Métodos de ordenación interna

Eva Lucrecia Gibaja Galindo

Dpto. Informática y Análisis Numérico

Introducción

- **Ordenar.** Reorganizar un conjunto dado, de objetos similares, en una secuencia especificada
- **Aplicaciones:**
  - Mostrar un listado ordenado del contenido de una base de datos (ej. Listado alfabético)
  - Ordenar los resultado de una búsqueda en Internet (ej. Google *pagerank*)
- **Problemas que resultan más sencillos de resolver con los datos ordenados:**
  - Detectar duplicados
  - Realizar una búsqueda (ej. Búsqueda binaria)
  - Recomendar productos (ej. Amazon)

Introducción

Definición formal del problema:

- Se toman ***n*** elementos R_1, R_2, R_3, ..., R_n, para ordenarlos
- Cada $\boldsymbol{R_i}$ se denomina **registro** y al conjunto de los *n* registros, **fichero**
- Cada registro R_i, tiene una **clave** $\boldsymbol{K_i}$, que determina el orden
  - El registro puede contener información adicional que no tiene ningún efecto en el proceso de ordenación y permanece en el registro
- Se especifica entre las claves una **relación de orden** <, de forma que, para tres valores *a*, *b*, *c* se cumplen las siguientes condiciones:
  1. una de las posibilidades $a<b$, $a=b$, $b<a$ es cierta
  2. si $a<b$ y $b<c$ entonces $a<c$ (propiedad transitiva)
- **Ordenación**: Determinar una permutación $p_1, p_2,..., p_n$ de los registros que coloque las claves en orden creciente

$$K(p_1) \leq K(p_2) \leq (p_3) \leq .... \leq K(p_n)$$

Introducción

- **Ordenación estable**: Los registros con igual clave, mantienen su orden relativo inicial
- **Tipos de ordenación** en función de la memoria**:**
  - **Ordenación interna (vectores).** Se almacenan en memoria. Más rápidos
  - **Ordenación externa (ficheros).** Se ubican en dispositivos de almacenamiento externo. Más lentos
- **Ordenación "*in situ*".** Las permutaciones de los elementos a ordenar se realizan utilizando el espacio ocupado por estos
- **Tiempo de ordenación:**
  - **Comparaciones** (función del número de elementos a ordenar, n)
  - **Desplazamientos** (función del número de elementos a ordenar, n)
- **Métodos de orden n^2 (métodos directos)**
  1. Son una introducción a la problemática y su estudio es útil
  2. Los programas para estos métodos son más cortos y fáciles de entender
  3. Son más rápidos cuando el número de elementos es suficientemente pequeño No deben usarse para números grandes de elementos

Ordenación por selección

- La idea de este tipo de métodos se basa en las siguientes operaciones:
  1. Seleccionar el elemento más pequeño
  2. Intercambiarlo con el primero, v_1
  3. A continuación se repiten estas operaciones con los *n-1*, *n-2*, ..., elementos restantes, hasta que quede un único elemento, el mayor
- Los métodos basados en esta idea requieren la disponibilidad de todos los elementos antes de empezar el proceso de ordenación
- Esencialmente la idea es opuesta a la de inserción

Ordenación por selección

```
algoritmo selección-directa(n; v; )
inicio
   para i de 1 a n-1 //Posición a intercambiar
        menor ← i //Posición del menor
        para k de i+1 a n
           si v[k] < v[menor] entonces
                menor ← k
           fin-si
        fin-para
        auxiliar ← v[menor]
        v[menor] ← v[i]
        v[i] ← auxiliar
   fin-para
fin
```

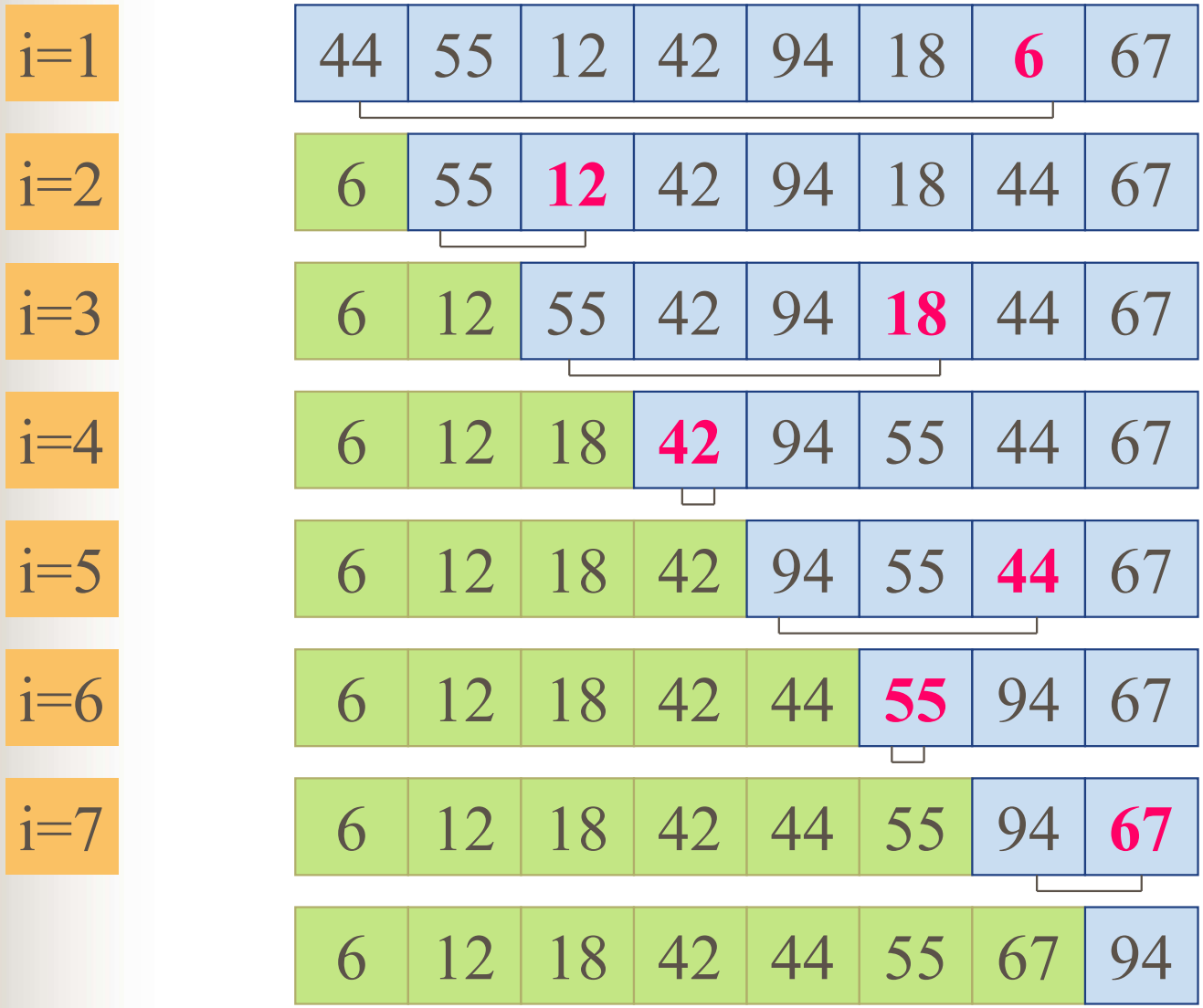
En este tema los vectores comienzan en la posición 1

intercambio

selection sort

44	55	12	42	94	18	6	67
1	2	3	4	5	6	7	8

Ejemplo Selección

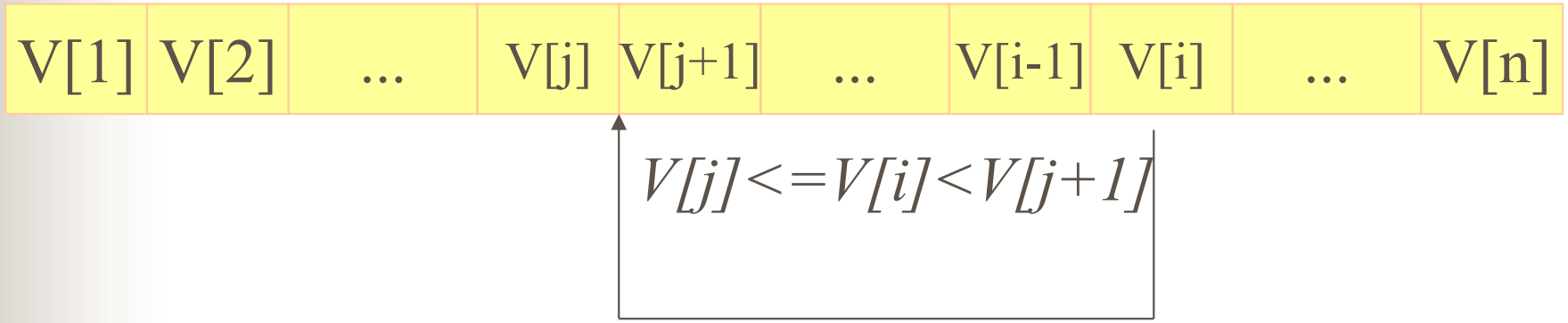


Ordenación por inserción

Inserción directa

- Esencialmente la idea es opuesta a la de selección
  - Supongamos que $j<i\leq n$ y que se han ordenado ya los $i-1$ elementos ya tratados
  - Se compara el nuevo elemento, v_i con v_{i-1}, v_{i-2}, ..., uno a uno, hasta encontrar dos elementos consecutivos v_j y v_{j+1} entre los cuales insertar el elemento v_i
  - Se desplazan un espacio los elementos v_{j+1}, v_{j+2},...,v_{j-1}, y se coloca el nuevo elemento en la posición $j+1$
- ***Online***: puede ordenar una secuencia de elementos conforme se reciben

