fjmadrid@uco.es

Estructuras de Datos
Grado de Ing. Informática

Árbol KD-TREE

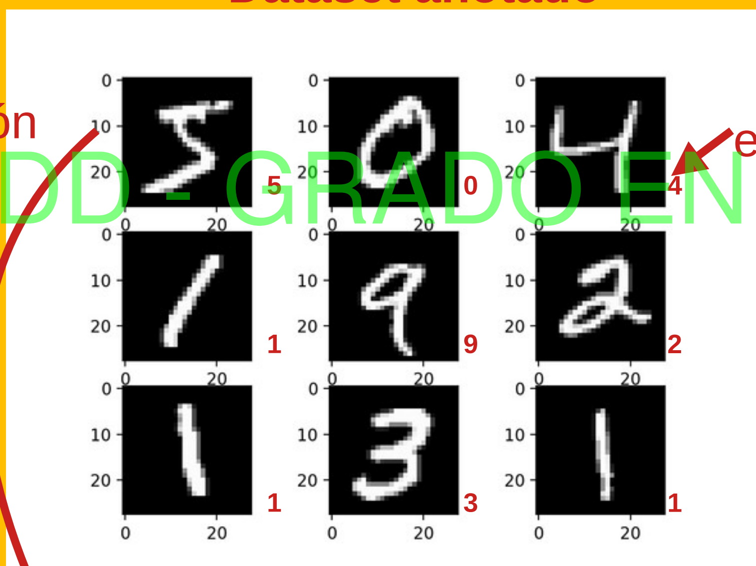
fjmadrid@uco.es

Motivación

- El problema del vecino más cercano.

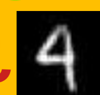
Dataset anotado

patrón

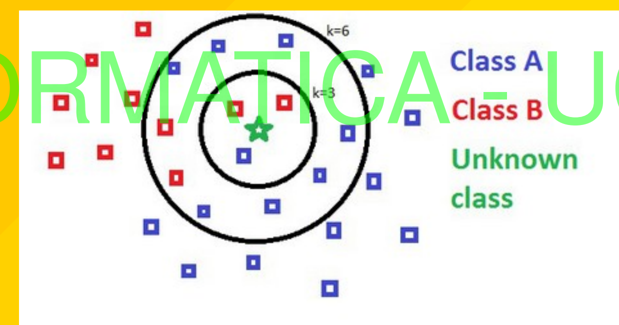


etiqueta

16x16 = 256 dimensiones
0010000100111001 ... 01100

¿  **?**

¿qué etiqueta tendrá?

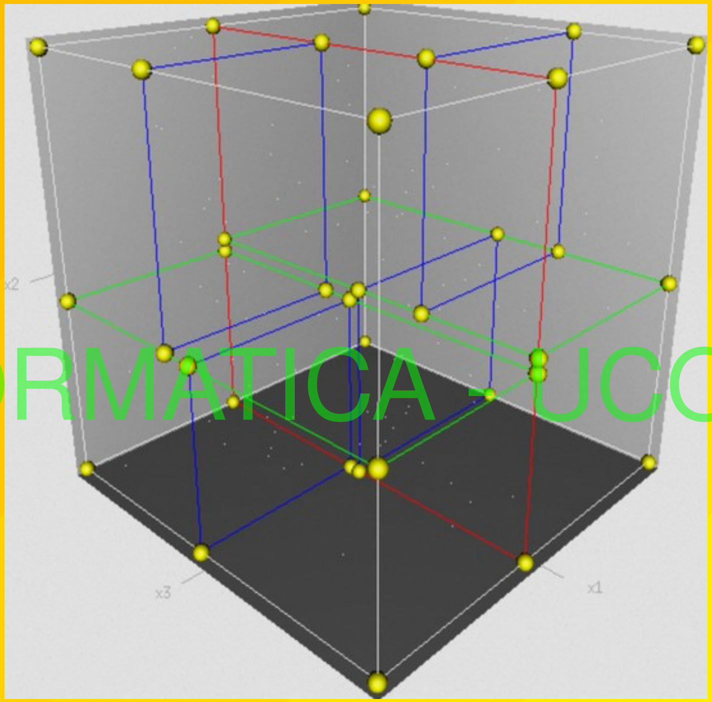


Usando un array de [patrones|etiquetas] para representar el Dataset, ¿qué complejidad tendría buscar el vecino más cercano? ¿se podrá hacer mejor?

fjmadrid@uco.es

KD-Tree

- Representan una partición de un espacio de K Dimensiones.
- Permiten optimizar la búsqueda de:
  - Los K patrones más cercanos a otro dado.
  - Todos los patrones en un radio dado alrededor de otro punto.

