Tema 4. Funciones Lógicas

Objetivos

- Definir el concepto de minterm y maxterm
- Mostrar el desarrollo de Shannon.
- Comprender las dos formas lógicas y abreviadas para expresar una función lógica: suma de minterms y producto de maxterms.
- Mostrar los fundamentos en los que se basan los métodos de simplificación de funciones lógicas.
- Comprender la metodología de simplificación de funciones lógicas mediante los mapas de Karnaugh.
- Asimilar el concepto de función lógica incompletamente especificada y su forma de simplificación.

Tema 4. Funciones Lógicas

Contenido

- Minterm y maxterm
- Desarrollo de Shannon
- Funciones lógicas incompletamente especificadas
- Minimización de funciones lógicas
- Mapas de Kanaugh

Concepto de Minterm y Maxterm

Concepto de Minterm.

Término producto.

- Serie de variables complementadas o no, conectadas mediante el operador AND.
- Ejemplos $\mathbf{xyz}$ $\mathbf{\bar{x}y\bar{z}}$

- Dado un conjunto de variables lógicas, $x_1 \ldots x_n$, un **Minterm** (término mínimo) o **Producto Fundamental** de esas variables es cualquier término producto en el que aparecen todas las variables una sola vez.
- ***Ejemplo.*** Dadas las variables ***(x, y, z, u).***

$$x\,y\,z\,u \qquad \bar{x}\,y\,\bar{z}\,u \qquad \bar{x}\,\bar{y}\,z\,\bar{u} \qquad son\ \ \min terms$$

$$x\,z\,u \qquad \bar{x}\,y\,\bar{z} \qquad \bar{x}\,\bar{u} \qquad son\ \ tér\min os\ \ producto$$

Concepto de Minterm

- Si se considera los minterms como funciones lógicas de n variables de entrada, *cada minterm es 1 para una única combinación de valores de las variables de entrada*.
  - Dadas las variables (x, y, z), el minterm $\overline{x}y\overline{z}$
  - Es 1 solamente si x = 0, y = 1 y z = 0.
  - Es 0 para el resto de valores.
- Por asignar un único 1 se denomina término mínimo.
- Para el caso general de **n variables de entrada se podrán formar 2^n minterms,** ya que cada variable puede estar complementada o no.
- Si n = 3 se tiene $2^3 = 8$ minterms.
- Los minterms se pueden nombrar de manera simplificada por el equivalente en decimal de la combinación de variables que hacen que valga uno. Ejemplos:

xyz vale uno para la combinación x=y=z=1 (111), que equivale a decimal al valor 7. Este minterm se le nombra como minterm 7 y se escribe m_7

$\overline{x}y\overline{z}$ vale 1 para la combinación 010. Es el minterm m_2

Concepto de Minterm

- Tabla de minterms para n = 3
  y las variables (x, y, z).

x	y	z	Minterms	
0	0	0	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$	m_0
0	0	1	$\bar{x}\bar{y}z$	m_1
0	1	0	$\bar{x}y\bar{z}$	m_2
0	1	1	$\bar{x}yz$	m_3
1	0	0	$x\bar{y}\bar{z}$	m_4
1	0	1	$x\bar{y}z$	m_5
1	1	0	$xy\bar{z}$	m_6
1	1	1	xyz	m_7

Concepto de Maxterm

Concepto de Maxterm.

- ***Término suma.***

  Serie de variables complementadas o no, conectadas mediante el operador OR.

  Ejemplos $x + y + z \qquad \bar{x} + y + \bar{z}$

- Dado un conjunto de variables lógicas, $x_1 \ldots x_n$, un **Maxterm** (término máximo) o **Suma Fundamental** de esas variables es cualquier término suma en el que aparecen todas las variables.

Ejemplo. Dadas las variables ***(x, y, z, u).***

$$x+y+z+u \qquad \bar{x}+y+\bar{z}+u \qquad \bar{x}+\bar{y}+z+\bar{u} \qquad \text{son maxterms}$$

$$x+z+u \qquad \bar{x}+y+\bar{z} \qquad \bar{x}+\bar{u} \qquad \text{son términos suma}$$

Concepto de Maxterm

- Si se considera los maxterms como funciones lógicas de n variables de entrada, *cada maxterm es 0 para una única combinación de valores de las variables de entrada.*

  Dadas las variables (x, y, z), el maxterm

  Es 0 solamente si x = 1, y = 0 y z = 1.

