

MODELOS DE TOMA DE DECISIONES

La teoría de decisiones proporciona una manera útil de clasificar modelos para la toma de decisiones. Se supondrá que se ha definido el problema, que se tienen todos los datos y que se han identificado los cursos de acción alternativos. La tarea es entonces seleccionar la mejor alternativa. la teoría de decisiones dice que esta tarea de hacer una selección caerá en una de las cuatro categorías generales dependiendo de la habilidad personal para predecir las consecuencias de cada alternativa.


Categorías	Consecuencias
Certidumbre	Deterministas
Riesgo	Probabilísticas
Incertidumbre	Desconocidas
Conflicto	Influidas por un oponente

TOMA DE DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE


En los procesos de decisión bajo *incertidumbre*, el decisor conoce cuáles son los posibles estados de la naturaleza, aunque no dispone de información alguna sobre cuál de ellos ocurrirá. No sólo es incapaz de predecir el estado real que se presentará, sino que además no puede cuantificar de ninguna forma esta incertidumbre. En particular, esto excluye el conocimiento de información de tipo probabilístico sobre las posibilidades de ocurrencia de cada estado.


REGLAS DE DECISIÓN


A continuación se describen las diferentes **reglas de decisión** en ambiente de incertidumbre, y que serán sucesivamente aplicadas al ejemplo de construcción del hotel.

 Criterio de Wald

 Criterio Maximax

 Criterio de Hurwicz

 Criterio de Savage

 Criterio de Laplace

Para trabajar con los criterios utilizaremos la siguiente matriz:

	Estados de la Naturaleza				
		e₁	e₂	...	e_n
Alternativas	a₁	X ₁₁	X ₁₂	...	X _{1n}
	a₂	X ₂₁	X ₂₂	...	X _{2n}

	a_m	X _{m1}	X _{m2}	...	X _{mn}
Forma general de una tabla de decisión					

CRITERIO DE LAPLACE

Este criterio, propuesto por Laplace en 1825, está basado en el **principio de razón insuficiente**: como a priori no existe ninguna razón para suponer que un estado se puede presentar antes que los demás, podemos considerar que **todos los estados tienen la misma probabilidad de ocurrencia**, es decir, la ausencia de conocimiento sobre el estado de la naturaleza equivale a afirmar que todos los estados son equiprobables. Así, para un problema de decisión con **n** posibles estados de la naturaleza, asignaríamos **probabilidad 1/n** a cada uno de ellos.

La regla de Laplace selecciona como alternativa óptima aquella que proporciona un mayor resultado esperado:

$$\max_{a_i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x(a_i, e_j) \right\}$$

EJEMPLO

Partiendo del ejemplo de construcción del hotel, la siguiente tabla muestra los resultados esperados para cada una de las alternativas.

Alternativas	Estados de la Naturaleza		
	Aeropuerto en A	Aeropuerto en B	
Terreno comprado			Resultado esperado
A	13	-12	0.5
B	-8	11	1.5
A y B	5	-1	2
Ninguno	0	0	0

En este caso, cada estado de la naturaleza tendría probabilidad ocurrencia $1/2$. El resultado esperado máximo se obtiene para la tercera alternativa, por lo que la decisión óptima según el criterio de Laplace sería comprar ambas parcelas.

CRÍTICA

La **objeción** que se suele hacer al criterio de Laplace es la siguiente: **ante una misma realidad, pueden tenerse distintas probabilidades, según los casos que se consideren**. Por ejemplo, una partícula puede moverse o no moverse, por lo que la probabilidad de no moverse es $1/2$. En cambio, también puede considerarse de la siguiente forma: una partícula puede moverse a la derecha, moverse a la izquierda o no moverse, por lo que la probabilidad de no moverse es $1/3$.

Desde un punto de vista práctico, la dificultad de aplicación de este criterio reside en la necesidad de elaboración de una **lista exhaustiva y mutuamente excluyente de todos los posibles estados de la naturaleza**.

Por otra parte, al ser un criterio basado en el **concepto de valor esperado**, su funcionamiento debe ser correcto tras sucesivas repeticiones del proceso de toma de decisiones. Sin embargo, en aquellos casos en que la elección sólo va a realizarse una vez, puede conducir a decisiones poco acertadas si la distribución de resultados presenta una gran dispersión, como se muestra en la siguiente tabla:

	Estados de la Naturaleza		
Alternativas	e ₁	e ₂	Resultado esperado
a ₁	15000	-5000	5000
a ₂	5000	4000	4500

Este criterio seleccionaría la alternativa a₁, que puede ser poco conveniente si la toma de decisiones se realiza una única vez, ya que podría conducirnos a una pérdida elevada

CRITERIO DE WALD

Este es el criterio más conservador ya que está basado en lograr lo mejor de las peores condiciones posibles. esto es, si el resultado $x(a_i, e_j)$ representa pérdida para el decisor, entonces, para a_i la peor pérdida independientemente de lo que e_j pueda ser, es $\max_{e_j} \{x(a_i, e_j)\}$. El criterio minimax elige entonces la acción a_i asociada a :

$$Elegir_a_i = \min_{a_i} \max_{e_j} \{x(a_i, e_j)\}$$

En una forma similar, si $x(a_i, e_j)$ representa la ganancia, el criterio elige la acción a_i asociada a :

$$Elegir_a_i = \max_{a_i} \min_{e_j} \{x(a_i, e_j)\}$$

Este criterio recibe el nombre de **criterio maximin**, y corresponde a un **pensamiento pesimista**, pues razona sobre lo peor que le puede ocurrir al decisor cuando elige una alternativa.

