Tema 1-Relación de problemas correspondientes al tema de álgebra vectorial.

(Los vectores se pueden representar en negrita o con flecha superíndice, el punto representa el producto escalar y el aspa el producto vectorial)

1. Dados los vectores a (2,-1,0), b (3, -2,1) y c(0,-2,1).

Calcular:

a. (**a**+**b**)·**c**

b. (**a**-**b**)x**c**

c. (**a**x**b**)·**c**

d. (**a**x**b**)x**c**

2. Dados los vectores: *A* = 3 *i* + 9 *j* – 5 *k*, *B* = - 2 *i* + 8 *j* – 1 *k*, *C* = 2 *i* - 6 *j* - 8 *k*, determinar:

1. ***A* + *B* – *C***
2. El producto escalar ***A* . *B***
3. El producto vectorial ***A* × *B***
4. El producto mixto **(*A* × *B*) . *C***
5. El ángulo formado por los vectores ***A* y *B***.
6. Proyección del vector ***A* sobre el *B***
7. Un versor perpendicular a ***A*** y a ***B***

3. Dados los vectores:

a = 4 **i** – 10 **j** + 3 **k**

b = 0 **i** + 6 **j** + 10 **k**

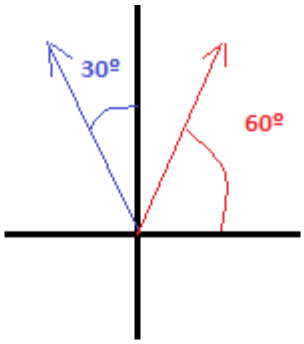
c = 8 **i** + 3 **j** – 14 **k** Calcular:

a) El vector suma de los tres: coordenadas, módulo, dirección y sentido
b) El producto escalar de **a.b**
c) Ángulo que forman **b** y **c**
d) Producto vectorial de **b x c**. ¿Qué representa la resultante?
e) Producto mixto **a. (b x c)** ¿Qué representa?

4. Dadas dos fuerzas aplicadas en el origen de coordenadas, cuyo módulo es idéntico y de valor 8 N. Calcular:

a) las componentes de ambas fuerzas

b) la fuerza resultante (módulo, dirección y sentido),
c) un vector unitario que indica la dirección de la fuerza resultante.



5. a) Calcular el gradiente de la función:

$$\emptyset = 2 \cdot X \cdot Z - Y^2$$

b) ¿En qué dirección, a partir del punto (1, 3, 2) es máxima la variación de la función escalar anteriormente descrita?

c) La función vectorial obtenida ¿es una función conservativa o solenoidal? Demostrarlo

6. Dado el campo vectorial: V = mi + 2y**j** -z**k. Calcular el valor de m para que dicho campo vectorial sea solenoidal.**

7. Dado el campo vectorial: (x-1)**i** + xy**j**
Calcular el flujo a través del cubo limitado por las caras x=0, x=1, y=0, y=1, z=0 y z=1: a) Directamente, b) Aplicando el teorema de Gauss

1. Dados los vectores a (2,-1,0), b (3, -2,1) y c(0,-2,1).

Calcular:

a. **(a+b)·c** $= (2+3, -1-2, 0+1)(0,-2,1) = (5,-3,1)(0,-2,1) = 0+6+1 = 7$

b. **(a-b)xc** $= (2-3, -1+2, 0-1) \times (0,-2,1) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} + 2\bar{k} - 2\bar{j} + \bar{j} = -\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$

c. **(axb)·c** $= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 3 = 3$

d. **(axb)xc** $= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \times (0,-2,1) = (-\bar{i} - 4\bar{k} + 3\bar{k} - 2\bar{j}) \times (0,-2,1) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2\bar{i} + 2\bar{k} - 2\bar{i} + \bar{j} = -4\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$

2. Dados los vectores: *A* = 3 *i* + 9 *j* – 5 *k*, *B* = - 2 *i* + 8 *j* – 1 *k*, *C* = 2 *i* - 6 *j* - 8 *k*, determinar:

1. ***A* + *B* – *C***
2. El producto escalar ***A* . *B***
3. El producto vectorial ***A* × *B***
4. El producto mixto **(*A* × *B*) . *C***
5. El ángulo formado por los vectores ***A* y *B***.
6. Proyección del vector ***A* sobre el *B***
7. Un vector perpendicular a ***A*** y a ***B***

1. $A+B-C=(3,9,-5)+(-2,8,-1)+(-2,6,8)=(-1,23,2)$

2. $A\cdot B=(3,9,-5)(-2,8,1)=-6+72-5=61$

3. $A\times B=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 9 & -5 \\ -2 & 8 & -1 \end{vmatrix}=-9\bar{i}+24\bar{k}+10\bar{j}+18\bar{k}+40\bar{i}+3\bar{j}=31\bar{i}+13\bar{j}+42\bar{k}$

4. $(A\times B)C=\begin{vmatrix} 3 & 9 & -5 \\ -2 & 8 & -1 \\ 2 & -6 & -8 \end{vmatrix}=-192-60-18+80-18-144=-352$

5. $\alpha_{AB}=\arccos\left|\dfrac{|A||B|}{AB}\right|=\arccos\left|\dfrac{\sqrt{115}\sqrt{69}}{61}\right|$

6. $\text{Proy}\,A_B=A\cos\theta=\dfrac{AB}{|B|}=\dfrac{71}{\sqrt{69}}$

7. El vector perpendicular a 2 vectores se averigua con el producto vectorial
$C=A\times B=31\bar{i}+13\bar{j}+42\bar{k}$

