Matemática Discreta - Grado en Ing. Informática
Relación de Ejercicios (Parte I)

1. Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

2. Sea U un conjunto de 12 elementos y $A \subseteq U$ un conjunto que satisface $|\mathcal{P}(A^c)| = 128$. ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto A?

3. 420 personas ven los canales A, B y C. De ellos, 240 no ven el canal A, 180 no ven el canal B, 150 no ven el canal C, y 230 ven por lo menos 2 canales. ¿Cuántas personas ven los 3 canales?

4. Un club de deportes tiene 58 jugadores, de los cuales 38 juegan fútbol, 15 hacen atletismo y 20 juegan tenis. Se conoce que solo 3 de ellos practican todos los deportes. ¿Cuántos jugadores practican exactamente un deporte?

5. Determina el número de secuencias binarias de longitud 8 que tienen los dos primeros bits diferentes.

6. Un conjunto de 100 elementos se distribuye en 14 bloques. Demuestra que hay dos bloques con el mismo número de elementos.

7. ¿Cuántas secuencias hay de longitud 6, formadas con los dígitos $0, \ldots, 9$ y con todos los dígitos diferentes, excepto el dígito 5, el cual se repite tres veces?

8. Se dispone de un número ilimitado de bloques de $1cm$, $2cm$ y $3cm$ de altura. Formular una ecuación recurrente para obtener cuántas torres de altura n se pueden construir combinando estos bloques.

MATEMÁTICA DISCRETA

Ejercicios Resueltos (Parte I)

Ejercicio 1: Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que $A \subseteq B$ si y sólo si $A \cap B = A$.

Solución: Supongamos que $A \subseteq B$. Sea $x \in A$. Por hipótesis, $x \in B$. Entonces, $x \in A \cap B$, lo que implica que $A \subseteq A \cap B$. Por otra parte, es evidente que $A \cap B \subseteq A$. Por tanto, $A \cap B = A$.
Ahora, supongamos que $A \cap B = A$. Lo anterior implica que $A \subseteq A \cap B$, y como $A \cap B \subseteq B$ entonces $A \subseteq B$.

Ejercicio 2: Sea U un conjunto de 12 elementos y $A \subseteq U$ un conjunto que satisface $|\mathcal{P}(A^c)| = 128$. ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto A?

Solución: Observa que: $2^7 = 128 = |\mathcal{P}(A^c)| = 2^{|A^c|}$. Por tanto, $|A^c| = 7$, lo cual conduce a que:

$$|A| = |U \setminus A^c| = |U| - |A^c| = 12 - 7 = 5.$$

Entonces, $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^5 = 32$.

Ejercicio 3: 420 personas ven los canales A, B y C. De ellos, 240 no ven el canal A, 180 no ven el canal B, 150 no ven el canal C, y 230 ven por lo menos 2 canales. ¿Cuántas personas ven los 3 canales?

Solución:

- X_i: conjunto de personas que ven el canal i ($i \in \{A, B, C\}$).
- $|X_A \cap X_B \cap X_C|$: número de personas que ven los 3 canales.
- Por el principio de Inclusión-Exclusión:

$$\begin{aligned}|X_A \cap X_B \cap X_C| = & |X_A \cup X_B \cup X_C| - |X_A| - |X_B| - |X_C| \\ & + |X_A \cap X_B| + |X_A \cap X_C| + |X_B \cap X_C|.\end{aligned}$$

- $|X_A \cup X_B \cup X_C| = 420.$
- $|X_A| = 420 - |X_A^c| = 180, \quad |X_B| = 240, \quad |X_C| = 270.$
- $|X_A \cap X_B| + |X_A \cap X_C| + |X_B \cap X_C| - 2|X_A \cap X_B \cap X_C| = 230.$

Por tanto, $|X_A \cap X_B \cap X_C| = 40.$

Ejercicio 4: Un club de deportes tiene 58 jugadores, de los cuales 38 juegan fútbol, 15 hacen atletismo y 20 juegan tenis. Se conoce que solo 3 de ellos practican todos los deportes. ¿Cuántos jugadores practican exactamente un deporte?