EJEMPLO

Partiendo del ejemplo de construcción del hotel, la siguiente tabla muestra las recompensas obtenidas junto con los niveles de seguridad de las diferentes alternativas:

Alternativas	Estados de la Naturaleza		
	Aeropuerto en A	Aeropuerto en B	Si
A	13	- 12	-12
B	- 8	11	-8
A y B	5	- 1	-1
Ninguno	0	0	0

La alternativa óptima según el criterio de Wald sería no comprar ninguno de los terrenos, pues proporciona el mayor de los niveles de seguridad.

CRÍTICA

En ocasiones, el criterio de Wald puede conducir a decisiones poco adecuadas. Por ejemplo, consideremos la siguiente tabla de decisión, en la que se muestran los niveles de seguridad de las diferentes alternativas.

	Estados de la Naturaleza		
Alternativas	e ₁	e ₂	Si
a ₁	1000	99	99
a ₂	100	100	100

El criterio de Wald seleccionaría la alternativa a_2 , aunque lo más razonable parece ser elegir la alternativa a_1 , ya que en el caso más favorable proporciona una recompensa mucho mayor, mientras que en el caso más desfavorable la recompensa es similar.

CRITERIO DE HURWICZ

Este criterio representa un intervalo de actitudes desde la más optimista hasta la más pesimista. En las condiciones más optimistas se elegiría la acción que proporcione el $\max_{a_i} \max_{e_j} \{x(a_i, e_j)\}$. Se supone que $x(a_i, e_j)$, representa la ganancia o beneficio. De igual manera, en las condiciones más pesimistas, la acción elegida corresponde a $\max_{a_i} \min_{e_j} \{x(a_i, e_j)\}$. El criterio de Hurwicz da un balance entre el optimismo extremo y el pesimismo extremo ponderando las dos condiciones anteriores por los pesos respectivos α y $(1 - \alpha)$, donde $0 \leq \alpha \leq 1$. Esto es, si $x(a_i, e_j)$ representa beneficio, seleccione la acción que proporcione:

$$\max_{a_i} \left\{ \alpha \max_{e_j} x(a_i, e_j) + (1 - \alpha) \min_{e_j} x(a_i, e_j) \right\}$$

Para el caso donde $x(a_i, e_j)$ representa un costo, el criterio selecciona la acción que proporciona:

$$\min_{a_i} \left\{ \alpha \min_{e_j} x(a_i, e_j) + (1 - \alpha) \max_{e_j} x(a_i, e_j) \right\}$$

El parámetro α se conoce como **índice de optimismo**: cuando $\alpha = 1$, el criterio es demasiado optimista; cuando $\alpha = 0$, es demasiado pesimista. Un valor de α entre cero y uno puede ser seleccionado dependiendo de si el decisor tiende hacia el pesimismo o al optimismo. En ausencia de una sensación fuerte de una circunstancia u otra, un valor de $\alpha = 1/2$ parece ser una selección razonable.

EJEMPLO

Partiendo del ejemplo de construcción del hotel, la siguiente tabla muestra las recompensas obtenidas junto con la media ponderada de los niveles de optimismo y pesimismo de las diferentes alternativas para un valor $\alpha = 0.4$:

Alternativas Terreno comprado	Estados de la Naturaleza				
	Aeropuerto en A	Aeropuerto en B	míne_i	máxe_i	S(a_i)
A	13	-12	-12	13	-2
B	-8	11	-8	11	-0.4
A y B	5	-1	-1	5	1.4
Ninguno	0	0	0	0	0

La alternativa óptima según el criterio de Hurwicz sería comprar las parcelas A y B, pues proporciona la mayor de las medias ponderadas para el valor de α seleccionado.

CRITERIO DE SAVAGE

En 1951 **Savage** argumenta que al utilizar los valores x_{ij} para realizar la elección, el decisor compara el resultado de una alternativa bajo un estado de la naturaleza con todos los demás resultados, independientemente del estado de la naturaleza bajo el que ocurran. Sin embargo, el estado de la naturaleza no es controlable por el decisor, por lo que **el resultado de una alternativa sólo debería ser comparado con los resultados de las demás alternativas bajo el mismo estado de la naturaleza.**

Con este propósito Savage define el concepto de **pérdida relativa** o **pérdida de oportunidad** r_{ij} asociada a un resultado x_{ij} como la diferencia entre el resultado de la mejor alternativa dado que e_j es el verdadero estado de la naturaleza y el resultado de la alternativa a_i bajo el estado e_j :

$$r_{ij} = \max_{1 \leq k \leq m} \{x_{kj}\} - x_{ij}$$

Así, si el verdadero estado en que se presenta la naturaleza es e_j y el decisor elige la alternativa a_i que proporciona el máximo resultado x_{ij} , entonces no ha dejado de ganar nada, pero si elige otra alternativa cualquiera a_r , entonces obtendría como ganancia x_{rj} y dejaría de ganar $x_{ij} - x_{rj}$.

Savage propone seleccionar la alternativa que proporcione la menor de las mayores pérdidas relativas, es decir, si se define ρ_i como la mayor pérdida que puede obtenerse al seleccionar la alternativa a_i ,

$$\rho_i = \max_{1 \leq j \leq n} \{r_{ij}\}$$

el criterio de Savage resulta ser el siguiente:

$$r(a_i, e_j) = \begin{cases} \max_{a_k} \{x(a_k, e_j) - x(a_i, e_j)\} & \text{beneficio} \\ x(a_i, e_j) - \min_{a_k} \{x(a_k, e_j)\} & \text{pérdida} \end{cases}$$

Conviene destacar que, como paso previo a la aplicación de este criterio, se debe calcular la matriz de pérdidas relativas, formada por los elementos r_{ij} . Cada columna de esta matriz se obtiene calculando la diferencia entre el valor máximo de esa columna y cada uno de los valores que aparecen en ella.

