Concepto de Probabilidad: definición

ESCUELA POLITÉCNICA
SUPERIOR DE CÓRDOBA
Universidad de Córdoba
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Definición frecuentista de probabilidad

- Frecuencia relativa del suceso *A*.

$$f_r(A) = \frac{n_a}{n}$$

$\rightarrow$ nº veces ocurrido

$\rightarrow$ nº veces que se ha repetido

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_r(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_a}{n}$$

- Propiedades:

$$f_r(\Omega) = 1$$

$$0 \leq f_r(A) \leq 1$$

$$f_r(A \cup B) = f_r(A) + f_r(B) \quad si \quad A \cap B = \varnothing$$

Definición de Laplace de probabilidad

[A_1, A_n] = misma probabilidad de ocurrir

Dados $A_1, A_2, \ldots, A_m$ tales que $A_i \cap A_j = \varnothing$ y $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = \Omega$ e igualmente verosímiles:

$$P(A) = \frac{m_a}{m} = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

Definición axiomática de probabilidad

Sea $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ tal que:

el espacio origen

$A \mapsto P(A)$

- P(Ω) = 1
- P(A) ≥ 0
- P(A U B) = P(A)+P(B) si A ∩ B= Ø

Axiomas de Kolmogórov

A la función P se le llama Función de probabilidad.

A la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ *se le llama* Espacio de probabilidad.

Ej:

Se lanza un moneda perfecta.

Espacio muestral: $\Omega = \{ \text{cara}, \text{cruz} \}$

Algebra de sucesos asociada: $\mathcal{A} = \{ \varnothing, \Omega, \{\text{cara}\}, \{\text{cruz}\} \}$

Este conjunto es cerrado para la unión y complementación

Sobre la dupla $(\Omega, \mathcal{A})$ definimos la función:

$$
\begin{aligned}
P : \mathcal{A} &\to [0,1] \\
\varnothing &\mapsto P(\varnothing) = 0 \\
\Omega &\mapsto P(\Omega) = 1 \\
\{cara\} &\mapsto P(\{cara\}) = \tfrac{1}{2} \\
\{cruz\} &\mapsto P(\{cruz\}) = \tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

P verifica los axiomas de Kolmogórov.

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ constituye un espacio de probabilidad.

Definición axiomática de probabilidad

Sea $P:\mathcal{A}\to[0,1]$ tal que:

$$A\mapsto P(A)$$

- P(Ω) = 1
- P(A) ≥ 0
- P(A U B) = P(A)+P(B) si A ∩ B= Ø

Axiomas de Kolmogórov

A la función P se le llama Función de probabilidad.

A la terna $(\Omega,\mathcal{A},\mathcal{P})$ *se le llama* Espacio de probabilidad.

Consecuencia de los axiomas:

Ej:

- Si A ⊂ B ⇒ P(A) ≤ P(B)

$$A\subset B\to B=A\cup\left(A^c\cap B\right)\xrightarrow{Ax.3}P(B)=P(A)+P\left(A^c\cap B\right)$$

$$\xrightarrow{Ax.2}P\left(A^c\cap B\right)\geq 0\Rightarrow P(B)\geq P(A)$$

Definición axiomática de probabilidad

Sea $P:\mathcal{A}\to[0,1]$ tal que:

$$A\mapsto P(A)$$

- P(Ω) = 1
- P(A) ≥ 0
- P(A U B) = P(A)+P(B) si A ∩ B= Ø

Axiomas de Kolmogórov

A la función P se le llama Función de probabilidad.

A la terna $(\Omega,\mathcal{A},\mathcal{P})$ *se le llama* Espacio de probabilidad.

Consecuencia de los axiomas:

Ej:

- Si $A\subset B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$
- P(A) ≤ 1

$$A\subset\Omega\Rightarrow P(A)\leq P(\Omega)=1$$

Definición axiomática de probabilidad

Sea $P : \mathcal{A} \to [0,1]$ tal que:

$$A \mapsto P(A)$$

- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \geq 0$
- $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$ si $A \cap B = \varnothing$

Axiomas de Kolmogórov

A la función P se le llama Función de probabilidad.

