MATEMÁTICA DISCRETA

Conceptos Básicos de la Teoría de Conjuntos (Parte III)

Conceptos Básicos de la Teoría de Conjuntos (P-III)

- Ejercicios resueltos.
- Cardinal de un conjunto. Principio de Inclusión-Exclusión.

Ejercicio 1: Sea $A = \{2, \{4,5\}, 4\}$, ¿Cuáles de las siguientes declaraciones son incorrectas? Justifica la respuesta.

(i) $5 \in A$ (ii) $\{5\} \in A$ (iii) $\{5\} \subseteq A$.

Solución(Ejercicio 1): Las tres declaraciones son incorrectas.

Ejercicio 2: Calcula el conjunto potencia $\mathcal{P}(S)$ correspondiente al conjunto $S = \{3, \{1,4\}\}$.

Solución(Ejercicio 2): $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{1,4\}\}, S\}$.

Ejercicio 3: Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que:

$$A^c \setminus B^c = B \setminus A.$$

Solución(Ejercicio 3): Observa que:

$$\begin{aligned} A^c \setminus B^c &= \{x : x \in A^c \ \wedge \ x \notin B^c\} \\ &= \{x : x \in B \ \wedge \ x \notin A\} \\ &= B \setminus A. \end{aligned}$$

Ejercicio 4: Sean A y B dos conjuntos. Demuestra que si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A \subseteq B^c$.

Solución(Ejercicio 4): Sea $x \in A$. Como $A \cap B = \emptyset$, se sigue que $x \notin B$, lo cual implica que $x \in B^c$. Por tanto, $A \subseteq B^c$.

Cardinal de un conjunto

- Si X es un conjunto finito, entonces al número de elementos diferentes de X se le llama *cardinal del conjunto X* y se denota por $\mathrm{Card}(X)$ o $|X|$.

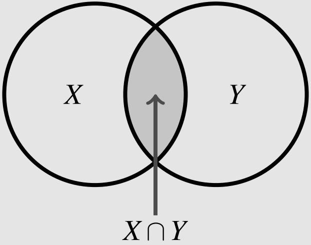
Principio de Inclusión-Exclusión

- Permite obtener relaciones entre los cardinales de varios conjuntos y los de los conjuntos resultantes de operarlos entre sí.
- Considera los casos en que los elementos de un conjunto se pueden repartir en varios subconjuntos de modo que dichos subconjuntos puedan tener elementos en común.

Principio de Inclusión-Exclusión

Si X e Y son conjuntos finitos, entonces

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$



Teorema

Si X e Y son conjuntos finitos, entonces

$$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|.$$

Proof. Sean X e Y dos conjuntos finitos arbitrarios. Observa que:

- $|X| = |X \setminus Y| + |X \cap Y|$ $\quad (X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$ y $(X \setminus Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset)$
- $|Y| = |Y \setminus X| + |X \cap Y|$ $\quad (Y = (Y \setminus X) \cup (X \cap Y)$ y $(Y \setminus X) \cap (X \cap Y) = \emptyset)$
- $|X \cup Y| = |X \setminus Y| + |X \cap Y| + |Y \setminus X|$ $\quad$ How is it obtained?

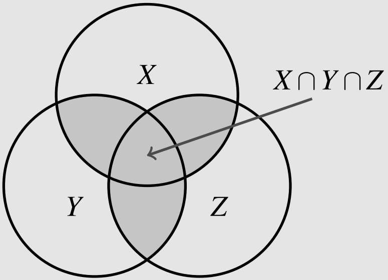
Como consecuencia de las tres igualdades anteriores se deduce que:

$$\begin{aligned} |X \cup Y| &= |X \setminus Y| + |X \cap Y| + |Y \setminus X| \\ &= (|X| - |X \cap Y|) + |X \cap Y| + (|Y| - |X \cap Y|) \\ &= |X| + |Y| - |X \cap Y|. \end{aligned}$$