Observe que si $x(a_i, e_j)$ es una función de beneficio o de pérdida, la matriz de pérdidas relativas, formada por los elementos r_{ij} representa en ambos casos pérdidas. **Por consiguiente, únicamente el criterio minimax (y no el maximin) puede ser aplicado a la matriz de deploración r .**

EJEMPLO

Partiendo del ejemplo de construcción del hotel, la siguiente tabla muestra la matriz de pérdidas relativas y el mínimo de éstas para cada una de las alternativas.

Alternativas Terreno comprado	Estados de la Naturaleza		r_i
	Aeropuerto en A	Aeropuerto en B	
A	0	23	23
B	21	0	21
A y B	8	12	12
Ninguno	13	11	13

El mayor resultado situado en la columna 1 de la tabla de decisión original es 13; al restar a esta cantidad cada uno de los valores de esa columna se obtienen las pérdidas relativas bajo el estado de la naturaleza *Aeropuerto en A*. De la misma forma, el máximo de la columna 2 en la tabla original es 11; restando a esta cantidad cada uno de los valores de esa columna se obtienen los elementos r_{ij} correspondientes al estado de la naturaleza *Aeropuerto en B*. Como puede observarse, el valor r_i menor se obtiene para la tercera alternativa, por lo que la decisión óptima según el criterio de Savage sería comprar ambas parcelas.

CRÍTICA

El criterio de Savage puede dar lugar en ocasiones a decisiones poco razonables. Para comprobarlo, consideremos la siguiente tabla de resultados:

	Estados de la Naturaleza	
Alternativas	e ₁	e ₂
a ₁	9	2
a ₂	4	6

La **tabla de pérdidas relativas** correspondiente a esta tabla de resultados es la siguiente:

	Estados de la Naturaleza		
Alternativas	e ₁	e ₂	r _i
a ₁	0	4	4
a ₂	5	0	5

La alternativa óptima es a₁. Supongamos ahora que se añade una alternativa, dando lugar a la siguiente tabla de resultados:

	Estados de la Naturaleza	
Alternativas	e ₁	e ₂
a ₁	9	2
a ₂	4	6
a ₃	3	9

La nueva tabla de pérdidas relativas sería:

	Estados de la Naturaleza		
Alternativas	e_1	e_2	r_i
a_1	0	7	7
a_2	5	3	5
a_3	6	0	6

El criterio de Savage selecciona ahora como alternativa óptima a_2 , cuando antes seleccionó a_1 . Este cambio de alternativa resulta un poco paradójico: supongamos que a una persona se le da a elegir entre **peras** y **manzanas**, y prefiere **peras**. Si posteriormente se la da a elegir entre **peras**, **manzanas** y **naranjas**, ¿esto equivaldría a decir que ahora prefiere **manzanas**.

EJERCICIOS**CRITERIOS DE DECISION EN INCERTIDUMBRE**

1. Una instalación recreativa debe decidir acerca del nivel de abastecimiento que debe almacenar para satisfacer las necesidades de sus clientes durante uno de los días de fiesta. El número exacto de clientes no se conoce, pero se espera que esté en una de cuatro categorías: 200, 250, 300 o 350 clientes. Se sugieren, por consiguiente, cuatro niveles de abastecimiento, siendo el nivel i el ideal (desde el punto de vista de costos) si el número de clientes cae en la categoría i . La desviación respecto de niveles ideales resulta en costos adicionales, ya sea porque se tenga un abastecimiento extra sin necesidad o porque la demanda no puede satisfacerse. La tabla que sigue proporciona estos costos en miles de unidades monetarias.

Nivel de abastecimiento		e1(200)	e2(250)	e3(300)	e4(350)
	a1(200)	5	10	18	25
	a2(250)	8	7	8	23
	a3(300)	21	18	12	21
	a4(350)	30	22	19	15

Determine cual es el nivel de aprovisionamiento óptimo, utilizando los criterios explicados.

RESULTADOS**A) LAPLACE:**

El principio de Laplace establece que e_1, e_2, e_3, e_4 tienen la misma probabilidad de suceder. Por consiguiente las probabilidades asociadas son $P(x)=1/4$ y los costos esperados para las acciones son:

$$E(a_1) = (1/4)(5+10+18+25) = 14.5$$

$$E(a_2) = (1/4)(8+7+8+23) = 11.5$$

$$E(a_3) = (1/4)(21+18+12+21) = 18.0$$

$$E(a_4) = (1/4)(30+22+19+15) = 21.5$$

Por lo tanto, el mejor nivel de inventario de acuerdo con el criterio de Laplace está especificado por a2.

B) WALD

Ya que $x(a_i, e_j)$ representa costo, el criterio minimax es aplicable. Los cálculos se resumen en la matriz que sigue. La estrategia minimax es a3:

Nivel de abastecimiento		e1(200)	e2(250)	e3(300)	e4(350)	$\max_j \{x(a_i, e_j)\}$
	a1(200)	5	10	18	25	25
	a2(250)	8	7	8	23	23
	a3(300)	21	18	12	21	21 (valor minimax)
	a4(350)	30	22	19	15	30

C) HURWICZ

Supongamos $\alpha = 1/2$. Los cálculos necesarios se muestran enseguida. La solución óptima está dada por a1 ó a2.

