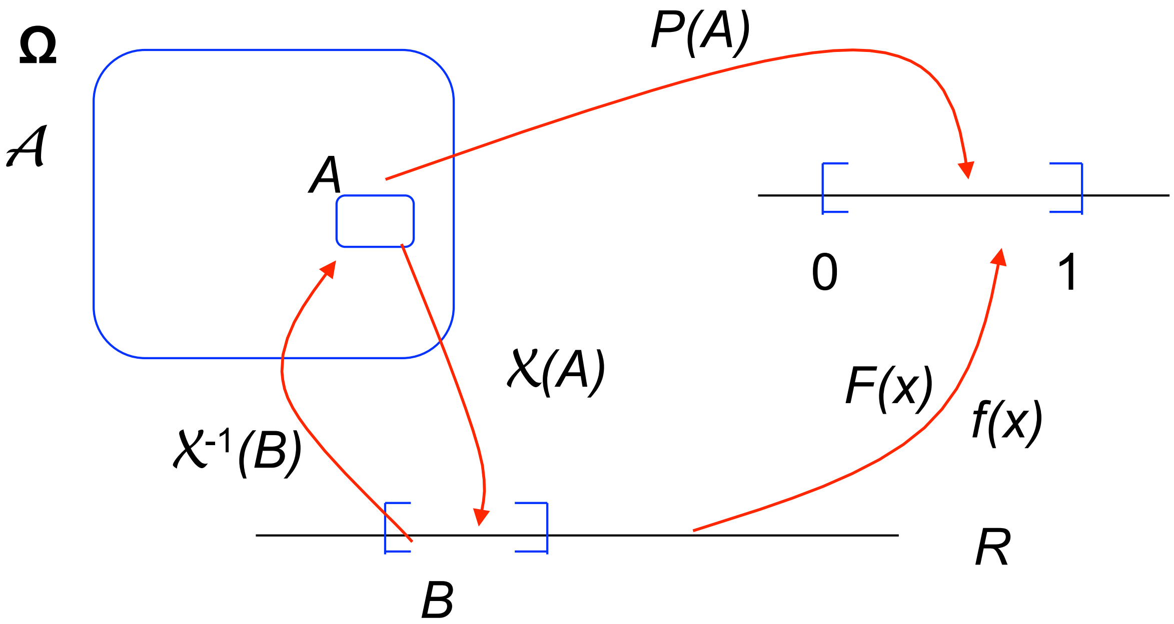
Variable aleatoria univariante: concepto

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE CÓRDOBA
Universidad de Córdoba
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Variable aleatoria univariante



Supongamos el experimento consistente en lanzar una moneda tres veces.

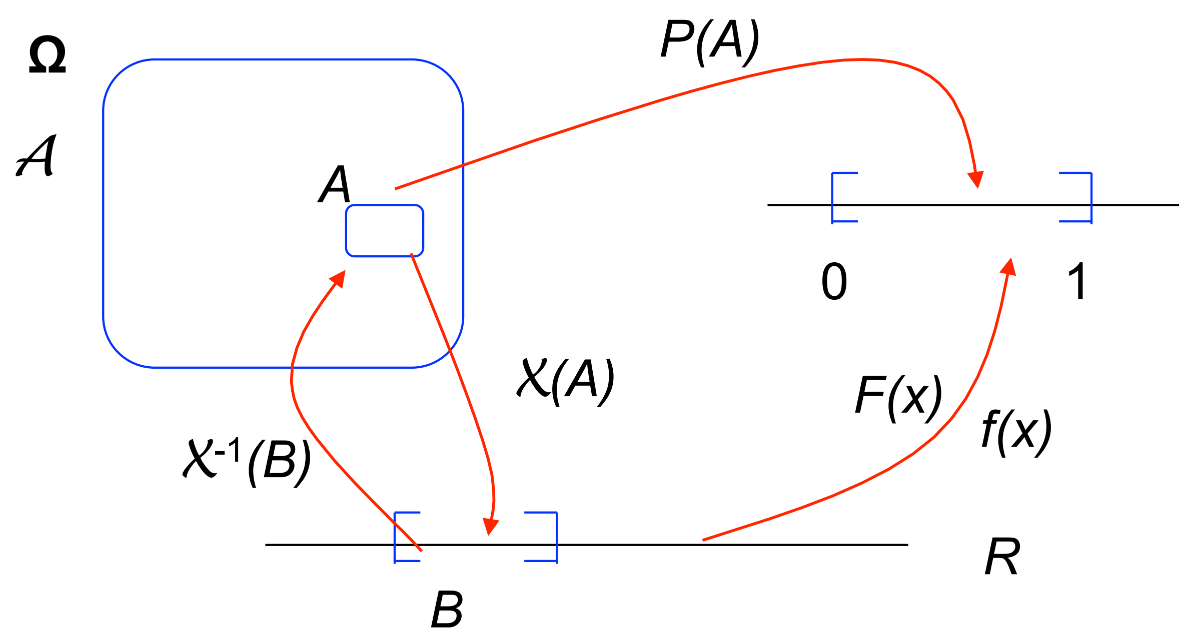
Espacio muestral del experimento:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} CCC; \\ CCX; CXC; XCC; \\ CXX; XCX; XXC; \\ XXX \end{Bmatrix} \Rightarrow VR_{2,3} = 2^3 = 8$$