Ordenación por inserción



Ordenación por inserción

```
algoritmo inserción_directa (n; v; )
inicio
   para i de 2 a n hacer
         auxiliar ← v[i] //Elemento que hay que insertar
         j ← i – 1 //Tope de los ordenados
         mientras j>0 Y v[j]>auxiliar
                  v[j+1] ← v[j] //Desplaza
                  j ← j - 1
         fin-mientras
         v[j+1] ← auxiliar
   fin-para
fin
```

insertion sort

44	55	12	42	94	18	6	67
1	2	3	4	5	6	7	8

Ejemplo inserción directa

i=2	44	55	12	42	94	18	6	67	auxiliar=55 j=1 *V[j]< 55*
i=3	44	55	12	42	94	18	6	67	auxiliar=12
	44	55	**55**	42	94	18	6	67	j=2
	44	**44**	55	42	94	18	6	67	j=1
	12	44	55	42	94	18	6	67	j=0
i=4	12	44	55	42	94	18	6	67	auxiliar=42
	12	44	55	**55**	94	18	6	67	j=3
	12	44	**44**	55	94	18	6	67	j=2
	12	**42**	44	55	94	18	6	67	j=1 *V[j]<42*

Ejemplo inserción directa

auxiliar=94

i=5	12	42	44	55	94	18	6	67	*V[j]<94*
i=6	12	42	44	55	94	18	6	67	auxiliar=18
	12	42	44	55	94	**94**	6	67	j=5
	12	42	44	55	**55**	94	6	67	j=4
	12	42	44	**44**	55	94	6	67	j=3
	12	42	**42**	44	55	94	6	67	j=2
	12	**18**	42	44	55	94	6	67	j=1

Ejemplo inserción directa

i=7

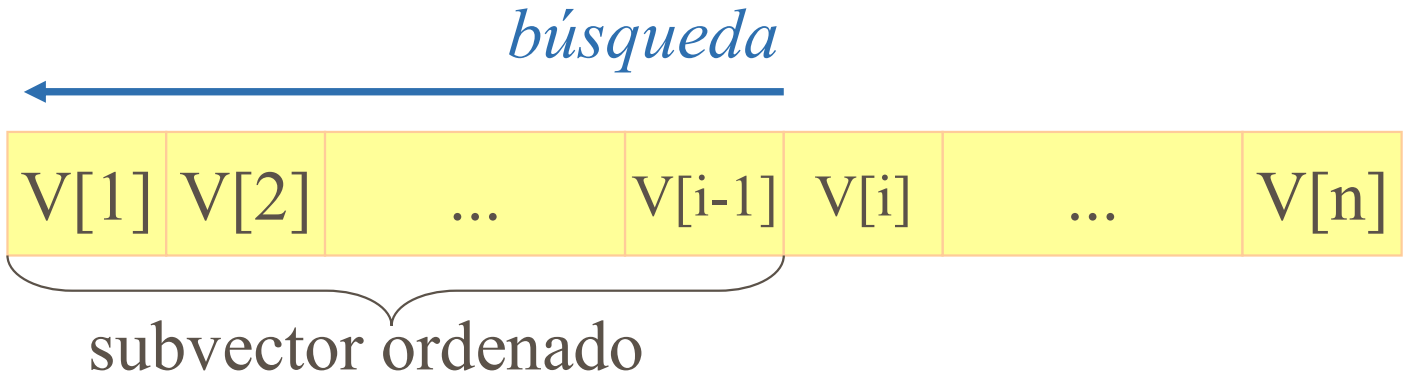
12	18	42	44	55	94	6	67	auxiliar=6
12	18	42	44	55	94	**94**	67	j=6
12	18	42	44	55	**55**	94	67	j=5
12	18	42	44	**44**	55	94	67	j=4
12	18	42	**42**	44	55	94	67	j=3
12	18	**18**	42	44	55	94	67	j=2
12	**12**	18	42	44	55	94	67	j=1
6	12	18	42	44	55	94	67	

i=8

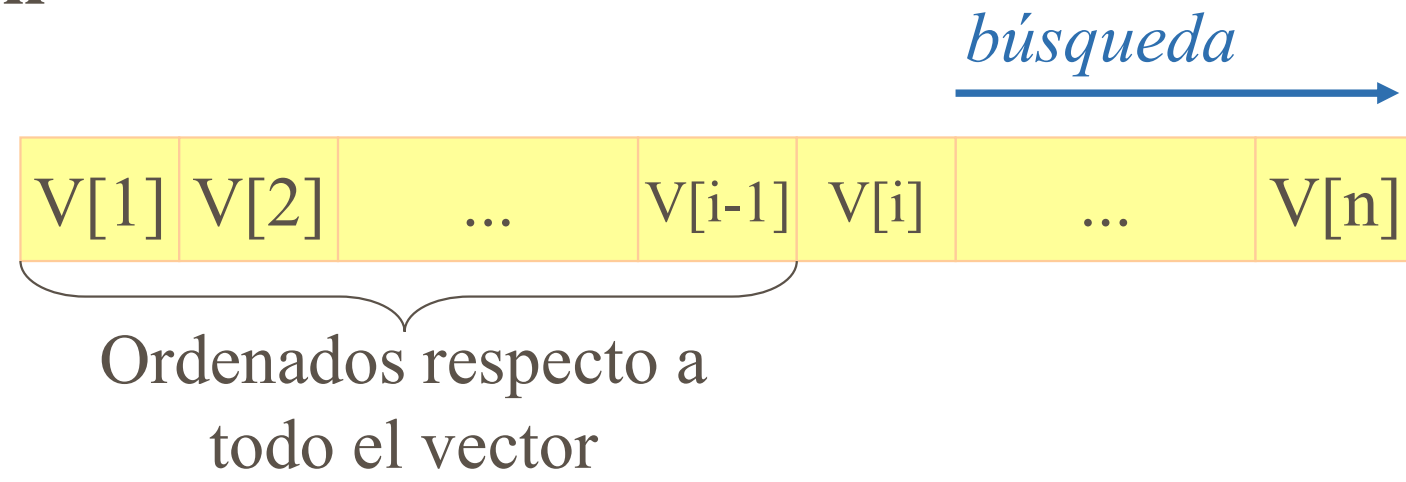
6	12	18	42	44	55	94	67	auxiliar=67
6	12	18	42	44	55	94	**94**	j=7
6	12	18	42	44	55	**67**	94	j=6 *V[j]<67*

Inserción vs. selección

Inserción directa

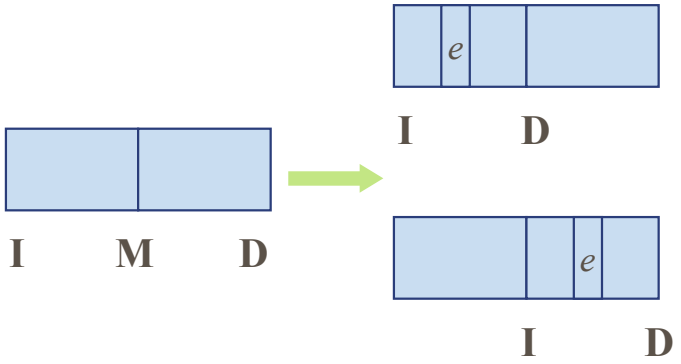


Selección



Ordenación por inserción

```
algoritmo inserción_binaria (n; v; )
inicio
    para i de 2 a n hacer
        auxiliar ← v[i] //Elemento a insertar
        izquierda ← 1 // Posicion de insercion
        derecha ← i – 1 //Parte del vector parcialmente ordenada
        mientras izquierda <= derecha
            mitad ← (izquierda+derecha) div 2
            si auxiliar < v[mitad] entonces
               derecha ← mitad - 1
            sino
               izquierda ← mitad + 1
            fin-si
        fin-mientras
        para j de i-1 a izquierda paso -1 // desplazamientos
            v[j+1] ← v[j]
        fin-para
        v[izquierda] ← auxiliar //izquierda indica la posición donde debe ir el elemento
    fin-para
fin
```



44	55	12	42	94	18	6	67
1	2	3	4	5	6	7	8

Ejemplo inserción binaria

i=2

44	55	12	42	94	18	6	67

ID

44_m	55	12	42	94	18	6	67

D I

i=3

44_m	55	12	42	94	18	6	67

I D

44_m	55	12	42	94	18	6	67

D I

44	55	**55**	42	94	18	6	67	j=2
44	**44**	55	42	94	18	6	67	j=1
12	44	55	42	94	18	6	67	v[izd]=12

44	55	12	42	94	18	6	67
1	2	3	4	5	6	7	8

Ejemplo inserción binaria

i=4

12	44$_m$	55	42	94	18	6	67

I D

12	44$_m$	55	42	94	18	6	67

DI

12$_m$	44	55	42	94	18	6	67

D I

12	44	55	**55**	94	18	6	67	j=3
12	44	**44**	55	94	18	6	67	j=2
12	**42**	44	55	94	18	6	67	v[izd]=42

44	55	12	42	94	18	6	67
1	2	3	4	5	6	7	8

Ejemplo inserción binaria

i=7

12	18	42$_m$	44	55	94	6	67
I					D		

12$_m$	18	42	44	55	94	6	67
I	D						

12$_m$	18	42	44	55	94	6	67
D	I						

12	18	42	44	55	94	**94**	67	j=6
12	18	42	44	55	**55**	94	67	j=5
12	18	42	44	**44**	94	94	67	j=4
12	18	42	**42**	55	94	94	67	j=3
12	18	**18**	42	55	94	94	67	j=2
12	**12**	18	42	55	94	94	67	j=1
6	12	18	42	55	94	94	67	v[izd]=6