	$\min_j \{x(a_i, e_j)\}$	$\max_j \{x(a_i, e_j)\}$	$\alpha \min_j \{x(a_i, e_j)\} + (1-\alpha) \max_j \{x(a_i, e_j)\}$
a1	5	25	15 (mín)
a2	7	23	15 (mín)
a3	12	21	16.5
a4	15	30	22.5

D) SAVAGE

Se obtiene primero la matriz r_{ij} restando 5, 7, 8 y 15 de las columnas 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

Nivel de abastecimiento		e1(200)	e2(250)	e3(300)	e4(350)	$\max_j \{r_{ij}\}$
	a1(200)	5	10	18	25	10
	a2(250)	8	7	8	23	8 (valor minimax)
	a3(300)	21	18	12	21	16
	a4(350)	30	22	19	15	25

2. Considere la siguiente matriz de pagos (beneficios):

	e1	e2	e3	e4	e5
a1	15	10	0	-6	17
a2	3	14	8	9	2
a3	1	5	14	20	-3
a4	7	19	10	2	0

No se conocen probabilidades para la ocurrencia de los estados de la naturaleza. Compare las soluciones obtenidas con cada uno de los criterios aprendidos.

3. Considere las siguientes tablas de retribuciones en la que cada dato es un rendimiento neto en dólares. Suponga que es una decisión en la que no se tiene conocimiento del estado de la naturaleza. Determine la mejor decisión utilizando los criterios aprendidos.

Tabla a)

	Estados de la naturaleza			
Decisión	1	2	3	4
1	35	22	25	12
2	27	25	20	18
3	22	25	25	28
4	20	25	28	33

Tabla b)

	Estados de la naturaleza		
Decisión	1	2	3
1	3	8	5
2	7	4	6
3	5	6	9

TOMA DE DECISIONES BAJO RIESGO

Esta categoría incluye aquellas decisiones para las que las consecuencias de una acción dada dependen de algún evento probabilista.

EJEMPLO

Suponga que tiene un pequeño local de ventas de pinos para Navidad. La primera tarea es decidir cuántos pinos ordenar para la siguiente temporada. Supóngase que se debe pagar \$3.5 por cada árbol, se pueden ordenar solo lotes de 100 y se planea venderlos a \$8 cada uno. Por supuesto, si no se venden, no tienen valor de recuperación. Se estudian los registros de ventas pasadas en la iglesia y se analiza el crecimiento potencial de las ventas con otros vendedores, llegando a las siguientes estimaciones para la siguiente temporada:

Venta de pinos	Probabilidad
100	0.3
200	0.3
300	0.4

Con estos datos se puede calcular la ganancia para cada combinación de cantidad ordenada y ventas eventuales. Por ejemplo, si se ordenan 300 pinos y se venden sólo 200, la utilidad neta será de \$4.5 por cada árbol vendido menos una pérdida de \$3.5 por los árboles no vendidos, es decir:

$$200(\$8-\$3.5)-100(\$3.5)=\$900-\$350=\$550$$

Si se hace esto para cada una de las combinaciones y se obtienen los resultados mostrados en la tabla de decisiones siguiente o también llamada matriz de pagos:

Eventos (demanda de árboles)				
Alternativas de decisión		100	200	300
		(0.3)	(0.3)	(0.4)
	100	\$450	\$450	\$450
	200	\$100	\$900	\$900
	300	\$-250	\$550	\$1.400

El resultado más importante de la teoría de decisiones bajo riesgo es que debe seleccionarse la alternativa que tenga el mayor VALOR ESPERADO.

Existen muchas decisiones administrativas que pueden catalogarse como toma de decisiones bajo riesgo. Algunas de ellas son:

- ¿Deberá introducirse un nuevo producto en particular?
- ¿Deberá ofrecerse más para obtener un contrato?
- ¿Deberá construirse una nueva planta o ampliarse la que se tiene?
- ¿Cuántos pasteles deberá producir una pastelería para la venta diaria?.
- ¿Deberá una compañía petrolera realizar pruebas sísmicas costosas antes de hacer una nueva perforación?
- ¿Deberá iniciarse un nuevo programa costoso de propaganda?

TOMA DE DECISIONES BAJO CERTIDUMBRE

- ☞ Si se pueden predecir con certeza las consecuencias de cada alternativa de acción, entonces se tiene una tarea de toma de decisiones bajo certidumbre.
- ☞ Otra manera de pensar en esto es que existe una relación directa de causa y efecto entre cada acto y su consecuencia. Si está lloviendo, ¿deberá llevarse un paraguas?, si hace frío, ¿deberá llevarse un abrigo?. Ya sea que se lleve o no el paraguas o el abrigo, las consecuencias son predecibles.
- ☞ Una buena parte de las decisiones que se toman a diario cae dentro de esta categoría.

¿En dónde comer?

¿En donde comprar el material de la oficina?

Algunos de los modelos o técnicas utilizados para manejar estas decisiones son:

- Análisis del punto de equilibrio.
- Programación Lineal.
- Programación de la producción.
- Control de Inventarios.

PROGRAMACION LINEAL

- ☞ Muchas decisiones de Dirección de Operaciones incluyen el intentar conseguir utilizar los recursos de la organización de la manera más efectiva posible.

Los recursos generalmente incluyen maquinarias (como los aviones), mano de obra (como los pilotos), dinero, tiempo y materias primas (como el combustible). estos recursos se pueden utilizar para producir productos (como máquinas, muebles, alimentos y vestuario) o servicios (como listas de vuelos, campañas de publicidad o decisiones de inversión).


- ☞ La programación lineal es un método determinista de análisis para elegir la mejor entre muchas alternativas. Cuando esta mejor alternativa incluye un conjunto coordinado de actividades, se le puede llamar plan o programa.