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(CCC) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(CXX) = \frac{1}{8} \qquad P(XCX) = \frac{1}{8} \qquad P(XXX) = \frac{1}{8}$$

Variable aleatoria univariante



Función real de los resultados

Supongamos el experimento consistente en lanzar una moneda tres veces.

Espacio muestral del experimento:

$$\Omega=\left\{\begin{array}{l}CCC;\\ CCX;CXC;XCC;\\ CXX;XCX;XXC;\\ XXX\end{array}\right\} \Rightarrow VR_{2,3}=2^3=8$$

$$P\left(C_1\cap C_2\cap C_3\right)=P\left(CCC\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P\left(CXX\right)=\frac{1}{8} \qquad P\left(XCX\right)=\frac{1}{8} \qquad P\left(XXX\right)=\frac{1}{8}$$

"Número de caras obtenidas en los tres lanzamientos"

$$X:\ \Omega\rightarrow R$$

$$\{CCC\}\mapsto X\left(\{CCC\}\right)=3$$

$$\{CCX\}\mapsto X\left(\{CCX\}\right)=2$$

$$\{CXC\}\mapsto X\left(\{CXC\}\right)=2$$

$$\ldots$$

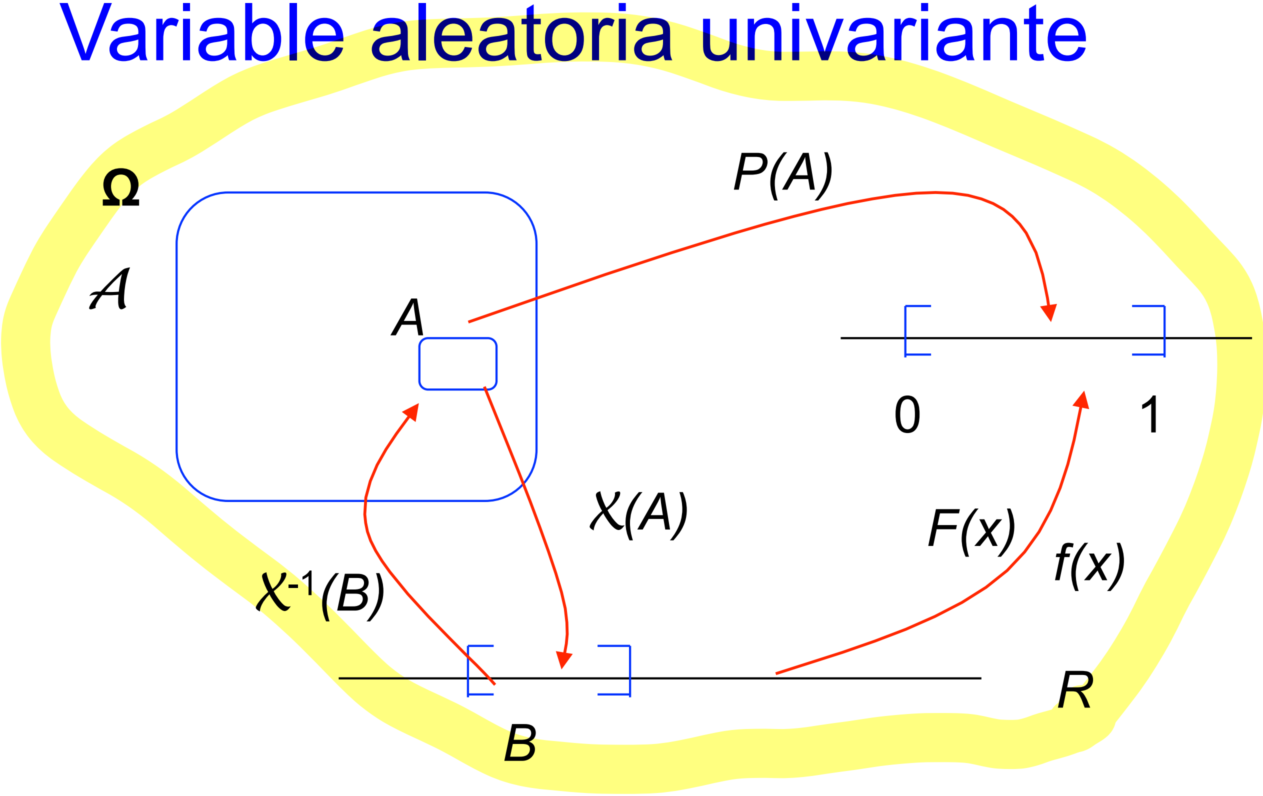
$$\Omega=\left\{\underbrace{CCC}_{3};\underbrace{CCX\ ;\ CXC\ ;\ XCC}_{2};\underbrace{CXX\ ;\ XCX\ ;\ XXC}_{1};\underbrace{XXX}_{0}\right\}$$

