ÁLGEBRA LINEAL

Alejandro Gómez Amaro
Profesor: Rocio Pérez Portero

10% Participación (Salir a la pizarra)
5% Ejercicios (Problemas)

Matrices

- Concepto matriz y determinante
- Resolver determinantes
- Usar el método de Gauss

Conceptos básicos:

Matriz: Conjunto de elementos agrupados en filas y columnas. Con orden **m (filas) × n (columnas).**

- Igualdad entre matrices: $a_{ij} = b_{ij}$
- Matriz fila: Orden $1 \times n \longrightarrow a_{1n}$
- Matriz columna: Orden $n \times 1 \longrightarrow a_{n1}$
- Matriz diagonal: Elementos a_{ii}
- **Traza** $= tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
- Matriz cuadrada: Orden $n \times n \longrightarrow a_{nn}$
  - Matriz simétrica: $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\, ij \in n$
  - Matriz asimétrica: La diagonal $a_{ii} = 0$
  - Matriz triangular
    - Superior: $a_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j$
    - Inferior: $a_{ij} = 0 \quad \forall\, i < j$
- Matriz nula: $a_{ij} = 0 \quad \forall\, i \leq m \;;\; \forall\, j \leq n$
- **Pivote de una fila: 1er elemento de una fila $\neq 0$**
- Matriz escalonada por filas
  - Si tiene filas nulas deben estar en la parte inferior
  - El pivote de cada fila no nula sea 1
  - El pivote de cada fila no nula esté a la derecha que el anterior
- Matriz escalonada por columnas
  - Si tiene columnas nulas deben estar en la parte inferior
  - El pivote de cada columna no nula sea 1
  - El pivote de cada columna no nula esté abajo que el anterior

Operaciones básicas con matrices

- Suma: Tienen que ser del mismo orden $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$; $\forall\, ij$
- Producto: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$
- Inversa de una matriz: método de Gauss

Transformaciones elementales en matrices

- multiplicar todos los elementos de una fila por un escalar no nulo: $F_i \longrightarrow aF_i$
- Sumar a la fila$_i$ un múltiplo de la fila$_j$:
  $F_i \rightarrow F_i + a F_j$
- Intercambiar la posición de dos filas $F_i \leftrightarrow F_j$
- La matriz obtenida se denomina matriz elemental
- Dadas A y B de orden $(m \times n)$ son equivalentes si podemos obtener una haciendo transformaciones elementales sobre la otra
- Hacer transformaciones elementales sobre $A_{m \times n}$
- Hacer transformaciones elementales sobre $I_m A_{m \times n}$

} lo mismo

Matriz reducida de Gauss

- Es la matriz equivalente a una matriz A dado que se obtiene haciendo transformaciones elementales sobre A y que va a ser escalonada por filas y la vamos a notar como A^*

Algoritmo para calcular A^*

- Elegir la fila pivote (1º que tenga pivote más a la izquierda, mejor si es 1)
- Reordenamos la matriz (la fila pivote tiene que ser la primera)
- Hacemos 1 el pivote de la fila pivote
- Anulamos los elementos debajo del pivote
- Repetir hasta tener una matriz escalonada por filas

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{F_1 \to F_1/5}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3/5 & 8/5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3/5 & 8/5 \\ 0 & -1/5 & -6/5 \\ 0 & 11/5 & 1/5 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 \to -5F_2 \\ F_3 \to 5F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3/5 & 8/5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3 \to F_3 - 11F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3/5 & 8/5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -65 \end{pmatrix}$$

Método de Gauss para el cálculo de inversa

- Escribimos la matriz $(A \mid I)$
- Hacer operaciones elementales hasta conseguir una matriz identidad a la izquierda
- Vamos a obtener $(I \mid B)$, donde B será la inversa de A. Si tenemos una fila de ceros a la izquierda, A no es regular

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad (A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{de lo anterior}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/5 & 8/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 & -11/13 & -1/13 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 \to F_2 - 6F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/5 & 8/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4/13 & 1/13 & 6/13 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 & -11/13 & -1/13 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 - 3/5F_2 - 8/5F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/13 & 17/13 & -2/13 \\ 0 & 1 & 0 & -4/13 & 1/13 & 6/13 \\ 0 & 0 & 1 & 5/13 & -11/13 & -1/13 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/13 & 17/13 & -2/13 \\ -4/13 & 1/13 & 6/13 \\ 5/13 & -11/13 & -1/13 \end{pmatrix}$$

Determinante asociado a una matriz asociada

- **Determinante** → un número real asociado a una matriz cuadrada que nos proporciona información sobre la matriz
- Llamamos n-ésimo menor adjunto de una matriz A a α_{ij} donde $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$ donde A_{ij} es la submatriz de A que se quitar la fila i y la columna j: $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \alpha_{ij}$
- El valor del det → es independiente de la fila elegida (o por columnas). Nos interesa que la fila tenga muchos ceros.

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ \boxed{5 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1} \end{pmatrix}$$

$$|A| = 5(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 5\left(1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) + 1\left(1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right) = -5(2 \cdot 8 + 6) + \left(-(16 \cdot 3) - 1(2 \cdot 12)\right)$$

$$= -3$$

Cálculo de la inversa por determinantes

- La matriz adjunta de A $\rightarrow Adj(A) = (\alpha_{ij})_{m \times n}$
- Si A es una matriz regular $\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)} (Adj(A))^t$

Rango de una matriz

- Definimos el rango de una matriz como el número de filas no nulas que tiene su matriz de Gauss reducida (A^*)
- El rango es igual al número de pivote
- Para una matriz $A_{m \times n}$. $rg(A) \leq min\ (m\ y\ n)$
- Decimos que una matriz es regular cuando $rg(A) =$ orden de A

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \overset{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Definiciones básicas

- Ecuación lineal : $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$
- Puede tener n incognitas (de grado 1)
  - $(a_1, a_2, \dots, a_n)$: escalares
  - $(x_1, x_2, \dots, x_n)$: incognitas
  - b : escalar
  - Solución : asignación de valores a las incognitas
- Sistemas de ecuaciones lineales : conjunto de ecuaciones con n incognitas
  - $$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots a_{n1}x_n = b_1 \\ a_{12}x_1 + \dots a_{n2}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{1n}x_1 + \dots a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$$
  - Solución : cada una de las asignaciones que demos a las incognitas (se cumplen todas las igualdades).
  - Solución general : conjunto de todas las soluciones del sistema
- Sistemas equivalentes : tienen la misma solución general
  - Podemos transformar un sistema lineal equivalente en otro equivalente
    - Intercambiando ecuaciones
    - Multiplicando una ecuación por un escalar no nulo
    - Sumando a una ecuación, otra multiplicada por un escalar (solo entre filas)

Forma matricial de un sistema equivalente lineal

- Podemos escribir cualquier sistema equivalente lineal de forma matricial
  - $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow AX = B$$
    - A (matriz de coeficientes)
    - X (matriz de incognitas)
    - B (matriz de terminos independientes
- Matriz ampliada $(A|B) = A^*$
- Sistemas homogéneos: Términos independientes nulos $(B=0)$
  - $$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x \qquad\quad + 3z = 0 \\ 2x + 2y \qquad\;\; = 0 \end{array}\right\}$$
  - La solución lineal siempre es 0

Clasificación de los sistemas según el número de soluciones

- Sistemas incompatibles: sin solución
- Sistemas compatibles:
  - Determinados: tiene una solución
  - Indeterminados: tiene infinitas soluciones
- Discutir un sistema
  - clasificando sin resolverlo
  - Estudiando el rango de A y de $(A|B) = A^*$

Teorema de Rouché-Frobenius

- Compatible: $rg(A) = rg(A^*)$
  - Determinado: $rg(A)$ = número de incógnitas
  - Indeterminado: $rg(A) <$ número de incógnitas
- Incompatible: $rg(A) \neq rg(A^*)$

Ej:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 - 3x_3 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 10 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right) \underset{F_2 = 2F_2 - F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 = 5F_2 + F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -2 & -10 \end{array}\right) \underset{\substack{F_3 = -\frac{F_3 - 4F_1}{2} \\ F_2 = -F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} rg(A) = 3 \\ rg(A^*) = 3 \end{array}$$