A la terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ *se le llama* Espacio de probabilidad.

Consecuencia de los axiomas:

Ej:

- Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A) \leq 1$
- $P(A^C) = 1 - P(A)$

$$A \cup A^c = \Omega \Rightarrow P(A) + P(A^c) = P(\Omega) = 1$$

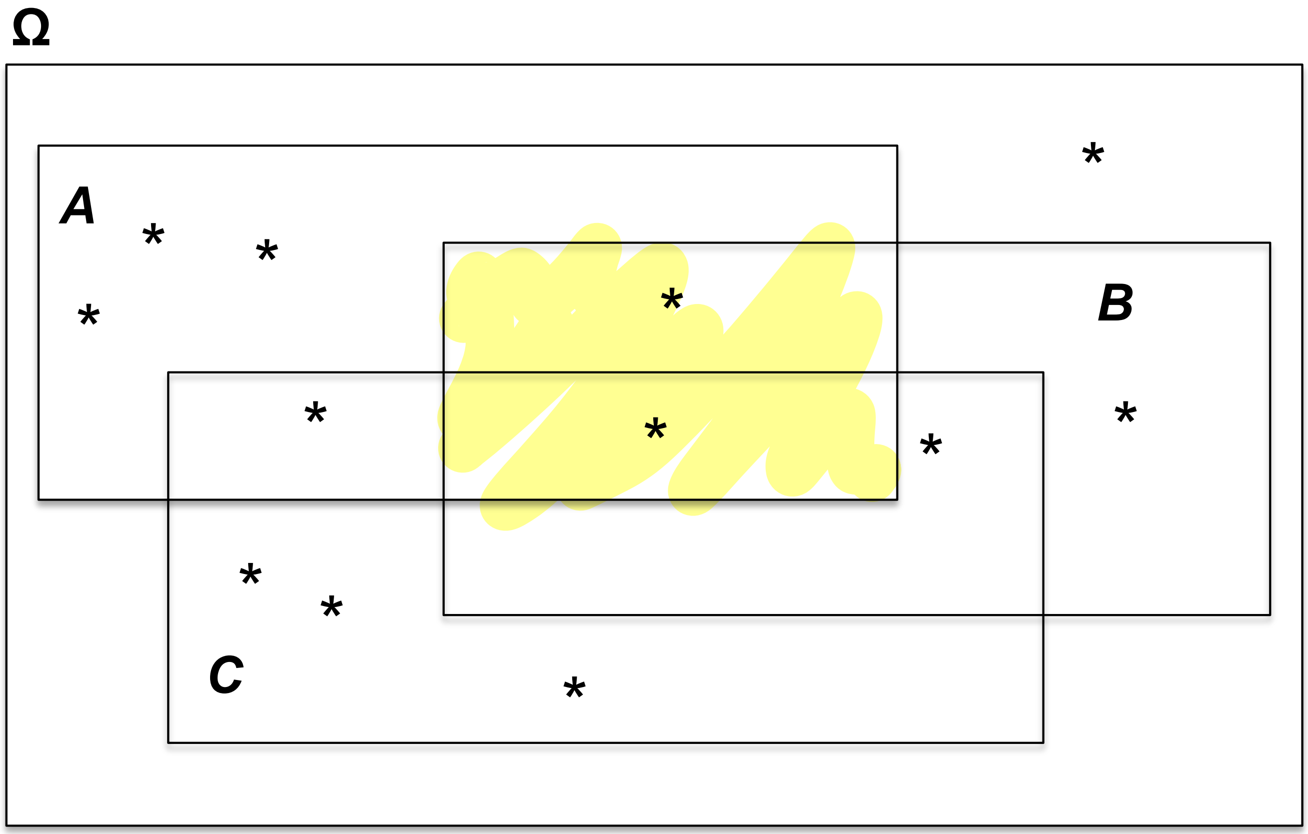
Ley aditiva de probabilidades

Ampliar Kolmogorov

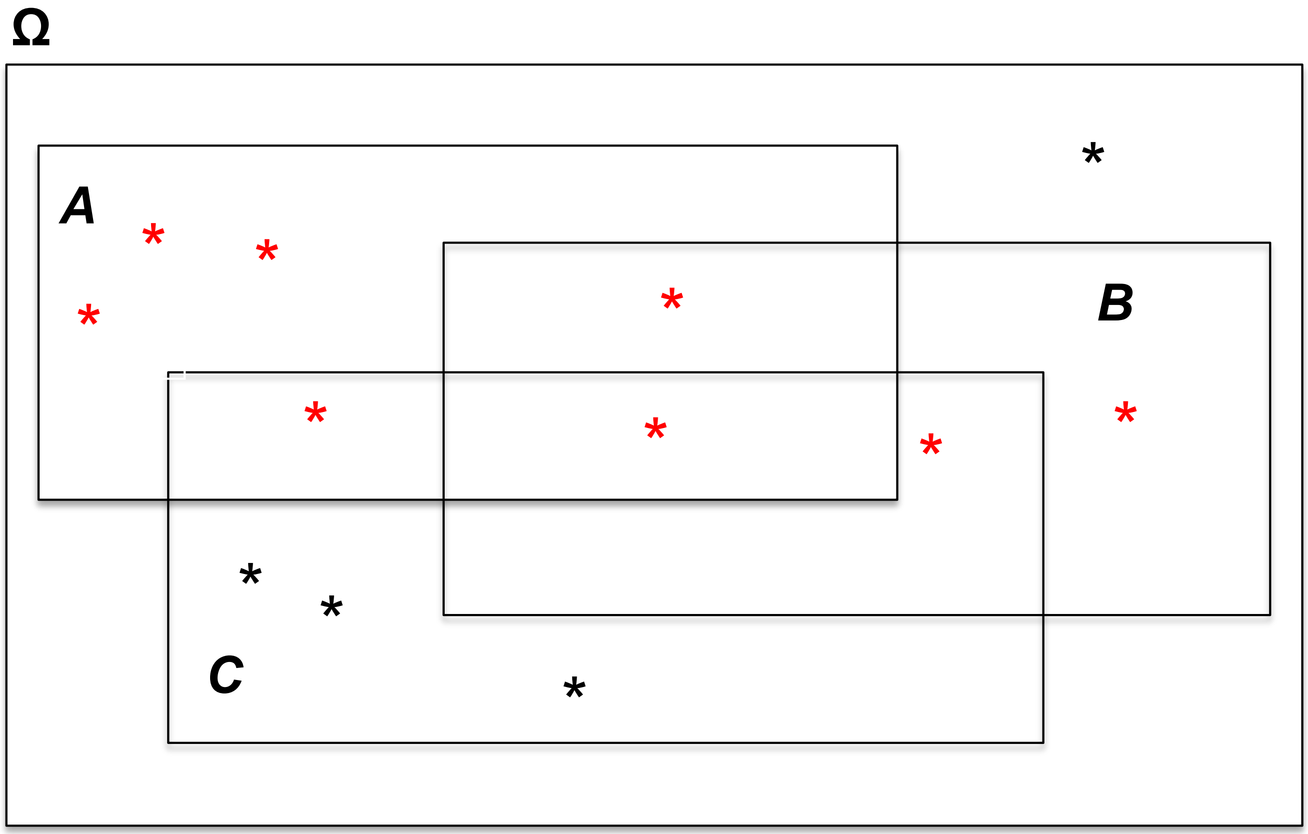
- $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ si $A_i \cap B_j = \varnothing \,;\, i \neq j$
- *P(A U B) = P(A)+P(B)-P(A ∩ B)*
- *P(A U B U C) = [P(A)+P(B)+P(C)]-[P(A ∩ B)+P(A ∩ C)+P(B ∩ C)] +[P(A ∩ B ∩ C)]*
    - Generalización:
        - *P(A U B U C U D U ...) = [P(A)+P(B)+P(C)+P(D)+...]-*

          - [P(A ∩ B)+P(A ∩ C)+P(A ∩ D)+...]+[P(A ∩ B ∩ C)

          +P(A ∩ B ∩ D)+...] - ...
- $P(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i P(A_i)$ *Bonferroni*



$P(A \cup B)$?