$$S_X=\left(0,\ 1,\ 2,\ 3\right)$$

$$P\left(X=0\right)=P\left(XXX\right)=\frac{1}{8} \qquad P\left(X=1\right)=P\left(CXX\cup XCX\cup XXC\right)=\frac{3}{8} \qquad P\left(X=2\right)=P\left(CCX\cup CXC\cup XCC\right)=\frac{3}{8}$$

$$P\left(X=3\right)=P\left(CCC\right)=\frac{1}{8}$$

Variable aleatoria univariante



Función real de los resultados

Variable aleatoria univariante (v.a.)

Dado $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, sea $\mathcal{X} : \mathcal{A} \to R$

$$A \in \mathcal{A} \mapsto \mathcal{X}(A) \in R$$

$\mathcal{X}$ es v.a. Sobre $\Omega \Leftrightarrow \forall$ intervalo $B \subset R$, se tiene que $\mathcal{X}^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Espacio muestral asociado a una v.a.

S = { todas las realizaciones $\mathcal{X}$ (w), w ⊂ Ω }

Función de distribución (f.d.D.)

En un sentido estrictamente matemático, $F : R \rightarrow [0,1]$ es una f.d.D. si:

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

2. $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

3. *F* es monótona no decreciente. (si $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$)

4. *F* es continua por la derecha. ($\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$)

Supongamos el experimento consistente en lanzar una moneda tres veces.

Espacio muestral del experimento:

$$\Omega=\begin{Bmatrix} \text{CCC;} \\ \text{CCX;CXC;XCC;} \\ \text{CXX;XCX;XXC;} \\ \text{XXX} \end{Bmatrix} \Rightarrow VR_{2,3}=2^3=8$$

$$P(C_1\cap C_2\cap C_3)=P(CCC)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P(CXX)=\frac{1}{8} \qquad P(XCX)=\frac{1}{8} \qquad P(XXX)=\frac{1}{8}$$

"Número de caras obtenidas en los tres lanzamientos"

$$X:\ \Omega\to R$$

$$\{CCC\}\mapsto X(\{CCC\})=3$$

$$\{CCX\}\mapsto X(\{CCX\})=2$$

$$\{CXC\}\mapsto X(\{CXC\})=2$$

$$\dots$$

$$\Omega=\left\{\underbrace{CCC}_{3};\underbrace{CCX\ ;\ CXC\ ;\ XCC}_{2};\underbrace{CXX\ ;\ XCX\ ;\ XXC}_{1};\underbrace{XXX}_{0}\right\}$$

$$S_X=(0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

$$P(X=0)=P(XXX)=\frac{1}{8} \qquad P(X=1)=P(CXX\cup XCX\cup XXC)=\frac{3}{8} \qquad P(X=2)=P(CCX\cup CXC\cup XCC)=\frac{3}{8}$$

$$P(X=3)=P(CCC)=\frac{1}{8}$$

$$F(0)=P(X\le 0)=P(X=0)=\frac{1}{8} \qquad F(1)=P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}$$

$$F(2)=P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$$

Función de distribución de una v.a.

