1.- Álgebra vectorial.

§1.1. Escalares y vectores.- Frente a aquellas magnitudes físicas, tales como la masa, la presión, el volumen, la energía, la temperatura, ... que quedan completamente definidas por un número y las unidades utilizadas en su medida, aparecen otras, tales como el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el campo eléctrico, ... que no quedan completamente definidas dando un dato numérico, sino que llevan asociadas una dirección y un sentido. Estas últimas magnitudes son llamadas *vectoriales* en contraposición a las primeras que son llamadas *escalares*.

Las magnitudes escalares quedan representadas por el ente matemático más simple; por un número. Las magnitudes vectoriales quedan representadas por un ente matemático que recibe el nombre de *vector*.

En un espacio euclidiano, de no más de tres dimensiones, un vector se representa por un segmento orientado[1]. Así, un vector queda caracterizado por los siguientes elementos: su longitud o *módulo*, siempre positivo por definición; su *dirección*, determinada por una recta (*directriz*) a la cual el vector es paralelo; y su *sentido*, que podrá ser coincidente u opuesto con un sentido predeterminado sobre la dirección antes mencionada. Así pues, podemos enunciar:

Un vector es una magnitud que tienen módulo, dirección y sentido.

Las magnitudes vectoriales se representan en los textos impresos por letras en ***negrita***, para diferenciarlas de las magnitudes escalares. En la pizarra representaremos las magnitudes vectoriales colocando una flechita sobre la letra que designa su

[1] Este significado de la palabra *vector* es una ampliación natural de su utilización inicial en la astronomía, hoy en desuso: "recta imaginaria que une a un planeta, moviéndose alrededor del centro o foco de una circunferencia o elipse, con dicho centro o foco".

módulo (que es un escalar). Así, por ejemplo; $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$, ... representan, respectivamente, las magnitudes vectoriales de módulos A, V, W, ... También representaremos el módulo de una magnitud vectorial encerrando entre barras la notación correspondiente al vector: $|\boldsymbol{A}|$, $|\boldsymbol{V}|$, $|\boldsymbol{W}|$, ... Cuando nos convenga, representaremos la magnitud vectorial haciendo referencia al *origen* y al *extremo* del segmento orientado que la representa geométricamente; así, designaremos los vectores representados en la Figura 1.1 en la forma $\boldsymbol{A}$=MN, $\boldsymbol{B}$=OP, ... resultando muy útil esta notación para los *vectores desplazamiento*.

Para que dos vectores sean iguales (equipolentes) no basta que tengan el mismo módulo, sino que además es preciso que actúen según la misma dirección y sentido. En lo que sigue, mientras que no se advierta otra cosa, consideraremos los llamados *vectores libres*, para los cuales dos direcciones son equivalentes con tal de que sean paralelas. Por consiguiente, diremos que dos vectores libres son iguales si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido, aunque sus rectas de acción (directrices) sean diferentes. De este modo, en la Figura 1.1 es $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} = \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$.

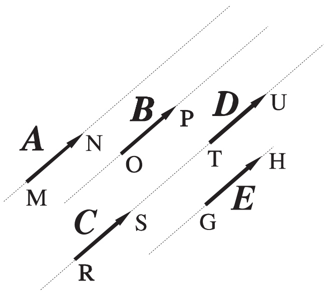


Figura 1.1

Por el contrario, en los llamados *vectores deslizantes*, el criterio de igualdad exige que los vectores tengan el mismo módulo y que actúen en un mismo sentido sobre una misma recta de acción, siendo indiferente el punto de la recta en que estén aplicados. Así, en la Figura 1.1, tan sólo es $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$.

Veremos más adelante que las fuerzas que actúan sobre un sólido rígido tienen carácter de vectores deslizantes, mientras que los momentos de tales fuerzas son vectores libres.

§1.2. Formulación vectorial.- La formulación vectorial de la Física presenta dos grandes ventajas:

(a) La formulación de una ley física en forma vectorial es independiente de los ejes coordenados que se escojan. La notación vectorial ofrece una terminología en la que los enunciados tienen un significado físico claro sin necesidad de introducir en ningún caso un sistema coordenado.

Así, la relación existente entre la fuerza $\boldsymbol{F}$ aplicada a un cuerpo de masa m y la aceleración $\boldsymbol{a}$ que dicho cuerpo adquiere, dada por la segunda ley de Newton, $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, es una ecuación intrínseca, válida en cualquier sistema de coordenadas.

(b) La notación vectorial es compacta y concisa. Muchas leyes físicas tienen formulaciones sencillas y diáfanas que se desfiguran cuando se escriben referidas a un sistema coordenado particular.

Así, La segunda ley de Newton, $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$, cuando se escribe en coordenadas polares planas, toma la forma de las dos ecuaciones siguientes: $F_r=m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)$ y $F_\theta=m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta})$.

Aunque al resolver un problema físico concreto puede convenir la utilización de sistemas coordenados particulares, siempre que sea posible deberemos establecer la leyes de la física en notación vectorial.

La utilidad y aplicación de los vectores a los problemas físicos está basada esencialmente en la *Geometría Euclidiana*, de modo que el enunciado de una ley física en términos vectoriales conlleva la hipótesis de la validez de dicha geometría[2]. Si la geometría no es euclidiana no es posible sumar dos vectores de un modo sencillo y sin ambigüedad. Para el espacio curvo existe otra formulación mucho más general, la *Geometría Métrica Diferencial*, que es el lenguaje de la Relatividad Generalizada, dominio de la Física en el que la Geometría Euclidiana no tiene validez general.

§1.3. Suma y diferencia de vectores.- Dados dos vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, llamamos suma o *resultante* de los mismos, y la designaremos por $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, al vector obtenido como diagonal del paralelogramo formado por los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ (Figura 1.2). Evidentemente, el mismo resultado se obtiene si se sitúan los vectores uno a continuación de otro y se define la suma de ambos como el vector que va desde el origen del primero al extremo del segundo. Para más de dos vectores, la generalización de estas reglas es inmediata.

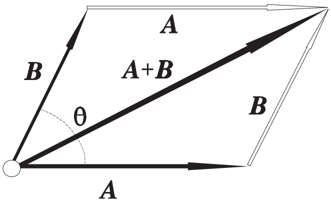


Figura 1.2

De la definición geométrica de la suma se siguen las siguientes propiedades de esta operación:

(1) Propiedad *conmutativa* (Figura 1.2):

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \qquad [1.1]$$

(2) Propiedad *asociativa* (Figura 1.3):

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) \qquad [1.2]$$

(3) Existencia del *vector opuesto*:

$$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = 0 \qquad [1.3]$$

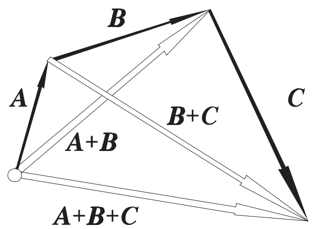


Figura 1.3

En virtud del teorema del coseno, el módulo de la suma es,

$$|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,A B \cos\theta} \qquad [1.4]$$

siendo θ el ángulo que forman entre sí las direcciones de los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

Dados dos vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, definimos la diferencia entre el primero y el segundo, y la designamos por $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$, como el vector obtenido como suma del vector $\boldsymbol{A}$ con el vector opuesto de $\boldsymbol{B}$ (mismo módulo y dirección, pero sentido opuesto) (Figura 1.4):

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}) \qquad [1.5]$$

[2] El análisis vectorial, tal como lo conocemos hoy, es fundamentalmente el resultado del trabajo realizado hacia finales del siglo XIX por el físico-ingeniero electrotécnico inglés Josiah W. GIBBS (1839-1903) y por el matemático americano Oliver HEAVISIDE (1850-1925).

