Capítulo 2

Extremos de funciones de varias variables

2.1. Máximos y mínimos

Máximos y mínimos

2.1.1. Preliminares

Existe una gran variedad de problemas relacionados con el conocimiento de los valores máximo y mínimos (valores extremos) de funciones de varias variables. En el mundo real surgen muchísimos *problemas de optimización*, que son los que estudian estos valores extremos. Por ejemplo, si $T(x, y)$ representa la temperatura en cada punto (x, y) de una placa ¿cuáles son los puntos más calientes y los más fríos de la placa y cuáles son esas temperaturas extremas ?. Esto nos lleva a un problema de optimización relacionado con una función de dos variables.

El estudio de máximos y mínimos para funciones de una sola variable se vió en la primera parte de la asignatura. Aquí vamos a extender las técnicas vistas a funciones de dos variables y posteriormente daremos información sobre el caso de tres variables. Como es de esperar la teoría es aquí mucho más complicada que en el caso de una variable. Vamos a definir los conceptos en el caso de una función de dos variables; para funciones de tres o mas variables los conceptos son análogos.

[Extremos absolutos] Sea f una función de las variables x, y definida en una región D del plano y $(x0, y0)$ un punto de D. Se dice que:

I) f tiene (o alcanza) un máximo absoluto en el punto $(x0, y0)$ cuando verifica: f(x,y)≤ $f(x0, y0)$, para cada $(x, y) \in D$. En este caso el valor $f(x0, y0)$ sería el valor máximo absoluto de f.

II) f tiene (o alcanza) un mínimo absoluto en $(x0, y0)$ cuando verifica: f(x0, y0) $\leq f(x, y)$, para cada $(x, y) \in D$. En este caso el valor $f(x0, y0)$ sería el valor mínimo absoluto de f.

A los valores máximo y mínimo absolutos de f se les llaman extremos absolutos de f.

Al igual que sucede con el caso de funciones de una sola variable, pueden darse valores máximos y mínimos que no son absolutos pero que sí lo son de una forma local, es decir en las proximidades de un punto $(x0, y0)$ y, así, podría suceder que $f(x0, y0)$ que sea mayor que los valores $f(x, y)$ donde (x, y) son puntos próximos a $(x0, y0)$, pero puede que ésto no suceda en puntos alejados de ese punto.

En este caso esa proximidad, ese carácter local, viene dado en términos de discos.

[Extremos locales o relativos] Sea f una función de las variables x, y definida en una región D del plano y $(x0, y0)$ un punto de D. Se dice que:

I) f tiene (o alcanza) un máximo local o relativo en el punto $(x0, y0)$ cuando existe un disco abierto C que contiene a $(x0, y0)$ (o con centro en $(x0, y0)$) tal que se verifica: f(x,y)$\leq f(x0, y0)$, para cada $(x, y) \in D \cap C$.

II) f tiene (o alcanza) un mínimo local o relativo en $(x0, y0)$ cuando existe un disco abierto C que contiene a $(x0, y0)$ (o con centro en $(x0, y0)$) tal que se verifica: f(x0, y0) $\leq f(x, y)$, para cada $(x, y) \in D \cap C$.

A los valores máximo y mínimo relativos de f se les llaman extremos relativos de f.

La expresión "para cada $(x, y) \in D \cap C$"se lee diciendo "para cada (x, y) del dominio D que se encuentra en el disco C".

Afirmar que f tiene un máximo (mínimo) relativo en $(x0, y0)$ significa que ningún punto cercano de la gráfica $z = f(x, y)$ está más alto (bajo) que el punto $(x0, y0, f(x0, y0))$.

Un extremo absoluto es siempre un extremo relativo pero un extremo relativo puede que no sea absoluto.

A la hora de tratar un problema de optimización (problema de extremos) nos enfrentamos con dos cuestiones:

La existencia de los valores extremos (locales o absolutos).

En el caso de que existan, cómo determinar esos valores extremos, o mejor aún, cómo determinar los puntos del dominio donde se alcanzan los extremos (métodos a seguir). En general, la existencia de extremos locales y/o absolutos no está garantizada y es algo que hay que estudiar en cada caso concreto. No obstante, veremos al final de esta sección un importante resultado, muy útil en ciertos casos, que asegura la existencia de extremos absolutos. La determinación de los puntos donde se alcanzan los valores extremos es, en este caso, mucho más complicado que en el caso de funciones de una sola variable y conviene tener presente lo que sucede para este tipo de funciones como punto de referencia.

Recordemos que para una función de una sola variable, pongamos por caso el de una función definida sobre un intervalo cerrado y acotado $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, sucede que si f alcanza un extremo relativo en un punto $x0$, que es un *punto interior* del intervalo, es decir, $x0 \in (a,b)$, y f es derivable en ese punto, entonces debe suceder que la derivada $f'(x0) = 0$ (condición necesaria pero no suficiente para que $f(x0)$ sea un extremo). Pero a veces un valor extremo se alcanza en un punto interior donde f *no es derivable* o *en un punto de la frontera*, es decir, en $x0 = a$ o en $x0 = b$. En este último caso, la derivada por la derecha en a o la derivada por la izquierda en b suele ser no nula.

Es decir, en este caso, los puntos donde f alcanza un extremo, local o absoluto, hay que buscarlos entre:

- Puntos del interior del intervalo (es decir, los puntos de (a,b)) donde la derivada se anula.

- Puntos del interior del intervalo donde la función no es derivable.

- Los dos puntos de la frontera del intervalo; es decir, $x0 = a$ y $x0 = b$.

A veces sucede que el intervalo I donde está definida la función no tiene puntos que estén en la frontera, por ejemplo, $I = (a,b)$, $I = (a,\infty)$, $I = \mathbb{R}$ y, si además la función f es derivable en todos los puntos, entonces los puntos de extremos locales o absolutos sólo hay que buscarlos entre los puntos donde la derivada se anula.

La situación referida para funciones de una sola variable se generaliza a funciones de dos o mas variables, pero en este caso todo es más complicado. En nuestro estudio para funciones de dos variables, para determinar los puntos donde se pueden alcanzar los extremos vamos a tener que distinguir entre *puntos interiores* y *puntos de la frontera*. Precisamente, una de las cosas que más se complica en dos variables es el estudio de los puntos de la frontera (si existen) donde la función alcanza un extremo.

A continuación vamos a definir formalmente los conceptos de puntos interiores y puntos fronteras y, de paso, aprovecharemos para definir dos conceptos referentes a regiones del plano, que vienen a generalizar el caso de un intervalo en $\mathbb{R}$ de la forma $[a,b]$, y que se van a usar en el *teorema de optimización de Weierstrass.*

[Puntos interiores y puntos fronteras] Sea D una región del plano.

I) Un punto $(x0, y0)$ de D se dice que es un punto interior de D cuando existe algún disco centrado en $(x0, y0)$ contenido en D. Al conjunto de los puntos interiores de D se le suele representar por D.

II) Un punto $(x0, y0)$ del plano se dice que es un punto frontera de D cuando en cada disco centrado en $(x0, y0)$ hay puntos de D y también puntos que no pertenecen a D. Al conjunto de los puntos frontera de D se le llama frontera de D y se le suele notar por $\partial(D)$ o $\mathrm{Fr}\,(D)$.

El plano $\mathbb{R}2$ no posee frontera. Es obvio que para una región del plano su frontera no es tan extremedamente simple como la frontera del intervalo $I = [a, b]$, que solo consta de dos puntos o la de $I = [a, \infty)$ que sólo tiene un punto. La frontera de una región del plano puede estar formada por una curva, distintos trozos de curvas y rectas, etc.

[Conjuntos cerrados] Una región del plano se dice cerrada cuando contiene a todos los puntos que están en su frontera.

Poner ejemplos gráficos.

[Conjuntos acotados] Una región del plano se dice acotada cuando está contenida en un disco.

Así por ejemplo, un disco, una circunferencia, una elipse, una región triangular, una región rectangular, ... son ejemplos de regiones acotadas. Una parábola, el primer cuadrante del plano, todo el plano, sería conjuntos no acotados

Un resultado sobre extremos absolutos

Ya hemos advertido de que, en general, saber si una función alcanza un extremo absoluto (global) es complicado y en muchas situaciones hay que hacer un estudio particular del caso que se trata. No obstante, existe un resultado debido a Weierstrass, que nos permite de una forma simple poder asegurar en muchos casos la existencia de máximo y mínimo absolutos.

Para funciones de una sola variable sabemos que si tenemos un intervalo de longitud finita (acotado) de la forma $[a, b]$ (intervalo cerrado), entonces cualquier función *continua* $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ alcanza en puntos del intervalo valores extremos. Este resultado no es válido para otro tipo de intervalos, los que no son de longitud finita, como $\mathbb{R}$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b), \ldots$, o los que teniendo longitud finita no contienen a uno de sus puntos extremos (puntos frontera), como (a, b), $(a, b], \ldots$. El resultado anterior tiene una generalización a funciones de varias variables que vamos a exponer aquí en el caso de dos variables.

