# MATEMÁTICA DISCRETA

Alejandro Gómez Amaro
Profesor: Abel Cabrera Martínez

# Lógica

**Propasición:** Oración verdadera o falsa pero no ambas. Se expresan comúnmente como oraciones declarativas

Ej: - Las únicas numeros enteros positivos que dividen a 5 son 1 y 5.
- 3 + 3 = 8.

Sean p y q dos proposiciones:

- **Conjunción** p y q → $p \land q$ → proposición p y q
- **Disyunción** p y q → $p \lor q$ → proposición p o q
- **Negación** de p → $\neg p$ → proposición no p

Ej: p: Una década son 10 años
q: Un milenio tiene 100 años
- p es verdadera ($\neg p$ es falsa).
- q es falsa ($\neg q$ es verdadera).
- $p \land q$ es falsa
- $p \lor q$ es verdadera

La **tabla de verdad** de una proposición p esta formada por las proposiciones individuales $p_1, \ldots, p_n$. Enumera todas las combinaciones de valores para $p_1, \ldots, p_n$, donde V es verdadero y F es falso. Y da la lista de valores de verdad para p en cada combinación.

Ej:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | F |

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

Si $p$ es una propasición formada por proposiciones individuales (por ejemplo $p$, $q$ y $r$) e incluye conectores lógicas, en ausencia de paréntesis, primero $\neg$ después $\wedge$ y último $\vee$.

Ej: $\neg p \vee q \wedge r$ → donde $p$ y $r$ son verdaderos y $q$ es falso
- Primero $\neg p$, es verdadero
- Segundo $q \wedge r$, es falso
- Tercero $(\neg p) \vee (q \wedge r)$, es verdadero

Ej: $p: 5 < 9$, $q: 9 < 7$ y $r: 5 < 7$
Representa las siguientes proposiciones:
a) No ocurre $(5 < 9$ y $9 < 7)$
$\neg(p \wedge q)$

b) $5 < 9$ o no ocurre $(9 < 7$ y $5 < 7)$
$p \vee \neg(q \wedge r)$

Ej: Sean p y q dos proposiciones. Escribe la tabla de verdad
a) $(p \vee q) \wedge \neg p$

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\neg p$ | $(p \vee q) \wedge \neg p$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F |
| V | F | V | F | F |
| F | F | F | V | F |
| F | V | V | V | V |

b) $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\neg p \vee q$ | $(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | F |
| F | F | F | V | V |
| F | V | F | V | V |

Ej: j: El jardinero dice la verdad.
c: El cocinero dice la verdad.
Escribe la proposición $\ell$. $\ell$: El cocinero y el jardinero no pueden decir la verdad

| $j$ | $c$ | $j \wedge c$ | $\ell \equiv \neg (j \wedge c)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | F |
| V | F | F | V |
| F | F | F | V |
| F | V | F | V |

Ej: $p \vee \neg(p \wedge q)$

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee \neg(p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | V |
| V | F | F | V |
| F | F | F | V |
| F | V | F | V |

Proposición es una tautología si contiene solo "V" en su última columna de la tabla de verdad

Proposición es una contradicción si solo contiene "F" en la última columna de su tabla de verdad

Si $p$ es una tautología, $\neg p$ es una contradicción, y viceversa

Dos proposiciones son equivalentes ($p \equiv q$) si sus correspondientes tablas son iguales

Ej:

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\neg(p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | F |
| V | F | F | V |
| F | F | F | V |
| F | V | F | V |

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \vee \neg q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F |
| V | F | F | V | V |
| F | F | V | V | V |
| F | V | V | F | V |

## Leyes del álgebra de proposiciones

$p \vee p \equiv p$

$p \vee q \equiv q \vee p$

$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$p \wedge p \equiv p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Ej: Simplifica las proposiciones

a) $\neg (p \vee \neg q) \equiv \neg p \wedge q$

b) $\neg (\neg p \wedge q) \equiv p \vee \neg q$

c) $\neg (\neg p \vee \neg q) \equiv p \wedge q$

## Proposición condicional, si p entonces q, $p \to q$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | V | V |

Con proposiciones $\wedge, \vee, \neg$ y $\to$. $\to$ se evalúa al final.

$p \to q \equiv \neg p \vee q$

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | V | V |

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | V |
| V | F | F | F |
| F | F | V | V |
| F | V | V | V |

Ej: Comprueva que $(p \wedge q) \to (p \vee q)$

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | V |
| F | F | F | F | V |
| F | V | F | V | V |

Proposición bicondicional, p si y sólo si q, $p \leftrightarrow q$

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | F | V |
| F | V | F |

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | Condicional $p \rightarrow q$ | Recíproco $q \rightarrow p$ | Inversa $\neg p \rightarrow \neg q$ | Contrarrecíproco $\neg q \rightarrow \neg p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F | V | V | F |
| F | F | V | V | V | F | F | V |
| F | V | V | F | V | V | V | V |

Condicional: "El equipo gana siempre llueve"
Recíproco: "Si el equipo gana, entonces llueve"
Inverso: "Si no llueve, entonces el equipo no gana"
Contrarrecíproco: "Si el equipo no gana, entonces no llueve"

Ej: Formaliza la siguiente frase:
"Puedes acceder a Internet desde el campus sólo si estudias Ingeniería Informática o no eres alumno de primero"

- $p$: "Puedes acceder a Internet desde el campus"
- $q$: "estudias Ingeniería Informática"
- $r$: "eres alumno de primero"

$$p \rightarrow (q \vee \neg r)$$

Proposición, es una afirmación que es verdadera o falsa pero no ambas.

