Capítulo 1

Funciones de varias variables

1.1. Introducción a las funciones de varias variables. Gráficas y curvas de nivel

En muchas situaciones prácticas, el valor de una cantidad puede depender de los valores de otras dos (o de más). Por ejemplo,

- El agua de un pantano depende al menos de tres variables: la lluvia, el consumo humano y la evaporación (temperatura).
- El volumen de un cilindro circular recto depende del radio de la base y de la altura.
- La temperatura en cada punto de una placa metálica dependerá de las dos coordenadas del punto y de la temperatura.
- El flujo de sangre desde una arteria a un capilar dependerá del diámetro del capilar y de la presión sanguínea en la arteria y en el capilar.

En definitiva, muchos problemas de la vida real se pueden modelar matemáticamente en términos de funciones de varias variables. Será preciso entonces extender el análisis conocido para funciones de una variable a funciones de varias variables.

Para una mejor comprensión y visualización trabajaremos en gran parte de este tema con funciones de dos variables, pero los mismos conceptos y técnicas se adaptan al caso de tres o más variables, para lo cuál a veces desarrollaremos ejemplos y ejercicios donde aparezcan funciones que poseen más de dos variables. Sólamente en algunas secciones muy especiales distinguiremos claramente el caso de dos variables de los otros.

Comenzamos dando algo de notación. Definimos el *plano cartesiano* $\mathbb{R}^2$ como el conjunto de pares ordenados (x, y), donde cada elemento que aparece en el par es un número real:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y)\colon x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

(Es importante tener en cuenta que los pares (x, y) están ordenados, es decir, no es lo mismo $(1, 2)$ que $(2, 1)$). De igual forma se define el *espacio cartesiano* (espacio euclídeo):

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\colon x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\ \}.$$

De modo general, se puede considerar el espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Sea D un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$. Una *función de dos variables* $f\colon D \to \mathbb{R}$ es una aplicación (regla) que asigna a cada punto $(x, y) \in D$ un único número real $f(x, y)$.

A veces escribiremos $z = f(x, y)$ y llamaremos a x e y *variables independientes* y a z *variable dependiente*.

Al conjunto D se le llama *dominio* de la función f.

Al igual que ocurria con funciones de una variable, el dominio puede venir dado de dos formas distintas:

- De forma explícita: $f\colon [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = \ln(x + y + 1)$.
- De forma implícita: $f(x, y) = \ln(x + y)$.

  En este caso, el dominio será el mayor posible, es decir el mayor subconjunto de $\mathbb{R}^2$ para el que la expresión $f(x, y)$ tiene sentido. Así en el ejemplo anterior el dominio es $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x + y > 0\}$.

La *imagen* de una función $f\colon D \to \mathbb{R}$ está formada por los valores reales que toma la función f, es decir,

$$\mathrm{Imag}(f) = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x, y),\ \text{para algún } (x, y) \in D\}.$$

Ejemplo: $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = x + x^2y - 1$. En este caso el dominio de f es todo el plano $\mathbb{R}^2$ pues se observa que no hay ningún tipo de restricción sobre las variables x, y.

Ejemplo: El dominio de la función $f(x, y) = e^{(x^2+y^2)}$ es $\mathbb{R}^2$ pues observamos que no hay ningún tipo de restricción sobre las variables x e y. La imagen sería el intervalo $[1, \infty)$, ya que al ser $x^2 + y^2 \geq 0$ se verifica que $e^{(x^2+y^2)} \geq 1$.

Ejemplo: Consideremos la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$.

Como la raiz cuadrada sólo está definida para números positivos, el dominio de la función f será el conjunto de pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2 + y^2 - 9 \geq 0$, es decir

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 \geq 9\}.$$

Como la raiz cuadrada de cualquier número positivo es una cantidad positiva, la imagen de la función es el intervalo $[0, \infty)$.

La ecuación $x^2 + y^2 = 9$ representa la circunferencia de centro el origen y radio 3. Esta divide al plano en dos partes: una interior a la circunferencia y otra exterior. Para ver qué parte representa D, basta tomar un punto exterior o interior y ver si está o no en D. Si tomamos el punto $(x, y) = (0, 0)$, que es interior a la circunferencia, entonces $0^2 + 0^2 = 0 < 9$, por tanto, $(0, 0) \notin D$. Luego geométricamente D representa el exterior de la circunferencia, junto con dicha circunferencia.

Ejercicio

Ver a continuación los siguientes ejemplos dibujando sus dominios.

$f(x, y) = x + y^2 - xy + e^x$	$D = \mathbb{R}^2$
$f(x, y) = \ln(xy)$	$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon xy > 0\}$
$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$	$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \geq 9\}$
$f(x, y) = \sqrt{1 - x + y}$	$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq x - 1\}$
$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-9}}{x}$	$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \geq 9, x \neq 0\}$
$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$	$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 9\}$.

Operaciones elementales con funciones de dos variables

Al igual que ocurría con las funciones de una variable, podemos realizar operaciones con funciones de más variables. De hecho, casi todas las funciones se pueden obtener en términos de funciones muy simples utilizando ciertas operaciones, análogas a las vistas con funciones de una sola variable, que a continuación describimos.

Sean f y g dos funciones de las variables x, y definidas ambas en el mismo dominio (si los dominios no coiniciden consideramos su intersección). Podemos definir las siguientes operaciones:

- *Suma*: $(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$.
- *Diferencia*: $(f - g)(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$.
- *Producto*: $(f\, g)(x, y) = f(x, y)\, g(x, y)$.
- *Producto por un número a*: $(a\, f)(x, y) = a\, f(x, y)$.
- *Cociente*: $\dfrac{f}{g}(x, y) = \dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$, si $g(x, y) \neq 0$.

Realmente el producto de una función por un número a se puede considerar como un caso particular del producto de dos funciones considerando una de ellas como la función contante $g(x, y) = a$.

Véase que con las funciones $f(x, y) = x$ y $g(x, y) = y$ y las funciones constantes se pueden construir muchas funciones usando las operaciones anteriores. Por ejemplo, usando únicamente la suma, la diferencia y el producto podemos obtener las siguientes funciones:

- $h(x, y) = x + y^2 - xy$
- $h(x, y) = 3x^3 - xy^2 + 7y - 5$.

En el primer caso, $h = f + gg - fg$ y en el segundo $h = 3fff - fgg + 7g - 5$. Los dos ejemplos anteriores son casos particulares de funciones polinómicas.

Una *función polinómica* es una función que se obtiene como sumas y/o diferencias de funciones del tipo Cx^my^n, donde $C \in \mathbb{R}$ y m y n son números enteros no negativos.

Una *función racional* es la que se obtiene como cociente de dos funciones polinómicas. Así, por ejemplo, la función definida por $f(x,y) = \frac{xy-3y+7}{x^2+y^2+1}$ sería racional.

Existe otra importante operación, llamada *composición*, que no siempre se puede llevar a cabo. Observemos que la función $f(x,y) = \text{sen}(x^2+y^2)$ no se puede obtener a partir de las funciones $f(x,y) = x$ y $g(x,y) = y$ mediante las operaciones anteriores. La expresión donde se aplica la función seno $g(x,y) = x^2+y^2$ es polinómica y véase que podemos escribir $f(x,y) = h(g(x,y))$, donde $h(t) = \text{sen}(t)$. Es decir, la función dada se puede obtener mediante dos funciones, una de dos variables y una de una sola variable. Otros ejemplos análogos al anterior son: [3] $f(x,y) = (x+y-1)^2$ $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-9}$ $f(x,y) = \ln(xy)$.

En el primer caso, $h(t) = t^2$, en el segundo $h(t) = \sqrt{t}$ y, en el tercero, $h(t) = \ln(t)$.

Gráficas de funciones de dos variables

A menudo representamos la función $f : D \to \mathbb{R}$ en la forma $z = f(x,y)$, donde x e y son las variables independientes y z es la variable dependiente. Por analogía con el caso de una función de una variable definimos la *gráfica* de la función $z = f(x,y)$ como el conjunto de puntos $(x,y.z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $(x,y) \in D$ y $z = f(x,y)$; es decir:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, z = f(x,y)\}.$$

Este conjunto de puntos representa una superficie en el espacio cuya proyección sobre el plano xy es el dominio D. Para cada punto $(x,y) \in D$, $z = f(x,y)$ representa la "altura"que le asignamos a dicho punto.

Al igual que en funciones de una variable, el tener una idea de la gráfica de una función puede resultar de gran ayuda a la hora de estudiar su comportamiento. Sin embargo, en general no es fácil dibujar la gráfica de una función de dos variables, ya que no hay un procedimiento a seguir. Daremos algunas ideas sobre representación gráfica que puede sernos de utilidad.

Ejemplo: Vamos a hacernos una idea de la gráfica de la función $f(x,y) = \sqrt{16-4x^2-y^2}$.

Lo primero que debemos hacer es determinar su dominio y representarlo geométricamente. Al igual que en ejemplos anteriores, es fácil ver que el dominio es:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2 \leq 16\}.$$

Podemos escribir la ecuación $4x^2+y^2 = 16$ en la forma $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$, que representa una elipse centrada en el origen. Por tanto, D es el conjunto de puntos interiores a la elipse, incluyéndola a esta.

Por otro lado, los puntos de la superficie que queremos representar verifican $z = f(x,y)$, es decir:

$$z = \sqrt{16-4x^2-y^2}\mathbb{R} \Rightarrow z^2 = 16-4x^2-y^2\mathbb{R} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1,$$

teniendo en cuenta además que $0 \leq z \leq \sqrt{16} = 4$. Por tanto, la gráfica $z = f(x, y)$ es la mitad de un elipsoide

Curvas de nivel

Dada una constante $k \in \mathbb{R}$, definimos la *curva de nivel de orden* k como la curva $f(x, y) = k$. Dicho de otro modo, la curva de nivel de orden k está constituida por aquellos puntos en los que la función vale k. Geométricamente, la curva de nivel de orden k es el corte de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $z = k$

En el ejemplo anterior: $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$; como $0 \leq z \leq 4$, sólo podemos elegir $k \in [0, 4]$. Para calcular la curva de nivel $k = 0$, resolvemos:

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Por tanto, la curva de nivel $k = 0$ es: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$. (Se trata del "contorno"del dominio).

Calculemos ahora la curva de orden $k = 1$:

$$f(x, y) = 1 \Rightarrow \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} = 1 \Rightarrow 4x^2 + y^2 = 15 \Rightarrow \frac{4x^2}{15} + \frac{y^2}{15} = 1,$$

que es de nuevo una elipse.

Observaciones

1. Si la función $f(x, y)$ mide la presión atmosférica en el punto (x, y) de un mapa, entonces las curvas de nivel son las *isobaras*. Si, en cambio, $f(x, y)$ mide la temperatura, entoces las curvas de nivel son las *isotermas*. Las curvas de nivel también aparecen en los mapas topográficos, donde ahora $f(x, y)$ mide la elevación del terreno en el punto (x, y).

2. Se puede generalizar el concepto de curva de nivel a funciones de más de dos variables. En particular, si f es una función de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y C es un número de la imagen de f, las soluciones de la ecuación $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$ forman una región del espacio de dimensión n, que se llama una *superficie de nivel* de f en C.

1.2. Límites de funciones de dos variables. Propiedades y métodos

Límites de funciones de dos variables

Ya conocemos el concepto de límite para funciones de una sola variable. Recordemos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa que los valores de la función $f(x)$ tienden (se acercan) al valor L cuando los puntos x se aproximan al punto x_0. Matemáticamente esto se formaliza de la siguiente manera:

Para cada número real $\epsilon > 0$ (por pequeño que sea) existe un $\delta > 0$ tal que

$$\underbrace{x - x_0}_{\text{distancia entre } x \text{ y } x_0} < \delta \quad \text{y} \quad x \neq x_0 \quad \mathbb{R} \Rightarrow \quad \underbrace{f(x) - L}_{\text{distancia entre } f(x) \text{ y } L} < \epsilon.$$

Recuérdese que en la recta real $\mathbb{R}$ la distancia entre dos puntos a y b viene dada por el valor absoluto de la diferencia $a - b$. Por otra parte, la definición de límite dada nos dice que cuando se estudia el límite de f en el punto x_0 no importa el valor de f en ese punto; de hecho, ni siquiera es necesario que f esté definida en x_0. Por ejemplo, decimos que $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, pero la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida en $x_0 = 0$.

El concepto intuitivo de límite para funciones de dos variables es análogo al de funciones de una sola variable pero es mucho más complicado de tratar, como veremos más adelante. Si f es una función de las variables x, y y $L \in \mathbb{R}$ diremos que f posee límite L en el punto (x_0, y_0) y escribiremos $\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,}$ cuando los valores de la función $f(x, y)$ tienden (se acercan) al valor L cuando los puntos (x, y) se aproximan al punto (x_0, y_0).

Formalmente lo anterior se puede escribir como en el caso de una variable sin mas que sustituir la distancia en $\mathbb{R}$ por la distancia en $\mathbb{R}^2$ para poder escribir matemáticamente el hecho de que los puntos (x, y) se aproximan al punto (x_0, y_0). Recordemos que la distancia en el plano entre los puntos (x, y) y (x_0, y_0) viene dada por $\mathrm{d}((\mathrm{x,y}), \ (\mathrm{x}_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.Por tanto,

Diremos que una función de dos variables f posee límite $L \in \mathbb{R}$ en el punto (x_0, y_0) y escribirmos $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ cuando para cada número real $\epsilon > 0$ (por pequeño que sea) existe un $\delta > 0$ tal que

$$d((x, y), (x_0, y_0)) < \delta \quad \text{y} \quad (x, y) \neq (x_0, y_0) \quad \Longrightarrow \quad f(x, y) - L < \epsilon.$$

Al igual que ocurre con las funciones de una sola variable, en la definición anterior se supone (queda implícito) que los puntos (x, y) que se toman próximos a (x_0, y_0) deben estar en el *dominio de la función* f. Sin embargo *no es necesario que* (x_0, y_0) *esté en el dominio* y, si lo está, el valor de f en (x_0, y_0) no interviene en la definición de límite. (Siendo rigurosos, para plantear el límite en el punto (x_0, y_0) hay que verificar que tal punto es de *acumulación* del dominio, concepto que no se explica a este nivel, y que viene a dar una condición que asegura que podemos acercarnos a (x_0, y_0) través de puntos del dominio distintos de (x_0, y_0)).

Aquí vamos a intentar prescindir de la definición de límite, la cuál es poco práctica aunque imprescindible para probar ciertas propiedades básicas de los límites, pero aquí vamos a pasar de demostraciones. En general, el concepto de límite para funciones de dos variables es mucho más complicado de manejar que el de funciones de una sola variable.

Ahora, queremos hacer ver que en muchos casos se puede saber fácilmente que la función tiene límite y calcular este límite. Para ésto veremos algunas propiedades de los límites que nos van a facilitar el estudio de ellos. La idea fundamental es, como hemos visto en una sección anterior, que muchas funciones se pueden expresar en términos de las funciones elementales

$$f(x,y)=x, \quad g(x,y)=y, \quad h(x,y)=C$$

y de las *funciones de una sola variable*, usando las operaciones de suma, diferencia, producto, cociente y composición de funciones. Haciendo uso de la definición de límite se puede probar fácilmente

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} C = C.} \tag{1.2.1}$$

A la vista de lo anterior, resulta de gran importancia el siguiente resultado:

Comportamiento de los límites respecto de las operaciones básicas:

Sean f y g dos funciones de las variables x, y tales que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M.$$

Se verifican las siguientes propiedades:

Si a es un número, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} a\,f(x,y) = a\,L$.

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f+g)(x,y) = L+M$ y, análogamente, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f-g)(x,y) = L-M$.

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f\,g)(x,y) = L\,M$.

Si $M \neq 0$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f}{g}(x,y) = \frac{L}{M}$.

Si h es una función de una sola variable que es *continua* en el punto L, entonces $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(f(x,y)) = h(L)$. En particular, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Haciendo uso del resultado anterior y de (1.2.1) podemos deducir de una forma muy simple que muchos límites existen y, además, podemos calcular estos límites. A continuación exponemos algunos ejemplos donde aparecen funciones polinómicas, racionales y otras de otros tipos.

Ejemplos:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,1)}(x^2-3xy+y^3+6)}$$

Se explica con todo detalle cómo, haciendo uso de (1.2.1) y de las tres primeras propiedades, se llega a la existencia de tal límite siendo además su valor $0^2-3\times0\times1+1^3+6=7$.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(1,2)}(x^2+xy+3y^2-1)}$$

Procediendo de manera análoga al caso anterior deducimos la existencia de tal límite siendo además su valor $1^2+1\times2+3\times2^2-1=14$.

$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{1+x^2+y^2}}$

En este caso, procediendo de manera análoga a los casos anteriores, deducimos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2xy = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1+x^2+y^2 = 1.$$

Como el último límite es distinto de cero, usando ahora la propiedad 1.2, podemos deducir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{1+x^2+y^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,1)} \operatorname{sen}\big(\frac{x}{x^2-y^2}+\frac{\pi}{2}\big)}$

Procediendo como en el caso anterior, podemos asegurar que $\lim_{(x,y)\to(0,1)}\big(\frac{x}{x^2-y^2} + \pi/2\big) = \frac{0}{-1} + \frac{\pi}{2} = \pi/2$. Como la función de una sola variable $h(t) = \operatorname{sen} t$ es continua en el punto $\pi/2$, entonces, aplicando la propiedad 1.2, deducimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \operatorname{sen}\big(\frac{x}{x^2-y^2}+\frac{\pi}{2}\big) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1.$$

Podemos observar en los casos anteriores que finalmente el límite ha sido calculado sin mas que sustituir en la expresión $f(x,y)$ el punto (x,y) por el punto donde se plantea el límite; es decir, la variable x por la primera coordenada de ese punto y la variable y por la segunda coordenada del punto (podíamos llamar a ésto algo así como *cálculo de límites por sustitución*). Claro está, en todos estos casos el punto donde se plantea el límite está en el dominio de la función, lo cuál no siempre sucede, como veremos en los próximos ejemplos.

