ÁLgebra Lineal
Grado en Ingeniería Informática
Curso 2023-2024

Relación de problemas Tema 4

Espacios vectoriales

1. Estudiar cuales de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ son subespacios vectoriales:

    (a) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y = 1\}$

    (b) $L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y = z + t\}$

    (c) $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ t = 0\}$

2. Demostrar que el conjunto $\{1, 1 + x, (1 + x)^2\}$ es una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ (conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales).

3. Dados los vectores $\vec{u}\ (1, 2, 1)$, $\vec{v}\ (1, 0, -1)$ y $\vec{w}\ (4, 5, 2)$, comprobar si forman una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular las coordenadas del vector $\vec{x}\ (15, 17, 3)$ en dicha base.

4. ¿Es el conjunto $A = \{(a, -2a, 0) \ / \ a \in \mathbb{R}\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? En caso afirmativo, dar una base y dimensión del subespacio.

5. Determinar el valor de p para que los vectores $(p, 0, 2)$, $(-1, p, 0)$ y $(0, -1, -2)$ de $\mathbb{R}^3$ sean:

    (a) Linealmente independientes.

    (b) Linealmente dependientes.

6. Demostrar que si $\{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\}$ es un conjunto de vectores libre de un espacio vectorial V, también lo son los vectores $\{(\vec{u} + \vec{v}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{w} + \vec{u})\}$.

7. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & a \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

    (a) ¿Qué valores debe tomar el parámetro a para que el conjunto $\{A, B, C, D\}$ sea una base del espacio vectorial $\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$?

    (b) Es conocido que $\{A, B, C, D\}$ es una base cuando $a = 1$. Hallar las coordenadas de E respecto a dicha base.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Determinar el valor de los parámetros a y b para que el vector $\vec{v}\ (3, 2, a, b)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $\vec{u}\ (1, 4, -5, 2)$ y $\vec{w}\ (1, 2, 3, 1)$.

9. Calcular un sistema mínimo de generadores del subespacio vectorial engendrado por los vectores $\vec{u}\ (1,1,-1)$,$\vec{v}\ (4,6,-1)$,$\vec{w}\ (2,2,-2)$,$\vec{x}\ (1,3,2)$. Escribir las ecuaciones de dicho subespacio vectorial.

10. Estudie cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales, y e caso afirmativo, calcular una base y la dimensión.

    (a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - z = 0\}$

    (b) $B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y+z+t = 0\}$

    (c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = 0\}$

    (d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 2\}$

    (e) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y \geq 0\}$

    (f) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 1\}$

11. Dados los subespacios:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = 0, z = t\}$$

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + z - t = 0, y = 0\}$$

    (a) Hallar la dimensión, ecuaciones y una base del subespacio suma.

    (b) Hallar la dimensión, ecuaciones y una base del subespacio intersección.

12. Para a y $b \in \mathbb{R}$, consideremos los siguientes subespacios vectoriales

$$U = \langle\{(1,0,0,a),(1,2,1,0),(0,1,b,1)\}\rangle$$

$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y + z + t = 0, x + y = 0\}$$

Calcular los valores de a y b para que:

    (a) La dimensión de U sea 3.

    (b) La dimensión de $U + S$ sea 4. Calcular para estos valores el subespacio $U \cap S$.

13. Dados los subespacios vectoriales

$$F = \langle\{(1,1,0,-1),(1,0,-1,a),(1,-1,a,0),(1,-1,a,a)\}\rangle$$

$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z + t + 4x = 0, z + 2x = 0\}$$

    (a) Estudiar la dimensión de F según los valores del parámetro a.

    (b) Hallar una base de G.

    (c) ¿Existen valores de a para los cuales $F \cap G = \vec{0}$ y $F + G = \mathbb{R}^4$?

    (d) Si $a = 1$, calcula el valor de m para que el vector $(1,2,1,m) \in F$.

14. Dados en $\mathbb{R}^3$ los subespacios vectoriales

$$S = \langle\{(2,0,1),(1,-1,2)\}\rangle$$

$$A = \langle\{(1,0,1),(0,1,1)\}\rangle$$

    (a) ¿Pertenece el vector $\vec{w}\ (\frac{5}{2},\frac{-1}{2},2)$ al subespacio $S \cap A$?

    (b) Hallar una base y ecuaciones de $A + S$.

15. Hallar una base y ecuaciones del subespacio vectorial $F \cap G$ para los subespacios

$$F = \langle\{(1,1,2,2),(0,1,3,4),(1,2,0,1)\}\rangle$$
$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y+4z=0, y+2t=0\}$$

16. Considere el conjunto de vectores $F = \{(1,1,1,1+a),(1,1,1+a,1),(1,1+a,1,1),(1+a,1,1,1)\}$.

    (a) Estudie la dimensión de F según los valores de a.

    (b) Si $a=-4$, calcule las ecuaciones paramétricas e implícitas de F.

    (c) Si $a=0$, hallar un subespacio vectorial H tal que $dim(F+H)=4$ y $dim(F\cap H=0)$. Dar las bases y ecuaciones de H.

    (d) Si $a=1$, calcule el valor de m para que el vector $(0,m,1,m) \in F$.

17. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

    (a) Estudie, para los distintos valores reales del parámetro a, la dimensión del subespacio vectorial generado por los vectores $(a,1,1),(1,a,1),(1,1,a)$. Dar también, en cada caso, las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio vectorial (llámese S).

    (b) Sea el subespacio vectorial $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y-2z=0\}$. Estudiar, según los distintos valores reales de a, la dimensión, las ecuaciones paramétricas e implícitas de los subespacios vectoriales $S \cap T$ y $S+T$.

18. Consideramos en $\mathbb{R}^4$ los siguientes subespacios vectoriales:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ x=y, \ x=z\}$$
$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ x=\alpha+\beta+\gamma+\mu, \ y=\alpha+\beta+2\mu, \ z=\gamma+\mu, \ t=\beta+\gamma\}$$

    Estudiar la dimensión y obtener una base y ecuaciones implícitas de los subespacios U+S y U∩S **(3 puntos)**.

19. Un avión que se dirige al aeropuerto de Málaga tiene como localización del aeropuerto la base $B = \{(1,1,0),(2,3,1),(0,0,1)\}$. El avión pierde la conexión, y al volver a conectarse, la nueva base que le dan desde el aeropuerto es:

$$B' = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,2)\}.$$

    Si las coordenadas del avión respecto a la antigua base era $\vec{v}$ $(5,1,2)$. ¿Cuáles son sus coordenadas respecto a la nueva base?

20. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases $B_1 = \{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$. Sabiendo que

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$$
$$\vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$$
$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3$$

    (a) En B_2 el vector $\vec{a}$ tiene por coordenadas $(2,3,1)$. Hallar en la base B_1 las coordenadas de dicho vector.

    (b) En B_1 el vector $\vec{b}$ tiene por coordenadas $(6,3,1)$. Hallar en la base B_2 las coordenadas de dicho vector.

1. Subconjunto vacío 2. Cerrado bajo adición 3. Cerrado bajo multiplicación de escalares

1. Estudiar cuales de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ son subespacios vectoriales:

   (a) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y = 1\}$

   (b) $L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y = z + t\}$

   (c) $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ t = 0\}$

a) $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = 1\}$:

- ¿E es un subconjunto vacío?

  $(1, 0, 0, 0)$ satisface $x + y = 1 + 0 = 1$

  Por ello no es un subconjunto vacío

- ¿E es cerrado bajo adición?

  $x_1 + y_1 = 1$; $x_2 + y_2 = 1$; $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 1 + 1 = 2$

  Lo que no satisface la adición

- ¿E es cerrado bajo multiplicación de escalares?

Como E no es cerrado bajo adición no es subespacio vectorial

b) $L = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = z + t\}$

- ¿L es un subconjunto vacío?

  $(1, 1, 1, 1)$ satisface $x + y = z + t$; $1 + 1 = 1 + 1$; $2 = 2$

  Por ello no es un subconjunto vacío

- ¿L es cerrado bajo adición?

  $x_1 + y_1 = z_1 + t_1$; $x_2 + y_2 = z_2 + t_2$; $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (z_1 + t_1) + (z_2 + t_2)$;

  Utilizando este vector: $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$

  Lo que satisface la adición

- ¿L es cerrado bajo multiplicación de escalares?

  Multiplicamos (x, y, z, t) por a. Obteniendo:

  $a(x + y) = a(z + t)$; $ax + ay = az + at$

  Utilizando ese vector $(ax, ay, az, at) = a(x, y, z, t)$

  Lo que satisface la multiplicación de escalares

Como L cumple los tres requisitos es subespacio vectorial

c) $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / t = 0\}$

- ¿H es un subconjunto vacío?

  $(1, 1, 1, 0)$ satisface que $t = 0$

  Por ello no es un subconjunto vacio

- ¿H es cerrado bajo adición?

  $t_1 = 0$; $t_2 = 0$; $t_1 + t_2 = 0$

  Utilizando este vector: $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, 0 + 0)$

  Lo que satisface la adición

- ¿H es cerrado bajo multiplicación de escalares?

  Multiplicamos (x, y, z, t) por a. Obteniendo:

  $a(t) = 0$; $at = 0$

  Utilizando ese vector $(ax, ay, az, 0) = a(x, y, z, 0)$

  Lo que satisface la multiplicación de escalares

Como H cumple los tres requisitos es subespacio vectorial

1. LI 2. SG

2. Demostrar que el conjunto $\{1, 1+x, (1+x)^2\}$ es una base de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ (conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales).

¿Es linealmente independiente?