$F : R \rightarrow [0,1]$ tal que $F(x) = P(\{w \subset \Omega \ / \ \mathcal{X}(w) \leq x\})$ ($F(x) = P(\mathcal{X} \leq x)$)

" Distribución de una unidad de masa sobre la recta real."

" *F(x)* es la masa probabilística situada a la izquierda del punto *x*."

Variable aleatoria discreta

- El espacio muestral asociado es finito o numerable.

$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ " Puntos donde se concentra la masa probabilística."

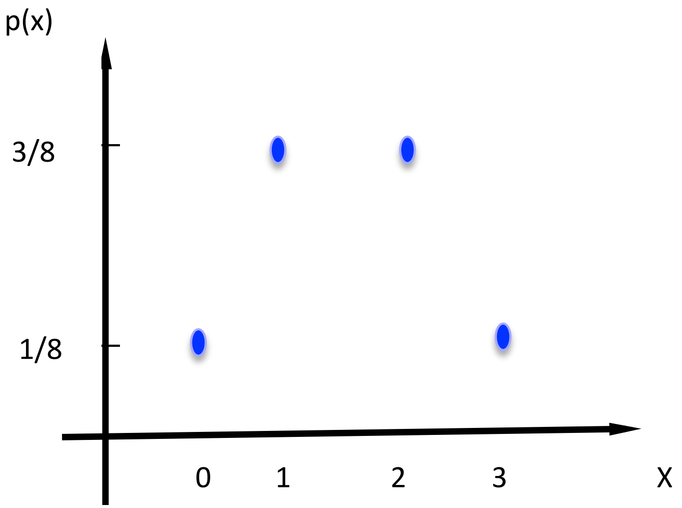
- Se entiende por $P(\mathcal{X} = x)$ a:

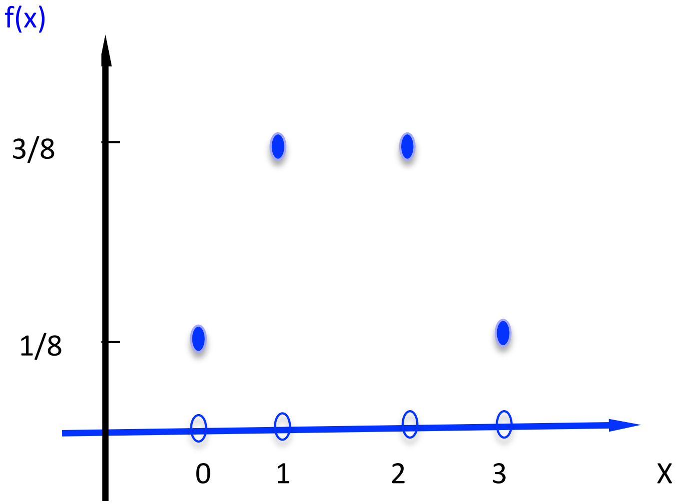
$$P(\mathcal{X} = x) = P(\mathcal{X}^{-1}(x)) = P(\{w \subset \Omega \ / \ \mathcal{X}(w) = x\})$$

