Relación de problemas Tema 3

Estructuras algebraicas

1. En el conjunto de los número enteros $\mathbb{Z}$, estudia si las siguientes operaciones son internas, cumplen la propiedad asociativa y conmutativa y si admitenelemento neutro.

   (a) $m * n = m \cdot n$
   (b) $m * n = m^2 + n^2$
   (c) $m * n = 2(m + n)$
   (d) $m * n = -m - m$

2. Estudiar las propiedades de la siguiente operación en el conjunto de los racionales positivos $\mathbb{Q}^+$:
$$a * b = a + \frac{1}{b}$$

3. Determinar cuales de los siguientes conjuntos con las operaciones indicadas son grupos:

   (a) $A = \{-1, 1\}$ con operación producto (usual).
   (b) $B = \{-1, 1\}$ con operación suma (usual)
   (c) $C = \{-1, 0, 1\}$ con operación suma (usual)
   (d) $D = \{10n \ / \ n \in \mathbb{Z}\}$ con operación suma (usual)

4. En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, se define la operación $a * b = a + b + p$ donde p es un número racional constante. Calcular el valor de p para que $(\mathbb{Q}, *)$ sea grupo abeliano.

5. Probar que $(\mathbb{R}, *)$ no es un grupo abeliano para la operación $*$ definida por:
$$a * b = a + b - ab$$

6. En el grupo de permutaciones de 5 elementos se consideran las permuntaciones:
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$
   Calcular $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_2 \circ \sigma_1$, σ_1^3, σ_2^4, σ_1^{-1}, σ_2^{-1}, $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2^{-1}$, $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1}$, $(\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1}$ y $(\sigma_2 \circ \sigma_1)^{-1}$

7. Dar un ejemplo de subgrupo del grupo de permutaciones S_3 distinto del subgrupo trivial.

8. Hallar la tabla de multiplicar del grupo $(\mathbb{Z}_{\ntrianglelefteq}, \cdot)$. ¿Cuál es la característica del cuerpo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$

9. En el cuerpo de los números reles $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ se definen las dos operaciones siguientes:

$$x \oplus y = x + y + \alpha$$

$$x \otimes y = x \cdot y + \alpha(x + y) + \alpha^2 - \alpha$$

siendo x e y números reales arbitrarios y α una constante. Demostrar que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ es un anillo conmutativo. ¿Posee elemento unidad?

10. Supongamos que $(A, *, \perp)$ es un anillo tal que $a \perp a = a$ para todo $a \in A$. Ver que necesariamente $a * a = 0$ y que $a \perp b = b \perp a$ para todo $a, b \in A$.

11. Sea el conjunto $\mathbb{R}[\sqrt{-1}]$ definido por

$$\mathbb{R}[\sqrt{-1}] := \{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Si $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{-1}$ y $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{-1}$ son elementos arbitrarios de $\mathbb{R}[\sqrt{-1}]$ se definen las operaciones:

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\sqrt{-1} \qquad z_1 \cdot z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{-1}$$

Demostrar que $(\mathbb{R}[\sqrt{-1}], +, \cdot)$ es un cuerpo.

1. En el conjunto de los número enteros $\mathbb{Z}$, estudia si las siguientes operaciones son internas, cumplen la propiedad asociativa y conmutativa y si admitenelemento neutro.

(a) $m * n = m \cdot n$

(b) $m * n = m^2 + n^2$

(c) $m * n = 2(m + n)$

(d) $m * n = -m - m$

a) Multiplicación de nº enteros → nº entero
Asociativa: $(mn)p = m(np)$
Conmutativa: $mn = np$
Admite elemento neutro: $1mn = mn$

b) Suma de nº cuadrados → nº entero
Asociativa: $(n^2 + n^2) + p^2 \neq n^2 + (n^2 + p^2)$ NO
Conmutativa: $m^2 + n^2 \neq n^2 + m^2$ NO
Admite elemento neutro: $\nexists$

c) Suma de enteros por 2 ⟶ nº entero
Asociativa: $2((m+n)+p) = 2(m+(n+p))$
Conmutativa: $2(m+n) \neq 2(n+m)$
Admite elemento neutro: $\nexists$

d) Resta de enteros ⟶ nº entero
Asociativa: $-(m-n)-p = -m-(n-p)$
Conmutativa: $-m-n \neq -n-m$
Admite elemento neutro:

2. Estudiar las propiedades de la siguiente operación en el conjunto de los racionales positivos $\mathbb{Q}^{+}$:

$$a * b = a + \frac{1}{b}$$

suma de racionales positivos → racional positivo

Asociativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$

Conmutativa: $a+b = b+a$

$a + 1/b \neq b + 1/a$ NO

Admite elemento neutro: $ae = a$;