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1+x)^2 = 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 x + \alpha_3 + \alpha_3 x^2 + 2\alpha_3 x = 0 + 0x + 0x^2$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_2 + 2\alpha_3)x + \alpha_3 x^2 = 0 + 0x + 0x^2$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{array} \longrightarrow \text{Es linealmente independiente}$$

¿Es sistema generador?

$$\alpha_1(1) + \alpha_2(1+x) + \alpha_3(1+x)^2 = a + b\cdot x + c\cdot x^2$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 x + \alpha_3 + \alpha_3 x^2 + 2\alpha_3 x = a + bx + cx^2$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_2 + 2\alpha_3)x + \alpha_3 x^2 = a + bx + cx^2$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = a \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = b \\ \alpha_3 = c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha_1 = a - b + c \\ \alpha_2 = b - 2c \end{array}$$

El sistema generador es $\left\{\begin{array}{l} \alpha_3 = a - b + c \\ \alpha_2 = b - 2c \\ \alpha_3 = c \end{array}\right.$

1. LI 2. SG 3. Coord en $\vec{x}$

3. Dados los vectores $\vec{u}$ $(1, 2, 1)$, $\vec{v}$ $(1, 0, -1)$ y $\vec{w}$ $(4, 5, 2)$, comprobar si forman una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular las coordenadas del vector $\vec{x}$ $(15, 17, 3)$ en dicha base.

¿Es linealmente independiente?

$$(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w})=(0,0,0)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta+4\gamma&=0\\ 2\alpha\quad+5\gamma&=0\\ \alpha-\beta+2\gamma&=0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&4&0\\ 2&0&5&0\\ 1&-1&2&0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_3=F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&4&0\\ 2&0&5&0\\ 2&0&6&0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_3=F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&4&0\\ 2&0&5&0\\ 0&0&1&0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta+4\gamma&=0\\ 2\alpha\quad+5\gamma&=0\\ \gamma&=0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \beta&=0\\ \alpha&=0 \end{aligned} \longrightarrow \text{es linealmente independiente}$$

¿Es sistema generador?

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta+4\gamma&=a_1\\ 2\alpha\quad+5\gamma&=a_2\\ \alpha-\beta+2\gamma&=a_3 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&4&a_1\\ 2&0&5&a_2\\ 1&-1&2&a_3 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_3=F_1+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&4&a_1\\ 2&0&5&a_2\\ 2&0&6&a_1+a_3 \end{array}\right) \underset{F_2=2F_1-F_2}{\overset{F_3=F_3-F_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&4&a_1\\ 0&2&3&2a_1-a_2\\ 0&0&1&a_1-a_2+a_3 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha+\beta+4\gamma&=a_1\\ 2\beta+3\gamma&=2a_1-a_2\\ \gamma&=a_1-a_2+a_3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} \alpha&=-\tfrac{5}{2}a_1-5a_2-11a_3\\ \beta&=-\tfrac{1}{2}a_1+a_2-\tfrac{3}{2}a_3 \end{aligned}$$

El sistema generador es $\begin{cases} \alpha=-\frac{5}{2}a_1-5a_2-11a_3\\ \beta=-\frac{1}{2}a_1+a_2-\frac{3}{2}a_3\\ \gamma=a_1-a_2+a_3 \end{cases}$

Coordenadas en $\vec{x}$:

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=(a_1,a_2,a_3)=(15,17,3)$$

$$\begin{cases} \alpha=-\frac{5}{2}a_1-5a_2-11a_3=-\frac{75}{2}-85-33=-\frac{310}{2}\\ \beta=-\frac{1}{2}a_1+a_2-\frac{3}{2}a_3=-\frac{15}{2}+17-\frac{9}{2}=5\\ \gamma=a_1-a_2+a_3=3+15-17=-1 \end{cases}$$

1. Subconjunto vacío 2. Cerrado bajo adición 3. Cerrado bajo multiplicación de escalares

4. ¿Es el conjunto $A = \{(a, -2a, 0) \ / \ a \in \mathbb{R}\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? En caso afirmativo, dar una base y dimensión del subespacio.

1. $\vec{0} = (0,0,0)$

$a = 0 \rightarrow$ se cumple

2. $\vec{V}_1 \in A + \vec{V}_2 \in A = \vec{V} \in A$

$\vec{V}_1 \rightarrow (x_1, y_1, z_1)$ $\quad \vec{V}_2 \rightarrow (x_2, y_2, z_2)$

Si $V \in A \begin{cases} y_1 = -2x_1 \\ y_2 = -2x_2 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} \alpha \vec{V}_1 + \beta \vec{V}_2 &= (\alpha x_1 - 2\alpha x_1 + \beta x_1 - 2\beta x_2) \\ \alpha y_1 + \beta y_2 &= -2(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ \alpha z_1 + \beta z_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ se cumple}$$

3. $K \vec{V}_1 = 0$

$K(a, -2a, 0) = Ka - 2Ka \in A \rightarrow$ se cumple

$$\left.\begin{aligned} x &= a \\ y &= -2a \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &B_A = \{1, -2, 0\} \\ &\text{Dim}(A) = 1 \end{aligned}$$

5. Determinar el valor de p para que los vectores $(p, 0, 2)$, $(-1, p, 0)$ y $(0, -1, -2)$ de $\mathbb{R}^3$ sean:

(a) Linealmente independientes. $\rightarrow Rg\,3$

(b) Linealmente dependientes. $\rightarrow Rg < 3$

a) $\alpha_1 (p, 0, 2) + \alpha_2 (-1, p, 0) + \alpha_3 (0, -1, -2)$

$$\begin{pmatrix} p & -1 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$p \neq 1 \quad (p - 1 = 0 \ ; \ 0 = 0 \rightarrow LD)$

b) $p = 1$

1. LI

6. Demostrar que si $\{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\}$ es un conjunto de vectores libre de un espacio vectorial V, también lo son los vectores $\{(\vec{u}+\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}, \vec{w}+\vec{u})\}$.