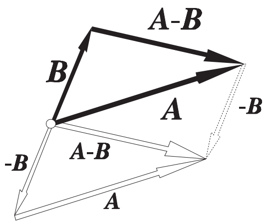


Figura 1.4

Si llevamos los vectores ***A*** y ***B*** a un mismo origen, el vector ***A*** - ***B*** es el que va desde el extremo de ***B*** al extremo de ***A***, y su módulo viene dado por

$$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2\,AB\cos\theta} \qquad [1.6]$$

§1.4. Producto de un vector por un escalar.- Dado un escalar *p* y un vector ***A***, llamaremos producto de los dos, y lo representaremos por *p**A***, a un vector cuyo módulo es el producto del valor absoluto del escalar *p* por el módulo del vector ***A***, de la misma dirección que el vector ***A*** y de sentido coincidente u opuesto al del vector ***A*** según que el escalar *p* sea positivo o negativo (Figura 1.5). Este producto tienen las siguientes propiedades:

(1) Propiedad *asociativa*:

$$p\,(q\boldsymbol{A}) = (pq)\boldsymbol{A} = q\,(p\boldsymbol{A}) \qquad [1.7]$$

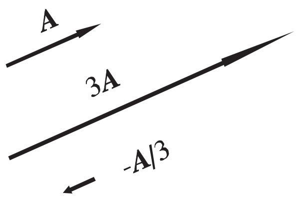


Figura 1.5

(2) Propiedad *distributiva* respecto a la suma de escalares:

$$(p + q)\boldsymbol{A} = p\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{A} \qquad [1.8]$$

(3) Propiedad *distributiva* respecto a la suma de vectores:

$$p(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = p\boldsymbol{A} + p\boldsymbol{B} \qquad [1.9]$$

El cociente de un vector por un escalar es, por definición, el producto del vector ***A*** por el escalar 1/*p*, de modo que

$$\frac{\boldsymbol{A}}{p} = \frac{1}{p}\boldsymbol{A} \qquad [1.10]$$

y tiene las mismas propiedades (1) y (3) enunciadas anteriormente, aunque no la propiedad (2).

§1.5. Versores.- Si dividimos un vector por su propio módulo se obtiene un vector de módulo unidad, al que llamaremos *vector unitario* o *versor*, cuya dirección y sentido coinciden con la dirección y sentido del vector de partida. Existirán infinitos versores, correspondientes a las infinitas direcciones que podemos considerar en el espacio. Un vector cualquiera ***A*** puede expresarse como el producto de su módulo *A* por el versor de su misma dirección y sentido, esto es,

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{A}}{A} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{A} = A\boldsymbol{e} \qquad [1.11]$$

§1.6. Componentes de un vector. Base vectorial.- Dadas tres rectas concurrentes no coplanarias siempre es posible descomponer un vector dado ***A*** en tres vectores, $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, y $\boldsymbol{A}_3$, de forma que cada uno de ellos sea paralelo a una de las tres rectas dadas, y que sumados tengan al vector $\boldsymbol{A}$ como resultante. Esta descomposición es única y se obtiene construyendo un paralelepípedo cuyas aristas sean paralelas a las tres rectas dadas y del cual es diagonal el vector $\boldsymbol{A}$ que descomponemos (Figura 1.6). Definidos tres versores, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, en las direcciones de las tres rectas dadas, podemos escribir

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3 = A_1\,\boldsymbol{e}_1 + A_2\,\boldsymbol{e}_2 + A_3\,\boldsymbol{e}_3 \qquad [1.12]$$

siendo $\boldsymbol{A}_i$ los *vectores componentes* de $\boldsymbol{A}$ y A_i las *componentes* del vector $\boldsymbol{A}$ en la *base vectorial*[3] definida por los versores $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

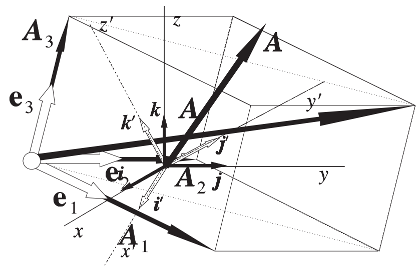


Figura 1.6

Tomando las tres rectas anteriores perpendiculares entre sí (ortogonales) y escogiendo los versores $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{e}_3$, de forma que constituyan un *triedro directo*, es decir de tal modo que un tornillo que gire de uno de ellos al siguiente en orden creciente de permutación circular avance en el sentido del otro vector (regla de tornillo, Figura 1.7, o de la mano derecha, Figura 1.12), entonces, a cada vector $\boldsymbol{A}$ corresponderá una descomposición única en la forma expresada en [1.12]. Si ahora tomamos las tres rectas anteriores como ejes coordenados *x, y, z*, y llamamos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, a los correspondientes versores $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, según convenio prácticamente universal, entonces la descomposición anterior la escribiremos en la forma

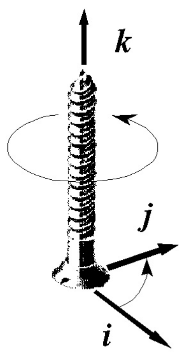


Figura 1.7

$$\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k} \qquad [1.13]$$

siendo A_x, A_y, A_z las *componentes cartesianas* del vector $\boldsymbol{A}$ (Figura 1.8). De este modo vemos que una magnitud vectorial, a diferencia de una magnitud escalar, requiere el conocimiento de tres números para quedar completamente definida. Para el vector tridimensional $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$ cada una de las cantidades contenidas en el paréntesis representa una de sus componentes. Obsérvese que es importante el orden en que demos las componentes del vector, ya que la terna numérica (*m,n,p*) no representa el mismo vector que la terna (*n,p,m*).

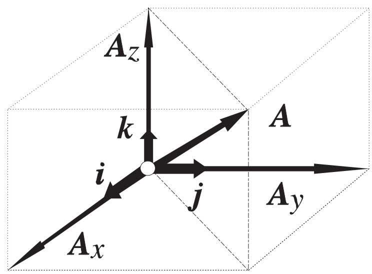


Figura 1.8

Resulta conveniente escribir las componentes

[3] Obsérvese que una *base vectorial* queda definida exclusivamente por las *direcciones* de tres vectores no coplanarios; *i.e.*, no hacemos mención a algún punto del espacio, por lo que no cabe hablar del "origen" de la base vectorial.

del vector $\boldsymbol{A}$ utilizando la *notación matricial*; esto es, en forma de *matriz columna* o de *matriz fila*:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_{\boldsymbol{ijk}} \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix}_{\boldsymbol{ijk}} \tag{1.14}$$

donde los subíndices añadidos a las matrices indican (cuando sea necesario evitar ambigüedades) la *base vectorial* en la que están expresadas las componentes del vector $\boldsymbol{A}$.

Dada la ortogonalidad del triedro cartesiano definido por los versores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, es fácil comprobar que el módulo del vector $\boldsymbol{A}$ viene dado por

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.15}$$

y que, dados los vectores $\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{B} = B_x\,\boldsymbol{i} + B_y\,\boldsymbol{j} + B_z\,\boldsymbol{k}$, de acuerdo con la propiedad asociativa para la suma (y diferencia) vectorial, es

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B} = (A_x \pm B_x)\,\boldsymbol{i} + (A_y \pm B_y)\,\boldsymbol{j} + (A_z \pm B_z)\,\boldsymbol{k} \tag{1.16}$$

y que, de acuerdo con la propiedad distributiva del producto de un escalar respecto a la suma de vectores, tenemos

$$p\boldsymbol{A} = pA_x\,\boldsymbol{i} + p\,A_y\,\boldsymbol{j} + pA_z\,\boldsymbol{k} \tag{1.17}$$

quedando definida tanto la suma (y diferencia) vectorial como el producto de un vector por un escalar en *forma analítica*, *i.e.*, en función de sus componentes cartesianas, con independencia de la correspondiente representación geométrica.