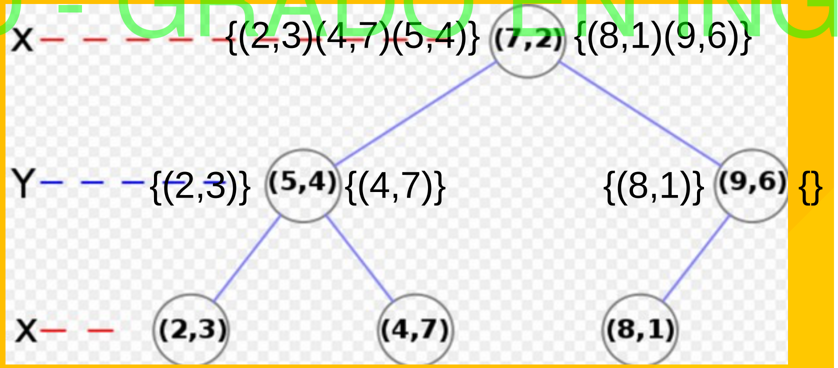


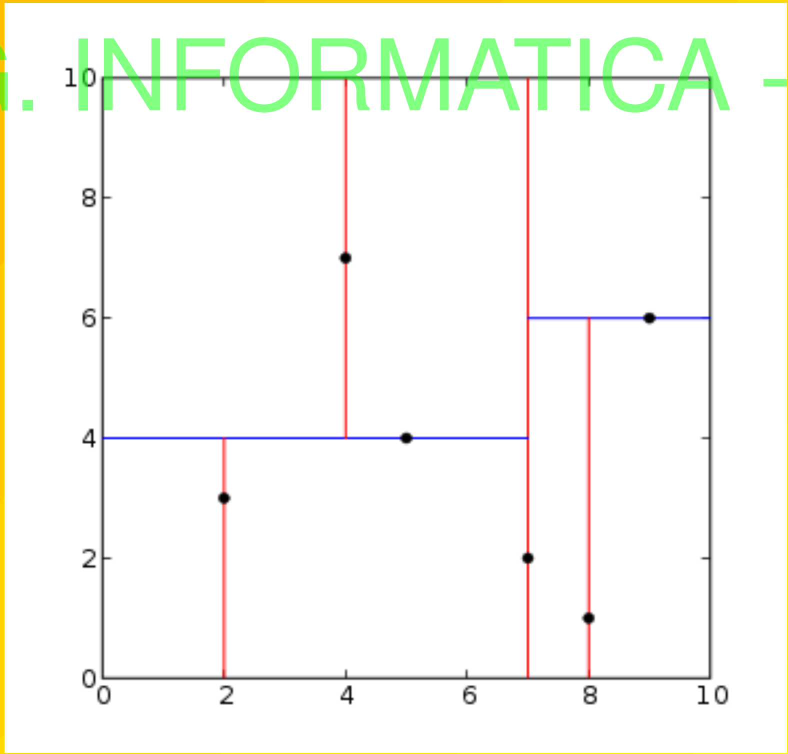
División del espacio por bi-particiones.

fjmadrid@uco.es

KDTree

- Construcción: ejemplo.
  - Dataset:[(2,3), (5,4), (9,6), (4,7), (8,1), (7,2)]





fjmadrid@uco.es

KDTree

- Construcción: Algoritmo canónico.

```
Algorithm make_kdtree (ds:DArray[Point],
                       depth:Integer):Binarytree[Point]
Var
  kdtree:BinaryTree[Point]
  axis:Integer
Begin
  kdtree ← BinaryTree.create()
  If ds.size()>0 Then
    axis ←  depth mod Point.dimensions();
    sort_axis(ds, axis)
    median ← ds[ds.size()//2]
    kdtree.createRoot(median)
    kdtree.set_left(make_kdtree(ds[0:ds.size()//2], depth+1);
    kdtree.set_right(make_kdtree(ds[ds.size()//2+1:], depth+1);
  End-if
  Return kdtree
End.
```