44	55	12	42	94	18	6	67
1	2	3	4	5	6	7	8

Ejemplo inserción binaria

i=8

6	12	18	42_m	44	55	94	67
I						D	

6	12	18	42_m	44	55	94	67
				I		D	

6	12	18	42	44	55_m	94	67
					D		

6	12	18	42	44	55	94_m	67
					D	I	

6	12	18	42	44	55	94	**94**

j=7

6	12	18	42	44	55	**67**	94

v[izd]=67

Ordenación por inserción

```
algoritmo inserción_shell(n; v; )
inicio
        distancia ← n
        repetir
          distancia ← distancia div 2
          repetir
                ordenado ← verdad
                i ← 1
                repetir
                   si v[i] > v[i+distancia] entonces
                     auxiliar ← v[i]
                     v[i] ← v[i+distancia]
                     v[i+distancia]← auxiliar
                     ordenado ← falso
                   fin-si
                   i ← i + 1
                hasta que  i+d > n
          hasta que ordenado
        hasta distancia=1
fin
```

intercambio

Ordenación por inserción

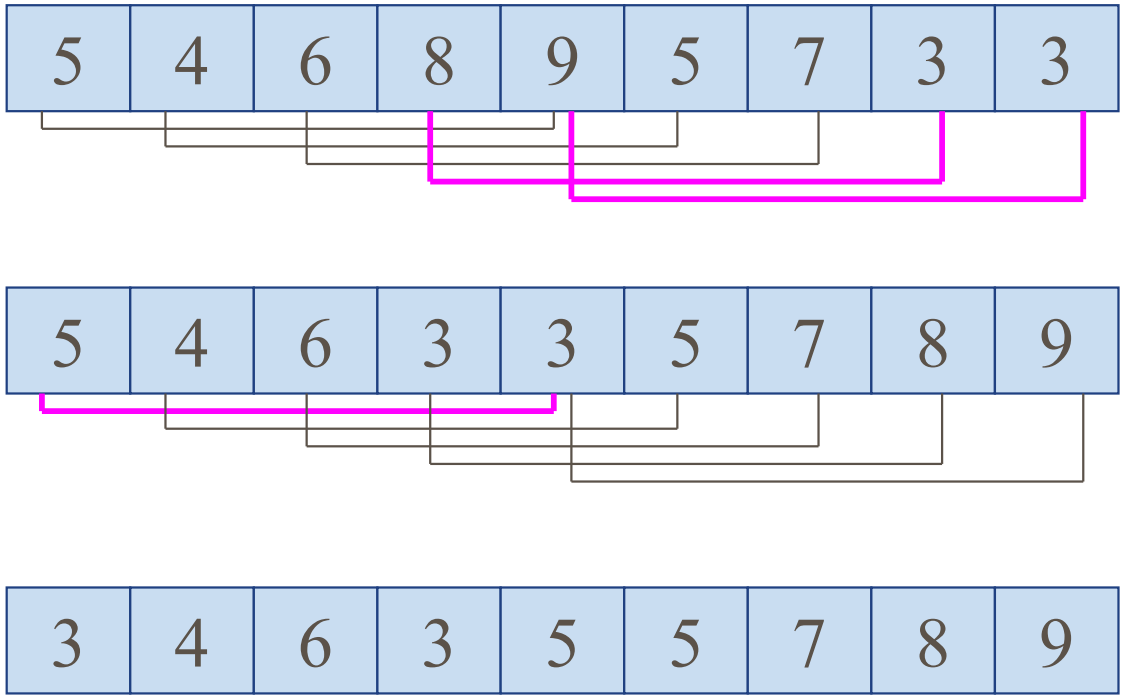
Inserción shell

- La secuencia de incrementos tomada (las sucesivas mitades), no tiene por qué ser única:
  - Se puede usar cualquier secuencia con tal de que el incremento final sea 1
  - En particular no se sabe qué secuencia de incrementos produce el mejor resultado
  - Knuth recomienda:
    - 1, 4, 13, 40, 121
    - 1, 3, 5, 7, 15, 31

5	4	6	8	9	5	7	3	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ejemplo inserción Shell

d=4

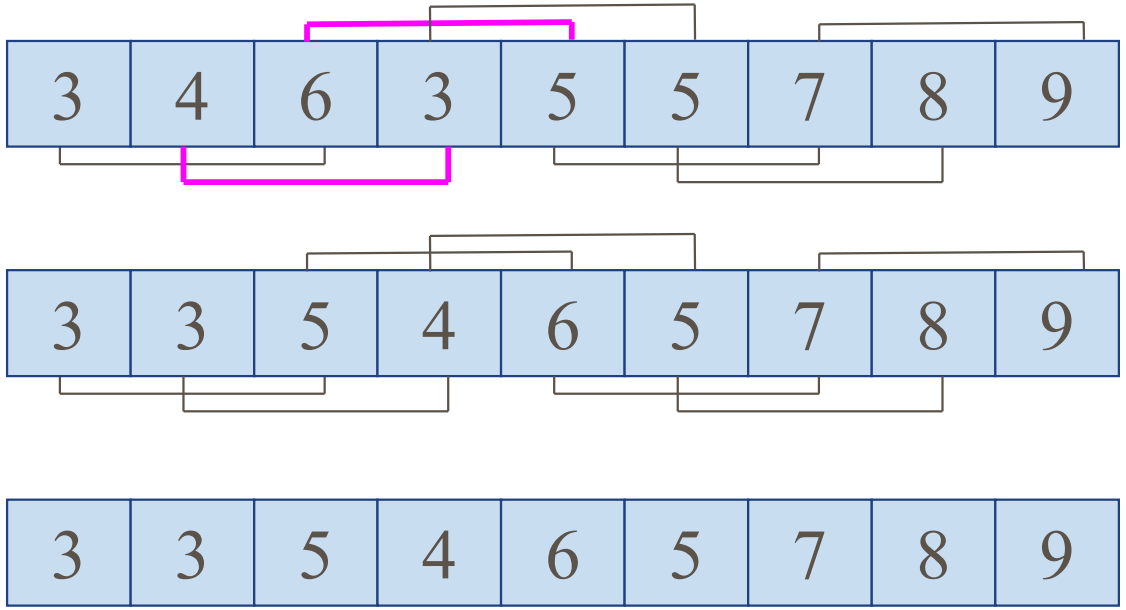


Ordenados los pares de distancia 4

5	4	6	8	9	5	7	3	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ejemplo inserción Shell

d=2

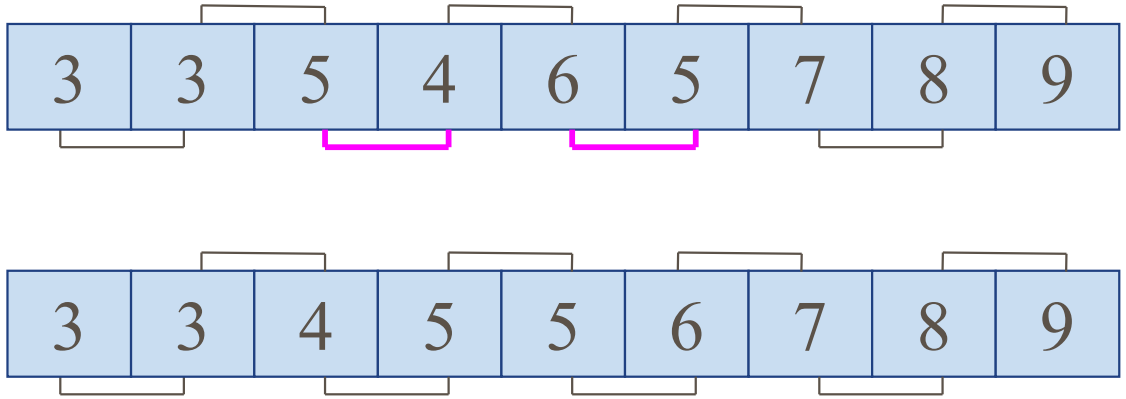


Ordenados los pares de distancia 2

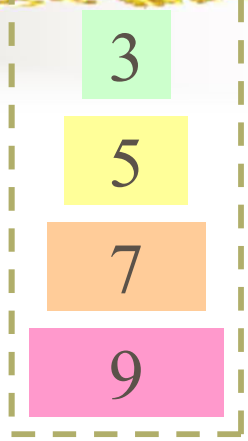
5	4	6	8	9	5	7	3	3
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ejemplo inserción Shell

d=1



Ordenados los pares de distancia 1



Ordenación por intercambio

Intercambio directo o método de la burbuja

- La base de este método es la comparación e intercambio de pares de elementos adyacentes, hasta que todos los elementos del vector están ordenados
- Para ello, se realizan varias pasadas sobre el vector, moviendo en cada una de ellas el elemento mínimo, hasta el extremo izquierdo del vector
- Si se observase el vector como si estuviera en posición vertical en vez de horizontal, los elementos se asemejan a burbujas en un depósito de agua, con pesos acordes al valor de los mismos; de cada pasada sobre el vector resulta la ascensión a una burbuja hasta el nivel del peso que le corresponde

