Capítulo 4

Cálculo de Primitivas

El concepto clave del Cálculo Integral es la integración. Nuestro objetivo en este tema es estudiar este proceso.

El cálculo de integrales es un proceso extraordinariamente importante en Cálculo.

Estudiaremos el concepto de integral indefinida, así como distintas técnicas de integración

4.1. Calculo integral

Hay dos conceptos fundamentales en Cálculo, a saber, la idea de derivada y la integral. La integración es el problema inverso de la derivación. A veces se presenta el caso en que se conoce la derivada de una función y el problema es determinar esa función.

4.1.1. Primitiva de funciones. Integral indefinida. Integración inmediata

Definición 4.1.1. Dada una función f, se denomina una *primitiva* de f a una función F que verifica $F' = f$.

Sea $C \in \mathbb{R}$ una constante. Si F es una primitiva de f entonces $F + C$ también lo es ya que:

$$(F + C)' = F' + \overset{0}{\cancel{C'}} = F' = f.$$

De este modo, si una función posee una primitiva entonces tiene infinitas primitivas.

Si F y G son primitivas de f entonces:

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

De esto se deduce que $G = F + C$. Esto prueba que dos primitivas de una función se diferencian en una constante. Dicho de otra forma, todas las primitivas de f son de la forma $F + C$ siendo F una primitiva particular de f y C una constante.

Ejemplo

Hallar primitivas generales de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^5$.
2. $g(x) = \operatorname{sen} x$.

Si $F(x) = x^6$, entonces $F'(x) = 6x^5$, luego vemos que una primitiva particular de f es $F(x) = \dfrac{x^6}{6}$ porque así $F'(x) = 6\dfrac{x^5}{6} = x^5$, luego la primitiva general de f es $G(x) = \frac{x^6}{6} + C$.

Si $S(x) = -\cos x$, entonces $G'(x) = \operatorname{sen} x$, luego la primitiva general de la función g es $G(x) = \operatorname{sen} x + C$.

Definición 4.1.2. Definimos la *integral indefinida* de f como el conjunto de sus primitivas. Se denota

$$\int f(x)dx.$$

Por tanto,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

siendo F una primitiva particular de f.

La gráfica de $F(x) + C$, para valores distintos de C, representa una familia de funciones. Como cada miembro de la familia tiene la misma derivada en x, la pendiente en x de cada gráfica es la misma. Así, las gráficas de las funciones de la forma $y = F(x) + C$ forman una colección de curvas.

Hay que tener presente que $\int f(x)dx$ representa una familia de funciones.

El proceso de hallar las integrales indefinidas se llama *integración indefinida*. Observemos que este proceso significa hallar una primitiva de f y sumarle una constante arbitraria, que se llama *constante e integración*

Propiedades básicas

Tenemos las siguientes propiedades elementales:

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
- $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

Hemos dicho que la integración es el proceso inverso de la derivación. Ésto nos anima a dar fórmulas para el cálculo de primitivas. Podemos enunciar propiedades fundamentales del cálculo integral, que se obtienen a partir de la tabla de derivadas inmediatas.

Reglas básicas de integración: Tabla de *integrales inmediatas*:

- Múltiplo constante: $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$.
- Suma: $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
- Diferencia: $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.
- Linealidad: $\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x)dx$.
- $\int 0dx = C$.
- $\int dx = x + C$.
- $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, para $\alpha \neq 1$.
- $\int \dfrac{1}{x}dx \equiv \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
- $\int e^x dx = e^x + C$.
- $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln(a)} + C$, para $a > 0$, $a \neq 1$.
- $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$.
- $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$.
- $\int \sec^2(x)dx = \tan x + C$.

- $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2(x)dx = -\text{cotan}x + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx \equiv \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctan}x + C.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsen}x + C.$
- $\displaystyle\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arccos}x + C.$

Con estas reglas básicas, se puede calcular infinidad de integrales indefinidas.

Ejemplos

Calcular las siguientes integrales:

1. $\int (x^5 - 3x^2 - 7)dx.$ $= \frac{x^6}{6} - 3\frac{x^3}{3} - 7x + C_1' = \frac{x^6}{6} - x^3 - 7x + C_1'$
2. $\int (5\sqrt{x} + 4\,\text{sen}\,x)dx.$ $= 5\frac{x^{3/2}}{3/2} - 4\cos x + C_1' = \frac{10}{3}\sqrt{x^3} - 4\cos x + C_1'$

$$\int (x^5 - 3x^2 - 7)dx = \int x^5dx - 3\int x^2dx - 7\int dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} - 3\frac{x^{2+1}}{2+1} - 7x + C = \frac{1}{6}x^6 - x^3 - 7x + C.$$

$$\int (5\sqrt{x} + 4\,\text{sen}\,x)dx = 5\int x^{\frac{1}{2}}dx + 4\int \text{sen}\,xdx = 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4(-\cos x) + C = \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} - 4\cos x + C.$$

Se usará abundantemente el concepto de primitiva en teoría de integración. Además, en el próximo tema se verá su relación con un resultado llamado *Teorema Fundamental del Cálculo*.

4.2. Métodos de integración

Las fórmulas que aparecen en la tabla de las reglas de integración o tabla de integrales inmediatas no son suficientes por si sólas para calcular muchas integrales que tenemos que estudiar.

Para calcular la integral de una función que no aparezca en la tabla de integrales inmediatas, debemos recurrir a un *método de integración*. Los dos más importantes son el *cambio de variable* y la *integración por partes*.

Hay ciertos tipos de funciones que se pueden integrar siguiendo métodos específicos para cada caso. Veremos cómo se integran algunos de estos tipos de funciones.

4.2.1. Integración por cambio de variable

El método del cambio de variable es el más importante y fundamental de los métodos de integración. Es la versión en integrales de la regla de la cadena.