La forma de proceder anteriormente para el cálculo de límites no siempre funciona, como puede apreciarse en los siguientes ejemplos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-x)^2}{y^4+x^2}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\big(\frac{x}{x^3+y^3}\big).$$

Los ejemplos anteriores tienen en común que el punto donde se plantea el límite, el $(0,0)$, *no pertenece al dominio de la función* y en los tres primeros casos nos encontarmos con una *indeterminación* del tipo $\dfrac{0}{0}$ a la hora de ver si las correspondientes fracciones poseen límites. Es decir, en estos casos no podemos hacer uso de la propiedad 1.2 ya que el denominador tiene límite igual a 0. Ya veremos que al estudiar la diferenciabilidad de funciones de dos variables en el punto $(0,0)$ aparecen límites parecidos a los anteriores, donde en el denominador aparece la expresión $\sqrt{x^2+y^2}$. Por ejemplo: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

En el siguiente ejemplo: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, donde $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0<y<x^2 \\ 0 & \text{en el resto,}\end{cases}$ el punto donde se considera el límite si está en el dominio de la función pero, al ser una

función definida a trozos, no podemos hacer uso de las propiedades conocidas para saber si existe tal límite.

A continuación explicaremos dos métodos que puedan sacarnos de dudas en los ejemplos anteriores.

Primer método: **Límites a través de caminos y límites direccionales**

Este método es uno de los más usados para probar que una función no posee límite en un punto o bien, en casos dudosos, para encontrar el candidato a límite, cuando éste existe.

En general, el concepto de límite para funciones de dos variables es mucho más complicado de manejar que el de funciones de una sola variable. El motivo es claro: En la recta real $\mathbb{R}$, cuando nos acercamos a un punto x_0, básicamente lo hacemos acercándonos por la izquierda o bien por la derecha; de hecho, esto motiva que se definan en este caso los límites por la izquierda $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ y por la derecha $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ y sucede que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$.Sin embargo, en el plano $\mathbb{R}^2$ hay muchas formas de aproximarse a un punto dado (x_0, y_0); por ejemplo, por rectas o curvas que pasen por ese punto. Solamente con ésto ya tenemos infinitas formas de aproximarnos. Pero a veces, acercándonos al punto a través de un adecuado camino, podemos obtener información valiosa sobre la existencia del límite.

Supongamos que estudiamos el límite en el punto (x_0, y_0) para una función de dos variables $f\colon D \to \mathbb{R}$ y A es un subconjunto del dominio D a través del cuál podemos acercarnos a (x_0, y_0) (matemáticamente esto se plantea diciendo que (x_0, y_0) es un punto de acumulación de A). Podríamos decir que A es un *camino* para acercarnos al punto. éste podría ser una *recta* que pase por el punto, una determinada *curva* o conjuntos más generales. Podríamos entonces estudiar el límite de f en (x_0, y_0) según este camino, como si ahora el dominio de la función fuese A. Esto se suele notar así

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y)$$

para distinguirlo del límite inicial, que podríamos escribir así

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in D}} f(x,y).$$

Ahora sólo interesa el comportamiento de la función en los puntos del camino A y en la definición bastaría cambiar D por A. Por tanto, es evidente que $\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad\Longrightarrow\quad \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0\\(x,y)\in A}}}$

consecuencia podemos afirmar lo siguiente:

Si para un camino A no existe $\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y)$, tampoco existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Si a través de dos caminos distintos A y B existen los límites pero son distintos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in B}} f(x,y),$$

entonces podemos asegurar que no existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Si después de probar muchos caminos resulta que existe el límite a través de ellos y siempre se obtiene el mismo valor L, entonces (cuidado!) no podemos asegurar que exista $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, pero de existir su valor sería L.

Los dos primeros puntos vienen a reflejar lo que sucede en el caso de una sola variable con los límites laterales, pero el punto tercero supone una gran diferencia con respecto al caso de una variable, ya que si los dos límites laterales existían y coincidían sí podíamos asegurar la existencia del límite, mientras que en dos variables lo único que obtenemos en claro es el candidato a límite, caso de que el límite exista. Algunos ejemplos que veremos a continuación confirmarán lo que se expone en el tercer punto, pues veremos ejemplos para los que existe el límite a través de muchos caminos, obteniéndose siempre el mismo valor, y, sin embargo, no existe el límite.

Los caminos más utilizados son rectas y ciertas curvas simples que pasan por el punto (x_0, y_0). Los límites a través de rectas se denominan *límites direccionales*. El motivo fundamental por el que se consideran estos caminos A es porque en estos casos el límite a través de ese camino se reduce a un *límite de una función de una sola variable* y, a veces, es un límite trivial, pues sucede en ocasiones que a través de un camino la función toma valores constantes.

En efecto, supongamos que nuestro punto es el origen $(x_0, y_0) = (0,0)$. Las rectas que pasan por el origen son las de ecuación $y = mx$ y $x = 0$. De forma más general, podemos considerar curvas que pasan por el origen del tipo $y = \varphi(x)$ o $x = \psi(y)$. Cuando evaluamos la función sobre estas rectas o curvas en la expresión $f(x,y)$ vamos a sustituir la variable x por $\psi(y)$ o bien la variable y por $\varphi(x)$ y, en cualquier caso, nos va a quedar una expresión que sólo depende de una variable y así el límite a través del camino A va a ser equivalente al límite de una función de una sola variable. Ilustraremos todas estas ideas con una serie de ejemplos; algunos de ellos, han sido expuestos anteriormente como casos de indeterminación.

Ejemplos:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}}$$

Aquí tenemos una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$. Las dos rectas más simples que pasan por $(0,0)$ son los dos ejes de coordenadas. Al tomar como camino la recta $A = \{(x,y)\colon y = 0\}$ (eje de abcisas) observamos que si $(x,y) \in A$, entonces $f(x,y) = f(x,0) = \frac{x^2}{x^2+0^2} = 1$, por lo que, al ser la función constantemente igual a 1 a través de A, se verifica obviamente:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = 1.$$

Si ahora tomamos como camino la recta de ecuación $x = 0$ resulta

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{0^2}{0^2+y^2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} 0 = 0.$$

De esta forma hemos encontrado dos caminos (a través de los cuales la función es constante) por los que existe el límite pero salen valores distintos. En consecuencia, podemos afirmar que no existe el límite planteado.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}}$$

Al igual que en el caso anterior tenemos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. En este caso, a través de las rectas $x = 0$ e $y = 0$ la función es constantemente igual a 0 por lo que se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\x=0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Al coincidir el límite a través de las dos rectas no tenemos una situación análoga al caso anterior y no podemos afirmar que no exista el límite. Ahora bien, podemos considerar las demás rectas que pasan por $(0,0)$, es decir, las rectas de ecuación $y = mx$ (aquí están todas las que pasan por $(0,0)$ salvo la $x = 0$); m es la pendiente de la recta. En este caso, estos límites direccionales salen así:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=mx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Obsérvese que el límite depende de la recta tomada (pues depende de la pendiente m) y ésto nos dice que no existe el límite propuesto.

En el primer ejemplo también podíamos haber tomado directamente estas rectas y hubiéramos concluído lo mismo.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4}}$$

Volvemos a tener una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Al tomar el límite a través de las rectas $x = 0$ e $y = 0$ sale en ambos casos el valor 1. Veamos los demás límites direccionales.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=mx}} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{(m^2x^2-x)^2}{m^4x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(m^2x-1)^2}{m^4x^2+1} = 1.$$

Así pues, todos los límites direccionales existen y valen 1. Esto nos podría hacer sospechar que el límite existe, pero, en principio, lo único que podríamos afirmar es que de existir valdría 1. Hay que andar con cuidado pues podemos caer en un error. En este caso, dada la expresión que tiene la función, se ve a simple vista que a través de la parábola de ecuación $x = y^2$ el límite sale 0

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}} \frac{(y^2-x)^2}{x^2+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{2y^4} = 0.$$

Por tanto, a través de la parábola se obtiene un límite distinto a los límites direccionales y ésto nos confirma que no existe el límite planteado.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}}$$

En este caso es fácil advertir que no existe tal límite pues los valores de la función crecen sin tope cuando (x, y) se acerca a $(0, 0)$. Es como el caso del límite de una sola variable $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$. Para confirmar ésto lo más cómodo podría ser tomar, por ejemplo, la recta de ecuación $y = 0$ y a través de esta recta se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Al no existir tal límite, como límite real, podemos asegurar que el límite planteado no existe.

En los cuatro casos anteriores el punto donde se estudia el límite, el $(0, 0)$, no pertenece al dominio de la función. El siguiente ejemplo es distinto; se trata de una función definida a trozos y el punto donde se estudia el límite sí pertenece a su dominio.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \quad \text{donde } f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}}$$

Teniendo en cuenta la idea intuitiva de límite (o mejor la definición) se aprecia que esta función no debe tener límite en $(0, 0)$, pues tan cerca como queramos a $(0, 0)$ hay puntos donde f toma el valor 1 y otros puntos donde toma el valor 0. Es análogo al caso de una variable:

$$\lim_{x\to 0} f(x), \quad \text{donde } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Para confirmar esta idea podemos usar el método de los caminos y encontrar dos de ellos a través de los cuales los límites existan pero sean distintos. Obsérvese que a través de la recta vertical $x = 0$ la función siempre toma el valor 0 y, por tanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = 0.$$

mientras que a través de la parábola de ecuación $y = x^2/2$ la función siempre toma el valor 1 y así resulta

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2/2}} f(x,y) = 1.$$

Esto confirma que no existe el límite en el $(0,0)$.

Por último abordamos el siguiente límite:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}}$$

Tenemos ahora un caso de aspecto muy parecido a los tres primeros ejemplos tratados. Es un caso de indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, en el que no vamos a poder concluir de la misma forma que en esos casos.

Los límites direccionales salen así:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,mx}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{1+m^2} = 0. \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Veamos lo que sucede a través de diversas familias de parábolas:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx^2}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\,mx^2}{x^2+(mx^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{1+m^2x^2} = 0.$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=my^2}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{(my^2)^2\,y}{(my^2)^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{m^2y^3}{m^2y^2+1} = 0.$$

Al ser todos los límites direccionales y todos los límites a través de parábolas iguales a 0 *no podemos deducir que exista el límite* aunque sospechamos que sí. Lo único que podemos asegurar es que de existir su valor sería necesariamente $L = 0$. Podríamos estar probando otros caminos (tipos de curvas) para aproximarnos al origen, pero ésto podría ser una labor inacabable. Necesitamos pues un método que nos aclare esta situación. Aunque podríamos hacer uso de la definición de límite, posiblemente sea mejor usar el método que a continuación exponemos.

El método visto anteriormente solo sirve para afirmar que un límite no existe, cuando éste es el caso, o para conocer el valor del límite en el caso de que exista, pero no se puede usar para afirmar que existe, tal como hemos comprobado con el ejemplo 1.2. El método que exponemos a continuación tienen la gran ventaja de que, cuando puede ponerse en práctica, sí sirve para afirmar que un determinado límite existe.

Segundo método: **Método de las acotaciones**

Este método es una generalización de uno conocido para funciones de una sola variable, que algunos llaman regla o *criterio del sandwich* (o bocadillo). Recordar el caso de una variable.

Sean f, φ y h tres funciones de dos variables definidas sobre el mismo dominio D que verifican:

$$\boxed{h(x,y) \ \leq \ f(x,y) \ \leq \ \varphi(x,y), \qquad \text{para cada } (x,y) \in D.}$$

(Siendo rigurosos deberíamos decir que tales desigualdades deben verificarse en un disco agujereado centrado en el punto (x_0, y_0)). Si sucede que

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(x,y) = L,}$$

entonces $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Existe un caso especial del resultado anterior que es el que más se utiliza en la práctica. Este es el siguiente:

Supongamos que estamos estudiando el límite de f en el punto (x_0, y_0) y tenemos un caso dudoso, pero sospechamos que el límite existe y su valor es L. Esta sería, por ejemplo, la situación que hemos visto en el ejemplo 1.2 del método anterior. Pues bien, supongamos que g es otra función de dos variables definida sobre el mismo dominio D tal que se verifica:

$$\boxed{f(x,y) - L \leq g(x,y), \qquad \text{para cada } (x,y) \in D \quad \text{ y } \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0.}$$

En tal caso, se puede asegurar que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.

Se trata de un caso particular del anterior pues la desigualdad $f(x,y) - L \leq g(x,y)$ es equivalente a la doble desigualdad $L - g(x,y) \leq f(x,y) \leq L + g(x,y)$ y se verifica

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (L - g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (L + g(x,y)) = L,$$

al ser $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$. En este caso, $h(x,y) = L - g(x,y)$ y $\varphi(x,y) = L + g(x,y)$.

Hemos visto que con el método anterior podíamos llegar a una situación dudosa, por no poder asegurar la existencia de $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, pero al menos sabíamos que de existir el límite sería un cierto valor L. Conociendo la expresión $f(x,y)$ y el candidato a límite L podemos intentar obtener (no siempre funciona) una acotación del tipo $f(x,y) - L \leq g(x,y)$, siendo g una función que tiene límite 0 en el punto (x_0, y_0). En este caso podemos asegurar que f posee límite L en ese punto. Pongamos dos ejemplos donde llevamos a cabo esta idea. El primero es justamente el ejemplo 1.2 que vimos con el método anterior.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}}$$

Habíamos visto que todos los límites direccionales y todos los límites a través de parábolas existen y dan el mismo valor: $L = 0$. Por tanto, de existir el límite sería necesariamente $L = 0$. Considerando $L = 0$ y $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$, tenemos

$$f(x,y) - L = f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = y\, \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Observemos que en cualquier caso $x^2 \leq x^2 + y^2$, por lo que $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$ y así resulta $f(x,y) - L \leq y$. Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$, podemos asegurar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$.

Véase que el método de las acotaciones no hubiese funcionado, por ejemplo, con la función $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Ya vimos, usando el primer método, que esta función no posee límite en el $(0,0)$, pero resulta ilustrativo (y un aviso al alumno para que no cometa ciertos errores) el comprobar directamente que aquí no se puede hacer lo mismo. En efecto, en este caso

$$f(x,y) - L = f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = y\,\frac{x}{x^2+y^2},$$

pero aquí no podemos llevar a cabo la acotación $\frac{x}{x^2+y^2} \leq 1$, pues no es válida. Obsérvese que cuando x está cerca del valor 0 (y, por tanto $x < 1$) sucede que $x > x^2$. Póngase el caso de $x = 0,5$ e $y = 0$ para comprobarlo. Por tanto, en este caso no se ve que se pueda acotar la expresión $f(x,y) - L$ por una función simple que tenga límite 0. De todas formas, el que ésto no se pueda hacer, no es una prueba de que la función dada no tenga límite. La negación de la existencia de límite se llevaría a cabo con el primer método.

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\Big(\frac{x}{x^3+y^3}\Big)}$$

Véase que nuestra función $f(x,y) = x \operatorname{sen}\big(\frac{x}{x^3+y^3}\big)$ es el producto de una función $g(x,y) = x$ que tiene límite 0, por otra función $h(x,y) = \operatorname{sen}\big(\frac{x}{x^3+y^3}\big)$ que no sabemos si tiene límite en el punto $(0,0)$ (caso dudoso) pero que está *acotada* pues $-1 \leq \operatorname{sen}\big(\frac{x}{x^3+y^3}\big) \leq 1$ cualquiera que sea (x,y), lo que equivale a decir que $\operatorname{sen}\big(\frac{x}{x^3+y^3}\big) \leq 1$. Para funciones de una sola variable sabemos que el producto de una función con límite nulo por una función acotada es una función que tiene límite 0. Esto nos hace sospechar que lo mismo va a suceder aquí.

En efecto, considerando $L = 0$, tenemos

$$f(x,y) - L = f(x,y) = x \operatorname{sen}\Big(\frac{x}{x^3+y^3}\Big) \underset{x\geq 0}{\leq} x.$$

Aquí, $g(x,y) = x$. Sabemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ y, por tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. En consecuencia, podemos asegurar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \operatorname{sen}\big(\frac{x}{x^3+y^3}\big) = 0$.

Observemos que si nos hubieran propuesto el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big(3 + x \operatorname{sen}\big(\frac{x}{x^3+y^3}\big)\Big)$, haciendo uso de la propiedad de los límites respecto de la operación suma, podríamos afirmar que el límite anterior también existe y su valor es 3.

A la vista de los ejemplos tratados en los métodos anteriores advertimos que cuando f es una función racional $f(x,y) = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ y queda una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ al considerar el límite en el origen, el que f tenga límite y además de valor $L = 0$ parece que depende de que el grado del polinomio del numerador $P(x,y)$ sea mayor que el del denominador $Q(x,y)$, pues en tal caso, $P(x,y)$ converge a 0 cuando $(x,y) \to (0,0)$ más rápidamente que $Q(x,y)$. Obsérvese que cuando $(x,y) \to (0,0)$ los valores de x e y tienden a ser muy pequeños y cuando un número a es menor que 1 se tiene que $a > a^2 > a^3 > a^4 > \dots$ (compruébese con $a = 0,5$).

Según el cálculo de límites dobles no es fácil de .ªlgoritmizar". Los actuales sistemas de *Cálculo Simbólico* (*Derive, Maple*, *Mathematica*?,) tienen implementadas algunas funciones en esta dirección, pero aún no están suficientemente depuradas. Por ejemplo, *Derive* (en su versión 3.12) tiene en el fichero de utilidad MISC.MTH la función $LIM2(u,x,y,x_0,y_0))$, que calcula el límite de la expresión u cuando $(x,y) \to (x_0,y_0)$. Pero solo estudia la existencia de este límite a través de rectas, por lo que falla, por ejemplo, al calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y}$.