Con notación matricial escribiremos:

$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \pm B_x \\ A_y \pm B_y \\ A_z \pm B_z \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

y

$$p\boldsymbol{A} = p \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pA_x \\ pA_y \\ pA_z \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

§1.7. Producto escalar de dos vectores.- Se define el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, y lo representaremos por $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, como el escalar que se obtiene multiplicando el módulo del vector $\boldsymbol{A}$ por el módulo del vector $\boldsymbol{B}$ y por el coseno del ángulo que forman entre sí los dos vectores. Esto es (Figura 1.9):

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A\,B\cos\theta \tag{1.20}$$

siendo esta definición de naturaleza puramente geométrica y, por lo tanto, independiente del sistema de coordenadas elegido. El producto escalar de dos vectores es un número (escalar) y, si ninguno de los vectores es nulo, dicho producto será un número positivo, nulo o negativo, según que el ángulo formado por los dos vectores ($0 \leq \theta \leq \pi$) sea agudo, recto u obtuso.

Puesto que $B \cos \theta$ representa el módulo de la proyección del vector $\boldsymbol{B}$ sobre la dirección del vector $\boldsymbol{A}$, esto es $B \cos \theta = \text{proy}_A \boldsymbol{B}$, será

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A \, \text{proy}_A \boldsymbol{B} \qquad [1.21]$$

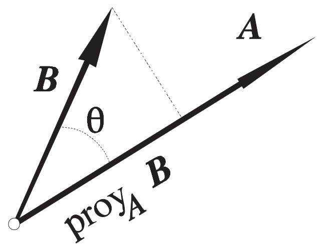


Figura 1.9

de modo que el producto escalar de dos vectores también puede definirse como el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Se puede demostrar fácilmente que el producto escalar de dos vectores tiene las siguientes propiedades:

(1) Propiedad *conmutativa*:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$$

(2) Propiedad *distributiva* respecto a la suma vectorial:

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) \qquad [1.23]$$

(3) Propiedad *asociativa* respecto al producto por un escalar:

$$p(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = (p\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot (p\boldsymbol{B}) \qquad [1.24]$$

(4) Ya que $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}$ no se ha definido (el signo · se usa sólo entre vectores) la propiedad asociativa no ha lugar a considerarla. Obsérvese, sin embargo, que en general es

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \, \boldsymbol{C} \neq \boldsymbol{A} \, (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) \qquad [1.25]$$

(5) Si los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son perpendiculares entre sí, será $\cos \theta = 0$, y resulta

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad [1.26]$$

Esta relación expresa la *condición de perpendicularidad* entre dos vectores. Obsérvese, que el producto escalar de dos vectores puede ser nulo sin que lo sean uno ni otro vector.

(6) En particular, para los vectores cartesianos $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, tenemos

$$\begin{cases} \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1 \\ \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = 0 \end{cases} \qquad [1.27]$$

(7) *Expresión analítica* del producto escalar: Si los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ se expresan en función de sus componentes cartesianas rectangulares, o sea, $\boldsymbol{A} = A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{B} = B_x \, \boldsymbol{i} + B_y \, \boldsymbol{j} + B_z \, \boldsymbol{k}$, entonces, teniendo en cuenta las propiedades anteriores, se tiene

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad [1.28]$$

de modo que el producto escalar de dos vectores es igual a la suma de los productos de las componentes cartesianas rectangulares correspondientes.

Con notación matricial, el producto escalar $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ es, simplemente, el *producto matricial* de la matriz fila de $\boldsymbol{A}$ por la matriz columna de $\boldsymbol{B}$; esto es,

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_Z \end{pmatrix} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \qquad [1.29]$$

Ejemplo I.- Calcular el producto escalar de los vectores $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1\cdot 4 + 2\cdot(-5) + 3\cdot 6 = 4 - 10 + 18 = 12$$

(8) *Módulo de un vector*: Para el vector $\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k}$ se tiene

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \qquad [1.30]$$

(9) *Ángulo formado por dos vectores*: De la definición del producto escalar se sigue

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{AB} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{A}}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{B}} \qquad [1.31]$$

expresión que nos permite determinar el ángulo formado por dos vectores dados.

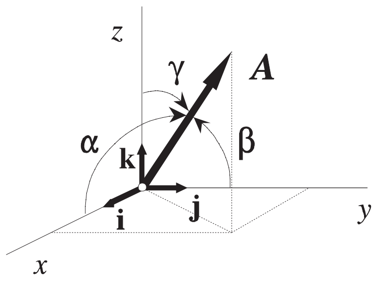


Figura 1.10

(10) *Cosenos directores*: Se llaman cosenos directores a los cosenos de los *ángulos directores* formados por el vector con los ejes coordenados (Figura 1.10). Tenemos

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}}{A} = \dfrac{A_x}{A} \\ \cos\beta = \dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}}{A} = \dfrac{A_y}{A} \\ \cos\gamma = \dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}}{A} = \dfrac{A_z}{A} \end{cases} \qquad [1.32]$$

de modo que es

$$\boldsymbol{A} = A\,(\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}) \qquad [1.33]$$

con

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{A}} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k} \qquad [1.34]$$

siendo $\boldsymbol{e}_A$ el versor en la dirección del vector $\boldsymbol{A}$. Evidentemente, se verifica que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es igual a la unidad; esto es,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad [1.35]$$

(11) El producto escalar de dos vectores *no tienen operación inversa*; esto es, si $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = c$, no existe una solución única para $\boldsymbol{X}$. Dividir por un vector es una operación sin definir y carente de sentido (Problema 1.17).

§1.8. Producto vectorial de dos vectores.- Existe otro tipo de producto de dos vectores ampliamente utilizado en la Física. Este producto no es un escalar sino más bien un vector; *i.e.*, un vector en cierto sentido restringido. El producto vectorial de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, que representaremos por $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$, es un vector cuyo módulo se define como el producto de los módulos de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ por el seno del ángulo que forman entre sí los dos vectores, cuya dirección es perpendicular al plano determinado por ambos vectores, y cuyo sentido es tal que los vectores $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ constituyan un triedro directo (regla del tornillo, Figura 1.7, o de la mano derecha, Figura 1.12). Escribiremos

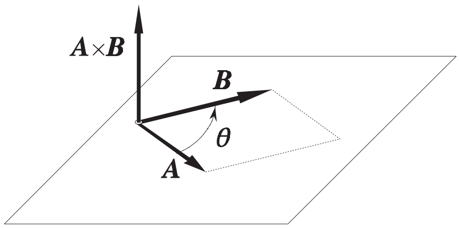


Figura 1.11

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = A\,B\,\operatorname{sen}\theta\;\boldsymbol{e} \qquad [1.36]$$

siendo $\boldsymbol{e}$ el versor normal al plano determinado por los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. Por ser esta definición de naturaleza puramente geométrica, el producto vectorial es independiente del sistema coordenado elegido[4].