[Teorema de optimización de Weierstrass] Si f es una función de dos variables: x, y, definida y continua en una región D del plano que es cerrada y acotada, entonces existen puntos en D donde f alcanza extremos absolutos; es decir,

1. Existe al menos un punto $(x0, y0)$ tal que $f(x, y) \leq f(x0, y0)$ para cada $(x, y) \in D$, (máximo absoluto).

2. Existe al menos un punto $(x1, y1)$ en D tal que $f(x1, y1) \leq f(x, y)$ para cada $(x, y) \in D$, (mínimo absoluto).

El resultado anterior será aplicable a regiones del plano como son como una región circular, triangular o rectangular siempre que incluyamos en ellas los puntos de la frontera (trazo continuo) y a curvas como circunferencias o elipses, etc.

El estudio de los extremos que se alcanzan en puntos frontera vamos a dejarlo para la parte final de este tema y vamos a empezar por la parte más manejable y conocida, que es el estudio de extremos en puntos interiores donde la función es diferenciable o má s que diferenciable. Por otra parte, en principio sólo vamos a tratar extremos locales. Los extremos absolutos, de existir, se encontarían entre los extremos locales.

2.1.2. Método para la determinación de extremos locales en puntos interiores

Extremos locales en puntos interioresMáximos y mínimos

Decíamos anteriormente que para una función de una sola variable f sucede que si f alcanza un extremo relativo en un punto interior $x0$, donde f es derivable, entonces debe verificarse $f'(x0) = 0$. Geométricamente la condición $f'(x0) = 0$ significa que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x0, y0)$ es horizontal, es decir, paralela al eje de abcisas (hacer un dibujo).

De la misma forma, en el caso de una función de dos variables $f\colon D \to \mathbb{R}$, si $(x0, y0)$ es un punto interior del dominio D y f es diferenciable en ese punto, podemos considerar el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P = (x0, y0, f(x0, y0))$. Parece lógico que si f alcanza en el punto $(x0, y0)$ un extremos local (sea máximo o mínimo) tal plano tangente debe ser horizontal, es decir, paralelo al plano xy (plano $z = 0$), para lo cuál un vector normal $\vec{n}$ al plano debe tener la dirección del eje z, es decir la del vector $\vec{k} = (0, 0, 1)$, o dirección opuesta; o sea, debe ser de la forma $\vec{n} = (0, 0,)$.

Sabemos que un vector normal al plano tangente en el punto P viene dado por =(-(x0, y0), -(x0, y0), 1) $\equiv (-f_x(x0, y0), -f_y(x0, y0), 1)$. Necesitamos que $\vec{n}$ tenga la misma dirección o dirección opuesta al vector $\vec{k}$ pero ésto solo sucede si las dos primeras componentes del vector $\vec{n}$ se anulan. Por tanto, tenemos el siguiente resultado:

[Criterio de las primeras derivadas] Supongamos que una función $f\colon D \to \mathbb{R}$, en las variables x, y, alcanza un extremo local (máximo o mínimo) en un punto $(x0, y0)$ interior al dominio D donde f es diferenciable. Entonces debe suceder lo siguiente:

$$\boxed{(x0, y0) = 0, \quad (x0, y0) = 0.} \tag{2.1.1}$$

Observemos que la condición necesaria para los extremos (2.1.1) nos dice que *el vector gradiente* $\nabla f(x0, y0)$ es el vector nulo. Siendo f diferenciable esta condición nos dice también que *todas las derivadas direccionales en el punto* $(x0, y0)$ *son nulas.* Como se puede ver se trata de una natural generalización de la condición $f'(x0) = 0$ para funciones de una sola variable.

Se puede dar una simple prueba analítica del resultado anterior sin suponer que f sea diferenciable en el punto $(x0, y0)$ considerando las funciones de una sola variable $g(x) = f(x, y0)$ y $h(y) = f(x0, y)$. La condición de extremo local sobre f lleva a condiciones de extremos para las funciones anteriores en los punto $x0$ e $y0$ respectivamente, por lo que aplicando lo conocido para funciones de una sola variable se obtiene $(x0, y0) = g'(x0) = 0$ y $(x0, y0) = h'(y0) = 0$.

A los puntos $(x0, y0)$, interiores al dominio D, donde se verifica la condición (2.1.1) los llamaremos *puntos críticos* de la función f. En los textos dirigidos a físicos e ingenieros suelen incluir entre los puntos críticos aquellos $(x0, y0)$ donde no existe alguna de las derivadas parciales: $f_x(x0, y0)$, $f_y(x0, y0)$. Así pues, bajo las condiciones establecidas en el teorema anterior, los candidatos a puntos donde f alcanza un extremo (local o absoluto) son los puntos críticos. La determinación de los puntos críticos exige la resolución del sistema de ecuaciones en las incógnitas x e y dado por:

$$\boxed{f_x(x, y) = 0, \quad f_y(x, y) = 0.}$$

No siempre será fácil resolver este sistema de ecuaciones. Las soluciones del sistema, si existen, son los puntos críticos y entre ellos se encuentran, si existen, los puntos de extremo que sean interiores al dominio D.

Para una función de una sola variable f sucede que *la condición $f'(x0) = 0$ no garantiza que f alcance un extremo local en el punto* $x0$, se trata únicamente de una condición necesaria (un requisito) que a veces no es suficiente. Por ejemplo, la función definida por $f(x) = x^3$ verifica $f'(0) = 0$ pero f no alcanza un extremo local en ese punto como puede observarse con su gráfica.

Lo mismo puede suceder con funciones de dos variables, es decir, el que $(x0, y0)$ sea un punto crítico no garantiza que f alcance en tal punto un extremo local. Un sencillo ejemplo donde ésto sucede está dado por la función $\boxed{f(x, y) = y^2 - x^2}$. Se trata de una función definida en todo el plano que es diferenciable en todos los puntos (por ser polinómica) y aquí todos los puntos son interiores. Las dos derivadas parciales de f sólo se anulan en el punto $(0, 0)$. Luego el único punto crítico de f es el origen y, por tanto, $(0, 0)$ es el único candidato a punto de extremo. Sin embargo f no alcanza en ese punto un valor extremo (ni absoluto ni local). En efecto, observemos que para los puntos de los ejes de coordenadas se verifica:

$$f(x, 0) = -x^2 < 0 = f(0, 0), \quad f(0, y) = y^2 > 0 = f(0, 0).$$

En cualquier disco centrado en el origen hay puntos de los ejes. Por tanto, en cualquier disco centrado en el origen hay puntos (x, y) tales que $f(x, y) < f(0, 0)$ y puntos (x, y) tales que $f(x, y) > f(0, 0)$. En consecuencia, en el punto $(0, 0)$ no se puede alcanzar un máximo local ni un mínimo local (más adelante veremos que en $(0, 0)$ la función f tiene un punto de silla). La gráfica de f cerca del punto $(0, 0, 0)$ es como una silla de montar. Lo anterior nos dice que la función f no posee extremos locales.

Si bien para algunos objetivos es suficiente con el resultado del teorema 2.1.2, a la vista del ejemplo anterior se hace necesario tener una condición que nos garantice en determinados casos que una función alcanza en un punto crítico un extremo local. Para ver ésto, como siempre, es conveniente tener la referencia de lo que conocemos para funciones de una sola variable.

Para funciones f de una sola variable tenemos un criterio muy útil en el que se usa *la segunda derivada* f'' (es decir, se supone que f es dos veces derivable). Concretamente, suponiendo que $x0$ sea un punto crítico de f, se tiene:

- Si $f''(x0) > 0$ la función f alcanza en $x0$ un *mínimo local.*
- Si $f''(x0) < 0$ la función f alcanza en $x0$ un *máximo local.*
- Si $f''(x0) = 0$ no tenemos información (caso dudoso).

La tercera situación la tenemos en el caso de la función $f(x) = x^3$ y el punto $x0 = 0$.

Para funciones de dos variables existe un criterio análogo al anterior donde se trabaja con las derivadas parciales de segundo orden, pero la gran diferencia reside ahora en que tenemos cuatro derivadas de segundo orden en lugar de una, con lo que resulta más complicado.

Supongamos que existe un disco abierto centrado en el punto $(x0, y0)$ *donde las cuatro derivadas de segundo orden:* $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ *están definidas y son continuas.* El lugar de $f''(x0)$ lo va a ocupar aquí una matriz que se forma con estas cuatro derivadas de segundo orden evaluadas en el punto $(x0, y0)$. Esta matriz recibe el nombre de *matriz hessiana* de f en el punto $(x0, y0)$ y se define así:

$$\boxed{Hf(x0, y0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x0, y0) & f_{xy}(x0, y0) \\ f_{yx}(x0, y0) & f_{yx}(x0, y0) \end{pmatrix}.} \tag{2.1.2}$$

Obsérvese que estamos en condiciones de poder aplicar el *teorema de Schwartz* sobre derivadas cruzadas y así podemos asegurar que en nuestro caso se verifica: $f_{xy}(x0, y0) = f_{yx}(x0, y0)$, es decir, la matriz hessiana $Hf(x0, y0)$ es *simétrica* (coincide con su matriz traspuesta).