Recordemos que por la regla de la cadena si $g(x) = (x^2 + 3x + 5)^9$ entonces su derivada es

$$g'(x) = 9(x^2 + 3x + 5)^8(2x + 3).$$

Por tanto,

$$\int 9(x^2 + 3x + 5)^8(2x + 3)dx = (x^2 + 3x + 5)^9 + C.$$

Observemos que el integrando es de la forma

$$f(u(x))u'(x)$$

donde $f(x) = 9x^8$ y $u(x) = x^2 + 3x + 5$.

Se puede integrar muchos productos de la forma $f(u(x))u'(x)$ aplicando a la inversa la regla de la cadena, como indica el siguiente teorema:

Teorema 4.2.1 (Integración por cambio de variable (o sustitución)). *Sean g, f y u funciones de x derivables tales que*

$$g(x) = f(u(x))u'(x).$$

Entonces

$$\int g(x)dx = \int f(u(x))u'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + C = F(u(x)) + C,$$

donde F es una primitiva de f. Más claramente, si F es una primitiva de f entonces $F \circ u$ es una primitiva de $(f \circ u) \cdot u'$.

El problema es $\int f(u(x))u'(x)dx$, según el teorema del cambio de variable todo se reduce a calcular $F(t) = \int f(t)dt$, porque entonces $F \circ u$ es solución del problema inicial.

En la práctica este teorema se usa de la siguiente forma:

1. El problema es $\int f(u(x)u'(x)dx$.
2. Sustituimos $u(x)$ por t y $u'(x)dx$ por dt.
3. Tras el cambio el problema queda: $\int f(t)dt$.

4. Resolvemos $\int f(t)dt$.
5. Si $F(t)$ es solución del problema anterior, entonces "deshaciendo.[el] cambio, $F(u(x))$ es solución del problema inicial.

Ejemplos

Calcular las siguientes integrales

1. $\int e^x \text{sen}(e^x)dx$. $= \int \text{sen}\, t\, dt = -\cos t + C = -\cos(e^x) + C$

$t = e^x \quad dt = e^x dx$

Sean $f(x) = \text{sen}\, x$ y $u(x) = e^x$. Como $u'(x) = e^x$, el problema que tenemos que resolver es $\int f(u(x))u'(x)dx$. De esta forma, haciendo el cambio $t = e^x$, $dt = e^x dx$, se tiene

$$\int e^x \text{sen}(e^x)dx = \int \text{sen}(t)dt = -\cos\,(t) + C = -\cos(e^x) + C.$$

2. $\int (1-x)e^{-x^2+2x}dx$.

$t = -x^2 + 2x \quad dt = -2x + 2 = 2(1-x)dx \rightarrow \frac{1}{2}dt = (1-x)dx$

Sean $f(x) = e^x$ y $u(x) = -x^2 + 2x$. Entonces, haciendo el cambio $t = -x^2 + 2x$, $dt = -2x + 2$, se tiene

$$\int (1-x)e^{-x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\int 2(1-x)e^{-x^2+2x}dx = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{-x^2+2x} + C.$$

3. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$. $= \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\text{arcsen}\, t + C = \frac{1}{2}\text{arcsen}\,(x^2) + C$

$t = x^2 \quad dt = 2x\,dx \rightarrow \frac{1}{2}dt = x\,dx$

El integrando nos hace pensar en la derivada del arcoseno. Podemos escribir

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx.$$

de esta forma, considerando las funciones $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $u(x) = x^2 = t$ se tiene $dt = 2xdx$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{2}\text{arcsen}(t) + C = \frac{1}{2}\text{arcsen}(x^2) + C.$$

El arte del cambio de variable es muy importante, porque muchos de los métodos de integración que se desarrollan en este tema irán combinados con él. Veamos otros ejemplos que ilustran otras formas de cambio de variable en problemas de integración.

Ejemplos

Calcular las siguientes integrales:

1. $\int \sec x dx.$ $= \int \frac{\sec x(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x}dx = \int \frac{\sec^2 x+\sec x\tan x}{\sec x+\tan x}dx = \ln|t|+C = \ln|\sec x+\tan x|+C$

$t = \sec x+\tan x \quad dt = \sec^2 x+\sec x\tan x$

Se comienza multiplicando y dividiendo el integrando por $(\sec x + \tan x)$:

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}dx.$$

La ventaja de esto es que ahora el numerador es la derivada del denominador. Así, el cambio de variable $t = \sec x + \tan x$, $dt = (\sec^2 x + \sec x \tan x)dx$ da:

$$\int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C.$$

2. $\int \frac{dx}{1+e^x}.$ $= \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}(1+e^x)}dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t|+C = -\ln|e^x+1|+C$

$t = 1+e^x \quad dt = -e^{-x}dx \to -dt = e^{-x}dx$

El cambio de variable obvio $t = 1 + e^x$ no funciona. En efecto, como $dt = e^x dx$, se tiene

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{\frac{dt}{e^x}}{t} = \int \frac{dt}{e^x t} = \int \frac{dt}{(t-1)t}$$

y ésta no es una forma adecuada porque todavía no sabemos cómo calcular integrales de funciones racionales. En lugar de eso, se multiplica y divide el integrando por e^{-x}, obteniéndose:

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}}\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}.$$

Ahora se efectúa el cambio de variable $t = e^{-x} + 1$, de donde $dt = -e^{-x}dx$ y así:

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx = \int \frac{-dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln(e^{-x} + 1) + C.$$

Observamos que como $e^{-x} + 1 > 0$ para todo x, es $|e^{-x} + 1| = e^{-x} + 1$.