3. Dados los vectores:

a = 4 **i** – 10 **j** + 3 **k**

b = 0 **i** + 6 **j** + 10 **k**

c = 8 **i** + 3 **j** – 14 **k** Calcular:

a) El vector suma de los tres: coordenadas, módulo, dirección y sentido
b) El producto escalar de **a.b**
c) Ángulo que forman **b** y **c**
d) Producto vectorial de **b x c**. ¿Qué representa la resultante?
e) Producto mixto **a. (b x c)** ¿Qué representa?

a) $a+b+c = (4,-10,3)+(0,6,10)+(8,3,-14) = (12,-1,-1)$

b) $a \cdot b = (4,-10,3)(0,6,10) = -60+30 = -30$

c) $\alpha_{bc} = \arccos \left| \frac{|A||B|}{AB} \right| = \arccos \left| \frac{(5\sqrt{5})(2\sqrt{34})}{-30} \right|$

d) $b \times c = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -10 & 3 \\ 0 & 6 & 10 \end{vmatrix} = -100\vec{i} + 24\vec{k} - 40\vec{j} - 18\vec{i} = -118\vec{i} - 40\vec{j} + 24\vec{k}$

Representa la dirección de la normal

e) $a(b \times c) = \begin{vmatrix} 4 & -10 & 3 \\ 0 & 6 & 10 \\ 8 & 3 & -14 \end{vmatrix} = -336 - 800 - 144 - 120 = -1400$

El volumen del area generado por los 3 vectores

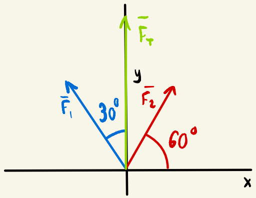
4. **Dadas dos fuerzas aplicadas en el origen de coordenadas, cuyo módulo es idéntico y de valor 8 N. Calcular:**

a) las componentes de ambas fuerzas
b) la fuerza resultante (módulo, dirección y sentido),
c) un vector unitario que indica la dirección de la fuerza resultante.

$F_1 = 8N$

$F_2 = 8N$

$|F_1| = |F_2|$



a) $\bar{F}_1 \begin{cases} F_{x1} = -F\cos 60 = -8\cos 60 = -4\bar{i}\ N \\ F_{y1} = F\operatorname{sen} 30 = 8\operatorname{sen} 30 = 4\bar{j}\ N \end{cases} \bar{F}_1 = 4(\bar{j} - \bar{i})\ N$

$\bar{F}_2 \begin{cases} F_{x_2} = F\cos 60 = 8\cos 60 = 4 \\ F_{y_2} = F\operatorname{sen} 30 = 8\operatorname{sen} 30 = 4 \end{cases} \bar{F}_2 = 4(\bar{i} + \bar{j})\ N$

b) $\bar{F}_T = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 4(\bar{j} - \cancel{\bar{i}}) + 4(\cancel{\bar{i}} + \bar{j}) = 2 \cdot 4\bar{j} = 8\bar{j}\ N$

c) $\bar{U}_{12} = \dfrac{\overline{F_1F_2}}{|\overline{F_1F_2}|} = \dfrac{8\bar{j}}{\sqrt{8^2}} = 1$

5. a) Calcular el gradiente de la función:

$$\emptyset = 2 \cdot X \cdot Z - Y^2$$

b) ¿En qué dirección, a partir del punto (1, 3, 2) es máxima la variación de la función escalar anteriormente descrita?

c) La función vectorial obtenida ¿es una función conservativa o solenoidal? Demostrarlo

a) $\operatorname{grad} \emptyset = \vec{\nabla} \emptyset = \left(\frac{\partial \emptyset}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \emptyset}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \emptyset}{\partial z} \bar{k} \right) = 2z\, \bar{i} - 2Y\, \bar{j} + 2X\, \bar{k}$

b) $\operatorname{grad} \emptyset (1,3,2) = 4\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$

La máxima variación se lleva acabo en la dirección Y.

c) $\operatorname{rot} \emptyset = \vec{\nabla} \times F_{\emptyset} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2z & -2Y & 2X \\ 2X & Y^2 & 2z \end{vmatrix} = -4Yz\, \bar{i} + 2Yz^2\, \bar{k} + 4X^2\, \bar{j} + 4XY\, \bar{k} - 2XY^2\, \bar{i} - 4z^2\, \bar{j} \neq 0$

Es una función conservativa

6. **Dado el campo vectorial: V =** mi + 2yj -z**k. Calcular el valor de m para que dicho campo vectorial sea solenoidal.**

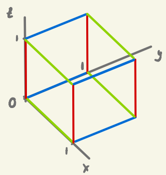
$$\text{rot } \vec{V} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ m & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2\bar{i} - m\bar{j} - 2m\bar{k} + 2\bar{i} = -m\bar{j} + 2m\bar{k}$$

Para que V sea solenoidal $\text{rot } \bar{V} = -m\bar{j} + 2m\bar{k}$ tiene que ser $\text{rot } \bar{V} = 0$

Por lo que m debe de ser $m = 0$.

7. Dado el campo vectorial: (x-1)**i** + xy**j**

Calcular el flujo a través del cubo limitado por las caras x=0, x=1, y=0, y=1, z=0 y z=1: a) Directamente, b) Aplicando el teorema de Gauss



a)