Principio de Inclusión-Exclusión

Si X, Y y Z son conjuntos finitos, entonces

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$$



Principio de Inclusión-Exclusión

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son conjuntos finitos, entonces

$$|X_1 \cup \cdots \cup X_n| = \sum_{1 \leq i \leq n} |X_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |X_i \cap X_j| +$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |X_i \cap X_j \cap X_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |X_1 \cap \cdots \cap X_n|$$

Ejercicio 5

En un grupo de 100 personas, un total de 43 hablan inglés, 27 hablan francés y 50 hablan español. Sabemos también que 16 personas hablan inglés y francés, 20 hablan inglés y español y 18 hablan francés y español. Finalmente, 10 personas hablan los tres idiomas. ¿Cuántas personas no hablan ninguno de los tres idiomas?

Solución(Ejercicio 5): I conjunto de personas que hablan inglés,
F conjunto de personas que hablan francés,
E conjunto de personas que hablan español.

Se conoce que $|I| = 43$, $|F| = 27$, $|E| = 50$, $|I \cap F| = 16$, $|I \cap E| = 20$, $|F \cap E| = 18$, $|I \cap F \cap E| = 10$.

¿Qué estrategia seguir?

$$\begin{aligned} |I \cup F \cup E| &= |I| + |F| + |E| - |I \cap F| - |I \cap E| - |F \cap E| + |I \cap F \cap E| \\ &= 43 + 27 + 50 - 16 - 20 - 18 + 10 = 76. \end{aligned}$$

Hay 76 personas que hablan por lo menos uno de los idiomas. Por lo tanto, hay $100 - 76 = 24$ personas que no hablan ninguno de estos idiomas.

Ejercicio 6

Una academia tiene 99 estudiantes. Los estudiantes pueden cursar tres asignaturas: A_1, A_2 y A_3. Hay 7 que cursan las tres, 60 que cursan A_1, 49 que cursan A_2 y 43 que cursan A_3. En el caso de A_2 y A_3, la cursan el triple de los que hacen A_1 y A_2, mientras que A_1 y A_3, la hacen el doble de los que hacen A_1 y A_2. ¿Cuántos estudiantes cursan las asignaturas A_1 y A_2?

Solución(Ejercicio 6):

- Sea E_i el conjunto formado por los estudiantes que cursan la asignatura A_i y sea $x = |E_1 \cap E_2|$.

- $|E_2 \cap E_3| = 3|E_1 \cap E_2| = 3x$ y $|E_1 \cap E_3| = 2|E_1 \cap E_2| = 2x$.

- $|E_1| = 60$, $|E_2| = 49$, $|E_3| = 43$ y $|E_1 \cap E_2 \cap E_3| = 7$.

- Principio de Inclusión-Exclusión $\rightarrow$ 99 = 60+49+43-x-2x-3x+7.

- Resolviendo la ecuación se obtiene que $x = 10$.

Ejercicio 7

Se organizan 100 fotos en tres carpetas diferentes del ordenador. En las fotos de la primera carpeta aparecen animales, en las de la segunda carpeta hay paisajes y en las fotos de la tercera hay monumentos. En la carpeta de animales hay 45 fotos, en la de paisajes hay 65 y en la de monumentos hay 47. En 28 de las fotos de paisajes también sale algún animal y en 24 hay algún monumento. Además, en 12 de las fotos hay animales y monumentos a la vez. ¿Cuántas fotos están a la vez en las tres carpetas?

Solución(Ejercicio 7): A conjunto de fotos de animales,
P conjunto de fotos de paisajes,
M conjunto de fotos de monumentos.

$$\begin{aligned} |A\cap P\cap M| &= |A\cup P\cup M| - |A| - |P| - |M| + |A\cap P| + |A\cap M| + |P\cap M| \\ &= 100 - 45 - 65 - 47 + 28 + 12 + 24 = 7. \end{aligned}$$