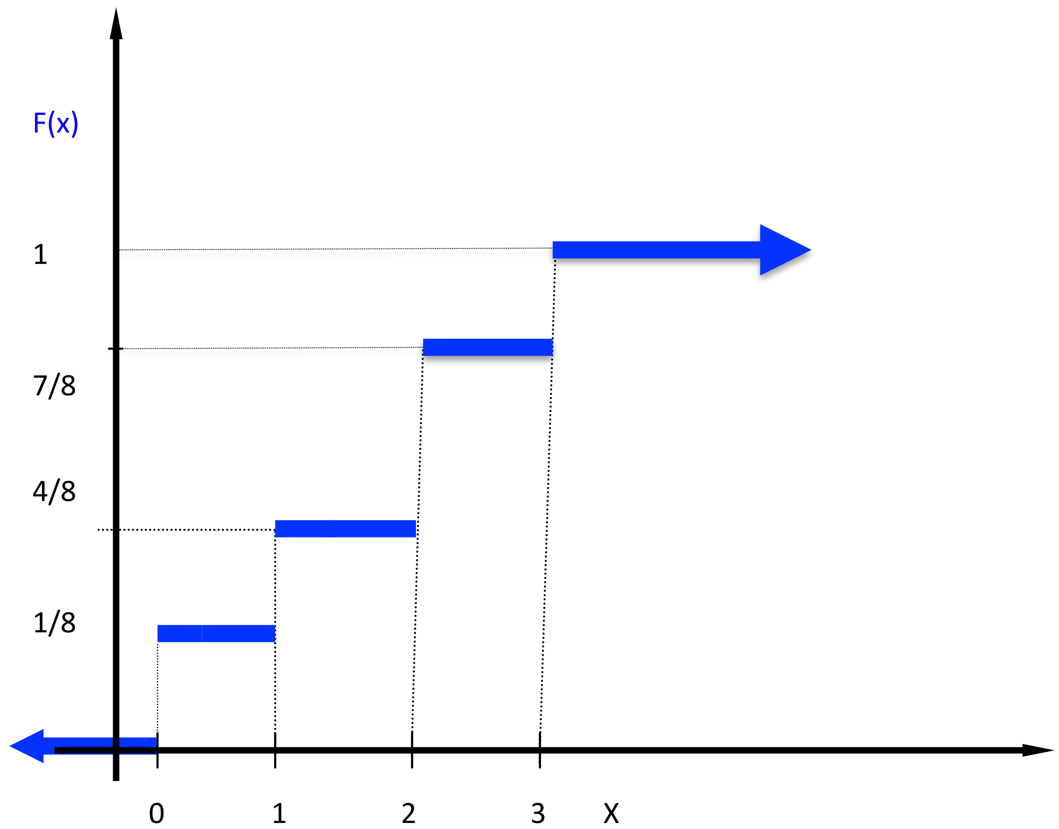
- *Distribución de probabilidad.*

$\mathcal{X}$	x_1	x_2	…	x_n
$P(\mathcal{X}=x)$	$P(\mathcal{X}=x_1)$	$P(\mathcal{X}=x_2)$	…	$P(\mathcal{X}=x_n)$

X	0	1	2	3	
P(x)	1/8	3/8	3/8	1/8	∑=1
F(x)	1/8	4/8	7/8	8/8	







$$F(0.5) = P\left(X \le 0.5\right) = P\left(X = 0\right) = \frac{1}{8}$$

$$F(1.5) = P\left(X \le 1.5\right) = P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

- $F(x) = P(\mathcal{X} \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(\mathcal{X} = x_i)$
- Función de densidad (f.d.d.) de una v.a. (o de cuantía)

$$f : R \rightarrow [0,1] \quad \text{tal que} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \forall\, x \notin S \\ P(\mathcal{X} = x) & si\ x \in S \end{cases}$$

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Variable aleatoria continua

- "La v.a. puede tomar un valor cualquiera dentro de un intervalo real".

S puede ser de la forma: $(a,b)\,;(-\infty,b)\,;(a,+\infty)\,;(-\infty,+\infty)$

- $P(a < \mathcal{X} < b) = P(\mathcal{X}^{-1}((a,b))) = P(\{w \in \Omega \ / \ a < \mathcal{X}(w) < b\})$

$P(\mathcal{X} = x_i) = 0$ ("distribuimos la masa probabilística en ∞ valores")

- $F(x) = P(X \leq x)$

- La f.d.d. de una v.a. X, $f(x)$ es una función $f: R \rightarrow [0,1]$ tal que:

  1. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

  2. $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$

- Relación entre la f.d.D. y la f.d.d.

  función de distribución   función de densidad

  1. $F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

  2. $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE CÓRDOBA
Universidad de Córdoba
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
EPSC

- Anotaciones:

1. Si $S=\{(a,b)\} \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = 1$, y además

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x \le a \\ \int_a^x f(x)\,dx & si \quad a < x < b \\ 1 & si \quad x \ge b \end{cases}$$

2. $P(X > x_i) = 1 - P(X \le x_i) = 1 - F(x_i) = \int_{x_i}^{+\infty} f(x)\,dx$

3. $P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1) - P(X = x_2) = F(x_2) - F(x_1)$