- ☞ Con frecuencia, seleccionar una alternativa incluye satisfacer varios criterios al mismo tiempo.
- ☞ Por ejemplo, cuando se compra una pieza de pan se tiene el criterio de frescura, tamaño, tipo (blanco, de centeno u otro), costo, rebanado o no rebanado, etc.
- ☞ Se pueden además dividir estos criterios en dos categorías: restricciones y objetivo.
- ☞ Las restricciones son las condiciones que debe satisfacer una solución que está bajo consideración.
- ☞ Si más de una alternativa satisfacen todas las restricciones, el objetivo se usa para seleccionar entre todas las alternativas factibles.
- ☞ Cuando se elige una pieza de pan, puede quererse un kilo de pan blanco rebanado y hecho en el día. Si varias marcas satisfacen estas restricciones, puede aplicarse el objetivo de un costo mínimo y escoger el más barato.
- ☞ Existen muchos problemas administrativos que se ajustan a este modelo de tratar de minimizar o maximizar un objetivo que está sujeto a una lista de restricciones.
 - Un corredor de inversiones, por ejemplo, trata de maximizar el rendimiento sobre los fondos invertidos pero las posibles inversiones están restringidas por las leyes y las políticas bancarias.
 - Un hospital debe planear que las comidas para los pacientes satisfagan ciertas restricciones sobre sabor, propiedades nutritivas, tipo y variedad, al mismo tiempo que se trata de minimizar el costo.
 - Un fabricante, al planear la producción futura, busca un costo mínimo al mismo tiempo cómo cumplir restricciones sobre la demanda del producto, la capacidad de producción, los inventarios, el nivel de empleados y la tecnología.

La programación lineal es una técnica determinista, no incluye probabilidades. El objetivo y cada una de las restricciones se deben expresar como una relación lineal, de ahí el nombre de programación lineal.

Todos los problemas de PL (Programación Lineal) tiene cuatro propiedades en común:

1. Los problemas de PL buscan **maximizar o minimizar** una cantidad (generalmente beneficios o costos). Nos referimos a ello como la **Función Objetivo** de un PL. El principal objetivo de una empresa tipo es maximizar los beneficios a largo plazo. En el caso de un sistema de distribución, el objetivo puede ser minimizar los costos de transporte.
2. La presencia de **restricciones** limita el grado en que podemos perseguir el objetivo. Por ejemplo, decidir cuántas unidades se deben fabricar para una línea de productos de una empresa está restringido por la disponibilidad de horas de mano de obra y máquinas. Se quiere por tanto, maximizar o minimizar una cantidad (función objetivo) sujeta a las limitaciones de recursos (restricciones).
3. Deben existir **diferentes alternativas** donde poder elegir. Por ejemplo, si una empresa fabrica tres productos, los directivos pueden utilizar PL para decidir cómo asignar entre ellos sus recursos de producción limitados (trabajo, máquinas y demás). Si no existen alternativas evidentes que seleccionar, no necesitaremos la PL.
4. La función objetivo y las restricciones de un PL deben ser expresadas en términos de **ecuaciones lineales** o inecuaciones.

 Una de las aplicaciones más comunes de la programación lineal es el problema del plan de producción. Do o más productos se fabrican con recursos limitados. La empresa desea saber cuántas unidades deben fabricarse de cada producto, maximizando los beneficios globales y teniendo en cuenta las limitaciones de recursos.

EJEMPLO

Sony fabrica dos productos: (1) el Walkman un radiocasete portátil y (2) el Shader TV, un televisor en blanco y negro del tamaño de un reloj de pulsera. El proceso de producción de ambos productos se asemeja en que los dos necesitan un número de horas de trabajo en el departamento de electrónica, y un cierto número de horas de mano de obra en el departamento de montaje. Cada Walkman necesita cuatro horas de trabajo de electrónica y dos en el taller de montaje. Cada televisor necesita tres horas de electrónica y una en montaje. Durante el actual período de producción se dispone de doscientas cuarenta horas en el departamento de electrónica y de cien horas en el de montaje. Cada Walkman vendido supone un beneficio de 7 dólares, mientras que para un televisor el beneficio unitario es de cinco dólares.

El problema de Sony es determinar la mejor combinación posible de Walkmany televisores que debe producir para alcanzar el máximo beneficio.

Esta situación puede formularse como un programa lineal.

Empezaremos resumiendo la información necesaria para formular y resolver este problema.

	Horas necesarias para producir una unidad		
Departamento	(x ₁) Walkman	(x ₂) Televisores	Hrs. disponibles
Electrónica	4	3	240
Montaje	2	1	100
Beneficios	7	5	

Una vez hecho esto, utilizaremos la siguiente notación:

Sea :

X₁= número de Walkman a producir.

X₂= número de televisores a producir

Ahora podemos escribir la función objetivo en términos de x₁ y x₂:

$$\text{Maximizar Beneficio} = 7x_1 + 5x_2$$

Nuestro siguiente paso es desarrollar relaciones matemáticas que describan las dos limitaciones del problema. Una relación de carácter general sería que la cantidad de recursos utilizados sea menor o igual (\leq) que la cantidad de recursos disponibles.

Primera restricción: tiempo de electrónica utilizado \leq tiempo de electrónica disponible.

$$4x_1 + 3x_2 \leq 240 \text{ (horas de trabajo en electrónica)}$$

Segunda restricción: tiempo de montaje utilizado \leq tiempo de montaje disponible.

$$2x_1 + 1x_2 \leq 100 \text{ (horas de trabajo en montaje)}$$

Ambas restricciones representan las limitaciones de capacidad y, por supuesto, afectan al beneficio total. Por ejemplo, Sony no puede producir 70 Walkman durante el período de producción porque si $x_1=70$, ambas restricciones se incumplen.

