 2$, $y = \pm 2$.

$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + 1 - x$

$x = \pm 2$

$y = \pm 2$

Derivadas parciales $\quad f_x = x^2 + y^2 - 1$

$f_y = 2xy$

$f_{xx} = 2x$

$f_{yy} = 2x$

$f_{xy} = 2y$

$f_x(x,y) = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0 \rightarrow y^2 = 1 - x^2$

$f_y(x,y) = 0 \rightarrow 2xy = 0 \rightarrow x = 0$

Sustituimos ambas

$x^2 + y^2 - 1 = 0 \rightarrow y^2 - 1 = 0 \rightarrow y = \sqrt{1} = \pm 1$

$2xy = 0 \rightarrow 2x(1 - x^2) = 0 \rightarrow 2x - 2x^3 = 0 \rightarrow x \begin{cases} -1 \\ 0 \\ 1 \end{cases}$

Hay 6 posibles puntos críticos

$f(-1,-1)$

$f(-1,1)$

$f(0,-1)$

$f(0,1)$

$f(1,-1)$

$f(1,1)$

$$D = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 2x \; 2x - (2y)^2 = 4x^2 - 4y^2$$

$f(-1,-1)$: $D = 0$

$f(-1,1)$: $D = 0$

$f(0,-1)$: $D = -4$ $(0,-1)$ es un punto silla

$f(0,1)$: $D = -4$ $(0,1)$ es un punto silla

$f(1,-1)$: $D = 0$

$f(1,1)$: $D = 0$