Matemática Discreta - Grado en Ing. Informática
Relación de Ejercicios 1 (Teoría de Números)

1. Obtén una fórmula para la suma de los n primeros enteros positivos pares.

2. Demuestra que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Demuestra, usando el Principio de Inducción, que $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Demuestra que $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. Demuestra que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. Demuestra, usando el Principio de Inducción, que $n^2 - 7n + 12$ es no negativo si n es un entero mayor que 3.

7. Demuestra, usando el Principio de Inducción, que para todo número $n \in \mathbb{N}$, se deduce que $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ es un número divisible por 133.

8. En una clase de 30 estudiantes el profesor escribe en la pizarra un número natural. Un estudiante dice que es divisible por 2, otro que es divisible por 3, y otro por 4, y así sucesivamente hasta que el estudiante número 30, que dice que es divisible por 31. El profesor dice entonces que todas las afirmaciones que se han hecho son verdaderas, salvo dos de ellas, que además se han hecho seguidas. ¿cuáles son las dos afirmaciones falsas?

1. Obtén una fórmula para la suma de los n primeros enteros positivos pares.

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \\ a_3 = 6 \\ a_4 = 8 \end{array}\right\} a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1)2 = 2 + 2n - 2 = 2n$$

$$\left.\begin{array}{l} S_0 = 0 \\ S_1 = 2 \\ S_2 = 2+4 = 6 \\ S_3 = 6+6 = 12 \\ S_4 = 12+8 = 20 \end{array}\right\} S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2 + 2n) = n(1+n) = n + n^2$$

2. Demuestra que $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$S_1 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1$. La formula se cumple para $n=1$

Suponemos que es verdadera para $n=k$

$$S_k = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Comprobamos que se cumple para $n=k+1$

$$S_{k+1} = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(2k^2+3k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{2k^3+3k^2+k}{6} + (k+1)(k+1) = \frac{2k^3+3k^2+k}{6} + k^2 + 2k + 1 = \frac{2k^3+3k^2+k+6(k^2+2k+1)}{6}$$

$$= \frac{2k^3+3k^2+k+6k^2+12k+6}{6} = \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$\begin{array}{r|rrr|r}
 & 2 & 9 & 13 & 6 \\
-1 & & -2 & -7 & -6 \\
\hline
 & 2 & 7 & 6 & 0 \\
-2 & & -4 & -6 & \\
\hline
 & 2 & 3 & 0 &
\end{array}$$

Donde si sustituimos por n llegamos a la ecuación inicial

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. Demuestra, usando el Principio de Inducción, que $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$S_1 = 1 = 1^2$

Suponemos que es cierto para $n = k$

$S_k = 1 + 3 + \ldots + (2k-1) = k^2$

Comprobamos que se cumple para $n = k+1$

$S_{k+1} = k^2 + (2(k+1) - 1) = k^2 + 2k + 1 =$ $\begin{array}{r|rr|r} & 1 & 2 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}$ $= (k+1)^2$

Cumpliendose el principio

4. Demuestra que $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = (n+1)(2n+1)(2n+3)/3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$S_1 = 1^2 \neq \frac{(1+1)(2+1)(2+3)}{3}$$

$$1 \neq 10$$

Para $n = k$ suponemos que es cierto

$$S_k = 1^2 + 3^2 + \ldots + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

Comprobamos que se cumple en $n = k+1$

$$S_{k+1} = 1^2 + 3^2 + \ldots + (2k+1)^2 + (2(k+1)+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3} + (2k+3)^2$$

$$= \frac{(2k^2+3k+1)(2k+3)}{3} + (2k+3)^2 = \frac{(4k^3+6k^2+2k+6k^2+9k+3)+3(2k+3)^2}{3}$$

$$= \frac{4k^3+12k^2+11k+3+3(4k^2+12k+9)}{3} = \frac{4k^3+12k^2+11k+3+12k^2+36k+27}{3}$$

$$= \frac{4k^3+24k^2+47k+30}{3} = \begin{array}{r|rrr|r} & 4 & 24 & 47 & 30 \\ -2 & & -8 & -32 & -30 \\ \hline & 4 & 16 & 15 & 0 \\ -3/2 & & -6 & -15 & \\ \hline & 4 & 10 & 0 & \end{array} = \frac{(k+2)(k+\frac{3}{2})(4k+10)}{3}$$

