Contrastes de hipótesis

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE CÓRDOBA
Universidad de Córdoba
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Definiciones básicas

- Un contraste o test de hipótesis consiste en una regla de decisión, basada en información experimental (una muestra) para aceptar o rechazar una cierta hipótesis que se formula sobre la población generadora de la muestra o sobre algún parámetro de la misma.

- Hipótesis nula *(H_0)* o hipótesis del contraste: Hipótesis (afirmación) que se quiere contrastar, y por tanto, la que se acepta o se rechaza como conclusión del contraste.

- Hipótesis alternativa *(H_1)*: Hipótesis situada frente a H_0, de forma que si se acepta H_0, se rechaza H_1 y viceversa.

- La estimación trata de obtener un valor que en algún sentido (probabilístico) se pueda considerar próximo al verdadero valor de θ. Sin embargo, en los test de hipótesis se trata de, supuesto un valor de θ, ver si los datos experimentales están o no de acuerdo con esta hipótesis.

Definiciones básicas

- Tipos de contraste:
  - Paramétrico: La elección entre aceptar o rechazar H_0 depende del valor o valores de un estadístico (y la distribución generadora de la muestra).
  - No paramétrico: Se contrasta, en general, la forma de la distribución de la población generadora de la muestra.
- Espacio paramétrico (Θ): Conjunto de posibles valores de θ.
- Espacio paramétrico asociado a H_0 (Θ_0): Conjunto de posibles valores del parámetro θ que estamos contrastando bajo la hipótesis nula.
- Espacio paramétrico asociado a H_1 (Θ_1): Conjunto de posibles valores del parámetro θ que estamos contrastando bajo la hipótesis alternativa.
- Cada hipótesis está asociada a una parte del espacio paramétrico y son tales que $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ y $\emptyset = \Theta_0 \cap \Theta_1$.
- Hipótesis simple: El espacio paramétrico (de θ) está compuesto por un único valor. En caso contrario, la hipótesis se dice compuesta.

Ejemplo

Al rellenar las botellas de aceite, una empresa envasadora desea realizar un control de calidad sobre el contenido X de las botellas. Para ello toma una muestra de *n* botellas, mide el volumen envasado en cada una, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y con esta información decide entre las parejas de alternativas siguientes:

$$\begin{cases} H_o : \mu = 1 \text{ litro} \\ H_1 : \mu \neq 1 \text{ litro} \end{cases} \qquad \begin{cases} H_o : \sigma^2 = 0.002 \text{ litros}^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq 0.002 \text{ litros}^2 \end{cases}$$

En el primer caso se trata de comprobar si en media, el contenido de las botellas es correcto conforme a lo señalado en la etiqueta, y en el segundo grupo de hipótesis se trata de controlar si la variabilidad en el llenado está bajo control, es decir, si las oscilaciones en la cantidad envasada varían “poco” alrededor del valor medio de un litro.

En el primer contraste, el espacio paramétrico es $\Theta = \{\mu \in \mathcal{R}+\}$, o incluso $\Theta = \{\mu \in [0;1.5]\}$ si la máquina de envasado no puede físicamente llenar más de un litro y medio.

La hipótesis H_0 es simple, pues $\Theta_0 = \{1\}$, mientras que H_1 es compuesta, ya que $\Theta_1 = \{[0;1) \cup (1;1.5]\}$

Como puede comprobarse: $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ y $\varnothing = \Theta_0 \cap \Theta_1$.

Definiciones básicas

- Región de aceptación de H_0 (C_0): Conjunto de valores muestrales o una función de ellos (estadístico) que lleva a la decisión de **aceptar** la hipótesis nula.

- Región crítica (C_1) o de rechazo: Conjunto de valores muestrales o una función de ellos (estadístico) que lleva a la decisión de **rechazar** la hipótesis nula.