$rg(A) = 3 =$ nº de incógnitas. SCD

Ej:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y + 4z = 2 \\ 2x + 7y + 9z + 2t = 10 \\ -y + z - 2t = -3 \\ x + 3y + 4z = 5 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_4 = F_4 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{F_2 = F_2 - 2F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} rg(A) = 3 \\ rg(A^*) = 4 \end{array}$$

$rg(A) \neq rg(A^*)$. SI

Métodos de resolución

- ## Método de Cramer
  - Sistema con n ecuaciones y n incognitas (matriz cuadrada)
    - $rg(A) = n \longleftrightarrow$ matriz es invertible $\rightarrow$ SCD
  - Sistema de Cramer: SCD con n ecuaciones y n incognitas cuya A es regular
    - Se puede resolver por determinantes

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

    - Solución

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{1n} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Ej:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 3 \\ 4y + z = 2 \\ 3z + 2t = 1 \\ 7t = 4 \end{array}\right\} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \end{array}\right)$$

$$|A| = 7 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 3 (8) = 168$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{168} = \frac{-4 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 7 \left(1 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right)}{168} = \frac{-40 + 7(5+6)}{168} = \frac{37}{168}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix}}{168} = \frac{2 \left(2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \right)}{168} = \frac{2(42+1)}{168} = \frac{86}{168}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}}{168} = \frac{2 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}}{168} = \frac{8(7-8)}{168} = \frac{-8}{168}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{168} = \frac{2 \cdot 4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{168} = \frac{8 \cdot 12}{168} = \frac{96}{168}$$

- ## Método de Gauss
  - Este método nos permite resolver cualquier sistema
  - Sistema escalonado: es aquel sistema en el que A^* es una matriz escalonada por filas
  - Si A^* es escalonada por filas, A también
    - Podemos resolver el sistema fácilmente
    - Una vez tenemos un sistema equivalente que sea escalonado
      - SI: no tiene solución
      - SCD: lo resolvemos de forma regresiva
      - SCI: lo resolvemos igual, pero introducimos parámetros
  - Proceso
    1. Mediante transformaciones elementales convertimos en sistema escalonado
    2. Discutir con Rouché Frobenius
    3. Resolvemos

Ej:

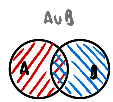
$$\left.\begin{aligned} x + 4y + z &= 2 \\ x + 5y + 4z &= 2 \\ 2x + 9y + 6z &= 6 \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 9 & 6 & 6 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - 2F_1}{\overset{F_2 = F_2 - F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

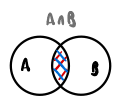
$$\overset{F_2 = F_3 - F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{aligned} & z = 2 \\ & y + 4z = 2 \;;\; y = -6 \\ & x + 4y + z = 2 \;;\; x = 24 \end{aligned}$$

Estructuras algebraicas

Conceptos básicos

- Conjunto: colección bien definida
  - Los elementos han de estar bien definidos y determinados con anterioridad a ser agrupados
  - Al pensar en un elemento debemos tener claro si pertenece o no al conjunto
  - Cada elemento es diferente
  - El propio conjunto no puede ser un elemento de él mismo. Lo definimos percibiendo todos sus elementos
    - Por compresión: enumerando los diferentes elementos
    - Por extensión: mediante la propiedad que los caracteriza
  - Relación de pertenencia: se establece entre un conjunto y sus elementos $a \in A$
  - Igualdad entre conjuntos: $A = B \longleftrightarrow a \in A = b \in B \,;\, b \in B \longrightarrow b \in A$
  - Inclusión: $A \subset B \longleftrightarrow a \in A \longrightarrow a \in B$
  - Complemento de un conjunto: dados $A \subset B$, $A^c_B = \{x \in B \,/\, x \notin A\}$
  - Conjunto vacío: $\emptyset = \{x \,/\, x \neq x\}$
    - Es un subconjunto de cualquier conjunto
  - Unión de conjunto: $A \cup B = \{x / x \in A \text{ o } x \in B\}$
  - Intersección de conjuntos: $A \cap B = \{x / x \in A \text{ y } x \in B\}$





  - Operación interna: Sea $x \neq \{\emptyset\}$, está dotado de una operación interna

$$\left.\begin{array}{l} X \times X \rightarrow X \\ (x,y) \rightarrow xy \end{array}\right\} x, y, xy \in X$$

  - Operación externa: Sea $x \neq \{\emptyset\}$, esta dotado de una operación externa

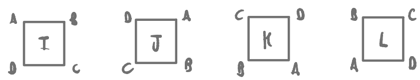
$$\left.\begin{array}{l} X \times X \rightarrow Y \\ (x,y) \rightarrow xy \end{array}\right\} \begin{array}{l} x, y \in X \\ xy \in Y \end{array}$$

  - Estructura algebraica: Conjunto que esté dotado de operaciones entre sus elementos $(X, \cdot, *, -)$

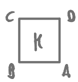
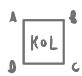
Estructura de grupo

- Conjunto no vacío dotado de una operación interna $(G, \cdot)$
- La operación interna tiene que verificar
  - Es asociativa: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
  - Existe un elemento neutro: $e \cdot x = x \cdot e = x \quad \forall x \in G$
    - El elemento neutro es neutro por derecha e izquierda (conmuta)
    - El elemento neutro es único
  - Existe un elemento inverso o simétrico $\forall x \in G$
    - El elemento simétrico del elemento simétrico es el propio elemento
    - Conmuta
    - Es único para cada elemento
    - $e \cdot e = e$
- Grupo Abeliano: grupo en que la operación interna conmuta

Ej: Conjunto de todas las rotaciones del cuadrado

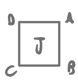
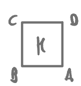
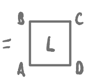
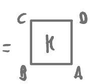


Operación: $\circ$, $I \circ J \to I$ aplico sobre J una rotación

$K \circ L =$  $\downarrow 180°$ $=$ 

1) Si es una operación interna

$J \circ (K \circ L) = (J \circ K) \circ L$

$K \circ L =$  $J \circ (K \circ L) =$  $J \circ K =$  $(J \circ K) \circ L =$ 

2) Es asociativo
3) $\exists$ elemento neutro $\to I$
4) $\exists$ elemento inverso

Ej: $X : \{a, b\}$ Operación $\begin{cases} aa = a \\ ab = b \\ b \cdot a = b \\ b \cdot b = b \end{cases}$

¿$\{X, \cdot\}$ es un grupo?

1) V

2) $a(ab) = (aa)b$

3) Elemento neutro → a

4) ∄ inverso no es un grupo

Subconjuntos

- Dado un conjunto G dotado de una operación interna $(\cdot)$ de forma que $(G, \cdot)$ tiene estructura de grupo, $H \subset G$ es un subgrupo si
  - $\forall\, x, y \in H,\ x \cdot y \in H$
  - $\forall\, x \in H,\ x^{-1} \in H$

  $\Big\}$ Elemento neutro $\in H$

Grupo de permutaciones

- Aplicando biyectividad → relacionar cada elemento del espacio de partida con uno del de llegada (y viceversa)
- Conjunto de aplicaciones biyectivas + composición de funciones → estructura de grupo
- Definición una permutación de un conjunto finito es una función biyectiva del conjunto en sí mismo
- Conjunto finito → $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$
- Permutación $\sigma : I_n \to I_n$
  - $i \to \sigma(i) \;/\; i \in I_n,\ \sigma(i) \in I_n$
  - $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & & \sigma(n) \end{pmatrix}$
  - $S_n = \{\sigma : I_n \to I_n\}$

Ej: $I_3 = \{1, 2, 3\}$

$S_3 = \{\sigma, I_3 \to I_3\}$

1 2 3   3 2 1
2 3 1   2 1 3
3 1 2   1 3 2

$\underbrace{n!\ \text{combinaciones}}_{\text{Orden de grupo}}$

$\sigma_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Ej: $(S_3, \circ)$ → estructura de grupo

1) Operación interna ✓
2) Propuesta asociativa ✓
3) Elemento neutro → σ_e
4) Elemento inverso →