$$\left.\begin{array}{l} a(\vec{u}+\vec{v}) + b(\vec{v}+\vec{w}) + c(\vec{w}+\vec{u}) = 0 \\ a\vec{u} + a\vec{v} + b\vec{v} + b\vec{w} + c\vec{w} + c\vec{u} = 0 \\ (a+c)\vec{u} + (a+b)\vec{v} + (b+c)\vec{w} = 0 \end{array}\right\} a = b = c = 0 \rightarrow \text{LI}$$

a) LI

7. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & a \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

(a) ¿Qué valores debe tomar el parámetro a para que el conjunto $\{A, B, C, D\}$ sea una base del espacio vectorial $\mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$?

(b) Es conocido que $\{A, B, C, D\}$ es una base cuando $a = 1$. Hallar las coordenadas de E respecto a dicha base.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ a & a & 1 & a \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 2 & 3 & 2 \\ a & a & a \end{vmatrix} = -a\left(a \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ a & a \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ a & a \end{vmatrix} \right)$$

$$= -a(a(a(3-2)+a(2-3))) = 0 \rightarrow \text{LI}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z + 3\alpha = 1 \\ y + 3z + 2\alpha = 2 \\ y + z + \alpha = 3 \\ z + \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 = F_2 - 2F_4}{\overset{F_3 = F_3 - F_4}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$x = 1 - 3 + 2 - 3 = 4$
$z = -1$
$y = 3$
$\alpha = 1$

$E = 4A + 3B - C + D$

8. Determinar el valor de los parámetros a y b para que el vector $\vec{v}$ $(3, 2, a, b)$ pertenezca al subespacio generado por los vectores $\vec{u}$ $(1, 4, -5, 2)$ y $\vec{w}$ $(1, 2, 3, 1)$.

$$\vec{V} = \alpha\vec{U} + \beta\vec{W}$$

$$(3,2,a,b) = \alpha(1,4,5,2) + \beta(1,2,3,1)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 3 \\ 4\alpha + 2\beta &= 2 \\ -5\alpha + 3\beta &= a \\ 2\alpha + \beta &= b \end{aligned}\right\} \underset{F_2 = \frac{F_2}{2}}{\sim} \left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 3 \\ 2\alpha + \beta &= 1 \\ -5\alpha + 3\beta &= a \\ 2\alpha + \beta &= b \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= 3 \\ 2\alpha + \beta &= 1 \\ -5\alpha + 3\beta &= a \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\beta = 3 - \alpha \\ &2\alpha + \beta - 1 = 0;\ 2\alpha + 3 - \alpha - 1 = 0;\ \alpha = -2 \\ &\beta = 3 - \alpha = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

$$F_2 = F_3;\ b = 1$$

$$-5\alpha + 3\beta = a = -5(-2) + 3(5) = 10 + 15 = 25$$

$$b = 1$$

$$a = 25$$

1. Base

9. Calcular un sistema mínimo de generadores del subespacio vectorial engendrado por los vectores $\vec{u}\ (1,1,-1)$,$\vec{v}\ (4,6,-1)$,$\vec{w}\ (2,2,-2)$,$\vec{x}\ (1,3,2)$. Escribir las ecuaciones de dicho subespacio vectorial.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} F_2 = F_2 - 4F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \\ F_4 = F_4 - F_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_4 = F_4 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow B = \{(1,1,-1),(0,2,3)\}$

$\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \alpha + 2\beta \\ z = 3\beta - \alpha \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 2 & y \\ -1 & 3 & z \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{matrix} F_2 = F_1 + F_2 \\ F_3 = F_2 + F_3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 5 & y+z \end{array}\right) \underset{\sim}{F_3 = 2F_3 - 5F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & 2(y+z) - 5(x+y) \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & -5x - 3y + 2z \end{array}\right) \rightarrow$ Ec implícita: $-5x - 3y + 2z = 0$

10. Estudie cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios vectoriales, y e caso afirmativo, calcular una base y la dimensión.

(a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - z = 0\}$
(b) $B = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y+z+t = 0\}$
(c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = 0\}$
(d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y - z = 2\}$
(e) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y \geq 0\}$
(f) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = 1\}$

a) Para A se cumple $2x + y - z = 0 \rightarrow (0,0,0)$

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \rightarrow \alpha\vec{a} = \alpha 2x_1 + \alpha y_1 - \alpha z_1$

$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \rightarrow \beta\vec{b} = \beta 2x_2 + \beta y_2 - \beta z_2$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha 2x_1 + \beta 2x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 - \alpha z_1 - \beta z_2 = 0$

Cumple ✓✓

$\left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ t = \beta \end{array}\right\} \quad 2\alpha + 1 - \beta = 0 \ ; \ y = \beta - 2\alpha$