1.3. Concepto de continuidad y propiedades

Continuidad de funciones de dos variables El concepto de continuidad para funciones de dos variables es análogo al caso de una variable.

Sea D un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ una función de dos variables y (x_0,y_0) un punto del dominio D. Se dice que f es continua en el punto (x_0,y_0) cuando se verifica

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

es decir, cuando existe el límite de f en el punto (x_0,y_0) y, además, el límite coincide con el valor de la función en tal punto.

Así pues, para que una función f se a continua en un punto (x_0,y_0) debe suceder:

Que (x_0,y_0) esté en el dominio de f.

Que exista el límite: $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

Que $f(x_0,y_0) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Lo que nos dice la definición es que f es continua en (x_0,y_0) cuando los valores $f(x,y)$ de la función se acercan al valor $f(x_0,y_0)$ cuando los puntos (x,y) se acercan al punto (x_0,y_0).

Cuando la función f es continua en cada punto del dominio D se dice que f *es continua en* D.

Geométricamente, el que f sea continua en todo su dominio significa que la superficie $z = f(x,y)$ (gráfica de f) no presenta saltos ni agujeros.

Usando algunos de los ejemplos vistos en la sección anterior, en los que aparecía un límite indeterminado en el origen, damos algunos ejemplos donde se plantea la continuidad en el origen.

La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ no es continua en el punto $(0,0)$ porque no existe el límite en ese punto.

La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ no es continua en el punto $(0,0)$ porque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \neq f(0,0) = 1.$$

Sin embargo, esta discontinuidad en $(0,0)$ es .$^{\text{ev}}$itable"porque si tomamos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

esta sería continua en $(0,0)$.

(redEste ejemplo no se ve) La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es continua en el punto $(0,0)$ porque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 = f(0,0)$.

Al igual que sucedía con los límites, en muchos casos se puede ver fácilmente que una función es continua en un punto o en todo su dominio. La idea fundamental es, como hemos visto en una sección anterior, que muchas funciones se pueden expresar en términos de las funciones elementales

$$f(x,y) = x, \quad g(x,y) = y, \quad h(x,y) = C,$$

y de las funciones de una sola variable, usando las operaciones de suma, diferencia, producto, cociente y composición de funciones. Sabemos que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$, $\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$, $\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} C = C$ por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = x_0 = f(x_0,y_0), \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = y_0 = g(x_0,y_0)$$

y también $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = C = h(x_0,y_0)$. Es decir, que tales funciones son continuas en todo el dominio $\mathbb{R}^2$.

A la vista de lo anterior, resulta de gran importancia el siguiente resultado, que se obtiene inmediatamente de los resultados vistos sobre límtes.

Sean f y g dos funciones de las variables x, y que son continuas en el punto (x_0, y_0) y a un número real. Se verifica:

Las funciones $f+g$, $f-g$, fg y af son continuas en (x_0,y_0).

Si $g(x_0,y_0) \neq 0$ la función $\dfrac{f}{g}$ es continua en (x_0,y_0).

Si h es una función de una variable continua en el punto $t = f(x_0, y_0)$, la composición hf, definida por $(hf)(x,y) = h(f(x,y))$, es continua en (x_0, y_0).

Como consecuencia de todo lo anterior se puede asegurar:

0,73

Todas las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}^2$.

Todas las funciones racionales son continuas en sus dominios.

Aparte de lo anterior, usando la composición con funciones continuas de una sola variable, podemos afirmar que muchas funciones son continuas; por ejemplo, las funciones definidas por

$$f(x,y) =^{(x-y^2)}, \quad g(x,y) = \pi + \mathrm{sen}(x-y+1), \quad h(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2+1} -^{(x-y^2)} + \pi + \mathrm{sen}(x-y+1)$$

serían continuas en $\mathbb{R}^2$.

La función del ejemplo 1, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ es continua en cada punto (x_0, y_0) del plano distinto del $(0,0)$; es decir, es continua en el dominio
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x,y) \neq (0,0)\}$ ya que sobre este dominio la función es racional (en estos puntos la continuidad se sigue de las propiedades 1 y 2).

1.4. Derivadas parciales y derivadas direccionales. Derivadas parciales de orden superior

Derivadas parciales y derivadas direccionales

En primer lugar, se recuerda el concepto de derivada para funciones de una sola variable y la importancia, por sus muchas aplicaciones, de este concepto. Si I es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ es una función, dado un punto x_0, que sea un punto interior del intervalo I, se define la *derivada* de f en x_0 y se nota por $f'(x_0)$ o bien por $\frac{df}{dx}(x_0)$ al límite siguiente (cuando existe):

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Cuando tal límite existe se dice que f es *derivable* en el punto x_0. En el caso en que el punto x_0 no sea interior al intervalo, es decir, sea el extremo inferior o el extremo superior del intervalo I, como sucede con $x_0 = a$ ó $x_0 = b$ cuando $I = [a,b]$, sólo podríamos hablar de derivada por la derecha o por la izquierda respectivamente.

El buscar un buen sustituto a la derivada en el caso de funciones de dos o mas variables no es una cuestión simple y es algo que iremos analizando a lo largo de varias secciones.

Pero, en principio, en muchas aplicaciones resulta de interés cómo se ve afectada la función cuando sólo se cambia una de las variables, dejando fijas las otras variables. Por ejemplo, para determinar el efecto de un catalizador en un experimento, un químico puede realizar varias veces el experimento con distintas cantidades de ese catalizador mientras mantiene constantes todas las demás variables, tales como temperatura y presión. Cuando ésto se expresa en términos de funciones, el proceso de ver cómo se comporta una función cuando sólo se varía una de sus variables independientes se denomina *derivación parcial* y a sus resultados se les llama *derivadas parciales* de la función respecto de las variables elegidas.

Aunque mas adelante definiremos otras derivadas más generales y un concepto, el de diferenciabilidad, que será el sustituto adecuado de la derivación en una variable, las derivadas parciales, de muy fácil manejo, constituyen unas derivadas de gran importancia pues ya veremos que, en muchos casos, las demás derivadas se van a conocer a partir del conocimiento de las derivadas parciales.

Sea D un dominio del plano y $f\colon D \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Sea (x_0, y_0) un punto de D, al que habrá que exigirle una condición que más adelante concretaremos.

Se define la derivada parcial de f respecto de la variable x en el punto (x_0, y_0), y se suele notar por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ o por $f_x(x_0, y_0)$ al siguiente límite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h,\, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

y la derivada parcial de f respecto de la variable y en el punto (x_0, y_0), y se suele notar por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ o por $f_y(x_0, y_0)$, al siguiente límite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,\, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

siempre que estos límites existan.

Podemos observar que estas definiciones son análogas a la definición de derivada usual para funciones de una sola variable, donde sólo se incrementa una de las dos variables. Para ser más exactos deberíamos decir que estas son la derivadas parciales de *primer orden* pues más adelante veremos que se pueden definir derivadas parciales de orden superior.

Ejemplo: Consideremos la función $f(x, y) = x^2 y$ y el punto $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + h,\, 2) - f(1, 2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\,(1 + h)^2 - 2}{h} = \lim_{h\to 0} 2(h + 2) = 4.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,\, 2 + h) - f(1, 2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2 + h) - 2}{h} = 1.$$

Como suele ser usual la definición no es práctica, pero ésto no es problema porque podemos apreciar que *una derivación parcial es equivalente a una derivación ordinaria de una función de una sola variable*, con lo que podemos aplicar todas las reglas de derivación conocidas para este tipo de funciones.

En efecto, si consideramos la función de una sola variable $g(x) = f(x, y_0)$, que se obtiene al fijar $y = y_0$ en la expresión $f(x, y)$, se tiene

$$g'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,\, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Por tanto, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0), \text{ donde } g(x) = f(x, y_0).}$

Análogamente, si consideramos la función de una sola variable $\varphi(y) = f(x_0, y)$, que se obtiene al fijar $x = x_0$ en la expresión $f(x, y)$, se tiene

$$\varphi'(y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(y_0+h) - \varphi(y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,\, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Por tanto, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \varphi'(y_0), \text{ donde } \varphi(x) = f(x_0, y).}$

Poniendo en práctica lo anterior en el ejemplo visto, podríamos obtener las derivadas parciales así:

Como $f(x, y) = x^2 y$ y el punto es $(x_0, y_0) = (1, 2)$, entonces $g(x) = f(x, 2) = 2x^2$. Sabemos que $g'(x) = 4x$ y, por tanto, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = g'(1) = 4$. Análogamente, $\varphi(y) = f(1, y) = y$ y, así, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = \varphi'(2) = 1$.

En la práctica, en la mayoría de los casos, suele ser más cómodo (no siempre) calcular, siguiendo la idea anterior, las derivadas parciales en un punto genérico (x, y) y despues sustituir (x, y) por (x_0, y_0), con la ventaja adicional de que así se tienen calculadas las derivadas parciales en todos los puntos del dominio (o parte de él).

Si nos piden $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)$ siendo $f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y + 1$, posiblemente lo más cómodo sea calcular

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3 - 2xy^2 + 6x^2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x^2y + 2x^3$$

y después sustituir (x, y) por $(0, 1)$ para obtener $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 0$. En el cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ lo que hemos hecho es fijar una de las variables (la que no se deriva), como si fuese constante, y derivar respecto de la otra variable la función de una sola variable resultante.

Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/3, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\pi/3, 0)$, donde $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen}(3x + y^3)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \operatorname{sen}(3x + y^3) + x^2 \cos(3x + y^3)\, 3 = 2x \operatorname{sen}(3x + y^3) + 3x^2 \cos(3x + y^3),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 \cos(3x + y^3)\, 3y^2 = 3x^2y^2 \cos(3x + y^3).$$

En particular $\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/3, 0) = -\frac{\pi^2}{3}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\pi/3, 0) = 0$.

No siempre es conveniente el cálculo de las derivadas parciales en un punto genérico para después sustituir por el punto. Veamos tres casos con problemáticas distintas.

Calcular, si existen, las derivadas parciales en el punto $(0,0)$ de una función definida a trozos como $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$. En este caso, lo mejor es calcular esas derivadas parciales usando las definiciones ya que la función actúa de una forma distinta en el punto $(0,0)$ a como lo hace en el resto de los puntos y el valor de f en $(0,0)$ interviene en la definición de cada derivada parcial. En efecto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}, \frac{0}{h} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} = \infty.$$

En consecuencia $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ no existe.

Cuando se estudia una derivada parcial en un punto (x_0, y_0) es suficiente con ver cómo se comporta la función en un pequeño disco centrado en ese punto (çerca de ese punto"). En la definición de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ sólo intervienen puntos de la forma $(x_0 + h, y_0)$ con h muy pequeño; estos son los puntos de un pequeño trozo de recta paralela al eje de abcisas que pasa por el punto $(x_0 + h, y_0)$, de forma que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ mide en cierto sentido el comportamiento de f en este trozo de recta; análogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ mide el comportamiento de f en un pequeño trozo de recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto (x_0, y_0) .

Así por ejemplo, si queremos estudiar las derivadas parciales de f en un punto genérico $(x,y) \neq (0,0)$ podemos olvidarnos del valor de f en $(0,0)$ pues este valor no influye en las definiciones de las derivadas parciales en puntos distintos del $(0,0)$. Por tanto, para ésto podemos considerar que f es de la forma $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ y, por tanto, para calcular las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ seguimos el método usual de fijar una de las variables y derivar la función que resulta en la otra variable:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{0 - y\,(2\,x)}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+y^2) - y\,(2\,y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Calcular, si existen, las derivadas parciales en el punto $(0,0)$ de la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Aquí podríamos cometer la ligereza de seguir el método expuesto de fijar una variable para calcular en un punto genérico las derivadas parciales, por ejemplo, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

y, a la hora de evaluar en el punto $(x, y) = (0, 0)$ nos daríamos cuenta que aparece $\frac{0}{0}$, lo que no tiene sentido. Esto indica que puede haber problemas con las derivadas en el $(0, 0)$ tal como sucede, en el caso de una sola variable, con las funciones $f(x) = x$, $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $x = 0$. De hecho, obsérvese la analogía existente entre la gráfica de $f(x) = x$ y de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (las dos hacen un pico en el origen de coordenadas). Esto nos dice que, para salir de dudas, debemos usar las definiciones. Dada la simetría de la función en sus dos variables, es suficiente con estudiar $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$. En efecto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} \overset{\text{ojo !}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{h}{h}$$

y sabemos que tal límite no existe (el límite por la derecha es 1 y por la izquierda es -1).

En resumen, podemos concluir que sólo nos vemos obligados a utilizar las definiciones en ciertos casos y puntos conflictivos, como cuando la función viene definida a trozos o aparecen raíces cuadradas o valores absolutos, pero, en general, se suelen usar las reglas de derivación para funciones de una sola variable.

Derivadas parciales de funciones de tres variables.

Lo visto sobre derivadas parciales para funciones de dos variables se generaliza a *tres o mas variables.* Las definiciones y la forma de llevar el cálculo a la práctica serían análogas. Por ejemplo, si f es función de tres variables : x, y, z

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h,\, y_0,\, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}.$$

Las definiciones de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0$ son análogas (escribirlas). En la práctica, si nos dan una función de tres variables como $f(x, y, z) = xy + z^2 - xz + 1$ las derivadas parciales en cualquier punto (x, y, z) se calcularían así:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y - z, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z - x.$$

Derivadas direccionales:

Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ dan información sobre cómo varía la función f cerca del punto (x_0, y_0) en las direcciones de los ejes de coordenadas; dicho de otra forma, en las direcciones dadas por los vectores unitarios $\vec{v} = (1, 0) = \vec{i}$ y $\vec{v} = (0, 1) = \vec{j}$ respectivamente. Pero resulta de gran interés estudiar la variación de f cerca del punto (x_0, y_0) en cualquier otra dirección dada por un vector unitario $\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$ (que $\vec{v}$ sea unitario significa que su módulo $\vec{v} = \vec{v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$) (hacer un dibujo).

Observemos que la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es la dada en forma vectorial por $(x, y) = (x_0, y_0) + h\,(v_1, v_2)$, siendo h un parámetro real; es decir, los puntos de esa recta son de la forma $(x_0 + h\,v_1, y_0 + h\,v_2)$. Por otra parte, al ser $\vec{v}$ un vector unitario, la distancia entre el punto $(x, y) = (x_0 + h\,v_1, y_0 +$

$h\,v_2)$ y el punto (x_0, y_0) es exactamente h. Esto nos lleva a estudiar el límite cuando $h \to 0$ de los cocientes incrementales

$$\frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h},$$

que es justamente el concepto de derivada direccional.

Sean $f\colon D \to \mathbb{R}$, un punto (x_0, y_0) interior al dominio $D \subset \mathbb{R}2$ y un vector unitario $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Se define la derivada direccional de la función f en el punto (x_0, y_0) en la dirección del vector $\vec{v}$, y se suele representar por $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ o por $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$, como

$$D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hv_1, y_0 + hv_2) - f(x_0, y_0)}{h},$$

siempre que este límite exista.

La derivada direccional $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ da información sobre la variación de la función f cerca del punto (x_0, y_0) en la dirección y sentido de $\vec{v}$. Realmente los cocientes que aparecen en la definición de la derivada direccional se pueden interpretar como una *tasa*; una tasa es una relación entre dos magnitudes (tasa de natalidad, de mortalidad, de transferencia, ...) y en este caso tales cocientes suponen una relación entre la variación de la función y la distancia entre los puntos donde se evalúa la función. El límite siempre se interpreta como algo instantáneo. Así pues, podemos considerar $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ como la *tasa (instantánea) de crecimiento o decrecimiento de la función.*

Comparando las definiciones dadas podemos apreciar que las derivadas parciales son casos particulares de derivadas direccionales; concretamente: $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = D_{\overrightarrow{(1,0)}} f(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y}$

Ejemplo: Veamos que existe y calculemos la derivada de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$ en el punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$ en la dirección dada por el vector unitario $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Según la definición,

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(1,1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1 + \frac{1}{2}h, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h) - f(1,1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}h)^2 - (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}h)^2 - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (-\frac{1}{2}h + (1 - \sqrt{3})) = 1 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

En el caso anterior hemos podido llevar a cabo la definición gracias a la simplicidad de la expresión de f, pero, como suele suceder, la definición es, en general, poco útil en la práctica. Más adelante, en la próxima sección, veremos un método muy práctico para calcular cualquier derivada direccional en términos de las derivadas parciales. Este método sólo se podrá llevar a cabo cuando la función f verifica una importantísima condición en el punto (x_0, y_0) llamada *diferenciabilidad.*

Si el vector $\vec{v}$ no es unitario se puede hablar de derivada en la dirección de $\vec{v}$ refiriéndose a $D_{\frac{\vec{v}}{\vec{v}}} f(x_0, y_0)$.

Una forma muy cómoda e ilustrativa de dar un vector unitario $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es mediante un ángulo $\in [0, 2\pi)$. Obsérvese que $\boxed{\vec{v} = (\cos, \text{sen})}$, donde es el ángulo comprendido entre el eje positivo de abcisas y el vector $\vec{v}$ (en ese sentido) ya que, al ser $\vec{v}$ unitario, la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma mide 1. Cuando el vector se expresa como $\vec{v} = (\cos, \text{sen})$ se dice que $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ es la derivada de f en el punto (x_0, y_0) *en la dirección dada por el ángulo* . Así la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ correspondería al ángulo $= 0$ y la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ correspondería al ángulo $= \pi/2$.