$(\sigma_3 \circ \sigma_4) = \sigma_3(\sigma_4(x))$

$\sigma_4(1) = 3 \qquad \sigma_3(3) = 1$

$\sigma_4(2) = 1 \qquad \sigma_3(1) = 2$

$\sigma_4(3) = 2 \qquad \sigma_3(2) = 3$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Estructura de anillo

- Dado un conjunto A dotado de dos operaciones internas, $(A, +, \cdot)$ tiene estructura de anillo si
  - $(A, +) \rightarrow$ tiene estructura de grupo abeliano
    - La operación es interna
    - La operación es asociativa
    - Tiene elemento neutro
    - Tiene elemento inverso } Pertenece a A
    - Que la operación sea conmutativa
  - $(A, \cdot) \rightarrow$ tiene estructura de semigrupo
    - La operación es interna
    - La operación es asociativa
  - Las dos operaciones cumplen la propiedad distributiva
    - $a(b+c) = ab + ac$
    - $(a+b)c = ac + bc$
- Si además
  - La operación tiene elemento neutro
    - $(A, +, \cdot) \rightarrow$ Anillo con elemento unidad
  - La operación es conmutativa
    - $(A, +, \cdot) \rightarrow$ Anillo conmutativo

Ej: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

1) $(\mathbb{Z}, +)$ es grupo abeliano
2) $(\mathbb{Z}, \cdot)$ es semigrupo (conmutativo, elemento neutro 1)
3) Propiedad distributiva

Ej: $(\mathbb{R}(x), +, \cdot)$ es semigrupo?

1) $(\mathbb{R}(x), +)$ es grupo abeliano?

Operación interna: $\left.\begin{array}{l} p(x) = x^2+3 \\ q(x) = x^3-2 \end{array}\right\}$ Sí

Asociativa: $p(x) + (q(x) + r(x)) = p(x) + q(x) + r(x)$

$\exists$ elemento neutro: $0 \in \mathbb{R}(x)$

$\exists$ elemento inverso

Conmutativo

2) $(\mathbb{R}(x), \cdot)$ es semigrupo?

Operación interna

Operación asociativa

3) Cumple la propiedad distributiva

$p(x)(q(x) + r(x)) = p(x)q(x) + p(x)r(x)$

Ej: Z_n (conjunto que se obtiene del resto de dividir $x \in \mathbb{N}$ entre n)

$\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\} = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$

$[0] + [0] = 0$

$[2] + [2] = \text{mod}(2+2) = [1]$ (suma)

$[2] \cdot [2] = \text{mod}(2 \cdot 2) = [1]$ (producto)

$\mathbb{Z}_3$ con esta suma y producto $\rightarrow$ Anillo conmutativo con elementos unidad

$(\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow$ no existen divisores de 0 $(a \cdot b = 0)$

$(\mathbb{Z}_3, +, \cdot) \rightarrow$ si existen divisores de 0 $([3] \cdot [1] = 0)$

$(\mathbb{Z}_4, +, \cdot) \rightarrow [2][2] = [0]$

$(\mathbb{Z}_1, +, \cdot) \rightarrow$ si dominio interno

Teorema $\mathbb{Z}_p$ (p primo) $\rightarrow$ dominio de integridad

- Dominio de integridad: Anillos que no admiten divisores
- Resultado: Suponiendo un anillo con elemento unidad, el elemento neutro de la suma nunca tendrá inverso en el producto
  $\forall a \in X, \exists a^{-1} / a \cdot a^{-1} = e$ excepto para 0/ neutro de la suma

Estructura de cuerpo

- Supone mos un conjunto dotado de dos operaciones se cumple:
  - $(\mathbb{K}, +, \cdot) \rightarrow$ anillo con elementos unidad
  - Los elementos de $\mathbb{K}$ distinto al neutro respecto a la suma tendrán inverso respecto al producto
    $(\mathbb{R}, +, \cdot) \rightarrow$ cuerpo conmutativo
- Características de un cuerpo $\rightarrow n \in \mathbb{N} / nx = 0$
  - $\mathbb{R}, \mathbb{Q} \rightarrow$ cuerpos de característica 0 $x \in X$
  - $\mathbb{Z}_p$ (p, primo) $\rightarrow$ cuerpo de características p

Ej: $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$[2]_5 \cdot [3]_5 = \text{mod}\left(\frac{6}{5}\right) = [1]_5$

- Extensión de un cuerpo:
  - $(\mathbb{Q}, +, \cdot) \rightarrow$ estructura de cuerpo
  - Extensión $\rightarrow (\mathbb{Q}\sqrt{2}, +, \cdot) \rightarrow$ elementos de la forma $a + b\sqrt{2}$
  - Operaciones $\rightarrow$ suma $(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = a + c + (b+d)\sqrt{2}$
    - El cuerpo n complejos es una extensión del cuerpo de nº reales

Espacios vectoriales

Definición y propiedades

- Espacio vectorial $(V, +, \cdot)$

  $+$: op interna $\cdot$: op externa

  - $(V,+) \rightarrow$ Estructura de grupo abeliano
    - Operación interna
    - Operación asociativa
    - Existencia de elemento neutro
    - Existe un elemento inverso para cada $\vec{x} \in V$
    - Operación conmutativa
  - La operación $\cdot$ es externa
  - La operación cumple la propiedad asociativa
  - $\exists$ elemento neutro respecto $\cdot$
  - Se cumple la propiedad distributiva
    - La operación $+$ es la suma de vectores
    - La operación $\cdot$ va a ser el producto de un escalar
    - Los elementos de V se llaman vectores

Propiedades

- $\vec{v} \cdot 0 = \vec{0} \quad \forall \vec{v} \in V$
- $a \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad \forall a \in K$
- $a \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad (a = 0, \vec{v} = \vec{0})$
- $(-1)\vec{v} = -\vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$

Ejemplos clásicos

- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- Conjunto de matrices $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$
- Conjunto de polinomios de grado n $(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$
- El conjunto de funciones continuas en el intervalo $[0,1]$ $\varphi[0,1]$

Dependencia e independencia lineal

- Combinación lineal dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \in V$, podemos llamar combinación lineal a cualquier vector de la forma
  - $\vec{w} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$
- Independencia lineal: partimos de un conjunto finito de vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ decimos que es un conjunto linealmente independiente, para obtener $\vec{0}$ a parte de una combinación lineal tenemos que hacer 0 todos los escalares.
  - $\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{k}_1 = \vec{0} \rightarrow \vec{a} = 0 \ \forall i \in [1, k]$
- Dependencia lineal $\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v}_i = \vec{0}$ $\exists a_i \neq 0$
- Cualquier conjunto de vectores que contenga 0 va a ser lineal dependiente
  1. $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} \rightarrow$ linealmente dependiente
     $S \leq S' \rightarrow S'$ es linealmente dependiente
  2. S es linealmente independiente $\rightarrow S' \leq S$, S' es linealmente independiente
- Estudiar la dependencia lineal (si un sistema es homogéneo)
  - Si es SCD $\rightarrow$ es linealmente independiente
  - Si es SCI $\rightarrow$ es linealmente dependiente

Ej: $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$

$\vec{w} = (\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$

$\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

$a_1\vec{v} + a_2\vec{w} + a_3\vec{u} = \vec{0}$

$a_1(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) + a_2(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) + a_3(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (0,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} a_1 v_1 + a_2 w_1 + a_3 u_1 &= 0 \\ a_1 v_2 + a_2 w_2 + a_3 u_2 &= 0 \\ a_1 v_3 + a_2 w_3 + a_3 u_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & u_1 \\ v_2 & w_2 & u_2 \\ v_3 & w_3 & u_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Concepto de base y dimensión

- Dado un espacio vectorial V, decimos que es un espacio de dimensión finita si $\exists\ S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$ de forma que $\forall\ \vec{v} \in V$ existe una combinación lineal de los elementos de S
- S será un sistema generador de V
  - Un sistema generador S del espacio V no tiene por que ser linealmente independientes
  - Un conjunto linealmente independiente no tiene por que ser sistema generador, podemos completarlo para que sea sistema generador
  - Base: dado un espacio vectorial V, un subconjunto de vectores $B \subseteq V$ es base si y solo si:
    - Es sistema generador
    - Es linealmente independiente

