SERIES

Alejandro Gómez Amaro

Índice

Introducción histórica

En la antigua Grecia, matemáticos como Tales de Mileto y Pitágoras empezaron a explorar la noción de infinito y la convergencia de secuencias numéricas. Posteriormente, Eudoxo y Arquímedes sentaron las bases de las sumas infinitas.

Durante el Renacimiento, los matemáticos europeos ampliaron y redescubrieron las ideas griegas contribuyendo al desarrollo de expresiones algebraicas infinitas.

En el siglo XVII, Isaac Newton y Gottfried Wilhelm, desarrollaron el cálculo. Esto proporcionó herramientas para analizar y entender las series matemáticas.

En el siglo XIX se formalizo aún más el análisis matemático. Augustin-Louis Cauchy y Karl Weierstrass establecieron definiciones de convergencias rigurosas. De esta forma se crearon unas bases sólidas para el estudio de series.

Series de Números Reales

Partiendo de la fracción $\frac{1}{9}$, la cual se escribe en forma decimal de manera periódica:

$$\frac{1}{9} = 0{,}111111\overline{1},$$

lo que significa que el número 1 se repite infinitamente. Podemos interpretarlo de una forma distinta donde:

$$\frac{1}{9} = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + 0{,}00001 + 0{,}000001 + \cdots$$

$$= 0{,}1 + 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + 0{,}1^4 + 0{,}1^5 + 0{,}1^6 + \cdots$$

que por comodidad y simplificación expresamos como:

$$\frac{1}{9} = \sum_{n=1}^{\infty} (0{,}1)^n$$

este "sumatorio infinito" nos quiere decir que cuantos más y más términos añadamos se ira acercando más al número real de $\frac{1}{9}$.

Dada una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ podríamos sumar términos de forma:

$$S_1 = x_1$$

$$S_2 = x_1 + x_2 = S_1 + x_2$$

$$S_3 = x_1 + x_2 + x_3 = S_2 + x_3$$

$$S_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = S_3 + x_4$$

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ \dots \ + x_{n-1} + x_n = S_{n-1} + x_n$$

o lo que es lo mismo, dada la sucesión $\left\{\frac{1}{4^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$S_1 = \frac{1}{4}$$

$$S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} = \frac{5}{16}$$

$$S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} = \frac{21}{64}$$

$$S_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} = \frac{85}{256}$$

$$S_5 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} = \frac{341}{1024}$$

y seguiría de manera infinita. Si nos fijamos, podemos deducir que cuando se suman más y más términos de la sucesión este se va aproximando más a 1. De lo que podemos sacar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Esto nuevo concepto se llama **serie**, es el límite de una sucesión de sumas parciales. En el anterior ejemplo, cuantos más términos sumamos estos van tendiendo a $\frac{4}{3}$.

Por lo general, una sucesión cualquiera $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ se asocia a la serie:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

- Convergencia

Si la sucesión de sumas $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ converge en un número S, decimos que la serie $\sum_{k=1}^{n} x_k$ **es convergente** (o **converge a S**). Lo que significa que S es la suma de la serie y se escribe:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Esta es la **definición de serie convergente**.

Por ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

Lo que significa que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ converge a 1.

Si la sucesión de sumas $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ cuyo $\lim_{n\to\infty} S_n$ no exista, decimos que la serie **es divergente** (o **diverge**).

Por ejemplo:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k^2 \;= \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

La que significa que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$ diverge.

- Tipos de series

Se pueden clasificar en distintos tipos entre los que destacamos:

- **Series geométricas**:
  Se llama serie geométrica de razón r y termino x $\in\ \mathbb{R} - \{0\}$ a la serie $\sum xr^{n-1}$. Que para $r \neq 1$ verifica que la sucesión de sumas parciales es:

$$S_n = x + xr + xr^2 + \cdots + xr^{n-1} = x\frac{1-r^n}{1-r}$$

la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r y término a.
Por ello, podemos estudiar la convergencia distinguiendo los siguientes casos:

- Si $|r| < 1$, $(r^n) \to 0$, por lo que:

$$S_n = x\frac{1-r^n}{1-r} = x\frac{1-0}{1-r} = \frac{x}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} xr^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} xr^n = \frac{x}{1-r}$$

- Si $r > 1$, $(r^n) \to +\infty$, por lo que:

$$S_n = x\frac{1-r^n}{1-r} = x\frac{1-\infty}{1-r} = +\infty$$

la serie diverge.

