Cálculo - Relación de Ejercicios
Extremos de funciones e Integrales dobles

1. Calcular los extremos relativos de las siguientes funciones:

   a) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 16$

   b) $f(x, y) = 80x + 80y - x^2 - y^2$

   c) $f(x, y) = xy$

   d) $f(x, y) = x^2y^2$

2. Minimizar la función $f(x, y) = x^2+y^2$ restringida al dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 4\}$.

3. Calcula los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^2+3xy+y^2$ restringida al dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Calcula $\displaystyle\iint_R x\cos(xy)dA$, siendo $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$.

5. Calcula $\displaystyle\iint_D (x + y)dA$, siendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$.

6. Calcula la integral de $f(x, y) = 2y + x$ en la región D, la cual está comprendida entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$.

1. Calcular los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 16$

b) $f(x, y) = 80x + 80y - x^2 - y^2$

c) $f(x, y) = xy$

d) $f(x, y) = x^2y^2$

$f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 6x - 4y + 16$

Puntos críticos : $f(0,0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\delta f}{\delta x} = 6x - 6 = 0 \,;\, x = 1 \\ \dfrac{\delta f}{\delta y} = 4y - 4 = 0 \,;\, y = 1 \end{array} \right\} (1,1)$

Matriz hessiana : $\begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$|\mathrm{Hess} f| = 24 > 0$; $f''_{xx} > 0$; mínimo local $(1,1)$

$f(x,y) = 80x + 80y - x^2 - y^2$

Puntos críticos : $f(0,0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\delta f}{\delta x} : 80 - 2x = 0 \,;\, x = 40 \\ \dfrac{\delta f}{\delta y} : 80 - 2y = 0 \,;\, y = 40 \end{array} \right\} (40,40)$

Matriz hessiana : $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$|\mathrm{Hess} f| = 4 > 0$; $f''_{xx} < 0$; máximo local $(40,40)$

$f(x,y) = xy$

Puntos críticos: $f(0,0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} : y \\ \frac{\partial f}{\partial y} : x \end{array} \right\} (y,x) = (0,0)$

$\text{Hess} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$ Punto de silla en $(0,0)$

$f(x,y) = x^2 y^2$

Puntos críticos: $f(0,0)$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} : 2xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} : 2x^2 y \end{array} \right\} (2xy^2, 2x^2y) = (0,0)$

$\text{Hess} f = \begin{pmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix} = 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -8x^2y^2 = 0$

Estudiamos el punto $(0,0)$

$f(x, mx) = x^2 (mx)^2 = x^4 m^2$

$\left. \begin{array}{l} f(x,0) = 0 \\ f(0,mx) = 0 \end{array} \right\}$ Parece ser un mínimo ya que es enteramente positivo y esta en la base de la misma

2. Minimizar la función $f(x,y) = x^2+y^2$ restringida al dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 4\}$.

$g(x) = x^2 + y^2 - 4$

Multiplicador de Lagrange

$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2 - \lambda(x+y-4) = x^2+y^2 - \lambda x - \lambda y + 4\lambda$

$\nabla L(x,y,\lambda) = (0,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - \lambda \; ; \; 2x = \lambda \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2y - \lambda \; ; \; \lambda = 2y \end{aligned}\right\} 2x = 2y \; ; \; x = y$$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -x - y + 4 \; ; \; x+y = 4 \; ; \; 2x = 4 \; ; \; x = 2 = y \; ; \; (2,2)$

$\text{Hess} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0 \; ; \; f''_{xx} > 0 \; ; \; (2,2)$ mínimo por lo que se cumple

3. Calcula los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ restringida al dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Puntos críticos: f (0,0) $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y + 3x = 0 \end{array} \right\} (0,0)$

$\text{Hessf} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = -5 < 0$ punto de silla en el punto (0,0)

4. Calcula $\displaystyle\iint_R x\cos(xy)dA$, siendo $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 x\cos(xy)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[x\,\mathrm{sen}(xy) \Big]_0^1 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{sen}\,x \;\; dx$$

$$= \Big[-\cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \cos 0 - \cos\frac{\pi}{2} = 1$$

5. Calcula $\iint_D (x+y)dA$, siendo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\}$.

$x \geq 0$

$y \geq 0$

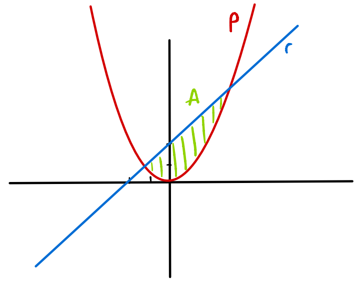
$x + y \leq 1 ;\ x + y = 1$

$y = x - 1$

$\int x + y \ dx = y$

$\int x + y \ dy = x = y - 1$

6. Calcula la integral de $f(x, y) = 2y + x$ en la región D, la cual está comprendida entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$.



$$f(x,y) = 2y + x$$

$$p : y = x^2$$

$$r : y = x + 2$$

$$x^2 = x + 2 \;;\; x^2 - x - 2 = 0 \;;\; \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 2 \;;\; y = x^2 - x - 2 = 4 \quad (2,4) \\ x_2 = -1 \;;\; y = 1 \quad (-1,1) \end{array} \right.$$

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} 2y + x \, dy\, dx = \int_{-1}^{2}\left[y^2 + xy\right]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^{2} (x+2)^2 + x(x+2) - x^4 - x^3 \, dx$$

$$= \int_{-1}^{2} x^2 + 4x + 4 + x^2 + 2x - x^4 - x^3 \, dx = \int_{-1}^{2} -x^4 - x^3 + 2x^2 + 6x + 4 \, dx = \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + 3x^2 + 4x\right]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{333}{20} = 16{,}65$$