Ordenación por intercambio

```
algoritmo burbuja(n; v; )
inicio
   para i de 2 a n
        para j de n a i inc -1
                si v[j-1] > v[j] entonces
                  auxiliar ← v[j-1]
                  v[j-1] ← v[j]
                  v[j]← auxiliar
                fin-si
        fin-para
   fin-para
fin
```

intercambio

bubble sort

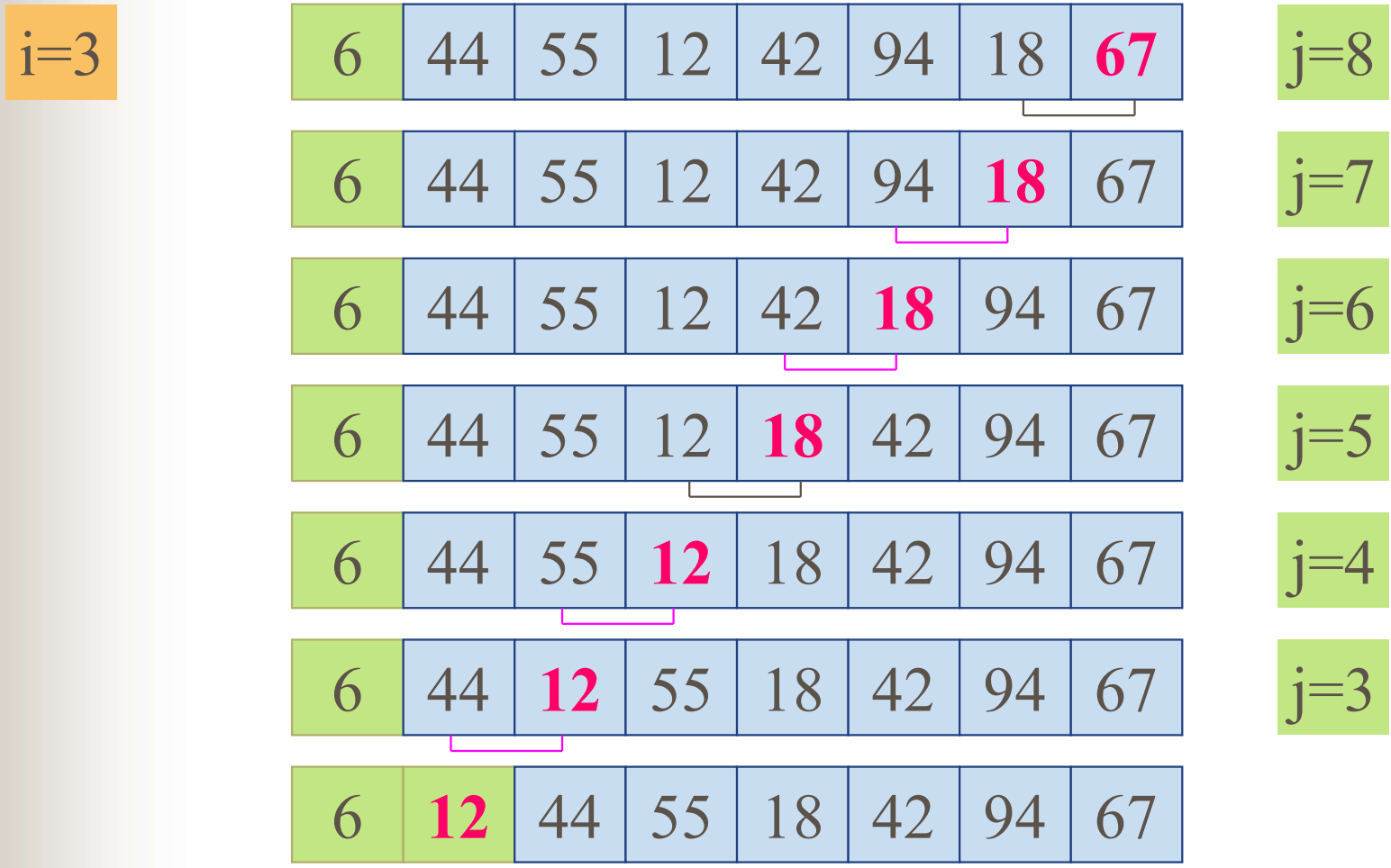
44	55	12	42	94	18	6	67
1	2	3	4	5	6	7	8

Ejemplo burbuja

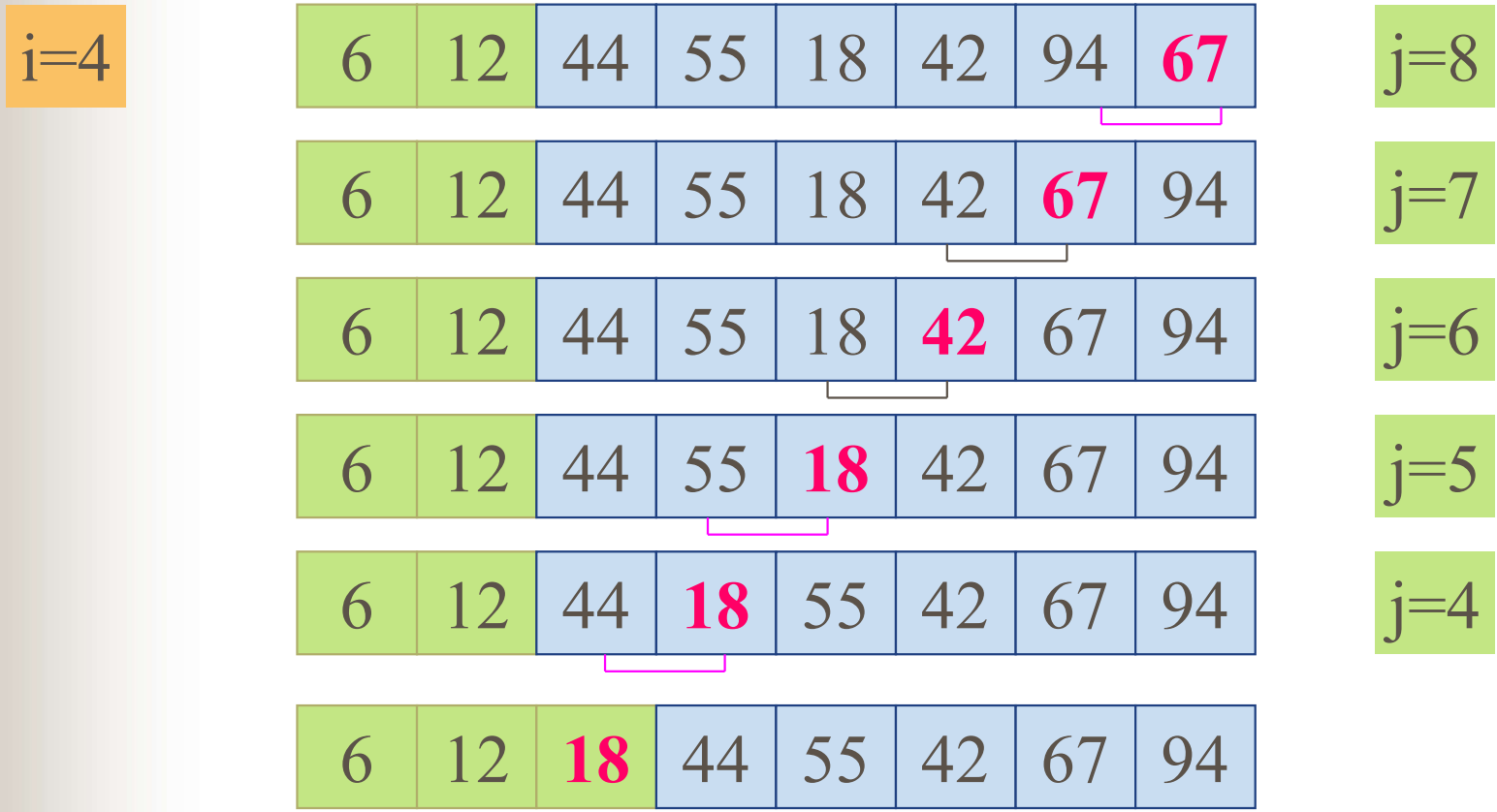
i=2

44	55	12	42	94	18	6	**67**	j=8
44	55	12	42	94	18	**6**	67	j=7
44	55	12	42	94	**6**	18	67	j=6
44	55	12	42	**6**	94	18	67	j=5
44	55	12	**6**	42	94	18	67	j=4
44	55	**6**	12	42	94	18	67	j=3
44	**6**	55	12	42	94	18	67	j=2
6	44	55	12	42	94	18	67	

Ejemplo burbuja



Ejemplo burbuja



Ejemplo burbuja

i=4	6	12	**18**	44	55	42	67	94
i=5	6	12	18	**42**	44	55	67	94
i=6	6	12	18	42	**44**	55	67	94
i=7	6	12	18	42	44	**55**	67	94
i=8	6	12	18	42	44	55	**67**	94