Ec paramétrica $\left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta - 2\alpha \\ z = \beta \end{array}\right\}$ $B = \{(1,2,0),(0,1,1)\}$
$Dim(B) = 2$

b) $x + y + z + t = 0 \rightarrow (0,0,0,0)$

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1, t_1) \rightarrow \alpha\vec{a} = \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 + \alpha t_1$

$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2, t_2) \rightarrow \beta\vec{b} = \beta x_2 + \beta y_2 + \beta z_2 + \beta t_2$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2 + \alpha t_1 + \beta t_2 = 0$

Ec param $\left\{\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \\ t = -\alpha - \beta - \gamma \end{array}\right\}$ $B = \{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)\}$
$Dim(B) = 3$

c) $x = y = 0 \rightarrow (0,0,0)$

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \rightarrow \alpha\vec{a} = \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1$

$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \rightarrow \beta\vec{b} = \beta x_2 + \beta y_2 + \beta z_2$

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2$

Ec param $\left\{\begin{array}{l} x = y = \alpha \\ z = \beta \end{array}\right\}$ $B = \{(1,1,0),(0,0,1)\}$
$Dim(B) = 2$

d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 2\}$ → el 0 no pertenece no es un subespacio

1) ¿$\vec{0} \in D$?

2) $\left.\begin{array}{l} \vec{U} = (U_1, U_2, U_3) \\ \vec{V} = (V_1, V_2, V_3) \end{array}\right\} \in D$?

$(\alpha \vec{U} + \beta \vec{V}) \in D$

Vector: $(\alpha U_1 + \beta V_1, \alpha U_2 + \beta V_2, \alpha U_3 + \beta V_3)$

Ec: $(\alpha U_1 + \beta V_1) - (\alpha U_2 + \beta V_2) + (\alpha U_3 + \beta V_3)$

$= \alpha \underbrace{(U_1 + U_2 - U_3)}_{2} + \beta \underbrace{(V_1 + V_2 - V_3)}_{2} = 2\alpha + 2\alpha = 2$

para $\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = \frac{1}{2}$ → si existe valor para α y β no es

e) $y \geq 0 \rightarrow (0, 0, 0)$

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \rightarrow \alpha \vec{a} = \alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1$

$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2) \rightarrow \beta \vec{b} = \beta x_2 + \beta y_2 + \beta z_2$

$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \alpha x_1 + \beta x_2 + \alpha y_1 + \beta y_2 + \alpha z_1 + \beta z_2 \geq 0$ no es subespacio

f) $x = 1 \rightarrow (1, 0, 0)$ no es subespacio

11. Dados los subespacios:

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = 0, z = t\}$$

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + z - t = 0, y = 0\}$$

(a) Hallar la dimensión, ecuaciones y una base del subespacio suma.

(b) Hallar la dimensión, ecuaciones y una base del subespacio intersección.

a) Dim, ecuaciones, base $U+V$

$$U = \{(0,y,t,t)\} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = \beta \end{cases} \quad U = \{(0,1,0,0),(0,0,1,1)\} \quad Dim(U) = 2$$

$$V = \{(x,0,t-x,t)\} \quad \begin{cases} x = \gamma \\ y = 0 \\ z = \mu \\ t = \gamma+\mu \end{cases} \quad U = \{(1,0,0,1),(0,0,1,1)\} \quad Dim(V) = 2$$

$$U+V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U+V = \{(0,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,1,0)\} \quad Dim(U+V) = 3$$

$$\begin{cases} x = \gamma \\ y = \alpha \\ z = \beta+\gamma \\ t = \beta \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & 0 & t \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2 = F_2 - F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-x-t \\ 0 & 1 & 0 & t \end{array}\right) \quad -x+z-t=0$$

b) Dim, ecuaciones, base $U \cap V$

$Dim(U \cap V) = 1$

$U \cap V = \{(0,0,1,1)\}$

12. Para a y $b \in \mathbb{R}$, consideremos los siguientes subespacios vectoriales

$$U = \langle\{(1,0,0,a),(1,2,1,0),(0,1,b,1)\}\rangle$$

$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x+y+z+t=0, x+y=0\}$$

Calcular los valores de a y b para que:

(a) La dimensión de U sea 3.

(b) La dimensión de $U+S$ sea 4. Calcular para estos valores el subespacio $U \cap S$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 1 & -a \\ 0 & 1 & b & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_2 = F_2 - 2F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1-2b & -a-2 \\ 0 & 1 & b & 1 \end{pmatrix}$

Para que $\text{Dim}(U) = 3$: $1-2b = 0$ $(b = 1/2)$ y $-a-2 = 0$ $(a = -2)$

b) $\left.\begin{matrix} x+y+z+t=0 \\ x+y=0 \end{matrix}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1 = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left\{\begin{matrix} x+y=0 \\ z+t=0 \end{matrix}\right.$

$\left\{\begin{matrix} x = \alpha \\ y = -\alpha \\ z = \beta \\ t = -\beta \end{matrix}\right\}$ $S = \{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$ $\text{Dim}(S) = 2$

$U+S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} F_2 = F_2 - F_5 \\ F_3 = F_3 - F_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_3 = F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{matrix} b \neq 2 \\ a - 2b + 3 \neq 0 \end{matrix}\right\} \dim(U+S) = 4$

Suponemos $b = 0$ $a = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_2 = F_2 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 2 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2 = F_2 - 2F_3 - F_4} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y-2z-t \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right)$

$U \cap S = y - 2z - t = 0$

13. Dados los subespacios vectoriales

$$F = \langle\{(1,1,0,-1),(1,0,-1,a),(1,-1,a,0),(1,-1,a,a)\}\rangle$$

$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ z+t+4x=0, z+2x=0\}$$

(a) Estudiar la dimensión de F según los valores del parámetro a.

