Matemática Discreta - Grado en Ing. Informática
Relación de Ejercicios 2 (Combinatoria)

1. ¿Cuántas cadenas de diez bits contienen

   (a) exactamente cuatro unos?

   (b) como mucho cuatro unos?

   (c) al menos cuatro unos?

   (d) una cantidad igual de unos y ceros?

2. En un grupo hay n hombres y n mujeres. ¿De cuántas formas se pueden ordenar estas personas en una fila si los hombres y las mujeres se deben alternar?

3. Un grupo mediano en la asignatura de Matemática Discreta tiene 10 hombres y 15 mujeres. ¿De cuántas maneras se puede formar un equipo de seis estudiantes si debe haber igual número de hombres que de mujeres?

4. En la casilla inferior izquierda de un tablero de ajedrez situamos un rey con la intención de ir moviéndolo hasta que alcance la casilla superior derecha. Si los únicos movimientos permitidos son moverse una casilla hacia la derecha o una casilla hacia arriba, ¿cuántos son los caminos distintos que el rey puede hacer hasta llegar a la casilla superior derecha?

5. Un club está formado por 25 personas.

   (a) ¿De cuántas formas se pueden escoger cuatro personas para formar un comité ejecutivo?

   (b) ¿Cuántas formas hay para escoger presidente, vicepresidente, secretario y tesorero del club?

6. Con cuatro ceros y seis unos, ¿cuántos números de ocho cifras binarias se pueden formar?

7. Se rellena una quiniela de 14 partidos (en cada partido marcamos una, y sólo una, de las tres posibilidades: 1, X, 2). ¿Cuántas maneras hay de acertar el resultado de exactamente 9 de los 14 partidos?

8. Un sistema de señales permite emitir ceros, unos y espacios en blanco. Los ceros van de dos en dos y los unos también. Encontrar la recurrencia que calcula el número de señales que se pueden emitir de longitud n (no olvidar las condiciones iniciales).

9. Encuentre una relación de recurrencia para el número de permutaciones de un conjunto de n elementos, y obtenga una fórmula explícita.

10. Sea S_n el número de cadenas de n bits que no contienen el patrón 111. Encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales para la sucesión $\{S_n\}$, y obtenga una fórmula explícita.

11. Sea q_n el número de cadenas de n bits que no contienen dos ceros consecutivos. Encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales para la sucesión $\{q_n\}$, y obtenga una fórmula explícita.

1. ¿Cuántas cadenas de diez bits contienen

   (a) exactamente cuatro unos?

   (b) como mucho cuatro unos?

   (c) al menos cuatro unos?

   (d) una cantidad igual de unos y ceros?

a) 4-combinaciones de 1 en 10 bits ($n=10$, $r=4$)

$\binom{10}{4} = 210$ combinaciones

b) Combinaciones de hasta cuatro 1 en 10 bits ($n=10$, $r=0-4$)

$\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\binom{10}{2}+\binom{10}{3}+\binom{10}{4} = 1+10+45+120+210 = 386$ combinaciones

c) Combinaciones de al menos cuatro 1 en 10 bits ($n=10$, $r=4-10$)

$\binom{10}{4}+\binom{10}{5}+\binom{10}{6}+\binom{10}{7}+\binom{10}{8}+\binom{10}{9}+\binom{10}{10} = 210+252+210+120+45+10+1 = 848$ combinaciones

d) Combinación igual de 1 y 0 para ($n=10$ $r=5$)

$\binom{10}{5} = 252$ combinaciones

2. En un grupo hay n hombres y n mujeres. ¿De cuántas formas se pueden ordenar estas personas en una fila si los hombres y las mujeres se deben alternar?

n hombres y n mujeres

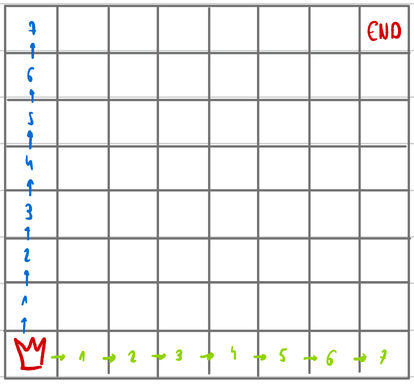
$2(n!\,n!)$ combinaciones

3. Un grupo mediano en la asignatura de Matemática Discreta tiene 10 hombres y 15 mujeres. ¿De cuántas maneras se puede formar un equipo de seis estudiantes si debe haber igual número de hombres que de mujeres?

