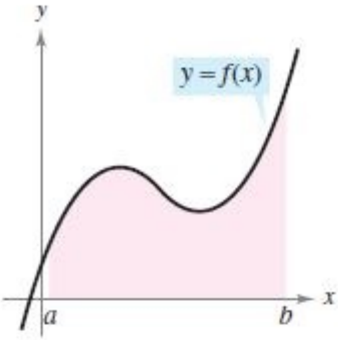
CÁLCULO

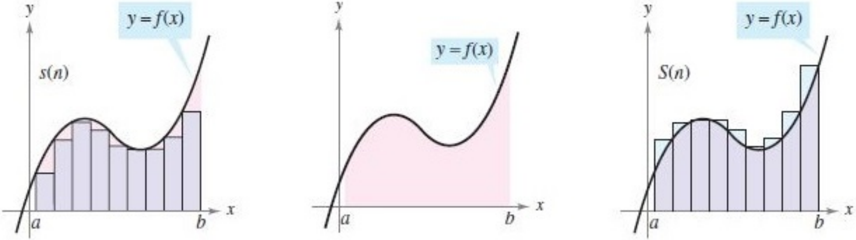
Integrales Definidas (Parte I)

Integrales Definidas (Parte I)

- Motivación.
- Definición.
- Propiedades.



Área de la región



$s(n) \leq$ (Área de región) $\leq S(n)$

Definición

Una *partición* $\mathcal{P}$ de un intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[a, b]$ que contiene a los extremos del intervalo $[a, b]$.

- La partición $\mathcal{P}$ satisface que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
- Divide al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de longitudes $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$.
- A la longitud máxima de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ se le llama *norma* de la partición $\mathcal{P}$, y se denota por $|\mathcal{P}|$.
- Al conjunto de las particiones de $[a, b]$ lo denotaremos $\Omega([a, b])$.

Definición

Sea $\mathcal{P} \in \Omega([a,b])$. Para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, sea x_i^* un punto arbitrario en $[x_{i-1}, x_i]$. Al número

$$S(f,\mathcal{P},\{x_i^*\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

se le llama la **suma de Riemann correspondiente a la partición $\mathcal{P}$ y a la elección de puntos intermedios $\{x_i^*\}_{i=1}^{n}$.**

Casos particulares de sumas de Riemann

- Cuando $x_i^* = x_i^{max}$, donde $f(x_i^{max}) = \max\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. En este caso,

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{max})(x_i - x_{i-1})$$

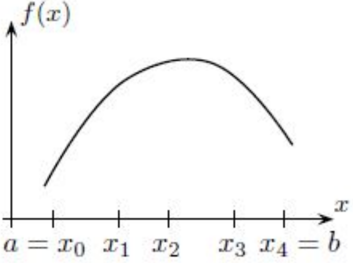
se le llama **suma superior de Riemann correspondiente a $\mathcal{P}$**

- Cuando $x_i^* = x_i^{min}$, donde $f(x_i^{min}) = \min\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. En este caso,

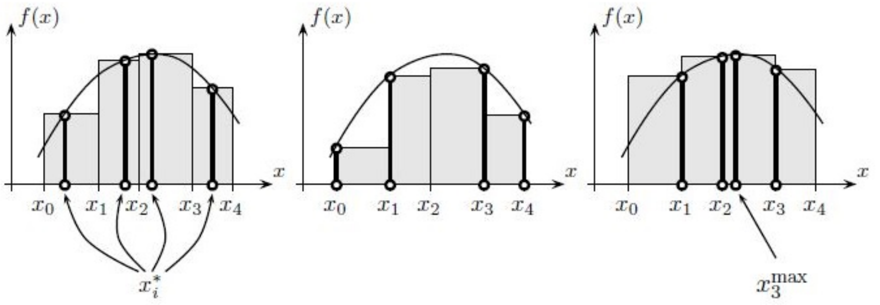
$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^{min})(x_i - x_{i-1})$$

se le llama **suma inferior de Riemann correspondiente a $\mathcal{P}$**

Ejemplo: La figura muestra la gráfica de una función $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y una partición $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, x_2, x_3, x_4 = b\}$.