3. $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}$ $= \int \frac{6t^5}{(t^6)^{1/3}+(t^6)^{1/2}}dt = \int \frac{6t^5}{t^2+t^3}dt = \int \frac{6t^3}{1+t}dt = 6\int \frac{t^3}{1+t}dt \to$

$x = t^6 \quad dx = 6t^5 dx$

$t^3 \;|\; 1+t$
$-t^3-t^2 \quad t^2-t+1$
$-t^2$
t^2+t
t
$-t-1$
-1

$\to 6\int t^2+t+1-\frac{1}{1+t}\,dt = \frac{6t^3}{3}+\frac{6t^2}{2}+6t-6\ln|1+t|+C = 2x^{1/2}+3x^{1/3}+6x^{1/6}-6\ln|1+t|+C$

Como 6 es el mínimo común múltiplo de 2 y 3, se pone $x = t^6$ y así $dx = 6t^5dt$. Entonces se tiene

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{6t^5dt}{(t^6)^{\frac{1}{3}} + (t^6)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{6t^5dt}{t^2 + t^3} = \int \frac{6t^5dt}{t^2(1+t)} = \int \frac{6t^3dt}{1+t}$$

Estamos ante un cambio de variable que no lleva a una forma directamente integrable. Cuando el integrando es un cociente de polinomios y el grado del numerador es mayor que el del denominador, suele ser una buena idea el dividir los polinomios (todo esto lo veremos más adelante). La división da $6t^3 = (6t^2 - 6t + 6)(t+1) - 6$, luego

$$\begin{aligned}\int \frac{6t^3dt}{1+t} = \int \left(6t^2 - 6t + 6 - \frac{6}{t+1}\right) dt &= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C \\ &= 2(x^{\frac{1}{6}})^3 - 3(x^{\frac{1}{6}})^2 + 6(x^{\frac{1}{6}}) - 6\ln|x^{\frac{1}{6}}t + 1| + C \\ &= 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\ln|x^{\frac{1}{6}} + 1| + C.\end{aligned}$$

En principio, se puede aplicar cualquier cambio de variable que tenga sentido (por ejemplo, $x = \log(-t^2)$ no tiene sentido, ya que $-t^2 \leq 0$). A continuación vamos a ver unas clases de funciones para las que se conocen cambios de variable que suelen simplificar considerablemente las integrales.

A. Para calcular la integral de una función en la que aparece e^x, se puede hacer el cambio de variable $t = e^x$, ya que entonces $x = \ln t$ y $dx = \frac{dt}{t}$.

B. Para calcular la integral de una función en $(a+bx)^{\frac{1}{p_1}}, (a+bx)^{\frac{1}{p_2}}, \ldots, (a+bx)^{\frac{1}{p_m}}$, con $p_1, p_2, \ldots, p_m \in \mathbb{N}$, se puede hacer el cambio de variable $a + bx = t^n$, con $n = \text{m.c.m.}\{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, ya que entonces $(a+bx)^{\frac{1}{p_j}} = t^{\frac{n}{p_j}}$ y $\frac{n}{p_j} \in \mathbb{N}$.

Ejercicios

Calcular las siguientes integrales:

$$\int e^{2x} dx, \qquad \int \tan x dx, \qquad \int \frac{x^2}{(x^3-2)^5} dx, \qquad \int \frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

4.2.2. Integración por partes

La integración por partes es una técnica importante de integración que se puede aplicar a una amplia variedad de funciones y es particularmente útil para integrandos que contengan productos de funciones algebraicas y trascendentes. Es un método que se obtiene de la regla del producto para la derivación.

La regla de derivación de un producto es:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Integrando ambos miembros de la igualdad se obtiene la fórmula de integración por partes:

$$\int (uv)' = \int u'v + \int uv' \Longleftrightarrow uv = \int u'v + \int uv'.$$

Si pasamos un término a otro lado, obtenemos la fórmula de integración por partes, contenida en el siguiente resultado:

Teorema 4.2.2. *Sean u y v funciones derivables, entonces:*

$$\int uv' = uv - \int u'v \Longleftrightarrow \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

La fórmula de integración por partes se puede escribir así:

$$\int udv = uv - \int duv.$$

Observación

Esta fórmula expresa la integral original en términos de otra integral. Dependiendo de la elección de u y dv, puede ser más fácil de evaluar la segunda integral que la original.

A la hora de aplicar la fórmula de integración por partes debemos seguir las siguientes pautas:

1. Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
2. Intentar tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u, y como dv el factor restante del integrando.

Ejemplos

1. $\displaystyle\int x \ln x dx.$

Como no sabemos integrar $\ln x$, definamos $u(x) = \ln(x)$ y $v'(x) = x$.

Claramente $v(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2}$. Por tanto, según la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x)\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C.$$

2. $\int xe^x dx.$

Sean $u(x) = x$ y $v'(x) = e^x$. Entonces $v(x) = e^x$ y $u'(x) = 1$. Por tanto,

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1).$$

Se puede preguntar por qué no se incluye una constante de integración cuando se integra dv (o v'). La razón es que, en integración por partes, sólo necesitamos una función cuya diferencial sea dv, luego tomamos la más sencilla (que es la que tiene constante cero). Puede ser instructivo ver que tomando v con una constante K arbitraria, se obtiene el mismo resultado.

La integración por partes suele ser difícil cuando se empieza, porque no hay reglas infalibles para elegir u y dv. Lo que si hay tener en cuenta es que, la integral que se obtenga al aplicar integración por partes sea más fácil que la original.

Una aplicación sorprendente de la integración por partes involucra integrandos que constan de un sólo factor. En estos casos hay que tomar $v'(x) = dx$ ó $dv = dx$.

Ejemplo

Calcular $\int \operatorname{arc\,sen} x dx$.

Sea $v'(x) = dx$, y $u(x) = \operatorname{arc\,sen} x$. Entonces $v(x) = x$ y $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. La integración por partes produce ahora

$$\int \operatorname{arc\,sen} x dx = x \operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= x \operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)dx = x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Observemos que hemos aplicado integración por cambio de variable en el último paso.