El determinante de esta matriz va ser esencial en nuestro criterio. Lo notaremos por d.

$$\boxed{d = \det Hf(x0, y0) = f_{xx}(x0, y0) f_{yy}(x0, y0) - (f_{xy}(x0, y0))^2.}$$

Tenemos entonces el siguiente resultado, de cuya prueba prescindimos por ser muy laboriosa y estar fuera del nivel de este curso.

[Criterio de las segundas derivadas] Supongamos que $(x0, y0)$ es un punto interior del dominio de la función f y es un punto crítico de f; es decir, $f_x(x0, y0) = f_x(x0, y0) = 0$. Supongamos además que f posee derivadas parciales segundas y son continuas en un disco centrado en el punto $(x0, y0)$ y sea d el determinante de la matriz hessiana $Hf(x0, y0)$. En tal situación se verifica:

Si $d > 0$ y $f_{xx}(x0, y0) > 0$, f alcanza en el punto $(x0, y0)$ un mínimo local.

Si $d > 0$ y $f_{xx}(x0, y0) < 0$, f alcanza en el punto $(x0, y0)$ un máximo local.

Si $d < 0$, f no alcanza en $(x0, y0)$ un extremo local (ni máximo ni mínimo) pero tiene en $(x0, y0)$ un punto de silla.

Si $d = 0$ el criterio no da información (caso dudoso).

El caso $d > 0$ y $f_{xx}(x0, y0) = 0$ no puede darse pues en tal situación tendríamos una contradicción ya que $d = f_{xx}(x0, y0)f_{yy}(x0, y0) - (f_{xy}(x0, y0))^2 = -(f_{xy}(x0, y0))^2 \leq 0$.

Cuando $d > 0$ (en cuyo caso tenemos un mínimo o un máximo local) sucede que f_{xx} y f_{yy} tienen el mismo signo pues $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$, dicho de otra forma, en la diagonal principal de la matriz hesssiana no hay cambio de signo, o los dos son positivos (caso de mínimo) o los dos son negativos (caso de máximo). Esto nos dice también que en el criterio, en los dos primeros puntos, se puede sustituir f_{xx} por f_{yy}.

El criterio sólo asegura en sus dos primeros puntos que los extremos son locales (relativos), pero no asegura que sean extremos absolutos.

Que $(x0, y0)$ sea *un punto de silla* o de ensilladura para la función f significa que hay dos direcciones tales que a través de una de ellas f alcanza un máximo en ese punto y a través de la otra f alcanza un mínimo. Se le llama así porque la gráfica de f cerca del punto se parece a una silla de montar.

A continuación exponemos algunos sencillos ejemplos donde aplicaremos los resultados de los teoremas 2.1.2 y 2.1.2. En cada uno de ellos se da la expresión de la función de dos variables y se trata de determinar los posibles puntos de su dominio donde la función alcanza un extremo local. Si es posible, trataremos después de ver si se trata de un extremo absoluto. En todos los casos van a aparecer *funciones polinómicas* y, por tanto, definidas en $D = \mathbb{R}2$. Todos los puntos del dominio son *puntos interiores*. Por otra parte, al ser polinómicas van a ser *diferenciables* en cada punto. Por tanto, los únicos puntos donde se pueden alcanzar extremos son los *puntos críticos*. Pero es más, las cuatro derivadas de segundo orden están definidas y son continuas en todo $\mathbb{R}2$, por lo que podemos aplicar el resultado del teorema 2.1.2.

En ningun caso podremos aplicar el teorema de optimización de Weierstrass 2.1.1, para asegurar la existencia de extremos absolutos, ya que el dominio $D = \mathbb{R}2$ no es acotado.

$\boxed{f(x, y) = 1 - x^2 - y^2}$.

Para determinar los posibles puntos críticos planteamos el sistema de ecuaciones $f_x(x, y) = 0$, $f_y(x, y) = 0$, que en nuestro caso es: $-2x = 0$, $-2y = 0$. La única solución de este sistema es $x = 0$, $y = 0$. Por tanto, el único punto crítico de la función f es el origen $(0, 0)$. Este es el único punto donde f puede alcanzar un extremo.

Consideramos la matriz hessiana de f en el punto $(0, 0)$. Como $f_{xx} = -2$, $f_{yy} = -2$ y $f_{xy} = f_{yx} = 0$, se tiene

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad d = 4 > 0, \quad f_{xx}(0,0) = -2 < 0.$$

Por tanto, haciendo uso del resultado del teorema 2.1.2, podemos afirmar que f alcanza en el punto $(0,0)$ un *máximo local*. En este caso es muy fácil ver (a ojo!) que este máximo es también un *máximo absoluto*, pues observemos que $f(x,y) = 1-(x^2+y^2) \leq 1 = f(0,0)$, cualquiera que sea $(x,y) \in \mathbb{R}2$. Esto se puede ver gráficamente dibujando la gráfica de f, que es un paraboloide con vértice el punto $(0,0,1)$ que va "hacia abajo". Así pues, el valor máximo absoluto de f es 1.

Los cálculos anteriores nos dicen que, aparte del punto $(0,0)$, en ningún otro punto alcanza f un extremo; es decir, f no tiene otros máximos locales, no tiene ningún mínimo local y, por tanto, no alcanza un mínimo absoluto. Todo ésto se puede confirmar con la visión de la gráfica.

$\boxed{f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20}$.

Razonando de la misma forma que en el ejemplo anterior planteamos el sistema de ecuaciones:

$$f_x(x,y) = 4x + 8 = 0, \quad f_y(x,y) = 2y - 6 = 0,$$

cuya única solución es $(x,y) = (-2,3)$. Igual que antes sólo obtenemos un punto crítico. Las derivadas de segundo orden son $f_{xx} = 4$, $f_{yy} = 2$ y $f_{xy} = f_{yx} = 0$, y, por tanto:

$$Hf(-2,3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad d = 8 > 0, \quad f_{xx}(-2,3) = 4 > 0.$$

Por tanto, podemos afirmar que f alcanza en el punto $(-2,3)$ un *mínimo local* de valor $f(-2,3) = 3$. En este caso no es trivial, como en el caso anterior, deducir si se trata de un mínimo absoluto o simplemente es un mínimo local. Ahora bien, manipulando la expresión de f conseguimos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (2x^2 + 8x) + (y^2 - 6y) + 20 = 2(x^2 + 4x) + (y^2 - 6y) + 20 \\ &= 2(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) + 20 - 8 - 9 \\ &= 2(x+2)^2 + (y-3)^2 + 3 \geq 3 = f(-2,3). \end{aligned}$$

Esto nos dice que f alcanza en el punto $(-2,3)$ un *mínimo absoluto* de valor 3. De hecho, la gráfica de f es otro paraboloide, esta vez con vértice en el punto $(-2,3,3)$, que "mira hacia arriba". Aparte del punto $(-2,3)$, en ningún otro punto alcanza f un extremo.

En general, el comprobar si un extremo local es o no es un extremo absoluto resulta muy complicado salvo en ciertos casos como los anteriores o en situaciones que aquí no podemos exponer. Observemos que en los dos casos anteriores sólo se ha obtenido un punto crítico, que finalmente es un extremo absoluto, y, además, la matriz hessiana no depende de (x,y). Todo ésto no es casualidad y tiene su justificación en la teoría de funciones *convexas* y *cóncavas*, que aquí no podemos exponer. Para este tipo de funciones un punto crítico es finalmente un punto de extremo absoluto. La función del primer ejemplo es cóncava y la del segundo ejemplo es convexa.

$\boxed{f(x,y) = y^2 - x^2}$.

Es evidente que el único punto crítico de f es el punto $(0,0)$. Este ejemplo lo vimos antes de dar el criterio de las segundas derivadas y comprobamos que en el punto $(0,0)$ la función no alcanza un extremo (ni máximo ni mínimo). Esto lo podemos confirmar con el resultado del teorema 2.1.2. En efecto, en este caso la matriz hessiana y su determinante son:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad d = -4 < 0.$$

Al ser el determinante negativo no tenemos en este punto un extremo sino *un punto de silla* (obsérvese el cambio de signo en la diagonal principal). Así pues, esta función no posee extremos locales y por, tanto, no posee extremos absolutos.

$\boxed{f(x,y) = x^2\, y^2}$.