Teorema de la base

- Dado un espacio vectorial V de dimensión finita todas las bases van a tener el mismo nº de vectores. A ese nº de vectores lo llamaríamos dimensión de V

Ej: En $\mathbb{R}^3$

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$
$$B' = \{(1,2,0),(0,0,-3),(4,0,1)\}$$

$$\alpha(1,2,0)+\beta(0,0,-3)+\gamma(4,0,1)=(0,0,0)$$

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array}\end{array}$$

Cuando queramos obtener vectores es mejor colocarlos en filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow F_2}{\overset{F_2 = F_3 - 4F_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = (x,y,z) \in V$$

$$\alpha(1,2,0)+\beta(0,0,-3)+\gamma(4,0,1)=(x,y,z)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & x \\ 0 & 0 & -3 & y \\ 4 & 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

$rg\,A = rg\,A^* = 3$; SCD → es un vector generador

- Cualquier sistema generador puede reducirse a un conjunto de linealmente independiente
- Cualquier conjunto linealmente independiente, puede completarse hasta formar un sistema generador
- Cualquier base de V tendrá el mismo nº de vectores
- Dado N/ dimesiones (V) = n
    - Cualquier subconjunto linealmente independiente formado por por n vectores es base de V
    - Todo sistema generador formado por n vectores es una base de V (y linealmente independiente)

Ej: ¿Es U una base de $\mathbb{R}^3$?

$U = \{(2,3,1),(1,4,2),(1,1,1),(1,1,0)\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las filas F_1, F_2 y F_3 son linealmente dependientes y F_4 independiente

Coordenadas y cambio de bases

- Dado un espacio vectorial V de dimensión n, podemos representar $\bar{v} \in V$ como una ecuación lineal de los vectores de un sistema generador
- Si es una base, esa ecuación lineal es única vamos a llamar coordenadas a los coeficientes de esa combinación lineal

Ej: $\underbrace{(1,0),(0,1),(2,3)}_{(5,4)}$

$\underbrace{5(1,0),4(0,1)}_{1(1,0) < 2(0,1)+2(2,3)}$

Coordenadas: coeficiente de combinación lineal de los vectores de un vector B que nos devuelve $\vec{v}$, $\vec{v} \in V$ respecto a una base B de V. $\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n)_B$

Ej: Espacio de polinomios $P_3(x)$; $B\{1, x, x^2, x^3\}$

$q(x) = 3 + 4x^2 + 5x^3 \rightarrow \vec{q} = (3, 0, 4, 5)_B$

- Podemos representar cualquier vector de un V de dimensión finita como un vector $\mathbb{R}^n$ (más fácil trabajar con vectores que con coordenadas)
- Dado V / dimensión (V) = n (finita). $\vec{u}, \vec{v} \in V$; $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots u_n)_B$ $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ (si todos los elementos están en la misma base)

  $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)_B$

  $K\vec{u} = (Ku_1, Ku_2, \dots, Ku_n)_B$
- Podemos estudiar la dependencia lineal de un conjunto de vectores en coordenadas respecto a una misma base

  $B = \{(1,0),(0,1)\} \rightarrow \vec{v} = (3,1)_B$

  $B' = \{(2,1),(1,3)\} \rightarrow \vec{w} = (3,1)_{B'} = 3(2,1) + 1(1,3) = (7,6)$

- En general, las expresiones de un mismo vector en coordenadas respecto diferentes bases serán diferentes. Existe una relación entre bases que nos permite hacer un cambio
- Sea un espacio vectorial V, de dimensiones finitas n y sean $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n\}$ y $B' = \{\bar{v}_1', \bar{v}_2', \dots \bar{v}_n'\}$ bases de B

Podemos representar $\vec{v} \in V$ en las dos bases

$$\vec{v} = (a_1, \dots, a_n)_B = (a_1', \dots, a_n')_{B'}$$

Podemos representar los vectores de B' en coordenadas respecto a B

$$\bar{v}_j' \in B' \longrightarrow \bar{v}_j' = (p_{1j}, p_{2j}, \dots p_{nj})_B \to \bar{v}_j' = \sum_i^n \underset{\text{ref } B \quad \text{ref } B'}{p_{ij}} \vec{v}_i \; (\vec{v} \in B)$$

Conocemos $\vec{v} \in V$ en coordenadas respecto a B

$$\vec{v} = \underbrace{\sum_{j=1}^n a_j' \vec{v}_j'}_{\vec{v} \text{ en coordenadas respecto } B} = \sum_{j=1}^n a_j' \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^n p_{ij} \vec{v}_i}_{\vec{v}_j' \text{ como espacio lineal de los vectores de } B}\Big) = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n p_{ij} a_j\Big) \vec{v}_i$$

Ej: $B' = \{(2,1), (1,0)\}$; $B = \{(1,1), (2,0)\}$

Buscamos los vectores de B' en la base respecto de B

$$(2,1) = \alpha(1,1) + \beta(2,0) \quad \begin{cases} \alpha + 2\beta = 2 \\ \alpha = 1 \end{cases} \longrightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$(1,0) = \gamma(1,1) + \lambda(2,0) \quad \begin{cases} \gamma + 2\lambda = 2 \\ \gamma = 0 \end{cases} \longrightarrow \lambda = 1$$

$$\text{Vectores de } B' \begin{cases} \bar{v}_1' = (1, \frac{1}{2})_B \\ \bar{v}_1' = (0, \frac{1}{2})_B \end{cases}$$

$$\vec{u} = (3,1)_{B'} = 3\bar{v}_1' + 1\bar{v}_2' = 3(1, \tfrac{1}{2})_B + (0, \tfrac{1}{2})_B = (3,2)_B$$

Podemos escribirlo en forma matricial

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & p_{2n} \\ \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_n' \end{pmatrix}_B \longrightarrow$$

Cada columna representa un vector de B en coordenadas respecto a B'

$P_{B'B}$ = cambio de B' a B

$P_{BB'}$ = cambio de B a B'

Las matrices de cambio de base siempre son regulares

Ej: $\vec{v} = (2,3,5)_{B'}$

$B' = \{(2,0,3),(0,3,1),(0,1,0)\}$, $B = \{(1,2,0),(0,0,3),(2,0,0)\}$

$(2,0,3) = \alpha(1,2,0) + \beta(0,0,3) + \omega(2,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha + 2\omega = 2 \ ; \ \omega = 1 \\ 2\alpha = 0 \ ; \ \alpha = 0 \\ 3\beta = 3 \ ; \ \beta = 1 \end{cases} \qquad (0,1,1)$$

$(0,3,1) = \alpha(1,2,0) + \beta(0,0,3) + \omega(2,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha + 2\omega = 0 \ ; \ \omega = -\frac{3}{4} \\ 2\alpha = 3 \ ; \ \alpha = \frac{3}{2} \\ 3\beta = 1 \ ; \ \beta = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{4}\right)$$

$(0,1,0) = \alpha(1,2,0) + \beta(0,0,3) + \omega(2,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha + 2\omega = 0 \ ; \ \omega = -\frac{1}{4} \\ 2\alpha = 1 \ ; \ \alpha = \frac{1}{2} \\ 3\beta = 0 \ ; \ \beta = 0 \end{cases} \qquad \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}\right)$$

$\vec{v}_2' = (3/2, 1/3, -3/4)_B$, $\vec{v}_3' = (1/2, 0, -1/4)_B$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & 1/3 & 0 \\ 1 & -3/4 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Subespacios vectoriales

Dado un espacio vectorial V, de $\dim(V) = n_1$. U será subespacio de V si por sí mismo es un espacio vectorial con las operaciones definidas en V.

$U \subseteq V$

$0 \in U$

- Cualquier combinación lineal seguirá perteneciendo a U

  $U = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_e\}$

  $a_1, \dots, a_e \in \mathbb{K}$

  $\sum_{i=1}^{e} a_i \vec{u} \in U$

- Un espacio vectorial no trivial siempre tendrá dos subespacios como mínimo

  El trivial $\vec{u} = \{0\}$

  El mismo $U = V$

- Además puede tener subespacios propios
- Tomamos $S \subseteq V$ (S no subespacio)

  Podemos añadir todas las combinaciones lineales de los vectores de $S \to L(S)$ → tiene estructuras de espacio vectorial

  $L(S)$ será el subespacio más pequeño que contenga S

  S es un sistema generador de $L(S)$

- $L(S) = U$
- Como U tiene estructura de espacio vectorial

  Tiene una base

  Tiene dimensión $\dim(U) \leq \dim(V)$

Ecuaciones de un subespacio

Dado V de $\dim(V) = n$

Dado $U \subseteq$ de $\dim(U) = r$

U se puede representar como el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo

Dadas $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ base de V y $B_U = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ base de U.