Ejercicio

Calcular $\int \ln x dx$.

Algunas integrales requieren aplicar integración por partes más de una vez.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x dx$

Los factores x^2 y $\operatorname{sen} x$ son igualmente fáciles de integrar. Sin embargo la derivada de x^2 se vuelve más simple, considerando que la derivada de $\operatorname{sen} x$ no lo es. Así que se debe elegir la opción $u(x) = x^2$ y $v'(x) = \operatorname{sen} x$. Entonces $u'(x) = 2x$ y $v(x) = -\cos x$. Ahora la integración por partes produce:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx.$$

Este primer uso de la integración por partes, ha simplificado la integral original, pero la integral de la derecha todavía no se adapta a una regla básica de integración. Para evaluar esta integral volvemos a aplicar integración por partes. Esta vez sea $u(x) = 2x$ y $v'(x) = \cos x$. Ahora la integración por partes produce

$$\int 2x \cos x dx = 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x dx = 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C.$$

Combinando estos resultados podemos escribir

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C.$$

Al aplicar repetidas veces la integración por partes, debemos también percatarnos de la aparición de un múltiplo constante de la integral original. Por ejemplo, esto ocurre cuando se usa la integración por partes para evaluar $\int e^x \cos 2x dx$. En este ejemplo hacemos $u(x) = \cos 2x$ y $v'(x) = e^x$ en la primera sustitución y $u(x) = \operatorname{sen} 2x$ y $v'(x) = e^x$. Una vez realizada la integración por partes, basta despejar $\int e^x \cos 2x dx$. Veámoslo:

Sea $I = \displaystyle\int e^x \cos 2x dx$. Se toma $u(x) = \cos 2x$ y $v'(x) = e^x$, de donde $u'(x) = -2\operatorname{sen} 2x$ y $v(x) = e^x$. Así se tiene:

$$I = \int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x - \int e^x(-2\operatorname{sen} 2x)dx = e^x \cos 2x + 2\int e^x \operatorname{sen} 2x dx.$$

Tomamos ahora $u(x) = \operatorname{sen} 2x$ y $v'(x) = e^x$, de donde $u'(x) = 2\cos 2x$ y $v(x) = e^x$. Así se tiene:

$$\int e^x \operatorname{sen} 2x dx = e^x \operatorname{sen} 2x - \int e^x(2\cos 2x)dx = e^x \operatorname{sen} 2x - 2\int e^x \cos 2x dx = e^x \operatorname{sen} 2x - 2I.$$

combinando ambas integrales, obtenemos:

$$I = e^x \cos 2x + 2e^x \operatorname{sen} 2x - 4I = e^x(\cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x) - 4I.$$

Despejamos I:

$$5I = e^x(\cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x) \Rightarrow I = \frac{e^x(\cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x)}{5} + C.$$

La integración por partes está especialmente recomendada para integrales de la forma que vemos a continuación. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $p(x)$ un polinomio:

- $\displaystyle\int p(x)e^{ax}dx$, tomando $u(x) = p(x)$ y $v'(x) = e^{ax}$.
- $\displaystyle\int p(x) \operatorname{sen}(ax)dx$, tomando $u(x) = p(x)$ y $v'(x) = \operatorname{sen}(ax)$.
- $\displaystyle\int p(x) \cos(ax)dx$, tomando $u(x) = p(x)$ y $v'(x) = \cos(ax)$.
- $\displaystyle\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx)dx$. Aquí puede tomarse $u(x) = e^{ax}$ o $u(x) = \operatorname{sen}(bx)$, ya que ambas son fáciles de integrar.
- $\displaystyle\int e^{ax} \cos(bx)dx$. Aquí puede tomarse $u(x) = e^{ax}$ o $u(x) = \cos(bx)$, ya que ambas son fáciles de integrar.
- $\displaystyle\int p(x) \ln(x)dx$, tomando $u(x) = \ln x$ y $v'(x) = p(x)$.
- $\displaystyle\int p(x)\text{arcsen}(ax)dx$, tomando $u(x) = \text{arcsen } (ax)$ y $v'(x) = p(x)$.
- $\displaystyle\int p(x)\text{arccos}(ax)dx$, tomando $u(x) = \text{arccos } (ax)$ y $v'(x) = p(x)$.
- $\displaystyle\int p(x)\text{arctan}(ax)dx$, tomando $u(x) = \text{arctan } (ax)$ y $v'(x) = p(x)$.

Ejercicio

Calcular las siguientes integrales:

$$\int \text{arctan} x dx, \quad \int x^\alpha \log(x)dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1.$$

Hay ocasiones en las que el problema es

$$\int f(u(x))dx.$$

Supongamos que u es derivable y tiene inversa derivable, u^{-1}.

Consideremos la función $h(t) = f(t)(u^{-1})'(t)$.

Si conseguimos calcular una primitiva F de h entonces $F \circ u$ es primitiva de $f \circ u$.

En la práctica hacemos lo siguiente:

- El problema es $\int f(u(x))dx$.
- Se sustituye $u(x)$ por t (o x por $u^{-1}(t)$) y dx por $(u^{-1})'(t)dt$.
- Tras el cambio el problema se transforma en $\int f(t)(u^{-1})'(t)dt$.
- Se resuelve el problema anterior.
- Si $F(t)$ es solución del problema anterior, "deshaciendo.[el] cambio $F(u(x))$ es solución del problema inicial.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})dx$.

Sean $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $u(x) = \sqrt{x}$. El problema es entonces calcular $\displaystyle\int f(u(x))dx$.