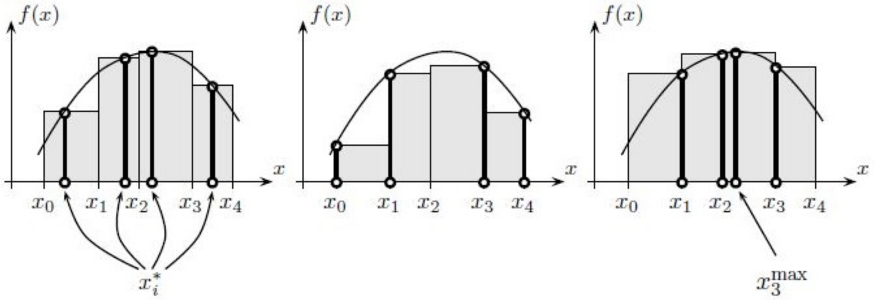


Sumas de Riemann: $S(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\})$ con los x_i^* dados en (a), $\underline{S}(f, \mathcal{P})$ y $\overline{S}(f, \mathcal{P})$.



(a) $S(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\})$ (b) $\underline{S}(f, \mathcal{P})$ (c) $\overline{S}(f, \mathcal{P})$

Sumas de Riemann:
$S(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\})$ con los x_i^* dados en (a), $\underline{S}(f, \mathcal{P})$ y $\overline{S}(f, \mathcal{P})$.



(a) $S(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\})$ (b) $\underline{S}(f, \mathcal{P})$ (c) $\overline{S}(f, \mathcal{P})$

Observación: Para toda partición $\mathcal{P} \in \Omega([a, b])$ se tiene que:

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}).$$

Definición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es **integrable** si existen los límites de las sumas inferior y superior de Riemann y ambos coinciden, es decir:

$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \underline{S}(f, \mathcal{P}) = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \overline{S}(f, \mathcal{P}).$$

Al valor de este límite, si existe, se le denomina la **integral definida** de la función f, y se denota como:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua, excepto en un número finito de puntos, entonces f es integrable en $[a, b]$. En particular, si f es continua en todo el intervalo $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.

Como una consecuencia del teorema anterior, se tiene que las siguientes funciones son integrables en todo intervalo cerrado $[a, b]$.

1. Funciones polinomiales.
2. Funciones seno y coseno.
3. Funciones racionales ($[a, b]$ no debe contener puntos que indefinan la función).

Ejemplo: Hallar la integral definida $\displaystyle\int_{-2}^{1} 2x dx$.

Solución:

La función $f(x) = 2x$ es integrable en el intervalo $[-2, 1]$ debido a que f es continua en $[-2, 1]$.

Por la definición de integrabilidad, se deduce que cualquier partición cuya norma tienda a 0 puede utilizarse para determinar el límite correspondiente.

Sea $\mathcal{P} = \{x_0 = -2, x_1, \dots, x_n = 1\}$ una partición de f que satisface que $\triangle x_1 = \cdots = \triangle x_n = \frac{3}{n} = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{b-a}{n}$. Entonces $|\mathcal{P}| = \frac{3}{n}$.

Haciendo $x_i^* = x_{i-1} \quad (\forall i \in \{1, \dots, n\})$, se obtiene que:

$$x_i^* = x_0 + i|\mathcal{P}| = -2 + \frac{3i}{n}.$$

Solución(continuación): Por tanto:

$$\int_{-2}^{1} 2x dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(-2+\frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(-2+\frac{3i}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left(-2n+\frac{3}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(-12+9+\frac{9}{n}\right) = -3.$$

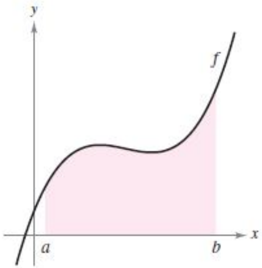
$$\left(-4+\frac{6k}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right)$$

$$\left(-\frac{12}{n}+\frac{18}{n}\right)$$

Teorema (la integral definida como área de una región)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función. Si f es continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f, del eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx.$$



Propiedades

- Si f está definida en $x = a$, entonces $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- Si f es integrable en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

- Si f es integrable en los tres intervalos cerrados determinados por a, b y c, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Propiedades

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y k es una constante, entonces las funciones kf y $f \pm g$ son integrables en $[a, b]$, y

1. $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$
2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$

CÁLCULO

Integrales Definidas (Parte II)

Integrales Definidas (Parte II)

- Preliminares.
- Teorema Fundamental del Cálculo.
- Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.
- Integrales Impropias.