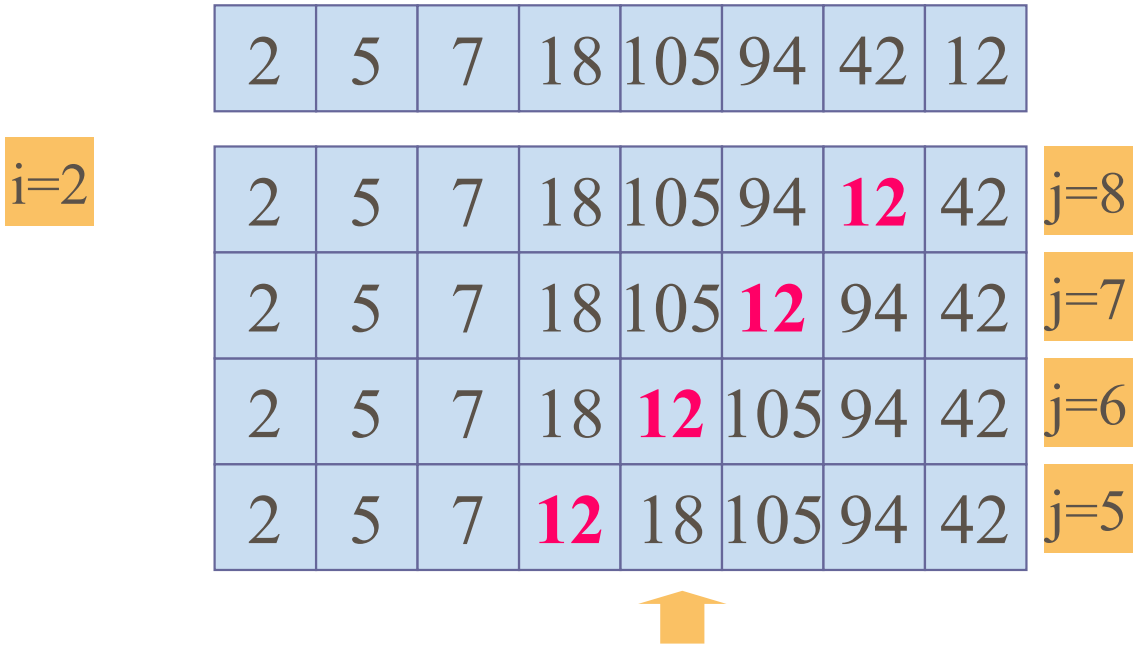
No se han producido cambios

Ordenación por intercambio

- Mejoras al algoritmo de la burbuja:
  1. Las tres últimas pasadas no tienen efecto, por estar ya estos ordenados
     - Controlar que termine la ordenación al realizar una última pasada sin intercambios
  2. Una burbuja mal situada en el extremo pesado del vector se sitúa en la posición correcta en una sola pasada. Un elemento mal colocado en el extremo ligero del vector, se hunde hacia su posición correcta a un ritmo de una posición por pasada
     - Esto sugiere la alternancia en la dirección de dos pasadas consecutivas

Ordenación por intercambio

3. Todos los pares de elementos adyacentes por debajo de la posición del último intercambio realizado están ya ordenados
   - Las pasadas siguientes pueden terminarse en esta posición, sin tener que llegar al límite inferior, *i*



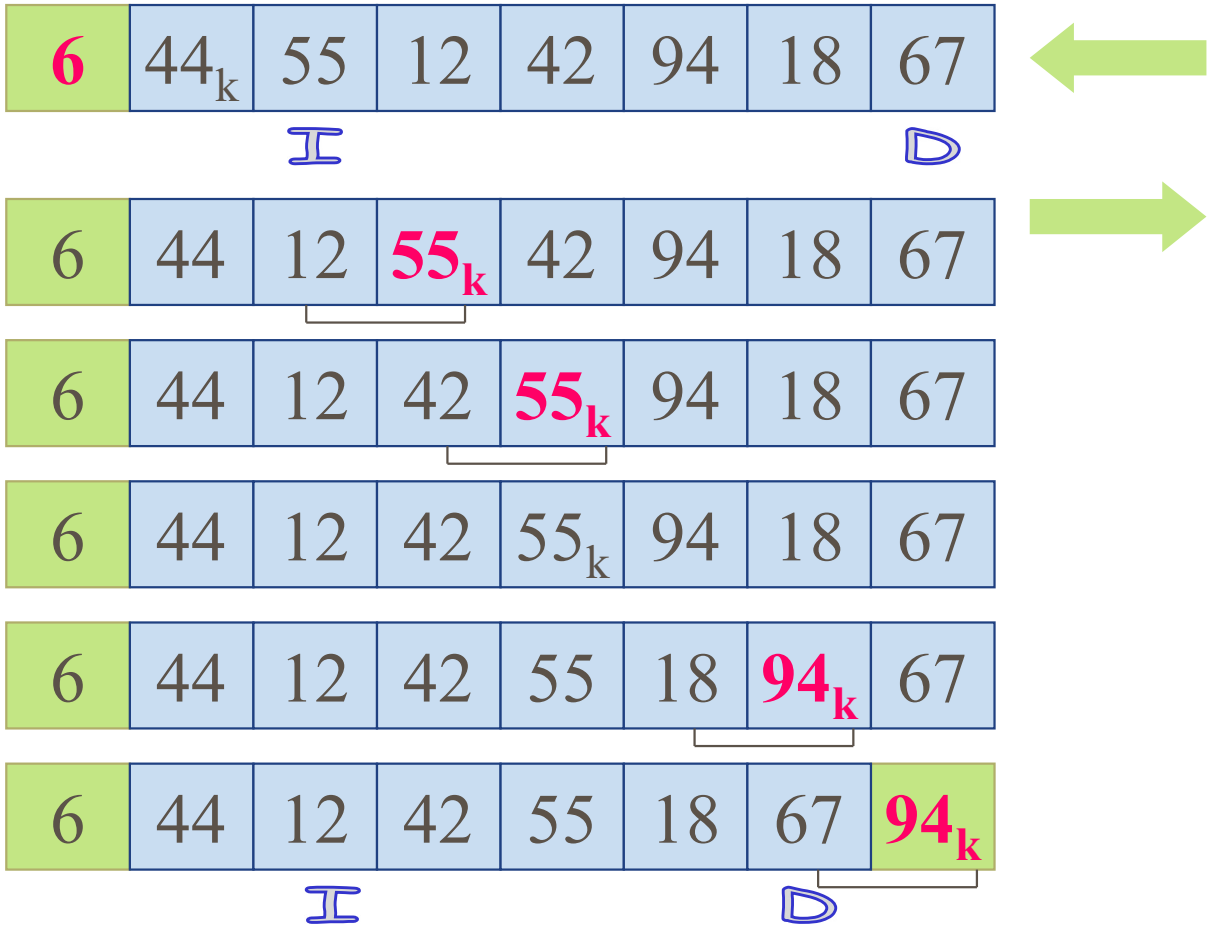
Ordenación por intercambio

```
algoritmo sacudida(n; v; )
inicio
    izquierda ← 2
    derecha ← n
    k ← n //Posición del último intercambio
    repetir
        para j de derecha a izquierda paso –1
          si v[j-1] > v[j] entonces
                auxiliar ← v[j-1] //Intercambio
                v[j-1] ← v[j]
                v[j]← auxiliar
                k ← j //Actualiza posición del último cambio
          fin-si
        fin-para
        izquierda ← k+1
        para j de izquierda a derecha
          si v[j-1] > v[j] entonces
                auxiliar ← v[j-1] //Intercambio
                v[j-1] ← v[j]
                v[j]← auxiliar
                k ← j //Actualiza posición del último cambio
          fin-si
        fin-para
        derecha ← k-1
    hasta que izquierda > derecha
fin
```

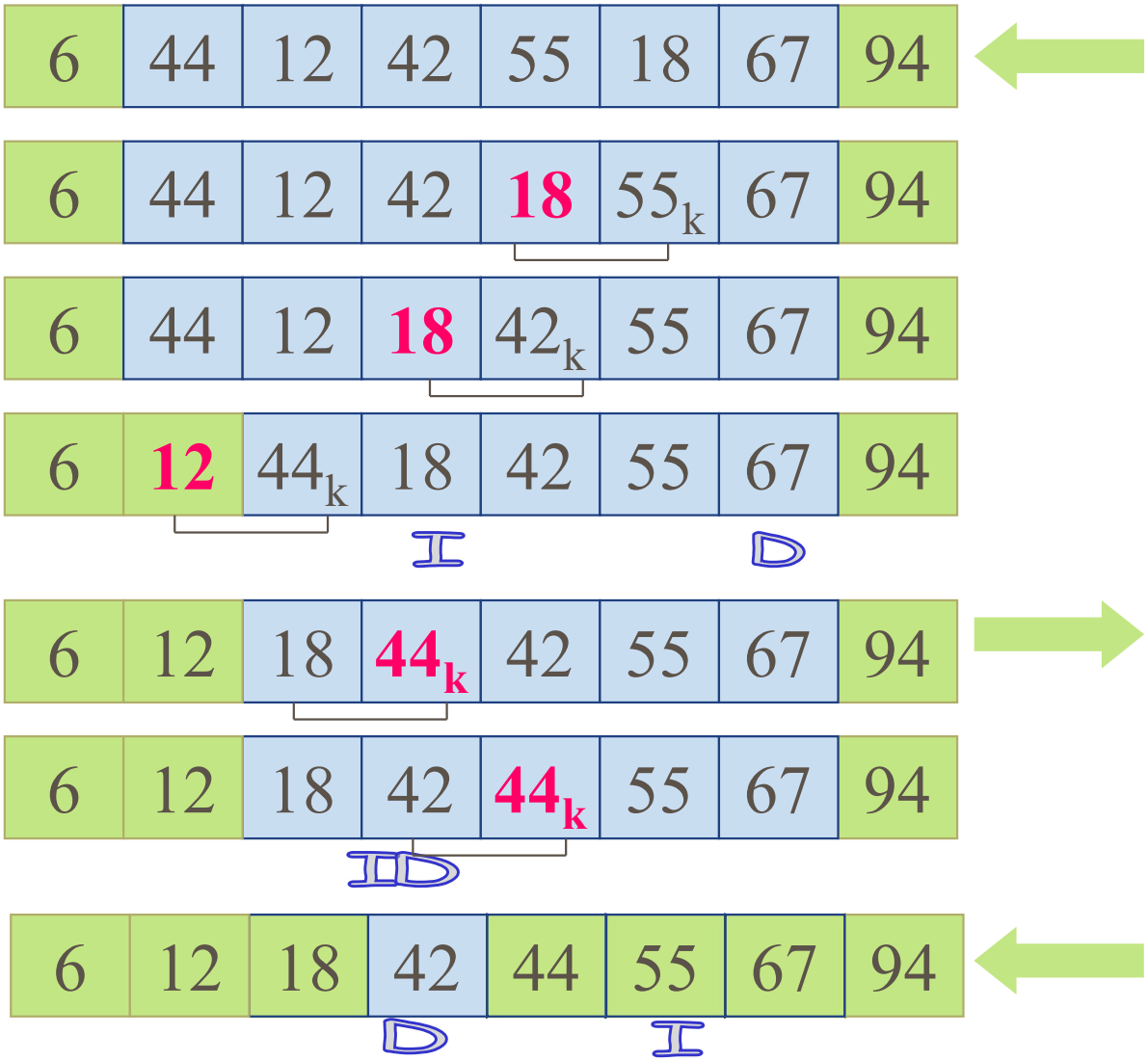
shaker sort

44	55	12	42	94	18	6	67
1	2	3	4	5	6	7	8

Ejemplo sacudida (shaker sort)