En este caso el sistema de ecuaciones que satisfacen los puntos críticos es: $xy^2 = 0$, $x^2y = 0$, y ésto sólo lo verifican los puntos (x,y) del plano que verifican $x = 0$ o $y = 0$, es decir, todos los puntos del eje de ordenadas y todos los puntos del eje de abcisas. En este caso nos encontramos con *infinitos puntos críticos*. En este caso resulta conveniente determinar la matriz hessiana de f en cualquier punto (x,y) y resulta:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}, \qquad d = 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -12x^2y^2.$$

Observemos que en los puntos críticos el determinante es nulo ($d = 0$) y el criterio de las segundas derivadas no da información. Se trataría de casos dudosos, pues pueden ser puntos de extremo o no serlos. En este caso, dado que el ejemplo es muy simple, podemos deducir fácilmente(a ojo !) que en todos los puntos críticos f *alcanza un mínimo absoluto* de valor 0, ya que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}2$ se tiene $f(x,y) = x^2\, y^2 \geq 0 = f(x0, y0)$ si $(x0, y0)$ es crítico. Esta función posee una gráfica muy espectacular (véase Larson página 1182).

$\boxed{f(x,y) = 8\,x^3 - 24\,xy + y^3}$.

En este caso el sistema de ecuaciones que satisfacen los puntos críticos no es tan trivial.

$$f_x(x,y) = 24x^2 - 24y = 0, \quad f_y(x,y) = -24x + 3y^2 = 0.$$

La primera ecuación es $y = x^2$; sustituyendo en la segunda, se obtiene $-24x + 3x^4 = x(-24 + 3x^3) = 0 \iff x = 0$ o $x = 2$ y, por tanto, los únicos puntos críticos son $(0,0)$ y $(2,4)$.

$$\begin{aligned} Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 48x & -24 \\ -24 & 6y \end{pmatrix}; \quad Hf(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}, \quad d = -(-24)^2 < 0; \\ Hf(2,4) &= \begin{pmatrix} 96 & -24 \\ -24 & 24 \end{pmatrix}; \quad d = 1728 > 0, \end{aligned}$$

$$f_{xx}(2,4) = 96 > 0.$$

Por tanto, en el punto $(0,0)$ la función no alcanza un valor extremo; tiene un *punto de silla* y en el punto $(2,4)$ la función tiene un *mínimo local* de valor $f(2,4) = -64$. Se puede comprobar que *este mínimo local no es absoluto* sin mas que observar que $f(0,y) = y^3$ y así $f(0,-10) = -1000 < f(2,4)$. Todo lo anterior nos dice que esta función no posee ni mínimo absoluto ni máximo absoluto ni máximos locales.

Es necesario volver a resaltar que *el método usado en los ejemplos anteriores sólo es válido cuando el punto donde se alcanza el extremo es interior al dominio y cuando la función f es diferenciable en tal punto.* Sobre este segundo aspecto, podemos recordar lo que sucede con la función de una sola variable $f(x) = x$, que no posee puntos críticos y que sólo alcanza un extremo, concretamente un mínimo absoluto, en el único punto donde no es derivable, el punto $x0 = 0$. Una situación análoga para una función de dos variables la tenemos con la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. La gráfica de esta función es un cono con vértice en el origen (superficie de revolución obtenida al girar la gráfica de $g(x) = x$ alrededor del eje z). A la vista de la gráfica es evidente que f alcanza un mínimo absoluto de valor 0 en el punto $(0,0)$ y no alcanza otro extremo local en un punto distinto. Resulta que f no posee puntos críticos y el único punto del plano donde f no posee derivadas parciales es el punto $(0,0)$. Otro ejemplo análogo al anterior se tiene con la función $f(x,y) = 1-(x^2+y^2)^{1/3}$; en este caso, en el $(0,0)$ alcanza un máximo absoluto.

Extremos de funciones de tres variables

El estudio de extremos locales para funciones de tres variables en puntos interiores al dominio es análogo al visto para funciones de dos variables salvo en el criterio de las segundas derivadas, donde hay que precisar cuidadosamente el método. Supongamos $D \subset \mathbb{R}3$ y $f\colon D \to \mathbb{R}$ una función en las variables x, y, z y sea $(x0, y0, z0)$ un punto interior del dominio D donde f es diferenciable. Se tiene lo siguiente:

Condición necesaria: Si f alcanza un extremo local en $(x0, y0, z0)$ debe suceder lo siguiente:

$$\boxed{f_x(x0, y0, z0) = f_y(x0, y0, z0) = f_z(x0, y0, z0) = 0,}$$

es decir, el gradiente $\nabla f(x0, y0, z0)$ debe ser el vector nulo (*puntos críticos*).

Condición suficiente: Suponiendo que las derivadas de segundo orden de la función f existen y son continuas en una bola centrada en el punto $(x0, y0, z0)$, consideramos la *matriz hessiana*:

$$Hf(x0, y0, z0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

donde las derivadas de segundo orden se evaluan en el punto $(x0, y0, z0)$ y se calculan los determinantes de los tres menores principales de la matriz hessiana:

$$d1 = f_{xx}, \quad d2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}, \quad d3 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix}.$$

Entonces:

1. Si $\boxed{d1 > 0,\ d2 > 0 \text{ y } d3 > 0}$ la función f alcanza en el punto $(x0, y0, z0)$ un *mínimo local.*

2. Si $\boxed{d1 < 0,\ d2 > 0 \text{ y } d3 < 0}$ la función f alcanza en el punto $(x0, y0, z0)$ un *máximo local.*

Obsérvese que en el caso de dos variables los determinantes de los dos menores principales de la correspondiente matriz hessiana $Hf(x0, y0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ serían $d1$ y $d2$ y según el teorema 2.1.2 si $d1 > 0$ y $d2 > 0$ tenemos un mínimo local y si $d1 < 0$ y $d2 > 0$ tenemos una máximo local. De esta forma lo que hay de común en ambos casos es que para obtener mínimo local se necesita que todos los determinantes sean positivos, mientras que para obtener un máximo local se necesita que los signos de los determinantes se vayan alternando empezando por el signo $-$. En el caso de tres variables no mencionamos lo que puede darse en otras situaciones distintas a las reflejadas en los puntos (a) y (b).

$\boxed{f(x, y, z) = -2x^2 - y^2 - 3z^2 + 2xy + 2yz + 1}$.
La función f es polinómica y por consiguiente su dominio es todo el espacio $D = \mathbb{R}3$ y es diferenciable en cada punto del dominio. Aquí todos los puntos del dominio son interiores. Por tanto, los puntos donde f pudiera alcanzar un extremo local deben ser puntos críticos, es decir, puntos (x, y, z) para los que se verifica $\mathrm{f}_x(x, y, z) = 0, \quad f_y(x, y, z) = 0, \quad f_z(x, y, z) = 0$. En este caso tal sistema de ecuaciones (tres ecuaciones con tres incógnitas x, y, z) sería: -4x+2y=0, -2y+2x+2z=0, -6z+2y=0, o, equivalentemente, -2x+y=0, x-y+z=0, y-3z=0. Se trata de un sistema homogéneo. Puesto en forma matricial, la matriz asociada es $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es $-6 - (-3 - 2) = -1$. Al ser el determinante distinto de 0 el sistema anterior sólo posee la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Es decir, el único punto crítico, y por tanto el único punto donde f puede alcanzar un extremo, es el punto $(0, 0, 0)$.

Para determinar si en este punto se alcanza un extremo debemos recurrir a la matriz hessiana. Observemos que en este caso las nueve derivadas de segundo orden son constantes, y por tanto están definidas y son continuas en todo el espacio. Concretamente:

$$Hf(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Observemos que sale una matriz simétrica al igual que en el caso de dos variables (esto sucede en todos los casos considerados) y que en la diagonal principal son todos negativos (al igual que en el caso de dos variables no debe haber cambios de signos en esta diagonal si se alcanza un extremo y, en este caso, se tendría un máximo). Calculamos los determinantes de los menores principales

$$d1 = -4 < 0, \quad d2 = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0 \quad d3 = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

En consecuencia, estamos en la situación descrita en el punto (b) (alternancia de signos empezando por $-$) y concluimos que f alcanza en el punto $(0,0,0)$ un *máximo local* de valor 1 y no alcanza más maximos ni mínimos locales. (Se puede probar que f alcanza un máximo absoluto en el origen pues al no depender la matriz hessiana de x, y, z y dado que $d1 < 0$, $d2 > 0$, $d3 < 0$, la función resulta ser *cóncava* en $\mathbb{R}3$).

2.1.3. Métodos para la determinación de extremos locales en puntos de la frontera (Optimización restringida)

Optimización restringidaMáximos y mínimos

Son muchas las situaciones que dan lugar a un problema de optimización (cálculo de máximos o/y mínimos) de una función de dos variables sobre una curva del plano o de una función de tres variables sobre una superficie o curva en el espacio. Estos subconjuntos tienen la particularidad de que no poseen puntos interiores, es decir, todos son puntos de la frontera.

Por ejemplo, supongamos que $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ representa la temperatura en el punto (x, y) de una placa y estamos interesados en conocer las temperaturas extremas sobre la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$. La existencia de los puntos donde se alcanzan temperaturas extremas está asegurada por el teorema de optimización de Weierstrass, ya que la circunferencia es un región acotada y cerrada y la función es continua en los puntos de la circunferencia, por ser polinómica. Aunque la función f está definida en todo el plano sólo estamos interesados en los puntos de la circunferencia, es decir, en la región $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$. Podemos decir que tratamos de optimizar $f(x, y)$ sujeto a la restricción o ligadura $x^2 + y^2 = 1$.