Preliminares

Ejercicio: Calcular la integral $\int_0^x t^2 dt$.

Solución:

La función $f(t) = t^2$ es integrable en el intervalo $[0, x]$ debido a que f es continua.

Sea $\mathcal{P} = \{t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n = x\}$ una partición de f que satisface que $\triangle t_1 = \cdots = \triangle t_n = \frac{x}{n}$. Entonces $|\mathcal{P}| = \frac{x}{n}$.

Haciendo $t_i^* = t_{i-1} \quad (\forall i \in \{1, \ldots, n\})$, se obtiene que:

$$t_i^* = t_0 + i|\mathcal{P}| = \frac{ix}{n}.$$

Solución(continuación): Por tanto:

$$
\begin{aligned}
\int_0^x t^2 dt &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)(t_i - t_{i-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{ix}{n}\right)\frac{x}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{ix}{n}\right)^2 \frac{x}{n} \\
&= \frac{x^3}{n^3} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{x^3}{n^3} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{x^3}{6} \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} \\
&= \frac{x^3}{6} \cdot 2 = \frac{x^3}{3}.
\end{aligned}
$$

Teorema del valor medio para integrales

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Segundo teorema del valor medio para integrales

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(c)\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Dos límites más importantes estudiados

- La derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- La integral definida:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

¿Existe alguna relación entre estos dos límites?

Teorema Fundamental del Cálculo

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces la función $G : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida mediante la expresión

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

es una primitiva de f. Es decir:

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x).$$

Proof. Primeramente, veamos que $G(x)$ es derivable.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{G(x+h)-G(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_a^{x} f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.
\end{aligned}$$

Aplicando el Teorema del valor medio para integrales, se tiene que existe $c\in[x,x+h]$ tal que

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c).$$

Proof (Continuación): Por tanto:

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) = f(x).$$

Entonces, $G(x)$ es derivable y $G'(x) = f(x)$.

Por tanto, G es una primitiva de f.

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una primitiva de f. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad \textit{(Regla de Barrow)}$$

Proof. Sea $G(x) = \int_a^x f(t)dt$. Por el Teo. Fund. Cálc., G es una primitiva de f. Por tanto, $G(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in [a, b]$.
Evaluando G en $x = a$:

$$F(a) + C = G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0,$$

implicando que $C = -F(a)$. Evaluando G en $x = b$:

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) + C = F(b) - F(a).$$

Ejemplos

Ejemplo 1: Calcula la integral $\int_1^3 (1+2x)dx$.

Solución: $\int_1^3 (1+2x)dx = (x+x^2)\Big|_1^3 = 10.$

Ejemplo 2: Dada la función $G(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, calcular $G'(x)$.

Solución: Por el Teo. Fund. Cálc.:

$$G'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\right) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Observa que $G(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(x) - \arctan(0) = \arctan(x)$.

Ejemplo 3: Calcula la integral $\int_1^4 t^3 dt$.

Solución: $\int_1^4 t^3 dt = \frac{t^4}{4}\Big|_1^4 = 64 - \frac{1}{4} = \frac{255}{4}$.

Ejemplo 4: Calcula la derivada de la función $G(x) = \int_1^x t^3 dt$.

Solución: Por el Teo. Fund. Cálc.:

$$G'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_1^x t^3 dt\right) = x^3.$$

Integrales Impropias

Definición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que la integral $\int_a^b f(x)dx$ es una **integral impropia** si ocurre alguna de las siguientes situaciones:

(i) $a = \pm\infty$ ó $b = \pm\infty$ (integral impropia de primera especie).