La lógica de proposiciones no puede describir la mayoría de afirmaciones en matemática e informática

Ej: $P(n)$: "n es un entero impar" No es una proposición

Hay muchas afirmaciones que incluyen variables, hay que ampliar el sistema para incluirlas

Sea $P(x)$ una oración con variable x y D un conjunto. P es una función proposicional o predicado (respecto a D), si para cada $x \in D$, $P(x)$ es una proposición. D se llamará "dominio de discurso" o "dominio de referencia" de P

Ej: Sea $P(n)$ "n es un entero impar" y sea $D = \mathbb{Z}^+$

P es una función propocional con dominio de discurso D

Para cada $n \in D$, $P(n)$ es una proposición

- Si $n = 2k+1 \rightarrow P(n)$ es verdadera
- Si $n = 2k \rightarrow P(n)$ es falsa

Existen funciones proposicionales con más de una variable

Ej: Sea $Q(x,y)$ "$x = y + 3$" y $D = \mathbb{R}$

$Q(1,2)$ es falsa

$Q(3,0)$ es verdadera

Ej: Sea $R(x,y,z)$ "$x + y = z$" y $D = \mathbb{R}$

$R(1,2,3)$ es verdadera

$R(0,0,1)$ es falsa

Sea P una función proposicional con dominio de discurso D. Llamamos afirmación cuantificada universalmente de P a:

para todo $x$, $P(x)$

Cuantificación universal de $P(x)$ denotada como "$\forall x P(x)$"

$\forall$: cuantificador universal

$\forall x P(x)$ es verdadera si $P(x)$ es verdadera en $x \in D$

$\forall x P(x)$ es falsa si $P(x)$ es falsa para al menos un valor de $x \in D$

Ej: $\forall x\ (x^2 \geq 0)$, $D = \mathbb{R}$ es verdadera

$\forall x\ (x < 2)$, $D = \mathbb{R}$ es falsa

Ej: ¿Cuál es el valor de verdad de $\forall x P(x)$ donde $P(x) = x^2 < 10$ y el dominio de discurso son los enteros positivos menores o iguales que 4?

$D = \{1, 2, 3, 4\}$

$\forall x P(x) = P(1) \land P(2) \land P(3) \land P(4)$

Como $P(4)$ es falsa $\forall x P(x)$ es falsa

Sea P una función proposicional de dominio de discurso D. Llamamos cuantificación existencial de P:

existe $x$, $P(x)$

Cuantificación existencial se denota "$\exists x P(x)$"

$\exists$: cuantificador existencial

La proposición $\exists x P(x)$ es verdadera si $P(x)$ es verdadera para al menos un valor de $x \in D$

La proposición $\exists x P(x)$ es falsa si $P(x)$ es falsa para todo $x \in D$

Ej: $\exists x\,(x > 3)$, $D = \mathbb{R}$ es verdadero
$\exists x\,(x = x + 1)$, $D = \mathbb{R}$ es falso

Ej: ¿Cuál es el valor de verdad de $\forall x\, P(x)$ donde $P(x) = x^2 > 10$ y el dominio de discurso son los enteros positivos menores o iguales que 4?

$D = \{1, 2, 3, 4\}$

$\forall x\, P(x) = P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$

Como $P(4)$ es verdadera $\forall x\, P(x)$ es verdadera

## Leyes generalizadas de Morgan para lógica

Si $P(x)$ es una función proposicional

$$\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x\, \neg P(x)$$

Ej: $\neg(\forall x\, P(x))$ es verdadero

$\forall x\, P(x)$ es falso $\rightarrow$ $x'$ para $P(x')$ es falso
$\neg(P(x'))$ es verdadero $\Big\}$ $\exists x\, \neg P$ es verdadero

$\neg(\forall x\, P(x))$ es falso $\rightarrow$ $\exists x\, \neg P$ falso

$\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, \neg P(x)$

Ej: Niegue las siguientes proposiciones

$\forall x\,(x^2 > x)$ ; $\neg(\forall x\,(x^2 > x)) \equiv \exists x\, \neg(x^2 > x) \equiv \exists x\,(x^2 \leq x)$

$\exists x\,(x^2 = x)$ ; $\neg(\exists x\,(x^2 = x)) \equiv \forall x\, \neg(x^2 = x) \equiv \forall x\,(x^2 \neq x)$