Ejemplo (continuación)

En el ejemplo anterior podría fijarse como regla de decisión para el primer contraste:

$$C_0 = \left\{ \vec{x} \,/\, 0.97 \text{ litros} \leq \bar{x} \leq 1.02 \text{ litros} \right\} \quad C_1 = \left\{ \vec{x} \,/\, \bar{x} \notin \left[0.97; 1.02 \right] \text{litros} \right\}$$

Es decir si se toman, por ejemplo, n =20 botellas y su contenido medio es mayor que 0.97 y menor de 1.02 litros, se acepta que el valor medio del llenado es μ = 1 litro.

Definiciones básicas

- Estadístico del contraste: Estadístico usado para decidir qué hipótesis aceptar o rechazar.
- Error de tipo I: Error que se comete en la decisión del contraste cuando se rechaza la hipótesis nula *(H_0)* siendo correcta.
- Error de Tipo II: Error que se comete en la decisión del contraste cuando se acepta la hipótesis nula siendo falsa.

	Se acepta H_0	**Se rechaza H_0**
H_0 verdadera	Decisión correcta	Error de tipo I
H_0 falsa	Error de tipo II	Decisión correcta

- Probabilidades de error:

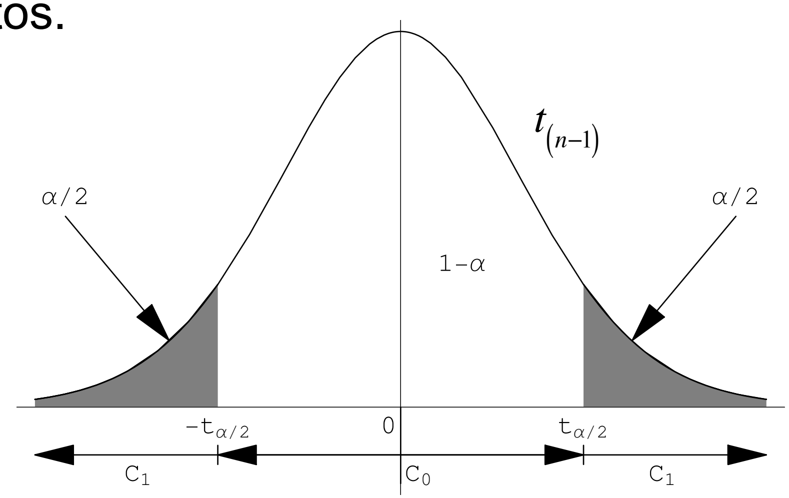
$$P(I) = P\left(t(\vec{X}) \in C_1 / H_0\right) \qquad P(II) = P\left(t(\vec{X}) \in C_0 / H_1\right)$$

- Nivel de significación(α): Máxima probabilidad de cometer error de tipo I.
- Potencia de un contraste: Probabilidad de rechazar la hipótesis nula H_0 siendo falsa.

Definiciones básicas. Tipología de contrastes

- Contraste bilateral: El espacio paramétrico asociado a H_1 recubre al espacio paramétrico asociado a H_0, es decir, está formado por dos conjuntos de valores disjuntos.
  - *Ejemplo:*

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

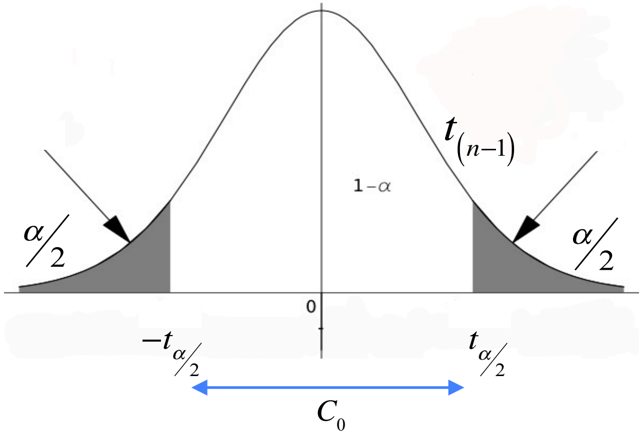


- La región crítica C_1 también recubre a la región de aceptación C_0.