Tampoco puede hacer 50 Walkman y 10 televisores ($x_1 = 50$, $x_2 = 10$), porque en este caso se incumpliría la segunda restricción.

Estas restricciones nos llevan a otro aspecto importante de la programación lineal: existirán interacciones entre variables. Cuantas más unidades se realicen de un producto menos se fabricarán de otros.

☞ La forma más fácil de solucionar un pequeño problema de PL, como por ejemplo el de Sony, es la solución gráfica. El procedimiento gráfico puede utilizarse cuando existen dos variables de decisión, como el número de Walkman a producir (x_1) y el número de televisores a producir (x_2).

☞ Cuando existen más de dos variables, es imposible dibujarlo en un gráfico de dos dimensiones, por lo que habrán de adoptarse otros métodos de resolución más complejos que se describirán más adelante.

Representación gráfica de las restricciones

Para encontrar la solución óptima de un problema PL, en primer lugar debemos identificar el conjunto o región de soluciones posibles (valores de las variables que cumplen las restricciones del problema).

El primer paso para conseguirlo es dibujar las restricciones del problema en un gráfico.

Retomemos el problema de ejemplo de Sony:

$$\text{Maximizar Beneficio} = 7x_1 + 5x_2$$

$$\text{S.A.} \quad 4x_1 + 3x_2 \leq 240 \text{ (horas de trabajo en electrónica)}$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 100 \text{ (horas de trabajo en montaje)}$$

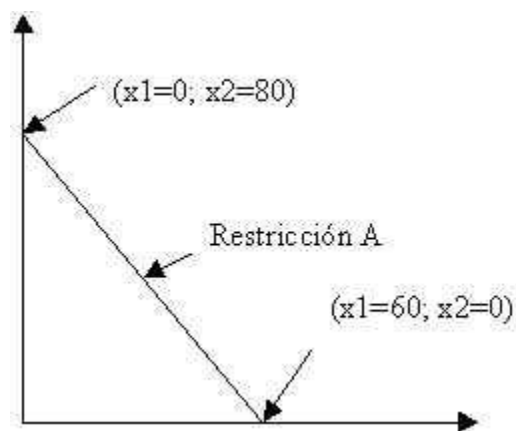
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (\text{número de unidades no debe ser negativo})$$

Para dibujar las restricciones en un gráfico, debemos transformar las desigualdades en igualdades:

$$\text{Restricción A: } 4x_1 + 3x_2 = 240$$

$$\text{Restricción B: } 2x_1 + 1x_2 = 100$$

La variable x_1 (Walkman) generalmente se dibuja en el eje horizontal y la variable x_2 (televisores) en el eje vertical.



PROGRAMACIÓN LINEAL

PROBLEMAS

01

Un frutero necesita 16 cajas de naranjas, 5 de plátanos y 20 de manzanas. Dos mayoristas pueden suministrarle para satisfacer sus necesidades, pero sólo venden la fruta en contenedores completos. El mayorista A envía en cada contenedor 8 cajas de naranjas, 1 de plátanos y 2 de manzanas. El mayorista B envía en cada contenedor 2 cajas de naranjas, una de plátanos y 7 de manzanas. Sabiendo que el mayorista A se encuentra a 150 km de distancia y el mayorista B a 300 km, calcular cuántos contenedores habrá de comprar a cada mayorista, con objeto de ahorrar tiempo y dinero, reduciendo al mínimo la distancia de lo solicitado.

02

Una compañía tiene dos minas: la mina A produce diariamente 1 tonelada de carbón de antracita de alta calidad, 2 toneladas de carbón de calidad media y 4 toneladas de carbón de baja calidad; la mina B produce 2 toneladas de cada una de las tres clases. La compañía necesita 70 toneladas de carbón de alta calidad, 130 de calidad media y 150 de baja calidad. Los gastos diarios de la mina A ascienden a 150 dólares y los de la mina B a 200 dólares. ¿Cuántos días deberán trabajar en cada mina para que la función de coste sea mínima?

03

Imaginemos que las necesidades semanales mínimas de una persona en proteínas, hidratos de carbono y grasas son, respectivamente, 8, 12 y 9 unidades. Supongamos que debemos obtener un preparado con esa composición mínima mezclando dos productos A y B, cuyos contenidos por Kg son los que se indican en la siguiente tabla:

	Proteínas	Hidratos	Grasas	Costo/kg
A	2	6	1	600
B	1	1	3	400

- a) ¿Cuántos Kg de cada producto deberán comprarse semanalmente para que el costo de preparar la dieta sea mínimo?
- b) ¿Cuántos Kg de cada producto deberíamos comprar si el precio de A subiera a 1.000 pesos/Kg ?

04

En la elaboración de un producto A se necesita una sustancia B. La cantidad de A obtenida es menor o igual que el doble de B utilizada, y la diferencia entre las cantidades del producto B y A no supera los 2g mientras que la suma no debe sobrepasar los 5g. Además se utiliza por lo menos 1g de B y se requiere 1 g de A. La sustancia A se vende a 5 millones y la B cuesta 4 millones el gramo. Calcular la cantidad de sustancia B necesaria para que el beneficio sea máximo.