- Los vectores de B_U pertenecen a $V \rightarrow$ podemos representarlos en coordenadas respecto a la base B

$$\vec{u}_j = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1})_B$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots a_{1r}\lambda_r \\ \vdots \\ x_n = a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \dots a_{nr}\lambda_r \end{array}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas}$$

Ecuaciones implícitas o cartesianas (de U en la base de V)

- Eliminando los parámetros λ_i, obtendremos $n-r$ ecuaciones
- Usando como incognita λ_i y como término inicial x_i

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} (\lambda_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 2 & x_1 \\ -3 & x_2 \\ -2 & x_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} 2 & x_1 \\ 0 & 2x_2 + 3x_1 \\ 0 & x_1 + x_3 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x_2 + 3x_1 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \text{Ecuaciones implícitas}$$

Operaciones entre subespacios

Intersección: siempre tiene estructura de espacio vectorial

Unión: no tiene porque ser un subespacio vectorial (considerar el menor subespacio que contenga a R y S) (Espacio suma $(R+S)$)

- $R+S$ es el menor subespacio que contiene R y S
- Si $R \cap S = \{\emptyset\} \rightarrow$ Suma directa $\rightarrow R \oplus S$. La forma de definir $\vec{v} = \vec{r} + \vec{s}$ es única ($\vec{r} \in R$ y $\vec{s} \in S$)
- Con es suma directa podemos definir el espacio complementario (decimos que U y V son complementarios $U \cap V = \{\emptyset\}$ $(U+V = U \oplus V)$

Relación entre dimensiones

$U, W \subseteq V$

$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$

$\langle u, v \rangle = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}|| \cos\theta$

$||\vec{u}|| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \rightarrow$ módulo

Resumen

1) Comprobar que un conjunto $(V,+,-)$ tiene estructura de espacio vectorial

   i) $\vec{0} \in V$

   ii) $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \in V$

   $(\forall \alpha, \beta \in K, \ \forall \vec{u},\vec{v} \in V)$

Ej: $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x+y=1\}$

$$\text{i)}\ \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ 0+0=1 \end{array}\right\} \vec{0} \notin V$$

ii) $(1,0,0,0) \in E$

$\alpha(1,0,0,0) = (\alpha,0,0,0) \notin E$

2) Comprobar la independencia lineal de un conjunto de vectores (Dos formas)

- Construir una matriz en la que las filas sean cada uno de los vectores (método de Gauss) (filas nulas → vector linealmente dependiente)
- Nos permite obtener bases. $S=\{\vec{u},\vec{v}\} \to \alpha\vec{u}+\beta\vec{v}=\vec{0}$, (si a y b = 0 → linealmente independiente)

  $\alpha(u_1,u_2,u_3)+\beta(v_1,v_2,v_3)=(0,0,0)$

  planteamos un sistema homogéneo. Si SCD lineal independiente

Ej: $B=\{\vec{u}=(1,2,1), \vec{v}=(1,0,-1), \vec{w}=(4,5,2)\}$

Comprobamos dependencia lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

3) Demostrar que un conjunto de vectores es una base de

i) Sistema generador

ii) Son linealmente independiente

Ej: $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$

$\alpha(\vec{u}) + \beta(\vec{v}) + \gamma(\vec{w}) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$

$$a_1 = \alpha + \beta + 4\gamma \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & a_1 \\ 2 & 0 & 5 & a_2 \\ 1 & -1 & 2 & a_3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & a_1 \\ 0 & -4 & -3 & a_2 - 2a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_3 - a_1 \end{array}\right)$$
$$a_2 = 2\alpha + 5\gamma$$
$$a_3 = \alpha - \beta + 2\gamma$$

SCD, sistema generador

4) Cambiar de base B a B'

- Representamos los vectores de B en coordenadas respecto B'
- Construimos la matriz de cambio de base $P_{BB'}$ (columnas con los vectores de B en B')
- Multiplicamos $P_{BB'} \vec{X}_B = X_{B'}$

  $(P_{BB} = P_{BB}^{-1})$

Ej: $B' = \{(1,2,1), (1,0,1), (4,5,2)\}$

$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$\vec{x} = (15, 17, 3)_B$

$(1,0,0)^{-1} = \alpha(1,2,1) + \beta(1,0,-1) + \gamma(4,5,2)$

$(1,0,0)_B = (\alpha, \beta, \gamma)_B$

Como B es canónica nos interesa $P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

y hacer $P_{BB'} = P_{B'B}^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3 & -5/2 \\ -1/2 & 1 & -3/2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5) Subespacios vectoriales

$$\text{Ecuaciones implícitas} \underset{\text{resolver un sistema (x,y,z independientes)}}{\rightleftarrows} \text{Ecuaciones paramétricas} \underset{\text{asignamos parámetros}}{\rightleftarrows} \text{Base}$$

Ej: $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x+y-z=0\}$

$2x+y-z=0 \rightarrow$ ecuciones implícitas

$(2\ 1\ -1 \mid 0)$

$$\left.\begin{aligned} x &= \mu \\ y &= \lambda - 2\mu \\ z &= \lambda \end{aligned}\right\} \quad 3-1=2 \ ; \quad B=\{(1,-2,0),(0,1,1)\}$$

6) Espacio intersección

Los vectores cumplen las ecuaciones de los dos subespacios

- Planteamos un sistema de ecuaciones con las ecuaciones implícitas de los subespacios

7) Espacio suma

Construimos un sistema generador con la base de subespacios implicados. Nos quedamos con los linealmente independientes $\rightarrow$ base

Aplicaciones lineales

Definición y propiedades

Aplicación lineal: función entre dos espacios vectoriales

Conserva la estructura de espacio vectorial

Sean V y V' dos espacios vectoriales, f es una aplicación lineal si $f\ V \longrightarrow V'$

Dados $u, v \in V$

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$$

Ej: $f\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = (2x, y-z)$$

$\vec{u}\ (u_1, u_2, u_3)$

$\vec{v}\ (v_1, v_2, v_3)$

- $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

$$f(\vec{u}+\vec{v}) = f(u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3) = (2u_1+2v_1, u_2+v_2-u_3-v_3)$$

$$f(\vec{u})+f(\vec{v}) = (2u_1, u_2-u_3) + (2v_1, v_2-v_3) = (2u_1+2v_1, u_2+v_2-u_3-v_3)$$

- $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$

$$f(\alpha\vec{u}) = (\alpha 2\vec{u}_1, \alpha u_2 - \alpha u_3)$$

$$\alpha f(\vec{u}) = \alpha(2\vec{u}_1, u_2-u_3) = (\alpha 2\vec{u}_1, \alpha u_2 - \alpha u_3)$$

Propiedades inmediatas de la definición

$$f(\vec{0}) = \vec{0}$$

$$f(-\vec{v}) = -f(\vec{v})$$

$$f(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \ldots + a_n\vec{v}_n) = a_1 f(\vec{v}_1) + a_2 f(\vec{v}_2) + \ldots + a_n f(\vec{v}_n)$$

Ej: Aplicación identidad

$I: V \to V$

$I(\vec{v}) \to (\vec{v})$

Aplicación nula

$0: V \to V'$

$0(\vec{v}) \to \vec{0}$

Monomorfismos, epimorfismos e isomorfismos

sea $f: V \to V'$

Si $V = V'$ es un endomorfismo

Si a cada elemento de V le corresponde uno diferente de V', es una aplicación inyectiva o monomorfismo

Si a cada elemento de V' le corresponde uno diferente de V, es una aplicación sobreyectiva o epimorfismo

Si es inyectiva y sobreyectiva a la vez, tendremos una operación biyectiva o isomorfismo

