Álgebra Lineal
Grado en Ingeniería Informática
Universidad de Córdoba
Curso 2023-2024

Relación de problemas Tema 4

Aplicaciones Lineales

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:
   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x, x + y, 3z)$;
   (b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (y, x)$;
   (c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x + y, 2x - y, x - 2y)$;
   (d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y + z, 1)$;
   (e) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z, t) = (x - y, 2z + t)$;
   (f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x - y^2, y + 2z)$;
   (g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, f(x, y, z) = (0, x + y, z, x + 1)$.
2. Para las aplicaciones del ejercicio anterior que sean lineales, se pide:
   (a) Matriz asociada a la aplicación respecto de las bases canónicas.
   (b) Calcula las dimensiones, bases y ecuaciones de $Ker(f)$ e $Im(f)$.
3. De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ se sabe que:

$$f(1,0,0) = (1,0)$$
$$f(0,1,0) = (1,1)$$
$$f(0,0,1) = (0,-1)$$

   Determinar la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ y calcular $f(1, 2, 1)$.
4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, -x + 2y + z, 2x + 2z, x + 4y + 5z)$$

   Se pide:
   (a) Hallar la matriz asociada a la aplicación si en ambos espacios consideramos las bases canónicas.
   (b) Calcular la dimensión, base y ecuaciones de $Ker(f)$.
   (c) Calcular la dimensión, base y ecuaciones de $Im(f)$.
   (d) Si $S = \langle (1, 2, 0), (2, 4, 1), (1, 0, 1) \rangle$, hallar una base y ecuaciones de $f(S)$.

5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x - z, 2x + 2y + 2z)$$

Se pide:

(a) Una base (B_1) de $Ker(f)$.
(b) Una base (B_2) de $Im(f)$.
(c) Comprobar que $B = \{B_1, B_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.
(d) La matriz de f respecto de la base B.
(e) Si $S = \langle(1, 1, 1), (2, 2, 2), (1, 0, 1)\rangle$, hallar una base y ecuaciones de $f(S)$.

6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$f(x, y, z) = (ax + y + z, x + ay + z, x + y + az)$$

Se pide:

(a) Hallar los valores del parámetro a para que f sea biyectiva.
(b) Hallar los valores del parámetro a para que la dimensión de $Ker(f)$ sea 1. Escribir las ecuaciones y una base de $Ker(f)$.
(c) Hallar los valores del parámetro a para que la dimensión de $Ker(f)$ sea 2. Escribir las ecuaciones y una base de $Ker(f)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que:

$$\begin{aligned} f(1, 1, p) &= (1, 1, 1, a) \\ f(2, 0, 3) &= (a, a, a, 0) \\ f(3, 1, 2) &= (1, 2, 3, 0) \end{aligned}$$

Se pide:

(a) Hallar los valores del parámetro p para que f esté bien definida (las imágenes de los vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$).
(b) Valores del parámetro a para que f sea inyectiva.
(c) Para $p = a = 0$, hallar la matriz asociada a la aplicación respecto a las bases canónicas.
(d) Para $p = a = 0$, hallar las ecuaciones de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$\begin{aligned} f(1, 2, 1) &= (1, 0, 1) \\ f(2, p + 2, p) &= (3, 1, -4) \\ f(3, 7, p^2 + 3) &= (5, 1, -2) \end{aligned}$$

Se pide:

(a) Hallar los valores del parámetro p para que f esté bien definida.

(b) Para $p = 0$, hallar $f^{-1}(\frac{-5}{2}, \frac{-3}{2}, 8)$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,b,1) \\ f(0,1,0) &= (b,1,1) \\ f(0,0,1) &= (1,b,3) \end{aligned}$$

Se pide:

(a) Hallar el valor del parámetro b para que la dimensión de $Ker(f)$ sea máxima. Hallar una base y ecuaciones de $Ker(f)$ para dicho valor del parámetro b.

(b) Hallar el valor del parámetro b para los cuales f es biyectiva.

(c) Para $b = 0$, calcular $f^{-1}(2,1,2)$.

10. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz respecto a las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) Hallar la expresión analítica de f.

(b) Clasificar f según los valores del parámetro a.

