Cálculo - Grado en Ingeniería Informática
Relación de Ejercicios (Tema 1)

1. Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad -10 < x \leq 6 \\ x & \text{si} \quad x > 6 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

   a) Obtenga el dominio y la fórmula de la función $f+g$.

2. Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$) es biyectiva.

3. Demuestra que la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$ admite inversa para $x > -1$.

4. Calcula los siguientes límites (sin usar la regla de L'Hopital)

   a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

   d) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2+4x-7}{x^2-1}$

5. Determinar los valores de a, b y c que hacen continua en todo su dominio a la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x < -2 \\ ax^2+b & \text{si} \quad -2 \leq x < 1 \\ c & \text{si} \quad x = 1 \\ 1-x & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

6. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$ en los conjuntos $(2,3)$, $(2,3]$ y $[2,3]$.

7. Sea $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$. Demuestre que existe, al menos, un número c entre 0 y 10 tal que $f(c) = 500$.

8. Sea $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 - 10x$. ¿Existe un punto $c \in [1,3]$ tal que $f(c) = -15$? Justifique su respuesta.

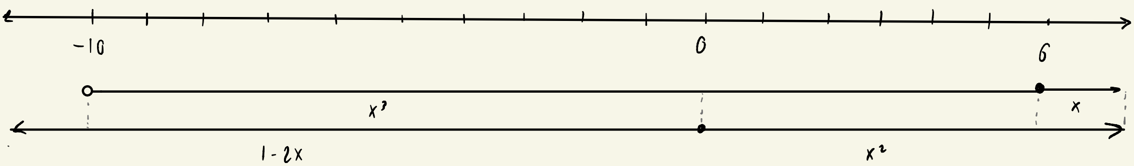
9. Usa el Teorema de Bolzano para justificar que la ecuación $x + \ln x = e$ tiene al menos una solución real.

1. Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad -10 < x \leq 6 \\ x & \text{si} \quad x > 6 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Obtenga el dominio y la fórmula de la función $f+g$.

El dominio de la fución f+g es la intersección de las dominias.



$$\left.\begin{array}{l} \text{Dom } f(x) \in \mathbb{R} \quad x > -10 \\ \text{Dom } g(x) \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \text{Dom } f(x) + g(x) \in \mathbb{R} \; x > -10$$

$$f+g\,(x) \begin{cases} x^3 - 2x + 1 & -10 < x \leq 0 \\ x^3 + x^2 & 0 < x \leq 6 \\ x^2 + x & x > 6 \end{cases}$$

2. Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$) es biyectiva.

Una función es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva

suponiendo que $f(x) = f(y)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax + b \\ f(y) = ay + b \end{array}\right\} ax + b = ay + b \to x = y$$ La función es inyectiva

suponiendo que $y = f(x)$:

$$y = ax + b \to x = \frac{y-b}{a} \to f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a\,\frac{y-b}{a} + b = y$$

La función es sobreyectiva

La función $f(x)$ es biyectiva

3. Demuestra que la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$ admite inversa para $x > -1$.

Suponiendo que $f(x) = f(y)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \frac{x}{1+x} \\ f(y) = \frac{y}{1+y} \end{array}\right\} \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \rightarrow x(1+y) = y(1+x) \rightarrow x + xy = y + xy \rightarrow x = y$$

La función es inyectiva

Suponiendo que $y = f(x)$

$y = \frac{x}{1+x}$; $y + xy = x$; $y = x(1-y)$; $x = \frac{y}{1-y}$

La función es sobreyectiva y biyectiva, lo que significa que admite inversa

$f(x) = y$; $y = \frac{x}{1+x}$; $x = \frac{y}{1-y}$; $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$; $f(-1) = \frac{-1}{1-(-1)} = \frac{-1}{2}$