Sabemos que para una función de una sola variable f sucede que si la derivada $f'(x_0) > 0$ la función es creciente en un entorno del punto x_0 (cerca de x_0) mientras que si $f'(x_0) < 0$, f decrece cerca de x_0. Pues bien, con las derivadas direccionales, y en particular con las derivadas parciales, sucede algo parecido. Concretamente:

Si $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) > 0$ la función f *crece alrededor (cerca) del punto* (x_0, y_0) *en la dirección y sentido del vector* $\vec{v}$.

Si $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) < 0$ la función f *decrece alrededor del punto* (x_0, y_0) *en la dirección y sentido del vector* $\vec{v}$.

El término .alrededor”se refiere a lo que sucede en un cierto disco centrado en ese punto.

Observemos que $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) > 0$ implica que para valores de h pequeños se tiene $\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{h} > 0$, siendo $(x, y) = (x_0 + hv_1, y_0 + hv_2)$ los puntos de la recta que pasa por (x_0, y_0) en la dirección de $\vec{v} = (v_1, v_2)$. Entonces, si $h > 0$ es $f(x, y) > f(x_0, y_0)$, mientras que si $h < 0$ es $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ (hacer un dibujo). Análogamente se razonaría en el caso $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) < 0$.

Así, si $z = f(x, y)$ representa la superficie de una montaña y un montañero está situado en el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, el que la derivada $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ sea negativa indicaría que en la dirección (y sentido) de brújula dada por el vector $\vec{v}$ el montañero descendería (se trata de algo local, por lo que después podría ascender).

Interpretación geométrica de las derivadas parciales y direcccionales.

Sabemos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ se pueden considerar como derivadas de funciones de una sola variable. Para una función de una sola variable g la derivada en un punto $g'(x_0)$ coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica $y = g(x)$ en el punto $(x_0, g(x_0))$.

Hemos visto que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0)$ donde $g(x) = f(x, y_0)$. Si la gráfica de f, que es la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ la cortamos con el plano vertical (paralelo al plano xz) de ecuación $y = y_0$, obtenemos una curva en el espacio $\mathbb{R}3$ contenida en la superficie y que pasa por el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Esta curva proyectada en el plano xz nos da la gráfica de la función de una sola variable g.

Por tanto, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ representa geométricamente la pendiente de la tangente a la curva en el espacio, de ecuación $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0, \end{cases}$ en el punto P. Se suele decir simplemente que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ es la *pendiente de la superficie* $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *en la* *dirección del eje x.*

De forma análoga, teniendo en cuenta que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'(y_0)$ donde $h(y) = f(x_0, y)$, cortamos la superficie $z = f(x, y)$ con el plano vertical (paralelo al plano yz) de ecuación $x = x_0$, obtenemos una curva en el espacio $\mathbb{R}3$ que proyectada en el plano yz nos da la gráfica de la función h de una sola variable y así $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ representa geométricamente la pendiente de la tangente a esa curva en el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Diremos entonces que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ es la *pendiente de la superficie* $z = f(x, y)$ en el punto P *en la dirección del eje* y.

Por último, se puede *interpretar geométricamente* una derivada direccional de la misma forma que con las derivadas parciales. Concretamente, $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) \equiv \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ representa la pendiente de la recta tangente a la curva que se obtiene al intersecar la superficie $z = f(x, y)$ con el plano vertical que pasa por el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y es paralelo al vector $\vec{v}$ (es decir, el que contiene a la recta de ecuación $(x, y) = (x_0, y_0) + h(v_1, v_2)$). Diremos simplemente que $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ es *la pendiente de la superficie en el punto P en la dirección de $\vec{v}$*. Esto es coherente con lo expuesto anteriormente. Si por ejemplo $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) < 0$ la pendiente es negativa.

Derivadas parciales de orden superior: Derivadas parciales de orden superior

Con las funciones de una sola variable f se suelen utilizar derivadas de orden superior como son las derivadas de segundo orden f'', tercer orden f''', y, en general, orden n, $f^{n)}$. Concretamente, $f^{n)} = (f^{n-1)})'$. Lo mismo sucede con las funciones de dos o mas variables.

Cuando las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existen en cada punto (x, y) de un dominio D, entonces podemos definir las *funciones derivadas parciales* $\frac{\partial f}{\partial x}\colon D \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y}\colon D \to \mathbb{R}$. Así, por ejemplo, si $f\colon \mathbb{R}2 \to \mathbb{R}$ viene dada por $f(x, y) = x^2 y$, existen las funciones derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}\colon \mathbb{R}2 \to \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}\colon \mathbb{R}2 \to \mathbb{R},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2.$$

En este caso, podríamos plantearnos si estas funciones también poseen derivadas parciales en un punto $(x_0, y_0) \in D$ o, mejor aún, en cada punto $(x, y) \in D$. Para cada una de ellas tendríamos dos derivadas parciales con lo que finalmente aparecerían cuatro. Las derivadas parciales de las funciones $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ reciben el nombre de *derivadas parciales de segundo orden*. Cada una de éstas nos la podemos encontrar con dos notaciones, según la notación que usemos para las primeras derivadas. En cada caso de los que describimos abajo aparecen cuatro igualdades; las dos del centro indican las operaciones que se realizan, con notaciones distintas, y las dos de los extremos indican las notaciones abreviadas que se usan (aunque la notación no es totalmente estándar). Las ordenamos así:

Derivar dos veces respecto de x: $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = (f_x)_x = f_{xx}}$

Derivar dos veces respecto de y: $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = (f_y)_y = f_{yy}}$

Derivar primero respecto de x y luego respecto de y: $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = (f_x)_y = f_{xy}}$

Derivar primero respecto de y y luego respecto de x: $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = (f_y)_x = f_{yx}}$

Las dos últimas derivadas de segundo orden se llaman *derivadas parciales cruzadas* (o *mixtas.*) En algunos sitios se les nota al revés de lo que hemos expuesto aquí pero eso no será problema en la mayoría de los casos pues veremos que suelen coincidir las dos derivadas cruzadas.

Se podrían ahora derivar las cuatro derivadas de segundo orden para obtener así ocho derivadas de tercer orden y así sucesivamente. De todas formas las derivadas de segundo orden son las que más se usan en las aplicaciones entre las derivadas de orden superior.

Se exponen a continuación tres ejemplos para ilustrar el cálculo de estas derivadas y para comprobar un hecho, muy general, que posteriormente se comenta.

$f(x,y) = 5x^2 - 2xy + 3y^3$

$f(x,y) = x^2y^2 - 3xy + 2x^2 + 1$

$f(x,y) = x^2ye^y$ Después de estos dos ejemplos se aprecia que las derivadas cruzadas han coincidido en todos los ejemplos. Esto no los asegura el siguiente teorema, del que se conocen distintas versiones.

[Teorema de Schwartz] Si f es una función de dos variables x, y tal que las derivadas cruzadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ existen en el dominio D (basta con que existan en un disco abierto centrado en el punto (x_0, y_0)) y son continuas en (x_0, y_0) entonces,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0).$$

En los ejemplos anteriores las derivadas cruzadas son continuas en todo el plano $\mathbb{R}2$; de ahí que hayan coincido en todo punto del plano.

Hay muy pocos casos donde no sea aplicable el resultado anterior. Uno típico es el siguiente: Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen}(\frac{x}{y}) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$. En este caso $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. (No se comprueba; sólo se da como información).

Acabamos esta sección comentando muchas ecuaciones de la Física vienen dadas en términos de derivadas parciales de segundo orden. Por ejemplo, *la ecuación del calor*:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = C^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.}$$

Aquí $T(x,t)$ representa la temperatura en el punto x de una barra aislada en el tiempo t. La constante C es una constante que depende del material del que está hecho la barra. Puede comprobarse que la función $T(x,t) =^{-t} \cos(\frac{x}{C})$ satisface la ecuación.

Otra ecuación muy importante es *la ecuación de Laplace*:

$$\boxed{\triangle f = 0, \quad \text{donde} \quad \triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

es el llamado *laplaciano* de la función f. Las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace, es decir, aquellas cuyo laplaciano se anula, son llamadas *funciones armónicas.* En las relaciones de ejercicios aparecerán algunas de éstas ecuaciones y se darán ejemplos de funciones que satisfacen tales ecuaciones, para que así el alumno practique y se familiarice con las derivadas de segundo orden.

1.5. Diferenciabilidad y planos tangentes

Diferenciabilidad y planos tangentes

Sabemos de la importancia que tienen las derivadas para funciones de una variable; sirven para comprobar si en un intervalo una función es creciente o decreciente, convexa o cóncava, son importantísimas en el estudio y cálculo de máximos y mínimos, sirven para dar aproximaciones de la función, ... Uno de los objetivos principales del Cálculo es obtener información de una función a partir de su función derivada.

Para funciones de dos o más variables se necesita un concepto que realice el mismo trabajo que la derivada usual para funciones de una variable. Podríamos pensar que los sustitutos van a ser *las derivadas parciales* o, más generalmente, *las derivadas direccionales.* Pero, desgraciadamente, no es así. Para hacernos una idea, podríamos recordar una importante propiedad que tienen las derivadas: Sabemos que *si f es derivable en un punto x_0 entonces es continua en ese punto.* Pues bien, esta propiedad no se verifica con las funciones de varias variables.

A continuación exponemos un ejemplo dee una función que posee derivadas parciales, es más, derivadas derivadas según todas las direcciones, en el punto $(0,0)$ y, sin embargo, no es continua en ese punto.

Ejemplo: Consideramos la función $\boxed{f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}}$

Existen todas las derivadas direccionales en el punto $(0,0)$. Concretamente, si $\vec{v} = (a,b)$, se tiene, por definición, que $\mathrm{D}_{\vec{v}}f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{a^2b}{h^2a^4+b^2}$,por lo que si $b \neq 0$ se tiene $D_{\vec{v}}f(0,0) = \frac{a^2}{b}$ y si $b=0$, es decir, $\vec{v} = (1,0)$, se tiene $D_{\vec{v}}f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

Sin embargo, f no es continua en $(0,0)$ pues el límite en $(0,0)$ a través de la parábola $y = x^2$ es $\frac{1}{2}$, con lo que de existir el límite sería $\frac{1}{2}$, pero el valor de f en ese punto es 0 (se puede ver que no existe el límite en $(0,0)$ tomando parábolas del tipo $y = mx^2$ y viendo que depende de m o bien tomando la recta $y = 0$, a través de la cuál el límite es 0).

Por tanto, *la existencia de todas las derivadas direccionales en un punto no garantiza la continuidad en ese punto.*

La existencia de $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$ implica que la restricción de f a la recta que pasa por (x_0, y_0) en la dirección de $\vec{v}$ es continua en (x_0, y_0).

El ejemplo anterior nos indica que se necesita un concepto más fuerte, que venga a sustituir en el caso de funciones de varias variables al concepto de derivada usual, y que implique la continuidad y la existencia de todas las derivadas direccionales. Este es el concepto de *diferenciabilidad*.

El concepto de diferenciabilidad en un punto (x_0, y_0) para una función de dos variables f está estrechamente relacionado con la existencia de un *plano tangente* a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, de la misma forma que sucede con una función de una sola variable f, para la que la existencia de la derivada $f'(x_0)$ viene a ser equivalente a la existencia de una recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$, siendo además $f'(x_0)$ el valor de la pendiente de dicha recta tangente. Tal recta tangente es la recta que mejor aproxima a la gráfica de la función cerca del (en un entorno del) punto $(x_0, f(x_0))$.

Para llegar a la definición de diferenciabilidad se necesita volver a revisar la derivabilidad de una función de una sola varuiable. Si I es un intervalo en $\mathbb{R}$ y $f\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ es una función de una variable y x_0 es un punto interior del intervalo I, se dice que f es *derivable* en el punto x_0 cuando existe el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

límite que se denota por $f'(x_0)$ y que se llama *derivada* de f en x_0.

Una definición como la anterior no tendría sentido generalizarla al caso de funciones de dos o mas variables ya que no tendría sentido dividir por elementos de $\mathbb{R}2(\mathbb{R}n)$. Lo que vamos a hacer es reescribir la definición anterior de una forma equivalente en la que va a aparecer la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$. En efecto,

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\iff \lim_{x\to x_0} \Big(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\Big) = 0 \\ &\iff \boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big)}{x - x_0} = 0}. \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Sabemos que la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P = (x_0, f(x_0))$ es:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}. \tag{1.5.3}$$

Por tanto, lo que aparece en el numerador de la última expresión de (1.5.2) es la diferencia entre el valor de la función $f(x)$ y el valor de la ordenada del punto de la recta tangente cuya abcisa es x. La condición anterior no es generalizable aún, tal como está escrita, al caso de dos variables, pero observemos que para una función cualquiera g se tiene $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$(lo mismo sucede con funciones de dos variables) por lo que la condición (1.5.2) se puede escribir de manera equivalente así

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \overbrace{(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}^{\text{recta tangente}}}{\underbrace{x - x_0}_{\text{distancia entre } x \text{ y } x_0}} = 0.} \tag{1.5.4}$$

Observemos que el numerador de (1.5.4) sería la distancia entre un punto de la gráfica de f y el correspondinte punto de la recta tangente. Hay casos en que la gráfica de f está por ."encima"de la recta tangente y otros en que está por debajo.

Sea $h = x - x_0$, es decir, $x = x_0 + h$, y sea $R(h) = f(x_0 + h) - \big(f(x_0) + f'(x_0)\,h\big)$. El valor $R(h)$ se puede considerar como un residuo, pues es la diferencia entre el valor $f(x)$ y el dado por la recta tangente. Lo que tenemos es

$$\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0, \quad \text{o equivalentemente} \quad \lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0,$$

lo cuál implica que el residuo $R(h)$ tiende a 0 cuando h tiende a 0 (pues $R(h) = \frac{R(h)}{h}\,h$); pero dice más, $R(h)$ tiende a 0 más rápidamente que h. Intuitivamente podemos pensar que la única forma de que se de esta situación es cuando la recta tangente se "*embarra*çon la curva en los alrededores de $P = (x_0, f(x_0))$. Así, la curva es "*suave*."en P, de forma que alrededor de P la curva se puede aproximar por la recta tangente y de esta manera obtenemos una *aproximación lineal* de la función alrededor del punto x_0. (La condición $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$ y no $\lim_{h\to 0} R(h) = 0$ es la que da realmente da el carácter de tangencia a la recta). Tal recta tangente es *la recta que mejor aproxima a la curva* $y = f(x)$ (gráfica de f) *en un entorno del punto* (x_0, y_0).

Tenemos ahora una función de dos variables $f(x, y)$. Su gráfica no es una curva sino una superficie en el espacio $\mathbb{R}3$, de ecuación $z = f(x, y)$. Si (x_0, y_0) es un punto del dominio de la función, el correspondiente punto de la gráfica es $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Cómo podemos imaginarnos un plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto P? Por el punto P pasan infinitas curvas contenidas en la superficie. Suponiendo que cada una de estas curvas posee una recta tangente en P, parece lógico que el plano tangente en P sea un plano que pase por P y que contenga a todas estas rectas tangentes. No podemos asegurar que exista pero, de existir, se puede comprobar (véanse los apuntes del Curso 2002-03) que tal plano tangente sería el dado por la ecuación:

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}. \tag{1.5.5}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.5.3) de la recta tangente, parece lógico que ésta sea la ecuación del plano tangente.

La condición (1.5.4) tiene entonces una clarísima adaptación al caso de dos variables cambiando la recta tangente por el plano tangente y la distancia entre x y x_0 por la distancia entre (x, y) y (x_0, y_0). Es decir, la forma de generalizar (1.5.4) a funciones de dos variables sería

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\left| f(x,y) - \overbrace{\left(f(x_0,y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right)}^{\text{plano tangente}} \right|}{\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}_{\text{distancia entre } (x,y) \text{ y } (x_0,y_0)}} = 0.} \tag{1.5.6}$$

la condición anterior nos da justamente la condición de diferenciabilidad.

[Diferenciabilidad en un punto] Sean $D \subset \mathbb{R}2$, (x_0, y_0) un punto de (interior a) D y $f : D \to \mathbb{R}$ una función de las variables x, y, tal que existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Se dice que f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) cuando se verifica la condición (1.5.6).

Obsérvese que para que una función de dos variables f sea diferenciable en (x_0, y_0), lo primero que debe suceder es que existan las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Después, debe verificarse la condición (1.5.6). Por tanto, si desde un principio sabemos que no existe alguna de las derivadas parciales, podemos afirmar que f no es diferenciable.

En un principio habíamos comentado que el plano tangente en el punto de la gráfica $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ no tenía porqué existir, entendiendo por éste el plano que contiene todas las rectas tangentes (existen estas tangentes?) a las curvas de la superficie en ese punto P. Lo anterior es simplemente una idea intuitiva pero no es una definición formal. Por otra parte, se puede probar que cuando f es diferenciable en (x_0, y_0) el plano dado por (1.5.5) responde a la idea geométrica anterior. Acontece que el concepto de tangencia que funciona en las matemáticas es el mismo que el concepto de diferenciabilidad. Todo ésto se presta a que demos la siguiente definición:

[Planos tangentes] Cuando f es diferenciable en el punto (x_0, y_0), y sólamente en este caso, diremos que el plano de ecuación $\boxed{z = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}$ es el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Tal plano tangente es *el plano que mejor aproxima a la superficie* $z = f(x, y)$ (gráfica de f) *cerca del (en un entorno del) punto* P.