(c) Para $a = 0$, calcular la dimensión, una base y ecuaciones de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

11. (Examen Junio 2022) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz asociada a la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) Hallar el valor de k para el cual f no es biyectiva.

(b) Para el valor de k obtenido, hallar la dimensión y una base de los subespacios núcleo e imagen.

12. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que:

$$f(x,y,z) = (x-y, y+3x-z)$$

Calcular su matriz asociada respecto a las bases:

$$B = \{(1,1,0),(0,-1,1),(3,1,1)\},$$
$$B' = \{(1,2),(0,-1)\}.$$

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que:

$$f(1,-1,0) = (1,2)$$
$$f(1,1,0) = (3,0)$$
$$f(1,1,1) = (-1,3)$$

Calcular su matriz asociada respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que:

$$f(1,2,1) = (1,0,1,0)$$
$$f(2,1,2) = (0,1,0,1)$$
$$f(1,0,0) = (0,0,0,0)$$

Determinar la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas y determinar $f(3,1,1)$.

15. (Examen Septiembre 2022) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$f(x,y,z) = (2z - x + y, x + 3y + 2z, z + y - x)$$

Hallar la representación matricial de $f(M(f,B,B'))$ en las bases:

$$B = \{(1,1,1),(1,2,3),(-1,3,5)\},$$
$$B' = \{(1,2,-1),(3,-1,2),(-1,3,5)\}.$$

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = (2x, x+y, 3z)$;
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (y,x)$;
(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f(x,y) = (x+y, 2x-y, x-2y)$;
(d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = (x+y+z, 1)$;
(e) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z,t) = (x-y, 2z+t)$;
(f) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = (x-y^2, y+2z)$;
(g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, f(x,y,z) = (0, x+y, z, x+1)$.

a) $\vec{u}(x_1, y_1, z_1),\ \vec{v}(x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$

$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

$f(\vec{u}+\vec{v}) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2) = (2(x_1+x_2),\ x_1+x_2+y_1+y_2,\ 3(z_1+z_2))$

$f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (2x_1,\ x_1+y_1,\ 3z_1) + (2x_2,\ x_2+y_2,\ 3z_2)$

$= (2(x_1+x_2),\ x_1+x_2+y_1+y_2,\ 3(z_1+z_2))$

Se cumple

$f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$

$f(\alpha\vec{u}) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = (2x_1\alpha,\ (x_1+y_1)\alpha,\ 3z_1\alpha)$

$\alpha f(\vec{u}) = \alpha(x_1, y_1, z_1) = \alpha(2x_1,\ x_1+y_1,\ 3z_1) = (2x_1\alpha,\ (x_1+y_1)\alpha,\ 3z_1\alpha)$

Se cumple

Es AL

b) $\vec{u}(x_1, y_1),\ \vec{v}(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

$f(\vec{u}+\vec{v}) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2) = (y_1+y_2,\ x_1+x_2)$

$f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (y_1+y_2,\ x_1+x_2)$

Se cumple

$f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$

$f(\alpha\vec{u}) = (\alpha x_1, \alpha y_1) = (y_1\alpha,\ x_1\alpha)$

$\alpha f(\vec{u}) = \alpha(x_1, y_1) = \alpha(y_1, x_1) = (y_1\alpha,\ x_1\alpha)$

Se cumple

Es AL

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : f(x,y) = (x+y, 2x-y, x-2y)$

$\vec{u}(x_1, y_1) \quad \vec{v}(x_2, y_2)$

$f(u+v) = (x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2+y_1+y_2, 2x_1+2x_2-y_1-y_2, x_1+x_2-2y_1-2y_2)$
$f(u)+f(v) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1+y_1, 2x_1-y_1, x_1-2y_1) + (x_2+y_2, 2x_2-y_2, x_2-2y_2)$
$= (x_1+x_2+y_1+y_2, 2x_1+2x_2-y_1-y_2, x_1+x_2-2y_1-2y_2)$
Se cumple