(ii) f no acotada en (a, b) (integral impropia de segunda especie).

Integrales impropias de primera especie

- Si f es continua en $[a, \infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \left(\int_a^b f(x)dx \right).$$

- Si f es continua en $(-\infty, b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \left(\int_a^b f(x)dx \right).$$

- Si f es continua en $(-\infty, \infty)$ y $c \in (a, b)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx.$$

Integrales impropias de segunda especie

- Si f es continua en $[a, b)$ y discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b^-} \left(\int_a^c f(x)dx \right).$$

- Si f es continua en $(a, b]$ y discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a^+} \left(\int_c^b f(x)dx \right).$$

- Si f es continua en $[a, b]$ excepto en $c \in (a, b)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ejemplo 1: Calcula la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$.

Solución:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \left(\int_1^b \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{b \to \infty} \left(\ln(x) \Big|_1^b \right) = \lim_{b \to \infty} (\ln(b) - 0) = \infty.$$

Ejemplo 2: Calcula la integral $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$.

Solución:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \to \infty} \left(\int_0^b e^{-x} dx \right) = \lim_{b \to \infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^b \right) = 1 - \lim_{b \to \infty} e^{-b} = 1.$$

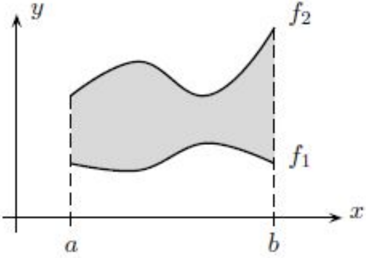
CÁLCULO

Integrales Definidas (Parte III)

Integrales Definidas (Parte III)

- Aplicaciones de la integral definida.
  - Área de regiones delimitadas por curvas suaves.
  - Volúmenes de sólidos de revolución.
  - Longitudes de curvas.

Área de regiones delimitadas por curvas suaves

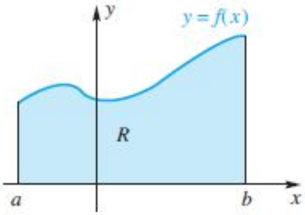


Proposición 1

Sean $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces el área de la región acotada por las gráficas de f_1, f_2 y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Ejemplo: Obtenga el área $\mathcal{A}(R)$ de la región R que se muestra en la siguiente figura.

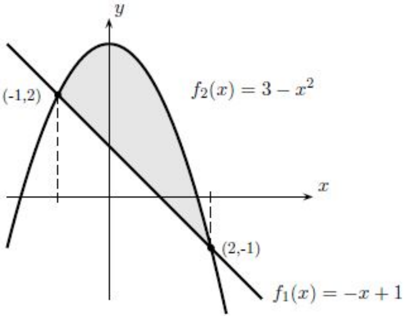


Solución:

$$\mathcal{A}(R) = \int_a^b (f(x) - 0)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Ejemplo: Calcula el área $\mathcal{A}$ de la región del plano delimitada por la curva $y = 3 - x^2$ y la recta $y = -x + 1$.

Solución:



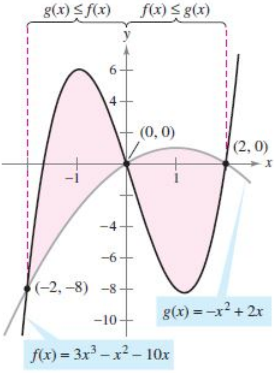
$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{2} [(3 - x^2) - (-x + 1)]dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx = \frac{9}{2}.$$

Área de la región comprendida entre dos curvas que se intersectan en más de dos puntos

- Encontrar los puntos de intersección $x_1, \ldots, x_k$ $(k \geq 3)$ que intersectan a las curvas (con $x_1 < \cdots < x_k$).
- Aplicar la Proposición 1 a cada uno de los intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ determinados por los puntos de intersección.
- Sumar las áreas obtenidas en el paso previo.

Ejemplo: Calcula el área $\mathcal{A}$ de la región del plano delimitada por la curva $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.