Ej: Formalice utilizando predicados y cuantificadores:
"Todo estudiante de esta clase ha estudiado cálculo"

"Para todo estudiante x de esta clase, x ha estudiado cálculo"

$C(x)$: "x ha estudiado cálculo"

Dominio de discurso: los estudiantes de la clase

Formalización: $\forall x\, C(x)$

Ej: Formalice utilizando predicados y cuantificadores asumiendo que el dominio es el conjunto de las personas "Todo estudiante de esta clase ha estudiado cálculo"

"Para toda persona x, si la persona x es de esta clase, x ha estudiado cálculo"

$S(x)$: "x es un estudiante de esta clase"

$C(x)$: "x ha estudiado cálculo"

Formalización: $\forall x\, (S(x) \rightarrow C(x))$

**Teorema**: Proposición que se ha verificado verdadera

**Lema**: Teorema no muy interesante individualmente que es útil para probar otro teorema

**Corolario**: Teorema que deriva fácilmente de otro teorema

Demostrar que un teorema es verdadero
se debe mostrar un argumento válido que establece la verdad de un teorema

Una demostración de hipótesis, axiomas y definiciones para llegar a conclusión

Para que sea válido, cada paso debe dar una conclusión inmediatamente válida

Reglas de inferencia: sirven para extraer conclusiones a partir de afirmaciones

**Argumento**: secuencia de proposiciones escrita de forma:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

$\therefore$ = "por lo tanto"

Las proposiciones $p_1 \ldots p_n$ son premisas o hipótesis y la proposición $q$ la conclusión.

Un argumento es verdadero si todas sus premisas lo son, es decir su conclusión también.

Si no, el argumento es inválido (una falacia)

**Regla de inferencia**: Argumento válido y breve utilizado dentro de argumentos más largos como demostraciones

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***Modus Ponens*** | $p \to q$<br>$p$<br>$\therefore q$ | **Eliminación** | **a.** $p \vee q$<br>$\sim q$<br>$\therefore p$<br>**b.** $p \vee q$<br>$\sim p$<br>$\therefore q$ |
| ***Modus Tollens*** | $p \to q$<br>$\sim q$<br>$\therefore \sim p$ | **Transitividad** | $p \to q$<br>$q \to r$<br>$\therefore p \to r$ |
| **Generalización** | **a.** $p$<br>$\therefore p \vee q$<br>**b.** $q$<br>$\therefore p \vee q$ | **Demostración por división en casos** | $p \vee q$<br>$p \to r$<br>$q \to r$<br>$\therefore r$ |
| **Especialización** | **a.** $p \wedge q$<br>$\therefore p$<br>**b.** $p \wedge q$<br>$\therefore q$ | | |
| **Conjunción** | $p$<br>$q$<br>$\therefore p \wedge q$ | **Regla de contradicción** | $\sim p \to c$<br>$\therefore p$ |

Es usual que los teoremas se enuncien

Ej: "$\forall x \in D$, si $P(x)$ entonces $Q(x)$"

**Método de demostración directa** (usado para teoremas):

- Iniciar demostración suponiendo $x \in D$ (elemento arbitrario), que satisface la hipótesis $P(x)$ es verdadero
- Aplicando las definiciones previamente establecidas y las reglas de inferencia, demostrar que $Q(x)$ es verdadera

Ej: Mediante demostración directa, demuestra que si $x$ es un entero impar, $x^2$ es impar

Sea $x$ impar. $x = 2k+1$ para $k \in \mathbb{Z}$

$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$

Por lo que $x^2$ es impar

Ej: Mediante demostración directa, demuestra que la suma de dos números pares da un número par

Sean $m$ y $n$ numeros pares. $m = 2r$ y $n = 2s$ donde $r, s \in \mathbb{Z}$

$m+n = 2r+2s = 2(r+s)$

$m+n$ es par

A veces para demostrar $p \to q$ es verdadera, necesitamos reescribir $p$ como disyunción $p_1 \vee \ldots \vee p_n$. Que implica que $(p_1 \vee \ldots \vee p_n) \to q$ es verdadero

$[(p_1 \vee \ldots \vee p_n) \to q] \equiv [(p_1 \to q_1) \wedge \ldots \wedge (p_n \to q_n)]$

Lo que muestra que $p \to q$ se puede demostrar individualmente en las $n$ implicaciones (**método de demostración por división de casos**)

Ej: Usando el método de demostración por división de casos que el cuadrado de cualquier número entero impar es de la forma $8k+1$ para algún entero $k$

$n = 4q+1$ o $n = 4q+3$

1. $n^2 = (4q+1)^2 = 16q^2 + 8q + 1 = 8(2q^2+q)+1$

Donde $k = 2q^2+q \rightarrow n^2 = 8k+1$

2. $n^2 = (4q+3)^2 = 16q^2 + 24q + 9 = 8(2q^2+3q+1)+1$

Donde $k = 2q^2+3q+1 \rightarrow n^2 = 8k+1$

Demostración conseguida $\square$

Una demostración comienza con las hipótesis de un enunciado y una deducción tras otra hasta llegar a una conclusión. Este método se llama demostración indirecta y no sigue un camino fijo.