$f(\alpha u) = (\alpha x_1, \alpha y_1) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha 2x_1 - \alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha 2y_1)$
$\alpha f(u) = \alpha(x_1, y_1) = \alpha(x_1+y_1, 2x_1-y_1, x_1-2y_1)$
$= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha 2x_1 - \alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha 2y_1)$
Se cumple
AL

d) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : f(x,y,z) = (x+y+z, 1)$
$f(u+v) = (x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2, 1)$
$f(u)+f(v) = (x_1+y_1+z_1, 1) + (x_2, y_2, z_2, 1) = (x_1+x_2+y_1+y_2+z_1+z_2, 2)$
No se cumple

e) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z,t) = (x-y, 2z+t)$
$f(u+v) = (x_1+x_2-y_1-y_2, 2z_1+2z_2+t_1+t_2)$
$f(u)+f(v) = (x_1-y_1, 2z_1+t_1) + (x_2-y_2, 2z_2+t_2) = (x_1+x_2-y_1-y_2, 2z_1+2z_2+t_1+t_2)$
Se cumple

$f(\alpha u) = (\alpha x_1 - \alpha y_1, \alpha 2z_1 + \alpha t_1)$
$\alpha f(u) = \alpha(x_1-y_1, 2z_1+t_1) = (\alpha x_1 - \alpha y_1, \alpha 2z_1 + \alpha t_1)$
Se cumple
AL

f) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z) = (x-y^2, y+2z)$
$f(u+v) = (x_1+x_2-(y_1+y_2)^2, y_1+y_2+2z_1+2z_2) = (x_1+x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2, y_1+y_2+2z_1+2z_2)$
$f(u)+f(v) = (x_1-y_1^2, y_1+2z_1) + (x_2-y_2^2, y_2+2z_2) = (x_1+x_2-y_1^2-y_2^2, y_1+y_2+2z_1+2z_2)$
No se cumple

g) $f(x,y,z) = (0, x+y, z, x+1)$
$f(u+v) = (0, x_1+x_2+y_1+y_2, z_1+z_2, x_1+x_2+1)$
$f(u)+f(v) = (0, x_1+y_1, z_1, x_1+1) + (0, x_2+y_2, z_2, x_2+1)$
$= (0, x_1+x_2+y_1+y_2, z_1+z_2, x_1+x_2+2)$
No se cumple

2. Para las aplicaciones del ejercicio anterior que sean lineales, se pide:

   (a) Matriz asociada a la aplicación respecto de las bases canónicas.

   (b) Calcula las dimensiones, bases y ecuaciones de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

a) $f\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (2x,\ x+y,\ 3z)$

a) $C_3 = (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0,0) = (2,1,0) \\ f(0,1,0) = (0,1,0) \\ f(0,0,1) = (0,0,3) \end{array}\right. \longrightarrow M_{C3C3'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $Ker(f) = f(x,y,z) = \vec{0}$

$M_{C3C3'} = \vec{0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 3 & z \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x = 0 \\ x+y = 0 \\ 3z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Ec imp}: x = y = z = 0 \\ B(Ker(f)) = \{(0,0,0)\} \\ Dim(Ker(f)) = 0 \end{array}$$

$$\text{Ec param} \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$Dim(f) = dim(Im(f)) + dim(Ker(f))\ ;\ 3 = dim(im) + 0 = dim(im)$

$im(f)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{F_1 = F_1 - F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \gamma \end{array}\right\} \text{no ec. imp}$$

$B(im(f)) = \{(2,0,0), (0,1,0), (0,0,3)\}$

$Dim(im(f)) = 3$

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (y,x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,0) = (0,1) \\ f(0,1) = (1,0) \end{array}\right. \longrightarrow M_{C2C2'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x = y = 0 \\ Dim(Ker(f)) = 0 \\ B(Ker(f)) = \{(0,0,0)\} \end{cases}$$

$Dim(Im(f)) = 2 - 0 = 0$

$B(Im(f)) = \{(1,0), (0,1)\}$

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : f(x,y) = (x+y, 2x-y, x-2y)$

$f(1,0) = (1,2,1)$
$f(0,1) = (1,-1,-2)$ $\quad M_{C_2C_3'} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$Ker(f) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{F_2 = \frac{F_2+F_1}{3}}{\overset{F_3 = F_1 - F_2 - F_3}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{F_1 = F_1 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x = y = 0$
$Dim(Ker(f)) = 0$
$B(Ker(f)) = \{(0,0)\}$