  Es 1 para el resto de valores.
- Por asignar el valor 1 a todas las combinaciones de valores de entrada excepto a una, se denomina término máximo.
- Para el caso general de **n variables de entrada se podrá formar 2^n maxterms,** ya que cada variable puede estar complementada o no.
- Si n = 3 se tiene 2^3 = 8 maxterms.

Concepto de Maxterm

- Los maxterms se pueden nombrar de manera simplificada por el equivalente en decimal de la combinación de variables que hacen que valga cero.
- Ejemplo: $x + y + z$ Vale cero para la combinación x=y=z=0 (000), que equivale a decimal al valor 0. Este maxterm se le nombra como maxterm 0 y se escribe M_0
- Tabla de maxterms para las variables (x, y, z).

x	y	z	Maxterms	
0	0	0	$\mathbf{x+y+z}$	M_0
0	0	1	$\mathbf{x+y+\overline{z}}$	M_1
0	1	0	$\mathbf{x+\overline{y}+z}$	M_2
0	1	1	$\mathbf{x+\overline{y}+\overline{z}}$	M_3
1	0	0	$\mathbf{\overline{x}+y+z}$	M_4
1	0	1	$\mathbf{\overline{x}+y+\overline{z}}$	M_5
1	1	0	$\mathbf{\overline{x}+\overline{y}+z}$	M_6
1	1	1	$\mathbf{\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}}$	M_7

Teorema de Shannon

- **Primer teorema de Shannon**
  - ***"Toda función lógica o de conmutación se puede expresar como una suma única de minterms"***
    - El desarrollo de Shannon para n variables en su primera forma queda:

$$
\begin{aligned}
F(x_1,...,x_n) &= \bar{x}_1\cdot...\cdot\bar{x}_n\cdot F(0,...,0) + \bar{x}_1\cdot...\cdot\bar{x}_{n-1}\cdot x_n F(0,...,0,1) \\
&+ \bar{x}_1\cdot...\cdot x_{n-1}\cdot\bar{x}_n F(0,...,1,0) + ... + x_1\cdot...\cdot x_n\cdot F(1,...,1)
\end{aligned}
$$

    - Se obtienen 2^n sumandos, que contienen el producto de uno de los 2^n minterms por una constante 0 ó 1, que sería el valor de la función para ese minterm.
  - ***"Toda función lógica o de conmutación se puede expresar como una suma única de los minterms, en concreto mediante la suma de los minterms para los que la función vale 1."***

Teorema de Shannon

- El teorema de Shannon permite pasar de la tabla de verdad a la expresión lógica.
- Una función lógica de n variables de entrada tendrá 2^n minterms, que corresponden a cada uno de los valores de entrada de la tabla de verdad (fila).

- **Ejemplo.**

m_i	x	y	z	f	
0	0	0	0	0	
1	0	0	1	1	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$
2	0	1	0	1	$\bar{x}\,y\,\bar{z}$
3	0	1	1	0	
4	1	0	0	1	$x\,\bar{y}\,\bar{z}$
5	1	0	1	0	
6	1	1	0	0	
7	1	1	1	1	$x\,y\,z$

- **Expresión lógica como suma de minterms.**
  - ***Se hace la suma lógica de los minterms para los que la función vale 1.***

$$\mathbf{f(x,y,z) = \bar{x}\,\bar{y}\,z + \bar{x}\,y\,\bar{z} + x\,\bar{y}\,\bar{z} + x\,y\,z}$$

Teorema de Shannon

- Segundo teorema de Shannon.
  - ***"Toda función lógica o de conmutación se puede expresar como un producto único de maxterms"***
  - El desarrollo de Shannon para n variables en su segunda forma queda:

$$\begin{aligned}F(x_1,...,x_n) = &(x_1 + ... + x_n + F(0,...,0))\,(x_1 + ... + x_{n-1} + \overline{x}_n + F(0,...,0,1))\\ &(x_1 + ... + \overline{x}_{n-1} + x_n + F(0,...,1,0))\,(...)\,(\overline{x}_1 + ... + \overline{x}_n + F(1,...,1)\end{aligned}$$