Ejemplo sacudida (shaker sort)



Métodos sofisticados

- **Ordenación por montículo (*heapsort*).** No lo vamos a ver
- **Ordenación por mezcla (*mergesort*).** No lo vamos a ver
- **Ordenación rápida (*quicksort*)**

Métodos sofisticados

Ordenación rápida (*quicksort*)

- Se toma arbitrariamente un elemento (x) del vector:
  1. Se recorre el vector de izquierda a derecha hasta encontrar un elemento v_i, que sea mayor que x
  2. Se recorre el vector de derecha a izquierda hasta encontrar un elemento v_j que sea menor que x
  3. Se intercambian v_i y v_j, y se continúa este proceso hasta que los recorridos se encuentran
- Como resultado:
  - Tenemos el vector partido en dos, una parte izquierda con elementos menores que x y la derecha con los mayores que x
  - Tras aplicar el algoritmo de partición, el elemento x ocupará su posición correcta

Métodos sofisticados

Ordenación rápida (*quicksort*)

- Caso más favorable: Se selecciona la mediana como elemento de partición en todos los casos:
  - Cada proceso de partición divide al vector en dos partes iguales, y el número de pasadas para ordenarlo es *logn*
  - El total de comparaciones resultantes el del orden *nlogn*
  - Evidentemente la posibilidad de que esto ocurra es prácticamente nula. No obstante el rendimiento medio del algoritmo sigue siendo proporcional a *nlogn*
- Caso más desfavorable: Se selecciona como elemento de partición el mayor del subvector analizado
- El principal inconveniente es su bajo rendimiento para valores pequeños de *n*

```
algoritmo quicksort (izquierda, derecha; v;)
inicio
        i ← izquierda
        j ← derecha
        mitad ← v[(izquierda + derecha) div 2]
        repetir
                mientras v[i] < mitad
                        i ← i + 1
                fin-mientras
                mientras v[j] > mitad
                        j ← j - 1
                fin-mientras

                si i <= j entonces
                        auxiliar ← v[i]
                        v[i] ← v[j]
                        v[j] ← auxiliar
                        i ← i + 1
                        j ← j - 1
                fin-si
        hasta que i > j
        si izquierda < j entonces
                quicksort (izquierda, j, v)
        fin-si
        si i < derecha entonces
                quicksort (i, derecha,  v)
        fin-si
fin
```

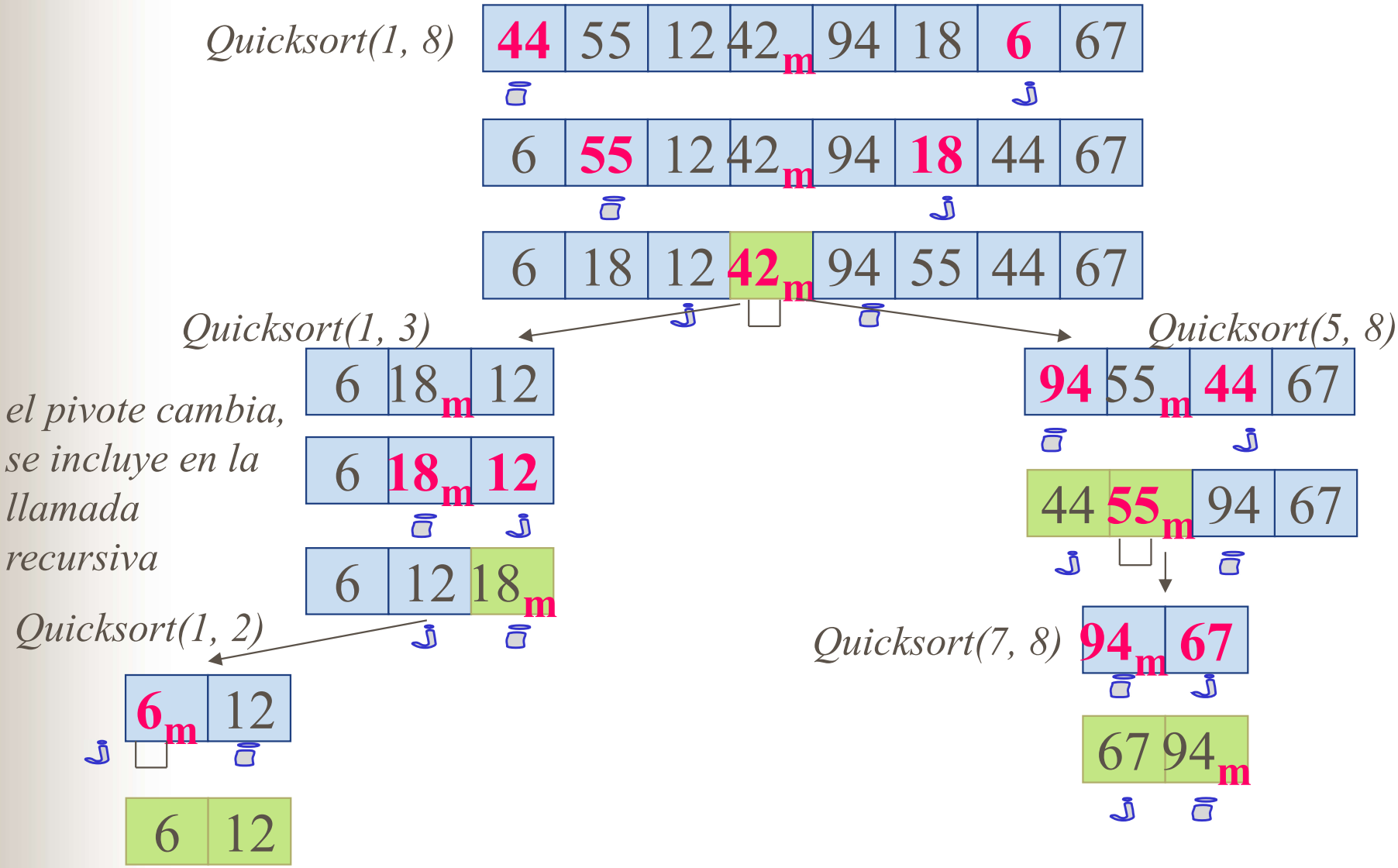
Se intercambia el pivote y por tanto i++, j++por lo que el pivote no se incluye en las llamadas recursivas