Analizaremos dos métodos de demostración indirecta

Usando contrarrecíproco

Ej: "$\forall x \in D$, si $P(x)$ entonces $Q(x)$"

"$\forall x \in D$, si $Q(x)$ es falso entonces $P(x)$ es falso"

- Iniciar demostración suponiendo $x \in D$ (elemento arbitrario), que satisface la hipótesis $Q(x)$ es falso
- Aplicando las definiciones previamente establecidas y las reglas de inferencia, demostrar que $P(x)$ es falso

Ej: Demostrar usando contrarrecíproco que si $x^2$ es entero impar $x$ es impar

Suponemos que $x$ es par.

$x = 2k$

$x^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

$x^2$ es par $\square$

## Reducción al absurdo

- Se basa en que el enunciado es verdadero o falso, no ambos
- Su punto de partida es suponer que el enunciado es falso y buscar razonar una contradicción.
    1. Suponer que el enunciado es falso (la negación del enunciado es verdadera).
    2. Demostrar que la suposición conduce a una contradicción
    3. Concluir que es verdadero

Ej: Demostrar por reducción al absurdo que $\sqrt{2}$ es irracional

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional.

Existen números $a, b \in \mathbb{Z}$ con $mcd(a,b) = 1$ donde $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ lo que implica que $a^2 = 2b^2$

$a^2$ es par por lo que $a$ también.

$a = 2c$ para $c$ entero. $b^2 = 2c^2$ por lo que $b^2$ es par y $b$ también, $b = 2d$.

Como consecuencia $mcd(a,b) = mcd(2c, 2d) > 1$, lo que contradice

$\sqrt{2}$ es irracional $\square$

# Teoria de Conjuntos

Un conjunto es una lista o colección de objetos definidos (se suele denotar con mayúsculas)

Se llama elemento de un conjunto a cada uno de los objetos que lo componen (se suele denotar con minúsculas)

- Si $x$ es un elemento de $X$. x pertenece a X : $x \in X$
- Si $x$ no es un elemento de $X$. x pertenece a X : $x \notin X$

Existen dos formas de representar los conjuntos:

- Se puede representar listando sus elementos (separados por comas y entre llaves)

Ej: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Elementos 1, 2, 3, 4 y 5

- Se puede representar describiendo las propiedades o normas

Ej: $B = \{x : x \text{ es un entero positivo}\}$ Elementos enteros positivos

Ej: $B = \{x : x \text{ es un entero positivo}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$100 \in B$ $\quad -5 \notin B$ $\quad \frac{5}{2} \notin B$ $\quad a \notin B$

Ej: $Z = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\}$

$0 \notin Z$ $\quad * \notin Z$ $\quad 1 \in Z$ $\quad x \notin Z$

Dos conjuntos A y B son iguales $(A = B)$ si tienen los mismos elementos

Los conjuntos se pueden clasificar en finitos o infinitos (Finito si contiene $n$ elementos diferentes ($n$ es un entero positivo))

Si $X$ es un conjunto finito, el número de elementos diferentes de $X$ se llama cardinal del conjunto $X$ ($\mathrm{Card}(X)$ o $|X|$)

Ej: $Z = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $Y = \{1, 2, \frac{6}{3}, 2\}$
$Z = \{1, 2\}$ $Y = \{1, 2\}$ $|Z| = |Y| = 2$ $|Z| = |Y|$

Ej: $C = \{2, 4, 6, \dots\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$ es un conjunto infinito

Ej: $D = \{2, 4, 6, \dots, 100\} = \{x \in \mathbb{N} : \text{es par}, x \leq 100\}$ conjunto finito, $|D| = 50$

Se dice que A es un subconjunto de B si todo elemento de A es también elemento de B. $\forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$. $A \subseteq B$

A no es un subconjunto de B si existe un elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$.
$\exists x (x \in A \wedge x \notin B)$. $A \nsubseteq B$

Ej: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

Ej: $A = \{1, 3, 5, \dots\}$ $B = \{5, 10, 15, \dots\}$ $C = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es un primo}, x > 2\}$
$C \subseteq A$ $B \nsubseteq A$ ($20 \in B$ y $20 \notin A$)

Ej: Todo conjunto de A: $A \subseteq A$

Dos conjuntos A y B son iguales si $A \subseteq B$, $B \subseteq A$

Sean A, B y C conjuntos. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, $A \subseteq C$

El conjunto vacío ($\emptyset$) es un conjunto que no tiene elementos

Ej: $V = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4 \text{ y } x \text{ es impar}\}$ $V = \emptyset$

Todo conjunto A tiene dos subconjuntos triviales. El vacío ($\emptyset$) y el propio (A)
Si $B \subseteq A$ y $B \notin \{A, \emptyset\}$, B es un subconjunto no trivial de A

Sea $A$ un conjunto. El conjunto potencia de $A$ ($P(A)$), es el conjunto formado por todos los subconjuntos de $A$.

