ANEXO: REPRESENTACIÓN COMPLEJA DE FUNCIONES ARMÓNICAS EN FÍSICA

1.- REPRESENTACION FASORIAL Y ALGEBRA COMPLEJA

Numerosas magnitudes físicas, tales como corriente alterna, movimiento armónico simple, ondas etc., se describen matemáticamente mediante funciones senoidales (armónicas), como por ejemplo:

$x = X_o \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$ Movimiento armónico simple

$v = V_o \operatorname{sen}(\omega t + \psi)$ Diferencia de potencial en corriente alterna

$y = Y_o \operatorname{sen}(Kx - \omega t + \psi)$ Ondas armónicas

Donde X_o, Y_o , son los valores máximos de las funciones; ω, representa la frecuencia angular y es igual a $2\pi/T = 2\pi f$, (T periodo y f frecuencia).

Las funciones senoidales son periódicas con período T= $2\pi/w$, como puede verse fácilmente. Como el período es el tiempo de duración de un ciclo y la frecuencia f es el número de ciclos por segundo, se tienen pues las siguientes relaciones:

$T = 2\pi/w$ Período en segundos (s)

$f = 1/T$ Frecuencia en ciclos por seg. o herzios (Hz)

$w = 2\pi f$ Pulsación en rad/seg. (s^{-1})

En resumen, una función sinusoidal como por ejemplo $v = V_o \text{ sen } (wt + \varphi)$ está caracterizada por:

a) Su período T, su frecuencia f o su pulsación w.

b) Su amplitud, valor máximo o de cresta

c) Su ángulo de fase inicial (ángulo de fase correspondiente a t = 0) o simplemente, fase inicial φ

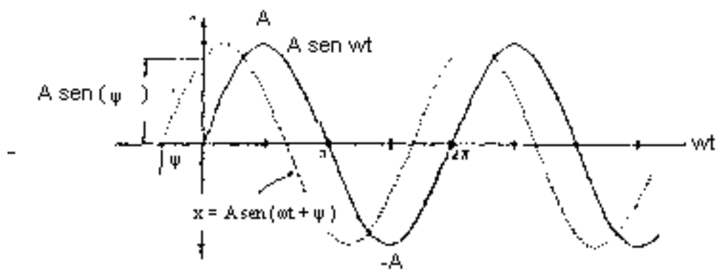
Cuando se tienen dos senoides de igual pulsación, se define la diferencia de ángulos de fases más brevemente, diferencia de fases, como la diferencia entre las fases iniciales.

Existen diferentes formas de representar magnitudes senoidales:

I) Representación cartesiana

En la figura siguiente se muestra una clásica representación cartesiana; se puede tratar de cualquier magnitud instantánea. En el eje de ordenadas se mide el valor instantáneo de la magnitud; en el eje de abcisas, la variable puede ser el tiempo “t” o, lo que es más común, la variable “wt”.

Una senoide queda determinada mediante dos características: amplitud y fase inicial.

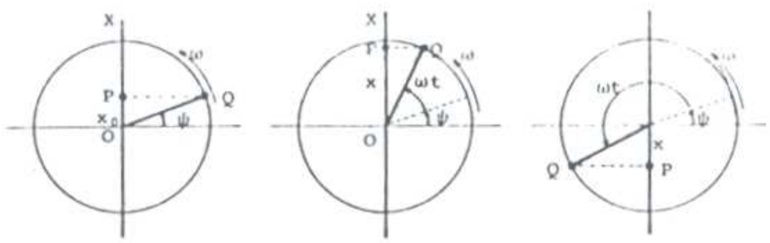


II) <u>Representación vectorial</u>

Una magnitud senoidal puede representarse mediante un vector giratorio al que, generalmente, se le da el nombre de “fasor”.

Consideremos, por ejemplo, el m.a.s. $x = X_o \text{ sen } (wt + \varphi)$. En un plano cartesiano, como se indica en la siguiente figura, podríamos representar un vector con origen en 0 y de módulo X_o

, que gira, en torno a 0, con velocidad angular w. Si tomamos el eje horizontal como referencia de fases, evidentemente, la proyección del vector giratorio sobre el eje vertical da el valor instantáneo de la magnitud x



A los diagrama en que las magnitudes senoidales están representados por fasores, se les llama “diagramas fasoriales”.El método fasorial se utiliza para resolver problemas en los que se tiene diferentes funciones senoidales con la misma frecuencia. Ejemplo redes de corriente alterna, superposición de m.a.s. de la misma frecuencia, ondas etc. En tales casos, siendo la velocidad angular w la misma para todas las magnitudes representadas en un diagrama fasorial, podemos prescindir del carácter giratorio de los vectores involucrados y considerarlos como vectores “estáticos” definidos por su módulo (valor máximo) y por su argumento (fase inicial).

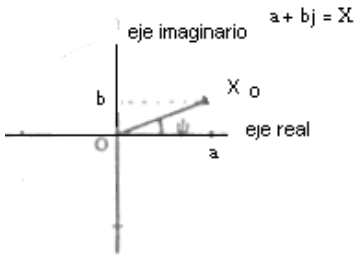
Al utilizar diagramas fasoriales, es conveniente adoptar ciertos convenios para que los resultados extraídos sean precisos. Convencionalmente admitiremos que el sentido positivo de rotación de los fasores es el sentido antihorario. Por tanto, un fasor que esté girado con respecto a otro en sentido contrario al de las agujas del reloj está adelantado con respecto a él; un fasor que esté girado con respecto a otro en el sentido horario estará retrasado con relación a él.