Vamos a examinar ahora cuidadosamente la definición de diferenciabilidad con idea de poder manejarla mejor a la hora de aplicarla a un caso concreto a bien en una prueba. La definición de diferenciabilidad nos dice que cerca del punto (x_0, y_0) podemos aproximar la función por el plano tangente (la función cuya gráfica es el plano tangente) de la siguiente forma:

$$f(x,y) = \underbrace{\left(f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right)}_{\text{plano tangente}} + \underbrace{R(x,y)}_{\textit{residuo}}, \qquad (1.5.7)$$

donde el residuo (o resto) $R(x,y)$ verifica la condición dada en la definición de diferenciabilidad

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0,$$

condición que es equivalente a la siguiente:

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0} \qquad (1.5.8)$$

(pues en el denominador da igual poner valor absoluto). Esta condición de diferenciabilidad implica

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} R(x,y) = 0} \qquad (1.5.9)$$

pero es una condición más fuerte que la anterior, pues nos dice que el residuo tiende a 0 más rápidamente que la distancia $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ cuando $(x,y)\to(x_0,y_0)$. Para la diferenciabilidad no basta con que el residuo tienda a 0. Es la condición (1.5.8) la que da el carácter de tangencia al plano.

Pongamos en práctica lo anterior, con un simple ejemplo. Supongamos que queremos estudiar la diferenciabilidad en el punto $(0,0)$ de la función polinómica $\boxed{f(x,y)=xy^2.}$

Lo primero que hay que hacer es comprobar la existencia (y de paso el cálculo) de las derivadas parciales en ese punto. Obtenemos de manera casi inmediata que existen y, además,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Por tanto, el resto es en este caso:

$$R(x,y) = f(x,y) - \left(f(0,0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \tfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y\right) = xy^2$$

Por tanto, f será diferenciable en $(0,0)$ si sucede que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Para comprobar que ésto se verifica y dado que se trata de un límite indeterminado del tipo $\frac{0}{0}$ comprobamos ésto haciendo uso del *método de las acotaciones* (inicialmente podríamos comprobar que los límites direccionales existen y son nulos). Se tiene: $|$ xy$^2 \frac{}{\sqrt{x^2+y^2}-0\Big| = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ y^2 \le y^2}$y, como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0$, entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

Obsérvese que en el estudio de la diferenciabilidad de una simple función polinómica nos ha surgido un límite indeterminado.

Podemos aprovechar el ejemplo anterior para ilustar la determinación de un plano tangente. Al ser f diferenciable en el punto $(0,0)$ existe el *plano tangente a la superficie* $z = xy^2$ en el punto $(0,0,0)$. Al ser $f(0,0)$ y las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ nulas, la ecuación de ese plano tangente sería $z = 0$; es decir, en este caso el plano tangente es horizontal.

En la próxima sección veremos que, en muchas ocasiones, especialmente cuando se quiere llevar a la práctica la definición de diferenciabilidad en un punto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$, resulta mas manejable escribir las condiciones anteriores en términos de incrementos, al estilo de la definiciones que conocemos de derivadas de funciones de una sola variable y de derivadas parciales.

Como se ha podido comprobar, y ésto es habitual, el uso de la definición es muy molesto por lo que sería deseable tener una forma más comoda y rápida de reconocer cuándo una función es diferenciable en un punto. Por suerte, existe un importante resultado que nos permite obtener la diferenciabilidad en muchos casos, aunque no en todos (se trata de una condición suficiente pero no necesaria) de una forma muy simple. Este resultado es el siguiente:

Si las funciones derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ están definidas en el dominio de f, o bien en un disco abierto centrado en el punto (x_0, y_0), y, además, son continuas en ese punto, entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

La definición de diferenciabilidad en el punto (x_0, y_0) lleva implícita la existencia de las derivadas parciales en ese punto. En el resultado anterior se exige que las derivadas parciales existan también en todos los puntos de un disco centrado en (x_0, y_0) y, además, las correspondientes funciones derivadas parciales sean continuas en el punto (x_0, y_0).

Se puede apreciar que el resultado anterior es muy manejable. Veamos el ejemplo de una función polinómica como $\boxed{f(x,y) = 3 + x^2y^2 + 3xy^3 - 2y^4.}$ En este caso, las funciones derivadas parciales están definidas en todo el plano pues

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 + 3y^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2y + 9xy^2 - 8y^3.$$

Estas funciones derivadas parciales son también polinómicas y, por tanto, son continuas en todo el plano. En particular, en el punto (x_0, y_0). Por tanto, el resultado anterior nos dice que f es diferenciable en (x_0, y_0).

El razonamiento anterior se puede llevar a cabo con cualquier función polinómica y, de esta forma, se obtiene el siguiente resultado:

Todas las funciones polinómicas son diferenciables en cada punto del plano $\mathbb{R}2$.

El resultado del teorema 1.5 se aplica a muchísimos funciones que no son polinómicas. Por ejemplo, el mismo razonamiento seguido para las funciones polinómicas nos dice

Si una función tiene funciones derivadas parciales definidas y continuas en todo su dominio, entonces esta función es diferenciable en cada punto de su dominio.

Ejemplo: Comprobamos que la función, no polinómica, $\boxed{f(x,y = x \operatorname{sen}(x-y^2)}$ es diferenciable en cada punto del plano calculando sus derivadas parciales y viendo que son continuas en todo el plano.

Ejemplo: Obtenemos la ecuación del *plano tangente* al paraboloide $\boxed{z = x^2 + y^2}$ en el punto $P = (1,2,5)$. (hacer un dibujo)

Lo primero es comprobar que el punto P está en la superficie. El paraboloide es la gráfica de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$. Aquí $(x_0, y_0) = (1,2)$ y $f(x_0,y_0) = 5$. Lo segundo es comprobar que el plano tangente pedido existe. Al ser f polinómica, es diferenciable en el punto $(1,2)$ y, por tanto, existe tal plano tangente.

Las derivadas parciales en el punto $(1,2)$ son $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4$. Llevando todos estos valores a la expresión (1.5.5), que da la ecuación del plano tangente, obtenemos que $z = 2x + 4y - 5$ es la ecuación del plano pedido.

Se puede poner un ejemplo algo más complicado sobre planos tangentes, como el siguiente:

Ejemplo: Obtener *el plano tangente* al cono de ecuación $\boxed{z = \sqrt{x^2+y^2}}$ en el punto $P = (1,2,\sqrt{5})$. (hacer un dibujo)

El cono dado es la gráfica de la función $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Aunque el dominio de f es todo el plano, resulta que las funciones derivadas parciales: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ sólo están definidas y son continuas en los puntos del plano distintos de $(0,0)$, pero es claro que existen discos centrados en el punto $(1,2)$ donde tales derivadas parciales existen (y son continuas en $(1,2)$), por lo que f es diferenciable en $(1,2)$. Por tanto, existe el plano tangente pedido y su ecuación es: $z = \frac{1}{\sqrt{5}}\, x + \frac{2}{\sqrt{5}}\, y$.

Más adelante veremos otros ejemplos. Pero hay que advertir que no siempre se puede aplicar el resultado del teorema 1.5. Un caso típico donde, en general, no se puede aplicar (y en caso de poder aplicarse no resultaría cómodo) es aquél donde nos piden la diferenciabilidad en el origen de una función definida a trozos como $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ En este caso, lo mejor es usar la definición de diferenciabilidad u otro método que más adelante veremos.

Hasta ahora, sólo nos hemos preocupado de introducir la definición de diferenciabilidad y de dar un resultado práctico para obtenerla, pero aún no hemos visto las ventajas que tiene una función que sea diferenciable en un punto. Muchas de estas ventajas se irán viendo en las próximas secciones, donde la diferenciabilidad será una condición imprescindible, pero ahora podemos ver lo que anunciamos al comienzo de esta sección cuando buscábamos un concepto que garantizase la continuidad y la existencia de todas las derivadas direccionales.

Si f es diferenciable en el punto (x_0,y_0), se verifica lo siguiente:

1) f es continua en (x_0,y_0)

2) Existen todas las derivadas direccionales de f en el punto (x_0, y_0) y, además, si $\vec{v} = (v_1, v_2)$, la derivada en la dirección de $\vec{v}$ se puede calcular así:

$$D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) \; = \; \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, v_2.$$

Así pues, la diferenciabilidad es un concepto más fuerte que la existencia de derivadas direccionales y garantiza la continuidad.

La prueba del teorema anterior no es complicada y es muy ilustrativa pues en ella se puede apreciar claramente dónde se aplica la diferenciabilidad para obtener los dos resultados descritos. Como siempre, podemos optar por no explicarla en un curso de este nivel pero, en mi opinión, se podría dar una idea que sirviera de reafirmamiento del concepto de diferenciabilidad. Al menos, no hay ningún problema en probar la primera parte del teorema.

La obtención de la continuidad es casi trivial pues al escribir la función en términos del plano tangente y del residuo

$$f(x, y) = \underbrace{\Big(f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \Big)}_{\text{plano tangente}} + \underbrace{R(x, y)}_{\textit{residuo}},$$

observamos que el segundo y tercer sumando, donde aparecen las derivadas parciales, tienen límites igual a 0 cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ y, al ser f diferenciable en (x_0, y_0) el residuo también tiende a 0 ($\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} R(x, y) \; = \; 0$) por lo que se concluye que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ y eso significa que f es continua en (x_0, y_0).

Los resultados del teorema anterior se pueden leer así: Si una función f no es continua en un punto (x_0, y_0), entonces no es diferenciable en ese punto. Si no existe alguna de las derivadas direccionales $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$, entonces f no es diferenciable en (x_0, y_0).

La fórmula

$$\boxed{D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) \; = \; \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, v_2} \tag{1.5.10}$$

obtenida para las derivadas direccionales cuando f es diferenciable en (x_0, y_0), es muy práctica, pues basta con conocer las derivadas parciales en ese punto para conocer todas las derivadas direccionales. Hay que insistir en que tal fórmula sólo es válida cuando f es diferenciable. En la sección dedicada a los *gradientes*, usaremos esta fórmula para obtener unos importantes resultados prácticos que se usan con mucha frecuencia. A continuación exponemos varios ejemplos de aplicación de esa fórmula.

Con la definición de derivada direccional calculamos la derivada de $\boxed{f(x, y) = x^2 - y^2}$ en el punto $(1, 1)$ según el vector $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ dando el valor: $1 - \sqrt{3}$. Comprobemos ahora este resultado usando el nuevo método.

En primer lugar hay que comprobar que f es diferenciable en $(1,1)$, pero ésto sucede por ser f polinómica. El valor de las derivadas parciales en ese punto son: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -2$ Por tanto,

$$D_{\vec{v}}f(1,1) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,\frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\frac{1}{2} + (-2)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}.$$

Calculemos la derivada de la función $\boxed{f(x,y) = y\,\ln(x) + xy^2}$ en el punto $(1,2)$ según la dirección dada por el ángulo $= \frac{\pi}{3}$ (60^o).

Lo primero es comprobar que f es diferenciable en el punto $(1,2)$, para poder aplicar la fórmula (1.5.10). El dominio de la función es $D = \{(x,y \in \mathbb{R}2\colon x > 0\}$. Las funciones derivadas parciales : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \ln(x) + 2xy$, están definidas y son continuas en todo punto de D, por lo que f es diferenciable en cada punto de su dominio.

Por tanto, la función es diferenciable en el punto $(1,2)$. La derivada que se pide es la derivada según el vector $\vec{v} = (\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Por tanto, la derivada pedida es

$$D_{\vec{v}}f(1,2) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)\,\frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3+2\sqrt{3}.$$

La ecuación que describe la altura z de los puntos de una montaña es $z = 1000 - 0'01x^2 - 0'05y^2$, donde x representa la dirección Este e y la dirección Norte. Un montañero está situado en el punto P de la montaña de coordenadas $(200, 100, 100)$. Vamos a analizar si el montañero asciende o desciende cuando camina en la dirección Noreste.

La dirección Noreste se corresponde con la dirección dada por el ángulo de 45^o ($\frac{\pi}{4}$ radianes). Esta dirección dirección viene dada por el vector unitario $\vec{v} = (\cos\frac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Obsérvese que es la misma dirección que la dada por el vector no unitario $\vec{v} = (1,1)$.

La superficie de la montaña es la gráfica de la función $f(x,y) = 1000 - 0'01x^2 - 0'05y^2$. El punto P de la montaña se obtiene a partir del punto $(200,100)$ del plano. Para saber si el montañero asciende o desciende cuando camina en la dirección Noreste, lo que tenemos que ver es si la derivada de esta función en el punto $(200,100)$ en la dirección dada por $\vec{v}$ es positiva o negativa. Si es positiva, asciende y, si es negativa, desciende (si es nula no tendríamos información).

Como la función es polinómica, entonces es diferenciable en el punto $(200,100)$ y, por tanto,

$$D_{\vec{v}}f(200,100) \;=\; f_x(200,100)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + f_y(200,100)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(-4+(-10)) = -\frac{14}{\sqrt{2}} \;<\; 0.$$

Por tanto, el montañero *desciende* (momentáneamente) cuando camina en la dirección Noreste.

La fórmula (1.5.10), que hemos venido aplicando en los ejemplos anteriores, no siempre es válida. Hay que insistir en que sólo se cumple cuando la función es diferenciable en el punto indicado. A continuacíon exponemos un ejemplo, donde existen todas las derivadas direccionales en el punto $(0,0)$, pero no se verifica (1.5.10). Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esta función es continua en $(0,0)$ y al calcular la *derivada direccional* en el punto $(0,0)$ en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{v} = (v_1, v_2)$ resulta $D_{\vec{v}} f(0,0) = v_1 3$. En este caso las derivadas parciales serían: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ (caso $\vec{v} = (1,0)$) y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ (caso $\vec{v} = (0,1)$). Por tanto, en general $\partial f \frac{}{\partial x(0,0)\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, v_2 = v_1 \neq v_1 3 = D_{\vec{v}} f(0,0).}$

De manera indirecta, lo anterior tiene otra importante aplicación teórica. Concretamente, podemos afirmar que la función anterior no es diferenciable en el punto $(0,0)$. Observemos que, en general, cuando la función f es diferenciable en el punto (x_0, y_0), la derivada direccional debe darnos una *expresión lineal de las componentes del vector* $\vec{v}$

$$D_{(v_1,v_2)} f(x_0, y_0) \;=\; C_1\, v_1 + C_2\, v_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

por ejemplo, una expresión como $2v_1 - 3v_2$. Por la tanto, si a la hora de calcular una derivada direccional usando la definición nos sale algo como $v_1^2 v_2$ o v_2^3, podemos afirmar con seguridad que la función no es diferenciable en el punto donde se ha calculado esta derivada, sin necesidad de usar la definición de diferenciabilidad. Esto resulta más cómodo pues en un caso así, sabiendo que tanto la continuidad como la existencia de derivadas son condiciones necesarias para la diferenciabilidad, lo usual es que intentemos ver si existen tales derivadas usando la definición. Si falla una de ellas podemos asegurar que f no es diferenciable, pero si existen todas y nos dan una expresión que no es lineal también podremos deducir que f no es diferenciable.

Observación: En el ejemplo anterior no se puede usar el resultado del teorema 1.5 para estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$..

Para acabar esta sección se comenta que lo visto para funciones de dos variables se generaliza a funciones de *tres o mas variables*. En estos casos la definición de diferenciabilidad no se puede exponer de una manera tan gráfica y una buena definición matemática (mediante aplicaciones lineales) se saldría del nivel de este curso, pero se puede comentar que los resultados de los dos teoremas fundamentales vistos aquí (teoremas 1.5 y 1.5) se generalizan de una manera natural a estos casos sin mas que añadir más funciones derivadas parciales.

1.6. Diferenciales y aproximaciones

Diferenciales y aproximaciones El concepto de diferenciabilidad, visto en la sección anterior, es útil para obtener ciertas aproximaciones. En muchas cuestiones prácticas físicos e ingenieros suelen dar aproximaciones del *incremento de una función* (diferencia entre los valores de una función en dos puntos distintos pero próximos):

$$\triangle f(x,y) = f(x+h, y+k) - f(x,y)$$

usando las derivadas parciales de f en el punto (x,y). En otras ocasiones se necesita aproximar el valor de $f(x+h, y+k)$ en términos del valor $f(x,y)$ y de las derivadas parciales de f en el punto (x,y). Todo ésto sólo se puede llevar a cabo cuando la función f es *diferenciable* en el punto (x,y), como veremos a continuación. En la expresión anterior se puede considerar a h como un incremento (positivo o negativo) de la variable x y a k como un incremento de la variable y; ambos incrementos deben ser "pequeños"(aunque lo de "pequeño.[es] un concepto indefinido y muy relativo).

Supongamos que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0). En este caso, según (1.5.7) se tiene:

$$f(x,y) = \Big(\underbrace{f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{plano tangente}}\Big) + \underbrace{R(x,y)}_{residuo},$$

donde el residuo $R(x,y)$ verifica la condición de diferenciabilidad (1.5.8) y, por tanto, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} R(x,y) = 0$.Lo anterior se puede escribir en términos de incrementos, al estilo de la definiciones que conocemos de derivadas de funciones de una sola variable y de derivadas parciales. Llamando

$$h = x - x_0 \text{ (incremento en la variable } x), \qquad k = y - y_0 \text{ (incremento en la variable } y),$$

con lo cuál, $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$, y teniendo en cuenta que $(x,y) \to (x_0,y_0) \iff (h,k) \to (0,0)$, obtenemos que f es diferenciable en el punto (x_0,y_0) cuando se verifica

$$\boxed{f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + r(h,k)} \tag{1.6.11}$$

donde el residuo (o resto) $r(h,k)$ verifica

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0} \tag{1.6.12}$$

y, por tanto, $\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} r(h,k) = 0.}$ Ahora la condición de diferenciabilidad viene dada por la expresión (1.6.12), que tiene sus ventajas al tratarse de un límite en el origen $(0,0)$.

Aplicándole lo anterior a un punto genérico (x,y) (en lugar de (x_0,y_0)), donde suponemos que f es diferenciable, tenemos la siguiente expresión para el incremento de la función:

$$\triangle f(x,y) \;=\; f(x+h,y+k) - f(x,y) \;=\; (x,y)\,h + (x,y)\,k + r(h,k),$$

donde el resto (residuo) $r(h,k)$ verifica $\lim_{(h,k)\to(0,0)} r(h,k) = 0$. Por tanto, cuando los incrementos h, k son muy pequeños podemos suponer $r(h,k) \approx 0$ (el resto es prácticamente igual a 0) y así $(x,y)\,h + (x,y)\,k$ sería *una aproximación lineal* (expresión lineal en las variables h y k)) del incremento. Es usual notar a los incrementos h y k por $\triangle x$ y $\triangle y$ respectivamente. Así tendríamos:

$$\boxed{\triangle f(x,y) \;\approx\; (x,y)\,\triangle x + (x,y)\,\triangle y} \tag{1.6.13}$$

De otra forma, podemos aproximar el valor de $f(x + \triangle x, y + \triangle y)$ usando el valor de $f(x,y)$ y las derivadas parciales de f en el punto (x,y) así:

$$\boxed{f(x + \triangle x, y + \triangle y) \;\approx\; f(x,y) + (x,y)\,\triangle x + (x,y)\,\triangle y} \tag{1.6.14}$$

Las dos fórmulas anteriores son las que se suelen usar en la práctica cuando los incrementos $\triangle x$ y $\triangle y$ son muy pequeños . Desde mi punto de vista, tienen el defecto de que no dan una estimación de los errores cometidos en las aproximaciones.

En textos dirigidos a físicos o ingenieros aparecen notaciones y terminologías, que a veces entran en conflicto con el rigor matemático, y que exponemos a continuación, por la única razón de que son muy usuales. Al final explicaremos porqué éstas no son matemáticamente coherentes.

A la *aproximación lineal del incremento* le suelen llamar *diferencial total* de la función f en (x,y) (algunos le llaman simplemente *diferencial* de f en el punto (x,y)) y se suele notar por $df(x,y)$. Así pues, como definición (o notación) tenemos:

$$\boxed{df(x,y) = (x,y)\,\triangle x + (x,y)\,\triangle y} \tag{1.6.15}$$

y de esta forma cuando los incrementos $\triangle x$ y $\triangle y$ son muy pequeños se tiene

$$\boxed{\triangle f(x,y) \;\approx\; df(x,y), \qquad f(x + \triangle x, y + \triangle y) \;\approx\; f(x,y) + df(x,y)} \tag{1.6.16}$$

La ventaja o utilidad de la diferencial total es que ésta suele ser fácil de calcular, mientras que un incremento de la función o un valor como $f(x + \triangle x, y + \triangle y)$ es muchas veces de cálculo complicado si no se tiene a mano una calculadora.

Incidiendo de nuevo en ciertas notaciones que son comunes en textos orientados a ingenieros, comentamos que a veces la diferencial total (concepto que matemáticamente no es coherente) nos la encontramos escrita así: $\boxed{df = dx + dy}$ que es una manera abreviada de escribir $df(x,y) = (x,y)\,dx + (x,y)\,dy$. La justificación que doy de ésto es la siguiente: Si consideramos la función $f(x,y) = x$, según la definición (1.6.15), tendríamos que $df(x,y) = dx = 1 \cdot \triangle x + 0 \cdot \triangle y = \triangle x$, es decir, la diferencial total de la función $f(x,y) = x$ coincide con el incremento $\triangle x$. Análogamente, si consideramos $f(x,y) = y$ se tiene $dy = \triangle y$. De esta forma la expresión de arriba es otra forma de escribir (1.6.15).

Veamos a continuación un ejemplo de aplicación de la fórmula (1.6.14) (o (1.6.16) en términos de diferenciales) para aproximar un valor.

Ejemplo: Supongamos que queremos calcular el valor de $\boxed{1{,}08^{3{,}94}}$ y no tenemos a mano una calculadora. Apreciamos que el valor 1,08 está próximo a 1 y el valor 3,94 muy próximo a 4 y el cálculo de 1^4 es trivial: $1^4 = 1$. Esto nos lleva a considerar la función $f(x,y) = x^y =^{y\ln(x)}$ y el punto $(x,y) = (1,4)$. Nos están pidiendo el valor de $f(1{,}08, 3{,}94)$ y lo que sabemos es que $f(1,4) = 1$. Si comprobamos que f es diferenciable en el punto $(1,4)$, podríamos entonces usar la diferencial total en el punto $(1,4)$ para obtener una aproximación de $f(1{,}08, 3{,}94)$ y esperamos no cometer errores grandes pues los incrementos en las variables x e y son pequeños. Concretamente

$$
\begin{aligned}
1{,}08 &= 1 + 0{,}08 = 1 + \triangle x, \qquad & \triangle x &= 0{,}08 \\
3{,}94 &= 4 - 0{,}06 = 4 + \triangle y, \qquad & \triangle y &= -0{,}06.
\end{aligned}
$$

Comprobamos que f es diferenciable en $(1,4)$ viendo que existen las funciones derivadas parciales en el dominio de f, que es $D = \{(x,y)\colon x > 0\}$, y son continuas en $(1,4)$. Además ésto nos sirve de paso para calcular estas derivadas parciales en el punto $(1,4)$, datos que a continuación necesitaremos. De esta forma, tenemos

$$
f(1{,}08, 3{,}94) = f(1 + \triangle x, 4 + \triangle y) \;\approx\; f(1,4) + df(1,4) = 1 + df(1,4).
$$

En nuestro caso,

$$
df(1,4) = (1,4)\,\triangle x + (1,4)\,\triangle y = 4 \cdot 0{,}08 + 0 \cdot (-0{,}06) = 0{,}32
$$

y, por tanto, $f(1{,}08, 3{,}98) \approx 1 + 0{,}32 = \boxed{1.32}$ (El valor obtenido en una calculadora con seis cifras decimales exactas es 1,354221.

Como siempre, todo lo visto para funciones de dos variables es generalizable a funciones de tres o más variables. Así si f es una función de las variables x, y, z, que es diferenciable en el punto (x,y,z), la diferencial total $df(x,y,z)$ sería

$$
\boxed{df(x,y,z) = (x,y.z)\,\triangle x + (x,y,z)\,\triangle y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\,\triangle z}
$$

(también la podemos escribir abreviadamente así $df = dx + dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$) y cuando los incrementos $\triangle x, \triangle y, \triangle z$ son muy pequeños tendríamos las aproximaciones

$$
\boxed{\triangle f(x,y,z) \;\approx\; df(x,y,z), \qquad f(x + \triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z) \;\approx\; f(x,y,z) + df(x,y,z).}
$$

Un ejemplo análogo al visto anteriormente al que se le puede aplicar lo anterior sería el cálculo aproximado del valor $A = \dfrac{0{,}97}{\sqrt{15{,}05 + \sqrt[3]{0{,}98}}}$. Es trivial el cálculo de $\dfrac{1}{\sqrt{15 + \sqrt[3]{1}}} = \dfrac{1}{4}$ y esto nos lleva a considerar la función de tres variables $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{y + \sqrt[3]{z}}}$ y proceder como en el caso anterior.

Veamos a continuación un ejemplo donde se necesita aproximar un incremento relacionado con una función de tres variables.
Ejemplo: Un recipiente sin tapadera (en forma de caja) tiene longitud 3 m, anchura 1 m y altura 2 m. El lateral está construído de un material que cuesta 20 euros por m^2 y el fondo de un material que cuesta 30 euros por m^2. Vamos a calcular el coste de la caja y, usando la diferencial total, vamos a estimar la variación del coste cuando la longitud y la anchura aumentan 3 cm y la altura decrece 4 cm. (Hacer un dibujo).

Para unas dimensiones genéricas x, y, z de la caja el coste de ella vendría dado por

$$C(x, y, z) = 30xy + 40(yz + xz).$$

El coste de nuestra caja sería $C(3, 1, 2) = 410$ euros. Nos piden dar una aproximación de

$$\triangle C(3, 1, 2) = C(3 + 0{,}03, 1 + 0{,}03, 2 - 0{,}04) - C(3, 1, 2)$$

usando la diferencial. La función C es polinómica y, por tanto, diferenciable en el punto $(3, 1, 2)$. Como los incrementos $\triangle x = 0,03, \triangle y = 0,03, \triangle z = -0,04$ son pequeños, comparados con las dimensiones de la caja, podemos decir

$$\begin{aligned} \triangle C(3,1,2) \approx dC(3,1,2) &= \tfrac{\partial C}{\partial x}(3,1,2)\,\triangle x + \tfrac{\partial C}{\partial y}(3,1,2)\,\triangle y + \tfrac{\partial C}{\partial z}(3,1,2)\,\triangle z \\ &= 110 \cdot 0,03 + 170 \cdot 0,03 - 160 \cdot 0,04 = 2. \end{aligned}$$

Luego aproximadamente la variación del coste es de 2 euros.
Observo que esta aproximación no es buena pues calculando directamente el incremento obtengo el valor: $423,1 - 410 = 13,1$.

Hemos venido diciendo que matemáticamente no es riguroso lo que hemos escrito sobre la diferencial total. Al llamar diferencial total de la función f en (x, y) al valor $df(x, y) = (x, y)\,\triangle x + (x, y)\,\triangle y$ la incoherencia matemática estriba en que tal valor depende de los valores de los incrementos $\triangle x, \triangle y$. Para cada para de incrementos $(h, k) = (\triangle x, \triangle y)$ se obtiene un valor generalmente distinto al calcular $(x, y)\,h + (x, y)\,k$. Por tanto, sería mas razonable considerar lo anterior como una aplicación

$$\boxed{\mathbb{R}2 \to \mathbb{R}, \quad (h, k) \mapsto (x, y)\,h + (x, y)\,k}$$

La aplición anterior es *lineal* (en las variables h y k) y justamente esta aplicación lineal es para los matemáticos la llamada *diferencial de la función f en el punto* (x, y), que se suele representar por $Df(x, y)$ (y también por $df(x, y)$).

TANGENTES Y RECTAS NORMALES.

1.7. Gradientes

Gradientes El concepto de gradiente de una función en un punto es un concepto simple pero muy útil por sus muchas aplicaciones. En esta sección veremos una importantísima aplicación relacionada con las derivadas direccionales y en próximas secciones veremos otras utilidades del gradiente (véanse planos tangentes y vectores normales a superficies, máximos y mínimos, ...). El término gradiente, según un diccionario, posee diversas acepciones, como ”declive”, ”pendiente”, relación entre la variación del valor de una magnitud entre dos puntos y la distancia que los separa”, ... y en Física es usual encontrarse con términos como ”gradiente de temperatura”, ”gradiente de presión”, ... En matemáticas el gradiente es un concepto que tiene mucho que ver con todo lo anterior.

[Gradientes] Sean $D \subset \mathbb{R}2$, (x_0, y_0) un punto interior a D y $f\colon D \to \mathbb{R}$ una función de las variables x, y que posee derivadas parciales en el punto (x_0, y_0). El gradiente de f en el punto (x_0, y_0), que se suele notar por $\nabla f(x_0, y_0)$, es el vector del plano

$$\nabla f(x_0, y_0) = \Big((x_0, y_0), (x_0, y_0)\Big) = f_x(x_0, y_0)\,\vec{i} + f_y(x_0, y_0)\,\vec{j}.$$

El símbolo ∇ se lee como ”*nabla*”. También nos podemos encontrar el gradiente con la notación $\operatorname{grad} f(x_0, y_0)$. Así, Si $f(x, y) = x^2y + y^3$ el gradiente de f en un punto cualquiera (x, y) sería $\nabla f(x, y) = (2xy, x^2 + 3y^2)$.

Para funciones de tres o mas variables la definición es análoga. Así si f es una función en las variables x, y, z que posee derivadas parciales en el punto (x_0, y_0, z_0) el gradiente de f en ese punto sería el vector del espacio

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\,\vec{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\,\vec{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\,\vec{k}.$$

Las propiedades mas importantes de los gradientes se obtienen cuando la función es *diferenciable* en los puntos correspondientes. A continuación vamos a a obtener algunas que están relacionadas con las derivadas direccionales.

Relaciones entre el gradiente y las derivadas direccionales

En una sección anterior, en el teorema 1.5, vimos una importante propiedad sobre las derivadas direccionales que dice que cuando una función f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) existen todas las derivadas direccionales y además si $\vec{v} = (v_1, v_2)$, la derivada en la dirección de $\vec{v}$ se puede calcular así:

$$D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) \;=\; \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,v_1 + \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,v_2.$$

Recordemos que el *producto escalar* de dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$, que se suele notar por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, se define como $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$. En consecuencia, podemos escribir la derivada direccional en la dirección de $\vec{v}$ como el producto escalar entre el vector gradiente y el vector $\vec{v}$.

$$\boxed{D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) \;=\; \nabla f(x_0, y_0)\,\cdot\,\vec{v}} \tag{1.7.17}$$

Lo anterior es conocido como *fórmula del gradiente para las derivadas direccionales.*

La fórmula del gradiente se generaliza a funciones de más variables. Por ejemplo, para una función de tres variables: x, y, z, que sea diferenciable en el punto (x_0, y_0, z_0) y para cualquier vector unitario $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se tiene:

$$\boxed{D_{\vec{v}} f(x_0, y_0, z_0) \;=\; \tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, v_1 + \tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, v_2 + \tfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, v_3 \;=\; \nabla f(x_0, y_0, z_0) \,\cdot\, \vec{v}}$$

pues el producto escalar de dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ del espacio se define como $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Ejemplo: Sea $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$. Se quiere calcular la derivada de f en el punto $(1, 1, 1)$ en la dirección del vector unitario $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. El vector gradiente de f en el punto dado es $\nabla f(1, 1, 1) = (2, 3, 4)$. Al ser f una función polinómica, es diferenciable en el punto $(1, 1, 1)$ y, por tanto, podemos calcular esa derivada usando la fórmula del gradiente y, por tanto,

$$D_{\vec{v}} f(1, 1, 1) \;=\; \nabla f(1, 1, 1) \,\cdot\, \vec{v} \;=\; (2, 3, 4) \,\cdot\, (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}) = 3\sqrt{3}.$$

Una de las cualidades de la fórmula del gradiente, además de su simplicidad, es que permite descubrir algunas importantes propiedades de las derivadas direccionales. Veamos estas propiedades en el caso de funciones de dos variables. Para tres o mas variables se tienen las mismas propiedades. A partir de ahora suponemos que f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) para que así la fórmula del gradiente (1.7.17) sea válida.

Hay dos propiedades que se siguen de manera inmediata de (1.7.17). Estas son:

Si el gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ es el vector nulo; es decir, $(x_0, y_0) = (x_0, y_0) = 0$, entonces cualquier derivada direccional $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ es nula.

Si $\vec{v}$ es un vector ortogonal (perpendicular) al vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$, entonces $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = 0$.

El segundo punto se sigue del hecho de que *el producto escalar de dos vectores ortogonales es nulo.*

Direcciones óptimas

La propiedad más importante es la que se obtiene al responder a las siguientes cuestiones: Habrá alguna dirección $\vec{v}$ para la cuál la derivada $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ tenga un valor máximo?. Análogamente, habrá alguna dirección $\vec{v}$ para la cuál la derivada $D_{\vec{v}} f(x_0, y_0)$ tenga un valor mínimo? En el caso de que existan estas direcciones quisiéramos conocerlas. La cuestión que hemos planteado tiene interés cuando el vector gradiente no es el vector nulo, pues en caso contrario todas las derivadas son nulas. Vamos a ver que estas direcciones existen, vamos a calcular los valores máximo y mínimo de las derivadas y vamos a encontrar los vectores unitarios a través de los cuales las derivadas alcanzan estos valores extremos.

Para responder a lo planteado lo único que hay que tener en cuenta es la conocida fórmula para el producto escalar de dos vectores $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en términos del ángulo formado por esos dos vectores. Concretamente, sabemos que el producto escalar se puede calcular así:

$$\boxed{\vec{u} \,.\, \vec{v} = \vec{u}\, \vec{v}\, \cos}$$

siendo el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (Esto explica el que el producto escalar de dos vectores ortogonales sea nulo pues en este caso $= \frac{\pi}{2}$ y $\cos\frac{\pi}{2} = 0$). El ángulo varía entre los valores 0 y π $(0 \leq \leq \pi)$.

Se sigue entonces de la fórmula del gradiente (1.7.17), al ser $\vec{v}$ un vector unitario, lo siguiente:

$$\boxed{D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) \;=\; \nabla f(x_0, y_0) \cos} \tag{1.7.18}$$

siendo el ángulo formado por los vectores $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\vec{v}$.

En la expresión (1.7.18) lo único que varía es el ángulo; para cada vector $\vec{v}$ tenemos un ángulo distinto que varía entre 0 y π. La función coseno en el intervalo $[0, \pi]$ verifica $-1 \leq \cos \leq 1$ y toma un valor máximo igual a 1 cuando $= 0$ y toma un valor mínimo igual a -1 cuando $= \pi$ (dibujar gráfica). Que $= 0$ significa que el vector $\vec{v}$ tiene la misma dirección (y sentido) que el vector gradiente y que $= \pi$ significa que $\vec{v}$ tiene la dirección opuesta al gradiente, es decir, la dirección de $-\nabla f(x_0, y_0)$.

Por tanto, se sigue de (1.7.18) que para cualquier vector unitario $\vec{v}$ se verifica:

$$-\nabla f(x_0, y_0) \;\leq\; D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) \;\leq\; \nabla f(x_0, y_0).$$

El máximo valor que puede tomar la derivada es $\nabla f(x_0, y_0)$, lo cuál sucede cuando $= 0$ y el mínimo valor que puede tomar es direccional es $-\nabla f(x_0, y_0)$, lo cuál sucede cuando $= \pi$. En definitiva, el resultado que hemos obtenido es el siguiente:

Si f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) y el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ no es el vector nulo, entonces:

El máximo valor que puede tomar una derivada direccional $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$ es $\nabla f(x_0, y_0)$ y este valor se obtiene cuando el vector unitario $\vec{v}$ tiene la dirección (y sentido) del vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$.