- $B \subseteq A$ si $B \in P(A)$
- Si $A$ es finito y $|A| = n$, entonces $|P(A)| = 2^n$

Ej: $|A| = 3$ $\quad |P(A)| = 2^3 = 8$

$P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$

## Operaciones con conjuntos

Sean $A$ y $B$ dos conjuntos.

- La unión de los conjuntos $A$ y $B$ ($A \cup B$) es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a $A$ y $B$

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

- La intersección de los conjuntos $A$ y $B$ ($A \cap B$) es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a $A$ o $B$

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Ej: $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$ y $C = \{5,6,7,8\}$

$A \cup B = \{1,3,4,5,6\}$

$A \cup C = \{1,3,4,5,6,7,8\}$

$A \cap B = \{3,4\}$ y $A \cap C = \emptyset$

- La diferencia de los conjuntos $A$ y $B$ ($A \setminus B$) es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a $A$ y no a $B$

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

- El complemento de $A$ ($A^c$), es el conjunto de elementos que no pertenecen a $A$ (con relación al conjunto universal)

$$A^c = \{x : x \in U \wedge x \notin A\} = \{x : x \notin A\}$$

Ej: $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$ y $C=\{1,2,3,\dots\}$

$B\setminus A=\{5,6\}$ $\quad$ $A\setminus B=\{1,2\}$

$A^c=\{5,6,7,\dots\}$ $\quad$ $B^c=\{1,2\}\cup\{7,8,9,\dots\}$

Ej: Si $A\cup B=A\cup C$ ¿$B=C$?

No necesariamente.

$B\subseteq A$, $C\subseteq A$ y $B\neq C \rightarrow A\cup B=A\cup C$

- $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2\}$ y $C\{2,3\}$

Ej: Si $A\cap B=A\cap C$ ¿$B=C$?

No necesariamente.

$A\subseteq B$, $A\subseteq C$ y $B\neq C \rightarrow A\cap B=A\cap C$

- $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3\}$ y $C\{1,2,4\}$

Ej: Sean $X$ e $Y$ dos conjuntos ¿$X\setminus Y=X\cap Y^c$?

$X\setminus Y=\{x: x\in X \wedge x\notin Y\}=\{x: x\in X\wedge x\in Y^c\}=X\cap Y^c$

Ej: Sean $X$ e $Y$ dos conjuntos ¿$(X\setminus Y)\cap Y=\emptyset$?

$(X\setminus Y)\cap Y=\{x: x\in X\setminus Y \wedge x\in Y\}=\{x: x\in X\wedge x\notin Y\wedge x\in Y\}$

$=\{x: x\in X\}\cap\{x: x\notin Y\wedge x\in Y\}=\{x: x\in X\}\cap\emptyset=\emptyset$

## Diagramas de Venn

Es una representación gráfica para agrupar elementos en diferentes conjuntos y mostrar sus relaciones. Entre sus funciones está:

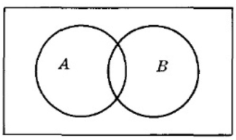
- Definir los conjuntos de elementos que forman parte del conjunto universo o el subconjunto de este.
- Determinar el conjunto o conjuntos a los que pertenece cada elemento
- Identificar los elementos que no pertenecen a ningún conjunto