Ejemplo (continuación)

En el ejemplo anterior, fijado el nivel de significación *α*, podemos tomar como estadístico del contraste a:

$$T = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}} \in t_{(n-1)} \Rightarrow P\left(-t_{\alpha/2} \le T \le t_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$



Con lo que $C_0 = \left(-t_{\alpha/2(n-1)}; t_{\alpha/2(n-1)}\right)$

Por tanto, si H_0 es cierta, el valor del estadístico (T/H_0) ha de estar en C_0, en caso contario rechazamos H_0 y aceptamos H_1.

Supongamos que se ha extraído una muestra de tamaño 20 y que los datos muestrales son: $\overline{x} = 0.97; S^2 = 0.0025; S = 0.05$

Si se fija el nivel de significación *α* = 0.05 $\Rightarrow t_{0.025(19)} = 2.093$

Para el contraste planteado y sustituyendo los valores en la expresión del estadístico:

$$\begin{cases} H_o : \mu = 1 \text{ litro} \\ H_1 : \mu \neq 1 \text{ litro} \end{cases} \qquad T/H_0 = \frac{0.97-1}{0.05/\sqrt{19}} = -2.615 \qquad C_0 = (-2.093; 2.093)$$

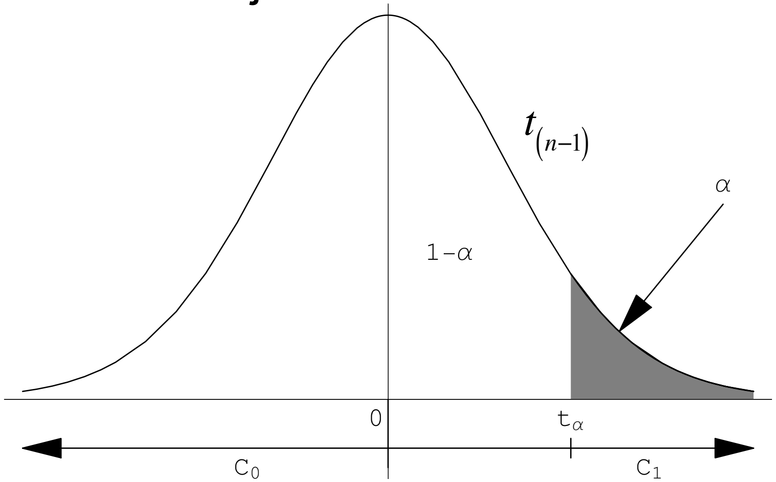
Como $T/H_0 \notin C_0$ rechazamos H_0, con lo que $\mu \neq 1$

Definiciones básicas. Tipología de contrastes

- Contraste Unilateral: El espacio paramétrico asociado a H_1 está formado por valores superiores o inferiores al espacio paramétrico asociado a H_0, es decir, estaría formado por un solo conjunto de valores.

  - *Ejemplo:*

$$\begin{cases} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{cases}$$



Y como siempre, aceptaríamos la H_0 si el valor del estadístico experimental (supuesta cierta la hipótesis nula) pertenece a C_0.

También podríamos haber planteado el otro contraste bilateral:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Hay que destacar que la igual siempre se considera en H_0 para poder poder sustituirla en la expresión del estadístico experimental.

Ejemplo (continuación)

Si continuamos con el ejemplo, hemos rechazado la H_0 y por tanto, la media de llenado no es 1.

Hay que señalar en este punto que la afirmación que acabamos de realizar es "rotunda", ya que al fijar el nivel de significación al 95%, estaríamos aceptando que de cada 100 muestras que tomemos de esta población, la C_0 contendría el valor del estadístico experimental en 95 ocasiones y por tanto es muy "raro" (solo ocurre un 5% de las veces) que tomada una muestra al azar, el estadístico experimental no esté en C_0.

En el caso de haber aceptado H_0, solo podemos concluir que los valores muestrales están de acuerdo con la hipótesis planteada y por tanto no hay razones para no creerla.