$a + \frac{1}{e} = a + \frac{1}{1} = a+1$

solo para $a = 0 \notin \mathbb{Q} \longrightarrow \nexists$

3. Determinar cuales de los siguientes conjuntos con las operaciones indicadas son grupos:

   (a) $A = \{-1, 1\}$ con operación producto (usual).
   (b) $B = \{-1, 1\}$ con operación suma (usual)
   (c) $C = \{-1, 0, 1\}$ con operación suma (usual)
   (d) $D = \{10n \;/\; n \in \mathbb{Z}\}$ con operación suma (usual)

a) $(A, \cdot)$:

1) Op interna

$$\left.\begin{array}{l} -1 \cdot 1 = -1 \\ 1 \cdot 1 = 1 \\ -1 \cdot -1 = 1 \end{array}\right\} \in A$$

2) Op asociativa

$((-1)1)c = (1(c)) \cdot -1 \;;\; -c = -c$

3) Elemento neutro

$$\left.\begin{array}{l} 1e = 1 \\ -1e = -1 \end{array}\right\} e = 1$$

4) Elemento inverso

$1 I = e \;;\; I = 1$

$-1 I = e \;;\; I = -1$

b) $(B, +)$:

1) Op interna

$$\left.\begin{array}{l} -1+1=0 \\ 1+1=2 \\ -1-1=-2 \end{array}\right\} \notin A$$

2) Op asociativa

$$(-1+1)+c=(1+c)-1 \;;\; c=c$$

3) Elemento neutro

$$\left.\begin{array}{l} 1+e=e+1 \\ -1+e=e-1 \end{array}\right\} e=0$$

4) Elemento inverso

$$1+I=e \;;\; I=-1$$

$$-1+I=e \;;\; I=1$$

c) $(C, +)$:

1) Op interna

$$\left.\begin{array}{l} -1+1+0=0 \\ 1+1+0=2 \\ -1+0-1=-2 \end{array}\right\} \notin A$$

2) Op asociativa

$$(-1+1)+0=(1+0)-1 \;;\; c=c$$

3) Elemento neutro

$$\left.\begin{array}{l} 1+e=e+1 \\ -1+e=e-1 \\ 0+e=e \end{array}\right\} e=0$$

4) Elemento inverso

$1 + I = e \; ; \; I = -1$

$-1 + I = e \; ; \; I = 1$

$0 + I = e \; ; \; I = 0$

d) $(D, +)$:

1) Op interna

$a \in D \rightarrow a = 10a'$

$b \in D \rightarrow b = 10b'$

$a + b = 10a' + 10b' = 10 \underbrace{\overbrace{(a' + b')}^{c}}_{a' + b' \in \mathbb{Z}} = 10c \in D$ ✓✓

2) Op asociativa

$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$ ✓✓

3) Elemento neutro

$\left.\begin{array}{l} a \in D \\ e \in D \end{array}\right\}$ $a + e = e + a = a$

$a + e = a \; ; \; e = a - a = 0$

$e + a = 0 \; ; \; e = a - a = 0$ ✓✓

4) Elemento inverso

$a \rightarrow a^{-1} \in D$ y $a + a^{-1} = e = 0$

$a^{-1} = 0 - a$

$a^{-1} = -a$ ✓✓

5) Op conmutativa (solo grupo abeliano)

$a + b = 10(a' + b')$

$b + a = 10(b' + a')$ ✓✓

4. En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, se define la operación $a * b = a + b + p$ donde p es un número racional constante. Calcular el valor de p para que $(\mathbb{Q}, *)$ sea grupo abeliano.

$(\mathbb{Q}, \cdot)$:

1) Op interna

$a + b + p = c + p \in \mathbb{Q}$

2) Op asociativa

$a + (b + p) = (a + b) + p = a + b + p$

3) Elemento neutro

$a \cdot e = a$

$a + e + p = a$; $e = -p$

4) Elemento inverso

$a I = e$; $a I = -p$

$a + I + p = e$; $a + I + p = -p$; $I = -2p - a$

$p = \dfrac{-I - a}{2}$

5) Op conmutativa (solo grupo abeliano)

$ab = ba$

$a + b + p = b + a + p$

5. Probar que $(\mathbb{R}, *)$ no es un grupo abeliano para la operación $*$ definida por:

$$a * b = a + b - ab$$

$(\mathbb{R}, \cdot)$:

1) Op interna

$a \cdot b = a + b - ab \in \mathbb{R}$

2) Op asociativa

$ab = ba$

$a + b - ab = b + a - ab$

3) Elemento neutro

$a \cdot e = a$

$a + e - ae = a$; $e - ae = 0$; $e = 0$

4) Elemento inverso

$a\bar{I} = e$; $a\bar{I} = 0$; $a + \bar{I} - a\bar{I} = 0$; $a = a\bar{I} - \bar{I}$; $a = \bar{I}(a-1)$; $\bar{I} = \dfrac{a}{a-1}$

5) Op conmutativa (solo grupo abeliano)

$ab = ba$

$a + b - ab = b + a - ab$

para $a \neq 0$ cumple por lo que para no ser grupo $a = 0$

6. En el grupo de permutaciones de 5 elementos se consideran las permuntaciones:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcular $\sigma_1 \circ \sigma_2$, $\sigma_2 \circ \sigma_1$, σ_1^3, σ_2^4, σ_1^{-1}, σ_2^{-1}, $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2^{-1}$, $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1}$, $(\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1}$ y $(\sigma_2 \circ \sigma_1)^{-1}$

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}^2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}^3 =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}^2 =$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

7. Dar un ejemplo de subgrupo del grupo de permutaciones S_3 distinto del subgrupo trivial.

Permutaciones a 3 elementos

8. Hallar la tabla de multiplicar del grupo $(\mathbb{Z}_{\cancel{4}}, \cdot)$. ¿Cuál es la característica del cuerpo $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$

$(\mathbb{Z}_5, +)$:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	1_5
2	2	3	4	1_5	2_6
3	3	4	0_5	2_6	3_7
4	4	0_5	1_6	3_7	4_8

$(\mathbb{Z}_5, \cdot)$:

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1_6	3_8
3	0	3	1_6	4_9	2_{12}
4	0	4	3_8	2_{12}	1_{16}

$(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$:

$n \cdot 1 \pmod 5 = 0$; $n = 5$

9. En el cuerpo de los números reles $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ se definen las dos operaciones siguientes:

$$x \oplus y = x + y + \alpha$$

$$x \otimes y = x \cdot y + \alpha(x + y) + \alpha^2 - \alpha$$

siendo x e y números reales arbitrarios y α una constante. Demostrar que $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ es un anillo conmutativo. ¿Posee elemento unidad?

$(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$

1. Abeliano $(R, \oplus)$

Op interna : $x + y + \alpha = z \in \mathbb{R}$

Asociativa: $x \oplus (z + y + \alpha) = (x + y + \alpha) \oplus z$

$x + y + z + \alpha + \alpha = x + y + z + \alpha + \alpha$

Elemento neutro: $x \oplus e = x + e + \alpha = x$; $e = -\alpha$

Inversa: $x \oplus I = e$; $x + I + \alpha = -\alpha$; $I = -x - 2\alpha$

Op conmutativa: $x \oplus y = y \oplus x$

$x + y + \alpha = y + x + \alpha$ Se cumple ✓✓

2. Semigrupo $(R, \otimes)$

Op interna : $xy + \alpha(x + y) + \alpha^2 - \alpha = xy + x\alpha + y\alpha + \alpha^2 + \alpha = z \in \mathbb{R}$

Asociativa: $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$

$(xy + x\alpha + y\alpha + \alpha^2 - \alpha) \otimes z = x \otimes (yz + y\alpha + z\alpha + \alpha^2 - \alpha)$

$xyz + xy\alpha + z\alpha + \alpha^2 - \alpha + xz\alpha + x\alpha^2 + z\alpha + \alpha^2 - \alpha + yz\alpha + y\alpha^2 + z\alpha + \alpha^2 - \alpha +$
$+ z\alpha^3 + \alpha^3 + z\alpha + \alpha^2 - \alpha + z\alpha^2 + \alpha^2 + z\alpha + \alpha^2 - \alpha = xyz + x\alpha + yz\alpha + \alpha^2 - \alpha +$
$+ xy\alpha + x\alpha + y\alpha^2 + \alpha^2 - \alpha + xz\alpha + x\alpha + z\alpha^2 + \alpha^2 - \alpha + x\alpha^3 + \alpha^3 + x\alpha + \alpha^2 - \alpha +$
$+ x\alpha^2 + \alpha^2 + x\alpha + \alpha^2 - \alpha$

$\cancel{xyz} + \cancel{xy\alpha} + 5z\alpha + \cancel{6}\alpha^2 - \cancel{5\alpha} + \cancel{xz\alpha} + \cancel{x\alpha^2} + \cancel{yz\alpha} + \cancel{y\alpha^2} + z\alpha^3 + \cancel{\alpha^3} + \cancel{z\alpha^2} =$
$= \cancel{xyz} + 5x\alpha + \cancel{yz\alpha} + \cancel{5\alpha^2} - \cancel{5\alpha} + \cancel{xy\alpha} + \cancel{y\alpha^2} + \cancel{xz\alpha} + \cancel{z\alpha^2} + x\alpha^3 + \cancel{\alpha^3} + \cancel{x\alpha^2}$
$5z\alpha + z\alpha^3 = 5x\alpha + x\alpha^3$; $z = x$ Se cumple ✓✓