$Dim(im(f)) = 2$

$Im(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{F_2 = \frac{F_1 - F_2}{3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_1 = F_1 - F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$B(im(f)) = \{(1,1,0), (0,1,1)\}$

e) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, f(x,y,z,t) = (x-y, 2z+t)$
$f(1,0,0,0) = (1,0)$
$f(0,1,0,0) = (-1,0)$ $\quad M_{C_4C_2'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
$f(0,0,1,0) = (0,2)$
$f(0,0,0,1) = (0,1)$

$Ker(f) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$
$Dim(Ker(f)) = 2$
$B(Ker(f)) = \{(1,-1,0,0), (0,0,2,1)\}$

$im(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 = F_3 - 2F_4}{\overset{F_2 = F_1 + F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$Dim(Im(f)) = 2$
$B(im(f)) = \{(1,0), (0,1)\}$
$x + y = 0$

3. De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ se sabe que:

$$f(1,0,0) = (1,0)$$
$$f(0,1,0) = (1,1)$$
$$f(0,0,1) = (0,-1)$$

$f(1,2,1) = f(\vec{v})$

$\vec{v} = \alpha \vec{u}_1 + \beta \vec{u}_2 + \gamma \vec{u}_3$

$f(\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}_1) + \beta f(\vec{u}_2) + \gamma f(\vec{u}_3)$

$M f_{C_3 C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que:

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, -x + 2y + z, 2x + 2z, x + 4y + 5z)$$

Se pide:

(a) Hallar la matriz asociada a la aplicación si en ambos espacios consideramos las bases canónicas.

(b) Calcular la dimensión, base y ecuaciones de $Ker(f)$.

(c) Calcular la dimensión, base y ecuaciones de $Im(f)$.

(d) Si $S = \langle(1,2,0),(2,4,1),(1,0,1)\rangle$, hallar una base y ecuaciones de $f(S)$.

a) $f(1,0,0) = (1,-1,2,1)$
$f(0,1,0) = (2,2,0,4)$
$f(0,0,1) = (3,1,2,5)$

$$M_{f C_3 C_4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

b) $Ker(f) \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 / f(\vec{v}) = 0\}$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 2x + 2z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} f_2 = f_2 + f_1 \\ f_3 = f_3 - 2f_1 \\ \sim \\ f_4 = f_4 - f_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} f_2 = f_2 - 2f_4 \\ f_3 = f_3 + f_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{array}\right\} \text{Ec. impl} \qquad \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$\lambda = 1$

$B_{Ker(f)} = \{(-1,-1,1)\}$

$\dim(Ker(f)) = 1$

c) $Im(f) = \{f(\vec{v}) \subseteq \mathbb{R}^4 / \vec{v} \in \mathbb{R}^4\}$

Sg de $im(f)$ $\langle(1,-1,2,1),(2,2,0,4),(3,1,2,5)\rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dim Im(g) = 2$$

Base $Im(f) = \{(1,-1,2,1),(0,4,-4,2)\}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha + 2\beta \\ y = -\alpha + 2\beta \\ z = 2\alpha \\ t = \alpha + 4\beta \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ -1 & 2 & y \\ 2 & 0 & z \\ 1 & 4 & t \end{array}\right) \underset{F_4 = F_4 - F_1}{\overset{F_2 = F_2 + F_1,\ F_3 = F_3 - 2F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 4 & y + x \\ 0 & -4 & z - 2x \\ 0 & 2 & t - x \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 + F_2}{\overset{F_2 = F_2 - 2F_4}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & y - x - 2t + 2x \\ 0 & 0 & z - 2x + y - x \\ 0 & 2 & t - x \end{array}\right)$$

$x + y - 2t = 0$
$-3x + z + y = 0$

d) $S < (1,2,0), (2,4,1), (1,0,1) >$

Base: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 = F_3 - F_1}{\overset{F_2 = F_2 - 2F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ LI