Hacemos el cambio $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow t^2 = x$, entonces $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2tdt = dx$. Así se tiene:

$$\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})dx = \int \operatorname{sen} t 2tdt = 2\int t \operatorname{sen} tdt.$$

Aplicamos integración por partes para resolver la última integral. Sean $u(t) = t$ y $v'(t) = \operatorname{sen} t$, entonces $u'(t) = 1$ y $v(t) = -\cos t$. Entonces:

$$\int t \operatorname{sen} tdt = -t\cos t + \int \cos tdt = -t\cos t + \operatorname{sen} t + C = -\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \operatorname{sen}\sqrt{x} + C.$$

Entonces

$$\int \operatorname{sen}(\sqrt{x})dx = 2\operatorname{sen}\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C.$$

4.2.3. Integración de funciones racionales

Una función racional es la de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son funciones polinómicas. La descomposición en fracciones simples es un magnífico método de integración.

DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES

La descomposición en fracciones simples es un procedimiento de descomponer una función racional reducida en suma de otras.

Se puede descomponer la expresión racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples si P y Q no tienen factores comunes y si el grado de P es menor que el grado de Q. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, se divide primero para obtener un polinomio mas una fracción que verifique la condición anterior (que se llama *fracción propia*), y cuya integración se simplifica por descomposición en fracciones simples.

En álgebra se demuestra que se puede escribir una fracción propia como una suma de fracciones de una de las dos formas siguientes:

$$\frac{A}{(x-a)^n} \qquad \text{ó} \qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$$

donde a, p, q son constantes y el polinomio x^2+px+q es irreducible (es decir, no tiene raices reales o, lo que es lo mismo, no se puede descomponer en producto de factores lineales). Comenzamos con la primera fracción:

Descomposición en fracciones simples: un solo factor

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n}.$$

Ejemplo

Descomponer $\dfrac{x^2-6x+3}{(x-2)^3}$ en suma de fracciones simples.

El numerador y el denominador son polinomios que no tienen factores comunes y el grado del numerador es menor que el del denominador, por lo tanto, se puede descomponer la función racional en fracciones simples. El denominador es un polinomio con una sóla raiz, ya factorizado. La descomposición en fracciones simples es, en este caso:

$$\frac{x^2-6x+3}{(x-2)^3} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3}.$$

Si se multiplican ambos miembros por $(x-2)^3$ se obtiene

$$x^2-6x+3 = A_1(x-2)^2 + A_2(x-2) + A_3.$$

Haciendo $x = 2$ se obtiene

$$2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 0 + A_3 \Rightarrow A_3 = -5.$$

Se sustituye ahora A_3 por -5 y se desarrolla el miembro de la derecha

$$x^2 - 6x + 3 = A_1 x^2 + (-4A_1 + A_2)x + (4A_1 - 2A_2 - 5).$$

Igualando los coeficientes de las potencias del mismo exponente se tiene:

$$1 = A_1, \quad -6 = -4A_1 + A_2, \quad 3 = 4A_1 - 2A_2 - 5.$$

Este es un sistema compatible determinado que da como solución $A_1 = 1$ y $A_2 = -2$. Así pues, la descomposición es

$$\frac{x^2 - 6x + 3}{(x-2)^3} = \frac{1}{x-2} + \frac{-2}{(x-2)^2} + \frac{-5}{(x-2)^3}.$$

Si hay dos o mas factores lineales en el denominador, hay que descomponer la fracción en las fracciones correspondientes a cada factor. Por ejemplo,

$$\frac{P(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$$

se descompone en

$$\frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}.$$

(El grado del denominador es el mismo número que el de constantes arbitrarias que hay que poner en los numeradores. Comprobar rutinariamente que esto es siempre así, para evitar errores de bulto).

Ejemplo

Descomponer en fracciones simples $\dfrac{8x-1}{x^2-x-2}$.

Vemos que el grado del denominador es mayor que el del numerador. Lo primero que hay que hacer es descomponer el denominador en factores y comprobar que no hay factores comunes con el numerador. Después se descompone la fracción en suma de fracciones simples, cada una con un factor lineal en el denominador y numeradores indeterminados y se suman estas fracciones. Tenemos, pues,

$$\frac{8x-1}{x^2-x-2} = \frac{8x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+1}$$

$$= \frac{A_1(x+1) + A_2(x-2)}{(x-2)(x+1)}.$$

Ahora se multiplican ambos miembros por el mínimo común denominador $(x-2)(x+1)$, obteniéndose:

$$8x - 1 = A_1(x+1) + A_2(x-2).$$

Ahora se dan a x, sucesivamente, valores que anulen cada uno de los sumandos del miembro de la derecha. Para $x = -1$ se tiene $3 = A_2$ y para $x = 2$ se tiene $5 = A_1$.

Así

$$\frac{8x-1}{x^2-x-2} = \frac{5}{x-2} + \frac{3}{x+1}.$$

Si hay factores lineales múltiples y distintos se combinan los métodos vistos anteriormente. Por ejemplo, una descomposición sería:

$$\frac{5x^2+21x+4}{(x+1)^2(x-3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{x-3}.$$

En este caso, el grado del denominador es 3, luego hay que poner 3 constantes arbitrarias. En cambio, hay que poner 4 constantes arbitrarias en el siguiente caso:

$$\frac{5x^2+21x+4}{(x+1)^3(x-3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{A_4}{x-3}.$$

Ahora se procede como en los casos anteriores para averiguar el valor de las constantes.

Si alguno de los factores del denominador es un polinomio irreducible de segundo grado, entonces el numerador correspondiente deberá tener la forma $Mx + N$, como indicamos a continuación:

Descomposición en fracciones simples: un sólo factor cuadrático irreducible

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}.$$

Como el grado del denominador es $2m$, tenemos $2m$ constantes arbitrarias $M_1, M_2, \ldots M_m$ y $N_1, N_2, \ldots N_m$.

Ejemplo

Descomponer $\frac{-3x^3-x}{(x^2+1)^2}$.