$\log_2 n$ niveles

$O(n(\log n)^2)$

fjmadrid@uco.es

KDE-Tree

- Búsqueda del vecino más cercano.

```
Algorithm find_NN(t:KDTree, p:Point, depth:Integer): Point
Prec: Not t.is_empty()
Var
   axis:Integer //The axis to inspect.
   curr, curr2: Point //The best up to date.
Begin
   axis ← depth mod p.dim() //Selected the axis to split.
   curr ← t.item()
   curr2 ← curr
   If p[axis]<=curr[axis] And Not t.left().is_empty() Then
      curr2 ← find_NN(t.left(), p, depth+1)
   Else If p[axis]>curr[axis] And Not t.right().is_empty() Then
      curr2 ← find_NN(t.right(), p, depth+1)
   End-If
   If dist(p, curr2)<dist(p, curr) Then
      curr ← curr2
   If abs(p[axis]-t.item()[axis] < dist(curr, p) Then
      If p[axis]>t.item()[axis] And Not t.left().is_emtpy() Then
         curr2 ← find_NN(t.left(), p, depth+1)
      Else If Not t.right.is_empty() Then
         curr2 ← find_NN(t.right(), p, depth+1)
      End-If
      If dist(curr2, p)<dist(curr, p) Then
       curr ← curr2
   End-If
   Return curr
End.
```

eje (dimension a dividir)

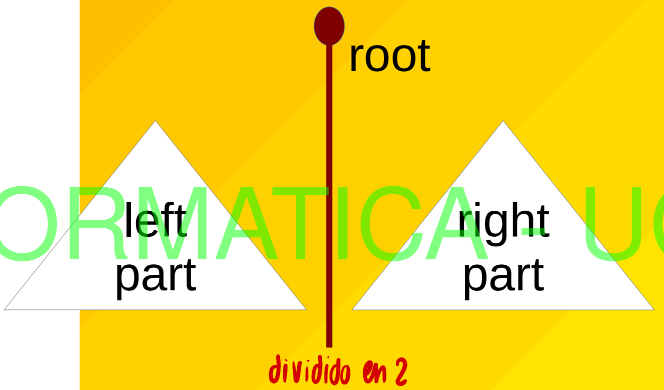
Paso 1

Paso 2

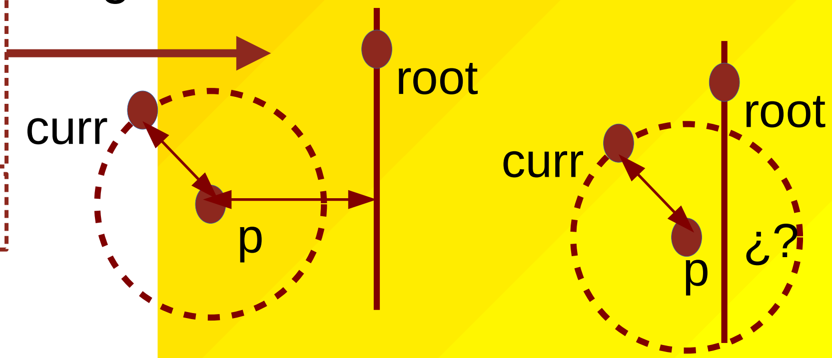
Paso 3

Paso 4

O (?)



¿Poda?



fjmadrid@uco.es

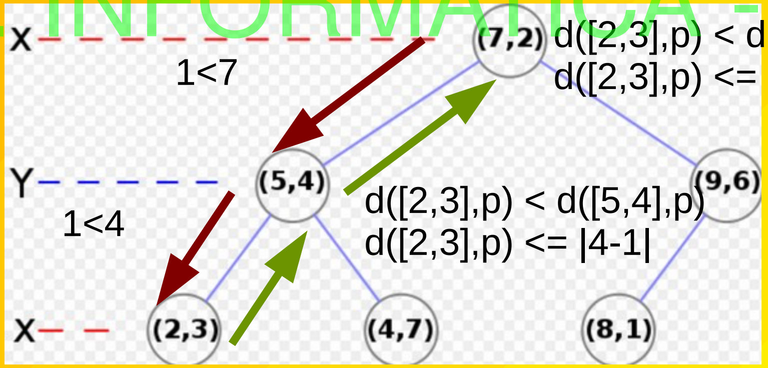
KDE-Tree

- Ejemplo (distancia L1).
  - El 1-NN de p:[1,1]

