Capítulo 6

Aplicaciones de la integral

6.1. Área como integral

En el tema anterior hemos usado la noción de área como modelo para la definición de integral definida. No es sorprendente descubrir que se puede expresar el área bajo una curva como una integral definida. Sin embargo, las integrales pueden ser positivas, cero o negativas y no es admisible que el área bajo una curva sea una cantidad negativa. La relación entre áreas bajo curvas e integrales se describe en el siguiente enunciado, que se deduce del hecho de que toda función continua en un intervalo es integrable y de la definición de área como límite de una suma.

Área como integral

Supongamos que f es continua y que $f(x) \geq 0$ en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces el área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es la integral definida de f en $[a, b]$, es decir

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx.$$

Supongamos que f es continua y que $f(x) \leq 0$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ y no necesariamente positiva. Entonces el área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es

$$\text{Área} = \int_a^b |f(x)|dx = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

Supongamos que f es continua y corta al eje de abcisas en un punto $c \in (a, b)$. Entonces el área puede calcularse:

$$\text{Área} = \int_a^c |f(x)|dx + \int_c^d |f(x)|dx.$$

En general, si hay varios puntos de corte $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ con el eje de abcisas, primero integramos en cada subintervalo $[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots [c_n, b]$ y después sumamos los valores absolutos de todas las integrales.

6.2. Área comprendida entre dos curvas

Hemos visto cómo se puede hallar el área comprendida bajo una curva $y = f(x)$ y el eje x, en un intervalo $[a, b]$ donde $f(x) \geq 0$, calculando la integral $\int_a^b f(x)dx$, y más generalmente sin pedir que $f(x) \geq 0$, teniendo corte con el eje x. En esta sección veremos cómo usar la integración para hallar áreas de regiones más generales, comprendidas entre curvas.

6.2.1. Área comprendida entre dos curvas

En la práctica hay que calcular a veces el área comprendida entre dos curvas. A partir de unas modificaciones se puede extender la aplicación de las integrales definidas para el área bajo una curva al área de una región entre dos curvas. Supongamos que f y g son funciones tales que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

Para hallar el área de la región entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, desde $x = a$ hasta $x = b$, restamos el área bajo la curva de abajo del área bajo la curva de arriba. En otras palabras:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Esta fórmula parece obvia cuando $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$. Sin embargo, la siguiente deducción exige sólo que f y g sean continuas y que satisfagan $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$:

Queremos hallar el área entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en ese intervalo. Se toma una partición $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ del intervalo $[a, b]$ y se elige un representante x_k^* en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ se construye un rectángulo de anchura $\lambda x_k = x_k - x_{k-1}$ y altura $f(x_k^*) - g(x_k^*)$, que es igual a la distancia entre las dos curvas en la vertical $x = x_k^*$. El área del rectángulo es $[f(x_k^*) - g(x_k^*)]\lambda x_k$ y se puede estimar el área total entre las dos curvas por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\lambda x_k.$$

Es razonable pensar que esta aproximación mejorará si aumentamos el número de puntos de subdivisión de la partición P, de tal forma que la norma $\|P\|$ tienda a cero. Así, el área de la región entre las dos curvas será

$$\text{Área} = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\lambda x_k$$

que coincide con la integral de la función $f(x)-g(x)$ en el intervalo $[a,b]$. Se pueden usar estas observaciones para definir el área entre dos curvas:

Área entre dos curvas

si f y g son continuas y verifican $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a,b]$, entonces el área entre las dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ es

$$\text{Área} = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Esto quiere decir que para hallar el área entre dos curvas en un intervalo cerrado $[a,b]$, usemos la fórmula

$$\text{Área} = \int_a^b [\text{Curva superior} - \text{Curva inferior}]dx$$

No es necesario que cada curva esté por encima del eje x. De hecho, veremos más adelante que las curvas se pueden cruzar en el dominio, luego una está arriba en parte del intervalo y la otra lo está en lo que resta.