  - Se obtienen 2^n productos, que contienen la suma de uno de los 2^n maxterms más una constante 0 ó 1, que sería el valor de la función para ese maxterm.
  - ***"Toda función lógica o de conmutación se puede expresar como un producto único de maxterms, en concreto mediante el producto de los maxterms para los que la función vale 0."***

Teorema de Shannon

- El teorema de Shannon permite pasar de la tabla de verdad a la expresión lógica.
- Una función lógica de n variables de entrada tendrá 2^n maxterms, que corresponden a cada uno de los valores de entrada de la tabla de verdad (fila).
- **Ejemplo.**

M_i	x	y	z	f	
0	0	0	0	0	$\mathbf{x+y+z}$
1	0	0	1	1	
2	0	1	0	1	
3	0	1	1	0	$\mathbf{x+\overline{y}+\overline{z}}$
4	1	0	0	1	
5	1	0	1	0	$\mathbf{\overline{x}+y+\overline{z}}$
6	1	1	0	0	$\mathbf{\overline{x}+\overline{y}+z}$
7	1	1	1	1	

- **Expresión lógica como producto de maxterms.**
  - ***Se hace el producto lógico de los maxterms para los que la función vale 0.***

$$\mathbf{f(x,y,z)=(x+y+z)(x+\overline{y}+\overline{z})(\overline{x}+y+\overline{z})(\overline{x}+\overline{y}+z)}$$

Funciones lógicas incompletamente especificadas

- Las funciones lógicas analizadas asignan el valor 0 ó 1 a la variable de salida para cada combinación de valores de las variables de entrada.
- Se denominan *funciones lógicas completamente especificadas*.

Funciones lógicas incompletamente especificadas.

- Son aquellas para las que en una o algunas combinaciones de valores de las variables de entrada es indiferente su valor. Normalmente sucede cuando se está seguro que no se van presentar algunos valores de entrada.
- Por ejemplo, en funciones lógicas que no usan algunas combinaciones de valores de las variables de entrada:

  Una función lógica que usa el código BCD para representar los valores de las variables de entrada.

  Para los valores de entrada del 10 al 15 es indiferente el valor que asigne la función lógica a la variable de salida.

Funciones lógicas incompletamente especificadas

Representación de funciones lógicas incompletamente especificadas.

- ***Tabla de verdad.***
  - Se pone un guión en las posiciones de la columna de la variable de salida, correspondientes a los minterms o maxterms para los que la función lógica tiene un valor indiferente.
  - Este guión finalmente será un 0 ó un 1, según interese en el proceso de simplificación.

m_i	x	y	z	f
0	0	0	0	-
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	-
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

- Abreviadamente las indiferencias se le nombran por la letra d y siguen la misma regla que los minterm. Por ejemplo, en la tabla de verdad la indiferencia correspondiente a la primera línea de le nombra por d_0

Fundamentos de la simplificación de funciones lógicas: adyacencias

La mayoría de los métodos de simplificación de funciones lógicas, como los Mapas de Karnaugh, se basan en encontrar el mínimo número de adyacencias del mayor orden posible que cubran la función.

Concepto de Adyacencia y su utilidad.

- Se analizará para una función lógica expresada en la forma de suma de minterms, pero es igualmente válido para el producto de maxterms.
- Sea la función lógica $$\mathbf{f(x,y,z) = x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z + x\,y\,\overline{z} + x\,y\,z}$$

  Dos minterms de una F.L. de *n variables* forman una adyacencia de 1º orden si se diferencian en una sola variable, que en uno estará complementada y en el otro no.

