Examen Abel febrero 2023-24

1. a) Rolle

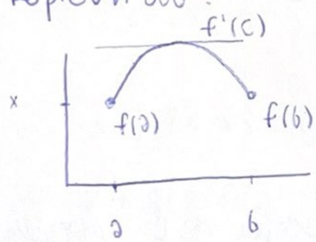
Dado $f(x)$ que cumpla:

- Continua en $[a,b]$
- Derivable en (a,b)
- $f(a)=f(b)$

Existe una solución en el intervalo (a,b) tal que

$f'(c)=0$

Representado:



b) Sea $f:[3,5]\to\mathbb{R}$ continuo y derivable en $[3,5]$.

$f(3)=6$ $f(5)=10$. Sea $g:[3,5]\to\mathbb{R}$ definido

como $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

¿Existe un $x_0 \in (3,5)$ que $g'(x_0)=0$ y $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}$

Teorema de Rolle

- Continuo en $[a,b]$
- Derivable en (a,b)
- $f(a)=f(b) \to g(a)=g(b)$; $\dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(b)}{b}$; $\dfrac{6}{3}=\dfrac{10}{5}=2$

Lo que significa que existe un $g'(x_0)=0$

Apelicamos la interpolación polinómica de Lagrange para obtener $f(x)$:

$$P(x) = f(x_0)\,L(x_0) + f(x_1)\,L(x_1)$$

$$f(x_0) = f(3) = 6$$

$$f(x_1) = f(5) = 10$$

$$L(x_0) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{(x-5)}{(3-5)} = \frac{x-5}{-2}$$

$$L(x_1) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(x-3)}{(5-3)} = \frac{x-3}{2}$$

$$P(x) = 6\,\frac{x-5}{-2} + 10\,\frac{x-3}{2} = -3x + 15 + 5x - 15 = 2x$$

$f'(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$; $2 = \dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}$; Todos los valores del intervalo cumplen $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{x_0}$

2. Sea $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ en $\mathbb{R} - \{0,1\}$

a) Comprueba si es inyectiva

$f(x) = f(y)$; $\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{y-1}{y}$; $xy - y = xy - x$; $x = y$

Es inyectiva

b) Es sobreyectiva

$\mathrm{Dom}\, f(x) \leq \mathrm{Dom}\, f^{-1}(x)$

$f(x) = y = \frac{x-1}{x}$; $xy = x-1$; $xy - x = -1$; $x(y-1) = -1$; $x = \frac{-1}{y-1}$

$= \frac{1}{1-y}$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{1-y}\right) = \frac{\frac{1}{1-y} - 1}{\frac{1}{1-y}} = \frac{\frac{1-y}{1-y} - 1 + y}{1} = y$$

Es sobreyectiva. Al ser inyectiva y sobreyectiva es biyectiva.

3. $\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+4x+4)} = \int \frac{x+1}{(x-1)(x+2)^2}\, dx$

$$= \int \frac{A}{x-1}\, dx + \int \frac{B}{x+2}\, dx + \int \frac{C}{(x+2)^2}\, dx$$

$A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1) = x+1$

$x = 1$; $9A = 2$; $A = \frac{2}{9}$

$x = -2$; $-3C = -1$; $C = \frac{1}{3}$

$x = 0$; $4A - 2B - C = 1$; $\frac{8}{9} - 2B - \frac{1}{3} = 1$; $B = \frac{\frac{8}{9} - \frac{1}{3} - 1}{2} = -\frac{2}{9}$

$$= \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{2}{9} \ln|x+2| + \frac{1}{3}\int (x+2)^{-2}\, dx$$

$$= \frac{2}{9} \ln|x-1| - \frac{2}{9} \ln|x+2| - \frac{1}{3}\frac{1}{x+2} + C$$

4. $$f(x)\begin{cases} \dfrac{x^3}{2x^2-y^2-xy} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Estudiar continuidad en $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{2x^2-y^2-xy} = \text{pasar a coordenadas polares} \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta}{2r^2\cos^2(\theta) - r^2\,\text{sen}^2(\theta) - r^2\,\text{sen}(\theta)\cos(\theta)}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r}{2\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta - \text{sen}\theta\cos\theta} = 0$$

Como $f(x)=0$ en todo $\mathbb{R}$ es continua

b) estudiar derivadas parciales en $(0,0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h+x_0, y_0) - f(x_0,y_0)}{h+x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h+0} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{2h^2}}{h}$$

$$= \frac{h^3}{2h^3} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0) - f(x_0, h+y_0)}{h+y_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0)-f(0,h)}{h+0} = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{0}{-h^2}}{h} = 0$$

Como las derivadas parciales son distintas no existen derivadas parciales por lo que no es derivable

5. Calcular los extremos posibles de $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 3$ para $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 1\}$

Aplicamos el multiplicador de Lagrange:

$$L(x,y,\lambda) = \nabla(x^4+y^4+2x^2y^2-3) - \lambda\nabla(x^2+y^2-1) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx}L = 4x^3 + 4xy^2 - 2x\lambda = 0 \ ; \ x(4x^2+4y^2-2\lambda) = 0 \ ; \ x = 0$$

$$\frac{d}{dy}L = 4y^3 + 4x^2y - 2y\lambda = 0 \ ; \ y(4y^2+4x^2-2\lambda) = 0 \ ; \ y = 0$$

$$\frac{d}{d\lambda}L = x^2+y^2-1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \ ; \ y^2 = 1 \ ; \ y = \pm 1 \\ y = 0 \ ; \ x^2 = 1 \ ; \ x = \pm 1 \end{array}\right\} (-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1)$$

$f(-1,0) = 1 - 3 = -2$

$f(1,0) = 1 - 3 = -2$

$f(0,-1) = 1 - 3 = -2$

$f(0,1) = 1 - 3 = -2$

Los 4 puntos son mínimos