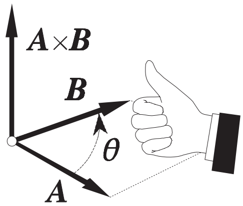


Figura 1.12

Se demuestra fácilmente que el producto vectorial de dos vectores tiene las siguientes propiedades:

(1) Propiedad *anticonmutativa*:

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \qquad [1.37]$$

(2) Propiedad *distributiva* respecto a la suma vectorial:

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}) \qquad [1.38]$$

(3) Propiedad *asociativa* respecto al producto por un escalar:

[4] En un sistema de coordenadas inverso ($-\boldsymbol{i}$,$-\boldsymbol{j}$,$-\boldsymbol{k}$), las componentes de los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ cambian de signo. Sin embargo, las componentes del vector $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ no cambian de signo en la inversión. A los vectores que no cambian de signo en la inversión del sistema coordenado se les llama *seudovectores* o *vectores axiales*. Así pues, el producto vectorial es un vector axial.

$$p\,(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (p\,\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\times(p\,\boldsymbol{B}) \qquad [1.39]$$

(4) Como veremos más adelante (§1.11), el producto vectorial *no* tienen la propiedad *asociativa*; esto es, en general será

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C} \qquad [1.40]$$

(5) Si los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son mutuamente paralelos, entonces, por ser sen θ=0, será

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = 0 \qquad [1.41]$$

relación que expresa la *condición de paralelismo* entre dos vectores. Obsérvese que el producto vectorial de dos vectores puede ser nulo sin que lo sea ninguno de ellos.
(6) En particular, para los versores $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, tenemos

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} = 0 & \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} & \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k} & \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = 0 & \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i} & \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = 0 \end{cases} \qquad [1.42]$$

(7) *Expresión analítica del producto vectorial*: Si los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ se expresan en función de sus componentes cartesianas, esto es $\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{B} = B_x\,\boldsymbol{i} + B_y\,\boldsymbol{j} + B_z\,\boldsymbol{k}$, entonces, teniendo en cuenta las propiedades anteriores, será

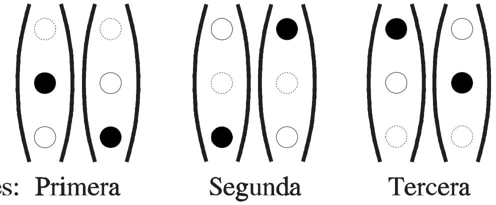
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\boldsymbol{k} \qquad [1.43]$$

expresión que puede escribirse de un modo más compacto en forma de determinante

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} \qquad [1.44]$$

o bien con notación matricial

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_yB_z - A_zB_y \\ A_zB_x - A_xB_z \\ A_xB_y - A_yB_x \end{pmatrix} \qquad [1.45]$$



componentes: Primera Segunda Tercera

pudiéndose encontrar directamente las componentes del vector $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$, sin necesidad de escribir el determinante, mediante la *regla operativa* que se ilustra en el esquema siguiente, donde los círculos oscuros (●) indican productos con signo positivo y los círculos claros (○) indican productos con signo negativo:

Ejemplo II.- Calcular el producto vectorial de los vectores $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{\cdot}6 - 3{\cdot}(-5) \\ 3{\cdot}4 - 1{\cdot}6 \\ 1{\cdot}(-5) - 2{\cdot}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 + 15 \\ 12 - 6 \\ -5 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$$

(8) De la definición del producto vectorial [1.36] se sigue una importante propiedad geométrica del mismo: El módulo del producto vectorial $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ representa el área del paralelogramo determinado por los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. En efecto, como se apreciará en la Figura 1.13, es

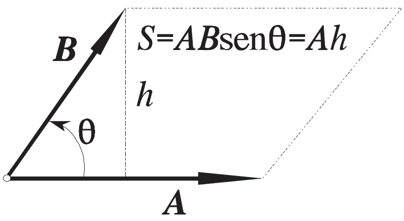


Figura 1.13

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| &= A\,B\,\mathrm{sen}\,\theta = \\ &= A\,h = \text{área del paralelogramo} \end{aligned} \qquad [1.46]$$

(9) El producto vectorial *no tiene operación inversa*; esto es, si $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}$, no existe una solución única para $\boldsymbol{X}$. Dividir por un vector es una operación sin definir y carente de sentido (Problema 1.18).

§1.9. Representación vectorial de superficies.- Hemos visto anteriormente que el módulo de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ representa el área del paralelogramo definido por los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. Esta propiedad nos permite representar el área del paralelogramo por un vector $\boldsymbol{S}$ perpendicular a su plano cuyo módulo $|\boldsymbol{S}|$ sea igual a su área. Esta representación puede extenderse a cualquier superficie plana (Figura 1.14), ya que siempre la podremos imaginar descompuesta en un cierto número de paralelogramos.

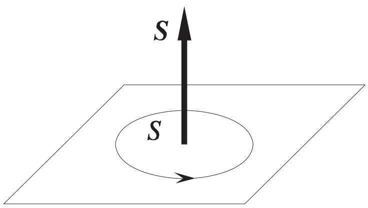


Figura 1.14

Una vez definido el módulo y la dirección del vector superficie $\boldsymbol{S}$, sólo nos queda fijar su sentido que será el del avance de un tornillo que girase en el sentido atribuido al contorno de la superficie (regla de la mano derecha).

Las componentes del vector $\boldsymbol{S}$ tienen un significado simple. Supongamos que el plano de la superficie S forma un ángulo θ con el plano coordenado xy (Figura 1.15). La proyección de la superficie S sobre el plano coordenado xy es $S \cos\theta$. Pero la dirección normal al plano de la superficie S también forma un ángulo θ con el eje z. Por consiguiente, la componente del vector $\boldsymbol{S}$ en la dirección del eje z es $S_z = S\cos\theta$. De este modo, podemos asegurar que las componentes del vector $\boldsymbol{S}$ sobre los ejes coordenados representan las proyecciones de la superficie plana S sobre los tres

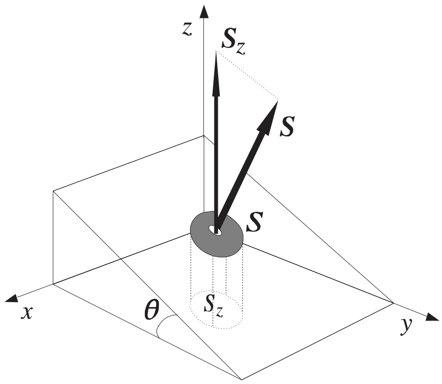


Figura 1.15

planos coordenados respectivos.

Si la superficie no es plana (Figura 1.16), siempre será posible dividirla en un número muy grande de pequeñas superficies elementales, cada una de las cuales podrá ser considerada como plana y representable por un vector $\Delta\boldsymbol{S}_i$. De este modo, el vector $\boldsymbol{S}$ que representa a una superficie curva será:

$$\boldsymbol{S} = \Delta\boldsymbol{S}_1 + \Delta\boldsymbol{S}_2 + \ldots = \Sigma\Delta\boldsymbol{S}_i \qquad [1.47]$$

Obsérvese que, en este caso, el módulo de $\boldsymbol{S}$ no es igual al área de la superficie curva, ya que dicha área es $\Sigma|\Delta\boldsymbol{S}_i|$; sin embargo, los valores de las tres componentes del vector $\boldsymbol{S}$ según los ejes coordenados si que serán iguales a las áreas de las proyecciones de la superficie sobre los tres planos coordenados.

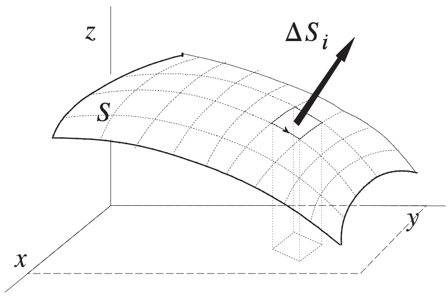


Figura 1.16

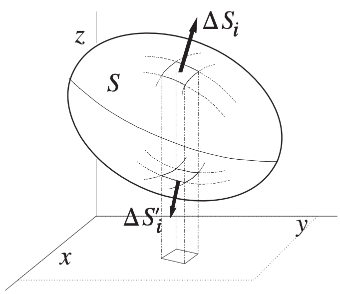


Figura 1.17

Finalmente, consideremos una superficie cerrada y dividámosla en pequeños elementos casi planos, cada uno de ellos representado por un vector $\Delta\boldsymbol{S}_i$ en la dirección hacia afuera (Figura 1.17). Podemos tomar estos elementos por parejas de modo que la proyección neta de cada una de estas parejas sobre cualquier plano coordenado sea nula. De este modo llegamos a la conclusión de que las componentes del vector superficie que representa a una superficie cerrada son nulas; o sea que el vector que representa a una superficie cerrada es $\boldsymbol{S}$=0; aunque, obviamente, el área de dicha superficie cerrada no es nula.