El método visto en la sección anterior, según el cuál encontrábamos los candidatos entre los puntos críticos de f no sirve aquí. Observemos que el único punto del plano donde las dos derivadas parciales de f se anulan (punto crítico) es el $(0, 0)$ pero este punto no pertenece a la circunferencia. De considerar la función sobre todo el plano, éste sí podría ser un punto de extremo pero en nuestro caso obviamente no es así. El motivo de que el método no sirva aquí es que éste se usa para determinar puntos interiores al conjunto D donde f puede alcanzar un extremo, pero ningún punto de la circuferencia es interior a ella. Es el mismo problema que se tiene cuando una función de una sola variable $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ alcanza un extremo en un punto $x0$ de la frontera de $[a, b]$, es decir en $x0 = a$ o $x0 = b$; este punto no se obtendría entre los puntos donde la derivada se anula.

El mismo problema tendríamos si quisiéramos determinar las temperaturas extremas sobre el disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}2 \colon (x-2)2+y2 \leq 1\}$, que es un conjunto cerrado y acotado. En este caso D tiene puntos interiores y puntos fronteras, pero el único punto encontrado mediante el método visto en la sección anterior es el origen $(0, 0)$, el cuál no pertenece al disco D. De paso ésto nos confirma que los puntos del disco donde se alcanzan las temperaturas extremas deben estar en la frontera de D, pero está claro que estos puntos de la frontera no se pueden hallar entre los puntos críticos.

Siguiendo con la misma función temperatura, otra situación en la que detectamos un problema como los anteriores, es si tenemos una región cerrada y acotada con puntos interiores (un disco, una superficie rectangular, una superficie triangular, ...) que contenga al $(0, 0)$ como punto interior (hacer un dibujo). En este caso, en el $(0, 0)$ podría alcanzarse un mínimo o un máximo, de hecho se alcanza un mínimo absoluto; pero, ¿en que punto o puntos se alcancarían un máximo absoluto?. Está claro que en puntos de la frontera. En puntos del interior no puede ser pues éstos deberían ser puntos críticos y el único crítico es el origen.

Los ejemplos anteriores nos muestran claramente que, en ciertos casos, un extremo se puede alcanzar en un punto de la frontera donde las derivadas parciales no se anulan, por lo que necesitamos otros métodos distintos en estos casos.

Volvamos al problema planteado inicialmente sobre la circunferencia. La ecuación de la circunferencia se puede escribir como $g(x,y)=0$, donde $g(x,y)=x^2+y^2-1$. En general, $g(x,y)=0$ representa la ecuación de *una curva* en el plano (podría ser una recta) y las curvas del plano tienen la particularidad de que no poseen puntos interiores; todos sus puntos son de la frontera. Por tanto, el caso anterior es un caso particular del problema general de determinar los valores máximos y mínimos (si existen) de una función de dos variables $f(x,y)$ sobre el conjunto $\{(x,y)\in \mathbb{R}2\colon g(x,y)=0\}$. Esto se suele expresar así:

Optimizar la función de dos variables $f(x,y)$ sujeta a la restricción (o ligadura) $g(x,y)=0$

Para una función de tres variables se nos podrían plantear problemas análogos como

Optimizar $f(x,y,z)$ sujeta a la restricción $g(x,y,z)=0$ (ecuación de una superficie)

Optimizar $f(x,y,z)$ sujeta a las restricciones $\begin{cases} g(x,y,z)=0 \\ h(x,y,z)=0 \end{cases}$ (ecuación de una curva en $\mathbb{R}3$)

Es usual llamar *función objetivo* a la función f que se quiere optimizar.

A continuación vamos a ver cómo resolver este tipo de problemas de optimización, llamados *problemas de optimización restringida*, una vez que tenemos claro que no se pueden usar las técnicas vistas en la sección anterior.

Vamos a ver dos métodos para la resolución de estos problemas. El primero, que exponemos a continuación, es el más deseable, pero no siempre es posible llevarlo a cabo.

En muchos casos es posible "*despejar*" en la restricción (o restricciones) una de las variables (o bien una expresión) en función de la otra (otras), que sustituida en la función objetivo haga que ésta dependa de una variable menos y, en estos casos, el problema se reduce a uno de los problemas estudiados en la primera sección o simplemente a un problema de optimización de una función de una sola variable. Veamos dos ejemplos que responden a los dos primeros problemas planteados.

Nos planteamos el problema de *determinar los puntos de la parábola $y=x^2$ que están más próximos al punto* $(0,1)$.

Se puede demostrar que, en condiciones muy generales, siempre existe al menos un punto en una curva que es el más próximo a un punto dado.

En el problema propuesto se trata de determinar los puntos de la parábola donde la función $f(x,y)=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$ alcanza un valor mínimo absoluto (en este caso, la parábola no es una región acotada y no se puede hacer uso del teorema de Weiertrass para asegurar la existencia del mínimo absoluto). Para simplificar los cálculos conviene minimizar el cuadrado de la distancia (son problemas equivalentes). Por tanto se trata de:

$$\text{Minimizar } f(x,y) = x^2 + (y-1)^2\,, \quad \text{sujeto a la restricción} \quad y = x^2.$$

(Aquí también se puede comprobar que el método de igualar a cero las derivadas parciales de f no nos proporciona ningún punto en la parábola.)

En este caso $g(x,y) = y - x^2$. En nuestra restricción la variable y viene ya despejada en función de x por lo que susitituyendo en la expresión de $f(x,y)$ queda únicamente una expresión en la variable x que es

$$h(x) = x^2 + (x^2-1)^2 = x^4 - x^2 + 1.$$

En los puntos (x,y) de la parábola la variable x no tiene restricción pues puede tomar cualquier valor real. Por tanto, el problema planteado se reduce a determinar los puntos $x \in \mathbb{R}$ donde la función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alcanza un mínimo absoluto. Estos deben encontrarse entre los puntos críticos de h.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 4x^3 - 2x = 0 \iff 2x(2x^2-1) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}. \\ h''(x) &= 12x^2 - 2; \quad h''(0) = -2 < 0; \quad h''(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}) = 4 > 0. \end{aligned}$$

En el punto $x = 0$ no puede alcanzar un mínimo absoluto pues alcanza un máximo local, mientras que en los puntos $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ y $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ alcanza mínimos locales y éstos serían los puntos donde h alcanza el mínimo absoluto pues en ambos toma el mismo valor $\frac{3}{4}$. Por tanto, hay dos puntos en la parábola que son los más próximos al punto $(0,1)$, que son $(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2})$ y $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2})$.

Planteamos a coninuación un problema análogo al anterior pero con tres variables.

Hallar tres números reales positivos cuya suma sea 30 *y su producto sea máximo.*
Se trata pues de

$$\text{Maximizar } F(x,y,z) = xyz \quad \text{sujeto a la restricción} \quad x + y + z = 30.$$

Aquí $g(x,y,z) = x+y+z-30$ y $g(x,y,z) = 0$ es en este caso la ecuación de un plano en el espacio. Sólo estamos interesados en los puntos del plano donde las tres coordenadas son positivas y el problema planteado es deteminar en que puntos de esta porción del plano la función F alcanza un máximo absoluto (Obsérvese que aquí los puntos críticos de F en $\mathbb{R}3$ son los que tienen dos coordenadas nulas; es decir los puntos de los ejes de coordenadas, pero ninguno de éstos se encuentran en la porción de plano referida. Una vez más, ésto nos indica que el método de de los puntos críticos no funciona en este caso).

De la misma forma que en el caso anterior, en la ecuación del plano se puede despejar cualquiera de las variables en función de las otras dos; por ejemplo, $z = 30 - x - y$. Sustituyendo en la expresión $F(x,y,z)$ queda una expresión que sólo depende de las variables x e y, que sería:

$$f(x,y) = xy\,(30 - x - y) = 30\,xy - x^2y - xy^2.$$

Ahora las restricciones para las variables x e y son $0 < x < 30$ y $0 < y < 30$. De esta forma el problema se reduce a estudiar los puntos del dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}2\colon 0 < x < 30,\ 0 < y < 30\}$$

donde f alcanza un máximo absoluto. (El teorema de Weiertrass no es aplicable a D, pues no es una región cerrada, pero sí sería aplicable a la región $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}2\colon 0 \leq x \leq 30,\ 0 \leq y \leq 30\}$ y con ésto podríamos asegurar la existencia de tal máximo absoluto ya que es obvio que no se puede alcanzar en un punto de la frontera).