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{x\,\overline{y}\,\overline{z}}\\ \mathbf{x\,\overline{y}\,z}\end{array}\right\}\ \text{Forman una adyacencia de 1º orden} \Rightarrow \mathbf{x\,\overline{y}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{x\,y\,\overline{z}}\\ \mathbf{x\,y\,z}\end{array}\right\}\ \text{Forman otra adyacencia de 1º orden} \Rightarrow \mathbf{x\,y}$$

Una adyacencia de 1º orden se representa de forma algebraica o lógica por un *único producto de las n-1 variables que coinciden y se elimina la variable en que se diferencian.*

Esto se basa en el Álgebra de Boole:

$$\mathbf{x\,\overline{y}\,\overline{z} + x\,\overline{y}\,z = x\,\overline{y}\,(\overline{z}+z) = x\,\overline{y}\cdot 1 = x\,\overline{y}}$$

$$\mathbf{x\,y\,\overline{z} + x\,y\,z = x\,y\,(\overline{z}+z) = x\,y\cdot 1 = x\,y}$$

Fundamentos de la simplificación de funciones lógicas: adyacencias

- Dos adyacencias de 1º orden forman una adyacencia de 2º orden si les falta la misma variable y solamente se diferencian en una variable de las restantes, que en una estará complementada y en la otra no.

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{x\,\overline{y}} \\ \mathbf{x\,y} \end{matrix}\right\} \quad \text{Forman una adyacencia de 2º orden} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}$$

- Una adyacencia de 2º orden se representa de forma algebraica o lógica por un *único producto de las n-2 variables que coinciden y se elimina la variable en que se diferencian.*

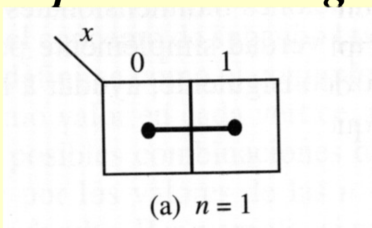
$$\mathbf{x\,\overline{y} + x\,y = x(\overline{y} + y) = x \cdot 1 = x}$$

- Una adyacencia de 2º orden cubre a dos adyacencias de 1º orden y por tanto, a cuatro minterms.
- Del mismo modo dos adyacencias de 2º orden pueden formar una adyacencia de 3º orden y así sucesivamente.
- De forma genérica, *una adyacencia de orden n, cubre 2 de orden n-1 y a 2^n minterms y se representa por un único término producto en el que se eliminan n variables.*
- La función lógica anterior se puede representar mediante el término producto generado por la adyacencia de 2º orden (x).

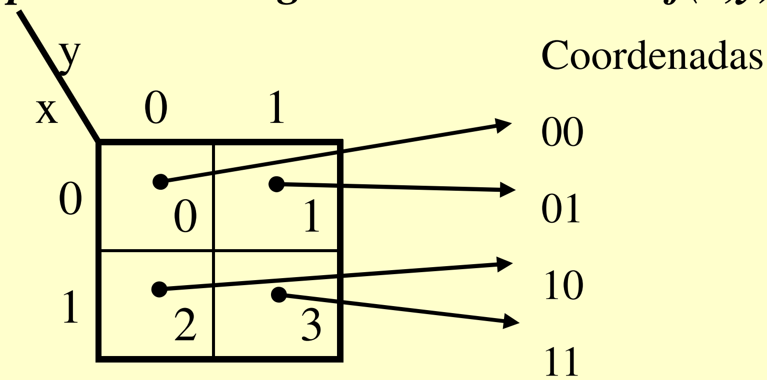
***f(x,y,z) = x* es la función lógica simplificada o realización mínima.**

Simplificación mediante Mapas de Karnaugh

- El mapa de Karnaugh de *n* variables o de dimensión *n* está formado por 2^n casillas o celdas organizadas en filas y columnas de manera que cada casilla está unívocamente identificada por una coordenada que corresponde a su valor de fila y columna.
- Para representar una función lógica se dividen las variables de entrada entre las filas y columnas.
- ***Mapa de Karnaugh de 1 variable f(x).***