Como la media no es 1, podemos plantearnos si es mayor que 1 o menor. Como lo que es deseable es una afirmación "rotunda" (rechazar H_0), podemos plantear (ya que la media muestral es menor que 1) el contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 1 \text{ litro} \\ H_1 : \mu < 1 \text{ litro} \end{cases}$$

En este caso, si α = 0.05 $\Rightarrow t_{0.05(19)} = 1.792$

$$T/_{H_0} = -2.616 \notin C_0 = (-1.792; +\infty)$$

Con lo que rechazamos H_0 y por tanto afirmamos que el contenido de la botella es menor a 1 litro.

Ejemplo (continuación)

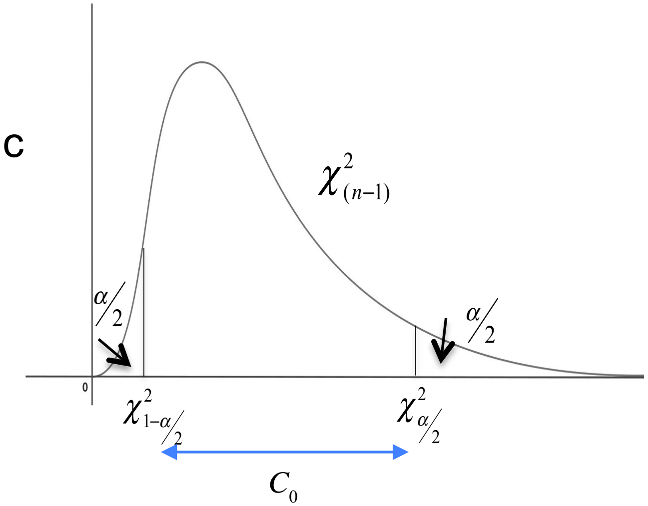
Ante la vista del resultado anterior podría pensarse que el proceso no está bajo control, con lo que es conveniente analizar si las oscilaciones en la cantidad envasada varían "poco" alrededor del valor medio de un litro.

Para ello planteamos el siguiente contraste:

$$\begin{cases} H_o : \sigma^2 = 0.002 \text{ litros}^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq 0.002 \text{ litros}^2 \end{cases}$$

En este caso, el estadístic del contraste es:

$$Q = \frac{nS^2}{\sigma^2} \in \chi^2_{(n-1)}$$



Y la región de aceptación: $C_0 = \left(\chi^2_{1-\alpha/2(n-1)} ; \chi^2_{\alpha/2(n-1)} \right)$

Si se fija el nivel de significación $\alpha = 0.05$ $\Rightarrow \chi^2_{0.975(19)} = 8.907; \ \chi^2_{0.025(19)} = 32.852$

La información muestral es la misma que la anterior, con lo que:

$$Q/_{H_0} = \frac{(20)(0.0025)}{0.002} = 25 \in C_0 = (8.907; 32.852)$$

Por tanto, aceptamos H_0.

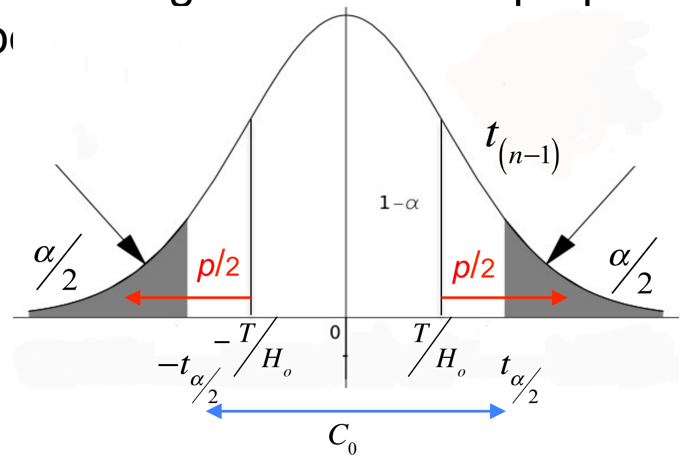
Es decir, no hay razones para no suponer que el proceso está bajo control, con lo que el problema se deberá, posiblemente, a una mala regulación del volumen de llenado.