intercambio

Si hay un solo elemento, para la recursividad

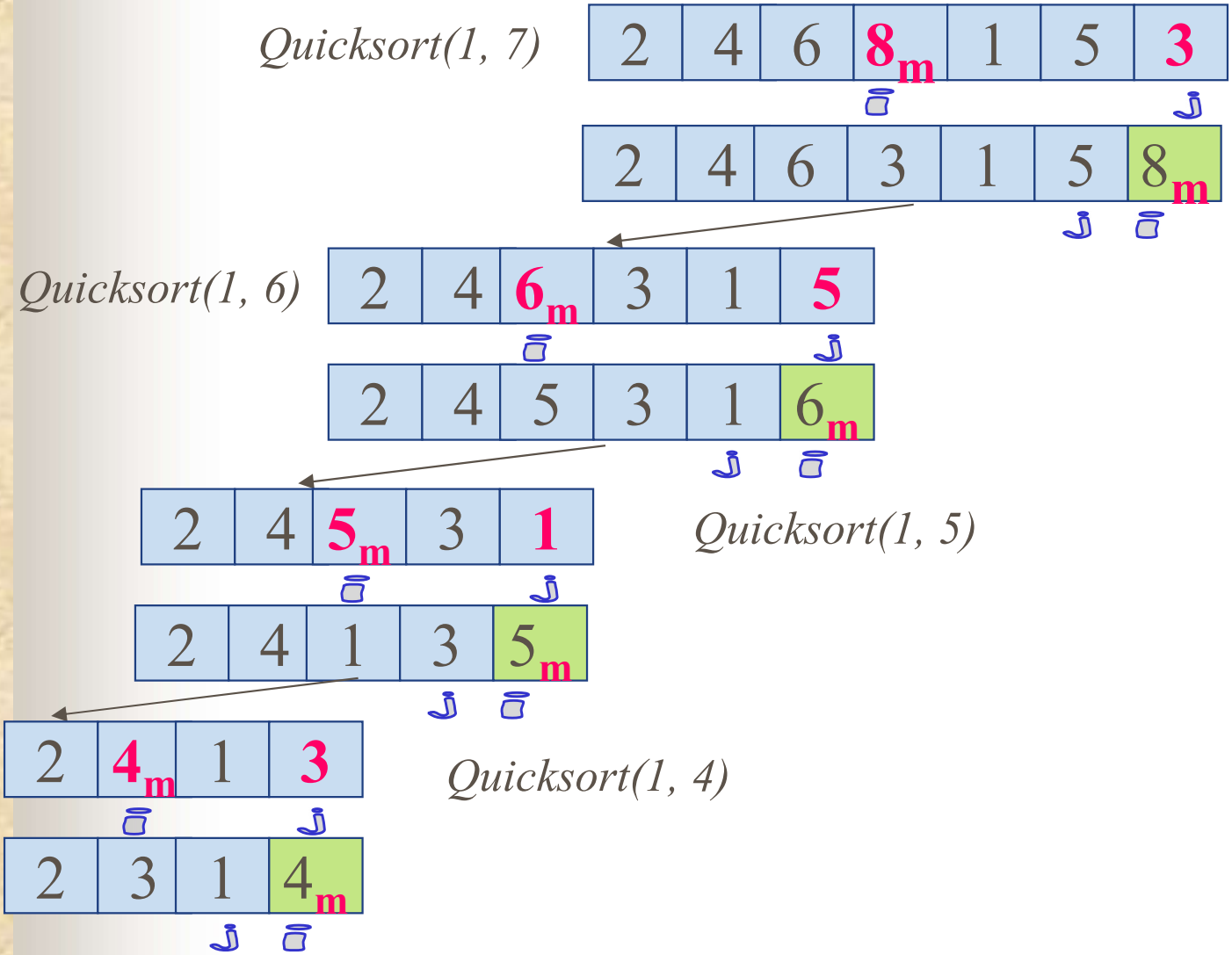
44	55	12	42	94	18	6	67
1	2	3	4	5	6	7	8

Ejemplo quicksort



2	4	6	8	1	5	3
1	2	3	4	5	6	7

Ejemplo quicksort



Método de contabilización de frecuencias

- Sólo se puede aplicar bajo condiciones muy especiales
- Si el rango de los valores del vector de partida es muy amplio, definir un vector que abarque dicho rango es inviable
- Apropiado para números enteros
- **NO** es un método *in-situ* (requiere un vector auxiliar para la ordenación)
- Su importancia radica en que su tiempo de ejecución es $O(n)$
- Su eficiencia es independiente del orden inicial de los elementos
- Este algoritmo se puede plantear en más ocasiones de lo que a priori parece

Métodos sofisticados

Método de contabilización de frecuencias

- Se basa en contabilizar frecuencias de los elementos del vector:
  - En un vector ordenado, si un elemento está en la posición k-ésima, se debe a que en el estado inicial había k-1 elementos menores que el (si suponemos que todos los elementos son distintos)
  - Contar para cada elemento del vector *v*, el número de elementos inferiores a el, después colocar cada valor en un vector $v_{ordenado}$ en función de la contabilización realizada
- Para realizar la contabilización necesaria, hay que comparar cada elemento del vector con los demás (n^2)
  - Cuando el número de posibles elementos del vector es finito, y está acotado entre unos límites razonables, se puede formar un vector que contabilice las frecuencias de cada elemento, y obtener un algoritmo de contabilización eficaz

Métodos sofisticados

```
algoritmo frecuencias(n, v; ; vordenado)
inicio
    para i de mínimo a máximo //Inicializa vector de frecuencias
      frec [i] ← 0
    fin-para
    para i de 1 a n //Construye vector de frecuencias
        frec[v[i]] ← frec[v[i]] + 1
    fin-para
    para i de mínimo+1 a máximo //Construye vector de frecuencias  acumuladas
        frec[i] ← frec[i-1]+frec[i]
    fin-para
    para i de n a 1 paso –1 //Recorrido inverso para que la ordenación sea estable
        vordenado[frec[v[i]] ← v[i]
        frec[v[i]] ← frec[v[i]] - 1
    fin-para
fin
```