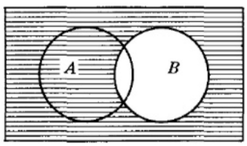
Ej: Sombrea $A \cup B$ y $A \cap B$

$A \cup B$

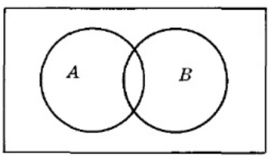
$A \cap B$

Ej: Sombrea $B^c$

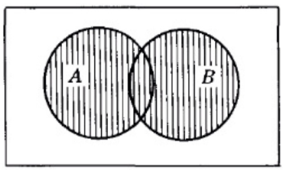




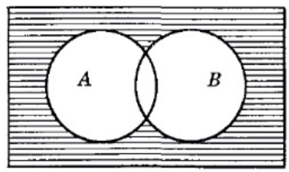
Ej: Sombrea $(A \cup B)^c$



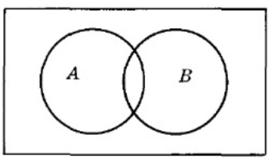
$A \cup B$



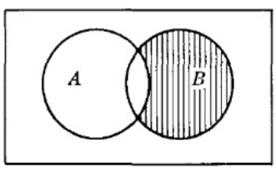
$(A \cup B)^c$



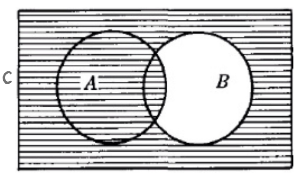
Ej: Sombrea $(B \setminus A)^c$



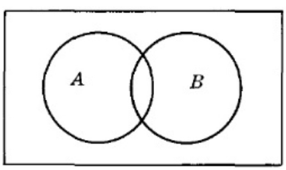
$B \setminus A$



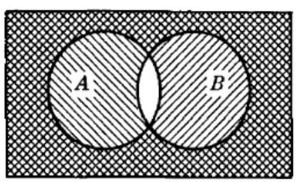
$(B \setminus A)^c$



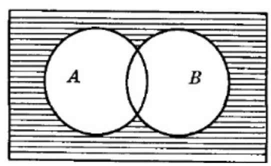
Ej: Sombrea $A^c \cap B^c$



$A^c$ y $B^c$



$A^c \cap B^c$



## Propiedades de Álgebra de Conjuntos

Dadas $A, B, C \in U$ se tiene:

- Propiedades asociativas

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

- Propiedades conmutativas

$A \cup B = B \cup A$

$A \cap B = B \cap A$

- Propiedades distributivas

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- Propiedades del elemento complementario

$A \cup A^c = U$

$A \cap A^c = \emptyset$

- Propiedades del elemento neutro

$A \cup \emptyset = A$

$A \cap U = A$

Ej: Demuestra $A \cap (B \cup C) = (A \cap C) \cup (A \cap B)$

$$A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A \wedge x \in B \cup C\} = \{x : x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\}$$

$$= \{x : (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} = \{x : x \in A \cap B \vee x \in A \cap C\}$$

$$= \{x : x \in A \cap B\} \cup \{x : x \in A \cap C\} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

## Leyes de Álgebra de Conjuntos

Dadas $A, B \in U$ se tiene:

- Leyes de idempotencia

$A \cap A = A$

$A \cup A = A$

- Leyes de acotación

$A \cup U = U$

$A \cap \emptyset = \emptyset$

- Leyes de absorción

$A \cup (B \cap A) = A$

$A \cap (B \cup A) = A$

- Leyes de involución

$(A^c)^c = A$

$\emptyset^c = U$

$U^c = \emptyset$

- Leyes de Morgan

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Ej: Demuestra $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cup B)^c = \{x : x \notin A \cup B\} = \{x : \neg(x \in A \cup B)\} = \{x : \neg(x \in A \vee x \in B)\}$

$= \{x : x \notin A \wedge x \notin B\} = \{x : x \in A^c \wedge x \in B^c\} = \{x : x \in A^c \cap B^c\} = A^c \cap B^c$

Ej: Conjunto potencia de $S = \{3, \{1, 4\}\}$

$P(S) = \{\emptyset, \{3\}, \{\{1, 4\}\}, S\}$

Ej: Demuestra $A^c \setminus B^c = B \setminus A$

$A^c \setminus B^c = \{x : x \in A^c \wedge x \notin B^c\} = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$
$= B \setminus A$

Ej: Demuestra que si $A \cap B = \emptyset$ entonces $A \subseteq B^c$

Sea $x \in A$, como $A \cap B = \emptyset$, se sigue que $x \notin B$ lo que implica que $x \in B^c$ por lo que $A \subseteq B^c$

## Cardinal de un conjunto

Si $X$ es un conjunto finito, entonces a los número de elementos distinto de $X$ se le llama cardinal del conjunto $X$ ($Card(X)$ o $|X|$)

## Principio de inclusión - exclusión

Permite obtener relaciones entre cardinales de varios conjuntos y los conjuntos resultantes de operarlos entre sí.

Considera los casos en los que los elementos de un conjunto se pueden repartir en varios subconjuntos pudiendo tener elementos en común

$|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$

$|X| = |X \setminus Y| + |X \cap Y|$ $(X = (X \setminus Y) \cup (X \cap Y)$ y $(X \setminus Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset)$

$|Y| = |Y \setminus X| + |X \cap Y|$ $(Y = (Y \setminus X) \cup (X \cap Y)$ y $(Y \setminus X) \cap (X \cap Y) = \emptyset)$

$|X \cup Y| = |X \setminus Y| + |X \cap Y| + |Y \setminus X|$

Como consecuencia:

$$|X \cup Y| = |X \setminus Y| + |X \cap Y| + |Y \setminus X| = (|X| - |X \cap Y|) + |X \cap Y| + (|Y| - |X \cap Y|)$$
$$= |X| + |Y| - |X \cap Y|$$

$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$

$|X_1 \cup \ldots \cup X_n| = \sum_{1 \le i \le n} |X_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |X_i \cap X_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |X_i \cap X_j \cap X_k|$
$- \ldots + (-1)^{n+1} |X_1 \cap \ldots \cap X_n|$

# Combinatoria

Combinatoria o análisis combinatorio, técnica que permite saber cuántos objetos o elementos hay en un conjunto sin tener que conocerlos

Principios o técnicas de recuento:

- Principio de Adición: se traduce en la técnica por casos, si las tareas $T_1, \dots, T_n$ se pueden realizar, de $t_1, \dots, t_n$ maneras distintas de realizar una de ellas.