La descomposición es:

$$\frac{-3x^3 - x}{(x^2+1)^2} = \frac{A_1x + B_1}{(x^2+1)^2} + \frac{A_2x + B_2}{x^2+1}.$$

Si se multiplican ambos miembros por $(x^2+1)^2$ y se desarrolla, se tiene:

$$-3x^3 - x = (A_1x+B_1)+(A_2x+B_2)(x^2+1) = A_2x^3+B_2x^2+(A_1+A_2)x+(B_1+B_2).$$

Ahora se igualan los coeficientes de las mismas potencias en cada miembro, y se resuelve el sistema correspondiente, obteniéndose $A_1 = 2$, $A_2 = -3$, $B_1 = 0$ y $B_2 = 0$. Esto significa que

$$\frac{-3x^3 - x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{-3x}{x^2+1}.$$

En muchos casos habrá factores lineales y cuadráticos; por ejemplo, en la siguiente descomposición:

$$\frac{x^2+4x-23}{(x^2+4)(x+3)^2} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+4} + \frac{A_2}{x+3} + \frac{A_3}{(x+3)^2}.$$

El grado del denominador es 4 y hay 4 constantes desconocidas.

El álgebra nos dice que cualquier polinomio con coeficientes reales se puede descomponer en producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles, alguno de los cuales pueden estar repetidos. Se puede usar este resultado para justificar el siguiente procedimiento general de obtener una descomposición en fracciones simples de una función racional:

Descomposición en fracciones simples de una función racional

Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ una función racional, con $Q(x) \neq 0$ y los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ sin factores comunes.

Paso 1. Comprobamos que el grado de P sea menor que el grado de Q. Si el grado de P es mayor que el grado de Q, tendríamos que dividir P entre Q para poder escribir

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde C es el cociente de la división y R es el resto, que es cero o de grado menor que Q. Supongamos ya que $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una fracción propia.

Paso 2. Se factoriza el denominador en producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles.

Paso 3. Se expresa $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples de las formas

$$\frac{A_i}{(x-a)^n} \quad \text{ó} \quad \frac{M_j x + N_j}{(x^2+px+q)^m}.$$

Hay que comprobar siempre que el número de constantes arbitrarias que se utilizan es igual al grado del denominador.

Para estudiar la integración de funciones racionales, empezamos estudiando la integración de las fracciones simples.

Consideremos las fracciones simples

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{ó} \quad \frac{Mx + N}{(x^2+px+q)^m}$$

donde $A, M, N, a, p, q \in \mathbf{R}$, $n, m \in \mathbf{N}$ y $p^2 - 4q < 0$ (esta condición significa que el polinomio $x^2 + px + q$ no posee raices reales).

Podemos calcular una primitiva de cualquier facción simple:

$$\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{dx}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$$

y si $n \neq 1$,

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}dx = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$$

Este tipo de integrales da lugar a logaritmos y arcotangentes. Explicaremos el procedimiento para calcularlas mediante un ejemplo:

Calculemos la integral $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+2x+3}dx$.

- Primero buscamos en el numerador la derivada del denominador ($= 2x+2$):

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+3}dx = 3\int \frac{x+\frac{2}{3}}{x^2+2x+3}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{4}{3}}{x^2+2x+3}dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2+\frac{4}{3}}{x^2+2x+3}dx = \frac{3}{2}\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx + \int \frac{-\frac{2}{3}}{x^2+2x+3}dx\right)$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx - \int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$$

- La primera integral es el logaritmo del denominador, ya que el numerador es precisamente la derivada del denominador:

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx = \ln|x^2+2x+3| + C.$$

- La segunda integral da lugar a una arcotangente. Para verlo, completamos cuadrados en el denominador, es decir, lo escribimos en la forma $(x+\alpha)^2+\beta$:

$$x^2+2x+3 = (x+\alpha)^2+\beta = x^2+2\alpha x+(\alpha^2+\beta) \Rightarrow \alpha = 1, \quad \beta = 2.$$

Por tanto,

$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 = 2\left[\frac{1}{2}(x+1)^2+1\right] = 2\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]$$

y de este modo,

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

- Finalmente, obtenemos

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+3}dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+3| - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x^{+}px+q)^m}dx.$$

Este caso es más complicado y no lo consideraremos. Estas integrales se calculan usando la *fórmula de Hermite*.

Con todo esto, ya tenemos las herramientas para integrar funciones racionales usando la descomposición en fracciones simples. Ilustremos todo lo anterior con un ejemplo:

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+3x+2}dx$.

Como el grado del polinomio del numerador es menor que el del denominador pasamos al siguiente paso.

Calculamos las raices de Q,

$$x^2+3x+2=0 \Longrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2}}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array} \right. .$$

La factorización que buscábamos es $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$. Como hemos obtenido dos raices reales distintas, podemos seguir con el siguiente paso.

Descomponemos en fracciones simples, para ello tenemos que introducir dos incógnitas A y B

$$\frac{2x-1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}.$$

Para averiguar los valores de las constantes A y B pasamos la igualdad anterior a común denominador y eliminamos los denominadores, con lo cual queda:

$$2x-1=A(x+2)+B(x+1)$$

$$2x-1=(A+B)x+2A+B$$

Tenemos una igualdad de polinomios, con lo cual formamos un sistema de ecuaciones y resolvemos

$$2=A+B$$

$$-1=2A+B$$

La solución del sistema es $A=-1$ y $B=5$.

La integral de partida la podemos descomponer como suma de dos integrales más fáciles de resolver

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)(x+2)}dx=\int \frac{-1}{x+1}dx+\int \frac{5}{x+2}dx=-\ln|x+1|+5\ln|x+2|+C,$$

donde C es la constante de integración.

