Matemática Discreta - Grado en Ing. Informática
Relación de Ejercicios 1 (Teoría de Grafos)

1. Se quiere establecer una red de conexiones entre los 15 ordenadores que hay en una empresa. ¿Se puede conectar cada uno de estos ordenadores exactamente a otros 5 de ellos?

2. De cada ciudad de un país parten tres carreteras a otras tantas ciudades. ¿Puede tener dicho país un total de 100 carreteras?

3. Demuestra que en cualquier grupo de dos o más personas, siempre hay por lo menos 2 personas con el mismo número de amigos dentro del grupo.

4. Estudiar si pueden haber grafos con las secuencias de grados siguientes:

   (a) $3, 3, 3, 3, 2$.

   (b) $5, 4, 3, 2, 1$.

   (c) $4, 4, 3, 2, 1$.

   (d) $4, 4, 3, 3, 3$.

5. Ponga dos ejemplos de grafos que tengan estructuras diferentes y que tengan la misma secuencia de grados.

6. Demuestra que la secuencia de números enteros $2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 1$ es la secuencia de grados de un grafo. Proponga dos ejemplos diferentes de grafos que tengan esta secuencia de grados.

7. ¿Para qué valores de d, entero no negativo, la secuencia $d, d + 1, d + 2, \ldots, d + n - 1$ es gráfica?

1. Se quiere establecer una red de conexiones entre los 15 ordenadores que hay en una empresa. ¿Se puede conectar cada uno de estos ordenadores exactamente a otros 5 de ellos?

Se quiere un grafo 5-regular de 15 vertices

Es imposible ya que un grafo de orden impar debe de tener un número de vértices par

2. De cada ciudad de un país parten tres carreteras a otras tantas ciudades. ¿Puede tener dicho país un total de 100 carreteras?

$m = 100$
$n = x$
grado 3

$n = x_3$; $2m = 3x_3$; $200 = 3x_3$; $x_3 = \frac{200}{3} \approx 66,6$ no, no puede, no es exacto

3. Demuestra que en cualquier grupo de dos o más personas, siempre hay por lo menos 2 personas con el mismo número de amigos dentro del grupo.

Sea $G = (V, E)$ un grafo de orden n ($n \geq 2$)

Para los vértices $v \in V$ se cumple $0 \leq \delta(v) \leq n-1$

No puede haber vértices de grado 0 y $n-1$: $\{0, 1, \dots, n-2\}$ o $\{1, 2, \dots, n-1\}$

Por el principio de cajas habrá al menos dos vértices del mismo grado

$n = 2$

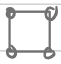
$\{0, \dots, n-2\} \to \{0\} \to \boxed{0} \quad \boxed{0} \to$

$\{1, \dots, n-1\} \to \{1\} \to \boxed{1} \quad \boxed{1} \to$

4. Estudiar si pueden haber grafos con las secuencias de grados siguientes:

(a) $3, 3, 3, 3, 2$.
(b) $5, 4, 3, 2, 1$.
(c) $4, 4, 3, 2, 1$.
(d) $4, 4, 3, 3, 3$.

a) $\cancel{3}, \underset{-1}{3}, \underset{-1}{3}, \underset{-1}{3}, 2$

$\cancel{2}, \underset{-1}{2}, \underset{-1}{2}, 2 \longrightarrow C_4$ 

$1, 1, 2 \rightarrow \cancel{2}, \underset{-1}{1}, \underset{-1}{1}$

$0, 0$ es gráfico

b) $\cancel{5}, \underset{-1}{4}, \underset{-1}{3}, \underset{-1}{2}, \underset{-1}{1}$ $\rightarrow$ nº impar de grados impares y $5 > n-1$

$\cancel{3}, \underset{-1}{2}, \underset{-1}{1}, \underset{-1}{0}$

$1, 0, -1$, no es gráfico

c) $\cancel{4}, \underset{-1}{4}, \underset{-1}{3}, \underset{-1}{2}, \underset{-1}{1}$

$\cancel{3}, \underset{-1}{2}, \underset{-1}{1}, \underset{-1}{0}$

$1, 0, -1$, no es gráfico

d) $\cancel{4}, \underset{-1}{4}, \underset{-1}{3}, \underset{-1}{3}, \underset{-1}{3}$ $\rightarrow$ nº impar de grados impares

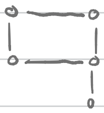
$\cancel{3}, \underset{-1}{2}, \underset{-1}{2}, \underset{-1}{2}$

$\cancel{1}, \underset{-1}{1}, 1$

$0, 1 \rightarrow \cancel{1}, \underset{-1}{0}$

-1, no es gráfico

5. Ponga dos ejemplos de grafos que tengan estructuras diferentes y que tengan la misma secuencia de grados.

 → 2, 2, 2, 2, 1 ← 

6. Demuestra que la secuencia de números enteros $2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 1$ es la secuencia de grados de un grafo. Proponga dos ejemplos diferentes de grafos que tengan esta secuencia de grados.

Aplicando la consecuencia de Havel-Hakimi

$\cancel{3}, \underset{-1}{2}, \underset{-1}{2}, \underset{-1}{2}, 2, 2, 2, 1$

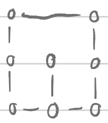
$1, 1, 1, 2, 2, 2, 1 \rightarrow \cancel{2}, \underset{-1}{2}, \underset{-1}{2}, 1, 1, 1, 1$

$\cancel{1}, \underset{-1}{1}, 1, 1, 1, 1$

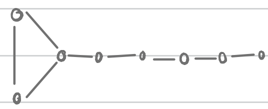
$0, 1, 1, 1, 1 \rightarrow \cancel{1}, \underset{-1}{1}, 1, 1, 0$

$\cancel{1}, \underset{-1}{1}, 0, 0$

$0, 0, 0$ es gráfica



$\longrightarrow 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1 \longleftarrow$



7. ¿Para qué valores de d, entero no negativo, la secuencia $d, d+1, d+2, \ldots, d+n-1$ es gráfica?

$\underbrace{d, d+1, \ldots, d+n-1}_{n}$

$x \leq n-1$

$d+n-1 \leq n-1$; $0 \leq d \leq 0$; $d = 0$

$\downarrow$

$0, 1, \ldots, n-1$

Si $n \geq 2$ no graficable

no puede haber un vertice de grado 0 y $n-1$ a la vez

$n = 1$; Grafo N_1 (trivial)

$\downarrow$

$\bullet$