Ejemplo

Hállese el área de la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = x^2 - x$ en el intervalo $[0,1]$.

Tenemos que averiguar qué curva es la de arriba en el intervalo $[0,1]$. Resolviendo la ecuación $x^3 = x^2 - x$, o sea, $x(x^2 - x + 1) = 0$, se obtiene $x = 0$ como única raiz real, puesto que $x^2 - x + 1 = 0$ no tiene raices reales. Así, una de las dos curvas permanece en la posición de arriba en todo el intervalo. Para ver cuál es esa curva, se toma un valor cualquiera del intervalo, por ejemplo, $x = 0,5$. Como $0,5^3 > 0,5^2 - 0,5$, la curva $y = x^3$ debe estar por encima de $y = x^2 - x$. Entonces el área pedida es

$$A = \int_0^1 [x^3 - (x^2 - x)]dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{5}{12}.$$

En la sección anterior, empezamos definiendo el área para una función continua f con la restricción de que $f(x) \geq 0$, y después la definimos en otros casos. El ejemplo que acabamos de ver nos muestra que, cuando se trata del área entre dos curvas, no nos importa la restricción de no negatividad, y sólo importa el que $f(x) \geq g(x)$. Esta idea se puede usar para hallar el área de una región delimitada por una función negativa $y = g(x)$ y el eje x. Para ello, hallamos primero los puntos de corte de la función g con el eje x. Llamemos a estos puntos a y b. Tomamos como curva superior, al eje x, de ecuación $y = 0$, y la curva $y = g(x)$ como curva inferior. Entonces, el área será:

$$A = \int_a^b [0 - g(x)]dx = \int_a^b (-g(x))dx.$$

Observemos que, en este caso,

$$\int_a^b (-g(x))dx = \int_a^b |g(x)|dx,$$

tal y como habíamos determinado que se calcula el área en este caso.

6.2.2. El área por bandas verticales

La única manera matemáticamente correcta de deducir una fórmula integral es formar las sumas de Riemann y tomar límite, según la definición de integral definida. No obstante, podemos simular este procedimiento mediante bandas aproximantes. Esta simplificación es especialmente útil para hallar el área de una región complicada, constituida por dos curvas que se cortan una o más veces.

Observemos que una banda vertical tendrá altura $f(x) - g(x)$ si $y = f(x)$ está por encima de $y = g(x)$, y tiene altura $g(x) - f(x)$ si $y = g(x)$ está por encima de $y = f(x)$. En cualquier caso la altura es $|f(x) - g(x)|$ y el área de la banda vertical es

$$\Delta A = |f(x) - g(x)|\Delta x = |f(x) - g(x)|dx.$$

De esta manera tenemos una nueva fórmula integral para el área, a saber:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx.$$

Ejemplo

Hállese el área de la región limitada por la recta $y = 3x$ y la curva $y = x^3 + 2x^2$.

Una parte del proceso de dibujar esas curvas es ver cuál está arriba y cuál abajo. Para ver esto necesitamos primero hallar dónde se cortan:

$$x^3 + 2x^2 = 3x \Rightarrow x(x + 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, -3, 1.$$

Los puntos de intersección son $x = -3$, 0 y 1, luego tenemos dos subintervalos: $[-3, 0]$ y $[0, 1]$. Tomamos un punto en cada uno y comparamos el valor de las funciones en esos puntos para saber cuál es la que está por encima y cuál la que está por debajo. En este caso, sobre el subintervalo $[-3, 0]$ la curva $y = x^3 + 2x^2$ está arriba. Sobre el subintervalo $[0, 1]$ la curva $y = 3x$ está arriba. Así, el área entre la parábola y la recta está dada por la suma:

$$A = \int_{-3}^{0} [(x^3 + 2x^2) - 3x]dx + \int_{0}^{1} [3x - (x^3 + 2x^2)]dx = \frac{71}{6}.$$

Observemos que no se puede usar directamente la fórmula $\int [f - g]dx$ en este ejemplo porque no se satisface la hipótesis $f \geq g$. Para poder usar la fórmula $\int |f - g|dx$ sobre el intervalo entero, hay que darse cuenta de que $|f - g|$ puede ser igual a $f - g$ en parte del intervalo e igual a $g - f$ en otra parte. Hay pues que asegurarse de cuál es la curva de arriba. Como las curvas del ejemplo se cortan, hay que subdividir adecuadamente el intervalo.