El último paso consiste en simplificar el resultado utilizando las propiedades de los logaritmos, aunque la integral ya quedo resuelta en el paso anterior

$$\int \frac{2x-1}{(x+1)(x+2)}dx=-\ln|x+1|+5\ln|x+2|+C=\ln\left(\frac{|x+2|^5}{|x+1|}\right)+C.$$

Observación

Las únicas funciones racionales que no hemos visto cómo descomponer en fracciones simples son aquellas cuyo denominador contiene polinomios de segundo grado sin raices reales, elevados a potencias mayores que uno, como $\frac{1}{(x^2+1)^2}$. La descomposición es similar, pero dado que este tipo de funciones tiene una descomposición algo más complicada y que no suele aparecer mucho en la práctica, no vamos a tratarlas. La integración de esas fracciones simples requiere métodos que no hemos visto, como el método de Hermite.

4.2.4. Integración de funciones trigonométricas

Nos ocuparemos en esta sección de cierto tipo de integrales en las que aparecen funciones trigonométricas. Estudiaremos varios casos:

Caso 1. Integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}(ax)\cos(bx)dx, \quad \int \operatorname{sen}(ax)\operatorname{sen}(bx)dx, \quad \int \cos(ax)\cos(bx)dx.$$

En este caso, usaremos las siguientes fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

para transformar los productos en sumas, que son sencillas de integrar.

Ejemplo

Calcular $\int \operatorname{sen}(2x)\cos(5x)dx$.

Según la primera igualdad

$$\operatorname{sen}(2x)\cos(5x) = \frac{\operatorname{sen}(7x)+\operatorname{sen}(-3x)}{2} = \frac{\operatorname{sen}(7x)-\operatorname{sen}(3x)}{2}$$

y por tanto,

$$\int \operatorname{sen}(2x)\cos(5x)dx = \frac{1}{2}\left(\int \operatorname{sen}(7x)dx - \int \operatorname{sen}(3x)dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos(7x)}{7}+\frac{\cos(3x)}{3}\right)+C.$$

Finalmente, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}(2x)\cos(5x)dx = -\frac{1}{14}\cos(7x) + \frac{1}{6}\cos(3x) + C.$$

Caso 2. Integrales de la forma

$$\int \operatorname{sen}^m(x)\cos^n(x)dx \quad (m, n \in \mathbf{N}).$$

Hemos de considerar varios casos:

- Si m es impar, hacemos el cambio $t = \cos(x)$. De este modo, $\operatorname{sen}^2(x) = 1 - t^2$.
- Si n es impar, hacemos el cambio $t = \operatorname{sen}(x)$. De este modo, $\cos^2(x) = 1 - t^2$.
- Si m y n son pares, usamos las siguientes fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}, \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \quad \operatorname{sen}(x)\cos(x) = \frac{sen(2x)}{2}.$$

Observación

Si n y m son ambos impares, se pueden usar los dos primeros cambios. Si $n < m$, es preferible usar el cambio $t = \operatorname{sen} x$. Si $n > m$, es preferible usar el cambio $t = \cos x$.

Ejemplo

Calcular las integrales:

1. $\int \operatorname{sen}^5(x)\cos(x)dx$
2. $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)dx$

En el primer caso, la integral es inmediata, ya que la derivada del seno es el coseno:

$$\int \operatorname{sen}^5(x)\cos(x)dx = \frac{\operatorname{sen}^6(x)}{6} + C.$$

Aquí no es necesario aplicar las reglas anteriores.

En el segundo caso, como $m = 3$ es impar, hacemos el cambio $t = \cos(x)$, de donde $dt = -\operatorname{sen}(x)dx$. Escribiremos entonces

$$\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)dx = -\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^4(x)(-\operatorname{sen}(x))dx$$

$$= -\int (1-t^2)t^4dt = -\int (t^4 - t^6)dt = \int (t^6 - t^4)dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C.$$

Deshaciendo el cambio, obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^3(x)\cos^4(x)dx = \frac{\cos^7(x)}{7} - \frac{\cos^5(x)}{5} + C.$$

Ejercicio.

Calcular $\int \cos^4(x)dx$.

Observación

Hemos dado los cambios en el caso en que m y n sean enteros positivos. Sin embargo, la misma estrategia funciona siempre que m o n sean impares y positivos.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx.$

Como la potencia del coseno es impar, hacemos el cambio $t = \operatorname{sen} x$, $dt = \cos x dx$:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx = \int \operatorname{sen}^{-\frac{1}{2}} \cos^3 x dx = \int \operatorname{sen}^{-\frac{1}{2}} \cos^2 x \cos x dx$$

$$= \int t^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)dt = t^{-\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}dt = 2t^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C = 2\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} x - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^{\frac{5}{2}} x + C.$$

Caso 3. Integrales de la forma $\int R(sen(x), \cos(x))dx$, donde R es una función racional.

En primer lugar conviene destacar que cualquier función racional en las razones trigonométricas puede expresarse como una función racional en seno y coseno, como ilustra el siguiente ejemplo:

$$\frac{\sec x \tan^2 x - 5\operatorname{cosec}^3 x}{\cos x + 3^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos x}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5}{\operatorname{sen}^3 x}}{\cos x + 3\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}^5 x - 5\cos^3 x}{\cos^3 x \operatorname{sen}^3 x}}{\frac{\cos x \operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \frac{\operatorname{sen}^5 x - 5\cos^3 x}{\cos^4 x \operatorname{sen}^3 x + 3\cos^5 x \operatorname{sen} x}.$$

Veamos ahora cómo se resuelven las integrales. Tenemos varios casos en los que se usan cambios especiales:

- Si R es impar en $\operatorname{sen}(x)$ (esto es, $R(-\operatorname{sen}(x), \cos(x)) = -R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$), hacemos el cambio $t = \cos(x)$.
- Si R es impar en $\cos(x)$ (esto es, $R(\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) = -R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$), hacemos el cambio $t = \operatorname{sen}(x)$.