Podemos caracterizarlos según como se comportan con un conjunto de vectores

- Monomorfismo: si $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es un conjunto lineal independiente de V_1

  $S' = \{f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)\}$ conjunto lineal independiente de V'
- Epimorfismo: $S\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es un sistema generador de V

  $S' = \{f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)\}$ es un sistema generador de V'
- Isomorfismo: si $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ es una base de V_1

  $B = \{f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_n)\}$ es una base de V'

Operaciones entre aplicaciones lineales

Suma de aplicaciones

$f+g : V \to V'$

$(f+g)(\vec{v}) = f(\vec{v}) + g(\vec{v})$

Ej: $f, g \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (y, -x)$

$g(x,y) = (x, -y)$

$(f+g)(\vec{v}) = (y+x, -x-y)$

$f(\vec{v}) + g(\vec{v}) = (y, -x) + (x, -y) = (x+y, -x-y)$

Ej: $h(x,y) = (y+x, -x-y)$

$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (u_1, u_2) \\ \vec{v} = (v_1, v_2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} h(\vec{u}+\vec{v}) = h(\vec{u}) + h(\vec{v}) \\ h(\alpha\vec{u}) = \alpha h(\vec{u}) \end{array}$

$h(\vec{u}+\vec{v}) = h(u_1+v_1, u_2+v_2) = (u_2+v_2+u_1+v_1, u_1+v_1-u_2-v_2)$

$h(\vec{u}) + h(\vec{v}) = (u_2+u_1, -u_1-u_2) + (v_2+v_1, -v_1-v_2)$

$= (u_2+v_2+u_1+v_1, u_1+v_1-u_2-v_2)$

$h(\alpha\vec{u}) = (\alpha u_2 + \alpha u_1, -\alpha u_1 - \alpha u_2)$

$\alpha h(\vec{u}) = \alpha(u_2+u_1, -u_1-u_2) = (\alpha u_2 + \alpha u_1, -\alpha u_1 - \alpha u_2)$

Ej: $f \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = (x^2 y^2)$

$\left.\begin{array}{l} \vec{u}\,(u_1,u_2) \\ \vec{v}\,(v_1,v_2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) \\ \alpha f(\vec{u}) = f(\alpha \vec{u}) \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} f(\vec{u}+\vec{v}) = f(u_1 v_1 + u_2 v_2) = (u_1+v_1)^2 (u_2+v_2)^2 \\ f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = u_1^2 u_2^2 + v_1^2 v_2^2 \end{array}\right\}$ No es lineal

Producto por un escalar

$f \ V \to V'$

$af \ V \to V'$

$(af)(\vec{v}) = af(\vec{v})$

Ej: $f(x,y) = f(y,-x)$

$(a,f)(x,y) = af(x,y)$

Composición de aplicaciones lineales

Sea $f \ V' \to V$ y $g \ V' \to V''$

$(f \circ g)(x,y) = f(g(x,y))$

$f \circ g \ V' \to V$

Ej: $f, g \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\left.\begin{array}{l} f(x,y) = (y,-x) \\ g(x,y) = (x,-y) \end{array}\right\} (f \circ g)(x,y) = f(g(x,y)) = f(x,-y) = (-y,x)$

$(1,2) \to f(g(1,2)) = f(1,-2) = (-2,1)$

Aplicación inversa

Sea $f\, V \to V'$ un isomorfismo

f^{-1} aplicación inversa $f^{-1}\, V' \to V$

$f^{-1}(f(x,y)) = (x,y)$

Expresión matricial de una aplicación lineal.

Decimos que dos espacios son isomorfos si existe al menos un isomorfo entre ellos

Tienen la misma dimensión, estructura y propiedades

S' tiene dimensión finita n, va a ser isomorfo a $\mathbb{K}^n$

podemos trabajar en $\mathbb{R}^n$

No isomorfo: Sea $f\, \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ (operación lineal)

Supongamos una base de $\mathbb{K}^n$ $B\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ conocido $f(\vec{v}_1)$

$\vec{v} \in \mathbb{K}^n$, $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n$

$f(\vec{v}) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n \vec{v}_n) = a_1 f(\vec{v}_1) + \dots + a_n f(\vec{v}_n)$

Podremos determinar $f(\vec{v})\ \forall\ \vec{v} \in \mathbb{K}^n$

Por otro lado

$B' = \{\vec{v}_1', \dots, \vec{v}_m'\}$ será una base de $\mathbb{K}^m \to f(\underset{\text{base } B}{\vec{v}_1}) \in \mathbb{K}^m$

Lo podemos representar como combinación lineal de los vectores de B'

$f(\vec{v}_1) = (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{m1})_{B'}$

Podemos determinar la imagen de un vector cualquiera en coordenadas respecto B'

$f(\vec{v}) = (c_{11} a_1 + \dots + c_{1n} a_n)_{B'}$

Le podemos dar estructura matricial

$$(f(\vec{v}))_{B'} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B$$

$M_{f_{BB'}}$: Matriz asociada a la aplicación lineal (respecto a las base B, B')

Ej: $f \; \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f(x,y) = (0, x, x-y)$

$B = \{(2,1), (1,2)\}$

$B' = \{(1,0,2), (2,0,0), (1,1,0)\}$

$$f(\vec{v}_1) = f(2,1) = (0,2,1)_c \xrightarrow{\text{cambio de base}} \left(\tfrac{1}{2}, 2, -\tfrac{5}{4}\right)_{B'}$$

$$f(\vec{v}_2) = f(1,2) = (0,1,-1)_c \longrightarrow (1, 0, 1)_{B'}$$

$$M_{f_{BB'}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 2 & 0 \\ -5/4 & 1 \end{pmatrix}$$

Permite que: $\vec{v} = (5,4)_B \rightarrow (f(\vec{v}))_{B'} = M_{f_{BB'}} \vec{v}$

Las operaciones entre apliciones, se traduciran en operaciones matriciales

$f, g \quad \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$
$\quad\quad\quad\;\; \downarrow \quad\quad\;\; \downarrow$
$\quad\quad\quad\;\; B \quad\quad\;\; B'$

- Suma de aplicaciones lineales. $h = f+g \longrightarrow M_{h_{BB'}} = M_{f_{BB'}} + M_{g_{BB'}}$
- Producto de un escalar. $h = af \rightarrow M_{h_{BB'}} = aM_{f_{BB'}}$
- Composición $\left.\begin{array}{l} f\ \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \\ g\ \mathbb{K}^e \rightarrow \mathbb{K}^n \end{array}\right\}$ $h = f \circ g \longrightarrow M_{h_{BB'}} = M_{g_{BB'}} M_{f_{BB'}}$
- Aplicación inversa $f\ \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ (isomorfismo)

  B, B' (bases de $\mathbb{K}^n$)

  $h = f^{-1}.\ M_{h_{BB'}} = M_{f_{BB'}}^{-1}$

Núcleo e imagen de una aplicación lineal

Sea $f : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$

- Núcleo: $Ker(f) = \{\vec{v} \in \mathbb{K}^n / f(\vec{v}) = \vec{0}\} \subseteq \mathbb{K}^n$

  $Ker(f) \neq \{\emptyset\}$

  Como mínimo contiene $\vec{0}$
- Imagen: $Im(f) = \{f(\vec{v}) / \vec{v} \in \mathbb{K}^n\} \subseteq \mathbb{K}^n$

  Ambas conjuntas tienen conjunto de espacio vectorial

  $\vec{0} \in Im(f),\ \vec{0} \in Ker(f)$

Ej: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (x,y) \longrightarrow Ker(f) \quad x=0 \,;\, y=0$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right\} B_{Ker(f)} = \{(0,0,1)\}$$

Como obtener la base núcleo

1. Planteamos sistemas homogéneas (ecuaciones implícitas)
2. Lo resolvemos (ecuaciones paramétricas)
3. Asignamos un valor (base)

Ej: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y) = (x,0,y-z)$

$Ker(f) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 / f(\vec{v}) = \vec{0}\}$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} B_{Ker}(f) = \{(0,1,1)\}$$

Como obtener la imagen

1. Cogemos una base $\mathbb{K}^n$
2. Calculamos la imagen de la base de $\mathbb{K}^n$

Ej: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$f(x,y,z) = (x-2y, 2x+y)$

