Matemática Discreta - Grado en Ing. Informática
Relación de Ejercicios 2 (Teoría de Grafos)

1. Sea G un grafo tal que $|V(G)| = 9$. Se conoce que todos sus vértices tienen grado 5 o 6. Demuestra que si no hay 5 vértices de grado 6, entonces forzosamente hay al menos 6 vértices de grado 5.

2. La siguiente tabla representa la distancia entre varios aeropuertos unidos por una línea aérea.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	5	3	2	–	–	–
B	5	0	2	–	3	–	1
C	3	2	0	7	7	–	–
D	2	–	7	0	2	6	–
E	–	3	7	2	0	1	1
F	–	–	–	6	1	0	–
G	–	1	–	–	1	–	0

   a) Calcula, aplicando el algoritmo de Dijkstra, la distancia mínima entre el aeropuerto A y el resto de aeropuertos.

3. Demuestra que todo árbol (grafo conexo sin ciclos) de orden $n \geq 2$ tiene al menos dos hojas (vértices de grado 1).

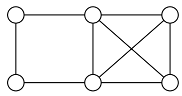
4. Calcula el número de hojas de un árbol que tiene un vértice de grado 3, tres vértices de grado 2 y el resto vértices de grado 1.

5. Determina si la siguiente secuencia es una secuencia gráfica: $s: \; 6, 6, 4, 4, 1, 4, 3$

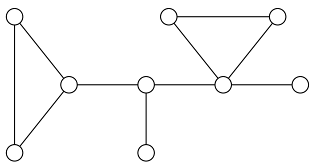
6. Sea D el conjunto formado por todos los subconjuntos de cardinalidad 2 del conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (a) Construye el grafo G cuyos vértices son los elementos de D y donde dos vértices son adyacentes si tienen intersección vacía.
   Ejemplo: $\{1, 2\}, \{3, 5\} \in D$. Además, los vértices $\{1, 2\}$ y $\{3, 5\}$ son adyacentes en G porque $\{1, 2\} \cap \{3, 5\} = \emptyset$.

7. Calcula el polinomio cromático del grafo G dado en la siguiente figura.



8. Calcula el polinomio cromático del grafo G dado en la siguiente figura.



9. En la Escuela Politécnica Superior de Córdoba se desea organizar un festival de cine. Se desea proyectar un total de 10 películas, llamadas $P_1, \ldots, P_{10}$. Al no disponer del tiempo suficiente, algunas películas se exhibirán a la misma hora. A cada alumno se le pide que escriba las dos películas que desearía ver, y como resultado de la encuesta se obtienen las siguientes parejas de películas: (P_1, P_5), (P_1, P_6), (P_2, P_3), (P_2, P_5), (P_2, P_8), (P_3, P_4), (P_3, P_{10}), (P_4, P_7), (P_4, P_9), (P_6, P_7), (P_7, P_9), (P_7, P_{10}). ¿Es posible diseñar un horario que satisfaga las peticiones de todos los alumnos de manera que el número de sesiones diferentes sea a lo sumo 4?

1. Sea G un grafo tal que $|V(G)| = 9$. Se conoce que todos sus vértices tienen grado 5 o 6. Demuestra que si no hay 5 vértices de grado 6, entonces forzosamente hay al menos 6 vértices de grado 5.

Hay menos de 5 vértices X_5. Entonces máximo hay 4 vertices X_6. El numero de vertices X_5:

$$X_6 + X_5 = 9$$
$$X_5 = 9 - X_6$$

Posibles casos

Si $X_6 > 5$:

- $X_6 = 4 \longrightarrow X_5 = 9 - 4 = 5 \longrightarrow$ No pueden haber vertices impares
- $X_6 = 3 \longrightarrow X_5 = 9 - 3 = 6$
- $X_6 = 2 \longrightarrow X_5 = 9 - 2 = 7 \longrightarrow$ No pueden haber vertices impares
- $X_6 = 1 \longrightarrow X_5 = 9 - 1 = 8$
- $X_6 = 0 \longrightarrow X_5 = 9 - 0 = 9 \longrightarrow$ No pueden haber vertices impares

Quedando dos casos

$X_6 = 3$, $X_5 = 6$

$X_6 = 1$, $X_5 = 8$

En ambos casos hay mínimo 6 vertices en grado 5

2. La siguiente tabla representa la distancia entre varios aeropuertos unidos por una línea aérea.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	5	3	2	–	–	–
B	5	0	2	–	3	–	1
C	3	2	0	7	7	–	–
D	2	–	7	0	2	6	–
E	–	3	7	2	0	1	1
F	–	–	–	6	1	0	–
G	–	1	–	–	1	–	0

a) Calcula, aplicando el algoritmo de Dijkstra, la distancia mínima entre el aeropuerto A y el resto de aeropuertos.