$B_S = \{(1,2,0), (2,4,1), (1,0,1)\}$

$f(x,y,z) = (x + 2y + 3z,\ -x + 2y + z,\ 2x + 2z,\ x + 4y + 5z)$
$f(1,2,0) = (5, 3, 2, 9)$
$f(2,4,1) = (13, 7, 6, 23)$
$f(1,0,1) = (4, 0, 4, 6)$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 9 \\ 13 & 7 & 6 & 23 \\ 4 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -4/5 & 4/5 & -2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Bf(S) = < (5,3,2,9), (13,7,6,23) >$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ 6 \\ 23 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = 5\alpha + 13\beta \\ y = 3\alpha + 7\beta \\ z = 2\alpha + 6\beta \\ t = 9\alpha + 23\beta \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 13 & x \\ 3 & 7 & y \\ 2 & 6 & z \\ 9 & 23 & t \end{array}\right) \overset{F_1 = F_1 - F_2 - F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x - y - z \\ 3 & 7 & y \\ 2 & 6 & z \\ 9 & 23 & t \end{array}\right) \underset{F_2 = 3F_3 - 2F_2}{\overset{F_4 = F_4 - 3F_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x - y - z \\ 0 & 4 & 3z - 2y \\ 2 & 6 & z \\ 0 & 2 & t - 3y \end{array}\right)$$

$$\overset{F_2 = F_2 - 2F_4}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x - y - z \\ 0 & 0 & 4y + 3z - 2t \\ 2 & 6 & z \\ 0 & 2 & t - 3y \end{array}\right)$$

$x - y - z = 0$
$4y + 3z - 2t = 0$

5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$f(x,y,z) = (x + 2y + 3z, x - z, 2x + 2y + 2z)$$

Se pide:

(a) Una base (B_1) de $Ker(f)$.

(b) Una base (B_2) de $Im(f)$.

(c) Comprobar que $B = \{B_1, B_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(d) La matriz de f respecto de la base B.

(e) Si $S = \langle(1,1,1),(2,2,2),(1,0,1)\rangle$, hallar una base y ecuaciones de $f(S)$.

$f(1,0,0) = (1,1,2)$
$f(0,1,0) = (2,0,2)$
$f(0,0,1) = (3,-1,2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $Ker(f) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 = F_1 - F_2}{\overset{F_3 = F_3 - F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ $2y + 4\mu = 0;\ y = -2\mu$; $x - \mu = 0;\ x = \mu$; $z = \mu$

$B(Ker(f)) = \{(1,-2,1)\}$

b) $im(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_1 = F_1 - F_2}{\overset{F_3 = F_3 - F_1 - F_2}{\sim}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{F_1 = 2F_1 + F_2 + F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$B(im(f)) = \{(2,0,2),(0,-2,-2)\}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_2 = \frac{F_2}{2}}{\overset{F_1 = F_1 - \frac{F_2}{2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\dim f = 3 = 3$

Es base de $\mathbb{R}^3$

d) $f(1,-2,1) = (1-4+3, 1-1, 2-4+2) = (0,0,0)$
$f(2,0,2) = (2+6, 2-2, 4+\ ) = (8,0,8)$
$f(0,-2,-2) = (-4-6, 2, -4-4) = (-10,2,-8)$

$$\longrightarrow M_f \begin{pmatrix} 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

e) $f(1,1,1) = (1+2+3, 1-1, 2+2+2) = (6,0,6)$
$f(2,2,2) = (2+4+6, 2-2, 4+4+4) = (12,0,12)$
$f(1,0,1) = (1+3, 1-1, 2+2) = (4,0,4)$

$$\longrightarrow M_f \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 12 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$B = \{(1,0,1)\}$
$x = z = \mu$

6. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$f(x, y, z) = (ax + y + z, x + ay + z, x + y + az)$$

Se pide:

(a) Hallar los valores del parámetro a para que f sea biyectiva.

(b) Hallar los valores del parámetro a para que la dimensión de $Ker(f)$ sea 1. Escribir las ecuaciones y una base de $Ker(f)$.

(c) Hallar los valores del parámetro a para que la dimensión de $Ker(f)$ sea 2. Escribir las ecuaciones y una base de $Ker(f)$.