(b) Hallar una base de G.

(c) ¿Existen valores de a para los cuales $F \cap G = \vec{0}$ y $F + G = \mathbb{R}^4$?

(d) Si $a = 1$, calcula el valor de m para que el vector $(1,2,1,m) \in F$.

a) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & a & 0 \\ 1 & -1 & a & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1 \\ F_4 = F_4 - F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & a+1 \\ 0 & -2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \longrightarrow a = 0$

Si $a = 0$ $\quad \dim(F) = 3$

Si $a \neq 0$ $\quad \dim(F) = 4$

b) $G = (x, y, z, t) = (x, y, -2x, -2x)$

$z + t + 4x = 0$; $-2x + t + 4x = 0$; $t = -2x$

$z + 2x = 0$; $z = -2x$

$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow G = \{(1,0,-2,-2), (0,1,0,0)\}$

$\mathrm{Dim}(G) = 2$

c) Para cualquier valor $\neq 0$ $\quad F \cap G = \vec{0}$

Si $\dim(F) = 3$ una de las dos incognitas de G $= 0$ lo que daria como resultado $\dim(F+G) = 4$

si $\dim(F) = 4$ no puede

$\mathrm{Dim}(F+G) = \mathrm{Dim}(F) + \mathrm{Dim}(G) - \mathrm{Dim}(F \cap G)$

$\quad x \quad = 3 \text{ o } 4 + 2 - y$

Si $\mathrm{Dim}(F \cap G) = 0$; $\mathrm{Dim}(F+G) = 5/6$

Si $\mathrm{Dim}(F+G) = 4$; $\mathrm{Dim}(F \cap G) = 1/2$

d) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & m \end{array}\right) \underset{F_2 = F_2 + F_3}{\overset{\substack{F_3 = F_3 + F_2 \\ F_4 = F_2 + F_3 + F_4}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m+3 \end{array}\right) \left\{\begin{array}{l} t = 1 - x - y - z = 1 - 3 + 3 - m - 3 = -m - 2 \\ 2x + y = 3 \ ; \ x = 3 \\ y = -3 \\ t = m + 3 \end{array}\right.$

$-m - 2 = 1$; $m = -3$

$(1,2,1,-3) \in F \ \forall \ m \in \mathbb{R}$

14. Dados en $\mathbb{R}^3$ los subespacios vectoriales

$$S = \langle \{(2,0,1),(1,-1,2)\} \rangle$$

$$A = \langle \{(1,0,1),(0,1,1)\} \rangle$$

(a) ¿Pertenece el vector $\vec{w}$ $(\frac{5}{2}, \frac{-1}{2}, 2)$ al subespacio $S \cap A$?

(b) Hallar una base y ecuaciones de $A + S$.

a) $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_2 = 2F_1 - F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} S = \{(2,0,1),(3,1,0)\} \\ Dim(S) = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2\alpha + 3\beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right) \underset{F_1 = F_1 - 3F_2 - 2F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x-3y-2z \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right)$ $x - 3y - 2z = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2 = F_2 - F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} A = \{(1,0,1),(-1,1,0)\} \\ Dim(A) = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \alpha - \beta \\ y = \beta \\ z = \alpha \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right) \underset{F_1 = F_1 + F_2 - F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x+y-z \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right)$ $x + y - z = 0$

$S \cap A$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 = F_2 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 = F_1 + 2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x + 5y = 0 \\ 4y + z = 0 \end{cases}$ comprobamos $\begin{matrix} 5/2 + 5(-1/2) = 0 \\ 4(-1/2) + 2 = 0 \end{matrix}$ $\vec{w} \in S \cap A$

b) $A+S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_1 = 2F_2 - F_1 \\ F_2 = F_2 + F_4 - F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 = 2F_1 + F_2 - 2F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} A+S = \{(1,0,0),(0,0,2),(0,1,1)\} \\ Dim(A+S) = 3 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & 1 & z \end{array}\right)$ $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \gamma \\ z = \beta - \gamma \end{cases}$

15. Hallar una base y ecuaciones del subespacio vectorial $F \cap G$ para los subespacios

$$F = \langle\{(1,1,2,2),(0,1,3,4),(1,2,0,1)\}\rangle$$

$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; x+y+4z=0, y+2t=0\}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\3\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 2 & 3 & 0 & z \\ 2 & 4 & 1 & t \end{array}\right) \xrightarrow[F_4=F_4-F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 2 & 3 & 0 & z \\ 0 & 1 & 1 & t-z \end{array}\right)$$

$$G\begin{cases} x+y+4z=0 \\ y+2t=0 \end{cases} \qquad \xrightarrow[F_4=F_4+F_1-F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 2 & y \\ 2 & 3 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & t-z+x-y \end{array}\right) \qquad x-y-z+t=0 \quad \text{Ec implíz } F$$

$$F\cap G \begin{cases} x-y-z+t=0 \\ x+y+4z=0 \\ y+2t=0 \end{cases} \qquad \text{Dim}(F\cap G)=3$$