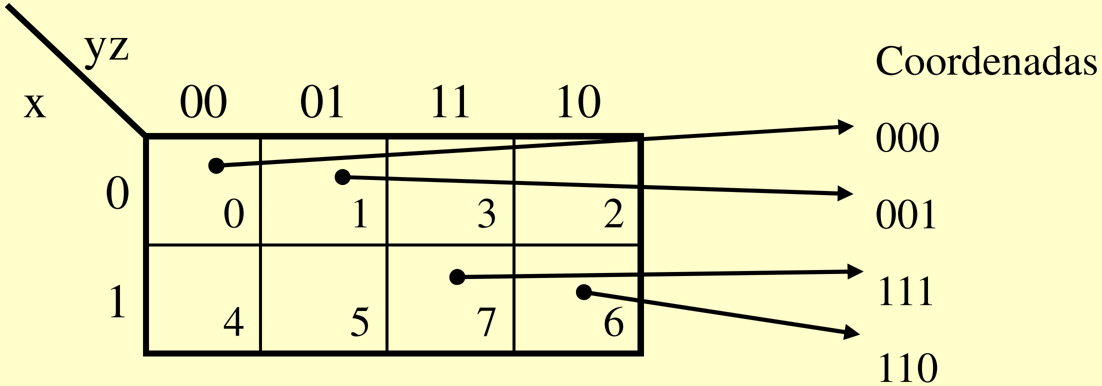


- ***Mapa de Karnaugh de 2 variables f(x,y).***

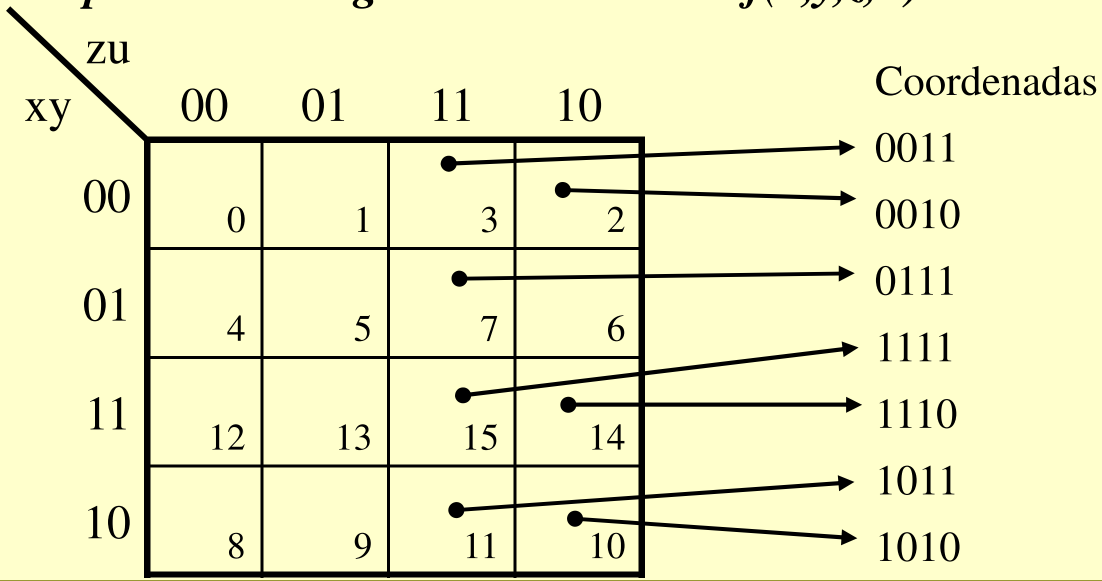


Simplificación mediante Mapas de Karnaugh

- ***Mapa de Karnaugh de 3 variables f(x,y,z).***



- ***Mapa de Karnaugh de 4 variables f(x,y,z,u).***



Simplificación mediante Mapas de Karnaugh

Características de los mapas de Karnaugh.