  En términos de conjuntos, si $X_1, \dots, X_n$ son conjuntos finitos y disjuntos dos a dos, el cardinal de $X_1 \cup \dots \cup X_n$ es la suma de los cardinales de cada conjunto. $|X_1 \cup \dots \cup X_n| = |X_1| + \dots + |X_n|$

Ej: De cuantas maneras se puede obtener 5, 7 o 9 con dos dados (azul y rojo)

$X_5 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

$X_7 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$X_9 = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

$|X_5 \cup X_7 \cup X_9| = |X_5| + |X_7| + |X_9| = 4+6+4 = 14$

Ej: Se lanzan cuatro monedas ¿Cuantas formas hay de conseguir almenos dos caras?

$A_2 = \{(c,c,x,x),(c,x,c,x),(x,c,c,x),(x,c,x,c),(x,x,c,c),(c,x,x,c)\}$

$A_3 = \{(c,c,c,x),(c,c,x,c),(c,x,c,c),(x,c,c,c)\}$

$A_4 = \{(c,c,c,c)\}$

$|A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_2| + |A_3| + |A_4| = 6+4+1 = 11$

- Principio de multiplicación. Se traduce en la técnica de recuento secuencial. Supongamos que una tarea requiere realizar sucesivamente las tareas $T_1, \dots, T_n$. Si la tarea $T_1$ puede realizarse de $t_1$ formas, y para $i \in \{2, \dots, n\}$, la tarea $T_i$ puede realizarse de $t_i$ formas, despues de haber realizado las tareas $T_1, \dots T_{i-1}$, entonces hay $t_1 \dots t_n$ formas de completar la tarea.
En términos de conjuntos, si $X_1, \dots, X_n$ son conjuntos finitos, entonces el cardinal del producto cartesiano $X_1 \times \dots \times X_n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}$ es el producto de cardinales de cada conjunto
$|X_1 \times \dots \times X_n| = |X_1| \cdot \dots \cdot |X_n|$

Ej: Si lanzamos tres dados distintos ¿Cuantos resultados son distintos?
$|X \times X \times X| = |X| \cdot |X| \cdot |X| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$

Ej: Una empresa identifica las máquinas con un número formado por dos letras, dos dígitos, otras dos letras y 4 dígitos más. ¿Cuantos números son posibles? (Alfabeto de 26)
$A \times A \times D \times D \times A \times A \times D \times D \times D \times D = 26^4 \cdot 10^6 = 456976 \cdot 10^6$

Ej: María piensa ir a comer al restaurante A o B. Sabiendo que en el A hay 3 entrantes, 4 segundos y 3 postres y en el B 2 entrantes, 3 segundos y 4 postres ¿Cuantas formas tiene de elegir su menú?
$|A_1 \times A_2 \times A_3| = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$
$|B_1 \times B_2 \times B_3| = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
$36 + 24 = 60$

- Principio de las Cajas (Dirichlet o Palomar) Si se distribuyen $n$ objetos de $m$ cajas, siendo $n > m \cdot t$, entonces por lo menos en una de las cajas habrá mínimo $t+1$ objetos

Ej: Se distribuyen 17 objetos en 5 cajas, al menos una caja contiene $4 = 3+1$ objetos ($n = 17$, $m = 5$ y $t = 3$, $17 > 5 \cdot 3$)
Si en cada caja tenemos 3 objetos sobran 2

Ej: Demuestra que en un conjunto de 9 números enteros, por lo menos dos tienen como diferencia un múltiplo de 8.
- Sean $a = 8q + r$ y $b = 8q' + r'$ donde $r, r' \in \{0, 1, \dots 7\}$
- Si $r = r'$, entonces $a-b$ es multiplo de 8
- Consideramos 8 cajas $C_0, C_1, \dots C_7$ de modo que cada número de la forma $8q + r$ pertenece a $C_r$
- Como hay 8 cajas y 9 números, concluimos que por lo menos dos de los nueve números están en la misma caja. Por ello la diferencia entre ellos es múltiplo de 8

Ej: Demuestra que en toda la familia de 7 personas tiene que haber 2 cuya diferencia de edad sea múltiplo de 10
- Sean $e_1, \dots, e_7$ las edades
- Sea $T = \{\{0\}, \{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}\}$
- Para todo $S \in T$, sea $C_S$ la caja formada por los números pertenecientes a $\{e_1, \dots, e_7\}$ cuya unidad pertenece al conjunto $S$
- Habrá al menos una caja con dos números $x, y \in \{e_1, \dots e_7\}$ que satisfacen que $x+y$ o $x-y$ es múltiplo de 10

Dado un conjunto de n objetos ¿Cuántas colecciones de K objetos se pueden formar eligiendo entre los n objetos?