$F\cap G = \{(1,-1,-1,1),(1,1,4,0),(0,1,0,2)\}$

$$\begin{cases} x = y+z-t = z-3\alpha = -8\alpha/5 = -8\beta \\ y = -2\alpha = -10\beta \\ z = 7\alpha/5 = 7\beta \\ t = \alpha = 5\beta \end{cases}$$

$$2x+3z+t=0;\quad 3z=-2x-t = 6\alpha-2z+\alpha;\quad z=\frac{7\alpha}{5}$$

$B(F\cap G)=\{(-8,-10,7,5)\}$

16. Considere el conjunto de vectores $F = \{(1,1,1,1+a),(1,1,1+a,1),(1,1+a,1,1),(1+a,1,1,1)\}$.

(a) Estudie la dimensión de F según los valores de a.

(b) Si $a = -4$, calcule las ecuaciones paramétricas e implícitas de F.

(c) Si $a = 0$, hallar un subespacio vectorial H tal que $dim(F+H) = 4$ y $dim(F \cap H = 0)$. Dar las bases y ecuaciones de H.

(d) Si $a = 1$, calcule el valor de m para que el vector $(0,m,1,m) \in F$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+a \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1+a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 = F_1 - F_2 \\ F_2 = F_2 - F_3 \\ F_3 = F_3 - F_4 \\ F_4 = F_4 - F_5 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & a \\ 0 & -a & a & 0 \\ -a & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \begin{cases} a = 0 & dim(F) = 1 \\ a \neq 0 & dim(F) = 4 \end{cases}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_4 = F_4 + 3F_3 \\ F_3 = F_3 + 3F_2 \\ \sim \\ F_2 = F_2 + 3F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 4 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 = 4F_1 - F_2 \\ F_3 = F_3 - 4F_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -12 & 16 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} F_4 = F_4 - 2F_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -12 & 16 \\ 0 & 0 & 28 & -28 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_4 = F_4 - 7F_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -12 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & -4 & y \\ 1 & 4 & -12 & z \\ -3 & -4 & 16 & t \end{array}\right) \begin{matrix} F_4 = F_4 + F_3 + F_2 + F_1 \\ \sim \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & -4 & y \\ 1 & 4 & -12 & z \\ 0 & 0 & 0 & x+y+z+t \end{array}\right) \quad x+y+z+t=0$

c) $a = 0 \quad Dim(F) = 1$

$Dim(F+H) = Dim\,F + Dim\,H - Dim\,F \cap H$

$4 = 1 + x - 0$

$Dim\,H = 3$

$B_F = \{(1,1,1,1)\} \quad x = y = z = t$

$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,//\, x = 0\}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = \gamma \end{cases} \quad \begin{matrix} H = \{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\} \\ dim(H) = 3 \end{matrix}$

$F \cap H \begin{cases} x = y = z = t \\ x = 0 \end{cases} (0,0,0,0) \rightarrow dim(F \cap H) = 0$

$$F+H=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Dim}(F+H)=4$

d) $\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&2&0\\1&1&2&1&m\\1&2&1&1&1\\2&1&1&1&m\end{array}\right)\begin{array}{c}F_1=F_1-F_2\\F_2=F_2-F_3\\\sim\\F_3=F_3-F_4\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&-1&1&-m\\0&-1&1&0&m-1\\-1&1&0&0&1-m\\2&1&1&1&m\end{array}\right)\begin{array}{c}F_4=F_4-F_1-2F_2-3F_3\\\sim\end{array}\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&-1&1&-m\\0&-1&1&0&m-1\\-1&1&0&0&1-m\\5&0&0&0&1-m\end{array}\right)$

$$\begin{cases}5x=1-m\ ;\ x=1-m/5\\y-x=1-m\ ;\ y=6-6m/5\\z-y=m-1\ ;\ z=1-m/5\\t-z=-m\ ;\ t=1-6m/5\end{cases}$$

$x+y+z+2t=0\ ;\ \frac{1-m}{5}+\frac{6-6m}{5}+\frac{1-m}{5}+\frac{1-6m}{5}=9-14m=0\ ;\ m=\frac{9}{14}$

17. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$

(a) Estudie, para los distintos valores reales del parámetro a, la dimensión del subespacio vectorial generado por los vectores $(a,1,1),(1,a,1),(1,1,a)$. Dar también, en cada caso, las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio vectorial (llámese S).