6.2.3. El área por bandas horizontales

En muchos casos es más apropiado formar bandas horizontales que verticales. El procedimiento para aquéllas es análogo al de éstas. Supongamos que queremos hallar el área entre las dos curvas de la forma $x = F(y)$ y $x = G(y)$ en el intervalo $[c, d]$. Independientemente de qué curva esté delante o detrás, la base de una banda horizontal es $|F(y) - G(y)|$ y su área es $\Delta A = |F(y) - G(y)|\Delta y$. En la práctica hay que asegurarse de hallar los puntos de corte de las curvas, y dividir los intervalos de integración de tal manera que en uno de ellos haya una sóla curva a la derecha ("la curva de cabeza") y otra a la izquierda ("la curva de cola"). Supongamos que las curvas se cortan para $y = b$, donde b pertenece al intervalo $[c, d]$, que G está en cabeza en el subintervalo $[c, b]$ y que F está en cabeza en el subintervalo $[b, d]$. Entonces

$$A = \int_{c}^{b} [G(y) - F(y)]dy + \int_{b}^{d} [F(y) - G(y)]dy.$$

Ejemplo

Hállese el área de la región entre la parábola $x = 4y - y^2$ y la recta $x = 2y - 3$.

Para hallar dónde se cortan la recta y la parábola se resuelve la ecuación $4y - y^2 = 2y - 3$, lo que da como raices $y = -1$ e $y = 3$. En el intervalo $[-1, 3]$, la parábola está a la derecha de la recta (se comprueba tomando un punto, por ejemplo $y = 0$). Así, la banda horizontal tiene área

$$\Delta A = [(4y - y^2) - (2y - 3)]\Delta y$$

y el área entre la parábola y la recta viene dada por

$$A = \int_{-1}^{3} [(4y - y^2) - (2y - 3)]dy = \int_{-1}^{3} (3 + 2y - y^2)dy = \frac{20}{3}.$$

El área de este ejemplo se podría hallar también usando bandas verticales, pero es más complicado. par

Una aplicación importante de las integrales definidas se da en economía para estudiar beneficios netos generados con el tiempo, así como una cierta magnitud económica llamada plus del consumidor. Nosotros evidentemente no la estudiaremos.

Una vez que hemos visto cómo el área se puede expresar como un integral definida, el objetivo es ahora estudiar otras aplicaciones de la integración, como cálculo de volúmenes, longitudes de arcos de curvas, áreas de superficies, aplicaciones físicas como trabajo, fuerza hidrostática y centros de gravedad , etc.

6.3. Volúmenes: Discos, arandelas y láminas

Puesto que ya hemos visto cómo calcular áreas por integrales, nuestro primer objetivo en esta sección es calcular volúmenes.

6.3.1. El método de las secciones

El volumen es un número que describe "a extensión espacial" de un sólido. Se mide en unidades cúbicas, definiendo una unidad cúbica como el volumen de un cubo de arista unidad.

Se puede considerar a un cilindro circular recto compuesto de un cierto número de discos iguales (por ejemplo monedas), apilados unos encima de otros. El volumen es, entonces, el producto del área A de la sección común por la altura h. Por ejemplo, un cilindro circular recto de radio de la base r y altura h tiene un área de la base $A = \pi r^2$ y un volumen $V = \pi r^2 h$.

Se puede usar un método análogo para hallar el volumen de otros sólidos cuyas secciones trasversales se conocen. Sin embargo, cuando estas secciones no tienen el mismo área hay que usar Cálculo para resolver el problema.

