Apéndice B

Cálculo de derivadas

B.1 Derivadas de las funciones elementales

La derivada de las funciones elementales se calcula recurriendo directamente a la definición, como en los siguientes ejemplos, aunque en algunos casos los límites indeterminados que aparecen pueden ser complicados de calcular.

Ejemplo B.1
Derivada de una función constante $f(x)=k$

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Ejemplo B.2
Derivada de $f(x)=x^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

Ejemplo B.3
Derivada de $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

B.2 Álgebra de derivadas

Conocidas las derivadas de las funciones elementales, un conjunto de propiedades conocidas como **álgebra de derivadas**, permiten calcular la derivada de otras funciones construidas combinando aquellas mediante operaciones aritméticas y composición de funciones.

ÁLGEBRA DE DERIVADAS	
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$	$f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$, si $h(x) \neq 0$.
$f(x) = g(h(x))$	$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ (Regla de la CADENA)

TABLA DE DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

Funciones elementales		Funciones compuestas (usando la Regla de la Cadena)	
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$		
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$		
$f(x) = a\,x$	$f'(x) = a$	$f(x) = a\,g(x)$	$f'(x) = a\,g'(x)$
$f(x) = a\,x + b$	$f'(x) = a$	$f(x) = a\,g(x) + b$	$f'(x) = a\,g'(x)$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$f(x) = g(x)^2$	$f'(x) = 2\,g(x)\,g'(x)$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\,g'(x)$
$f(x) = x^n \ (n \neq 0)$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$	$f(x) = g(x)^n$	$f'(x) = n\,g(x)^{n-1}\,g'(x)$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)}\,g'(x)$
$f(x) = a^x \ (a > 0)$	$f'(x) = a^x \ln(a)$	$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = a^{g(x)} \ln(a) g'(x)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = \ln(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{g(x)}\,g'(x)$
$f(x) = \log_b(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x\,\ln(b)}$	$f(x) = \log_b(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{g(x)\,\ln(b)}\,g'(x)$
$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \operatorname{sen}(g(x))$	$f'(x) = \cos(g(x))\,g'(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$	$f(x) = \cos(g(x))$	$f'(x) = -\operatorname{sen}(g(x))g'(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$f(x) = \tan(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(g(x))}\,g'(x)$
$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \operatorname{arc\,sen}(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}}\,g'(x)$
$f(x) = \arccos(x)$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x) = \arccos(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-g(x)^2}}\,g'(x)$
$f(x) = \arctan(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$f(x) = \arctan(g(x))$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+g(x)^2}\,g'(x)$

B.3 Ejemplos de cálculo de derivadas

Ejemplo B.4
Derivada de $f(x) = (5x^3+2)^4$
Aplicando la fórmula de derivación de la potencia de una función, $g(x)^n$, se tiene

$$f'(x) = 4\,(5x^3+2)^3 \cdot (5\cdot 3\cdot x^2) = 60\,(5x^3+2)^3\,x^2$$

Ejemplo B.5
Derivada de $f(x) = \sqrt{7-x^3}$
Aplicando la fórmula de derivación de la raíz cuadrada de una función, $\sqrt{g(x)}$, se tiene

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{7-x^3}} \cdot (-3x^2) = \frac{-3x^2}{2\sqrt{7-x^3}}$$

Ejemplo B.6
Derivada de $f(x) = e^{3x^2}$
Hay que aplicar la derivada de la exponencial de una función, $e^{g(x)}$,

$$f'(x) = e^{3x^2}\,(3\cdot 2\cdot x) = 6\,x\,e^{3x^2}$$

Ejemplo B.7
Derivada de $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+2}$

Aplicando la fórmula de derivación de un cociente:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2)-(x^3-1)2x}{(x^2+2)^2} = \frac{(3x^4+6x^2)-(2x^4-2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+6x^2+2x}{(x^2+2)^2}$$