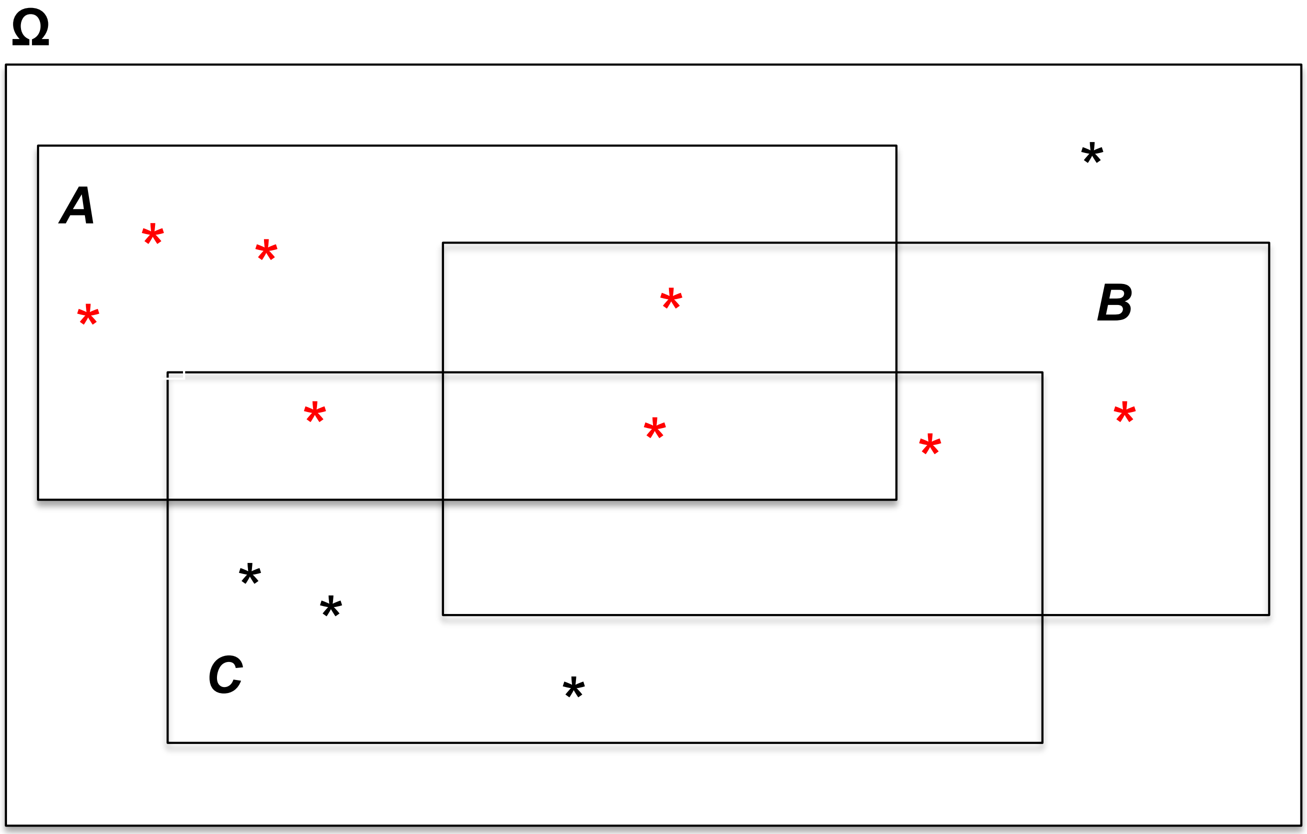


$$\boxed{P\left(A \cup B\right) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}}$$

$$P\left(A\right) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P\left(B\right) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P\left(A \cap B\right) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$



$$\boxed{P(A \cup B) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}}$$

$$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{2}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$