6	4	5	6	4	8	6
1	2	3	4	5	6	7

Ejemplo frecuencias

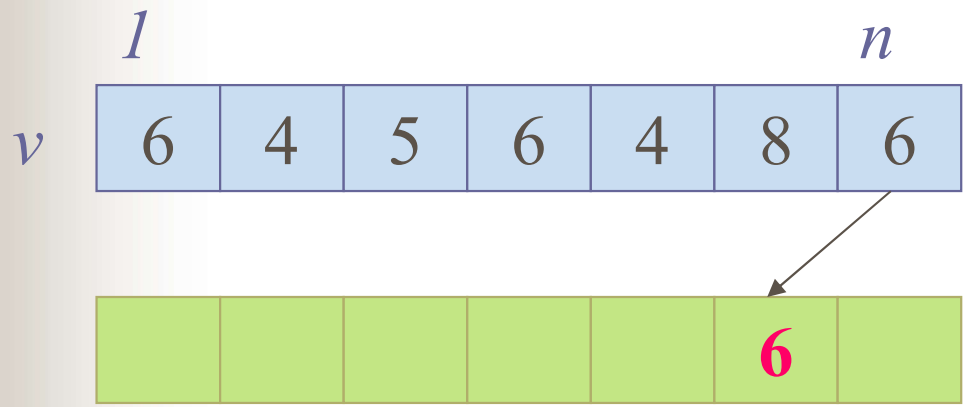
Paso 1. Construir vector de frecuencias

8	7	6	5	4
1	0	3	1	2

Paso 2. Construir vector de frecuencias acumuladas

8	7	6	5	4
7	6	6	3	2

Paso 3. Colocación de v en ordenado

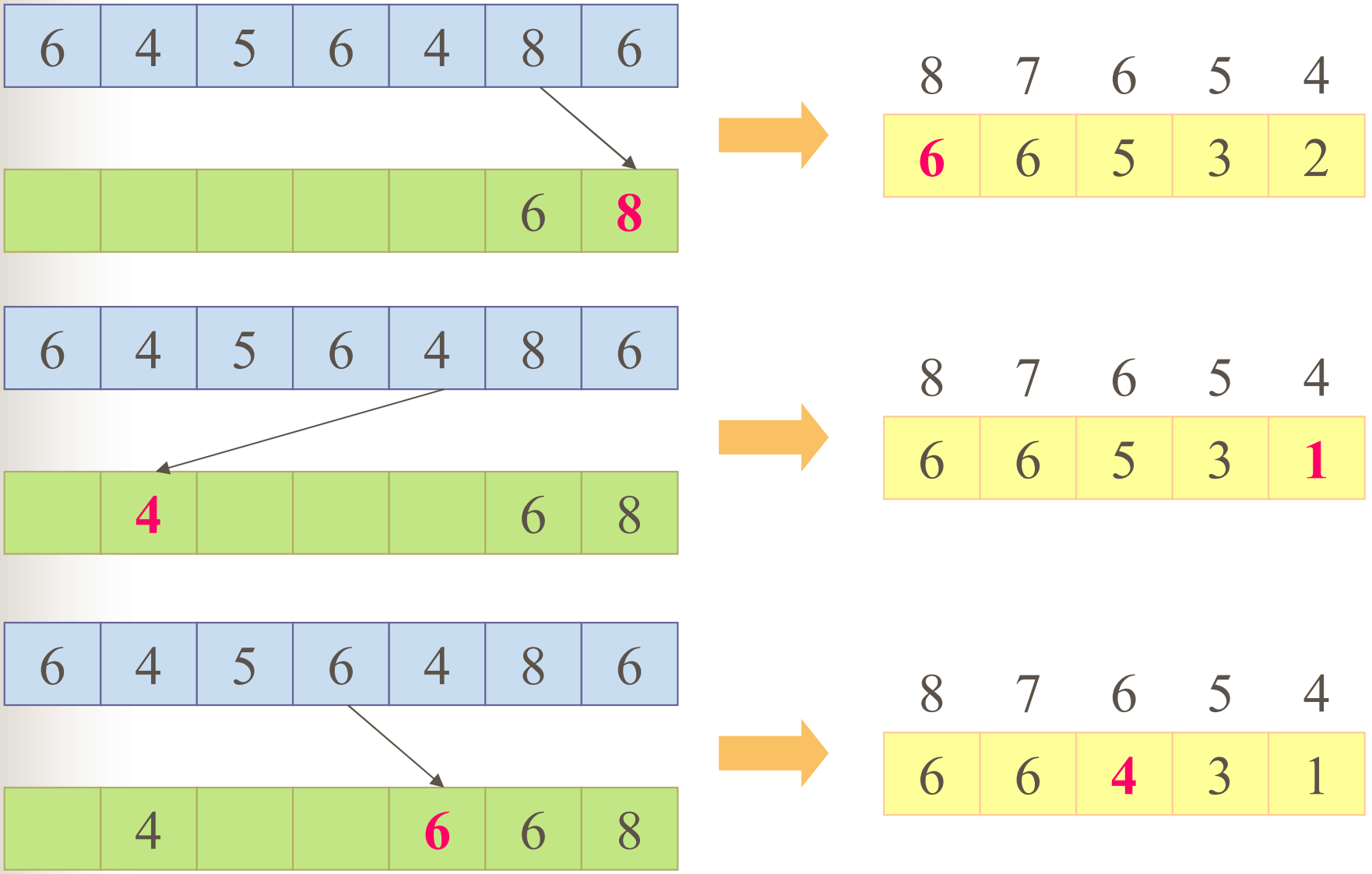


8	7	6	5	4
7	6	**5**	3	2

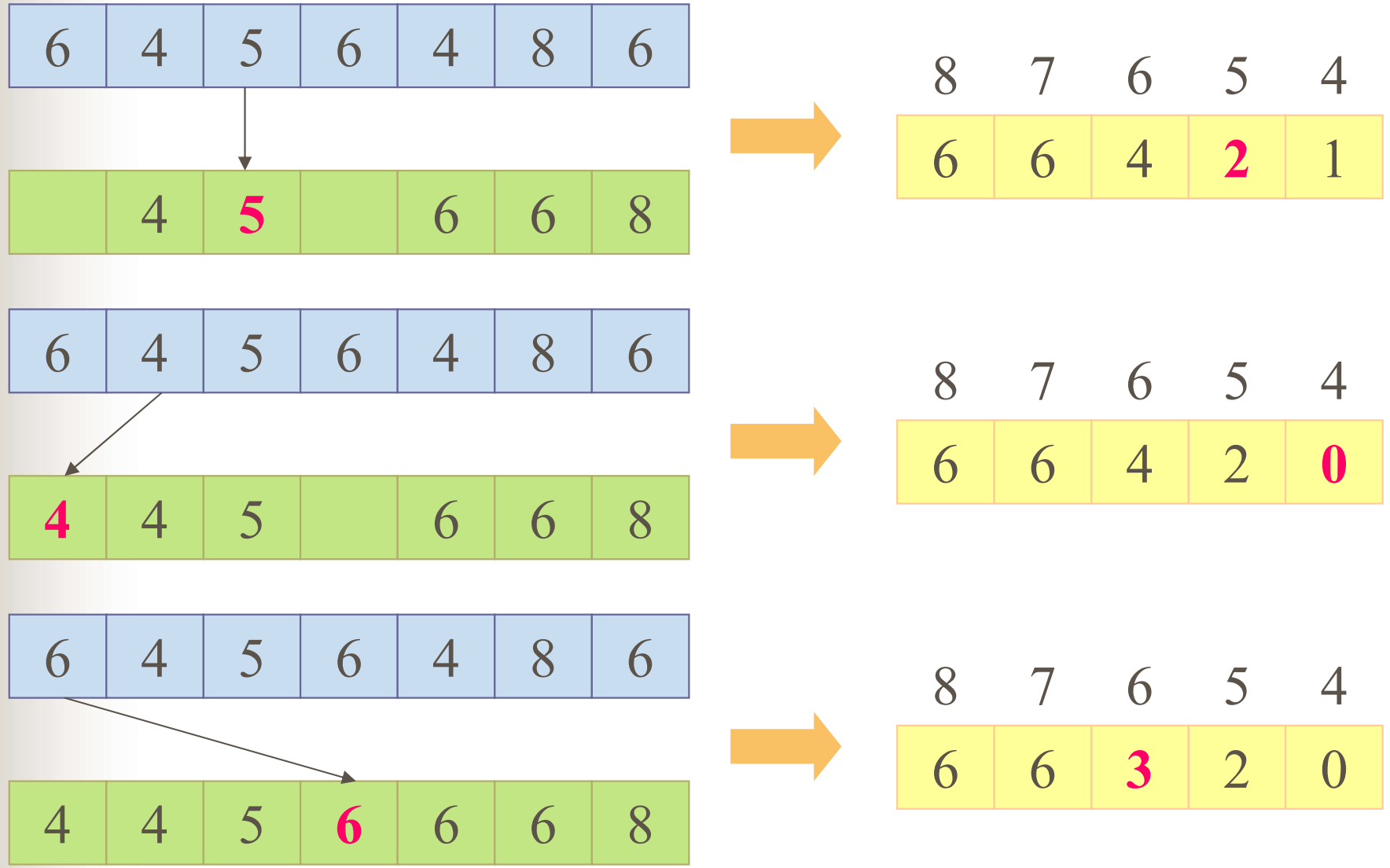
frec

max *min*

Ejemplo frecuencias



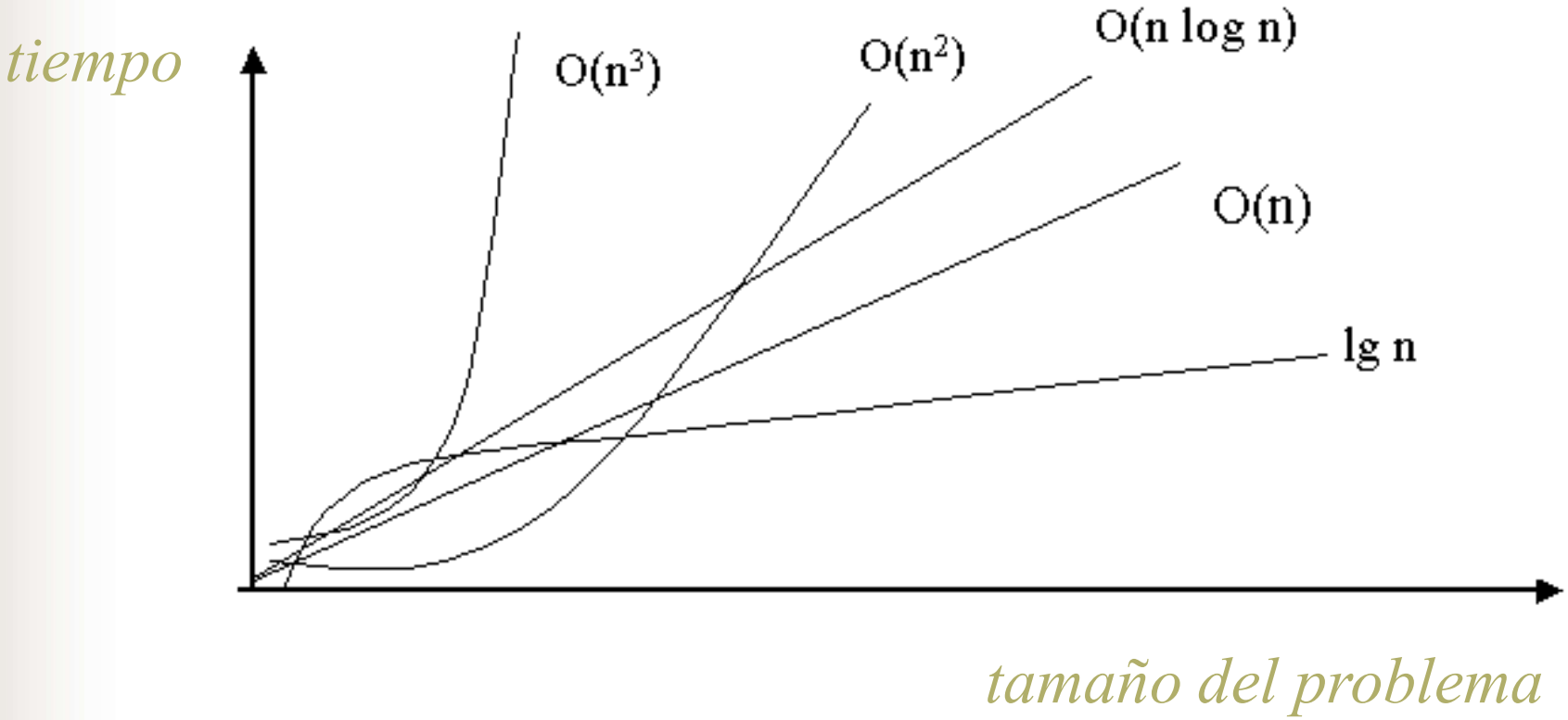
Ejemplo frecuencias



Ordenación de ficheros (externa)

- **Ordenación de ficheros**. Ordenar los registros de un fichero según algún campo. Operación muy común en aplicaciones de gestión
- Si el fichero es pequeño, se puede copiar en memoria y utilizar los algoritmos de ordenación (burbuja, inserción directa, *quicksort*, etc.)
- Si el fichero es grande los métodos de ordenación interna no resultan eficientes cuando los datos están almacenados en un fichero (los intercambios de elementos son muy costosos)
- Existen métodos de ordenación de ficheros, basados en otras técnicas, que utilizan estructuras de datos adicionales y que se escapan de nuestros objetivos:
  - **Ordenación mediante fusión**
  - **Ordenación n-vías**

Ordenes de eficiencia



Conclusiones

- El método de la burbuja es el peor de todos, y su versión mejorada, de la sacudida, es incluso peor que los de inserción y selección directa
- En general, el método de selección directa es preferible al de inserción directa e inserción binaria, aunque en los casos en que los elementos estén inicialmente ordenados o casi ordenados, estos últimos pueden ser algo más rápidos
- El método Shell es más rápido que todos los anteriores, pero menos eficaz que los de orden *nlogn*
- Los métodos sofisticados (orden *nlogn*) requieren menos operaciones que los demás, pero al ser normalmente más complejos en detalle, no se deben utilizar para valores pequeños de *n*
- De los métodos sofisticados, el *quicksort* es el más eficaz

Conclusiones

mejor →

mejor ↑

$O(n^2)$	$O(nlogn)$	$O(n)$
Inserción Shell$_{*}$ Selección directa$_{1*}$ Inserción binaria Inserción directa Burbuja sacudida Burbuja	Quicksort$_{2*}$	Contabilización de frecuencias

1. Cuando los elementos están prácticamente ordenados inserción binaria y directa pueden ser algo más rápidos
2. No se debe utilizar con pequeños valores de *n*

* Algoritmo inestable