S_i	A	B	C	D	E	F	G	
A	(0, A)	(5, A)	(3, A)	(2, A)	∞	∞	∞	A - D
A, D	(0, A)	(5, A)	(3, A)	(2, A)	(4, D)	(8, D)	∞	A - C
A, C, D	(0, A)	(5, A)	(3, A)	(2, A)	(4, D)	(8, D)	∞	A - D - E
A, C, D, E	(0, A)	(5, A)	(3, A)	(2, A)	(4, D)	(5, E)	(5, E)	A - B
A, B, C, D, E	(0, A)	(5, A)	(3, A)	(2, A)	(4, D)	(5, E)	(5, E)	A - D - F
A, B, C, D, E, F	(0, A)	(5, A)	(3, A)	(2, A)	(4, D)	(5, E)	(5, E)	A - D - G
A, B, C, D, E, F, G	(0, A)	(5, A)	(3, A)	(2, A)	(4, D)	(5, E)	(5, E)	

(A, B) = 5 = A - B

(A, C) = 3 = A - C

(A, D) = 2 = A - D

(A, E) = 4 = A - D - E

(A, F) = 5 = A - D - E - F

(A, G) = 5 = A - D - E - G

3. Demuestra que todo árbol (grafo conexo sin ciclos) de orden $n \geq 2$ tiene al menos dos hojas (vértices de grado 1).

Vertices $= n \geq 2$

Árbol = Conexo y sin ciclos

Aristas $= n-1$

Para $n = 2$:

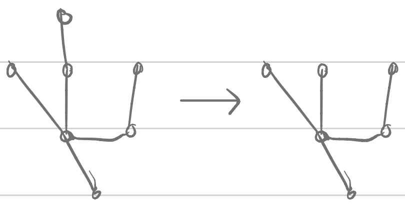
$2x_1$: o—o (Dos hojas)

Para $n = K+1$

Supongamos que cumple que hay mínimo $2x_1$

Para $n = K$

Al quitar un vértice eliminamos una hoja manteniendo que es un árbol. Al hacer este proceso mínimo se ha generado 1 nueva hoja.



Cumpliendose lo deseado

4. Calcula el número de hojas de un árbol que tiene un vértice de grado 3, tres vértices de grado 2 y el resto vértices de grado 1.

Para que dicho árbol se cumpla debe de ser:

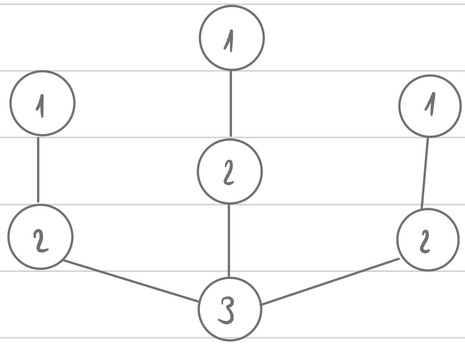
$n = 1 + 3 + X_1$

$m = 3 + 3 \cdot 2 + X_1 = 9 + X_1 = 2(n-1)$

$9 + X_1 = 2(n-1) = 2((1+3+X_1)-1) = 6 + 2X_1$

$9 + X_1 = 6 + 2X_1 ; X_1 = 3$

Hay 3 hojas en el árbol



5. Determina si la siguiente secuencia es una secuencia gráfica: $\quad s: \; 6, 6, 4, 4, 1, 4, 3$

$\cancel{6}, 6, 4, 4, 4, 3, 1$

$\cancel{5}, 3, 3, 3, 3, 0$

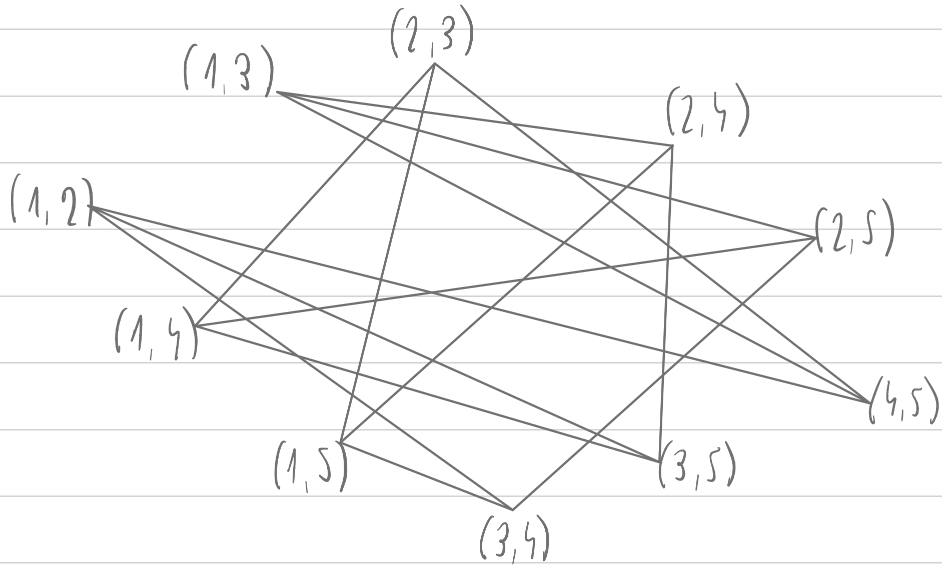
$2, 2, 2, 2, -1$

No es gráfica

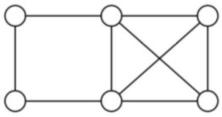
6. Sea D el conjunto formado por todos los subconjuntos de cardinalidad 2 del conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

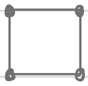
   (a) Construye el grafo G cuyos vértices son los elementos de D y donde dos vértices son adyacentes si tienen intersección vacía.
   Ejemplo: $\{1, 2\}, \{3, 5\} \in D$. Además, los vértices $\{1, 2\}$ y $\{3, 5\}$ son adyacentes en G porque $\{1, 2\} \cap \{3, 5\} = \emptyset$.

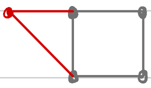
$\{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$

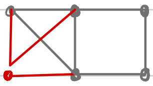


7. Calcula el polinomio cromático del grafo G dado en la siguiente figura.



 $\longrightarrow P_{C_4}(x) = x(x-1)(x^2-3x+3)$

$G_1 =$  $\longrightarrow (x-2)P_{C_4}(x) = x(x-1)(x-2)(x^2-3x+3)$

$G_2 =$  $\longrightarrow (x-3)P_{G_1}(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x^2-3x+3)$

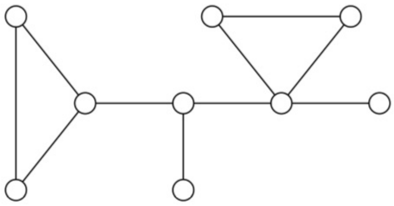
$= (x-1)(x-2)(x-3)(x^3-3x^2+3x)$

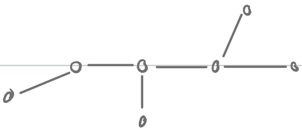
$= (x-2)(x-3)(x^4-4x^3+6x^2-3x)$

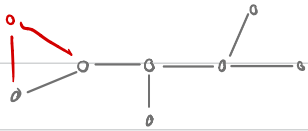
$= (x-3)(x^5-6x^4+14x^3-15x^2+6x)$

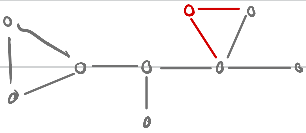
$= x^6-9x^5+32x^4-57x^3+51x^2-18x$

8. Calcula el polinomio cromático del grafo G dado en la siguiente figura.



 $= P_T(x) = x(x-1)^6$

$G_1 =$  $= (x-2)\, P_T(x) = x(x-1)^6(x-2)$

$G_2 =$  $= (x-2)\, G_1 = x(x-1)^6(x-2)^2$

$= x^9 - 10x^8 + 43x^7 - 104x^6 + 155x^5 - 146x^4 + 85x^3 - 28x^2 + 4x$

9. En la Escuela Politécnica Superior de Córdoba se desea organizar un festival de cine. Se desea proyectar un total de 10 películas, llamadas $P_1, \ldots, P_{10}$. Al no disponer del tiempo suficiente, algunas películas se exhibirán a la misma hora. A cada alumno se le pide que escriba las dos películas que desearía ver, y como resultado de la encuesta se obtienen las siguientes parejas de películas: (P_1, P_5), (P_1, P_6), (P_2, P_3), (P_2, P_5), (P_2, P_8), (P_3, P_4), (P_3, P_{10}), (P_4, P_7), (P_4, P_9), (P_6, P_7), (P_7, P_9), (P_7, P_{10}). ¿Es posible diseñar un horario que satisfaga las peticiones de todos los alumnos de manera que el número de sesiones diferentes sea a lo sumo 4?

se puede en 3