$f(1,0,0) = (a,1,1)$
$f(0,1,0) = (1,a,1)$
$f(0,0,1) = (1,1,a)$

$$M_{f C_3 C_3} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

Bi $\begin{cases} \text{Inyectiva: } \dim(Ker) = 0 \\ \text{Sobreyectiva: } \dim(Im) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3 = Rg(Mf) \end{cases}$

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(Ker) + \dim(Im)$

a) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & \underbrace{2-a-a^2}_{(a+2)(a-1)} \end{pmatrix}$

si $a = -2 \to Rg(M) = 2$
si $a = 1 \to Rg(M) = 1$
si $a \neq 1 \neq -2 \to Rg(M) = 3$

$\left.\begin{array}{l} \dim(Im) = 3 \\ \dim(Ker) = 0 \end{array}\right\}$ $Rg(Mf) = 3$
$a \neq 1, a \neq -2$

b) $\left.\begin{array}{l} Ker(f) = 1 \\ \dim(Im) = 2 = Rg(Mf) \end{array}\right\}$

Probamos $a = -2$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & (a+2)(a-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow rg = 2 = Dim(Im)$$

Si $a = -2$, $\dim(Ker) = 1$

c) $\dim(Ker) = 2$
$\dim(Im) = 1 = Rg(Mf)$

Probamos $a = 1$;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & (a+2)(a-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow rg = 1 = Dim(Im)$$

Si $a = 1$, $\dim(Ker) = 2$

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que:

$$f(1,1,p) = (1,1,1,a)$$
$$f(2,0,3) = (a,a,a,0)$$
$$f(3,1,2) = (1,2,3,0)$$

Se pide:

(a) Hallar los valores del parámetro p para que f esté bien definida (las imágenes de los vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$).

(b) Valores del parámetro a para que f sea inyectiva.

(c) Para $p = a = 0$, hallar la matriz asociada a la aplicación respecto a las bases canónicas.

(d) Para $p = a = 0$, hallar las ecuaciones de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & p \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$Rg = 3 \to p \neq -1$

b) a / f inyectiva

$\dim(Ker) = 0$

$\dim(Im) = 3 - 0 = 3 = Rg(Mf)$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a & 3 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_3 = F_3 - F_2 \\ F_4 = F_4 / a}}{\overset{F_2 = F_2 - F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_1 = F_1 - F_2 - F_4}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a \neq 0$$

c)

$$\begin{tikzcd} I = B \arrow[r, "M_{BB'}"] & B' = I \arrow[d, "P_{B'\bar{B}'}"] \\ \bar{B} \arrow[u, "P_{\bar{B}B}"] \arrow[r] & \bar{B}' \end{tikzcd}$$

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$B' = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{\bar{B}B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_{\bar{B}B} = (P_{B\bar{B}})^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(P)^t}{|P|} = \frac{\mathrm{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -3/2 & 5/2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3/2 & -3/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\bar{B}\bar{B}'} = P_{B'\bar{B}'} \, M_{BB'} \, P_{\bar{B}B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/2 & 5/2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3/2 & -3/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/2 & 5/2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3/2 & -3/2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2 = F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1 = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x = z = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$$

$B(\mathrm{Ker}(f)) = \{(0,1,0)\}$

$\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(f)) = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_3 = F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$B(\mathrm{im}(f)) = \{(1,1,1,0), (1,2,3,0)\}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 3 & z \\ 0 & 0 & t \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - F_2}{\overset{F_2 = F_2 - F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & y - x \\ 0 & 1 & z - y \\ 0 & 0 & t \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2 = F_2 - F_3} \rightarrow y - x + y - z = 2y - x - y = 0$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ 2y - x - t = 0 \end{cases}$$

$\mathrm{Dim}(\mathrm{im}(f)) = 2$

8. Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$f(1,2,1) = (1,0,1)$$
$$f(2,p+2,p) = (3,1,-4)$$
$$f(3,7,p^2+3) = (5,1,-2)$$

Se pide:

(a) Hallar los valores del parámetro p para que f esté bien definida.