Sea S un sólido y supongamos que, para $a \leq x \leq b$, la sección S perpendicular al eje x en x tiene un área $A(x)$. Imaginemos que el sólido está cortado en rodajas muy finas, de área $A(x)$ y grosor Δx.

Para hallar el volumen de S tomamos una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo $[a, b]$ y elegimos un número representante x_k^* en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Ahora consideramos una partición del sólido de altura $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y área de la sección constante, igual a $A(x_k^*)$. Esta porción tiene un volumen igual a $\Delta V_k = A(X_k^*)\Delta x_k^*$, y sumando los volúmenes de todas ellas obtenemos una aproximación del volumen del sólido:

$$\Delta V = \sum_{k=1}^{n} A(X_k^*)\Delta x_k^*.$$

La aproximación mejora conforme crece el número de puntos de la partición. Así es razonable definir el volumen del sólido S como el límite de V cuando la norma de la partición tiende a cero, es decir:

$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} A(X_k^*)\Delta x_k^*.$$

Esto es igual a la integral definida $\int_a^b A(x)dx$. En resumen:

Volumen de un sólido con área de sección trasversal conocida

El volumen de un sólido S tal que el área de una sección perpendicular al eje x es $A(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es igual a

$$V = \int_a^b A(x)dx.$$

Ejemplo

La base de un sólido es la región del plano xy limitada por el eje y y las rectas $y = 1 - x$, $y = 2x + 5$ y $x = 3$. Cada sección perpendicular al eje x es un cuadrado. Halle el volumen del sólido.

Podemos imaginar al sólido formado por rodajas finas, que son las secciones trasversales cuadradas. Dibujemos la base en el plano bidimensional y luego hallamos el volumen de la rodaja k-ésima.Hacemos esta construcción tomando una rodaja cuadrada sobre cada subintervalo. Si tomamos una rodaja de anchura Δx y altura L, su volumen será

$$\Delta V = L^2\Delta x = L^2(x)\Delta x = [(2x + 5) - (1 - x)]^2\Delta x = (3x + 4)^2\delta x.$$

Se obtiene el volumen del sólido entero integrando, “para sumar” todos los volúmenes ΔV. Así se tiene que el volumen del sólido es

$$V = \int_0^3 (3x + 4)^2 dx = \int_0^3 (9x^2 + 24x + 16)dx = [3x^3 + 12x^2 + 16x]_0^3 = 237.$$

6.3.2. Volúmenes de sólidos de revolución: discos y arandelas

Un *sólido de revolución* es el que se obtiene haciendo girar una región R del plano xy alrededor de una recta l llamada *eje de revolución*. Se puede imaginar a un sólido de revolución compuesto por secciones circulares en la dirección perpendicular a l.

Supongamos que f es una función continua y que $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$. Queremos hallar el volumen del sólido de revolución que se obtiene haciendo girar la región bajo la curva y el eje x en el intervalo $[a, b]$ alrededor del eje x. El eje de revolución es horizontal y está en la frontera de la región R. La estrategia será tomar bandas verticales y hacerlas girar alrededor del eje x, de tal manera que formen discos (esto es, cilindros circulares rectos y delgados) que aproximen pequeñas porciones del volumen deseado.

Podemos calcular el volumen total de S usando integración para sumar los volúmenes de todos los discos aproximantes. Recuerdese que la fórmula del volumen de un cilindro es Ah donde A es el área de la base y h es la altura. Se puede imaginar que el sólido de revolución está formado por secciones perpendiculares al eje de rotación, que son discos circulares de volumen

$$\Delta V = \pi |f(x_k^*)|^2 \Delta x_k,$$

donde $f(x_k^*)$ es la altura de una banda vertical genérica y Δx_k es la anchura de dicha banda.

El volumen total se halla por integración:

$$V = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \pi |f(x)|^2 dx$$

donde $A(x)$ es el área de la base y dx es el grosor.

Se puede resumir este proceso así:

El método del disco

El *método del disco* se usa para hallar el volumen generado por una región R que gira alrededor de una recta L perpendicular a una banda aproximante genérica. En particular, si se trata de una región R limitada por una curva $y = f(x)$, el eje x (que es el eje de giro) y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, entonces el volumen es

$$V = \int_a^b \pi y^2 dy = \int_a^b \pi |f(x)|^2 dx.$$

Ejemplo

Halle el volumen del sólido S que se forma al girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = x^2 + 1$ en el intervalo $[0, 2]$.

$$V = \pi \int_0^2 (x^2+1)^2 dx = \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1) dx = \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^2 = \frac{206}{15}\pi.$$

Con una pequeña modificación del método del disco podemos hallar el volumen de un sólido generado haciendo girar alrededor del eje x la región comprendida entre dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, donde $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$. Tomando una pequeña banda vertical genérica y haciéndola girar, se obtiene lo que se llama una *arandela*, cuyo área es $\pi[f(x)^2 - g(x)^2]$. El volumen del sólido de revolución se define por la fórmula que damos a continuación:

El método de la arandela

Sean f y g funciones continuas tales que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea R la región limitada por arriba por $y = f(x)$, por abajo por $y = g(x)$, y por los lados por $x = a$ e $y = b$. El *método de la arandela* dice que el volumen generado haciendo girar esa región alrededor del eje x es igual a

$$V = \int_a^b \pi \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right) dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx.$$

donde $f(x)$ es el radio exterior y $g(x)$ es el radio interior.

Los métodos del disco y de la arandela se pueden aplicar también cuando el eje de revolución no es el eje x. Vamos a estudiar con un ejemplo lo que pasa cuando una región gira no sólo alrededor del eje x, sino también de otros ejes.

Ejemplo

Sea R la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$. Halle el volumen del sólido que se genera cuando R gira alrededor de

a. el eje x **b.** el eje y **c.** de la recta $y = 2$.

Se hallan primero los puntos de intersección de la recta y la parábola. Resolviendo la ecuación $x^2 = x$ hallamos las soluciones $x = 0, 1$, que son las abcisas de esos puntos.

a. Se considera el sólido que forma la región R girando alrededor del eje x. Nótese que la recta está siempre por encima de la parábola en el intervalo $[0, 1]$. Para aproximar un elemento del volumen de revolución se forma una arandela de radio exterior $y = x$ y radio interior $y = x^2$. Así el volumen buscado es

$$V = \pi \int_0^1 [x^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}.$$

b. Como ahora gira R alrededor del eje y, tomamos bandas horizontales para aproximar el sólido de revolución. Nótese que la parábola $x = \sqrt{y}$ está a la derecha de la recta $x = y$ en el intervalo $[0, 1]$, luego la arandela aproximante tiene radio exterior $\sqrt{y}$ y radio interior y. Por tanto,

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{y})^2 - (y)^2]dy = \pi \int_0^1 (y - y^2)dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

c. El radio exterior es $R(x) = 2 - x^2$ y el interior es $r(x) = 2 - x$. El volumen es

$$V = \pi \int_0^1 [(2-x^2)^2-(2-x)^2]dx = \pi \int_0^1 (x^4-5x^2+4x)dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{8\pi}{15}.$$

En los métodos del disco y de la arandela hay que asegurarse de que las bandas aproximantes sean perpendiculares al eje de revolución.

6.3.3. El método de las láminas cilíndricas

A veces es más fácil (o incluso necesario) para calcular un volumen tomar las bandas aproximantes paralelas al eje de rotación, en lugar de perpendiculares como en los métodos del disco y de la arandela. Sea R la región bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, y consideremos una banda vertical. Cuando se gira esta banda alrededor del eje y forma lo que se llama una *lámina cilíndrica*.

Cuando se gira la banda aproximante alrededor del eje y genera una lámina cilíndrica de altura $f(x)$ y grosor Δx. Como la banda vertical está a x unidades del eje de rotación y se supone que es muy delgada, la sección perpendicular al eje y será una circunferencia de radio x y longitud $2\pi x$. Si imaginamos que se corta y aplana la lámina, nos da un objeto rectangular de volumen

$$\Delta V = 2\pi f(x) \cdot \Delta x,$$

donde $2\pi f(x)$ es el área de la sección y Δx es el grosor.

Por tanto, el volumen del sólido vendrá dado por la integral

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Método de las láminas cilíndricas

El método de las láminas sirve para hallar el volumen de una región formada girando una región plana R alrededor de una recta que es paralela a una banda aproximante genérica. En particular, si R es la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ donde $0 \leq a \leq b$, entonces el volumen del sólido correspondiente es

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

Ejemplo

Halle el volumen del sólido de revolución que se obtiene girando la región limitada por las gráficas de $y = x^3 + x^2 + 1$, $x = 1$ y $x = 3$ alrededor del eje y.

Éste es un buen ejemplo para ilustrar el método de las láminas. Una lámina vertical genérica tiene altura $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, luego su volumen, por el método de las láminas, es

$$V = 2\pi \int_1^3 x(x^3+x^2+1)dx = 2\pi \int_1^3 (x^4+x^3+x)dx = 2\pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 144,8\pi.$$

6.4. Longitudes y áreas

Si se pide medir manualmente la longitud de un arco de curva, se adapta un hilo a su forma y luego se mide con una regla. En esta sección vamos a ver cómo se puede realizar matemáticamente esa medida con la integración. También daremos un procedimiento general para calcular el área de ciertos sólidos.

6.4.1. Longitud de un arco de curva

Una función *continuamente derivable* en un intervalo es una función f que tiene derivada continua en él. El trozo de la gráfica que está entre las abcisas $x = a$ y $x = b$ se llama el *arco* en el intervalo $[a, b]$. Para hallar la longitud de este arco tomamos una partición del intervalo $[a, b]$ por los puntos $\{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$. Designemos por P_k al punto (x_k, y_k) de la gráfica, donde $y_k = f(x_k)$. Uniendo los puntos $P_0, P_1, \ldots P_n$ obtenemos una poligonal cuya longitud aproxima a la del arco de curva. La longitud de la poligonal es la suma de las longitudes s_k de los segmentos $\overline{P_{k-1}P_k}$. Si aplicamos la fórmula de la distancia entre dos puntos, poniendo $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\delta y_k = y_k - y_{k-1}$ obtenemos que:

$$L_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}{(\Delta X_k)^2}} \Delta x_k = \sqrt{1 + \frac{(\Delta y_k)^2}{(\Delta x_k)^2}} \Delta x_k.$$

Es razonable pensar que haya una relación entre la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y la derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. Se puede demostrar que $L_k = \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k$ para un cierto número x_k^* entre x_{k-1} y x_k. Por tanto, la longitud del arco de la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$ se puede aproximar por la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k.$$

Se puede mejorar la aproximación aumentando el número de puntos de la partición P del intervalo $[a, b]$ de tal forma que las longitudes de todos los subintervalos tienden a cero. Así es razonable definir el arco de curva como el límite

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k.$$

Nótese que, si $f'(x)$ es continua en $[a, b]$, también lo es $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Así, cumpliéndose esta hipótesis, ese límite existe y es igual a la integral de $\sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}$ con respecto a x en el intervalo $[a, b]$. Estas observaciones se plasman en la definición siguiente

Longitud de un arco de curva

Sea f una función con derivada continua en el intervalo $[a, b]$. La longitud s del arco de la gráfica de $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es, por definición, la integral

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

De manera análoga, si $x = g(y)$ es una función con derivada continua en el intervalo $[c, d]$, la longitud s del arco entre $y = c$ e $y = d$ es, por definición, la integral

$$\int_c^d \sqrt{1 + [g'(x)]^2}dx$$

Hemos utilizado la integración para lograr una definición con sentido de longitud de un arco de curva para una función f con derivada continua en un intervalo. Se puede generalizar la definición a otros tipos de curvas, pero no trataremos ese tema aquí. Quizás sea sorprendente saber que hay curvas planas cuya longitud no se puede definir. Las curvas cuya longitud se puede definir se llaman *rectificables* y aquellas que no, se llaman *no rectificables*.