(b) Sea el subespacio vectorial $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x+y-2z=0\}$. Estudiar, según los distintos valores reales de a, la dimensión, las ecuaciones paramétricas e implícitas de los subespacios vectoriales $S \cap T$ y $S+T$.

a) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ Si $a=1$. ld $\rightarrow \dim(S)=1$ $\quad \{(1,1,1)\}$

$x=y=z$

$\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Si $a \neq 1$. li $\rightarrow \dim(S)=3$ $\quad \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$

$x+y-z=2\gamma \quad \gamma \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x=\beta+\gamma \\ y=\alpha+\gamma \\ z=\alpha+\beta \end{cases} \rightarrow z=y-\gamma+x-\gamma=x+y-2\gamma=0$

b) $a \neq 1$:

$S: \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$

$T: x+y-2z=0$

$S \cap T: \ x+y-2z=0$

$\begin{cases} x=\alpha \\ y=2\beta-\alpha \\ z=\beta \end{cases}$

$\mathrm{Dim}(S\cap T)=\mathrm{Dim}(T)=2$

$S+T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_5=F_5+F_4}{\overset{F_4=F_4+F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x=\beta+\gamma \\ y=\alpha+\gamma \\ z=\alpha+\beta \end{cases}$

$\mathrm{Dim}(S+T)=3$

$\lambda = 1$:

$S: x = y = z$

$T: x + y - 2z = 0$

$S \cap T \quad \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$

$\text{Dim}(S \cap T) = 1$

$S \cap T = \{(1,1,1)\}$

$$S + T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_3 = F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Dim}(S+T) = 2$

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \alpha - \beta \\ z = \alpha \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & y \\ 1 & & z \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2 = F_2 + F_1 - 2F_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & x+y-2z \\ 1 & & z \end{array}\right) \quad x + y - 2z = 0$$

18. Consideramos en $\mathbb{R}^4$ los siguientes subespacios vectoriales:

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ x = y, \ x = z\}$$
$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ x = \alpha + \beta + \gamma + \mu, \ y = \alpha + \beta + 2\mu, \ z = \gamma + \mu, \ t = \beta + \gamma\}$$

Estudiar la dimensión y obtener una base y ecuaciones implícitas de los subespacios U+S y U∩S **(3 puntos)**.

$$U \begin{cases} x = w \\ y = w \\ z = w \\ t = v \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} Dim(U) = 2 \\ U = \{(1,1,1,0), (0,0,0,1)\} \end{array}$$

$$S \begin{cases} x = \alpha + \beta + \gamma + \mu \\ y = \alpha + \beta + 2\mu \\ z = \gamma + \mu \\ t = \beta + \gamma \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} Dim(S) = 4 \\ S = \{(1,1,1,1), (1,1,0,2), (0,0,1,1), (0,1,1,0)\} \end{array}$$

$$U \cap S \begin{cases} x = w \\ y = w \\ z = w \\ t = v \end{cases} \quad \begin{array}{l} Dim(U \cap S) = 2 \\ U \cap S = \{(1,1,1,0), (0,0,0,1)\} \\ x = y = z \end{array}$$

$$U+S \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} Dim(U+S) = 4 \\ (U+S) = \\ = \{(1,1,1,1), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (0,0,0,2)\} \end{array}$$

19. Un avión que se dirige al aeropuerto de Málaga tiene como localización del aeropuerto la base $B = \{(1,1,0),(2,3,1),(0,0,1)\}$. El avión pierde la conexión, y al volver a conectarse, la nueva base que le dan desde el aeropuerto es:

$$B' = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,2)\}.$$

Si las coordenadas del avión respecto a la antigua base era $\vec{v}\ (5,1,2)$. ¿Cuáles son sus coordenadas respecto a la nueva base?

$M_B V_B = M_{B'} V_{B'}$; $V_{B'} = M_{B'}^{-1} M_B V_B$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 = F_1 - F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$M_{B'}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}_{B'}$$

20. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Sabiendo que

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

$$\vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

$$\vec{v}_3 = \vec{u}_3$$

(a) En B_2 el vector $\vec{a}$ tiene por coordenadas $(2, 3, 1)$. Hallar en la base B_1 las coordenadas de dicho vector.

(b) En B_1 el vector $\vec{b}$ tiene por coordenadas $(6, 3, 1)$. Hallar en la base B_2 las coordenadas de dicho vector.

$\vec{V}_1 = \vec{U}_1 - \vec{U}_2 = (1,-1,0)_{B_1}$

$\vec{V}_1 = 2\vec{U}_1 + \vec{U}_2 = (2,1,0)_{B_1}$

$\vec{V}_3 = \vec{U}_3 = (0,0,1)_{B_1}$

a) $\vec{a} = (2,3,1)_{B2}$

$\vec{a}_{B1} = P_{B_2 B_1} \vec{a}_{B2}$

$$\vec{a}_{B1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B1}$$

1. b) $\vec{b} = (6,3,1)_{B1}$

$$\vec{b}_{B_1 B_2} = (P_{B_2 B_1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{b} = (0,3,1)_{B2}$

2. $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \vec{V}_1 \\ 0 & 3 & 0 & \vec{V}_2 - 2\vec{V}_1 \\ 0 & 0 & 1 & \vec{V}_3 \end{array}\right)$$

$\vec{U}_1 = \frac{1}{3}\vec{V}_1 + \frac{1}{3}\vec{V}_2$

$\vec{U}_2 = \frac{1}{3}\vec{V}_2 - \frac{2}{3}\vec{V}_1$

$\vec{U}_3 = \vec{V}_3$