4. Calcula los siguientes límites (sin usar la regla de L'Hopital)

a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ c) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2+4x-7}{x^2-1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+2} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} = \lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} \, \frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}} = \lim_{x\to 4} \frac{9-5+x}{(1-\sqrt{5-x})(3+\sqrt{5+x})}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{4-x\ (1+\sqrt{5-x})}{(1-\sqrt{5-x})(3+\sqrt{5+x})(1+\sqrt{5-x})} = \frac{4-x\ (1+\sqrt{5-x})}{1-5+x\ \ (3+\sqrt{5+x})} = \frac{4-x\ (1+\sqrt{5-x})}{-4+x\ (3+\sqrt{5+x})} = -\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}}$$

$$= -\frac{1+\sqrt{1}}{3+\sqrt{9}} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x\to 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^3-(2)^3}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x\to 8} \sqrt[3]{x^2}-2^2 =$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2+4x-7}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(3x+7)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x+7}{x+1} = \frac{10}{2} = 5$$

5. Determinar los valores de a, b y c que hacen continua en todo su dominio a la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x < -2 \\ ax^2+b & \text{si} \quad -2 \le x < 1 \\ c & \text{si} \quad x = 1 \\ 1-x & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Continuidad en $x=-2$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -2^-} &= \lim_{x\to -2^-} 2x+1 = -4+1 = -3 \\ \lim_{x\to -2^+} &= \lim_{x\to -2^+} ax^2+b = 4a+b \end{aligned}\right\} 4a+b=-3$$

Continuidad en $x=1$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} &= \lim ax^2+b = a+b \\ f(1) &= c \\ \lim_{x\to 1^+} &= \lim 1-x = 0 \end{aligned}\right\} a+b = 0 = c$$

$$\begin{aligned} 4a + b &= -3 \\ a + b &= 0 \\ \hline 3a \quad &= -3 \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} a &= -1 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

6. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$ en los conjuntos $(2,3)$, $(2,3]$ y $[2,3]$.

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x^2-4x+4}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad 2 < x < 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(-\frac{1}{x^2-4x+4} \right)$$

$$x^2-4x+4 = 0 \rightarrow x = 2$$

$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = -\frac{1}{n}$ Es contiwa por la izquierda

$\lim_{x \to 3^+} f'(x) = \lim_{x \to 3^+} \left(-\frac{1}{(x-2)^2} \right) = -\frac{1}{1} = -1$ Es contiwa por la derecha

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad 2 < x \leq 3$$

$\lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(-\frac{1}{x^2-4x+4} \right)$ Es contiwa por la izquierda

$f(3) = \frac{1}{3-2} = 1$ Es contiwa por la derecha

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \quad 2 \leq x \leq 3$$

$f(2) = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0}$ La función tiende a ∞ por la izquierda

$f(3) = \frac{1}{3-2} = 1$ Es contiwa por la derecha

En $(2,3)$ y $(2,3]$ es contiwa

7. Sea $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$. Demuestre que existe, al menos, un número c entre 0 y 10 tal que $f(c) = 500$.

Teorema de valores intermedias. Si $f(0) < f(10)$ $\forall y \in [f(0), f(10)]$

$\exists c \in [0,10]$ tal que $f(c) = y$. Si $f(0) < 500 < f(10)$ es posible

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -9 \\ f(10) = 561 \end{array}\right\}$$ Existe un valor para x tal que $f(x) = 500$ en $[0,10]$

8. Sea $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 - 2x^2 - 10x$. ¿Existe un punto $c \in [1,3]$ tal que $f(c) = -15$? Justifique su respuesta.

Teorema de valores intermedias. Si $f(1) < f(3)$ $\forall\, y \in [f(1), f(3)]$ $\exists\, c \in [1,3]$ tal que $f(c) = y$. Si $f(1) < -15 < f(3)$ es posible

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = -11 \\ f(3) = -21 \end{array}\right\} \text{Existe un valor para } x \text{ tal que } f(x) = -15 \text{ en } [1,3]$$

9. Usa el Teorema de Bolzano para justificar que la ecuación $x + \ln x = e$ tiene al menos una solución real.

Segun Bolzano, si $f(a) \cdot f(b) < 0$, siendo $f(x)$ continua en $[a,b]$ $\exists$ c tal que $f(c) = 0$.

Cogemos los valores 1 y 2

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 - e < 0 \\ f(2) = 1 > 0 \end{array}\right\}$$ Existe al menos una solución real