3. Obtener la distribución de la duración media de 2500 llamadas telefónicas recibidas en una centralita de las que se sabe que son independientes y con una duración exponencial de parámetro 3.

3

X_i : "duración llamada i" $X_i \in Exp(a=3)$

X : "duración total llamada" $X = \sum_{i=1}^{2500} X_i \underset{\substack{\text{por el} \\ \text{teorema central} \\ \text{del límite}}}{\simeq} X^* \in N(\mu = 2500 \cdot \mu_{ex} \; ; \; \sigma^2 = 2500 \cdot \sigma^2_{ex})$

$833{,}\hat{3}$; $277{,}\hat{7}$

$\in Exp(\mu = 1/a \; ; \; \sigma^2 = 1/a^2)$

$1/3$ $1/9$

Y : "duración media de las llamadas" $Y = \frac{1}{2500} \cdot \underbrace{\sum X_i}_{X} = \underbrace{\frac{1}{2500}}_{a} X$

PROPIEDADES

- $E[Y] = a\,E[X] + b$
- $V[Y] = a^2\,V[X]$

$Y \in N\left(\mu = \frac{1}{7500} \; ; \; \sigma^2 = \frac{1}{56250000}\right)$

8. Sean $X_1, X_2, \cdots, X_5$, vs.as. independientes, con distribución $N(\mu = 0, \sigma^2 = 4)$. Calcular la probabilidad de que la suma de sus cuadrados no exceda de 6,44 .

5 v.a. NORMALES $X_i \in N(\mu = 0, \sigma^2 = 1) \longrightarrow X^2 \in \chi^2_{(1)}$

$P(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 \leq 6'44)$ 1) Tipificar las variables

$\frac{X_i - 0}{2} = \frac{X_i}{2} \in N(0,1) \longrightarrow \left(\frac{X_i}{2}\right)^2 \in \chi^2_{(1)}$

Hacer operaciones para que $X^2 \in \chi^2_{(1)}$; es decir $\frac{1}{4} \cdot P$

$P\Big(\underbrace{\frac{X_1^2}{4} + \frac{X_2^2}{4} + \frac{X_3^2}{4} + \frac{X_4^2}{4} + \frac{X_5^2}{4}}_{\substack{n=1 \to n++ \\ \in \chi^2_{(5)}}} \leq 1{,}61\Big) = 1 - P(\chi^2_{(5)} \geq 1{,}61) = 1 - 0'9 = 0{,}1$

buscar en la tabla
donde coincida con 5 (grados libertad)

12. El tiempo que transcurre entre una llamada telefónica y la siguiente en una centralita se supone viene regulado por una ley exponencial de parámetro $1/\theta$. Se han observado los siguientes intervalos de tiempo entre cada dos llamadas:

$$3, 7, 5, 8, 4, 1, 5, 2, 9, 6 \rightarrow \text{muestra}$$

Obtener el valor estimado del parámetro θ.

X = "tiempo que transcurre entre llamadas" $\quad X \in Exp\left(a = 1/\theta\right)$

$$\downarrow$$

$$f(x) = a e^{-ax} = \frac{e^{-x/\theta}}{\theta}$$

$X_i \in Exp(a = 1/\theta)$

$i = n$

método de la máxima verosimilitud

1) Construir $f(x)$ verosimilitud

$$L(x_1 \dots x_i ; \theta) = f(x_1;\theta) \times \dots \times f(x_i;\theta) = \frac{e^{-x_1/\theta}}{\theta} \times \dots \times \frac{e^{-x_i/\theta}}{\theta}$$

OBJETIVO

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow \hat{\theta} \text{ estimador de máx verosimilitud} = \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$$

2) encontrar $\ln L$

* antes simplificar la expresión:

$$L(x_1 \dots x_i) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{(-x_1/\theta + \dots + -x_i/\theta)} = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{(-1/\theta \cdot (x_1 + \dots + x_i))}$$

$$\ln L(x_1 \dots x_i) = -n \ln(\theta) \underbrace{- \frac{1}{\theta}(x_1 + \dots + x_i)}_{-\sum x_i \theta^{-1}} \underbrace{\ln e}_{1}$$

$$(\ln L)' = -n \frac{1}{\theta} + \sum x_i \theta^{-2} = \frac{-n}{\theta} + \frac{\sum x_i}{\theta^2} = \frac{-n\theta + \sum x_i}{\theta^2} = 0$$

expresión

$$\hat{\theta} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{50}{10} = 5$$

valor para la muestra

> Comprobar Props. Insesgadez y Consistencia de un estimador

13. Sea X una v.a. cuya función de densidad es:

$$f(x)=\frac{x}{\lambda^2}e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad para \quad x>0,\ \lambda>0$$

para la cual $E[X^k]=(k+1)!\lambda^k$ *para* $k=1,2,\cdots$.
Obtener un estimador por máxima verosimilitud para el parámetro λ. ¿Es consistente?

1° Construir $L(x_1,\dots,x_n;\lambda)$

2° Calcular $\ln L$

3° $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}=0 \quad \hat{\lambda}$

1) $L(x_1\dots x_n)=f(x_1;\lambda)\times f(x_2;\lambda)\dots\times f(x_n;\lambda)$

$L=\frac{x_1}{\lambda^2}e^{-x_1/\lambda}\cdot\dots\cdot\frac{x_n}{\lambda^2}e^{-x_n/\lambda}$

$L=\left(\frac{\sum x_n}{\lambda^2}\right)^n e^{\left(-\frac{1}{\lambda}(\sum x_n)\right)}$

2) $\ln L=n\ln\left(\frac{\sum x_n}{\lambda^2}\right)+\ln\left(e^{(-1/\lambda(\sum x_n))}\right)$

$\ln L=n\ln(\sum x_n)-n\ln(\lambda^2)-\frac{\sum x_n}{\lambda}\underbrace{\ln e}_{1}$

$\downarrow$

$-\sum x_n\lambda^{-1}\Rightarrow \sum x_n\lambda^{-2}$

3) $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}=-\frac{2\lambda n}{\lambda^2}+\frac{\sum x_n}{\lambda^2}=0$

$-2\lambda n+\sum x_n=0$

$\bar{X}=E[X]$

$\lambda=\frac{\sum x_n}{2n}=\frac{\bar{X}}{2}$