§1.10. Producto mixto de tres vectores.- Llamamos producto mixto de los vectores $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$, en este orden, al escalar que resulta de multiplicar escalarmente por $\boldsymbol{A}$ el producto vectorial de $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$. Esto es

$$\{\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{C}\} = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \qquad [1.48]$$

y expresando los tres vectores en función de sus componentes y desarrollado los productos indicados resulta

$$= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}\begin{bmatrix} B_y & B_z \\ C_y & C_z \end{bmatrix} - \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\begin{bmatrix} B_x & B_z \\ C_x & C_z \end{bmatrix} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}\begin{bmatrix} B_x & B_y \\ C_x & C_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{bmatrix}$$

o bien

$$\{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\} = \left\{\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{bmatrix} \qquad [1.49]$$

de modo que el producto mixto de tres vectores es igual al valor del determinante formado por las componentes de los tres vectores. Entonces, teniendo en cuenta que el valor de un determinante no varía cuando se realiza un número par de permutaciones entre sus filas (o columnas), se deduce fácilmente que

$$\{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\} = \{\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\} = \{\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\} \qquad [1.50]$$

o sea

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \qquad [1.51]$$

de modo que el producto mixto admite la permutación circular entre los vectores que lo integran sin modificar el resultado. Pero, en cambio, será

$$\{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\} = -\{\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}\} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = -\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}) \qquad [1.52]$$

de modo que cuando la permutación entre los vectores que integran el producto mixto no es circular el resultado cambia de signo.

Por otra parte, de la expresión [1.51] se deduce que

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} \qquad [1.53]$$

de modo que podemos intercambiar el punto (·) y el aspa (×).

Una importante propiedad geométrica del producto mixto es que representa el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores ***A***, ***B*** y ***C***. En efecto (Figura 1.18)

$$\{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\} = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{S} = A\,S\cos\theta = (A\cos\theta)\,S = \qquad [1.54]$$

$$= hs = \text{volumen del paralelepípedo}$$

En particular, para el paralelepípedo definido por los versores cartesianos ***i***, ***j***, ***k***, tenemos

$$\{\boldsymbol{i}\,\boldsymbol{j}\,\boldsymbol{k}\} = 1 \qquad \text{(triedro directo)}$$

en tanto que para el definido por los versores cartesianos -***i***, -***j***, -***k***, se tiene

$$\{(-\boldsymbol{i})(-\boldsymbol{j})(-\boldsymbol{k})\} = -1 \qquad \text{(triedro inverso)}$$

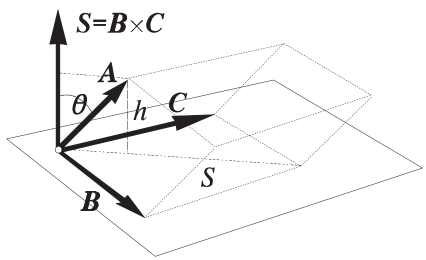


Figura 1.18

Una consecuencia inmediata de la interpretación geométrica del producto mixto es la *condición de coplanaridad* (dependencia lineal) de tres vectores del espacio, expresada por

$$\{\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\} = 0 \tag{1.55}$$

§1.11. Doble producto vectorial.- Llamamos doble producto vectorial de tres vectores a la expresión $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$ y es un vector contenido en el plano definido por los vectores $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$, ya que se puede demostrar que se verifica

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.56}$$

Evidentemente, el producto vectorial no tienen la propiedad asociativa, ya que

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) \tag{1.57}$$

es un vector contenido en el plano definido por los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, por lo que, en general, será

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \neq (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C} \tag{1.58}$$

resultando fundamental la colocación de los paréntesis.

§1.12. Definición axiomática del vector.- Anteriormente hemos definido un vector como una magnitud caracterizada por su módulo, su dirección y su sentido y que tiene la propiedad de sumarse con otras de su misma naturaleza según la regla del paralelogramo. Esta última precisión es importante ya que, como veremos más adelante, no todas las magnitudes dotadas de módulo, dirección y sentido son necesariamente vectoriales, puesto que dichas magnitudes deben satisfacer, además, las reglas del álgebra vectorial. Estas reglas son las correspondientes a la estructura algebraica, llamada *espacio vectorial*, que definiremos a continuación.

Sea un *grupo abeliano* **G**, es decir un conjunto entre cuyos elementos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, ... se ha definido una operación, que llamaremos *suma vectorial* y representaremos por el signo +, que cumpla las leyes siguientes:

(1) Existe un *elemento neutro*, $\boldsymbol{0} \in \mathbf{G}$, tal que para $\forall \boldsymbol{A} \in \mathbf{G}$ se verifica

$$\boldsymbol{0} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} \tag{1.59}$$

(2) Para $\forall\, \boldsymbol{A} \in \mathbf{G}$ existe un único elemento, que designaremos por $-\boldsymbol{A} \in \mathbf{G}$ y llamaremos *opuesto* de $\boldsymbol{A}$, tal que

$$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0} \tag{1.60}$$

(3) Para tres elementos cualesquiera $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C} \in \mathbf{G}$ es válida la ley *asociativa*; *i.e.*,

$$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} \tag{1.61}$$

(4) Para dos elementos cualesquiera $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \mathbf{G}$ es válida la ley *conmutativa*; *i.e.*,

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \tag{1.62}$$

Consideremos ahora un conjunto **F** dotado de *estructura de cuerpo*. Definamos una operación, que llamaremos *producto*, entre los elementos $m,n,o,p \ldots \in$ **F** y los elementos $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}, \ldots \in$ **G**, de modo que $(m,\boldsymbol{A}) \rightarrow m\boldsymbol{A}$ sea un elemento que pertenezca al grupo abeliano **G**, y que dicha operación cumpla con las siguientes leyes:

(5) Ley *distributiva* respecto a la suma de elementos del cuerpo **F**; esto es,

$$(m + n)\boldsymbol{A} = m\boldsymbol{A} + n\boldsymbol{A} \tag{1.63}$$

(6) Ley *distributiva* respecto a la suma de elementos del grupo **G**; esto es,

$$m(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = m\boldsymbol{A} + m\boldsymbol{B} \tag{1.64}$$

(7) Para $\forall\ \boldsymbol{A} \in$ **G**, existe un elemento único del cuerpo **F**, que representaremos por *1* y llamaremos *elemento unidad*, tal que

$$1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \tag{1.65}$$

(8) Ley *asociativa* respecto al producto de elementos del cuerpo **F**, esto es

$$(mn)\boldsymbol{A} = m(n\boldsymbol{A}) \tag{1.66}$$

Decimos entonces que el conjunto de los elementos $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}, \ldots \in$ **G** tiene una estructura de *espacio vectorial* y dichos elementos son los *vectores* de ese espacio. Estos elementos no son necesariamente entes que puedan ser representados por segmentos orientados. Así, por ejemplo, el conjunto de las matrices cuadradas de segundo orden sobre el cuerpo de los números reales tiene una estructura de espacio vectorial; pero sus elementos no son representables por segmentos orientados.

