MATEMÁTICA DISCRETA

Variaciones, Permutaciones y Combinaciones (Parte II)

Definición

Sea X un conjunto formado por n objetos distintos y $r \leq n$ un número natural. Una r-combinación (o *combinación de* n *elementos tomados de* r *en* r) de X es una colección de r objetos distintos elegidos entre los n objetos de X (sin importar el orden).

Observación: Dos r-combinaciones son distintas si difieren en alguno de sus elementos.

Ejemplo: Si $X = \{a, b, c, d\}$, entonces

- Las 1-combinaciones son: a, b, c, d.
- Las 2-combinaciones son: ab, ac, ad, bc, bd, cd.
- Las 3-combinaciones son: abc, abd, acd, bcd.
- La única 4-combinación es: $abcd$.

Ejemplo

Determina el número de 3-combinaciones del conjunto $X = \{a,b,c,d,e,f\}$.

- $n = |X| = 6$ y $r = 3$.
- Hay $V(6,3)$ formas de obtener una 3-permutación de X. Debido a que no nos importa el orden, debemos considerar iguales las $P_3 = V(3,3)$ formas de reordenar cada una de las 3-permutaciones.
- El resultado es $\frac{V(6,3)}{V(3,3)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$.

Teorema

Sea X un conjunto de cardinalidad n. El número de combinaciones de n elementos tomados de r en r (número de r-combinaciones) del conjunto X es

$$C(n,r) = \frac{V(n,r)}{V(r,r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- El número $C(n,r)$ se denomina número combinatorio o binomial y se representa con el símbolo $\binom{n}{r}$.
- Propiedades de los números binomiales
  - Simetría: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.
  - Adición: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

Ejemplo

A un concurso se presentan 15 personas. ¿De cuántas formas se puede repartir un único premio, el cual pueden compartir hasta un máximo de 3 personas (el premio también puede quedar desierto).

Solución:

- Para cada $r \in \{0,1,2,3\}$, premiar a r personas consiste en seleccionar un subconjunto de r personas entre las 15 personas participantes.
- Por tanto, para cada $r \in \{0,1,2,3\}$, la selección se puede realizar de $\binom{15}{r}$ maneras distintas.
- Entonces, la solución es $\binom{15}{0}+\binom{15}{1}+\binom{15}{2}+\binom{15}{3}=576$.

Ejemplo

¿Cuántas secuencias hay de longitud 6, formadas con los dígitos $0, \ldots, 9$, donde todos los dígitos son diferentes excepto el dígito 5 que se repite tres veces?

Solución:

- ¿De cuántas formas diferentes se pueden colocar los tres cincos?
  R/ $C(6,3) = 20$.
- Una vez colocados los tres "5", ¿de cuántas formas diferentes se pueden elegir y colocar los tres dígitos restantes?
  R/ $V(9,3) = 504$.
- Por lo tanto, en total hay $C(6,3) \cdot V(9,3) = 20 \cdot 504 = 10080$ secuencias diferentes.

Definición

Sea X un conjunto formado por n objetos distintos. Una r-combinación con repetición (o *combinación con repetición de* n *elementos tomados de* r *en* r) de X es una colección de r objetos no necesariamente distintos elegidos entre los n objetos de X (sin importar el orden).

Ejemplo: Si $X = \{a, b, c\}$, entonces

- Las 1-combinaciones con repetición son: a, b, c.
- Las 2-combinaciones con repetición son: aa, ab, ac, bb, bc, cc.
- Ejemplos de 3-combinaciones con repetición: aaa, aab, abc.
- Ejemplos de 4-combinaciones con repetición: $aaaa$, $abcd$, $abbb$.

Ejemplo

Pedro decide ir al bar a pedir tres bocadillos. Al llegar, observa que hay cuatro tipos diferentes de bocadillos. ¿De cuántas formas diferentes puede hacer el pedido?

Solución:

- Supongamos que los bocadillos son del tipo a, b, c y d.
- Pedido aac $\longrightarrow$ esquema $xx||x|$
- Pedido abd $\longrightarrow$ esquema $x|x||x$
- Pedido ccc $\longrightarrow$ esquema $||xxx|$
- Cada esquema tiene $n-1+r=4-1+3$ símbolos, de los cuales $r=3$ son "x" y $n-1=4-1$ son barras.
- Entonces, debemos contar de cuántas formas se pueden elegir las r posiciones de las x entre las $n-1+r$ posiciones posibles. Esto es $C(n-1+r,r)=20$.

Teorema

Sea X un conjunto de cardinalidad n. El número de combinaciones con repetición de n elementos tomados de r en r (número de r-combinaciones con repetición) del conjunto X es

$$CR(n,r) = C(n-1+r,r).$$

Corolario

Sea $r \in \mathbb{N}$. El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ es $CR(n,r)$.

Ejemplo

De cuántas formas diferentes se pueden repartir 30 lápices iguales entre 12 niños si

(a) pueden haber niños que se queden sin lápices.

(b) no pueden haber niños que se queden sin lápices.

Solución:

Para $i \in \{1,\ldots,12\}$, sea x_i el número de lápices que recibe el niño i. Se desea obtener el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1+\ldots+x_{12}=30$.

(a) Observa que $x_i \geq 0$ para todo $i \in \{1,\ldots,12\}$. La solución es $CR(12,30) = C(12-1+30,30)$ formas diferentes.

(b) Observa que $x_i \geq 1$ para todo $i \in \{1,\ldots,12\}$. Sea $y_i = x_i - 1$. Entonces $y_i \geq 0$ para todo $i \in \{1,\ldots,12\}$ y además

$$x_1+\ldots+x_{12}=30 \qquad \leftrightarrow \qquad y_1+\ldots+y_{12}=18$$

La solución es $CR(12,18) = C(12-1+18,18)$ formas diferentes.