$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$f(1,0,0) = (1,2)$

$f(0,1,0) = (-2,1)$

$f(0,0,1) = (0,0)$

$Im(f) = \{(1,2),(-2,1),(0,0)\}$ sistema generador de $Im(f)$

Me quedo con términos linealmente independientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_2 = F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow B_{Im(f)} = \{(1,2),(-2,1)\}$$

Clasificación de aplicaciones lineales

Monomorfismo (inyectiva): $Ker(f) = \vec{0} \longrightarrow dim(Ker(f)) = 0$

Epomorfismo (sobreyectiva): $Im(f) = V' \longrightarrow dim(Im(f)) = dim(V')$

Isomorfismo (biyectiva): $Ker(f) = \vec{0}$; $Im(f) = V'$

Estudio del núcleo y la imagen a partir de la matriz asociada a la aplicación

Sea $f: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$, con B base de $\mathbb{K}^n$ y base B' de $\mathbb{K}^m$, podemos construir una matriz $M_{f_{BB'}}$ (donde las columnas son la imagen de los vectores de B en coordenadas respecto a B')

Estos vectores son sistemas generadores de la imagen

$dim(Img(f)) = Rg(M_{f_{BB'}})$

$Ker(f) = \{\vec{v} \in \mathbb{K}^n / f(\vec{v}) = \vec{0}\}$

$f(\vec{v}) = M_{f_{BB'}} \vec{v}$

$M_{f_{BB'}} \vec{v} = \vec{0}$

Ej: $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z) = (x-z, y)$

$M_{f_{BB'}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

sistema compatible

nº parámetros = nº incognitas - $rg(M_{f_{BB'}})$

$\vec{v} = (x,y,z) = (3,2,1)$

$f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{nº incognitas} = \underbrace{\text{nº parámetros}}_{dim(Ker(f))} + \underbrace{rg(M_{f_{BB'}})}_{dim(Img(f))}$

$dim(\mathbb{K}^n) = dim(Ker(f)) + dim(Img(f))$

Cambio de base en aplicaciones lineales

$f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$M_{f_{BB'}}$

La matriz de la aplicación es diferente para cada par de bases, conservan propiedades (por ej → rango)

Podemos relacionarlas

Sea $f: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

- B y B'' → bases de $\mathbb{K}^n$
- B' y B''' → bases de $\mathbb{K}^m$

Conocemos $M_{f_{BB'}}$

Queremos $M_{f_{B''B'''}}$

$M_{f_{B''B'''}} = \underbrace{P_{B'B'''}}_{m\times m} \underbrace{M_{f_{BB'}}}_{m\times n} \underbrace{P_{B''B}}_{n\times n}$

$$\begin{tikzcd}
f: \mathbb{K}^n \arrow[r] & \mathbb{K}^m \\
B \arrow[r, "M_{f_{BB'}}"] \arrow[d, shift left, "P_{BB''}"] & B' \arrow[d, shift left, "P_{B'B'''}"] \\
B'' \arrow[r, "M_{f_{B''B'''}}"] \arrow[u, shift left, "P_{B''B}"] & B''' \arrow[u, shift left, "P_{B'''B'}"]
\end{tikzcd}$$

Aunque las matrices de cambio de base son regulares la de la aplicación no tiene porque

Si A y C son regulares

$P = AQC$ (P y Q son equivalentes)

Diagonalización de matrices y endomorfismos

Matriz asociada a un endomorfismo ($f\ V \to V$) → matriz cuadrada

$D = P^{-1} M P$ donde D y M son equivalentes

Buscar la base en la que M_f sea lo más sencilla posible (M_f diagonal)

Endomorfismo diagonalizable : $f\ V \to V\ \exists\ B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} / f(\vec{v}_i) = \lambda_i \vec{v}_i$ $\forall i \in (1, \dots, n)$ para ciertas $\lambda_i \in \mathbb{K}$ (autovalores)

Matriz diagonalizable: $M_{n\times n} / \exists$ matriz D semejante $D = P^{-1} A P$ (P = matriz de paso)

Vectores y valores propias

Sea $A \in M_{n\times n}$ de coeficientes reales → pueden existir $\vec{v} \in \mathbb{R} / \underbrace{A\vec{v}}_{f(\vec{v})} = \lambda \vec{v}$

Autovalor : $\lambda \in \mathbb{K} /$ si $\exists\ \vec{v} = \vec{0} / A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Autovector : todo vector no nulo que satisfaga $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ es autovector de A asociado a λ

Polinomio y ecuación característica

Encontrar los autovalores (λ) y los autovectores ($\vec{v}$) de A

- Los autovalores cumplen $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
- Despejando. $A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0 \to (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{v} \neq \vec{0}$. El SEL tiene que ser SCI → $rg(A - \lambda I) < rg\ max$
- $|A - \lambda I| = 0$ polinomio de grado n con respecto a λ

Matriz característica : $A - \lambda I$

Polinómio característico : $P_A(\lambda) = |A - \lambda I|$

Ecuación característica : $|A - \lambda I| = 0$

Multiplicidad algebraica → multiplicidad de λ

Propiedades de autovalores y autovectores

- Cada autovector está asociado a un único autovalor
- Cada autovalor va a estar asociado a infinitos autovectores (junto con $\vec{0}$ tiene estructura de espacio vectorial $\rightarrow$ Espacio propio asociado a λ)
- Si A es una matriz de orden n, existirán n valores propios (autovalores)
- Para que A sea diagonalizable, la multiplicación algebraica de cada λ va a ser igual a la $\underbrace{\text{dimensión del subespacio propio}}_{\text{multiplicidad geométrica}}$ asociado a λ
- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Buscamos los autovalores $\rightarrow \lambda / A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

1. Planteamos la matriz característica

$$\underbrace{(A-\lambda I)}_{\text{matriz caract}}\vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

2. Polinomio característico $|A-\lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$$

3. Ec característica $(-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0)$

4. Autovalores

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

$$\text{Autovalores} \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = -2 \end{cases}$$

5) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$

$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$

6) Buscamos los autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1: \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y - z = 0 \\ -y + 4z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} B_{E_{\lambda_1}} = \{(-1, 4, 1)\}$$

$\lambda_2 = 3:$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} -2x - y + 4z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 10\lambda \\ z = 3\lambda \end{array}\right\} B_{E_{\lambda 2}} = \{(1, 10, 3)\}$$

$\lambda_3 = -2:$ $B_{E_{\lambda 2}} = \{(-1, 1, 1)\}$

Con las 3 vectores sacamos $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$D = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones

Cálculo de potencias

$A \rightarrow A^{10}$

$D = P^{-1} A P \longrightarrow A = P D P^{-1}$

$$A^2 = (P D \underbrace{P^{-1})(P}_{I} D P^{-1}) = P D^2 P^{-1}$$

$$A^3 = (P D^2 \underbrace{P^{-1})(P}_{I} D P^{-1}) = P D^3 P^{-1}$$

$A^n = P D^n P^{-1}$

Ej:

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

Ecuaciones en diferencias. Cadenas de Markov

$$z_n = a_1 z_{n-1} + a_2 z_{n-2} + \dots + a_p z_{n-p}$$

Podemos considerar el siguiente sistema

$$\begin{aligned} z_n &= a_1 z_{n-1} + a_2 z_{n-2} + \dots + a_p z_{n-p} \\ z_{n-1} &= z_{n-1} \\ z_{n-2} &= z_{n-2} \\ &\vdots \\ z_{n-p+1} &= z_{n-p+1} \end{aligned}$$

Ej: $\vec{U}_n = A \cdot \vec{U}_{n-1}$

$$\begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \vdots \\ z_{n-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_{p-1} & a_p \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \vdots \\ z_{n-p} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{U}_n &= A \vec{U}_{n-1} \\ \vec{U}_{n-1} &= A \vec{U}_{n-2} \\ \vec{U}_n &= A^2 \vec{U}_{n-2} \end{aligned}$$