Probabilidad límite (p-valor)

Para evitar tener que buscar las regiones C_0 y C_1 cada vez que cambiemos de nivel de significación, se calcula la denominada probabilidad límite p. El p-valor nos informa sobre cuál sería el nivel de significación mas pequeño que nos hubiera permitido rechazar la hip

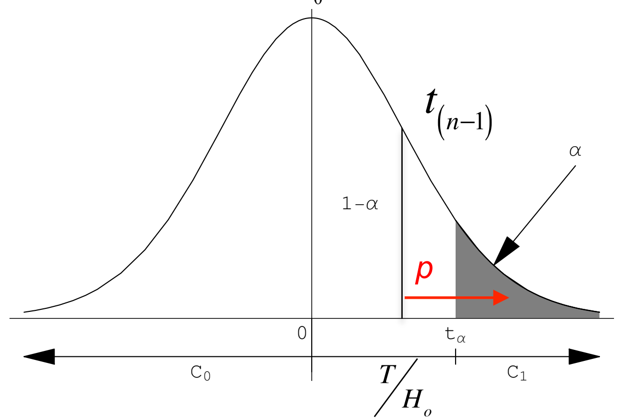
En el test bilateral:

$$p = P\left(|T| > {}^{T}\!/_{H_0} \right) = 2P\left(T > {}^{T}\!/_{H_0} \right)$$



En el caso del contraste unilateral

$$p = P\left(T > \left| {}^{T}\!/_{H_0} \right| \right)$$



La regla de decisión es siempre la misma:

$$\begin{cases} Si\ p > \alpha \Rightarrow \text{Aceptamos } H_0 \\ Si\ p \le \alpha \Rightarrow \text{Rechazamos } H_0 \end{cases}$$

Ejemplo (continuación)

Continuando con el ejemplo, vamos a calcular la probabilidad límite en los dos contrastes planteados para la media.

Para el primer contraste:

$$\begin{cases} H_o : \mu = 1 \ \text{litro} \\ H_1 : \mu \neq 1 \ \text{litro} \end{cases} \qquad T/_{H_0} = \frac{0.97-1}{0.05/\sqrt{19}} = -2.615 \qquad T \in t_{(19)}$$

$$p = P\left(|T| > T/_{H_0}\right) = 2P\left(T > T/_{H_0}\right) = 2P(T > 2.615) \approx 2(0.01) = 0.02$$

Teniendo en cuenta la regla de decisión y que el valor obtenido es muy pequeño, rechazaríamos H_0 en la mayoría de las situaciones.

$$\begin{cases} Si\ p > \alpha \Rightarrow \text{Aceptamos } H_0 \\ Si\ p \leq \alpha \Rightarrow \text{Rechazamos } H_0 \end{cases}$$

Para el segundo contraste:

$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq 1 \ \text{litro} \\ H_1 : \mu < 1 \ \text{litro} \end{cases} \qquad p = P\left(T > \left|T/_{H_0}\right|\right) = P(T > 2.615) = 0.01$$

Por tanto, también rechazaríamos H_0 en la mayoría de las situaciones.

Fases para realizar un contraste de hipótesis:

- Enunciar y determinar las hipótesis H_0 y H_1 respectivamente.
- Elegir un nivel de significación α con el que trabajar.
- Especificar el tamaño muestral y realizar la muestra concreta con la que trabajar.
- Seleccionar el estadístico de trabajo (estadístico del contraste), cuya distribución sea conocida en el supuesto de ser H_0 cierta.
- Determinar la región de aceptación C_0 o la región crítica C_1.
- Determinar el valor del estadístico para la muestra obtenida (estadístico experimental).
- Obtener conclusiones de tipo estadístico.
- Obtener conclusiones de naturaleza **no** estadística, como pueden ser biológicas, medicas, económicas, etc.

Contrastes de hipótesis

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR DE CÓRDOBA
Universidad de Córdoba

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA