MATEMÁTICA DISCRETA

Introducción a la Lógica Matemática (Parte IV)

Introducción a la Lógica Matemática (Parte IV)

- Teoremas, argumentos y reglas de inferencia.

Introducción a la Lógica Matemática (Parte IV)

- Teoremas, argumentos y reglas de inferencia.
- Métodos para demostrar teoremas.

- Teorema: Proposición que se ha verificado que es verdadera.
    - Lema: teorema que no suele ser muy interesante por sí mismo, pero que resulta útil para probar otro teorema.
    - Corolario: es un teorema que se deriva con facilidad de otro teorema.
- Demostrar que un teorema es verdadero puede ser difícil.
    - Una demostración es un argumento válido que establece la verdad de un teorema.
    - Una demostración usa hipótesis, axiomas y definiciones para llegar a una conclusión.
    - Para que la demostración sea válida, cada paso debe dar como resultado una conclusión intermedia válida.
    - Las reglas de inferencia se utilizan para extraer conclusiones a partir de otras afirmaciones, uniendo los pasos de una demostración.

Definición

Un argumento es una secuencia de proposiciones escritas de la forma:

$$\begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

El símbolo $\therefore$ se lee "por lo tanto". Las proposiciones $p_1, \ldots, p_n$ se conocen como *hipótesis o premisas*, y la proposición q recibe el nombre de *conclusión*. Un argumento es *válido* siempre y cuando, si p_1, ... y p_n son todas verdaderas, entonces q también es verdadera; de otra manera, el argumento es *inválido* (o una *falacia*).

Definición

Una regla de inferencia es un argumento válido breve que se utiliza dentro de argumentos más largos como son las demostraciones.

Reglas de Inferencia

Modus Ponens	$p \to q$ p $\therefore q$	**Eliminación**	**a.** $p \vee q$ $\sim q$ $\therefore p$ **b.** $p \vee q$ $\sim p$ $\therefore q$
Modus Tollens	$p \to q$ $\sim q$ $\therefore \sim p$	**Transitividad**	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$
Generalización	**a.** p $\therefore p \vee q$ **b.** q $\therefore p \vee q$	**Demostración por división en casos**	$p \vee q$ $p \to r$ $q \to r$ $\therefore r$
Especialización	**a.** $p \wedge q$ $\therefore p$ **b.** $p \wedge q$ $\therefore q$		
Conjunción	p q $\therefore p \wedge q$	**Regla de contradicción**	$\sim p \to c$ $\therefore p$

- Es bastante usual que los teoremas sean enunciados de la forma siguiente:
$$\text{“}\forall x \in D,\ \text{si } P(x) \text{ entonces } Q(x)\text{”}. \qquad (1)$$
- El método de **demostración directa**, usado fundamentalmente para demostrar teoremas enunciados como en (1), se construye de la siguiente forma:
  - Iniciar la demostración suponiendo que $x \in D$ es un elemento arbitrario, el cual satisface la hipótesis de que $P(x)$ es verdadera.
  - Luego, haciendo uso de las definiciones previamente establecidas y las reglas de inferencia, demostrar que la conclusión $Q(x)$ es verdadera.

Ejercicio

Demuestra, mediante el método de demostración directa, que si x es un número entero impar, entonces x^2 es impar.

Solución: Sea x un número impar. Entonces $x = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Observa que $x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$. Por tanto, x^2 es impar, como se desea. $\square$

Ejercicio

Demuestra, mediante el método de demostración directa, que la suma de dos números pares da como resultado un número par.

Solución: Sean m y n números pares. Por definición, $m = 2r$ y $n = 2s$ para algunos $r, s \in \mathbb{Z}$. Entonces, $m+n = 2r+2s = 2(r+s)$. Por tanto, $m+n$ es par, como se desea. $\square$

- A veces, para demostrar que la implicación $p \to q$ es verdadera, es conveniente reescribir p como la disyunción $p_1 \vee \ldots \vee p_n$. Eso implica que se debería demostrar que $(p_1 \vee \ldots \vee p_n) \to q$ es verdadera.
- Observa que

$$[(p_1 \vee \ldots \vee p_n) \to q] \equiv [(p_1 \to q) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q)]$$

- La equivalencia anterior muestra que la implicación $p \to q$ se puede demostrar demostrando individualmente cada una de las n implicaciones $p_i \to q$, donde $i \in \{1, \ldots, n\}$. A este método se le llama **método de demostración por división de casos**.

Ejercicio

Demuestra, usando el método de demostración por división de casos, que el cuadrado de cualquier número entero impar es de la forma $8k+1$ para algún entero k.

Solución: Sea n un número impar. Entonces $n = 4q+1$ o $n = 4q+3$ para algún entero q. A continuación, analicemos cada uno de los dos casos anteriores.

Caso 1: $n = 4q+1$. Observa que $n^2 = (4q+1)^2 = 16q^2+8q+1 = 8(2q^2+q)+1$. Haciendo $k = 2q^2+q$, se obtiene que $n^2 = 8k+1$, como se desea.

Caso 2: $n = 4q+3$. Observa que $n^2 = (4q+3)^2 = 16q^2+24q+9 = 8(2q^2+3q+1)+1$. Haciendo $k = 2q^2+3q+1$, se obtiene que $n^2 = 8k+1$, como se desea.

Como consecuencia de los dos casos anteriores, la demostración está conseguida. $\square$

- Una demostración directa comienza con la(s) hipótesis de un enunciado y hace una deducción tras otra (usando definiciones y reglas de inferencia) hasta llegar a la conclusión. El método de **demostración indirecta** no sigue un camino definido.
- En particular, analizaremos los siguientes métodos de demostración indirecta:
  - Método de demostración usando el contrarrecíproco.
  - Método de demostración por reducción al absurdo.

Método de demostración usando el contrarrecíproco

- Dado el enunciado a demostrar en la forma:

$$\text{“}\forall x \in D,\ \text{si } P(x) \text{ entonces } Q(x)\text{”},$$

  reescribirlo en la siguiente forma (usando el contrarrecíproco):

$$\text{“}\forall x \in D,\ \text{si } Q(x) \text{ es falso entonces } P(x) \text{ es falso”}. \qquad (2)$$

- Demostrar el enunciado dado en (2) usando el método de demostración directa, es decir,
  - Iniciar la demostración suponiendo que $x \in D$ es un elemento arbitrario, el cual satisface la hipótesis de que $Q(x)$ es falso.
  - Luego, haciendo uso de las definiciones previamente establecidas y las reglas de inferencia, demostrar que la conclusión $P(x)$ es falso.

Ejercicio

Demuestra, usando el contrarrecíproco, que si x^2 es un número entero impar, entonces x es impar.

Solución: Procederemos demostrando el contrarrecíproco. Supongamos que x es un número entero par. Entonces $x = 2k$ para algún entero k. Observa que $x^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$. Por tanto, x^2 es par, como se desea. $\square$

Método de demostración por reducción al absurdo

- Este método se basa en el hecho de que un enunciado es verdadero o falso, pero no ambos.
- El punto de partida para una demostración por reducción al absurdo es la suposición de que el enunciado a demostrar es falso. El objetivo es razonar a una contradicción. Por tanto, este método sigue el siguiente esquema:
    1. Suponer que el enunciado a demostrar es falso. Es decir, suponer que la negación del enunciado es verdadera.
    2. Demostrar que la suposición conduce lógicamente a una contradicción.
    3. Concluir que el enunciado a demostrar es verdadero.

Ejercicio

Demuestra, usando el método por reducción al absurdo, que $\sqrt{2}$ es irracional.

Solución: Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Entonces existen números $a, b \in \mathbb{Z}$ con $mcd(a, b) = 1$ tal que $\sqrt{2} = a/b$, lo cual implica que

$$a^2 = 2b^2 \tag{3}$$

De la igualdad anterior se deduce que a^2 es par, por lo que a también es par. Por tanto, $a = 2c$ para algún entero c. Sustituyendo esta última igualdad en (3) se obtiene que $b^2 = 2c^2$. Entonces b^2 es par, por lo que b también es par, es decir, $b = 2d$ para algún entero d. Como consecuencia, se deduce que $mcd(a, b) = mcd(2c, 2d) > 1$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\sqrt{2}$ es irracional, como se desea. $\square$