10 hombres y 15 mujeres. Grupos de 6 con igual nº de hombres y mujeres (3 hombres y 3 mujeres)

$\binom{10}{3}\binom{15}{3} = 54600$ combinaciones

4. En la casilla inferior izquierda de un $\overbrace{\text{tablero de ajedrez}}^{8 \times 8}$ situamos un rey con la intención de ir moviéndolo hasta que alcance la casilla superior derecha. Si los únicos movimientos permitidos son moverse una casilla hacia la derecha o una casilla hacia arriba, ¿cuántos son los caminos distintos que el rey puede hacer hasta llegar a la casilla superior derecha?



$\binom{14}{7} = 3432$ combinaciones

5. Un club está formado por 25 personas.

(a) ¿De cuántas formas se pueden escoger cuatro personas para formar un comité ejecutivo?

(b) ¿Cuántas formas hay para escoger presidente, vicepresidente, secretario y tesorero del club?

a) $\binom{25}{4} = 12650$ combinaciones

b) $V(25,4) = \frac{25!}{21!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$ combinaciones

6. Con cuatro ceros y seis unos, ¿cuántos números de ocho cifras binarias se pueden formar?

$$\left.\begin{array}{ccccc}\binom{8}{4} & + & \binom{8}{5} & + & \binom{8}{6}\\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ \binom{8}{4} & + & \binom{8}{3} & + & \binom{8}{2}\end{array}\right\} 154 \text{ combinaciones}$$

7. Se rellena una quiniela de 14 partidos (en cada partido marcamos una, y sólo una, de las tres posibilidades: 1, X, 2). ¿Cuántas maneras hay de acertar el resultado de exactamente 9 de los 14 partidos?

$\binom{14}{5} \cdot 2^5 = \binom{14}{9} 2^5 = 64064$ combinaciones

No es 3 porque tienes 3 opciones y 1 es correcta $(3-1)$

8. Un sistema de señales permite emitir ceros, unos y espacios en blanco. Los ceros van de dos en dos y los unos también. Encontrar la recurrencia que calcula el número de señales que se pueden emitir de longitud n (no olvidar las condiciones iniciales).

S_n = numero de señales que se pueden emitir de tamaño n

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = 1 \\ A_2 = 3 \\ A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} t^2 - t - 2 = 0 \\ (t-2)(t+1) \\ A_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n \end{array}$$

9. Encuentre una relación de recurrencia para el número de permutaciones de un conjunto de n elementos, y obtenga una fórmula explícita.

$A_1 = 1 = 1!$

$A_2 = 2 = 2!$

$A_n = n! = n(n-1)! = n\, A_{n-1}$

10. Sea S_n el número de cadenas de n bits que no contienen el patrón 111. Encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales para la sucesión $\{S_n\}$, y obtenga una fórmula explícita.

$S_1 = 2$

$S_2 = 4$

$S_3 = 8 - \underset{111}{1} = 7$

$0 \rightarrow S_{n-1}$

$1 \mid 0 \rightarrow S_{n-2}$

$1 \quad 1 \mid 0 \rightarrow S_{n-3}$

$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$

11. Sea q_n el número de cadenas de n bits que no contienen dos ceros consecutivos. Encuentre una relación de recurrencia y condiciones iniciales para la sucesión $\{q_n\}$, y obtenga una fórmula explícita.

$q_1 = 2 = \alpha ($

$q_2 = 4 - \underset{\substack{\downarrow \\ 00}}{1} = 3$

$\underline{1} \rightarrow q_{n-1}$

$0 | \underline{1} \rightarrow q_{n-2}$

$q_n = q_{n-1} + q_{n-2}$

$q_n = a\, q_{n-1} + b\, q_{n-2} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

$t^2 - t - 1 = 0 \quad \begin{cases} t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$q_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$