Método de la bisección

$f\,[a,b] \to \mathbb{R}$ continua y $f(a)f(b)<0$ y sea c la raíz de f en $[a,b]$

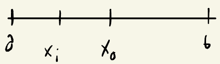
1) Se considera $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$ como primera aproximación de la raíz

Puede ocurrir

$f(x_0) = 0$

$f(a)\,f(x_0) < 0$

$f(x_0)\,f(b) < 0$



$\operatorname{dist}(x_0, c) < \dfrac{b-a}{2}$

$\operatorname{dist}(x_1, c) < \dfrac{b-a}{2^2}$

$\operatorname{dist}(x_i, c) < \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$

Método de Newton o de las tangentes

Se elige $x_0 \in (a,b)$

1) Se construye la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Se calcula el punto de corte de la recta con el eje X

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

2) Se construye la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto de corte de la recta con el eje de abscisas

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Siguiendo este proceso, se construye una sucesión de raíces aproximadas definida de manera recursiva por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \longrightarrow f(x_n) \neq 0$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

La derivación implícita nos permite calcular la derivada de funciones de las cuales no tenemos necesariamente una expresión explícita.

A la hora de ver cómo funciona la derivación implícita, lo mejor es verla con un ejemplo concreto. Para ello, consideremos la siguiente ecuación:

$$2x^2 + y^2 = 4 \tag{1}$$

Los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación anterior determinan en el plano una elipse.

La ecuación anterior nos permite obtener, de manera implícita, una función del parámetro y (que hace el papel de variable dependiente) respecto del parámetro x (la variable independiente). En este caso concreto, podemos ver que la parte superior de la elipse (correspondiente a $y \geq 0$) se corresponde con la gráfica de la función:

$$f(x) = \sqrt{4 - 2x^2}$$

Es decir, en este caso podemos obtener a partir de la expresión implícita una forma explícita de la función En particular, si queremos estudiar la pendiente de la recta tangente a dicha elipse en el punto $P = (1, \sqrt{2})$ (que satisface la ecuación de la elipse), sólo necesitamos calcular $f'(x)$ y evaluarlo en 1, lo cual nos da

$$f'(1) = -\frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Sin embargo, es posible obtener el mismo resultado a partir de la ecuación 1 mediante el proceso de derivación implícita. Este proceso lo hacemos en 4 pasos:

1. Sustituir $y = f(x)$: En este caso, nos daría la ecuación

$$2x^2 + f(x)^2 = 4.$$

2. Derivar ambos lados de la igualdad: Derivamos usando las reglas conocidas de derivación notando $f'(x)$ a la derivada de $f(x)$. En nuestro caso:

$$4x + 2f(x)f'(x) = 0.$$

3. Despejamos $f'(x)$: En nuestro caso concreto nos quedaría:

$$f'(x) = -\frac{2}{f(x)}.$$

explícito

$$2x^2+y^2=4 \rightarrow f(x)=\sqrt{4-2x^2}=(4-2x^2)^{1/2}$$

$$\rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(4-2x^2)^{-1/2}(-4x)=\frac{-2x}{\sqrt{4-2x^2}}$$

$$\rightarrow f'(1)=\frac{-2}{\sqrt{2}}$$

implícito

$$2x^2+(f(x))^2=4 \xrightarrow{\text{derivar}} 4x+2(f(x))f'(x)=0$$

despejar f'

$$\rightarrow f'(x)=\frac{-4x}{2f(x)}=\frac{-2x}{f(x)} \xrightarrow{f=y} y'=\frac{-2x}{y} \rightarrow y'=\frac{-2}{\sqrt{2}} \rightarrow P(1,\sqrt{2})$$

$$e^{xy} + \operatorname{sen} y = 0 \rightarrow e^{xy}(y + xy') + (\cos y)\cdot y' = 0$$

$$e^{xy}y + xe^{xy}y' + (\cos y)y' = 0 \rightarrow xe^{xy}y' + (\cos y)y' = -e^{xy}y$$

$$\rightarrow y'(xe^{xy} + \cos y) = -e^{xy}y \rightarrow \boxed{y' = -\frac{e^{x}+y}{xe^{xy} + \cos y}}$$

4. Deshacemos el cambio $y = f(x)$: Volvemos a la notación inicial con la variable y en vez de $f(x)$:
$$y' = \frac{2}{y}. \tag{2}$$

La ecuación anterior, siempre que esté definida, nos permite obtener nuevamente la pendiente de la recta tangente en un punto dado. Por ejemplo, si la evaluamos en el punto $P = (1, \sqrt{2})$, volcemos a obtener que $y' = -\frac{2}{\sqrt{2}}$, que es lo que obteníamos minicialmente.

Tenemos que hacer algunas observaciones al proceso anterior:

1. Lo primero a observar es que, a la hora de determinar una función de manera implícita, debemos marcar cláramente cual va a ser nuestra variable dependiente e independiente. En el ejemplo anterior hemos considerado y como dependiente, de ahí el cambio $y = f(x)$. Sin embargo, es totalmente posible hacer lo mismo considerando x como variable dependiente (luego el cambio debe ser $x = g(y)$).

2. Podemos observar que la expresión 2 sólo tiene sentido en el caso $y \neq 0$. De hecho, si dibujamos la recta tangente en el punto $P = (\sqrt{2}, 0)$ podemos observar que dicha recta tangente es vertical.

En este caso, lo que ocurre es que alrededor del punto P no es posible definir y en función de x ni siquiera localmente. De hecho, para cada valor de x podemos encontrar dos valores de y asociados.

Los pasos descritos anteriormente se incluyen para facilitar y entender mejor la derivación implícita, pero evidentemente pueden saltarse una vez se entienda bien la derivación implícita. Lo vemos mejor en el siguiente ejemplo:

<u>Ejemplo</u>: Se define la función de manera implícita a partir de la ecuación:
$$e^{xy} + \operatorname{sen}(y) = 0, \tag{3}$$
donde y es la variable dependiente y x es la variable independiente. Obtener donde sea posible una expresión para y'.

A diferencia del caso anterior de la elipse, en este caso no es posible obtener una expresión explícita de la función. Sin embargo, gracias al proceso de derivación implícita, aún seremos capaces de clacular la derivada de esta función. Observar que, a modo de ejemplo, no vamos a hacer uso de los pasos anteriores. En cualquier caso, siempre es recomendable hacer uso de ellos en las primeras derivadas implícitas.

Comenzamos derivando la expresión 3, recordando que y es nuestra variable dependiente:

$$e^{xy} + \operatorname{sen}(y) = 0 \Rightarrow e^{xy}(y + xy') + \cos(y)y' = 0$$

donde en la derivación anterior hemos usado dos veces la regla de la cadena y una vez la del producto.

Despejando de la ecuación anterior y',

$$(e^{xy} + \cos(y))y' = -ye^{xy} \Rightarrow y' = \frac{-ye^{xy}}{e^{xy} + \cos(y)}$$

Al igual que antes, la expresión anterior nos permite obtener la pendiente de la recta tangente a la curva determinada por 3 en cualquier punto, siempre y cuando el denominador no se anule.