Cálculo - Grado en Ingeniería Informática
Relación de Ejercicios (Derivadas)

1. Aplica el Teorema de Rolle para demostrar que para todo número $m \in \mathbb{R}$, la ecuación $2x^5 + x + m = 0$ no puede tener dos soluciones reales.

2. Sea $f(x) = 1 + x^m(x-1)^n$ (m, n enteros positivos). Sin calcular $f'(x)$, demuestra que $f'(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0, 1)$.

3. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio definido por $p(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx_n$. Demostrar que si x_0 es una raíz positiva de $p(x)$ entonces el polinomio $g(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$ tiene una raíz positiva menor que x_0.

4. Sin calcular la derivada de la función $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, establezca el número de raíces que tiene $f'(x)$ e indica en que intervalos están.

5. Usando el Teorema del Valor Medio, demuestra que $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

6. En el segmento de la parábola $y = x^2$ comprendido entre los puntos $A(1, 1)$ y $B(3, 9)$, hallar un punto cuya tangente sea paralela a la cuerda AB.

7. La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.

1. Aplica el Teorema de Rolle para demostrar que para todo número $m \in \mathbb{R}$, la ecuación $2x^5 + x + m = 0$ no puede tener dos soluciones reales.

El teorema de Rolle dice que $f[a,b]$ continuo en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$ en algun punto, existe un $c \in [a,b]$ tal que $f'(c) = 0$

- Supongamos que $f(a) = f(b)$

  $f'(x) = 10x^4 + 1$ nunca sera igual a 0, ya que $10x^4$ siempre sera positivo y $+1$ no puede anularlo.

- No podemos encontrar c para que $f'(c) = 0$ por lo que no existen dos soluciones distintas para $2x^5 + x + m = 0$

2. Sea $f(x) = 1 + x^m(x-1)^n$ (m, n enteros positivos). Sin calcular $f'(x)$, demuestra que $f'(x) = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0, 1)$.

Por el teorema de Rolle, supogamos que tiene dos soluciones a y b que cumpleen que $0 < a - b < 1$. Sea $f : [a,b]$ continua y derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$ $\exists\, c \in [a,b]$ tal que $f'(c) = 0$.

Es decir $0 < a < c < b < 1$.

Como $f(x)$ es polinómica es continua en $\mathbb{R}$ y derivable

Como $f(0) = f(1)$ tendra al menos una solución en el intervalo para $f'(c) = 0$

3. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio definido por $p(x) = a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx_n$. Demostrar que si x_0 es una raíz positiva de $p(x)$ entonces el polinomio $g(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}$ tiene una raíz positiva menor que x_0.

Por el teorema de Rolle. Si x_0 es una raiz positiva de $p(x)$ significa que $p(x_0) = 0$. Sabiendo que $g(x) = p'(x)$ y $p(0) = 0$. Si en un intervalo continuo y derivable (como este), $[a, b]$; $p(a) = p(b)$ entonces $\exists\, c \in (a, b)$ tal que $p'(c) = g(c) = 0$ por ello en el intervalo $[0, x_0]$ y sabiendo que $p(0) = p(x_0) = 0$ y $p'(x) = g(x)$

Existe $c \in [0, x_0]$ tal que $g(c) = p'(c) = 0$. Que sera menor que x_0 ya que este es el mayor de los numeros del intervalo y 0 el menor por lo que sera positivo

4. Sin calcular la derivada de la función $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, establezca el número de raíces que tiene $f'(x)$ e indica en que intervalos están.

Aplicando el teorema de Rolle $f(x)$, es un polinomio, es decir, es continuo y derivable en $\mathbb{R}$. Tiene 4 raíces (1, 2, 3 y 4). Por ello debe tener, al menos, una raíz de f' en los 3 intervalos que se forman según el teorema.

$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$ por lo que hay 3 raíces en intervalos tales que $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$.

5. Usando el Teorema del Valor Medio, demuestra que $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Según el teorema del valor medio sea $f[a,b]$ continuo y derivable en (a,b). Entonces $\exists\, c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a-b}$. Cogemos como muestra $f(t) = \text{sen}(t)$, continua y derivable, donde como extremos tenemos x e y. Por lo que $\exists\, c \in (x,y)$, es decir $f'(c) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x-y}$; $f'(t) = -\cos(t)$.
Tomando valores absolutos $|\cos(c)| = \dfrac{|\text{sen}\, x - \text{sen}\, y|}{|x-y|}$; sabemos que $\cos(c) \leq 1$ por lo que $|\text{sen}(x) - \text{sen}(y)| \leq |x-y|$ para que se cumpla

6. En el segmento de la parábola $y = x^2$ comprendido entre los puntos $A(1, 1)$ y $B(3, 9)$, hallar un punto cuya tangente sea paralela a la cuerda AB.

Según el teorema del valor medio:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \; ; \; 2c = \frac{3^2 - 1^2}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{3 - 1} = 4 \; ; \; c = 2$$

Punto $C = C(2, f(2)) = C(2, 4)$

7. La suma de tres números positivos es 30. El primero más el doble del segundo, más el triple del tercero suman 60. Elegir los números de modo que el producto de los tres sea el mayor posible.

$x + y + z = 30 \quad ; \quad x = 30 - y - z$

$x + 2y + 3z = 60 \; ; \; (30 - y - z) + 2y + 3z = 60 \; ; \; y + 2z = 30 \; ; \; y = 30 - 2z$

$x = 30 - y - z \; ; \; x = 30 - (30 - 2z) - z \; ; \; x = z$

La fución a maximizar es $xyz = x^2 y$ donde sustituyendo la y

$f(x) = x^2(30 - 2z) = x^2(30 - 2x) = 30x^2 - 2x^3$

$f'(x) = 60x - 6x^2 \; ; \; -6x(x^2 - 10x) = 0 \; ; \; x_1 = 10 \; ; \; x_2 = 0$

$f''(x) = 60 - 12x$

$f''(0) = 60 > 0$ mínimo

$f''(10) = -60 < 0$ máximo

$x + y + z = 2x + y = 20 + y = 30 \; ; \; y = 10 \; ; \; x = y = z = 10$