Solución:

- F, A y T: conjunto de futbolistas, atletas y tenistas, resp.
- $|F \cup A \cup T| = 58$, $|F \cap A \cap T| = 3$, $|F| = 38$, $|A| = 15$ y $|T| = 20$.
- $x \rightarrow$ # jugadores que practican exactamente un deporte.
- $x = |F \cup A \cup T| - (|F \cap A| + |F \cap T| + |A \cap T|) + 2|F \cap A \cap T|$.
- Por el principio de Inclusión-Exclusión:

$$|F \cap A| + |F \cap T| + |A \cap T| = |F| + |A| + |T| + |F \cap A \cap T| - |F \cup A \cup T|.$$

- $|F \cap A| + |F \cap T| + |A \cap T| = 18$.
- $x = 46$.

Ejercicio 5: Determina el número de secuencias binarias de longitud 8 que tienen los dos primeros bits diferentes.

Solución: Si el primer bit es 1, entonces el segundo es 0 y viceversa. En cualquiera de los dos casos hay 2^6 formas de completar la secuencia de 8 bits. Por lo tanto, la solución es $2 \cdot 2^6 = 128$.

Ejercicio 6: Un conjunto de 100 elementos se distribuye en 14 bloques. Demuestra que hay dos bloques con el mismo número de elementos.

Solución:

- $x_i \to$ tamaño del bloque i ($i \in \{1,\dots,14\}$). $\sum_{i=1}^{14} x_i = 100$.
- Si todos los x_i son distintos, entonces

$$100 = \sum_{i=1}^{14} x_i \geq \sum_{i=1}^{14} i = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105,$$

lo cual es una contradicción.

- Por tanto, existen $i,j \in \{1,\dots,14\}$ tal que $x_i = x_j$.

Ejercicio 7: ¿Cuántas secuencias hay de longitud 6, formadas con los dígitos $0,\ldots,9$ y con todos los dígitos diferentes, excepto el dígito 5, el cual se repite tres veces?

Solución:

- Hay $C(6,3)=20$ formas diferentes de colocar los tres dígitos repetidos.
- Para las tres posiciones restantes se tienen $V(9,3)=504$ maneras diferentes.
- Por lo tanto, en total hay $C(6,3)V(9,3)=20\cdot 504=10080$ secuencias diferentes.

Ejercicio 9: Se dispone de un número ilimitado de bloques de $1cm$, $2cm$ y $3cm$ de altura. Formular una ecuación recurrente para obtener cuántas torres de altura n se pueden construir combinando estos bloques.

Solución:

- Sea x_n el total de torres de altura n que se pueden construir.
- Observa que x_n se puede descomponer como la suma de tres subtotales:
  - El número de torres, x_{n-1}, que empiezan con un bloque de $1cm$ de altura.
  - El número de torres, x_{n-2}, que empiezan con un bloque de $2cm$ de altura.
  - El número de torres, x_{n-3}, que empiezan con un bloque de $3cm$ de altura.

Por tanto,

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3}$$

donde $n \geq 4$ y $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 4$.

Ejercicio 10: Resolver la siguiente ecuación recurrente.

$$x_n - 5x_{n-1} + 6x_{n-2} = 0; \qquad x_0 = 1,\ \ x_1 = 2$$

Solución:

- La ecuación característica es $t^2 - 5t + 6 = 0$. Por lo tanto, las raíces son $t = 3$ y $t = 2$.
- La solución general es de la forma: $x_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot 2^n$.
- Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \beta \\ 2 &= 3\alpha + 2\beta \end{aligned}$$

- Se obtiene que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$. Por tanto, la solución es

$$x_n = 2^n$$