La importancia de esta definición axiomática es que amplía la idea geométrica de vector. Cualquier conjunto de elementos entre los cuales puedan definirse las operaciones anteriores con las propiedades [1.59]-[1.66] será un espacio vectorial y sus elementos podrán considerarse como vectores. Sin embargo, es conveniente que tengamos bien claro que el concepto de vector que vamos a manejar en la Física es más restringido que el definido

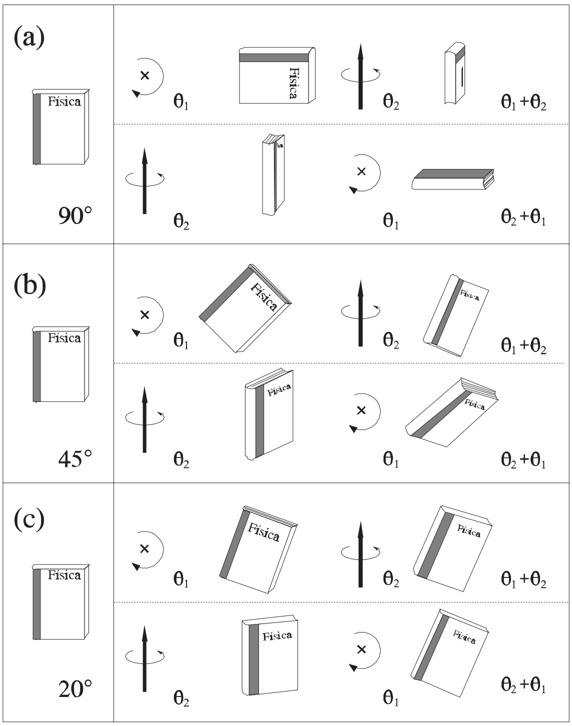


Figura 1.19

en el Álgebra, pues no sólo debe satisfacer las leyes algebraicas sino que también debe estar caracterizado por tener *módulo*, *dirección* y *sentido*.

Pero también debemos tener muy en cuenta que no todas las magnitudes físicas que tienen módulo, dirección y sentido serán necesariamente magnitudes vectoriales.

Así, por ejemplo, la rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo en el espacio tiene *módulo* (el ángulo de rotación), *dirección* (la del eje) y *sentido*. Pero dos rotaciones como éstas no se combinan de acuerdo con las leyes de la suma vectorial, a no ser que los ángulos de rotación sean infinitesimales. Esto se comprueba fácilmente si los dos ejes son perpendiculares entre sí y las rotaciones son de 90° (Figura 1.19a). Evidentemente estas rotaciones no cumplen la ley conmutativa de la suma vectorial. Así, a pesar del hecho de que las rotaciones finitas tienen módulo, dirección y sentido, estas rotaciones no tienen carácter vectorial. Pero si en lugar de rotaciones de 90° realizamos rotaciones angulares menores (de 45° en la Figura 1.19b y de 20° en la Figura 1.19c) los resultados de combinar estas rotaciones en distinto orden, aunque siguen siendo distintos, presentan menos diferencia. Si los desplazamientos angulares se hacen infinitesimales, el orden de adición ya no afecta al resultado; por lo que las *rotaciones infinitesimales admiten una representación vectorial*.

§1.13. Cambio de base vectorial.- Consideremos un vector $\boldsymbol{A}$ expresado en un sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z); *i.e.*,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_{\boldsymbol{ijk}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{ijk}} \qquad [1.67]$$

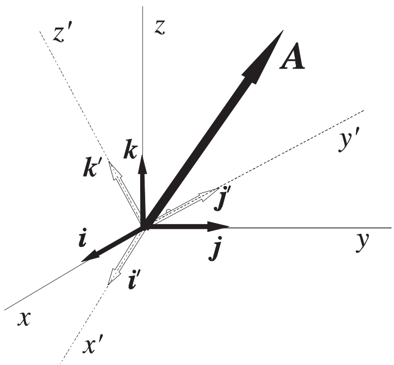


Figura 1.20

ya que, por ser (A_x, A_y, A_z) las proyecciones de dicho vector sobre los correspondientes ejes coordenados (*i.e.*, las componentes del vector en la base vectorial $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ asociada al sistema de coordenadas), es $A_x = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}$, $A_y = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}$ y $A_z = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}$.

Ahora, supongamos que dejamos invariable la dirección del vector $\boldsymbol{A}$ y que giramos el sistema de ejes coordenados alrededor del origen del mismo, de modo que tendremos un nuevo triedro ortogonal de ejes (x', y', z'), con una base vectorial asociada definida por los versores $(\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}')$. En esta nueva base vectorial las componentes del vector $\boldsymbol{A}$ serán $(A_{x'}, A_{y'}, A_{z'})$; *i.e.*,

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}' \\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}' \\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}' \end{pmatrix}_{\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'} \qquad [1.68]$$

Las nuevas componentes $(A_{x'}, A_{y'}, A_{z'})$ están relacionadas con las antiguas por

$$\begin{cases} A_{x'} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}' = A_x\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}' + A_y\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}' + A_z\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}' \\ A_{y'} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}' = A_x\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}' + A_y\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}' + A_z\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}' \\ A_{z'} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}' = A_x\,\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}' + A_y\,\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}' + A_z\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' \end{cases} \tag{1.69}$$

y llamando $s_{ij'}$ al coseno del ángulo determinado por los versores $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{j}'$, *i.e.*, al producto escalar $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}'$, tenemos la transformación lineal

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'} = \begin{pmatrix} s_{ii'} & s_{ji'} & s_{ki'} \\ s_{ij'} & s_{jj'} & s_{kj'} \\ s_{ik'} & s_{jk'} & s_{kk'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_{\boldsymbol{ijk}} \tag{1.70}$$

o bien
$$[\![\boldsymbol{A}]\!]_{\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'} = [\![\boldsymbol{S}]\!]\,[\![\boldsymbol{A}]\!]_{\boldsymbol{ijk}} \tag{1.71}$$

donde $[\![\boldsymbol{S}]\!]$ es la *matriz de transformación* para el cambio de base vectorial. Observamos que los elementos de cada una de las filas de la *matriz de transformación* representan las componentes de cada uno de los versores *nuevos* ($\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$) en la base vectorial original definida por los versores ($\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$).

Obviamente, la *transformación inversa*, *i.e.*, la obtención de las componentes (A_x, A_y, A_z) a partir de las ($A_{x'}$, $A_{y'}$, $A_{z'}$), se efectuará mediante la *matriz de transformación inversa* $[\![\boldsymbol{S}^{-1}]\!]$, que coincide con la *traspuesta* $[\![\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}]\!]$, por representar $[\![\boldsymbol{S}]\!]$ una *transformación ortonormal.* Esto es

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}_{\boldsymbol{ijk}} = \begin{pmatrix} s_{i'i} & s_{j'i} & s_{k'i} \\ s_{i'j} & s_{j'j} & s_{k'j} \\ s_{i'k} & s_{j'k} & s_{k'k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix}_{\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'} \tag{1.72}$$

o bien
$$[\![\boldsymbol{A}]\!]_{\boldsymbol{ijk}} = [\![\boldsymbol{S}^{-1}]\!]\,[\![\boldsymbol{A}]\!]_{\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'} \tag{1.73}$$

donde observaremos de nuevo que los elementos de cada una de las filas de la *matriz de transformación* $[\![\boldsymbol{S}^{-1}]\!]$ representan las componentes de cada uno de los versores *nuevos* ($\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$) en la base vectorial original definida por los versores ($\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$).

Ejemplo III.- Obtener las transformaciones de las componentes de un vector para el cambio de base consistente en una rotación de magnitud θ alrededor del eje *z*.

En el caso simple en el que el giro tenga magnitud θ alrededor del eje *z* (Figura 1.21), tendremos la transformación

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{1.74}$$

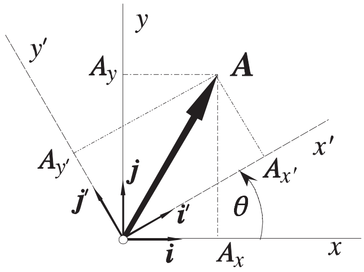


Figura 1.21

y para la transformación inversa

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix} \qquad [1.75]$$

La longitud o módulo del vector ***A*** debe ser independiente de la orientación de la base vectorial, de modo que deberá ser

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A_{x'}^2 + A_{y'}^2 + A_{z'}^2 \qquad [1.76]$$

siendo este nuestro primer ejemplo de una forma invariante. La expresión del módulo de un vector es la misma en todos los sistemas de coordenadas cartesianas obtenidos por rotación de los ejes.