- Si R es par en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$ (esto es, $R(-\operatorname{sen}(x), -\cos(x)) = R(\operatorname{sen}(x), \cos(x))$), hacemos el cambio $t = \tan x$.

En cualquier caso, es posible hacer el cambio universal $t = \tan(\frac{x}{2})$, que implica

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

El inconveniente de este cambio es que los cálculos pueden resultar complicados. Debe considerarse como último recurso.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)}$.

En este caso $R(sen(x), \cos(x)) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$, que es impar en $\operatorname{sen}(x)$. Por tanto, hacemos el cambio $t = \cos(x)$ de donde $x = \arccos(x)$, $dx = \dfrac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}$ y $\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1-t^2}$. Entonces

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)} = \int \frac{\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1}.$$

Esta última integral es racional; si factorizamos el denominador, obtenemos

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Deshaciendo el cambio, resulta

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C.$$

Ejercicio.

Calcular la integral

$$\int \frac{dx}{4\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x) + 5},$$

usando el cambio universal $t = \tan(\frac{x}{2})$.

4.2.5. Integración de funciones irracionales

Conociendo cómo evaluar las integrales que contienen potencias de funciones trigonométricas, usaremos sutituciones trigonométricas para evaluar integrales que contienen radicales.

El objetivo de las sustituciones trigonométricas es eliminar el radical del integrando y reducir la función irracional a integrar a una función trigonométrica.

1. Para calcular la integral de una función en la que aparece $\sqrt{a - b(x-\alpha)^2}$, con $a, b > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se puede hacer el cambio de variable $\sqrt{a}\operatorname{sen} t = \sqrt{b}(x-\alpha)$, ya que entonces $\sqrt{a - b(x-\alpha)^2} = \sqrt{a}\cos t$ y $dx = \sqrt{a}\cos t \frac{dt}{\sqrt{b}}$.
2. Para calcular la integral de una función en la que aparece $\sqrt{a + b(x-\alpha)^2}$, con $a, b > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se puede hacer el cambio de variable $\sqrt{a}\tan t = \sqrt{b}(x-\alpha)$, ya que entonces $\sqrt{a + b(x-\alpha)^2} = \sqrt{a}\sec t$ y $dx = \sqrt{a}\sec^2 t \frac{dt}{\sqrt{b}}$.
3. Para calcular la integral de una función en la que aparece $\sqrt{b(x-\alpha)^2 - a}$, con $a, b > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se puede hacer el cambio de variable $\sqrt{a}\sec t = \sqrt{b}(x-\alpha)$, ya que entonces $\sqrt{b(x-\alpha)^2 - a} = \sqrt{a}\tan t$ y $dx = \sqrt{a}\sec t \tan t \frac{dt}{\sqrt{b}}$.
4. Para calcular la integral de una función en la que aparece alguna de las raices de los tres apartados anteriores, se puede hacer el cambio de variable t igual a la raíz, si aparece $(x-\alpha)^n$, con n impar, multiplicando (o dividiendo) en el integrando. Si n es impar, este cambio es mucho más conveniente que cualquiera de los indicados en los tres últimos apartados.

Como caso particular, destacaremos los siguientes, donde R es una función racional:

1. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$; cambio $x = a\operatorname{sen}(t)$ ó $x = a\cos(t)$.
2. $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$; cambio $x = a\tan(t)$ ó $x = a\cot(t)$.
3. $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$; cambio $x = a\sec(t)$ ó $x = a\csc(t)$.

Ejemplos

1. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}dx$.

Es fácil comprobar que $x^2 - 6x + 8 = (x-3)^2 - 1$. Por tanto, estamos en el tercer caso general, donde $a = 1$, $b = 1$ y $\alpha = 3$. El cambio de variable que hay que considerar es $\sec t = x - 3$, entonces $\sqrt{x^2 - 6x + 8} = \tan t$ y $dx = \sec t \tan t dt$. Así:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2 - 1}}dx = \int \frac{1}{\tan t}\sec t \tan t dt = \int \sec t dt.$$

La integral $\int \sec t dt$ ya sabemos cómo hacerla (**Ejercicio**).

2. Calcular $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}dx$ mediante el cambio $x = \tan(t) \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2(t)}$.

$$\int \sqrt{x^2+1}dx = \int \frac{\sqrt{\tan^2(t)+1}}{\cos^2(t)}dt = \int \sqrt{\frac{\tan^2(t)+1}{\cos^4(t)}}dt = \int \sqrt{\frac{1}{\cos^6(t)}}dt = \int \frac{1}{\cos^3(t)}dt$$

donde hemos usado que $\tan^2(t)+1 = \dfrac{sen^2(t)}{\cos^2(t)} + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(t)}$.

La integral *displaystyle* $\int \frac{1}{\cos^3(t)}dt$ ya sabemos cómo hacerla. (**Ejercicio**).

4.2.6. Estrategias de integración

Esta sección pretende servir de resumen de los métodos de integración anteriormente estudiados, así como de guia a la hora de atacar una determinada integral.

1. Mirar si se trata de una integral inmediata. Reescribir el integrando si es necesario: simplificar, descomponer en sumandos, utilizar identidades trigonométricas, etc.

2. Ver si se puede hacer un cambio de variables adecuado, para transformas la integral en una integral elemental.

3. Clasificar en uno de los siguientes tipos:

(a) Integración por partes. Para poder aplicar la fórmula de integración por partes ha de haber un producto en el que uno de los factores sea fácil de integrar y el otro sea fácil de derivar. La integral resultante ha de ser más sencilla que la original.

(b) Funciones racionales.

(c) Funciones trigonométricas.

(d) Funciones irracionales.

4. Si no ha salido por alguno de los métodos anteriores, intentarlo de otra forma (multiplicar por 1, racionalizar, usar otras fórmulas trigonométricas, etc).