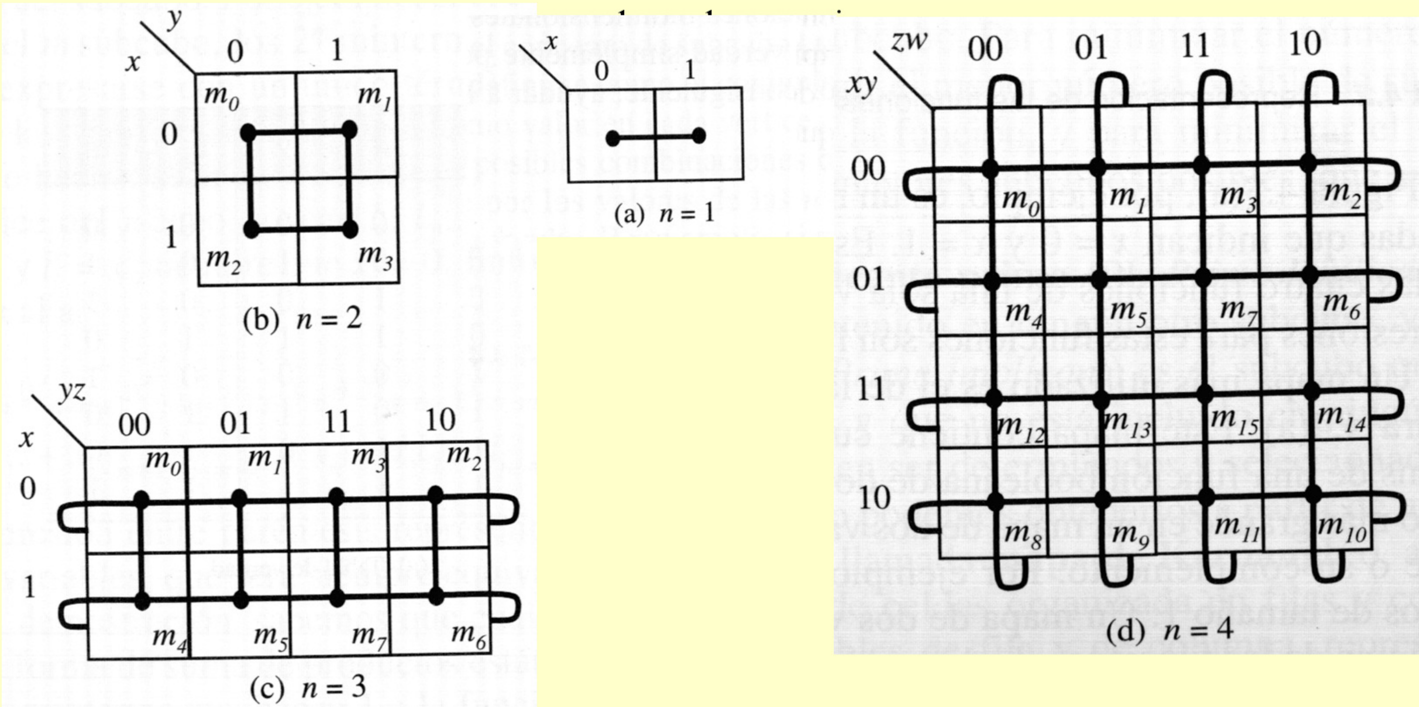
Las coordenadas de las casillas que comparten un lado son adyacentes.

Las filas superior e inferior son adyacentes.

Por tanto, las celdas que estén en la misma columna son adyacentes (ej. 0 y 8)

Las columnas de la izquierda y la derecha son adyacentes.

Por tanto, las celdas que estén en la misma fila son adyacentes (ej. 0 y 2)



(a) $n = 1$

(b) $n = 2$

(c) $n = 3$

(d) $n = 4$

Simplificación mediante Mapas de Karnaugh

Representación de una función lógica en un mapa de Karnaugh.

Para representar una F.L. de *n* variables se usa un mapa de *n* variables o de dimensión *n*.

A cada casilla del mapa de Karnaugh le corresponde un minterms o maxterms de la función.

La correspondencia se establece mediante la coordenada de cada casilla y la representación vectorial de cada minterms o maxterms.

En cada casilla se escribe el valor 0, 1, -, que tenga la función para el minterm correspondiente.

Si se representa a partir de la suma de minterms solamente se representan los minterms para los que la función vale 1 (**minterms-1**) y los **indiferentes** (-).

Simplificación mediante Mapas de Karnaugh

- *Mediante el Mapa de Karnaugh se determinan fácilmente las adyacencias.*
  - Una adyacencia de orden 0 (minterm) corresponde a una casilla.
  - Una adyacencia de orden uno corresponde a dos casillas vecinas.
  - Una adyacencia de orden dos corresponde a cuatro casillas vecinas.
  - Y así, una adyacencia de orden *n* a 2^n casillas vecinas.

xy \ zu	00	01	11	01
00	1	1	1	
01	1	1		
11	1	1	-	
10	1	1		

Adyacencia de orden 1

Adyacencia de orden 3

Simplificación mediante Mapas de Karnaugh

Procedimiento de simplificación con Mapas de Karnaugh.

Se aplica a una F.L. representada tanto como suma de minterms como producto de maxterms.