Observemos que todos los puntos del dominio D son puntos interiores y f es diferenciable en cada uno de esos puntos por ser polinómica. Por tanto, para resolver este problema podemos utilizar las técnicas vistas en la primera sección; es decir, los puntos buscados deben estar entre los puntos críticos de f. La determinación de estos puntos críticos nos lleva al sistema de ecuaciones:

$$f_x(x, y) = y\,(30 - 2x - y) = 0, \quad f_y(x, y) = x\,(30 - x - 2y) = 0.$$

Dado que x e y no pueden anularse el sistema anterior es equivalente al siguiente:

$$30 - 2x - y = 0, \quad 30 - x - 2y = 0$$

el cuál tiene como solución única $x = 10$ e $y = 10$. Luego este es el único punto donde f puede alcanzar un máximo absoluto. Obsérvese que el punto obtenido está en el dominio D. Comprobemos mediante la matriz hessiana que se trata con seguridad de un máximo local.

$$\begin{aligned} Hf(x, y) &= \begin{pmatrix} -2y & 30 - 2x - 2y \\ 30 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}; \\ Hf(10, 10) &= \begin{pmatrix} -20 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}, \quad d = 300 > 0,\ f_{xx}(10, 10) = -20 < 0. \end{aligned}$$

Así pues la única solución al problema propuesto sería $x = y = z = 10$. El producto máximo sería 1000. (Compruébese con algunos ejemplos que el producto sale inferior a 1000).

Por desgracia, no siempre se puede despejar adecuadamente en la expresión de la restricción para conseguir reducir el problema a otro equivalente con menos variables. Por ejemplo, no habría forma de llevar a cabo el método usado en el primer ejemplo si lo que nos piden ahora es determinar los puntos de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 80$ más próximos y más lejanos al punto $(1, 2)$ (hacer un dibujo) o, peor aún, si nos piden los puntos de la curva $4x^2 + 9y^2 - 8x - 18y - 11 = 0$ que están más próximos al origen, ya que en esta última el problema de despejar una variable en función de la otra es mucho más complicado que en el caso de la circunferencia. En estos casos es necesario o mejor recurrir a un segundo método, conocido como método de los multiplicadores de Lagrange.

Método de los multiplicadores de Lagrange

El matemático Joseph Luis Lagrange (1736-1813) ideó un ingenioso método, a la edad de 19 años, sobre la forma de resolver los problemas de optimización restringida que dió a conocer en un famoso trabajo sobre Mecánica. Exponemos únicamente su resultado en el caso más simple donde se necesita optimizar una función de dos variables $f(x, y)$ sujeta a una restricción del tipo $g(x, y) = 0$.

Existe una muy interesante e ilustrativa interpretación geométrica del método de Lagrange que se podría exponer con un simple ejemplo, donde se hace uso de las curvas de nivel de la función objetivo f y de la famosa propiedad de ortogonalidad del vector gradiente, que nos llevaría de una manera natural al resultado de Lagrange. No obstante, por problemas de tiempo pasamos directamente a exponer el resultado.

[Lagrange] Sean f y g dos funciones de dos variables que poseen derivadas parciales de primer orden continuas. Sea $(x0, y0)$ un punto de la curva de ecuación $g(x, y) = 0$ donde el vector gradiente $\nabla g(x0, y0)$ no es nulo y donde la función f (restringida a la curva) alcanza un extremo local (máximo o mínimo). Entonces existe un número real λ (llamado multiplicador de Lagrange) tal que

$$\nabla f(x0, y0) \;=\; \lambda \, \nabla g(x0, y0).$$

Asi pues, los que nos dice el resultado anterior es que en un punto de extremo $(x0, y0)$ debe suceder que los vectores gradientes $\nabla f(x0, y0)$ y $\nabla g(x0, y0)$ tengan la misma dirección (caso $\lambda > 0$) o direcciones opuestas (caso $\lambda < 0$).

Veamos la forma de llevar a la práctica el resultado de Lagrange. Observemos que la condición $\nabla f(x0, y0) \;=\; \lambda \, \nabla g(x0, y0)$ es equivalente a las condiciones

$$f_x(x0, y0) = \lambda \, g_x(x0, y0), \quad f_y(x0, y0) = \lambda \, g_y(x0, y0).$$

Por tanto, según el teorema, los puntos de la curva $g(x, y) = 0$ donde la función f puede alcanzar un extremo local son aquellos puntos (x, y) para los que existe un número λ tal que x, y, λ son soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_x(x, y) &= \lambda \, g_x(x, y) \\ f_y(x, y) &= \lambda \, g_y(x, y) \\ g(x, y) &= 0. \end{cases}$$

Un sistema de ecuaciones como el anterior puede ser complicado en ciertos casos. De hecho, no necesitamos conocer el valor del multiplicador λ (salvo en ciertas problemas en que el multiplicador tiene una interpretación especial); solo nos interesan los valores de x e y. Por suerte,en este caso, hay una forma rápida de eliminar el parámetro entre las dos primeras ecuaciones. Concretamente, si un punto (x, y) verifica las dos primeras ecuaciones para un cierto valor de λ entonces debe suceder que el determinante de la matriz $\left(\begin{smallmatrix} f_x(x,y) & g_x(x,y) \\ f_y(x,y) & g_y(x,y) \end{smallmatrix}\right)$ sea igual a 0 o, lo que es lo mismo, el determinante de la matriz traspuesta $\left(\begin{smallmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{smallmatrix}\right)$ sea 0. El motivo de ésto es que, en tal situación, el par $(1, -\lambda)$ sería una solución no trivial de un sistema homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas y, ésto sólo puede suceder si el determinante de la matriz asociada al sistema es nulo.

Pienso que otra forma más directa y simple de explicar ésto a los alumnos (sobre todo si no se van a ver casos de optimización de funciones de tres o mas variables) es observando que la condición que da Lagrange nos dice que el vector gradiente $\nabla f(x0, y0)$ depende linealmente del vector $\nabla g(x0, y0)$; lo que equivale, en este caso, a que el determinante formado por las componentes de estos vectores sea nulo; es decir,

$$\begin{vmatrix} f_x(x0, y0) & f_y(x0, y0) \\ g_x(x0, y0) & g_y(x0, y0) \end{vmatrix} = 0.$$

En consecuencia, para encontrar los puntos de la curva $g(x, y) = 0$ donde la función f puede alcanzar un extremo local lo que hay que hacer es resolver el sistema de dos ecuaciones en las incógnitas: x, y dado por

0,3

$$\begin{vmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{vmatrix} = 0$$
$$g(x, y) = 0$$

y entre los puntos (x, y) obtenidos al resolver el sistema se tienen los posibles puntos de extremo. Hay que advertir que *el método no asegura que todos vayan a ser puntos de extremo.* El teorema de Lagrange sólo da una condición necesaria pero no suficiente. A veces se tiene la certeza de que existen puntos de extremos absolutos (por ejemplo, si estamos en condiciones de aplicar el teorema de Weierstrass) y en estos casos basta con evaluar la función f en los puntos obtenidos y comparar los valores.

Exponemos acontinuación dos ejemplos de aplicación del método anterior. En función del tiempo disponible se pueden ver los dos o únicamente el primero de ellos, que ya fué propuesto antes de explicar el método de Lagrange.

Ejemplo 1: Nos planteamos el problema de determinar los puntos de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 80$ más próximos y más lejanos al punto $(1, 2)$.

Hágase en primer un dibujo que refleje lo que se pide. En este caso se trata de

$$\text{Optimizar } f(x, y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 \quad \text{sujeto a la restricción} \quad x^2 + y^2 = 80.$$

Al ser la circunferencia un conjunto cerrado y acotado, el teorema de Weiertrass nos asegura que los problemas planteados tienen soluciones. Al menos habrá un punto en la circunferencia de distancia máxima a $(1, 2)$ y al menos habrá un punto de distancia mínima.

Aquí $g(x,y) = x^2 + y^2 - 80$. Tenemos $f_x = 2(x-1)$, $\quad f_y = 2(y-2)$, $\quad g_x = 2x$, $\quad g_y = 2y$. Observemos que el gradiente $\nabla g(x,y)$ no es el vector nulo en ningún punto (x,y) de la circunferncia. Tenemos:

$$\begin{vmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x-1) & 2(y-2) \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 8x - 4y.$$

Por tanto, los puntos de extremo se obtienen de las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 80, \quad y = 2x.$$

Obsérvese la interpretación geométrica de ésto. Los puntos candidatos son los puntos de la circunferencia que están en la la recta $y = 2x$ y ésta recta es la que pasa por los puntos $(0,0)$ y $(1,2)$ (hacer un dibujo), lo cuál da una idea geométrica muy interesante de cómo encontrar los puntos más alejados y más cercanos. Las soluciones de éste sistema son los puntos $(4,8)$ y $(-4,-8)$.

Al salir únicamente dos puntos está claro que en uno de ellos se alcanza el máximo absoluto y en el otro el mínimo absoluto. Basta ahora con evaluar la función en etos puntos y comparar. Resulta que $f(4,8) = 45$ y $f(-4,-8) = 125$, por loq ue el punto más próximo es $(4,8)$ y el más alejado es $(-4,-8)$; la distancia mínima del punto dado a la circunferencia es $\sqrt{45}$ y la distancia máxima es $\sqrt{125}$.