Ejemplo

Hallar la longitud del arco de la curva $y = x^{\frac{3}{2}}$ en el intervalo $[0, 4]$.

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}x^{frac12}\right]^2}dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}xdx} = \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}}\right]_0^4 \approx 9,073415$$

6.4.2. Área de una superficie de revolución

Cuando se hace rotar un arco de curva alrededor de una recta L se forma una superficie que llamamos *superficie de revolución*. Consideremos un arco y un segmento aproximante genérico. Cuando se hace rotar todo esto alrededor del eje , el segmento genera la superficie de un tronco de cono.

Vamos a razonar intuitivamente, en lugar de hacerlo con sumas de Riemann. Se prueba en los libros elementales que el área lateral del tronco de cono es igual a

$$\pi(r_1 + r_2)l,$$

donde r_1, r_2 son los radios de las bases y l es la longitud de la generatriz.

Sea Δs la longitud de un segmento aproximante, situado a h unidades de distancia del eje de revolución L.

Haciendo rotar el segmento alrededor del eje se obtiene un tronco de cono de generatriz Δs y tan fino que se puede suponer que ambas bases tienen radio h. Así se puede aproximar el área lateral ΔS del tronco de cono por la fórmula

$$\Delta S = \pi(h + h)\Delta s = 2\pi h\Delta s = 2\pi f(x)\sqrt{1 + |f'(x)|^2}\Delta x.$$

Se puede calcular el área de la superficie integraldo esta expresión en el intervalo $[a, b]$. Estas observaciones justifican intuitivamente la siguiente definición formal:

Área de una superficie

Sea f una función continuamente derivable en el intervalo $[a, b]$. Entonces el área de la superficie generada haciendo girar alrededor del eje x el arco de curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es igual a

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + |f'(x)|^2}dx.$$

Ejemplo

Hallar el área de la superficie engendrada al girar alrededor del eje x el arco de curva $y = x^3$ en $[0, 1]$.

La función que debemos considerar es $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, que es derivable y su derivada $f'(x) = 3x^2$ es continua en $[0,1]$. El área buscada es

$$S = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + (3x^2)^2} dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx.$$

Hacemos el cambio de variable $u = 1 + 9x^4$, luego $du = 36x^3$. Si $x = 1$ entonces $u = 10$ y si $x = 0$, entonces $u = 1$. Por tanto:

$$2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4} dx = 2\pi \int_1^{10} u^{\frac{1}{2}} \left(\frac{du}{36}\right) = \frac{\pi}{18} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10} = \frac{27}{2}[10\sqrt{10} - 1].$$

Se puede generalizar esta fórmula para hacerla válida tanto si la curva gira alrededor del eje horizontal, como si lo hace alrededor del eje vertical. Supongamos que el eje de revolución dista $R(x)$ unidades de un elemento de arco genérico en la gráfica de $y = f(x)$. Entonces $2\pi R(x)$ es la longitud de una circunferencia de radio $R(x)$, y se puede demostrar que un elemento de área de la superficie es

$$\Delta S = 2\pi R(x) \Delta s = 2\pi R(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \Delta x.$$

Así, la superficie de revolución tiene área igual a

$$S = 2\pi \int_a^b R(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

En particular, si la gráfica de $y = f(x)$ gira alrededor del eje y, un elemento de arco está a $R(x) = x$ unidades del eje y, y el área resultante es

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

6.5. Otras aplicaciones: Centro de gravedad y momento de una región plana

La integración juega un papel importante en muchas áreas de la Física. La mecánica es la rama de la física que trata el efecto de las fuerzas en los objetos. Se puede usar la integración para calcular el trabajo y la fuerza ejercida por un líquido. Nosotros no entraremos en este estudio.

Usaremos la integración para calcular centros de gravedad de regiones planas.