Nivel.Paso

0.1 c=[7,2], Como 1<7 descender hijo izq.
1.1 c=[5,4], Como 1<4 descender hijo izq.
2.1 c=[2,3], Hoja.
1.2 c=[5,4],c2[2,3], L1(c2,p) < L1(c, p), c<-c2
1.3 c=[2,3], |1-4| >= L1(c,p). Poda.
0.2 c=[7,2],c2[2,3], L1(c2,p) < L1(c, p), c<-c2.
0.3 c=[2,3], |1-7| >= L1(c, p). Poda.

Resultado c=[2,3]



Candidato: [2,3]

El vecino más cercano es: **[2,3]**

*L1([1,3], [2,5])=|1-2|+|3-5|=3

fjmadrid@uco.es

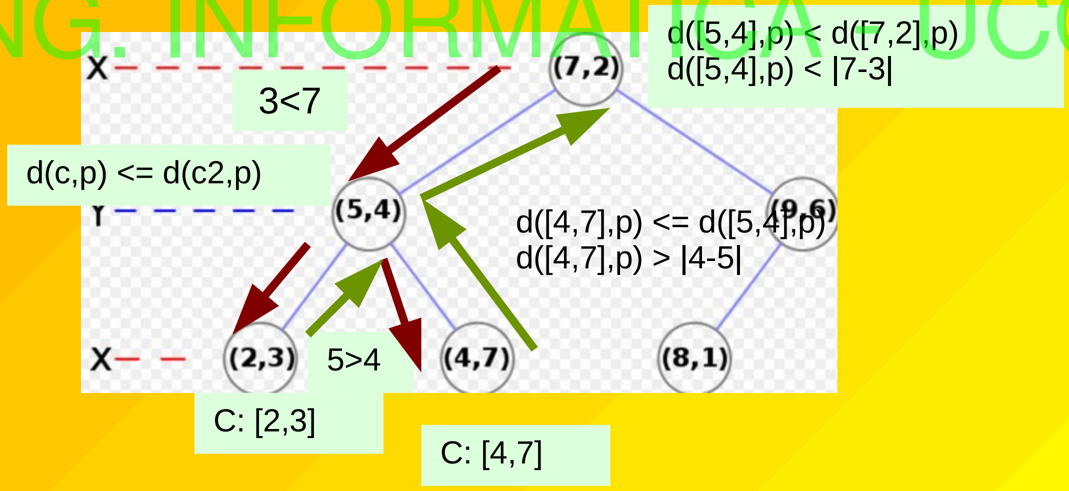
KDE-Tree

- Ejemplo (distancia L1).
  - El 1-NN de p:[3,5]

Nivel.Paso

0.1 c=[7,2], Como 3<7 descender hijo izq.
1.1 c=[5,4], Como 5>4 descender hijo der.
2.1 c=[4,7], Hoja.
1.2 c=[5,4], c2=[4,7], L1(c,p) <= L1(c2,p)
1.3 c=[5,4], |5-4| < L1(c,p), desc. hijo izq.
2.1 c=[2,3], Hoja
1.4 c=[5,4], c2=[2,3], L1(c,p)<=L1(c2,p).
0.2 c=[7,2], c2=[5,4], L1(c,p)>L1(c2,p), c<-c2
0.3 c=[5,4], |3-7| >= L1(c,p), Poda.

Resultado c=[5,4]



El vecino más cercano es: **[5,4]**

fjmadrid@uco.es

KD-Tree

- Resumiendo.
  - Representa una bipartición de una dimensión del espacio en cada nivel.
  - Su construcción puede ser O(N Log N).
  - Si utilizamos la medina como pivote, tendremos un árbol perfectamente equilibrado.
  - La localización es en promedio Log(N) pero puede degenerar en O(N) si el número de dimensiones es muy alto.
  - Será mejor que una búsqueda exhaustiva si N >> 2^k

KDE-Tree

- Lecturas recomendadas.
  - KDTree: en.wikipedia.org/wiki/K-d_tree