Procedimiento para una función lógica representada como suma de minterms.

1. Se representa la función lógica en el correspondiente Mapa de Karnaugh.
2. **Obtener el menor número de adyacencias del mayor orden posible**, usando los **minterms-1** y los **indiferentes**, según las siguientes condiciones:

   Las adyacencias constarán de **2^p casillas vecinas con valor 1 o indiferente**.

   Todos los minterms-1 deben quedar cubiertos.

   Las indiferencias solamente se usarán para formar adyacencias de mayor orden. **No tienen que quedar cubiertas**.

Los minterms-1 o indiferentes se podrán usar en varias adyacencias para aumentar su tamaño.

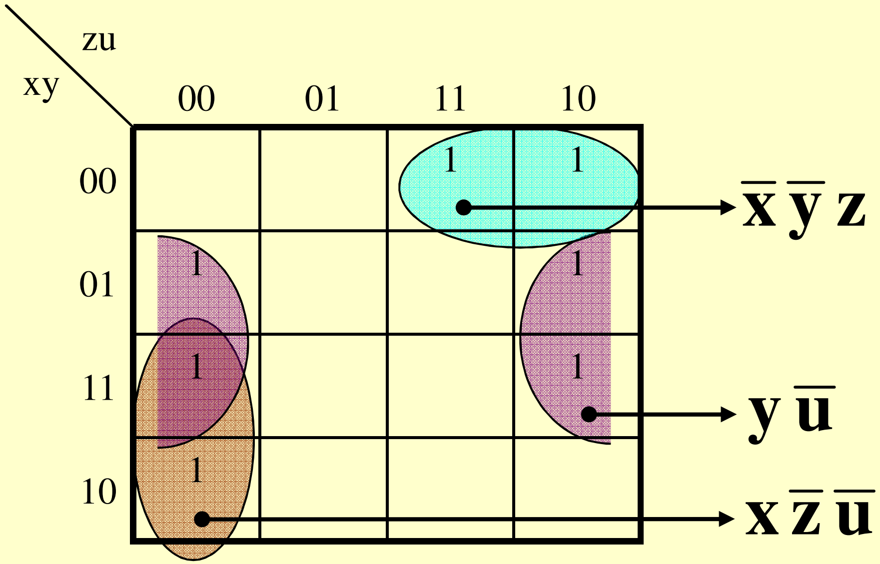
   Se comienza por los minterms-1 que solamente pueden estar cubiertos por una única adyacencia. Se formará la adyacencia de mayor orden posible. Se denominan ***adyacencias esenciales.***

   Se forma el **mínimo número de adyacencias de mayor orden posible para cubrir el resto de los minterms-1**.

Puede haber varias formas de agrupar las adyacencias.

Simplificación mediante Mapas de Karnaugh

- ***Ejemplos de simplificación mediante Karnaugh***
  F(x,y,z,u)=Σm(2,3,4,6,8,12,14)



Las 3 adyacencias son esenciales.

Cada adyacencia genera un término producto en el que se eliminan tantas variables como indica su orden.

Se eliminan las variables que cambian de valor para esa adyacencia

- ***Para obtener la función lógica simplificada se realiza la OR de los tres términos producto.***
- ***Se obtiene una representación lógica estándar SOP.***

$$F(x,y,z,u)= y\bar{u} + \bar{x}\bar{y}z + x\bar{z}\bar{u}$$

Simplificación mediante Mapas de Karnaugh

- ***Ejemplos:***
  F(x,y,z,u)=Σm(1,3,5,7,10,11,14,15) ; G(x,y,z,u)= Σm(1,5,10,12,13,14,15)

xy \ Zu	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11			1	1
10			1	1

xy \ Zu	00	01	11	10
00		1		
01		1		
11	1	1	1	1
10				1

$$F(x,y,z,u)= \bar{x}\,u + x\,z \qquad G(x,y,z,u)= x\,y + \bar{x}\,\bar{z}\,u + x\,z\,\bar{u}$$

Bibliografía detallada

Funciones Lógicas - Minimización

- **Las diapositivas se han confeccionado utilizando como fuente:**
- "Diseño Lógico". A. Lloris, A. Prieto. Mc-Graw Hill. 1996.
  - Capítulos: 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.6.1, 2.6.2