Ej:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} A\vec{v} = \lambda \vec{v} \\ \underbrace{(A - \lambda I)}_{\text{matriz caract}} \vec{v} = \vec{0} \end{array}$$

$$\vec{v} \neq 0 \rightarrow SCI \rightarrow \underbrace{\underbrace{|A - \lambda I|}_{\text{pol caract}} = 0}_{\text{ecuacion caract}}$$

Buscamos los autovalores $\rightarrow$ pol caract

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} \underset{\sim}{F_1 \rightarrow F_1 - (1-\lambda) F_3} \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & -4+6\lambda-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} F_1 \leftrightarrow F_3 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2 \\ \sim \end{array} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+6\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -1(1-\lambda)\lambda(6-\lambda)(6-\lambda) = 0 \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \\ \lambda = 6 \text{ (mult 2)} \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Autovectores $\rightarrow (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

Si $\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \\ t = 0 \end{array}$$

$B_{E\lambda=1} = \{(2,1,0,0)\}$

Si $\lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x = 9\lambda/2 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda/2 \\ t = 0 \end{array}$$

$$B_{E\,\lambda=1} = \left\{ \left(\frac{9}{2}, 1, -\frac{1}{2}, 0 \right) \right\}$$

$$x + \frac{4\lambda}{5} + 2\lambda$$

Si $\lambda = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y - z = 0 \\ -5y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2}\mu \\ y = \mu \\ z = -\frac{5}{2}\mu \\ t = \lambda \end{array}$$

$$B_{E\,\lambda=1} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{5}{2}, 1 \right) \right\}$$

1. Espacios vectoriales

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x - 3y + 2z = 0 \;;\; y - z = 0\}$

$G = \langle\{(1,1,0), (0,2,1), (1,1,1)\}\rangle$

a) Ec paramétricas
Ec implícitas
Base
Dimensión

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}$ F, G, $F \cap G$, $F + G$

F:

Ec paramétricas $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Ec implícitas $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Base. $B_F = \{(1,1,1)\}$

Dimensión$(F) = 1$

G:

$Dim(G) = rg(M)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_3 = F_3 - F_2 - F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg(M) = 2 = Dim(G)$

$B_G = \{(1,-1,0), (0,2,1)\}$

Ec. paramétricas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda + 2\mu \\ z = \mu \end{cases}$

Ec implicitas $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -1 & 2 & y \\ 0 & 1 & z \end{array}\right) \underset{F_2 = F_3}{\overset{F_3 = F_2 + F_1 - 2F_3}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & x+y-2z \end{array}\right) \rightarrow x+y-2z=0$

$F \cap G$:

$\left.\begin{array}{r} x - 3y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3 = F_3 - F_1 - 4F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Ec. implicitas $\begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

Ec paramétricas $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

$B_{F \cap G} = \{(1,1,1)\}$

$Dim(F \cap G) = 1$

$$F+G: \quad \begin{array}{c} B_F \\ B_G \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{F_3 = F_3 - F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Dim}(F+G) = 2$

$B_{F+G} = \{(1,1,1),(0,2,1)\}$

$$\text{Ec param} \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$$

$$\text{Ec impl} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - F_1}{\overset{F_2 = F_2 - F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 2 & y - x \\ 0 & 1 & z - x \end{array}\right) \overset{F_2 = F_2 - 2F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & x + y - 2z \\ 0 & 1 & z - x \end{array}\right)$$

$x + y - 2z = 0$

Ap lineales

$f \; \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$f(x,y,z,t) = (x+y+az, -2x+y+t, ax-2y-2t, az+t)$

a) para $a=2$ demostrar que es lineal

$f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} = (\underbrace{\alpha u_1+\beta v_1}_{x}, \underbrace{\alpha u_2+\beta v_2}_{y}, \underbrace{\alpha u_3+\beta v_3}_{z}, \underbrace{\alpha u_4+\beta v_4}_{t})$

$f(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = (\alpha u_1+\beta v_1+\alpha u_2+\beta v_2+2\alpha u_3+2\beta v_3, -2\alpha u_3-2\beta v_3+\alpha u_2+\beta v_2+\alpha u_4+\beta v_4,$
$, 2\alpha u_4+2\beta v_4-2\alpha u_2-2\beta v_2-2\alpha u_4-2\beta v_4, 2\alpha u_3+2\beta v_3+\alpha u_4+\beta v_4)$

$= \alpha(u_1+u_2+2u_3, -2u_1+u_2+u_4, 2u_1+2u_2-2u_4, 2u_3+4u_4)+\beta(v_1+v_2 \ldots)$

$= \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$ es lineal

b)
$$M_{f_{C_4C_4}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & 3 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-4 \end{pmatrix}$$

si $a=2$. $rg(Mf)=3$.
$Dim(Im)=3$, $dim(Ker)=1$

si $a=0$. $rg(Mf)=3$.
$Dim(Im)=3$, $dim(Ker)=1$

si $a\neq 2$. $rg(Mf)=4$.
$Dim(Im)=4$, $dim(Ker)=0$

c) dim, Ker, Im en función de a
¿a? / f es biyectiva

d) dim, ec, baze

ker, im

α $(1,1,1,0) \in$ ker?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 3 & 2\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha-4 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$B_{ker(f)} = \{(0,0,1,0)\}$

$$\begin{aligned} x+y &= 0 \\ y-t &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{c|c} 0 & x \\ 0 & y \\ 1 & z \\ 0 & t \end{array}\right)$$

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$f(1,0,0,0) = (3,1,0,0)$

$f(0,1,0,0) = (0,3,1,0)$

$f(0,0,1,0) = (2,1,1,0)$

$f(0,0,0,1) = (0,0,0,4)$

$$A = M_{f c_4 c_4} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{v} = A\lambda \rightarrow (A-\lambda I)\vec{v} = 0$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 = F_1 - (3-\lambda)F_2 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda^2+6\lambda+9 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1)^8 \begin{vmatrix} 0 & -\lambda^2+6\lambda+9 & \lambda-1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)1(-1)^3 \begin{vmatrix} -\lambda^2+6\lambda-9 & \lambda-1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \text{ (doble)} \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \text{ (simple)} \end{cases}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda=4} = \{(2,3,1,0),(0,0,0,1)\}$$
$$E_{\lambda=1} = \{(-1,0,1,0)\}$$
$$E_{\lambda=2} = \{(-2,1,1,0)\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$U = \langle \{ (2,0,1,1), (1,1,1,1), (1,-a,-1,-1), (a,-7,-2,2) \} \rangle$
$S = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y+2z=0 ;\ 2x-y-2z=0$

a) Determinar a / $\dim(U) = 3$
b) Para esa a $\begin{cases} \dim \\ \text{base} \\ \text{ec imp} \end{cases}$ $\begin{cases} U+S \\ U\cap S \end{cases}$

a)
$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 & -1 \\ a & -7 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 = F_1 - F_2 \\ F_2 = F_2 + F_3 \\ \sim \\ F_4 = F_4 + 2F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-a & 0 & 0 \\ 1 & -a & -1 & -1 \\ a+2 & -2a-7 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 = F_1 + F_2 \\ \sim \end{matrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -a & 0 & 0 \\ 1 & -a & -1 & -1 \\ a+2 & -2a-7 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_2 = F_2 - aF_1 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3-a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a & -1 & -1 \\ a+2 & -2a-7 & -4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow a = 3$$

$B_U = \{ (1,-1,0,0), (1,-3,-1,-1), (-1,-13,-4,0) \}$

b) $\text{Dim}(U) = 3 = rg(U)$

$$\text{Ec param} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = \lambda + \beta - \mu \\ y = -\lambda - 3\beta - 13\mu \\ z = -\beta - 4\mu \\ t = -\beta \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & x \\ -1 & -3 & -13 & y \\ 0 & -1 & -4 & z \\ 0 & -1 & 0 & t \end{array}\right) \begin{matrix} F_1 = F_1 + F_3 \\ \sim \\ F_2 = F_1 + F_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & x+z \\ 0 & -2 & -14 & x+y \\ 0 & -1 & -4 & z \\ 0 & -1 & 0 & t \end{array}\right) \begin{matrix} F_2 = 2F_2 - 7F_3 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & x+z \\ 0 & 0 & -14 & x+y-2t \\ 0 & -1 & -4 & z \\ 0 & -2 & 0 & t \end{array}\right) \sim$$