Ejemplo B.8
Derivada de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{x+4}{x-1}\right)$
Hay que aplicar en primer lugar la fórmula de derivación del seno de una función, $\operatorname{sen}(g(x))$, y después la de la derivada de un cociente:

$$f'(x) = \cos\left(\frac{x+4}{x-1}\right)\left(\frac{(x-1)-(x+4)}{(x-1)^2}\right) = \frac{-5}{(x-1)^2}\cos\left(\frac{x+4}{x-1}\right)$$

Ejemplo B.9
Derivada de $f(x) = x\sqrt{x^2-3}$
Hay que aplicar la derivada de un producto y la derivada de la raíz cuadrada de una función:

$$f'(x) = \sqrt{x^2-3} + x\,\frac{1}{2\sqrt{x^2-3}}(2x) = \sqrt{x^2-3} + \frac{x^2\sqrt{x^2-3}}{(x^2-3)} = \sqrt{x^2-3}\left(1+\frac{x^2}{x^2-3}\right)$$

Ejemplo B.10
Derivada de $f(x) = \sqrt[3]{\ln(x^2+1)}$

Hay que escribir la raíz como una potencia de exponente fraccionario, $f(x) = \left(\ln(x^2+1)\right)^{1/3}$, y aplicar la fórmula de derivación de $g(x)^n$ y luego la del logaritmo:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\ln(x^2+1)\right)^{-2/3}\frac{1}{x^2+1}(2x) = \frac{2x}{3(x^2+1)\sqrt[3]{\ln^2(x^2+1)}}$$

Ejemplo B.11
Derivada de $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Hay que aplicar la regla de derivación de un cociente de dos funciones:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{\dfrac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$$

Ejemplo B.12
Derivada de $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x^2+1})$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}\,\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}2x = \frac{1}{x^2+2}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Ejemplo B.13
Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^2+3x-1$ **en el punto** $x = 2$**.**

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ viene dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

En este caso, $f(x) = x^2+3x-1$ y su derivada es $f'(x) = 2x+3$

Sus valores en $x = 2$ son $f(2) = 4+6-1 = 9$ y $f'(2) = 4+3 = 7$

Luego la ecuación de la tangente es:

$$y = 9 + 7(x-2)$$

Ejemplo B.14
Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \ln(x^2+3)$ en el punto $x = 1$.

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ viene dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

En este caso, $f(x) = \ln(x^2+3)$ y su derivada es $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$

Sus valores en $x = 1$ son $f(1) = \ln(1+3) = \ln(4)$ y $f'(1) = \dfrac{2}{1+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

Luego la ecuación de la tangente es:

$$y = \ln(4) + \frac{1}{2}(x-1)$$

Ejemplo B.15
Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$ en el punto $x = 1$.

La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = a$ viene dada por

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

En este caso, $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$ y su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{-1}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)x^2} = \frac{-1}{x^2+1}$$

Sus valores en $x = 1$ son $f(1) = \operatorname{arc\,tg} 1 = \dfrac{\pi}{4} \approx 0.7854$ y $f'(1) = \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$

Luego la ecuación de la tangente es:

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1)$$

B.4 Derivada de la función inversa

Para calcular la derivada de la función inversa, se usa la regla de la cadena: Observamos que f y su inversa f^{-1} (caso de existir), vienen relacionadas por

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = x, \quad \forall x \in \text{Dominio}(f^{-1})$$

Derivando en los dos miembros de esta igualdad y utilizando la Regla de la Cadena para derivar el primer miembro se tiene

$$f'\big(f^{-1}(x)\big) \cdot \big(f^{-1}\big)'(x) = 1, \quad \forall x \in \text{Dominio}(f^{-1})$$

y por lo tanto

$$\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} \quad \forall x \in \text{Dominio}(f^{-1})$$

Ejemplo B.16
Calcular la derivada de la función $f(x)=\ln(x)$ utilizando la derivada de la función inversa.

Derivando en la identidad $\quad e^{\ln(x)}=x \quad$ se tiene

$$e^{\ln(x)}\cdot\frac{d}{dx}\big(\ln(x)\big)=1 \ \Leftrightarrow\ \frac{d}{dx}\big(\ln(x)\big)=\frac{1}{e^{\ln(x)}}=\frac{1}{x}$$

como es bien sabido.