SOLUCIONES**01**

- **MATEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA**

	MAYORISTA A	MAYORISTA B	Necesidades mínimas
Naranjas	8	2	16 cajas
Plátanos	1	1	5 cajas
Manzanas	2	7	20 cajas
Distancia	150 Km	300 Km	

- **VARIABLES INSTRUMENTALES**

Llamamos x al número de contenedores del mayorista A

Llamamos y al número de contenedores del mayorista B

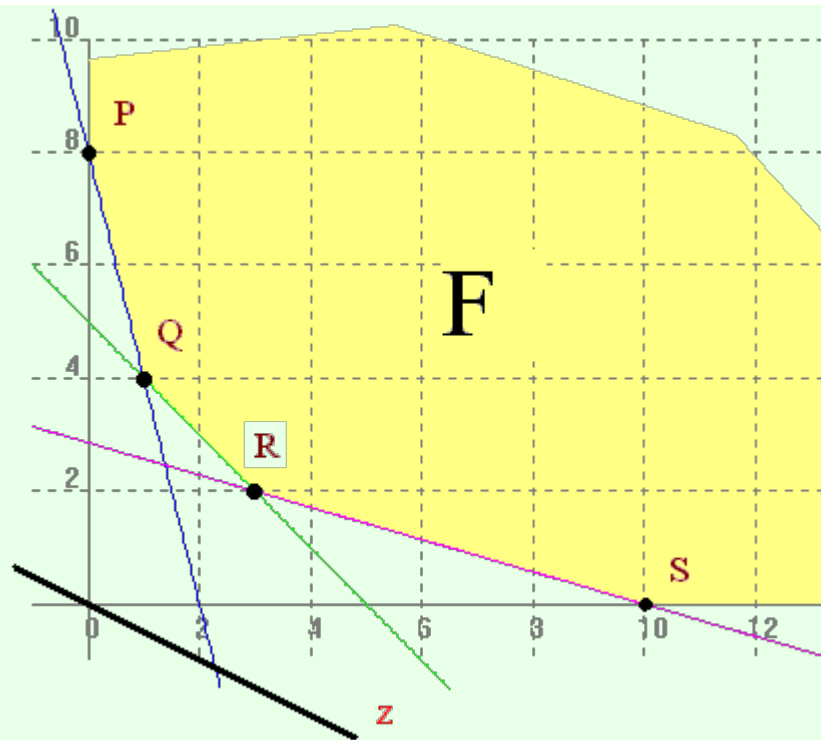
- **FUNCIÓN OBJETIVO (Minimizar)**

$$F(X) = 150x + 300y$$

- **RESTRICCIONES**

$$\left. \begin{array}{l} 8x + 2y \geq 16 \\ x + y \geq 5 \\ 2x + 7y \geq 20 \\ x \geq 0 ; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- **REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES**



- SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA

Observamos que el mínimo se alcanza en el punto $R(3,2)$
(*solución óptima*)

Por tanto el frutero solicitará 3 contenedores del mayorista A y
2 contenedores del mayorista B.

02

- MATEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA

	Mina A	Mina B	Necesidades mínimas
Alta	1	2	70
Media	2	2	130
Baja	4	2	150
Costo diario	\$ 150	\$ 200	

- VARIABLES INSTRUMENTALES

Llamamos x al número de días trabajados en la mina A

Llamamos y al número de días trabajados en la mina B

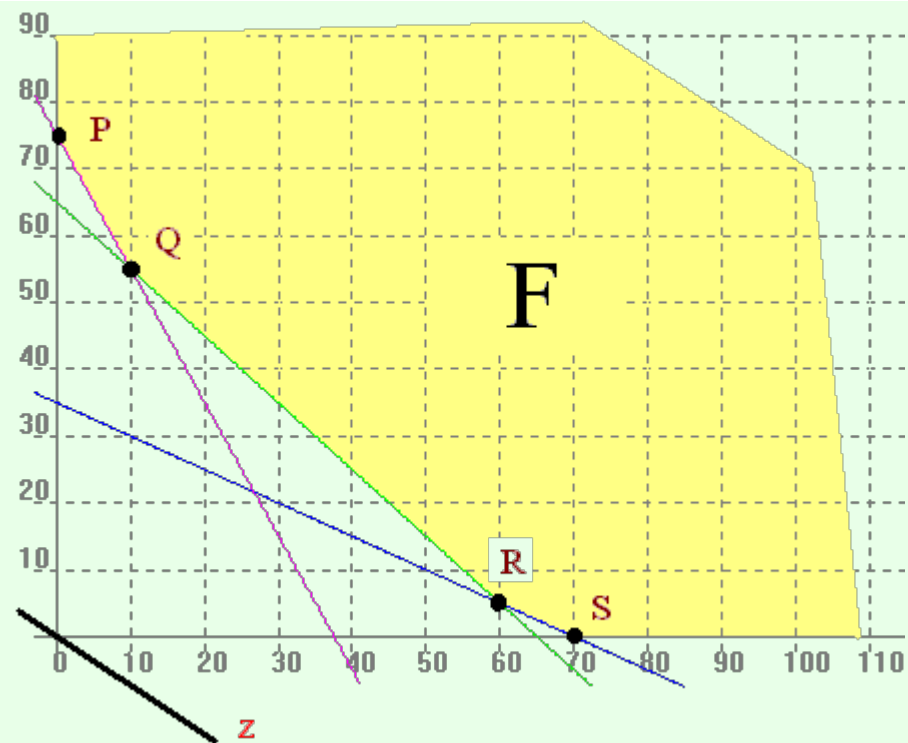
- FUNCIÓN OBJETIVO (**Minimizar**)

$$F(X) = 150x + 200y$$

- RESTRICCIONES

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \geq 70 \\ 2x + 2y \geq 130 \\ 4x + 2y \geq 150 \\ x \geq 0 ; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES



- SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA

El mínimo se obtiene en el punto R(60,5) es decir, la compañía debe trabajar 60 días en la mina A y 5 días en la mina B para que el costo sea mínimo.