- Depende de si importa o no el orden con el que se coleccionan los objetos de K.
- Esto da lugar a 4 modelos de respuesta variaciones, variaciones con repetición, combinaciones y combinaciones con repetición

Sea X un conjunto formado por n objetos y $r \leq n$. Una r-permutación de X es una lista ordenada de r objetos distintos elegidos entre los n objetos de X.

- Dos permutaciones son distintas si difieren en alguno de sus elementos o teniendo los mismos elementos, difieren en el orden en que están colocados

Ej: Si $X = \{a, b, c, d\}$

Ej de 1-permutación: a, b, c, d

Ej de 2-permutaciones: ab, bc, cd, dc

Ej de 3-permutaciones: abc, bcd, cda, dab

Ej de 4-permutaciones: abcd, bcda, cdab, dabc

Ej: Determina el número de 3-permutaciones del conjunto $X = \{a, b, c, d, e, f\}$

$n = |X| = 6$ y $r = 3$

Hay 6 opciones de primer número, 5 del segundo y 4 del tercero

$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Sea X un conjunto de cardinalidad n. El número de variaciones de n elementos tomados de r en r del conjunto:

$$V(n,r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

* $0! = 1$ y $n! = n(n-1)!$

Ej: En un concurso participan 15 personas y se opta a 3 premios

a) ¿Cuántas formas de escoger el primero, segundo y tercero existen?

$15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$

b) ¿Cuántas formas de escoger el primero, segundo y tercero existen pudiendo dejar uno de los premios libres?

1) $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$

2) $V(15,3) + 3V(15,2) = 15 \cdot 14 \cdot 13 + 3 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$

Sea X un conjunto formado por n objetos:

- Una permutación es una n-permutación de X, lista ordenada de los n objetos distintos de X
- Una permutación circular, permutación en la que importa la posición relativa de unos objetos respecto a otros (cuando n objetos se tienen que ordenar en círculo, dos permutaciones son iguales cuando una se puede obtener de la rotación de la otra)

Sea X un conjunto formado por n objetos distintos

- El número de permutaciones de X es $P_n = V(n,n) = n!$
- El número de permutaciones circulares de X es $PC_n = (n-1)!$

Ej: En el cine solo hay 6 sitios libres en fila 3 y 3 en fila 10. Un grupo de 9 amigas llegan a sea

a) ¿De cuantas formas pueden sentar a las amigas?

$P_9 = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$

b) Marc se quiere sentar en la fila 3. ¿De cuantas formas pueden sentar a las amigas?

$6 \cdot 8! = 6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120960$

Ej: ¿Cuantas permutaciones del conjunto formado por A, B, C, D, E, F, G, H contiene la cadena A, B, C?

$9 - ABC = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Ej: ¿De cuantas formas se pueden sentar 10 personas en una mesa redonda?

$P_9 = 9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$

Sea X un conjunto formado por n objetos. Una r-permutación con repetición de X es una lista ordenada de r objetos no necesariamente distintos extendidos entre los n objetos de X

Sea X un conjunto de cardinalidad n. El número de variaciones con repetición de n elementos tomados de r en r del conjunto X es:

$VR(n,r) = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{r} = n^r$

Ej: El código ISBN consta de 9 dígitos numéricos.

a) ¿Cuántos libros permite el código?

$VR(10,9) = 10^9$

b) Los dos primeros dígitos se identifican con el idioma ¿Cuántos libros se permiten de un idioma?

$9-2=7$. $VR(10,7) = 10^7$

c) ¿Cuántos libros tienen dígitos distintos en posiciones 3,4,5,6?

$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 10^3 = 5040000$

Sea X un conjunto formado por n objetos distintos y $r \leq n$ un número natural. Una r-combinación de X es una colección de r objetos distintos elegidos entre los n objetos de X. Dos r-combinaciones son distintas si difieren en alguno de sus elementos.

Ej: Si $X = \{a, b, c, d\}$

Ej de 1-combinación: a, b, c, d

Ej de 2-combinaciones: ab, ac, ad, bc, bd, cd

Ej de 3-combinaciones: abc, abd, acd, bcd

Ej de 4-combinaciones: abcd

Ej: Determina el número de 3-combinaciones del conjunto $X = \{a, b, c, d, e, f\}$

$n = |X| = 6 \quad r = 3$

Hay $V(6,3)$ formas de obtener una 3-permutación y $P_3 = V(3,3)$ formas de reordenar cada una de las 3-permutaciones

$$\frac{V(6,3)}{V(3,3)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$$

Sea X un conjunto de cardinalidad n. El número de combinaciones de n elementos tomados de r en r del conjunto de X es

$$C(n,r) = \frac{V(n,r)}{V(r,r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$C(n,r)$ es el número combinatorio o binomial y se representa $\binom{n}{r}$

Propiedades de los números binomiales:

Simetría: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Adición: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

Ej: Se presentan 15 personas a un concurso ¿De cuantas formas se puede repartir el premio que pueden compartir hasta 3 personas? (Puede quedar desierto)

Para cada $r \in \{0,1,2,3\}$