Ejemplo B.17
Calcular la derivada de la función $f(x)=\operatorname{arc\,sen}(x)$ utilizando la derivada de la función inversa.

Derivando en la identidad $\quad \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x))=x \quad$ se tiene $\quad \cos(\operatorname{arc\,sen}(x))\cdot\dfrac{d}{dx}\big(\operatorname{arc\,sen}(x)\big)=1$ de donde, despejando,

$$\frac{d}{dx}\big(\operatorname{arc\,sen}(x)\big)=\frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen}(x))}=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen}(x))}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

B.5 Derivada logarítmica

En ocasiones, resulta cómodo derivar el logaritmo de una función para calcular su derivada. Según la regla de la cadena, si f es derivable en x y $f(x)>0$,

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x))=\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

y de aquí se puede despejar $f'(x)$.

Ejemplo B.18
Utilizar la derivación logarítmica para calcular la derivada de la función $f(x)=a^x$.

Tomando logaritmos en ambos miembros se tiene

$$\ln\big(f(x)\big)=\ln\big(a^x\big)=x\,\ln(a)$$

y derivando ahora:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln(a) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\ln(a)\,f(x)=\ln(a)\,a^x$$

Ejemplo B.19
Utilizando la derivación logarítmica, deducir la fórmula de la derivada de un producto de dos funciones.

Sea $h(x)=f(x)\cdot g(x)$. Tomando logaritmos se tiene $\ln h(x)=\ln f(x)+\ln g(x)$.
Derivando en ambos miembros:

$$\frac{h'(x)}{h(x)}=\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)},$$

de donde, depejando ahora $h'(x)$:

$$h'(x)=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}\right)h(x)=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}\right)f(x)g(x)=\left(\frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}\right)f(x)g(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

Ejemplo B.20
Calcular la derivada de la función $f(x) = \big(\operatorname{sen}(x)\big)^{\cos(x)}$.

Tomando logaritmos en ambos miembros se tiene

$$\ln\big(f(x)\big) = \ln\Big(\big(\operatorname{sen}(x)\big)^{\cos(x)}\Big) = \cos(x)\,\ln\operatorname{sen}(x)$$

y derivando ahora:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\operatorname{sen}(x)\,\ln\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\,\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = -\operatorname{sen}(x)\,\ln\operatorname{sen}(x) + \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}$$

de donde

$$f'(x) = \Big(-\operatorname{sen}(x)\,\ln\big(\operatorname{sen}(x)\big) + \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)}\Big)\,\big(\operatorname{sen}(x)\big)^{\cos(x)}$$

Ejemplo B.21
Calcular la derivada de la función $f(x) = \big(x^2+1\big)^{2x-3}$.

Tomando logaritmos en ambos miembros se tiene $\ln f(x) = (2x-3)\,\ln(x^2+1)$ y derivando ahora:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2\ln(x^2+1) + (2x-3)\frac{2x}{x^2+1}$$

de donde

$$f'(x) = \Big(2\ln(x^2+1) + \frac{2x(2x-3)}{x^2+1}\Big)f(x) = \Big(2\ln(x^2+1) + \frac{2x(2x-3)}{x^2+1}\Big)\big(x^2+1\big)^{2x-3}$$

B.6 Derivación implícita

En ocasiones la relación entre dos variables no viene expresada explícitamente, es decir, con una de ellas "despejada", como en $y = x\ln(x^2+1)$, sino que viene dada mediante una relación entre ambas (una ecuación), como en $x^2y + y^3 = 1$. Se dice en estos casos que y viene **implícitamente definida** por dicha ecuación.

Sin embargo, es posible, utilizando la Regla de la Cadena, derivar con respecto de x directamente en la ecuación. Para ello se deriva con respecto de x en ambos miembros de la ecuación, teniendo en cuenta que y es una función de x: $y = y(x)$.