Solución:

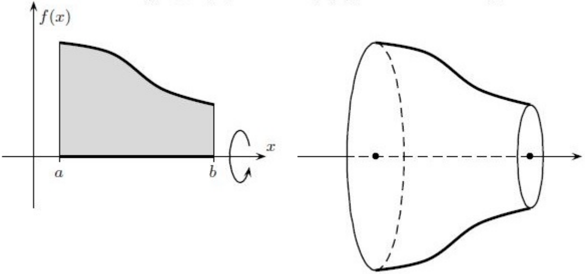


$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]dx \\
&= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12)dx \\
&= \left(\frac{3x^4}{4} - 6x^2 \right) \Bigg|_{-2}^{0} + \left(\frac{-3x^4}{4} + 6x^2 \right) \Bigg|_{0}^{2} \\
&= -(12 - 24) + (-12 + 24) \\
&= 24.
\end{aligned}
$$

Cálculo del volumen de sólidos de revolución
(dos casos particulares)

Primer Caso: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y consideremos el sólido de revolución S que se genera al girar alrededor del eje de las abscisas la región delimitada por la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$.

$$S = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 \leq (f(x))^2 \ \text{con} \ a \leq x \leq b\}.$$



$$V(S) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

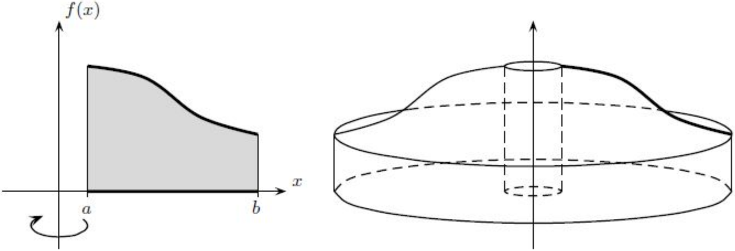
Ejemplo: Sea $f : [0, h] \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = r$, con r constante. El sólido de revolución que se genera por la gráfica de f es un cilindro (donde el radio de la base es r y la altura es h). El volumen del cilindro es:

$$V = \pi \int_0^h (f(x))^2 dx = \pi \int_0^h r^2 dx = \pi r^2 h.$$

Ejemplo: Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función definida como $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. El sólido de revolución que se genera por la gráfica de f es una esfera de radio 1. El volumen de la esfera de radio 1 es:

$$V = \pi \int_{-1}^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}\pi.$$

Segundo Caso: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($a \geq 0$) una función continua y consideremos el sólido de revolución S generado por la rotación de la gráfica f alrededor del eje de las ordenadas.



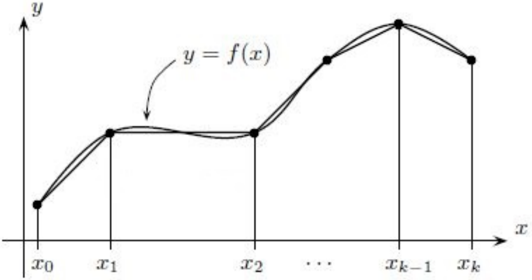
$$V(S) = 2\pi \int_a^b x|f(x)|dx.$$

Ejemplo: Sea S el sólido que se genera al rotar alrededor del eje de las ordenadas la gráfica de las curva $f(x) = 2x^2 - x^3$ con $x \in [0, 2]$. El volumen de S es:

$$V(S) = 2\pi \int_0^2 x|f(x)|dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)dx = \frac{16}{5}\pi.$$

Longitudes de curvas

Sea Γ la curva dada por la ecuación $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$, donde $f(x)$ es una función con derivada continua.



La longitud de la curva Γ es:

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} dx$$

Ejemplo: Calcula la longitud de la curva Γ en el plano cuya ecuación es $y = x^3$ con $x \in [a, b]$.

Solución:

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + 9x^4}dx.$$

Ejemplo: Calcula la longitud de la curva Γ en el plano cuya ecuación es $f(x) = mx + n$ con $x \in [x_1, x_2]$.

$$l(\Gamma) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + m^2} dx = \left(\sqrt{1 + m^2} \cdot x\right)\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2}(x_2 - x_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$