Por ejemplo, en circuitos de corriente alterna, es frecuente tener que sumar magnitudes que varían sinusoidalmente con el tiempo, teniendo la misma frecuencia, pero amplitudes y fases distintas (por ejemplo, como resultado de aplicar alguna de las leyes de Kirchhoff). En tales casos, es útil ayudarse de un diagrama fasorial y resolver el problema utilizando relaciones trigonométricas elementales.

III) Representación compleja

Al igual que la representación fasorial, se emplea la representación compleja cuando se manejan magnitudes senoidales de igual frecuencia.

El paso de la representación fasorial a la compleja es evidente sin más que tener en cuenta lo siguiente: si sustituimos el plano cartesiano de la Figura anterior por un plano complejo y observamos que entre el conjunto de los vectores en el plano y el de complejos puede establecerse una aplicación biyectiva, la representación vectorial se convierte en la compleja que se indica a continuación:



Como ya se ha dicho, la representación compleja se emplea cuando las magnitudes involucradas en un problema tienen igual frecuencia. Por ello, el argumento de un complejo coincide con la fase inicial de la magnitud que representa, aunque no habrá ningún inconveniente en expresar, por ejemplo, una tensión sinusoidal $v(t) = V_o$ sen $(wt + \varphi)$ en forma compleja, como: $V = V_{o\ /wt+\varphi}$, de manera que la parte imaginaria de este complejo es el valor instantáneo de la tensión sinusoidal.

Para designar la unidad imaginaria, en Electrotecnia, se utiliza la letra “j”, ya que la “i” podría confundirse con una intensidad de corriente. El carácter complejo de una magnitud lo denotamos con un trazo horizontal sobre la misma.

2.- FORMAS DE EXPRESAR UN NÚMERO COMPLEJO

** Forma binómica $z = a + j\,b$

a = parte real de z

b = parte imaginaria del complejo z

** Forma polar $z = r_\theta$

r = módulo de z (siempre positivo)

θ = argumento de z /positivo cuando esté orientado como se

indica en la FIG.16.7

es decir, con

sentido antihorario.

** <u>Forma exponencial</u> $z = r\, e^{j\theta}$

e = base de los logaritmos neperianos

j = unidad imaginaria (raíz cuadrada de -1)

** <u>Forma trigonométrica</u> $z = r\,(\cos\theta - j\ \mathrm{sen}\ \theta)$

Para relacionar las diferentes formas de expresión indicadas, se tendrán en cuenta las relaciones siguientes:

$R = (a^2 + b^2)^{1/2}$

$\text{tg}\ \theta = b/a \quad \text{sen}\ \theta = b/(a^2+ b^2)^{1/2} \qquad \cos\theta = a/(a^2 + b^2)^{1/2}$

La unidad imaginaria, en forma polar, se expresa: $j = 1_{\underline{/90^\circ}}$

2.1.- Complejos iguales, conjugados y opuestos

** Igualdad de complejos en forma binómico: Los complejos $z_1 = a_1 + jb_1$ y $z_2 = a_2 + jb_2$ son iguales cuando $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

** Igualdad de complejos en forma polar: Dos complejos son iguales cuando tienen igual módulo y sus argumentos, bien son iguales, o bien difieren en 360º o en un múltiplo de 360º.

** Complejos conjugados en forma binómico: El conjugado de $z = a + jb$ es el $z = a - jb$. En el plano complejo dos complejos conjugados se representan como vectores simétricos respecto al eje real.

** Complejos conjugados en forma polar: Deben tener el mismo módulo y argumentos opuestos.

** Complejos opuestos en forma binómico: El opuesto de $z = a + jb$ es el $-z = -a - jb$.

** Complejos opuestos en forma polar: Deben tener igual módulo y argumentos que difieren en 180º.

2.2.- Operaciones con complejos

** Suma: Es conveniente que estén expresados en forma binómica. Si se tienen $z_1 = a_1 + jb_1$ y $z_2 = a_2 + jb_2$.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j\,(b_1 + b_2)$$

** Multiplicación: Deben estar expresados en forma polar. El producto es un complejo cuyo módulo es el producto de los módulos de los complejos que se multiplican y el argumento es la suma de los argumentos de los mismos.

** Cociente: Lo más rápido es que estén en forma polar. El cociente es un complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos de los complejos que se dividen y su argumento es la diferencia de los argumentos.

** También se pueden dividir dos complejos expresados en forma binómico; para ello, basta con multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador (el producto de un complejo por su conjugado es el módulo del complejo al cuadrado).

$$\frac{a + j b}{c + j d} \qquad \frac{(a + j b)(c - j d)}{c^2 + d^2} \qquad \frac{(a c + b d) + (b c - a d)}{c^2 + d^2}$$

Otras funciones aplicadas a números complejos, tales como radicalización, logaritmos, etc., no tienen interés excesivo para los fines que perseguimos, por lo que no las trataremos.

Terminamos con este repaso de complejos señalando una cuestión que en su aplicación física nos parece importante y que es la siguiente: la unidad imaginaria j, como es sabido es la raíz cuadrada de -1, o también, el complejo, en forma polar, $1/\underline{90}$º. En Física es útil considerar a la unidad imaginaria como un operador que afecta al complejo que le sigue transformándolo en otro de igual módulo pero girado 90º en sentido antihorario (sentido positivo de rotación). Naturalmente, multiplicar un complejo por –j equivale a girarlo 90º en sentido horario.