(b) Para $p=0$, hallar $f^{-1}(\frac{-5}{2}, \frac{-3}{2}, 8)$.

$$P_{B\bar{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & p+2 & 7 \\ 1 & p & p^2+3 \end{pmatrix}$$

$$P_{\bar{B}B} = (P_{B\bar{B}})^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(P_{B\bar{B}})^t}{|P|} = \frac{\mathrm{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & p+2 & p \\ 3 & 7 & p^2+3 \end{pmatrix}}{|P|}$$

$$= \begin{pmatrix} (p+2)(p^2+3)-7p & 3p-2(p^2+3) & 14-3(p+2) \\ 2(p^2+3)-7 & p^2+3-3 & 7-6 \\ p+2-2p & p-2 & p+2-4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det} = (p+2)(p^2+3)+6p+14-3(p+2)-7p-4(p^2+3)$$
$$= p^3+3p+2p^2+6+6p+14-3p-6-7p-4p^2-12$$
$$= p^3-2p^2-p+2$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & & 2 & & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Para $p \neq 1 \neq -1 \neq 2$ esta definida

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6+14-6-12 = 2$

$$(P_{B\bar{B}})^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(P_{B\bar{B}})^t}{|P|} = \frac{\mathrm{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 4 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,b,1) \\ f(0,1,0) &= (b,1,1) \\ f(0,0,1) &= (1,b,3) \end{aligned}$$

Se pide:

(a) Hallar el valor del parámetro b para que la dimensión de $Ker(f)$ sea máxima. Hallar una base y ecuaciones de $Ker(f)$ para dicho valor del parámetro b.

(b) Hallar el valor del parámetro b para los cuales f es biyectiva.

(c) Para $b = 0$, calcular $f^{-1}(2,1,2)$.

a) $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & b & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & 3 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = 3 - b - 3b^2 + b + b^2 - 1 = 2 - 2b^2 = 0$

$b = \pm\sqrt{\frac{2}{2}}$

b) Para $b \neq \pm\sqrt{\frac{2}{2}}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$|A| = 3 - 1 = 2$

$A^{-1} = \dfrac{Adj(A)^t}{2} = \dfrac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$f(2,1,2)^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1+1-1 \\ -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

10. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz respecto a las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) Hallar la expresión analítica de f.

(b) Clasificar f según los valores del parámetro a.

(c) Para $a = 0$, calcular la dimensión, una base y ecuaciones de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

a)

$$f = Ax = \begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+a)x_1 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 + (1+a)x_4 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_1) = ((1+a)x_1 + x_3 + x_4,\ x_1 + x_2 + (1+a)x_2 + x_4,\ x_1 + x_3 + (1+a)x_4)$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1+a & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1+a \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = (1+a)^3 + 1 + 1 - 3a - 3$$
$$= a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 3a - 1 = a^3 + 3a^2$$

$a \neq 0$ rango 3

$a = 0$ rango 1

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_4 = F_4 - F_1}{\overset{F_3 = F_3 - F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$B(im(f)) = \{(1,1,1)\}$

$Dim(im(f)) = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - F_1}{\overset{F_2 = F_2 - F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x + z + t = 0$

$x = -z - t$

$$\begin{cases} x = -\beta - \mu \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ t = \mu \end{cases}$$

$Dim(Im(f)) = 3$

$B(Ker(f)) = \{(-1,0,1,0), (0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$

11. (Examen Junio 2022) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz asociada a la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & k+1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) Hallar el valor de k para el cual f no es biyectiva.

(b) Para el valor de k obtenido, hallar la dimensión y una base de los subespacios núcleo e imagen.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & k+1 \end{vmatrix} = 3+3-k+1-k-1 = 6-2k = 0 \ ; \ k=3$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 = F_1 - 2F_2}{\overset{F_3 = F_3 - F_2 - F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} x+z=0 \\ y+z=0 \end{matrix} \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$$

$B(\text{Ker}) = \{(1,1,-1)\}$

$\text{Dim}(\text{Ker}) = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 = F_1 - 2F_2}{\overset{F_3 = F_3 - F_2 - F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{Dim}(\text{Im}) = 2$

$B(\text{Im}) = \{(0,1,1),(1,0,1)\}$

12. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que:

$$f(x,y,z) = (x-y, y+3x-z)$$

Calcular su matriz asociada respecto a las bases:

$$B = \{(1,1,0),(0,-1,1),(3,1,1)\},$$
$$B' = \{(1,2),(0,-1)\}.$$

$f(1,0,0) = (1,3)$
$f(0,1,0) = (-1,1)$
$f(0,0,1) = (0,-1)$

$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad P_{B\bar{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P_{B'\bar{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$P_{\bar{B}B} = P_{B\bar{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$M_{\bar{B}\bar{B}'} = P_{B'\bar{B}'} \, M_{BB'} \, P_{\bar{B}B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 6 & -7 & -10 \end{pmatrix}$

