MATEMÁTICA DISCRETA

Introducción a la Lógica Matemática (Parte II)

Introducción a la Lógica Matemática (Parte II)

- Tautologías y contradicciones.
- Equivalencia lógica.
- Proposiciones condicionales.

Ejercicio: Construye la tabla de verdad de las siguientes proposiciones.

a) $p \vee \neg(p \wedge q)$. b) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee \neg(p \wedge q)$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F

Definición

- Una proposición es una *tautología* si contiene solo "V" en la última columna de su tabla de verdad.
- Una proposición es una *contradicción* si contiene solo "F" en la última columna de su tabla de verdad.

Teorema

Si p es una tautología, entonces $\neg p$ es una contradicción, y viceversa

Definición

Dos proposiciones p y q son *equivalentes*, y se denota como $p \equiv q$, si sus correspondientes tablas de verdad son iguales.

Ejemplo: Las proposiciones p y q satisfacen $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$.

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Leyes del Álgebra de Proposiciones

- $p \vee p \equiv p$ $\qquad$ $p \wedge p \equiv p$
- $p \vee q \equiv q \vee p$ $\qquad$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $\qquad$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\qquad$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\qquad$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Ejemplo

Simplifica cada una de las siguientes proposiciones:

a) $\neg(p \vee \neg q)$

b) $\neg(\neg p \wedge q)$

c) $\neg(\neg p \vee \neg q)$

Solución:

a) $\neg(p \vee \neg q) \equiv \neg p \wedge \neg\neg q \equiv \neg p \wedge q$

b) $\neg(\neg p \wedge q) \equiv \neg\neg p \vee \neg q \equiv p \vee \neg q$

c) $\neg(\neg p \vee \neg q) \equiv \neg\neg p \wedge \neg\neg q \equiv p \wedge q$

Definición

Sean p y q dos proposiciones. La proposición

$$\text{si } p \text{ entonces } q$$

se llama *proposición condicional* y se denota por $p \to q$.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observación: La proposición $p \to q$ es verdadero excepto en el caso en que p sea verdadero y q sea falso.

Observación: En las proposiciones que incluyen a los operadores lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$ y $\rightarrow$, el operador condicional $\rightarrow$ evalúa al final.

Ejemplo

Suponiendo que p es verdadera, q es falsa y r es verdadera, encuentre el valor de verdad de cada proposición.

a) $p \wedge q \rightarrow r$ b) $p \vee q \rightarrow \neg r$ c) $p \wedge (q \rightarrow r)$

a) Primero se evalúa $p \wedge q$, y se obtiene que es falsa. Por tanto, $p \wedge q \rightarrow r$ es verdadera (sin importar el valor de verdad de r).

b) Primero se evalúa $\neg r$, y se obtiene que es falsa. Después se evalúa $p \vee q$, y se obtiene que es verdadera. Por tanto, la proposición $p \vee q \rightarrow \neg r$ es falsa.

c) Observa que $q \rightarrow r$ es verdadera.Por tanto, $p \wedge (q \rightarrow r)$ es verdadera.

Tablas de verdad de las proposiciones $p \to q$ y $\neg p \vee q$

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Consecuencia: $p \to q \equiv \neg p \vee q$. Es decir, la proposición $p \to q$ es un equivalente lógico de la proposición $\neg p \vee q$, la cual se compone solamente por los conectores $\vee$ y $\neg$.

Ejemplo: La negación de $p \to q$ es un equivalente lógico de $p \wedge \neg q$.

Ejercicio: Comprueba que $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ es una tautología.

Solución:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \to (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Como el valor de verdad de $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ es verdadero para todos los valores de p y q, entonces se tienen que $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ es una tautología.

Definición

Sean p y q dos proposiciones. La proposición

$$p \text{ si y sólo si } q$$

se llama *proposición bicondicional* y se denota por $p \leftrightarrow q$.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Observación: La proposición $p \leftrightarrow q$ es un equivalente lógico de la proposición $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

$p \to q$ y otras proposiciones condicionales que contienen a p y q

p	q	$\neg p$	$\neg q$	Condicional $p \to q$	Recíproco $q \to p$	Inverso $\neg p \to \neg q$	Contrarrecíproco $\neg q \to \neg p$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

Observación: La proposición $p \to q$ y su contrarrecíproco $\neg q \to \neg p$ son equivalentes lógicos.

Ejercicio

Obtenga el Recíproco, Inverso y Contrarrecíproco de la siguiente implicación:

"El equipo gana siempre que llueve."

- Recíproco: "Si el equipo gana, entonces llueve."
- Inverso: "Si no llueve, entonces el equipo no gana."
- Contrarrecíproco: "Si el equipo no gana, entonces no llueve."

Paso del lenguaje natural al lenguaje formal (formalización)

Ejemplo

Formalice la siguiente frase:

"Puedes acceder a Internet desde el campus sólo si estudias Ingeniería Informática o no eres alumno de primero."

- p: "Puedes acceder a Internet desde el campus."
- q: "estudias Ingeniería Informática."
- r: "eres alumno de primero."

Formalización: $p \rightarrow (q \vee \neg r)$.