De haber salido tres o más puntos de la resolución del sistema hubiéramos operado de la misma forma; es decir, habríamos evaluado la función en cada uno de los puntos y después compararíamos esos valores para decidir en que puntos se alcanzan el máximo absoluto y el mínimo absoluto.

Ejemplo 2: Nos planteamos el problema de *hallar el rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la elipse de ecuación* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

La elipse está centrada en el origen y tiene semiejes de longitudes 3 y 4. Cada rectángulo inscrito en la elipse vendría dado por un punto (x,y) de la elipse en el primer cuadrante, de manera que este rectángulo tendría un lado de longitud $2x$ y otro de longitud $2y$, resultando ser su área igual a $4xy$. Por tanto el problema queda planteado como el de determinar en que puntos de la elipse la función $f(x,y) = 4xy$ alcanza un máximo absoluto; es decir:

$$\text{Maximizar } f(x,y) = 4xy \quad \text{sujeto a la restricción} \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

El teorema de Weiertrass nos asegura que este problema tiene solución pues la elipse es cerrada y acotada y la función f es continua sobre los puntos de la elipse.

Ciertamente, en este caso se podría aplicar con un poco de cuidado el método de despejar una de las variables, por ejemplo despejando en la ecuación de la elipse la variable y tomando el signo positivo en la raíz cuadrada, y sustituir en la expresión de f, pero vamos a resolver el problema usando el método de Lagrange.

Aquí $g(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1$. Tenemos $f_x = 4y$, $f_y = 4x$, $g_x = \frac{2x}{9}$, $g_y = \frac{y}{8}$. Observemos que el gradiente $\nabla g(x,y)$ no es nulo en ningún punto (x,y) de la elipse. Por otra parte,

$$\begin{vmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4y & 4x \\ \frac{2x}{9} & \frac{y}{8} \end{vmatrix} = \frac{y^2}{2} - \frac{8x^2}{9}.$$

Por tanto, los puntos de extremo se obtienen de las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\frac{y^2}{2} - \frac{8x^2}{9} = 0, \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Despejando x^2 de la primera ecuación y sustituyendo en la segunda se obtiene $y^2 = 8$, es decir $y = \pm 2\sqrt{2}$, y así $x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$. De esta forma obtendríamos cuatro puntos en la elipse, pero el único que tiene las dos coordenadas positivas es $(x,y) = (\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2})$ y por la naturaleza del problema éste debe ser el punto donde f alcanza el máximo absoluto. Así pues el rectángulo de área máxima inscrito en la elipse sería aquel que tiene de base $2x = \frac{6}{\sqrt{2}}$ y de altura $2y = 4\sqrt{2}$. El área máxima sería $4xy = f(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}) = 4 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 2\sqrt{2} = \boxed{24}$.

Observación: Si el problema plantedo hubiera sido determinar los puntos de extremo de la función $f(x,y) = 4xy$ sobre la elipse dada, el método nos hubiera proporcionado los siguientes cuatro puntos de la elipse:

$$(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}), \quad (-\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}), \quad (\frac{3}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2}), \quad (-\frac{3}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2})$$

y tendríamos ahora que evaluar la función en cada uno de estos cuatro puntos para poder discernir en que puntos se puede alcanzar un máximo y en cuáles un mínimo. Obsérvese que en el primero y cuarto la función toma el valor 24 y en los otros dos el valor -24. Esto nos diría que en el primero y cuarto alcanzaría un máximo de valor 24 y en los otros dos un mínimo de valor -24.

2.1.4. Extremos sobre regiones cerradas y acotadas con puntos interiores

Extremos sobre regiones cerradas y acotadas con puntos interioresMáximos y mínimos

Para acabar con el tema de los máximos y mínimos, habría que explicar cómo abordar un problema de extremos cuando la región sobre la que se quiere optimizar posee puntos interiores y también puntos de la frontera, como es el caso de una región cerrada circular, semicircular, rectangular o triangular (hacer varios dibujos). Esta situación es análoga a la que se tiene con la optimización de funciones de una sola variable sobre un intervalo del tipo $[a,b]$. Recordemos que en este caso, suponiendo que la función sea derivable en todo el intervalo, para determinar los puntos de extremo (locales o absolutos) había que distinguir el interior del intervalo: (a, b) de los puntos frontera, que en este caso son dos: $x = a$, $x = b$. De alcanzarse un extremo en un punto $x \in (a, b)$ debe suceder que $f'(x) = 0$.

En el caso de una función de dos variables la idea es la misma pero los cálculos son, generalmente, más complicados. Supongamos que estamos en una región cerrada y acotada con puntos interiores y frontera como en los ejemplos citados y nuestra función f es continua sobre esa región. El teorema de Weiertrass nos asegura que hay puntos de la región donde se alcanzan valores extremos absolutos. ¿Cómo determinar esos puntos?. El procedimiento a seguir sería:

Estudiar los posibles *puntos interiores* donde se puede alcanzar un extremo local usando las técnicas vistas en la primera sección. De hecho, en este caso, basta con determinar los *puntos críticos* y no es necesario usar las matrices hessianas (aunque éstas darían mayor información sobre extremos locales que no son absolutos)

Estudiar los posibles *puntos de la frontera* donde se puede alcanzar un extremo local usando el *método de Lagrange* o preferiblemente, si es posible, el *método de despejar* una variable o una expresión en la restricción. A veces hay que considerar en la frontera más de un "trozo*Τ* es necesario hacer el estudio en cada trozo; por ejemplo, esto sucede con un triángulo o rectángulo donde habría que estudiar por separado cada lado.

Una vez recopilados los *puntos candidatos a extremos absolutos* entre los puntos obtenidos en los dos pasos anteriores, se *evalúa* la función en cada uno de ellos y se *comparan esos valores*. A la vista de los resultados anteriores decidimos en que puntos se alcanza el máximo absoluto o el mínimo absoluto.

Empezamos ilustrando el método anterior con un ejemplo donde la frontera solo tiene un "trozo".

Ejemplo 1: Supongamos que la distribución de la temperatura sobre la placa circular D={ (x,y)∈ ℝ2: $x^2+y^2 \leq 1\}$viene dada por la función $f(x, y) = \exp(x^2-y^2)$ y queremos determinar las temperaturas extremas sobre la placa y, más concretamente, los puntos de la placa donde se alcanzan esas temperaturas extremas.

El teorema de Weiertrass nos asegura que existen estos puntos de temperatura extrema ya que nuestra región, que es un disco cerrado, es cerrada y acotada y la función f es continua sobre D.

Los puntos del interior son aquellos puntos que están en el disco abierto D={ (x,y)∈ ℝ2: $x^2 + y^2 < 1\}$.Se dice que D es el interior de D. La frontera de D es la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Como la función f es diferenciable en todo punto, si un punto del interior es un punto de extremo éste ha de ser un punto crítico y es obvio que el único punto crítico es el origen $(0, 0)$. Al salir un único punto ésto nos adelante que al menos uno de los extremos absolutos se va a alcanzar en puntos de la frontera.

Si usamos el método de Lagrange, podemos decir que si en un punto (x, y) de la frontera se alcanza un extremo entonces tal punto verifica las ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{vmatrix} = 0; \quad g(x,y) = 0,$$

donde $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$; es decir,

$$\begin{vmatrix} 2x^{x^2-y^2} & -2y^{x^2-y^2} \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 0; \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Por tanto, (x,y) debe verificar las ecuaciones: $xy = 0$; $x^2 + y^2 = 1$, y sólo hay cuatro puntos que verifiquen ésto que son $(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$.

Evaluamos la función f en los cinco puntos obtenidos (uno en el interior y cuatro en la frontera) y comparamos los valores obtenidos para así poder decidir en que puntos se alcanza el mínimo absoluto y en cuáles el máximo absoluto.

$$f(0,0) = 1, \quad f(0,1) =^{-1}= 1/, \quad f(0,-1) =^{-1}, \quad f(1,0) =, \quad f(-1,0) = .$$

El máximo valor obtenido es y se alcanza en los puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$. El mínimo valor obtenido es $^{-1}$ y se alcanza en los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$. Así pues la máxima temperatura en el disco es y la mínima temperatura es $^{-1}$. Obsérvese que ambas temperaturas extremas se han alcanzado en puntos de la frontera.

En el único punto del interior candidato a punto de extremo, el $(0,0)$, no se ha alcanzado ninguno de los extremos absolutos. En principio, este punto podría ser un punto de extremo local. Para salir de dudas determinaríamos la correspondiente matriz hesssiana.

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad d = -4 < 0.$$

Al ser el determinante negativo podemos asegurar que en $(0,0)$ no se alcanza un extremo local; se trata de un punto de silla.