El mínimo valor que puede tomar una derivada direccional $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$ es $-\nabla f(x_0, y_0)$ y este valor se obtiene cuando el vector unitario $\vec{v}$ tiene la dirección del vector $-\nabla f(x_0, y_0)$ (dirección opuesta al gradiente).

En la sección dedicada a derivadas direccionales vimos que podemos considerar una derivada direccional $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$ como una *tasa de crecimiento o decrecimiento* de la función respecto de la distancia, es decir, como una *velocidad (o ritmo) de crecimiento o decrecimiento* en la dirección dada por el vector $\vec{v}$. De hecho, vimos que cuando tal derivada es positiva la función crece cerca del punto (x_0, y_0) en la dirección (y sentido) dada por el vector y cuando es negativa decrece. Pero, por ejemplo, en el caso en que sea positiva, no es lo mismo que el valor de la derivada sea 1 que 15; en el segundo caso la función crece más rápidamente (en la dirección dada) que en el primer caso (la pendiente es mucho mayor). En estos términos, el resultado del teorema anterior nos dice lo siguiente:

Desde un punto (x_0, y_0) la función f crece más rápidamente en la dirección (y sentido) del vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ mientras que decrece más rápidamente en la dirección opuesta al gradiente. La tasa (velocidad, ritmo) máxima de crecimiento es $\nabla f(x_0, y_0)$ y la *tasa mínima es $-\nabla f(x_0, y_0)$ (al ser negativa se puede considerar como una tasa máxima de decrecimiento).*

Al ser la derivada direccional un límite, todo lo dicho anteriormente se entiende que se verifica de una manera local. Partiendo del punto (x_0, y_0) la función f crece más rápidamente en la dirección (y sentido) del vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ durante un cierto recorrido pero más adelante la dirección de máximo crecimiento puede cambiar (dependerá del punto donde nos encontremos).

Supongamos que la superficie $z = f(x, y)$ representa la superficie de una montaña nevada (en este caso $f(x, y)$ da la altura correspondiente al punto del plano (x, y)). Un esquiador está situado en el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y quiere conocer la dirección (rumbo) de brújula que corresponda al descenso más acusado (rápido). Pues bien, si f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) podemos asegurar que la dirección es la dada por el vector $\vec{v} = -\nabla f(x_0, y_0)$. Hacemos énfasis en la expresión "dirección o rumbo de brújula"porque el gradiente opera con direciones del plano y nada tiene que ver con puntos más arriba o más abajo de la montaña.

Podríamos retomar el ejemplo visto en la sección de diferenciabilidad en el que teníamos que la ecuación que describe la altura z de los puntos de una montaña es $z = 1000 - 0'01x^2 - 0'05y^2$, donde x representa la dirección Este e y la dirección Norte. Un montañero está situado en el punto P de la montaña de coordenadas $(200, 100, 100)$. Ya vimos que el montañero desciende en la dirección noreste pues la correspondiente derivada direccional nos dió un valor negativo; concretamente $-\frac{14}{\sqrt{2}} \approx -9,899$. Vamos a calcular ahora la dirección de descenso más rápida.

Según lo visto anteriormente, tal dirección (y sentido) es la opuesta al vector gradiente en el punto $(200, 100)$. Como $\nabla f(x, y) = (-,02\, x, -0,1\, y)$, la dirección buscada es $-\nabla f(200, 100) = -(-4, -10) = (4, 10)$; es decir, un vector unitario $\vec{v}$ en la dirección del vector $(4, 10)$ (hacer un dibujo). Además la velocidad máxima de decrecimiento sería $-\nabla f(200, 100) = -\sqrt{4^2 + 10^2} = -\sqrt{116} \approx -10,770$. Obsérvese que se obtiene un valor más pequeño que el valor de la derivada direccional en la dirección noreste (lo cuál tenía que suceder).

Supongamos que la temperatura, en grados Celsius, sobre la superficie de una placa metálica viene dada por la función $T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$, donde x e y se miden en centímetros. Se plantea la siguiente cuestión: Desde el punto $(2, -3)$ en que dirección crece la temperatura más rápidamente ? A que ritmo se produce este crecimiento ? (es decir, cuál es la tasa máxima de crecimiento?)

Al ser la función temperatura polinómica, es diferenciable en el punto $(2, -3)$ y, por tanto, la dirección de máximo crecimiento de la temperatura vendrá dada por el gradiente de temperatura en ese punto : $\vec{v} = \nabla T(2, -3)$. Como

$$\nabla T(x, y) = \frac{\partial T}{\partial x}(x, y)\,\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial x}(x, y)\,\vec{j} = -8x\,\vec{i} - 2y\,\vec{j},$$

la dirección de máximo crecimiento es $\vec{v} = \nabla T(2, -3) = -16\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$. La tasa máxima de crecimiento sería $\nabla T(2, -3) = \sqrt{(-16)^2 + 6^2} = \sqrt{292} \approx 17'09$ grados por centímetro.

Insistimos sobre algo que ya hemos advertido antes de los ejemplos. En este y demás ejemplos la resolución puede ser engañosa. El gradiente apunta a la dirección de máximo aumento de la temperatura desde el punto $(2,-3)$ pero esta dirección no tiene porqué llevar al lugar más caliente de la placa. Desde este punto de vista, el gradiente nos proporciona una *información local*, relativa a lo que sucede en las proximidades del punto $(2,-3)$; al variar el punto, la dirección de máximo aumento puede cambiar. En este caso se ve a ojo que el punto donde se alcanza la máxima temperatura es el $(0,0)$ y el vector $\nabla T(2,-3)=-16\,\vec{i}+6\,\vec{j}$ no apunta hacia el origen.

Propiedad de ortogonalidad del gradiente

Otra interesante propiedad que tiene el gradiente de una función f está relacionada con la curvas de nivel de f y es la siguiente:

Sea C una curva de nivel de una función de dos variables f y sea (x_0,y_0) un punto de esa curva donde f es diferenciable y $\nabla f(x_0,y_0)\neq(0,0)$. Entonces el vector gradiente $\nabla f(x_0,y_0)$ es perpendicular (normal) a la curva C en el punto (x_0,y_0).

El resultado anterior nos indica que el vector gradiente es perpendicular a un vector tangente a la curva en ese punto, es decir, un vector dirección de la recta tangente a C en el punto indicado. Habría que comprobar que tal recta tangente existe.

Como consecuencia del resultado anterior se obtiene que *si $\vec{v}$ es un vector tangente a la curva de nivel que pasa por (x_0,y_0), entonces la derivada direccional $D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)$ es nula*, pues según (1.7.17) se tiene $D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}$ y al ser $\vec{v}$ y el vector gradiente perpendiculares, su producto es calar es igual a 0.

<u>Observaciones sobre las pruebas del resultado anterior</u>: En varios textos la prueba que se da para probar el teorema anterior se basa en que al ser f constante sobre la curva de nivel , la razón de cambio en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{v}$ tangente a la curva es nula (esto es lo que no veo). En consecuencia, aplicando la fórmula del gradiente se tiene $0=D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{v}$ y así $\nabla f(x_0,y_0)$ es perpendicular al vector $\vec{v}$ y, por tanto, perpendicular a la curva de nivel. Es decir, hacen el razonamiento en orden inverso a lo expuesto arriba. No veo directamente que $D_{\vec{v}}f(x_0,y_0)=0$ si $\vec{v}$ es un vector tangente a la curva de nivel. Más adelante, cuando se vea la regla de la cadena se podrá dar una sencilla prueba del teorema usando unas ecuaciones paramétricas de la curva de nivel y suponiendo que esta es suave cerca del punto (x_0,y_0), lo cual es lógico suponer pues f es diferenciable en ese punto.

Examinando el resultado del teorema anterior y viendo que el vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel en el punto dado me planteo En qué sentido apunta el vector gradiente?. Si la curva de nivel es cerrada, el vector gradiente apuntará hacia fuera de la curva o hacia dentro? Pienso que la respuesta está en el resultado del teorema 1.7. En la dirección del gradiente se obtiene la mayor tasa de crecimiento de la función. Entonces, la respuesta depende de cómo sean las curvas de nivel. Así si la curva de nivel que está dibujada por fuera de la inicial corresponde a un valor de f mayor que la inicial, entonces el vector gradiente apuntará hacia fuera.

Una aplicación física: El flujo de calor

El resultado del teorema 1.7 posee una aplicación muy interesante en Física, concretamente, la llamado *Flujo de Calor*. El flujo de calor en una región D del plano es una función vectorial sobre esta región, que a cada punto $(x, y) \in D$ le asigna un vector $\vec{C}(x, y)$ que da la dirección en que fluye el calor a partir de ese punto (matemáticamente es una función $C\colon D \to$ IR2). La Física nos dice que *el flujo de calor en el punto* (x, y), $\vec{C}(x, y)$, *es un vector ortogonal a la isoterma que pasa por el punto* (x, y), es decir, a la curva de nivel correspondiente a la función temperatura $T(x, y)$ que pasa por (x, y). La Física también nos dice que el calor fluye desde puntos de mayor temperatura a puntos de menor temperatura.

Teniendo en cuenta que el gradiente de temperatura $\nabla T(x, y)$ es perpendicular en ese punto a la correspondiente isoterma y que, según el resultado del teorema 1.7, en la dirección opuesta al gradiente: $-\nabla T(x, y)$ la temperatura decrece (además, es la dirección en que decrece más rápidamente), se concluye que el flujo de calor debe tener la misma dirección que $-\nabla T(x, y)$ y, en consecuencia, debe existir una constante positiva K tal que

$$\boxed{\vec{C}(x, y) \;=\; -K\,\nabla T(x, y)}$$

La constante K es la llamada *conductividad térmica*. En la práctica conocemos la expresión $T(x, y)$ de la temperatura y podemos calcular fácilmente el vector gradiente de temperatura y así obtener, de una manera simple, la dirección del flujo de calor en cada punto de la región.

1.8. Reglas de la cadena

Reglas de la cadena

Para funciones de una sola variable la llamada *regla de la cadena* es una fórmula que nos dice cómo tenemos que derivar una función que es composición de otras dos. Concretamente, dice que si $\boxed{h(x) = f(g(x))}$, g es derivable en el punto x y f es derivable en el punto $g(x)$, entonces h es derivable en x y su derivada se calcula así:

$$\boxed{h'(x) = f'(g(x))\,g'(x)} \tag{1.8.19}$$

Así por ejemplo, si $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ (aquí $g(x) = x^2$ y $h(t) = \operatorname{sen} t$) la derivada se calcula así:

$$h'(x) = \underbrace{\cos(x^2)}_{f'(g(x))}\,\underbrace{2x}_{g'(x)}.$$

Para funciones de dos o mas variables existe una gran variedad de composiciones y, por tanto, una gran variedad de reglas de la cadena (matemáticamente todas son casos particulares de una regla de la cadena que se establece en términos de productos de matrices pero ésto ésto se escapa de un curso como éste). *Se entiende por reglas de la cadena fórmulas que nos permiten calcular derivadas de funciones compuestas.*

Vamos a exponer algunos de los casos más utilizados. En un principio, para una mejor comprensión, la exposición la hacemos usando únicamente funciones de una y dos variables. Posteriormente, una vez entendido estos casos, se generalizarán a funciones de tres o mas variables.

Primer caso: Exponemos como primer caso uno que no suele venir en los textos porque realmente se obtiene de la regla de la cadena (1.8.19) para funciones de una sola variable sin mas que tener en cuenta cómo se calculan las derivadas parciales. Este sería el caso de $\boxed{h(x,y) = f(g(x,y))}$, donde f es una función de una sola variable, derivable en el punto $g(x,y)$ y g posee derivadas parciales en el punto (x,y).

Como ejemlos de esta situación tenemos $h(x,y) = \operatorname{sen}(x^3-y^2+1)$, $h(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$, $h(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$.

En este caso las derivadas parciales de la función h se calculan así:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x} = f'(g(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial h}{\partial y} = f'(g(x,y))\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)}. \tag{1.8.20}$$

Esto es realmente lo que hemos hecho, en el fondo aplicamos (1.8.19) , cuando nos hemos encontardo con este tipo de funciones.

Para $h(x,y) = \operatorname{sen}(x^3-y^2+1)$ calculamos las derivadas parciales así:

$$hx(x,y) = \cos(x^3-y^2+1)\,3x^2, \qquad hy(x,y) = \cos(x^3-y^2+1)\,\cdot(-2y).$$

En los casos que vamos a exponer a continuación (que son los que suelen venir en libros dirigidos a estudiantes que no son de matemáticas) la correspondiente regla de la cadena sólo funciona cuando las funciones de dos o mas variables que aparecen son *diferenciables* en los puntos indicados y las funciones de una sola variable son derivables (en este caso la derivabilidad equivale a la diferenciabilidad). Las fórmulas que vamos a exponer suelen usarse en la teoría para probar ciertos resultados (véase una aplicación en la próxima sección) y son muy útiles. En la práctica ya no son tan útiles porque usualmente nos encontramos con expresiones directas de las funciones y el cálculo de derivadas suele reducirse a aplicar las reglas (1.8.19) o (1.8.20).

Segundo caso: Regla de la cadena para una variable independiente

Supongamos que f es una función de las variables x, y y a su vez las variables x, y dependen de otra variable t así: $x = g(t),\ y = h(t)$. De esta forma podemos considerar la función z, que depende únicamente de la variable t, definida por

$$\boxed{z(t) = f(g(t),\, h(t)).}$$

Por ejemplo, si $f(x,y) = x^2+y^2$ y $x = g(t) = \frac{1}{t}$, $y = h(t) = t^2$ tenemos $z(t) = f(\frac{1}{t}, t^2) = (\frac{1}{t})^2 + (t^2)^2 = \frac{1}{t^2} + t^4$. Pues bien, si g y h son derivables en t y f es diferenciable en el punto $(x, y) = (g(t), h(t))$, entonces la función z es derivable en t y su derivada se calcula así:

$$\boxed{z'(t) = (g(t), h(t))\, g'(t) \;+\; (g(t), h(t))\, h'(t).} \tag{1.8.21}$$

Se comprueba la fórmula anterior con el ejemplo dado arriba derivando directamente la expresión $z(t) = \frac{1}{t^2} + t^4$ y viendo que sale el mismo resultado que al aplicar (1.8.21).

<u>Otras notaciones</u>: La proliferación de notaciones existentes para notar lo mismo, nos lleva a escribir (1.8.21) de otra forma, más usada por físicos, ingenieros, ... Sabemos que una derivada, como por ejemplo $z'(t)$, se suele notar también por el símbolo $\frac{dz}{dt}(t)$ y, muchas veces, por comodidad nos la encontramos escrita así $\frac{dz}{dt}$ sin indicar el punto donde se calcula esa derivada (lo mismo sucede con las derivadas parciales). Por otra parte, es usual notar a las funciones $g(t)$ y $h(t)$ por $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente; es decir, $x = x(t)$, $y = y(t)$, con lo que nuestra función z se expresaría así:

$$\boxed{z(t) = f(x(t), y(t)).}$$

Con todas estas notaciones y escribiendo, por comodidad, de una forma abreviada sin indicar los puntos donde se calculan las derivadas, la expresión (1.8.21) nos la podemos encontrar así:

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.} \tag{1.8.22}$$

Al alumno se le comprueba de nuevo el ejemplo anterior usando esta nueva notación. Se lleva a cabo así (de la forma que lo hacen los libros para ingenieros):

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x\,(-\frac{1}{t^2}) + 2y\,(2t) \underset{x=\frac{1}{t},\, y=t^2}{=} 2\,\frac{1}{t}\,(-\frac{1}{t^2}) + 2t^2\,(2t) = -\frac{2}{t^3} + 4t^3.$$

Otro ejemplo interesante que podríamos poner es el de $z = f(x, y) = \int_x^y {}^{-s^2}\, ds$ siendo $x = t^3$, $y = \operatorname{sen}(t)$ (Obsérvese que la integral dada no se sabe calcular pero ésto no es impedimento para calcular las derivadas parciales de f haciendo uso del *teorema fundamental del Cálculo*).

Una aplicación interesante de la regla de la cadena (1.8.21) consiste en dar otra prueba de la famosa fórmula que establece una derivada direccional en términos de las derivadas parciales, cuando la función es diferenciable.

La fórmula obtenida se generaliza de una forma natural al caso en que la función f sea una función de tres o mas variables. Por ejemplo, si tenemos que f es una función de las variables x, y, z y tenemos

$$\boxed{w(t) = f(x(t), y(t), z(t)),}$$

usando la última notación, la derivada de w se calcularía así:

$$\boxed{\frac{dw}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + fz\,\frac{dz}{dt}.}$$

A la vista de lo anterior ya nos podemos imaginar el caso de funciones f de cuatro o mas variables: En la fórmula aparece un sumando por cada variable que tiene f.

Tercer caso: Regla de la cadena para dos variables independientes

Supongamos que f es una función de las variables x, y y a su vez las variables x, y dependen de otras dos variable s, t así: $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$. De esta forma podemos considerar la función z, que depende de las variable s, t, definida por

$$\boxed{z(s,t) = f(g(s,t),\, h(s,t)).}$$

Por ejemplo, podemos tener $f(x,y) = 2xy$ y $x = g(s,t) = s^2 + t^2$, $y = h(s,t) = \frac{s}{t}$. Entonces, $z(s,t) = f(s^2 + t^2, \frac{s}{t}) = 2(\frac{s^3}{t} + st)$.

