MATEMÁTICA DISCRETA

Introducción a la Lógica Matemática (Parte I)

Introducción a la Lógica Matemática (Parte I)

- Introducción a la lógica de Proposiciones.
- Tablas de verdad.

- Lógica es el estudio del razonamiento, y se refiere específicamente a si el razonamiento es correcto.
- La lógica se centra en la relación entre las afirmaciones y no en el contenido de una afirmación en particular.
- Los métodos lógicos se usan en matemáticas para demostrar teoremas y, en las ciencias de la computación, para probar que los programas hacen lo que deben hacer.

La lógica es una ciencia de las leyes necesarias del pensamiento, sin la cual no se comprende ni se razona.

Immanuel Kant, 1785

Definición

- Una proposición es una oración que es verdadera o falsa, pero no ambas.
- Es común que una proposición se exprese como una oración declarativa (y no como pregunta, orden, exclamación, etc.).
- Para representar las proposiciones se usarán variables, como son: ej: p, q y r.

Ejemplos

a) Los únicos enteros positivos que dividen a 5 son el 1 y el 5.

b) Para todo entero $n > 0$, existe un número primo mayor que n.

c) $3 + 3 = 8$.

d) x^2 es un número negativo.

e) Existe un ángulo α tal que $\cos(\alpha) = 0$.

Definición

Sean p y q dos proposiciones.

- La *conjunción* de p y q, denotada por $p \wedge q$, es la proposición

  $$p \text{ y } q$$

  .

- La *disyunción* de p y q, denotada por $p \vee q$, es la proposición

  $$p \text{ o } q$$

  .

- La *negación* de p, denotada por $\neg p$, es la proposición

  $$\text{no } p$$

  .

Ejemplo

Sean p y q las siguientes proposiciones:

$$p\text{: Una década tiene 10 años,}$$
$$q\text{: Un milenio tiene 100 años.}$$

- p es verdadera. ($\neg p$ es falsa)
- q es falsa. ($\neg q$ es verdadera)
- $p \wedge q$ es falsa.
- $p \vee q$ es verdadera.

Tablas de verdad

Los valores de verdad de las proposiciones, tales como conjunciones o disyunciones, se pueden describir por las **tablas de verdad**. La tabla de verdad de una proposición p, formada por las proposiciones individuales $p_1, \ldots, p_n$, enumera todas las posibles combinaciones de los valores de verdad para $p_1, \ldots, p_n$, donde V denota verdadero y F denota falso, y da la lista de valores de verdad de p para cada combinación.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

p	$\neg p$
V	F
F	V

Precedencia del operador

Si p es una proposición formada por proposiciones individuales (tales como p, q y r) e incluye algunos o todos los conectores lógicos (por ejemplo, $\neg$, $\wedge$ y $\vee$), en la ausencia de paréntesis, primero se evalúa $\neg$, después $\wedge$ y luego $\vee$.

Ejemplo

Sean p, q y r proposiciones tales que p y r son falsas y q es verdadera. Determina si la proposición

$$\neg p \vee q \wedge r$$

es falsa o verdadera.

Solución:

- Primero se evalúa $\neg p$, que es verdadera.
- Después se evalúa $q \wedge r$, que es falsa.
- Por último se evalúa $\neg p \vee q \wedge r$, que es verdadera.

Ejercicio

Sean p, q y r las siguientes proposiciones:

$$p : 5 < 9, \quad q : 9 < 7 \quad \text{y} \quad r : 5 < 7.$$

Representa de manera simbólica cada una de las siguientes proposiciones, y determina si son verdaderas o falsas.

a) No ocurre que ($5 < 9$ y $9 < 7$).

b) $5 < 9$ o no ocurre que ($9 < 7$ y $5 < 7$).

Solución:

a) $\neg(p \wedge q)$ Verdadera.

b) $p \vee \neg(q \wedge r)$ Verdadera.

Ejercicio

Sean p y q dos porposiciones. Escribe la tabla de verdad de las siguientes proposiciones

a) $(p \vee q) \wedge \neg p$.

b) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$.

Solución:

a)

p	q	$(p \vee q) \wedge \neg p$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

b)

p	q	$(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejercicio

Sean j y k las siguientes proposiciones:

$$j\text{: El jardinero dice la verdad,}$$
$$k\text{: El cocinero dice la verdad.}$$

Escribe de manera simbólica la siguiente proposición l y escribe su tabla de verdad correspondiente.

l: El cocinero y el jardinero no pueden ambos decir la verdad.

Solución:

j	k	$j \wedge k$	$l \equiv \neg(j \wedge k)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V