Como consecuencia de su definición geométrica como proyección, el producto escalar de dos vectores

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = A_{x'} B_{x'} + A_{y'} B_{y'} + A_{z'} B_{z'} \qquad [1.77]$$

es un segundo ejemplo de forma invariante ante las rotaciones de la base vectorial de referencia.

También, en virtud de su definición geométrica, el producto vectorial de dos vectores proporciona una tercera forma invariante ante las rotaciones de la base vectorial de referencia; esto es,

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}' \\ A_{x'} & A_{y'} & A_{z'} \\ B_{x'} & B_{y'} & B_{z'} \end{bmatrix} \qquad [1.78]$$

Vemos, pues, que los vectores y las operaciones definidas entre ellos tienen un significado intrínseco, *i.e.*, independiente del sistema de coordenadas utilizado. Este carácter intrínseco resulta evidente cuando los vectores se definen geométricamente, pero deja de serlo cuando se definen analíticamente a partir de sus componentes. Las componentes de un vector se transforman de un modo simple cuando giramos la base vectorial en la que están expresadas. Por lo tanto, *no son tres números cualesquiera los que definen un vector*, sino tres números que se transforman en las rotaciones de la base vectorial de referencia de acuerdo con la relación [1.70]. Así, para verificar si una magnitud es vectorial deberemos ver como se transforman sus componentes cuando giramos la base vectorial de referencia; si la ley de transformación es la expresada por [1.70], la magnitud representada por el conjunto de componentes (A_x,A_y,A_z) es un vector.

Un vector es una entidad física independiente de la orientación del sistema de ejes, aunque sus componentes variarán al cambiar la base vectorial en la que se expresan; *i.e.*, un vector es un objeto descrito en forma diferente en sistemas de coordenadas distintos. Supongamos que tenemos dos vectores iguales: ***F*** y ***ma***. Una ecuación del tipo ***F*** = ***ma*** es correcta cualquiera que sea el sistema de coordenadas utilizado para especificar las componentes de los vectores ***F*** y ***ma***; la ecuación ***F*** = ***ma*** es una ecuación intrínseca.

El hecho de que una relación entre fenómenos físicos pueda ser expresada como una ecuación vectorial nos asegurará que la relación seguirá siendo válida cuando se produzca una rotación del sistema de coordenadas. Esta es una razón por la cuál los vectores son importantes en la Física; su uso nos asegura la invarianza de las ecuaciones de la Física por rotaciones y, obviamente, por traslaciones del sistema de coordenadas.

En efecto[5], si consideramos un sistema de coordenadas *xyz*, en el cual el vector MN tendrá las componentes (x_N-x_M, y_N-y_M, z_N-z_M), siendo (x_M, x_M, x_M) y (x_N, y_N, z_N) las coordenadas de los puntos origen (M) y extremo (N) del vector, y hacemos una traslación de los ejes coordenados, las coordenadas (x'_M, y'_M, z'_M) y (x'_N, y'_N, z'_N) de los puntos M y N respecto a los nuevos ejes son distintas; pero

$$\begin{cases} A_x = x_N - x_M = x_{N'} - x_{M'} = A_{x'} \\ A_y = y_N - y_M = y_{N'} - y_{M'} = A_{y'} \\ A_z = z_N - z_M = z_{N'} - z_{M'} = A_{z'} \end{cases} \qquad [1.79]$$

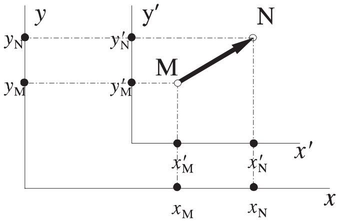


Figura 1.22

esto es, las componentes de un vector son invariantes ante las traslaciones de los ejes coordenados. Es decir, los tres números que definen un vector en el espacio no cambian al trasladar los ejes de coordenadas.

La definición de vector del Álgebra sólo atiende al aspecto estructural y no se interesa *a priori* por los sistemas de referencia y sus cambios. Hemos visto también que la definición del vector como "una magnitud con módulo, dirección y sentido" resulta incompleta. Entonces; ¿qué es un vector en la Física?

Diremos que una magnitud física es vectorial si, además de satisfacer la definición del Álgebra ([1.59]-[1.66]):

(1) posee módulo, dirección y sentido,
(2) es representable mediante un segmento orientado,
(3) se suma con otras de la misma categoría de acuerdo con la regla del paralelogramo,
(4) puede expresarse mediante tres números (componentes) que:
   (a) son invariantes frente a las traslaciones de los ejes coordenados,
   (b) frente a las rotaciones de los ejes coordenados se transforman según la relación [1.70].

§1.14. Vector de posición. Sistemas de referencia.- Frecuentemente necesitaremos definir la posición de un punto del espacio respecto a un sistema de ejes coordenados. Podemos conseguir esto dando las coordenadas cartesianas (*x,y,z*) del punto o bien definiendo el *vector de posición* de dicho punto respecto al origen O del sistema de coordenadas (Figura 1.23). Dicho vector de posición se define como el vector que tiene como origen el punto O y como extremo el punto P, o sea el

[5] En realidad, la demostración que sigue es superflua, ya que los dos sistemas de ejes coordenados comparten una misma *base vectorial*, puesto que ésta queda completamente definida por la orientación de los ejes coordenados y no por el origen del sistema de ejes considerado.

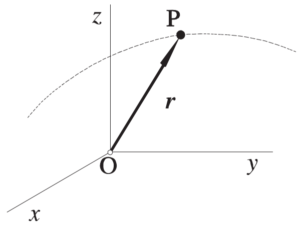


Figura 1.23

vector aplicado en el punto O que tiene como componentes las coordenadas x, y, z, del punto P. Escribiremos

$$\boldsymbol{r} = \mathrm{OP} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\boldsymbol{ijk}} \qquad [1.80]$$

En general, un *sistema de referencia* queda definido por un *origen* y una *base vectorial* asociada. Si la base vectorial es ortogonal *(i.e.*, si los tres versores que la definen son perpendiculares entre sí), el sistema de referencia también es ortogonal.

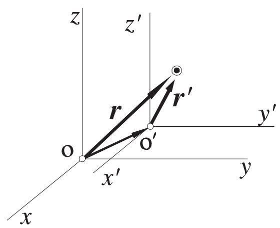


Figura 1.24

Merece particular atención considerar el vector de posición cuando cambia por *traslación* el *sistema de referencia*, pues entonces cambia el vector de posición del punto P. Entre los vectores de posición del punto P respecto a los sistemas de referencia de origen en O y en O′ existe la relación

$$\boldsymbol{r} = \mathrm{OO}' + \boldsymbol{r}'$$

y, consecuentemente, las componentes del vector de posición no son invariantes en las traslaciones del sistema de referencia.

Problemas

1.1.- Decir cuáles son las propiedades de los vectores $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, tales que: **a)** $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$; **b)** $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ y $A + B = C$; **c)** $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ y $A^2 + B^2 = C^2$; **d)** $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}|$.

1.2.- Dados cuatro puntos A, B, C y D en el espacio, demostrar que los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD, y DA son los vértices de un paralelogramo.

1.3.- Un vector forma ángulos iguales con cada uno de los ejes coordenados. Expresar dicho vector en función de sus componentes cartesianas.

1.4.- Determinar la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por los vectores concurrentes $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$.

1.5.- Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan, y que sólo son perpendiculares entre sí cuando el paralelogramo es un rombo.