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que:

$$f(1,-1,0) = (1,2)$$
$$f(1,1,0) = (3,0)$$
$$f(1,1,1) = (-1,3)$$

Calcular su matriz asociada respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

$$P_{B\bar{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_{\bar{B}B} = P_{B\bar{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "M_{BB'}"] & B' \\ \bar{B} \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{\bar{B}\bar{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que:

$$f(1,2,1) = (1,0,1,0)$$
$$f(2,1,2) = (0,1,0,1)$$
$$f(1,0,0) = (0,0,0,0)$$

Determinar la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas y determinar $f(3,1,1)$.

$$M_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{B\bar{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{\bar{B}B} = P_{B\bar{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\bar{B}'\bar{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$M_{\bar{B}'\bar{B}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

15. (Examen Septiembre 2022) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que:

$$f(x,y,z) = (2z - x + y, x + 3y + 2z, z + y - x)$$

Hallar la representación matricial de $f(M(f, B, B'))$ en las bases:

$$B'' = \{(1,1,1), (1,2,3), (-1,3,5)\},$$
$$B''' = \{(1,2,-1), (3,-1,2), (-1,3,5)\}.$$

Matriz respecto a la base canónica:

$$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} = B'$$

$$f(1,0,0) = (-1,1,-1)$$
$$f(0,1,0) = (1,3,1)$$
$$f(0,0,1) = (2,2,1)$$

$$M_{f_{BB'}} = M_{f_{CC}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Buscamos $M_{f_{B''B'''}}$:

$$\begin{array}{ccc} B = C & \xrightarrow{M_{f_{CC}}} & C = B' \\ P_{B''C} \uparrow & & \downarrow P_{B'B'''} \\ B'' & \xrightarrow{M_{f_{B''B'''}}} & B''' \end{array}$$

$$M_{f_{B''B'''}} = P_{CB'''} M_{f_{CC}} P_{B''C}$$

$$P_{B''C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. $P_{CB'''} = (P_{B'''C})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. $(1,0,0) = \alpha(1,2,-1) + \beta(3,-1,2) + \gamma(-1,3,5)$

   $(1,0,0) = (\alpha, \beta, \gamma)_{B'''}$

   * Hacer con $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$

3. $(x,y,t) = \alpha(1,2,-1) + \beta(3,-1,2) + \gamma(-1,3,5)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & x \\ 2 & -1 & 3 & y \\ -1 & 2 & 5 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x \\ 0 & 1 & -5/7 & 2x - y/7 \\ 0 & 0 & 1 & 7/53\, z - 3/53\, x + 5/53\, z \end{array}\right)$$

$$(1,0,0) = \left(\tfrac{11}{53}, \tfrac{13}{53}, -\tfrac{3}{53}\right)_{B'''}$$

$$\gamma = -\tfrac{3}{53}$$
$$\beta = \tfrac{2}{7} + \tfrac{5}{7}\left(-\tfrac{3}{53}\right) = \tfrac{13}{53}$$
$$\alpha = \tfrac{11}{53}$$

$$(0,1,0) = \left(\tfrac{17}{53}, -\tfrac{4}{53}, \tfrac{5}{53}\right)_{B'''}$$
$$(0,0,1) = \left(-\tfrac{8}{53}, \tfrac{5}{53}, \tfrac{7}{53}\right)_{B'''}$$

$$P_{CB'''} = \begin{pmatrix} 11/53 & 17/53 & -8/53 \\ 13/53 & -4/53 & 5/53 \\ -3/53 & 5/53 & 7/53 \end{pmatrix}$$

$$M_{f_{B''B'''}} = P_{CB'''} M_{f_{CC}} P_{B''C}$$

$$M_{f_{B''B'''}} = \begin{pmatrix} 11/53 & 17/53 & -8/53 \\ 13/53 & -4/53 & 5/53 \\ -3/53 & 5/53 & 7/53 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$