Por ejemplo, en la ecuación anterior $x^2y + y^3 = 1$ se tendría

$$x^2y + y^3 = 1 \Rightarrow \frac{d}{dx}\big(x^2y + y^3\big) = \frac{d}{dx}\big(1\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{d}{dx}\big(x^2y\big) + \frac{d}{dx}\big(y^3\big) = \big(2xy + x^2y'\big) + \big(3y^2y'\big) = 0$$

Agrupando los términos que contienen y' y despejando se tiene:

$$2xy + x^2y' + 3y^2y' = 2xy + \big(x^2+3y^2\big)\,y' = 0\ \Leftrightarrow\ y' = \frac{-2xy}{x^2+3y^2}$$

Es decir: en un punto (x, y) que verifique la ecuación $x^2y + y^3 = 1$, la derivada de y con respecto de x es $y' = \dfrac{-2xy}{x^2+3y^2}$.

Ejemplo B.22

Derivar implícitamente en el ecuación $x\ln(y^2+1)+y=1$ y despejar la derivada de y con respecto de x.

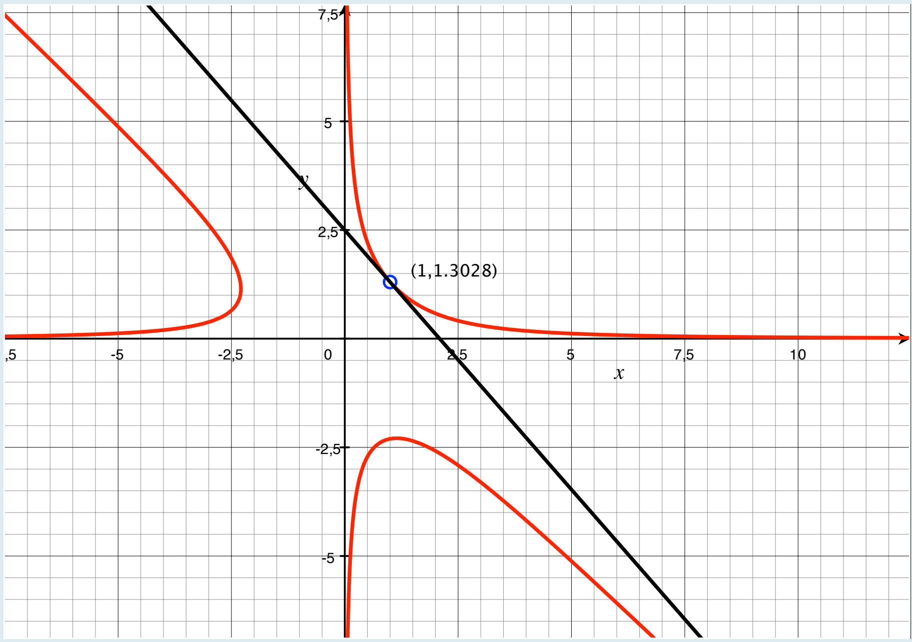
$$x\ln(y^2+1)+y=1 \Rightarrow \frac{d}{dx}\Big(x\ln(y^2+1)+y\Big)=\frac{d}{dx}\Big(x\ln(y^2+1)\Big)+\frac{d}{dx}\Big(y\Big)=0$$

$$\Leftrightarrow\ \ln(y^2+1)+x\cdot\frac{d}{dx}\Big(\ln(y^2+1)\Big)+\frac{d}{dx}y=\ln(y^2+1)+x\Big(\frac{2yy'}{y^2+1}\Big)+y'=0$$

$$\Leftrightarrow\ \ln(y^2+1)+\Big(\frac{2xy}{y^2+1}+1\Big)\,y'=\ln(y^2+1)+\Big(\frac{2xy+y^2+1}{y^2+1}\Big)\,y'=0$$

$$\Leftrightarrow\ y'=\frac{-\ln(y^2+1)}{\frac{2xy+y^2+1}{y^2+1}}=\frac{-(y^2+1)\ln(y^2+1)}{2xy+y^2+1}$$

Ejemplo B.23
Los puntos del plano que verifican la ecuación $x^2y + xy^2 = 3$ forman una curva con varias ramas. El punto $(1, 1.3028)$ pertenece a una de ellas. Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto.