1.6.- Demostrar que si $\boldsymbol{A} \perp (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})$ y $\boldsymbol{B} \perp (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A})$, entonces es $\boldsymbol{C} \perp (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$.

1.7.- Demostrar vectorialmente las relaciones trigonométricas para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos.

1.8.- Descomponer el vector $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ en las direcciones de los vectores $\boldsymbol{u}(1,1,0)$, $\boldsymbol{v}(1,0,1)$, $\boldsymbol{w}(0,1,1)$.

1.9.- Descomponer el vector $\boldsymbol{A} = 5\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$ en las direcciones del vector unitario $\boldsymbol{e} = 0.8,\boldsymbol{i} + 0.6\boldsymbol{j}$ y del normal al vector $\boldsymbol{e}$.

1.10.- a) Demostrar que los tres vectores:

$$\boldsymbol{A} = 51\boldsymbol{i} + 42\boldsymbol{j} - 26\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{B} = 18\boldsymbol{i} + 19\boldsymbol{j} + 66\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{C} = 46\boldsymbol{i} - 54\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

son perpendiculares entre sí y que forman un triedro directo. **b)** Establecer una base vectorial ortogonal y positiva que tenga las mismas direcciones que los vectores anteriores.

1.11.- Hacer uso del cálculo vectorial para demostrar que todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

1.12.- Dados los vectores $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$, calcular: **a)** sus módulos; **b)** su suma; **c)** su producto escalar; **d)** el ángulo formado entre ambos; **e)** la proyección del vector $\boldsymbol{A}$ sobre el $\boldsymbol{B}$; **f)** su producto vectorial; **g)** el versor perpendicular a $\boldsymbol{A}$ y a $\boldsymbol{B}$.

1.13.- Diagonales interiores del cubo. Calcular el ángulo formado por dos diagonales interiores de un cubo.

1.14.- Dados los tres vectores:

$$\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{B} = x\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

determinar x, y, z, para que los tres vectores sean mutuamente perpendiculares.

1.15.- Expresar el vector $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ como combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$.

1.16.- Ecuaciones vectoriales. Dado el sistema de ecuaciones vectoriales:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

determinar $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

1.17.- Hallar la forma general del vector $\boldsymbol{X}$ que satisface la relación $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = c$.

1.18.- Hallar la forma general del vector $\boldsymbol{X}$ que satisface la relación $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$.

1.19.- Hallar el vector $\boldsymbol{X}$ que satisface simultáneamente las relaciones $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = c$ y $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$.

1.20.- Demostrar las relaciones siguientes:

a) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = A^2 - B^2$

b) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \times (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = 2\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$

Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ representan los lados de un paralelogramo, ¿cuál es la interpretación geométrica de esas identidades?

1.21.- Área del triángulo. Calcular el área del triángulo determinado por los puntos A(3,0,0), B(0,2,0) y C(0,0,4).

1.22.- Ec. de la recta I. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2,4,5) y B(3,6,4).

1.23.- Ec. de la recta II. Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,5,3) y es paralela al vector $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.

1.24.- Distancia entre punto y recta. Calcular la distancia del punto P(1,1,0) a la recta que pasa por los puntos A(2,3,7) y B(1,4,3).

1.25.- a) Calcular el producto vectorial OP $\times\boldsymbol{A}$, siendo P un punto cualquiera de la recta

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

y sabiendo que $\boldsymbol{A}$ tiene la misma dirección que la recta, que su módulo es igual a 2 y que su componente en la dirección del eje z es negativa. **b)** Demostrar que OP$\times\boldsymbol{A}$ es invariante al considerar diferentes puntos P sobre la recta dada.

1.26.- Ec. del plano I. Determinar la ecuación del plano determinado por los puntos A(2,3,-1), B(3,5,1) y C(1,-2,3).

1.27.- Ec. del plano II. Determinar la ecuación del plano que pasa por el punto P(2,5,3) y es normal al vector $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.

1.28.- Intersección de dos planos. Dada la recta definida por la intersección de dos planos, de ecuaciones $2x - y - z - 5 = 0$ y $2x + 9y + 6z + 5 = 0$, expresar dicha recta en forma cartesiana; esto es, determinar un vector director de la recta y un punto de la misma.

1.29.- Ec. del plano III. Encontrar la ecuación del plano determinado por la recta $[2x + y - z + 3 = 0;\ x - 3y + z + 1 = 0]$ y el punto (1,2,3).

1.30.- Distancia de un punto a un plano. Calcular la distancia del punto P(1,1,0) al plano determinado por los puntos A(1,3,2), B(4,1,0) y C(-2,3,1).

1.31.- Distancia entre dos rectas. Determinar la distancia más corta entre dos rectas que pasan, respectivamente, por los puntos [A(2,-4,3); B(1,2,-1)] y [C(0,3,4); D(1,2,4)].

1.32.- Si representamos por los vectores $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{S}_3$, $\boldsymbol{S}_4$ cada una de las caras de un tetraedro, de modo que cada uno de dichos vectores sea normal a la cara respectiva y su módulo sea el área de dicha cara, demostrar que $\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3 + \boldsymbol{S}_4 = 0$.

1.33.- Proyección de una superficie. Determinar la proyección de la superficie representada por el vector $\boldsymbol{S} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ sobre el plano normal a la dirección del vector $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

1.34.- Volumen definido por tres vectores. a) Calcular el volumen del paralelepípedo definido por los vectores:

$$\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

b) Ídem por los vectores $-\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$. Interpretar el signo negativo en el resultado.

1.35.- Doble producto vectorial. a) Demostrar la expresión [1.56] del doble producto vectorial, utilizando los vectores:

$$\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{B} = B_x\,\boldsymbol{i} + B_y\,\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{C} = C_x\,\boldsymbol{i} + C_y\,\boldsymbol{j} + C_z\,\boldsymbol{k}$$

b) Demostrar que el doble producto vectorial no posee la propiedad asociativa.

1.36.- Efectuar el doble producto vectorial $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$, siendo $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ los vectores dados en la primera parte del Problema 1.34.

1.37.- Consideremos el vector $\boldsymbol{A}$ y la dirección definida por el vector $\boldsymbol{B}$. Descompongamos el vector $\boldsymbol{A}$ en dos: uno paralelo y otro perpendicular a la dirección del vector $\boldsymbol{B}$. Demostrar que los vectores componentes de $\boldsymbol{A}$ son $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}/B)\boldsymbol{e}_{\mathrm{B}}$ y $(\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})/B^2$.

1.38.- Sean P, Q y R tres puntos no alineados y O cualquier punto del espacio. Demostrar que el vector

$$\mathrm{OP}\times\mathrm{OQ} + \mathrm{OQ}\times\mathrm{OR} + \mathrm{OR}\times\mathrm{OP}$$

es perpendicular al plano definido por los puntos P, Q y R

1.39.- Cambio de base I. Dado el vector $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, expresarlo en función de los vectores unitarios $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{i}$.

1.40.- Cambio de base II. a) Encontrar las componentes del vector $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ en un sistema de ejes coordenados $x'y'z'$ obtenido por rotación del sistema de ejes xyz un ángulo de 30° alrededor del eje z, en el sentido positivo. **b)** Encontrar las componentes del vector $\boldsymbol{A}'$ obtenido por rotación del vector $\boldsymbol{A}$, dado anteriormente, un ángulo de 30° alrededor del eje z, en el sentido positivo.

1.41.- Dada la ecuación de la elipse, referida a sus ejes principales,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

obtener la expresión de dicha elipse cuando su eje mayor forma un ángulo θ con el eje x.

1.42.- Comprobar que el par de funciones definidas por $f_1 = 0$, $f_2 = x^2 + y^2$, cualquiera que sea el sistema de coordenadas usado en el plano, no son las componentes de un vector.