Suponiendo que g y h son diferenciables en el punto (s,t) y f es diferenciable en el punto $(x,y) = (g(s,t), h(s,t))$, la regla de la cadena para este caso nos dice que las derivadas parciales de z se pueden calcular así:

$$\begin{aligned} zs(s,t) &= (g(s,t), h(s,t))\, gs(s,t) \;+\; (g(s,t), h(s,t))\, hs(s,t) \\ zt(s,t) &= (g(s,t), h(s,t))\, gt(s,t) \;+\; (g(s,t), h(s,t))\, ht(s,t). \end{aligned} \tag{1.8.23}$$

De la misma forma que sucedía en el caso anterior, aquí lo más usual y cómodo es notar las funciones g y h por x e y respectivamente, es decir,

$$x = x(s,t), \qquad y = y(s,t), \qquad \boxed{z(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))}$$

y usar una notación abreviada (en la que no se especifican los puntos donde se calculan las derivadas). Entonces las fórmulas (1.8.23) pueden ser escritas así:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} zs &=& fx\,xs \,+\, fy\,ys \\ zt &=& fx\,xt \,+\, fy\,yt \end{array}}$$

Lo anterior se pone en práctica con el ejemplo de arriba calculando directamente las derivadas parciales zs, zt en la expresión $z(s,t) = 2(\frac{s^3}{t} + st)$ y después calculandolas con las reglas anteriores. Ilustremos el cálculo de la derivada zs (la otra es análoga).

$$zs = fx\,xs \,+\, fy\,ys \,=\, 2y\,(2s) + 2x\,(\frac{1}{t}) \underset{y=\frac{s}{t},\, x=s^2+t^2}{=} 2\,(\frac{s}{t})\,(2s) + 2(s^2+t^2)\,(\frac{1}{t}) = 6\frac{s^2}{t} + 2t.$$

Si f es una función de tres o mas variables el procedimiento sería análogo. En el cálculo de derivadas parciales aparecerían tantos sumandos como variables tiene la función f y en cada sumando aparece la correspondiente derivada parcial de f. Veamos el caso en que f tiene tres variables. Supongamos

$$w = f(x, y, z), \quad \text{donde} \quad x = x(s, t),\ y = y(s, t),\ z = z(s, t).$$

En este caso, las derivadas parciales de la función

$$\boxed{w(s,t) \ = \ f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))}$$

se calculan así:

$$\begin{aligned} ws &= fx\,xs + fy\,ys + fz\,zs \\ wt &= fx\,xt + fy\,yt + fz\,zt \end{aligned}$$

Se pone como ejemplo el caso $w = xy + yz + xz$ donde $x = s\cos t, y = s\,\mathrm{sen}\,t, z = t$.

Por último se advierte que podíamos tener casos análogos a los anteriores con tres o más variables independientes. Por ejemplo, $w = 4x + y^2 + z^3$ donde $x =^{rs^2} t, y = \ln(\frac{r+s}{t}), z = rst^2$. En este caso tendríamos una función dependiente de tres variables independientes: r, s, t del tipo

$$\boxed{w(r,s,t) \ = \ f(x(r,s,t), y(r,s,t), z(r,s,t))}$$

y el cálculo de sus derivadas parciales se llevaría a cabo de la misma forma que en el caso de dos variables independientes. Se dejan algunos casos como éstos para verlos en clases prácticas.

1.9. Superficies, curvas, planos tangentes y rectas normales

Superficies, curvas, planos tangentes y rectas normales

En la sección 1.5 vimos que el plano tangente a una superficie del tipo $z = f(x, y)$ (gráfica de f) en un punto dado de la superficie $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ existe únicamente cuando la función f es diferenciable en el punto (x_0, y_0). En este caso, una ecuación de tal plano tangente es:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

lo cuál se puede escribir obviamente así:

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - f(x_0, y_0)) = 0.$$

Es decir, de la forma:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \quad \text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ B & = & -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ C & = & 1. \end{array} \right. \tag{1.9.24}$$

y donde $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Es lógico que obtengamos lo anterior pues sabemos que la ecuación de un plano que pasa por un punto del espacio (x_0, y_0, z_0) es de la forma $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$ con A, B, C constantes (esta es la llamada *ecuación en forma punto-normal*). Podemos también escribir la ecuación del plano como $Ax + BY + Cz = D$ (*ecuación en forma estándar*). Escrito el plano en la forma punto-normal, el vector $\vec{n} = (A, B, C)$ es perpendicular al plano ya que, si $\vec{v} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ el producto escalar $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$, por lo que $\vec{n}$ sería perpendicular a los vectores $\vec{v} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, pero estos últimos son vectores del plano. De esta forma, obteniendo un vector normal al plano en ese punto, es muy fácil obtener la ecuación del plano tangente sin mas que recordar la ecuación en la forma punto-normal.

Por tanto, según (1.9.24), un vector normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dado por $\vec{n} = (-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1)$, lo que vamos a escribir, por comodidad así:

$$\boxed{\vec{n} \;=\; (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1).} \tag{1.9.25}$$

Ya habíamos advertido en varias ocasiones que hay muchas superficies en el espacio $\mathbb{R}3$ que no representan la gráfica de una función f en las variables x, y. Para nosotros, *una superficie* va a ser un subconjunto del espacio de la forma $\boxed{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}3\colon\ F(x, y, z) = 0\}}$ donde F es una función de tres variables. Diremos entonces que $F(x, y, z) = 0$ es una ecuación de la superficie. Recuérdense las ecuaciones de las esferas, elipsoides, conos, paraboloides, ... Estas son casos especiales de superficies. Por ejemplo, la ecuación de un elipsoide centrado en el origen y de semiejes a, b y c es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$. (Observación: Siendo rigurosos, a F habría que exigirle ciertas condiciones. La definición formal de superficie no se expone aquí; de hecho, hay superficies que no son de la forma anterior).

La superficie de ecuación $z = f(x, y)$ (gráfica dse f) sería un caso particular pues podríamos escribir la ecuación como $F(x, y, z) = 0$ siendo $\boxed{F(x, y, z) = z - f(x, y)}$ Observemos que, en este caso, las derivadas parciales de F son

$$F_x(x, y, z) = -f_x(x, y), \quad F_y(x, y, z) = -f_y(x, y), \quad F_z(x, y, z) = 1$$

y, por tanto, el vector normal, dado en (1.9.25), a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en el punto $P = (x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ se puede escribir así:

$$\boxed{\vec{n} = \nabla F(x_0, y_0, z_0).}$$

Por tanto, escribiendo nuestra superficie de la forma $F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0$ basta con obtener *el gradiente* de F en el punto dado de la superficie para tener así un vector normal y, consecuentemente, el plano tangente a la superficie en ese punto.

Obsérvese que en el caso de un plano (caso especial de superficie) escrito en forma punto-normal: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ (donde A, B, C son constantes) tendríamos la superficie de ecuación $F(x,y,z) = 0$, donde $F(x,y,z) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$. En este caso, el vector gradiente en cualquier punto (x,y,z) es $\nabla F(x,y,z) = (A,B,C)$ y sabemos que el vector $\vec{n} = (A,B,C)$ es justamente un vector normal al plano en cada punto. Por tanto, en este caso también sucede lo mismo que en el caso de una gráfica $z = f(x,y)$ (hay planos que no son gráficas de este tipo).

Pues bien, ésto que sucede con las superficies del tipo $z = f(x,y)$ y con los planos se puede generalizar a todas las superficies $F(x,y,z) = 0$ sin mas que suponer que F es diferenciable en el punto $P = (x_0, y_0, z_0)$.

Nuestra idea geométrica de plano tangente es la misma que expusimos en la sección 1.5. Por un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ de la superficie $F(x,y,z) = 0$ pasan infinitas curvas contenidas en la superficie. Suponiendo que cada una de estas curvas posee una recta tangente en P, parece lógico que un vector normal a la superficie en P sea un vector perpendicular a cada una de estas tangentes y, entonces, el plano tangente en P será entonces un plano que pasa por P y contiene a todas las rectas tangentes. Con esta idea geométrica de vector normal y plano tangente se puede probar lo siguiente:

Sea la superficie de ecuación $F(x,y,z) = 0$ y sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie donde F es diferenciable y donde el vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ no es nulo.

1) El vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es un vector normal a la superficie en el punto P.

2) Una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P es $\boxed{F_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0,\ldots}$

3) La recta que pasa por P y tiene la dirección del vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se llama recta normal a la superficie en el punto P. Las ecuaciones paramétricas de esta recta serían: $\begin{cases} x = x_0 + F_x(x_0,y_0,z_0)\,t \\ y = y_0 + F_y(x_0,y_0,z_0)\,t \\ z = z_0 + F_z(x_0,y_0,z_0)\,t \end{cases}$ y cuando las derivadas parciales no se anulan podemos escribir la ecuación de esta recta así: $\boxed{\dfrac{x - x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \dfrac{y - y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \dfrac{z - z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}}$

En algunos textos como en el de Larson (página 1169) los resultados que aparecen en el teorema anterior aparecen como definiciones (pues no deja de ser un problema matemático el definir adecuadamente los conceptos de plano tangente y vector normal). O sea, que cabe la opción de simplemente llevar a a cabo las siguientes defininiciones:

Sea la superficie de ecuación $F(x,y,z) = 0$ y sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie donde F es diferenciable y donde el vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ no es nulo.

1) El plano que pasa por P y tiene a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ como vector normal se llama plano tangente a la superficie en el punto P. Una ecuación de este plano sería $\boxed{F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0}$

2) La recta que pasa por P y tiene la dirección del vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se llama recta normal a la superficie en el punto P. Las ecuaciones paramétricas de esta recta serían: $\begin{cases} x = x_0 + F_x(x_0, y_0, z_0)\, t \\ y = y_0 + F_y(x_0, y_0, z_0)\, t \\ z = z_0 + F_z(x_0, y_0, z_0)\, t \end{cases}$ y cuando las derivadas parciales no se anulan podemos escribir la ecuación de esta recta así: $\boxed{\dfrac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}}$

Veamos a continuación algunos ejemplos. El primero es rutinario y en los otros dos hay que reflexionar algo más.
Ejemplo 1: Determinemos un vector normal, una ecuación del plano tangente y una ecuación de la recta normal al *hiperboloide* de ecuación $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ en el punto $(1, -1, 4)$.

En este caso $F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$. Al ser una función polinómica es diferenciable en cualquier punto; en particular en $(1, -1, 4)$. En este caso el gradiente es

$$\nabla F(1, -1, 4) = (F_x(1, -1, 4), F_y(1, -1, 4), F_z(1, -1, 4)) = (-4, 4, 8),$$

que como vemos no es nulo.

Por tanto, un vector normal a la superficie en el punto dado es $\boxed{\vec{n} = (-4, 4, 8)}$. Obsérvese que el vector $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ tiene la misma dirección y sentido que $\vec{n}$ y, por tanto, también sería un vector normal a la superficie en el punto indicado.

Una ecuación del plano tangente en forma punto-normal sería:

$$-4(x - 1) + 4(y + 1) + 8(z - 4) = 0.$$

Realizando operaciones se obtiene la ecuación: $\boxed{x - y - 2z + 6 = 0}$.
Una ecuación de la recta normal sería: $\frac{x-1}{-4} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-4}{8}$, o sea, $\boxed{\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-4}{2}}$.
Unas ecuaciones paramétricas de esta recta normal serían:

$$\boxed{x = 1 - 4\,t, \quad y = -1 + 4\,t, \quad z = 4 + 8\,t.}$$

El punto $(1, -1, 4)$ se obtendría para el valor del parámetro dado por $t = 0$.
Ejemplo 2: Determinemos, si existen, los puntos de la superficie $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ en los que el plano tangente es *horizontal*, es decir, paralelo al plano xy (plano $z = 0$) y obtengamos una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1, 1, 1)$.

Para que el plano tangente sea horizontal en un punto P, cualquier vector normal a la superficie en el punto P debe tener la dirección (o dirección opuesta) del eje z, es decir, debe ser de la forma $\vec{n} = (0, 0,)$. En nuestro caso la ecuación de la superficie es $F(x, y, z) = 0$, donde $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4$. Esta función es polinómica y, por tanto, diferenciable en cada punto del espacio, siendo el gradiente en un punto cualquiera (x, y, z) el dado por

$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 4z).$$

En un punto (x, y, z) de la superficie, el vector $\vec{n} = (2x, 2y, 4z)$ es perpendicular a la superficie. Para que este vector tenga la dirección del eje z debe suceder que $x = 0$ e $y = 0$. Vamos a ver qué puntos de la superficie (si es que existen) verifican estas dos condiciones.

Llevando las condiciones $x = 0$ e $y = 0$ a la ecuación de la superficie $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$, concluímos que la única posibilidad es que se verifique $2z^2 = 4$, es decir $z = \sqrt{2}$ o $z = -\sqrt{2}$. En consecuencia, los únicos puntos de la superficie donde el palno tangente es horizontal son

$$(0, 0, \sqrt{2}) \qquad \text{y} \qquad (0, 0, -\sqrt{2}).$$

Estos resultados son coherentes con la idea geométrica de la superficie dada, ya que se trata de un *paraboloide* de centro $(0, 0, 0)$ y semiejes 2, 2 y $\sqrt{2}$. El plano tangente que pasas por el primer punto es el de ecuación $z = \sqrt{2}$ y el que pasa por el sgundo punto es $z = -\sqrt{2}$.

El punto $(1, 1, 1)$ es otro punto del parabolide, asi que, en este caso el plano no es horizontal. Vamos a calcularlo. El gradiente en este punto es $\nabla F(1, 1, 1) = (2, 2, 4)$. Por tanto, una ecuación del plano tangente pedido es:

$$2\,(x-1) + 2\,(y-1) + 4\,(z-1) \;=\; 0,$$

es decir, $\boxed{x + y + 2\,z = 4.}$. Obsérvese que no es un plano horizontal, es decir no es de la forma $z = a$.

Ejemplo 3: Vamos a comprobar que la esfera de ecuación: $\mathrm{x}^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$es tangente al elipsoide de ecuación: $\mathrm{x}^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$en el punto $P = (2, 1, 1)$.

Lo primero es comprobar que tal punto P pertenece a ambas superficies. Que ambas superficies sean tangentes en ese punto significa que los planos tangentes a las dos superficies en P coinciden (lo análogo a dos curvas tangentes en un punto, donde la recta tangente en el punto es la misma en ambos casos). Esto equivale a que los vectores normales a ambas superficies en ese punto tengan la misma dirección o direcciones opuestas, ya que el plano tangente queda perfectamente determinado por ese vector normal y el punto de tangencia (que en este caso es el mismo para ambas superficies).

Escribimos la primera superficie de la forma $F(x, y, z) = 0$ y la segunda como $G(x, y, z) = 0$. Entonces, lo único que tenemos que comprobar es que los vectores gradientes $\nabla F(2, 1, 1)$ y $\nabla G(2, 1, 1)$ poseen la misma dirección o direcciones opuestas. Resulta que

$$\nabla F(x, y, z) = (2x - 8, 2y - 8, 2z - 6), \qquad \nabla G(x, y, z) = (2x, 6y, 4z),$$

y, por tanto, $\nabla F(2,1,1) = (-4,-6,-4)$ y $\nabla G(2,1,1) = (4,6,4)$. Observamos entonces que $\nabla G(2,1,1) = -\nabla F(2,1,1)$, lo cuál confirma lo que buscábamos.

Par confirmar lo que decíamos en un principio, obsérvese que tanto en un caso como en otro, una ecuación del plano tangente a la superficie en P es 4(x-2)+6(y-1) +4(z-1) = 0,es decir $\boxed{2x + 3y + 2z = 9.}$

Recta tangente a una curva en el espacio

1.- Recta tangente a una curva dada como intersección de dos superficies

Una curva en el espacio $\mathbb{R}3$ puede venir dada de distintas formas. Una de ellas es como intersección de dos superficies, de la misma forma que una recta puede venir dada como la intersección de dos planos (a fin de cuenta un plano es un caso particular de superficie). Así por ejemplo, la recta normal obtenida en el primer ejemplo vendría dada por la intersección de los planos de ecuaciones $x + y = 0$ y $2x + z - 6 = 0$.

Sea entonces C una curva en el espacio que viene dada mediante la intersección de las superficies $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ y sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de la curva donde F y G son diferenciables.

Nos planteamos el determinar una ecuación de la *recta tangente* a la curva C en el punto P, para lo cuál sería suficiente con determinar un vector $\vec{v}$ en la dirección de la recta tangente. Sabemos que el vector gradiente $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a la superficie $F(x,y,z) = 0$ en el punto P y la curva C está contenida en esa superficie; por tanto, el vector $\vec{v}$ debe ser perpendicular a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$. Razonando de manera análoga con la otra superficie, tendremos que $\vec{v}$ también debe ser perpendicular a $\nabla G(x_0, y_0, z_0)$. Sabemos que una forma simple de encontrar un vector perpendicular a dos vectores $\vec{u}, \vec{w}$ dados es considerando el *producto vectorial* de estos vectores $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$. En consecuencia, deducimos el siguiente resultado:

Sea C una curva en el espacio $\mathbb{R}3$ que viene dada mediante la intersección de las superficies de ecuaciones:

$$F(x,y,z) = 0, \qquad G(x,y,z) = 0,$$

y sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de la curva donde F y G son diferenciables y sus gradientes no se anulan. En tal situación, el producto vectorial

$$\boxed{\nabla F(x_0, y_0, z_0) \times \nabla G(x_0, y_0, z_0)}$$

es un vector en la dirección de la recta tangente a la curva C en el punto P.

Vamos a desarrollar la idea anterior en dos ejemplos.

Ejemplo 1: Determinemos una ecuación de la recta tangente a la curva C obtenida como intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 5$ en el punto $P = (2,1,5)$.

En este caso podemos hacer un simple dibujo para ver cómo es la curva pedida.