Calculamos, implítamente, la derivada de y con respecto de x:

$$x^2y + xy^2 = 3 \Rightarrow 2xy + x^2y' + y^2 + x \cdot 2yy' = 0 \;\Leftrightarrow\; (2xy + y^2) + (x^2 + 2xy)y' = 0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{y' = \frac{-(2xy + y^2)}{2xy + x^2}}$$

Sustituyendo ahora $(x, y) = (1, 1.3028)$ obtendremos la derivada de y con respecto a x en dicho punto, es decir, la pendiente de la recta tangente en dicho punto:

$$y' = \left.\frac{-(2xy + y^2)}{2xy + x^2}\right|_{x=1,y=1.3028} = \frac{-(2 \times 1.3028 + (1.3028)^2)}{2 \times 1.3028 + 1} \approx -1.1934$$

Escribimos ahora la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 1.3028)$ con pendiente $p = -1.1934$:

$$y = 1.3028 - 1.1934(x - 1) = -1.1934x + 2.4962$$

B.7 Ejercicios

Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$
2. $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$
3. $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \operatorname{sen}(x)$
4. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - x}{x}}$
5. $f(x) = e^{-x^2+3}$

6. $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$
7. $f(x) = \operatorname{sen}(1-x)\,\cos^3(x)$
8. $f(x) = \sqrt{\cos^3(x^2)}$
9. $f(x) = \sqrt{1-\cos(x^3)}$
10. $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(5x)}$
11. $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x^2)}$
12. $f(x) = \dfrac{e^x}{1-e^x}$
13. $f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$
14. $f(x) = e^{\operatorname{tg}(x^2)}$
15. $f(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$
16. $f(x) = 2^{x^3-3x^2}$
17. $f(x) = 5^x\,x^5$
18. $f(x) = 2^x(x^2+x)$
19. $f(x) = 3^{\sqrt{1-x}}$
20. $f(x) = \cos\left(2^{x+1}\right)$

Soluciones de los ejercicios

1. $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{3-x^2}}$

2. $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$

3. $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\operatorname{sen}x + \cos\dfrac{x}{2}\cos x$

4. $f'(x) = \dfrac{-1}{2x^2}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

5. $f'(x) = -2x\, e^{-x^2+3}$

6. $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^2}\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)\cos\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$

7. $f'(x) = -\cos(1-x)\cos^3(x) - 3\operatorname{sen}(1-x)\operatorname{sen}(x)\cos^2(x)$

8. $f'(x) = \dfrac{-3x\cos(x^2)\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{\cos(x^2)}}$

9. $f'(x) = \dfrac{3x^2\operatorname{sen}(x^3)}{2\sqrt{1-\cos(x^3)}}$

10. $f'(x) = \dfrac{10}{3}\dfrac{\cos(5x)}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}(5x)}}$

11. $f'(x) = 2x\cos(x^2)e^{\operatorname{sen}(x^2)}$

12. $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1-e^x)^2}$

13. $f'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}\, e^{\frac{1+x}{1-x}}$

14. $f'(x) = 2x\,\dfrac{1}{\cos^2(x^2)}\, e^{\operatorname{tg}(x^2)}$

15. $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, e^{\sqrt{1-x^2}}$

16. $f'(x) = \ln(2)\,(3x^2-6x)\,2^{x^3-3x^2}$

17. $f'(x) = 5^x\, x^4(x\ln(5)+5)$

18. $f'(x) = 2^x\left((x^2+x)\ln(2)+2x+1\right)$

19. $f'(x) = \dfrac{-\ln(3)\,3^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$

20. $f'(x) = -\ln(2)\,2^{x+1}\operatorname{sen}\left(2^{x+1}\right)$