Aunque hemos usado el método de Lagrange para la determinación de los puntos de la frontera, se podría haber prescindido de este método si nos damos cuenta de que en la restricción $x^2 + y^2 = 1$, al despejar $y^2 = 1 - x^2$ y sustituir en la expresión $f(x,y)$ de la función objetivo se obtiene una expresión que sólo depende de la variable x, concretamente: $^{x^2-(1-x^2)} =^{2x^2-1}$. Por tanto, hubiera bastado con determinar los extremos de la función de una sola variable $h(x) =^{2x^2-1}$ en el intervalo $[-1,1]$, que es el intervalo donde varía la x cuando el punto (x,y) está en la circunferencia. Utilícese este método para confirmar los resultados obtenidos por el método de Lagrange. En este caso los posibles puntos de extremo de h son: el punto del interior $x = 0$ y los puntos de la frontera $x = -1$, $x = 1$. Para finalizar advertimos que en ciertos casos hay que distinguir mas de un trozo en la

frontera, lo cuál complica los cálculos. Por ejemplo, si la región sobre la que hay que optimizar es un región rectangular como

$$D = \{(x,y) \in R^2 \colon 0 \le x \le 5, \; -3 \le y \le 3\},$$

en la frontera habría que distinguir cuatro trozos, cada uno de los lados del rectángulo, que son segmentos de las rectas de ecuaciones $x = 0, x = 5, y = -3, y = 3$. En estos lo mejor es usar el método de reducir a un problema de una sola variable. Si la región es triangular como sucede con

$$D = \{(x, y) \in R^2 \colon x \leq 0,\ y \leq 0,\ x + y \geq -3\},$$

habría que distinguir tres trozos, los tres lados del triángulo. Aquí tampoco es necesario el método de Lagrange y es más aconsejable el método de despejar para reducir a una sola variable.

Otros ejemplos como los anteriores son las dos regiones siguientes, que son trozos de discos,

$$D = \{(x, y) \in R^2 \colon x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad D = \{(x, y) \in R^2 \colon x^2 + y^2 \leq 2;\ y \leq x\}.$$

Desarrollamos a continuación un ejemplo donde aparece una de las regiones citadas. En este ejemplo hay que distinguir en la frontera dos trozos. En uno aplicaremos el método de Lagrange y, en el otro, el método de despejar una variable.

Ejemplo 2: Calculemos los valores máximo y mínimo absolutos de la función polinómica $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2x + 1$ sobre la región circular $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}2 \colon x^2 + y^2 \leq 2,\ y \leq x\}$, obteniendo los puntos donde se alcanzan estos extremos absolutos.

La región D es la parte del disco de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{2}$ que queda por debajo de la recta de ecuación $y = x$. Es un conjunto que posee puntos interiores y puntos de la frontera.

Se trata de una región *cerrada* y *acotada*, donde f es *continua*. Por tanto, *el teorema de optimización de Weierstrass* asegura la existencia de puntos en D donde f alcanza *extremos absolutos*. Puesto que un extremo absoluto es un extremo local, vamos a determinar los puntos de D donde f alcanza *extremos locales* y entre ellos se encontrarán los puntos donde alcanza los extremos absolutos. Para ésto tenemos que distinguir entre *el interior* de D y *la frontera* de D.

1.- Determinación de puntos interiores donde f alcanza extremos locales

Como la función es diferenciable en todo punto (al ser polinómica), si alcanza un extremo local en un punto interior de D, éste debe ser un *punto crítico*, es decir, un punto donde se anulan las dos derivadas parciales de primer orden.

Como $f_x(x,y) = 4x - 2$ y $f_y(x,y) = 2y$, está claro que el único punto crítico es $\boxed{(\frac{1}{2}, 0)}$ y, por tanto éste es el único punto interior donde f puede tener un extremo. Aunque para la resolución de este problema no es estrictamente necesaria la determinación de la matriz hessiana, no obstante, podemos adelantar cierta información con ella. En este caso los cálculos son inmediatos y se obtiene:

$$Hf(\tfrac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\frac{1}{2},0) & f_{xy}(\frac{1}{2},0) \\ f_{yx}(\frac{1}{2},0) & f_{yy}(\frac{1}{2},0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante es positivo y $f_{xx}(\frac{1}{2}, 0)$ es positivo, podemos asegurar que f alcanza en $(\frac{1}{2}, 0)$ *un mínimo local*. En principio, no podemos asegurar que este mínimo local sea absoluto; ésto sólo se podrá confirmar en la fase final. Lo que sí podemos asegurar ya es que el máximo absoluto de f se alcanza en al menos un punto de la frontera de D.

2.- Determinación de los puntos de la frontera donde f alcanza extremos locales

En este caso es necesario distinguir dos trozos en la frontera. Uno, el segmento correspondiente a la recta de ecuación $y = x$, y el otro, el trozo de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 2$. La descripción rigurosa de estos conjuntos es la siguiente:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}2 \colon y = x,\ -1 \leq x \leq 1\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}2 \colon x^2 + y^2 - 2 = 0,\ y < x\}.$$

Para el primer trozo vamos a usar el *método de despejar* una de las variables y para el otro el *método de Lagrange*.

I) Para la determinación de los posibles puntos de A donde f puede alcanzar un extremo local, es suficiente con sustituir $y = x$ (la variable y ya viene despejada) en la expresión $f(x,y)$ de la función objetivo, con lo cuál se obtiene una expresión que sólo depende de la variable x, dando lugar así a una función de una sola variable. De esta forma, el problema se reduce a determinar los puntos de extremo de la función:

$$h\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto h(x) = 3x^2 - 2x + 1.$$

Obsérvese que consideramos la función h definida sobre el intervalo cerrado $[-1,1]$ ya que es ahí donde toma valores la variable x cuando el punto (x,y) se encuentra en el trozo de frontera A.

Si $x \in (-1,1)$ y h alcanza en x un extremo local, debe suceder que $h'(x) = 0$. El único punto que verifica ésto es obviamente $x = \frac{1}{3}$. Por tanto, los únicos puntos donde la función h puede tener un extremo son $x = -1$, $x = \frac{1}{3}$ y $x = 1$. No es necesario determinar si efectivamente son puntos de extremos de h. Es suficiente con tener en cuenta que con ellos obtenemos 3 candidatos a extremos de f, que se encuentran en la región A, que son:

$$\boxed{(-1,-1), \quad (\frac{1}{3},\frac{1}{3}), \quad \text{y} \quad (1,1).}$$

II) Para la determinación de los posibles puntos de B donde f puede alcanzar un extremo local, usamos *el método de Lagrange*, considerando la función $g(x,y) = x^2+y^2-2$, ya que en la ecuación $x^2+y^2 = 2$ no se puede despejar una de las variables en función de la otra. Tenemos que $g_x(x,y) = 2x$, $g_y(x,y) = 2y$, por lo que el vector gradiente $\vec{\nabla} g(x,y)$ no es el vector nulo en ningún punto (x,y) de B y, así, podemos aplicar dicho método.

En este caso tenemos:

$$\begin{vmatrix} f_x(x,y) & f_y(x,y) \\ g_x(x,y) & g_y(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4x-2 & 2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 4xy - 4y = 4\,y\,(x-1).$$

El método de Lagrange nos dice que si (x,y) es un punto de B donde f alcanza un extremo local, entonces (x,y) debe ser solución del sistema de ecuaciones siguiente: $\left\{ \begin{array}{rcl} y\,(x-1) & = & 0 \\ x^2+y^2 & = & 2 \end{array} \right.$ Es muy fácil comprobar que los únicos puntos del conjunto B que satisfacen este sistema son:

$$\boxed{(\sqrt{2},0) \qquad y \qquad (1,-1).}$$

3.- Recopilamos ahora los *puntos candidatos a extremos absolutos*, que son los obtenidos en los dos pasos anteriores, y *evaluamos* la función f en cada uno de ellos:

Puntos candidatos	**Valores de f**
$(\frac{1}{2},0)$	$f(\frac{1}{2},0) = \frac{1}{2}$
$(-1,-1)$	$f(-1,-1) = 6$
$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$	$f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$
$(1,1)$	$f(1,1) = 2$
$(\sqrt{2},0)$	$f(\sqrt{2},0) = 5-2\sqrt{2} \approx 2,2$
$(1,-1)$	$f(1,-1) = 2$

Comparando los valores obtenidos podemos afirmar que f alcanza un mínimo absoluto de valor $\boxed{\frac{1}{2}}$ en el punto interior $\boxed{(\frac{1}{2}, 0)}$ (ya sabíamos que se trataba de un mínimo local) y alcanza un máximo absoluto de valor $\boxed{6}$ en el punto de la frontera $\boxed{(-1, -1).}$

En el resto de los puntos de la lista se pueden alcanzar o no alcanzar extremos locales. Véase que los puntos vértices de la frontera: $(-1, 1)$ y $(1, 1)$ han sido considerados como candidatos. Siempre hay que tener en cuenta los puntos vértices de la frontera, es decir, los puntos donde se unen dos trozos de curva (o recta), ya que si no se lleva a cabo con cuidado los métodos explicados, éstos podrían ser excluídos y en muchas ocasiones algún extremo se alcanza en uno de estos vértices, como sucede con el caso anterior. Quizás lo más práctico sea incluir siempre estos vértices en la lista de puntos candidatos.