3. Distributiva $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$

$$(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

$$(x + y + \alpha) \otimes z = xz + yz + z\alpha + x\alpha + y\alpha + \alpha^2 + z\alpha + \alpha^2 - \alpha$$

$$= xz + yz + 2z\alpha + x\alpha + y\alpha + 2\alpha^2 - \alpha$$

$$(xy + x\alpha + y\alpha + \alpha^2 - \alpha) \oplus (xz + x\alpha + z\alpha + \alpha^2 - \alpha) =$$

$$= xy + x\alpha + y\alpha + \alpha^2 - \alpha + xz + x\alpha + z\alpha + \alpha^2 - \alpha + \alpha$$

$$= xy + 2x\alpha + y\alpha + 2\alpha^2 - \alpha + xz + z\alpha$$

$$\cancel{x}z + yz + 2z\alpha + x\alpha + \cancel{y\alpha} + \cancel{2\alpha^2} - \cancel{\alpha} = xy + 2x\alpha + \cancel{y\alpha} + \cancel{2\alpha^2} - \cancel{\alpha} + \cancel{x}z + z\alpha$$

$$yz + 2z\alpha + x\alpha = xy + 2x\alpha + z\alpha \qquad x = y$$

4. Conmutativa $(\mathbb{R}, \otimes)$

$$x \otimes y = y \otimes x \ ;$$

$$xy + x\alpha + y\alpha + \alpha^2 - \alpha = xy + y\alpha + x\alpha + \alpha^2 - \alpha$$

5. Elemento neutro $(\mathbb{R}, \otimes)$

$$x \otimes e = x$$

$$xe + x\alpha + e\alpha + \alpha^2 - \alpha = e(x + \alpha) + x\alpha + \alpha^2 + \alpha$$

$$e = \frac{x - x\alpha - \alpha^2 - \alpha}{x + \alpha} \qquad \text{Si } x + \alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$$

10. Supongamos que $(A, *, \perp)$ es un anillo tal que $a \perp a = a$ para todo $a \in A$. Ver que necesariamente $a * a = 0$ y que $a \perp b = b \perp a$ para todo $a, b \in A$.

$(A, \cdot, \perp)$ es anillo ($(A, \cdot)$ abeliano, $(A, \perp)$ semigrupo, $(a \cdot b) \perp c = (a \perp b) \cdot (a \perp c)$)

$a^2 = 0$; $a \perp a^2 = (a \perp a)(a \perp a) = a^2$

$$\left. \begin{matrix} a \perp 0 \\ 0 \perp a \end{matrix} \right\} a^2 = 0$$

$a \cdot b = (ab) \perp (ba) = (a \perp a)(a \perp b)(b \perp a)(b \perp b) = ab(a \perp b)(b \perp a)$

$(a \perp b)(b \perp a) = 0$; $a \perp b = -b \perp a$; $a \perp b = b \perp a$

11. Sea el conjunto $\mathbb{R}[\sqrt{-1}]$ definido por

$$\mathbb{R}[\sqrt{-1}] := \{a + b\sqrt{-1} : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Si $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{-1}$ y $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{-1}$ son elementos arbitrarios de $\mathbb{R}[\sqrt{-1}]$ se definen las operaciones:

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\sqrt{-1} \qquad z_1 \cdot z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{-1}$$

Demostrar que $(\mathbb{R}[\sqrt{-1}], +, \cdot)$ es un cuerpo.

$(\mathbb{R}[\sqrt{-1}], +, \cdot)$

1) Op interna

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\sqrt{-1} \\ a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{-1} \end{array}\right\} \in \mathbb{R}(\sqrt{-1})$$

2) Op asociativa

$$a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\sqrt{-1} = b_1 + a_1 + (b_2 + a_2)\sqrt{-1}$$

$$a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{-1} = b_1b_2 - a_1a_2 + (b_1a_2 + b_2a_1)\sqrt{-1}$$

3) Elemento neutro

$$a_1 + b_1\sqrt{-1} + e = z_1$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{-1})\, e = 0$$

4) Elemento inverso

$$a_1 + b_1\sqrt{-1} + I = e \; ; \; I = e - a_1 - b_1\sqrt{-1}$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{-1})\, I = e \; ; \; I = \frac{e}{a_1 + b_1\sqrt{-1}}$$

mientras $e \neq 0$