- VALOR DEL PROGRAMA LINEAL

Como la función objetivo es $F(X) = 150x + 200y$ el valor del programa lineal (gasto) es $F(X) = 150 \cdot 60 + 200 \cdot 5 = \10.000 diarios.

03

- MATEMATIZACIÓN DEL PROBLEMA

	A	B	Necesidades
Proteínas	2	1	8
Hidratos	6	1	12
Grasas	1	3	9
Costo	600	400	

- VARIABLES INSTRUMENTALES

Llamamos x al número de Kg. usados del producto A

Llamamos y al número de Kg. usados del producto B

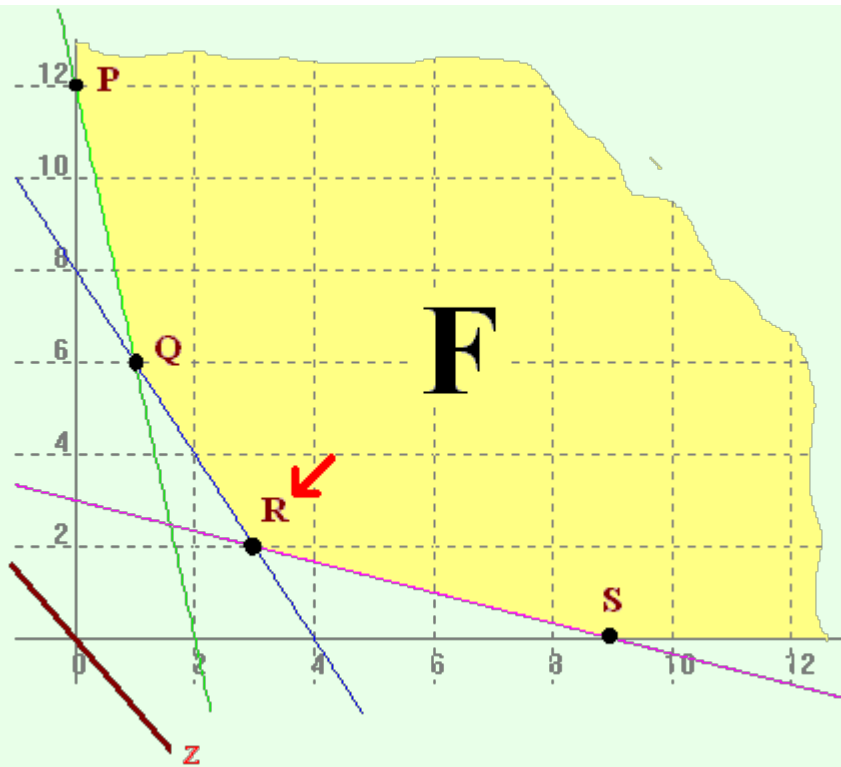
- FUNCIÓN OBJETIVO (**Minimizar**)

$$F(X) = 600x + 400y$$

- RESTRICCIONES

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 8 \\ 6x + y \geq 12 \\ x + 3y \geq 9 \\ x \geq 0 ; y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES



- **SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA**

Todos los puntos que forman la región *F* son soluciones factibles, y por paralelismo con la recta de beneficio nulo *z* vemos que *R*(3,2) es el punto mínimo. Por tanto, deben comprarse 3 kg. de A y 2 kg. de B para que el gasto sea mínimo.

- **VALOR DEL PROGRAMA LINEAL**

Cuando la función objetivo es $F(X) = 600x + 400y$ el valor del programa lineal (gasto) es \$2.600

Si la función objetivo es $F(X) = 100x + 400y$ la solución óptima está en el punto *Q*(1,6) y el valor del programa lineal (gasto) es \$ 3.400

04

- VARIABLES INSTRUMENTALES

Llamamos x a la cantidad de sustancia A

Llamamos y a la cantidad de sustancia B

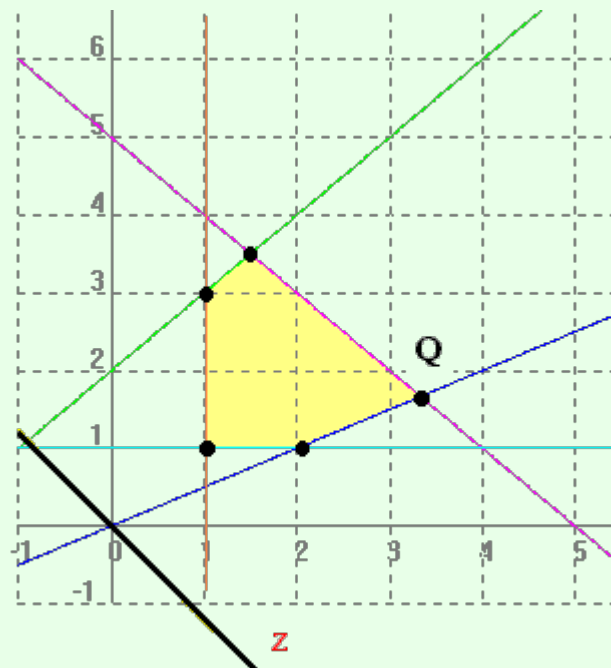
- FUNCIÓN OBJETIVO (Maximizar)

$$F(X) = 5x + 4y$$

- RESTRICCIONES

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 2y \\ y - x \leq 2 \\ y + x \leq 5 \\ x \geq 1; y \geq 1 \end{array} \right\}$$

- REGIÓN DE SOLUCIONES FACTIBLES



- SOLUCIÓN FACTIBLE ÓPTIMA

Se encuentra en el punto $Q(10/3, 5/3)$, es decir la cantidad de sustancia B para que el beneficio sea máximo debe ser $5/3$ g.