Sustituyendo con $k+1$

$$= \frac{((k+1)+1((k+1)+\frac{1}{2})(4(k+1)+6)}{3} = \frac{((k+1)+1)(2(k+1)+1)(2(k+1)+3)}{3}$$

Pero a que para $k+1$ se cumple el caso base no lo hace

5. Demuestra que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = n(n+1)(n+2)/3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$S_1 = 1(1+1) = \frac{1(1+1)(1+2)}{3}$$
$$= 2 = 6/3 = 2$$

Suponemos que se cumple para $n=k$

$$S_n = 1\cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Demostramos que se cumple para $n = k+1$

$$S_{k+1} = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + k(k+1) + (k+1)((k+1)+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{k(k^2+3k+2)}{3} + (k^2+3k+2) = \frac{k^3+3k^2+2k+3k^2+9k+6}{3} = \frac{k^3+6k^2+11+6}{3}$$
$$= \begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 6 & 11 & 6 \\ -3 & & -3 & -9 & -6 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} = \frac{(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)}{3}$$

Cumpliendo la demostración

6. Demuestra, usando el Principio de Inducción, que $n^2 - 7n + 12$ es no negativo si n es un entero mayor que 3.

$S_4 = 4^2 - 7 \cdot 4 + 12 = 16 + 12 - 48 = 0$

No es negativo, por lo que es verdadero

Suponemos que es verdadero para $n = k$

$S_k = k^2 - 7k + 12 \geq 0$

Demostramos que se cumple para $n = k+1$

$S_{k+1} = (k+1)^2 - 7(k+1) + 12 = k^2 + 2k + 1 - 7k - 7 + 12$

$= k^2 - 5k + 6 =$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$= (k-2)(k-3)$

Que si sustituimos $k = 4$ que es el caso base

$(4-2)(4-3) = 2 \cdot 1 = 2$

Demostrando la afirmación

7. Demuestra, usando el Principio de Inducción, que para todo número $n \in \mathbb{N}$, se deduce que $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ es un número divisible por 133.

$S_1 = 11^2 + 12^1 = 133$

Suponemos que se cumple para $n = k$

$S_k = 11^{k+1} + 12^{2k-1}$

Demostramos que se cumple para $n = k+1$

$S_{k+1} = 11^{k+2} + 12^{2k+1} = 11^k \cdot 11^2 + 12^{2k} \cdot 12 = 11^k \cdot 121 + 144^k \cdot 12$

donde para $k \in \mathbb{N}$ $11^k \cdot 121 + 144^k \cdot 12$ es un número divisible entre 133 cumpliendose la demostración

8. En una clase de 30 estudiantes el profesor escribe en la pizarra un número natural. Un estudiante dice que es divisible por 2, otro que es divisible por 3, y otro por 4, y así sucesivamente hasta que el estudiante número 30, que dice que es divisible por 31. El profesor dice entonces que todas las afirmaciones que se han hecho son verdaderas, salvo dos de ellas, que además se han hecho seguidas. ¿cuáles son las dos afirmaciones falsas?

Se ha dicho que es divisible del 2 al 31, para que solo dos números de su interior no sean divisibles deben de ser primos, ya que los números compuestos se forman de los números primos. Los números primos mencionados son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 y 31 de los que solo son seguidos 2 y 3, los cuales no pueden ser ya que con ellos se forman otros tantos, falso

~~2~~	~~3~~	~~4~~ 2	~~5~~	~~6~~ 3 2	~~7~~	~~8~~ 4 2	~~9~~ 3	~~10~~ 5 2	~~11~~
~~12~~ 6 3 2	~~13~~	~~14~~ 7 2	~~15~~ 5 3	~~16~~ 8 4 2	17	~~18~~ 9 3 2	19	~~20~~ 2 5 10	~~21~~ 7 3
~~22~~ 2 11	23	~~24~~ 12 6 3 2	~~25~~ 5	~~26~~ 13 2	~~27~~ 9 3	~~28~~ 14 7 2	29	~~30~~ 15 10 5 3	31

Las dos afirmaciones falsas son que es divisible entre 17/19/23/29 y que hay dos afirmaciones falsas seguidas