En mecánica es a menudo importante determinar el punto en el que hay que apoyar una región plana de forma irregular para que se mantenga en equilibrio. El *momento* de una fuerza mide su tendencia a hacer rotar un objeto y depende de la magnitud de la fuerza y de su punto de aplicación en el objeto. Se sabe desde los tiempos de Arquímedes que el punto de equilibrio de un objeto es aquel en que todos sus momentos se anulan (luego no hay rotación).

La *masa* de un objeto es una medida de su *inercia*, esto es, de su propensión a conservar su estado de reposo o movimiento. Una lámina delgada uniforme (es decir, con densidad constante ρ, interpretando esta vez la densidad como masa por unidad de área) se llama *lámina homogénea*. El punto de equilibrio de una lámina homogénea se llama su *centro de gravedad*, que es algo así como su centro geométrico. Veremos cómo se calculan los centros de gravedad usando integrales, y abundaremos sobre el tema más adelante.

Consideremos una lámina homogénea que es una región R limitada por las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ en el intervalo $[a, b]$, y consideremos una banda vertical en R, muy estrecha. La masa de la banda es

$$\Delta m = \rho \cdot [f(x) - g(x)]\Delta x,$$

donde $[f(x) - g(x)]\Delta x$ es el área.

Se puede calcular la masa total integrando:

$$m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

El centro geométrico de la banda es $(\hat{x}, \hat{y})$, donde $\hat{x} = x$ y $\hat{y} = \frac{1}{2}[f(x) - g(x)]$. El momento de la banda respecto del eje y es, por definición, el producto

$$\Delta M_y = \hat{x} \cdot \Delta m = \hat{x}\{\rho \cdot [f(x) - g(x)]\Delta x\}$$

donde $\hat{x}$ se interpreta como la distancia de la banda al eje y. Este producto da una medida de la tendencia de la banda a rotar alrededor del eje y. De manera análoga se define el momento de la banda respecto del eje x por la relación

$$\Delta M_x = \hat{y} \cdot \Delta m = \frac{1}{2}[f(x) - g(x)]\{\rho \cdot [f(x) - g(x)]\Delta x\} = \frac{1}{2}\rho\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\Delta x.$$

Este producto da una medida de la tendencia de la banda a rotar alrededor del eje x.

Integrando tenemos los momentos totales de la lámina respecto de ambos ejes:

$$M_y = \rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx, \qquad M_x = \frac{1}{2}\rho \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx.$$

Vamos a calcular un punto tal que, si en el se concentrara toda la masa de la lámina, los momentos respecto de los dos ejes coincidirían con los correspondientes de la lámina. Si toda la masa de la lámina estuviese localizada en el punto $(\overline{x}, \overline{y})$, sus momentos respecto de los dos ejes serían $m\overline{y}$ y $m\overline{x}$, respectivamente. Así se tiene que $m\overline{x} = M_y$ y $m\overline{y} = M_x$, luego

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)]dx} \quad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\rho \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}.$$

Podemos resumir ahora estos resultados en el enunciado siguiente:

Masa y centro de gravedad

Sean f y g funciones continuas y tales que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y consideremos un lámina R plana, de densidad constante ρ, limitada por esas dos curvas en el intervalo $[a, b]$. Por definición,

- la *masa* de R es
$$m = \rho \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$
- el *centro de gravedad* de R es el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ tal que
$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\rho \int_a^b x[f(x) - g(x)]dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)]dx} \quad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\rho \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}dx}{\rho \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}.$$

Ejemplo

Una lámina homogénea tiene densidad constante $\rho = 1$ y está limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$. Halle la masa y el centro de gravedad de R.

Vemos que la recta y la parábola se cortan en el origen y en el punto $(1, 1)$. Como $\rho = 1$, la masa es la misma que el área de la región R, es decir

$$m = A = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Los momentos M_y y M_x son

$$M_y = \int_0^1 x(x - x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12},$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x+x^2)(x-x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x^4)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \frac{1}{15}.$$

Por tanto, el centro de gravedad de la región R es el punto de coordenadas

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}, \qquad \overline{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{5}.$$