- Si $r < -1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} xr^{n-1}$ oscila entre $+\infty\ y - \infty$
- Si $r = 1$:

$$S_n = x + x + x + \cdots + x = nx$$

y la serie diverge de forma positiva.

- Si $r = -1$:

$$S_n = x\frac{1-(-1)^n}{2}$$

llegando a la siguiente conclusión:

$$S_{2n} = 0 \; y \; S_{2n-1} = x$$

Por lo que la función oscila entre 0 y x.

Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 * 3^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 * 3^n = \frac{4}{1-3} = -2$$

La serie converge en -2.

- **Series Telescópicas**:
  Se dice que una serie es telescópica si $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n + \cdots$, asociado a una sucesión cualquiera $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$ verifica que $x_n = a_n - a_{n+1}$ donde $n \in \mathbb{N}$. Esta serie es convergente solo si a_n tiene límite finito, donde se cumple que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$$

Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2_n - 2_{n+1}) = 2 - \lim_{n\to\infty} 2_n = +\infty$$

La serie diverge.

- **Series armónicas**:
  Las series armónicas son aquellas cuyo término enésimo es $x_n = \frac{1}{n}$. Estas son divergentes a pesar de que su término general tienda a 0:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = +\infty$$

Dado $x \in \mathbb{R}$, se llama serie armónica de exponente x a la serie:

$$\sum n^{-x} = \sum \frac{1}{n^x}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^x} + \cdots + \frac{1}{n^x} + \cdots \text{ es } \begin{cases} convergente \; si \; x > 1 \\ divergente \; si \; x \leq 1 \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=+\infty$$

La serie diverge.

- **Series de términos positivos**:
  Se conocen como series de términos positivos a las series cuyo término enésimo $x_n = na$ y donde todos los valores pertenecen a los números naturales. Y se representa como $\sum a$.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(a+2a+\cdots+na) = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+na)na}{2} = +\infty$$

por lo que es divergente.

Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}4n = \lim_{n\to\infty} 4n = \lim_{n\to\infty}(4+8+\cdots+4n) = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+4n)4n}{2} = +\infty$$

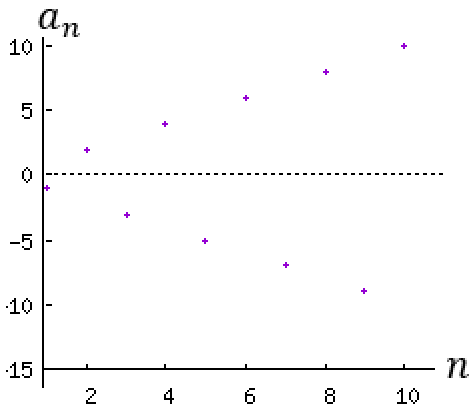
La serie diverge.

- **Series alternadas**:
  Se conocen como series de términos alternados a las series cuya forma es $\sum_{n=1}^{\infty}(-a)^n$, en este tipo de serie los términos son alternativamente positivos y negativos, a lo que llamamos una serie **oscilante**.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(-a+(-a)^2+(-a)^3+\cdots+(-a)^n)$$
$$= -a+a^2-a^3+\cdots+(-a)^n$$

Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n = \lim_{n\to\infty}(-1+(-2)^2+(-3)^3+\cdots+(-1)^n)$$
$$= -1+2-3+\cdots+n(-1)^n$$



En la gráfica podemos ver una representación de las oscilaciones de dicha serie.

La serie oscila.

- Criterio Integral

La mayoría de las veces no se consigue una suma exacta de una serie. Es más, en muchas de ellas no está claro decidir si convergen o divergen, por ello se recurre a criterios indirectos de convergencia.

Entre ellos encontramos el criterio integral, en el cual, si partimos de una función positiva y decreciente $a_n = f(n)$, de donde obtenemos una serie de términos positivos:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$$

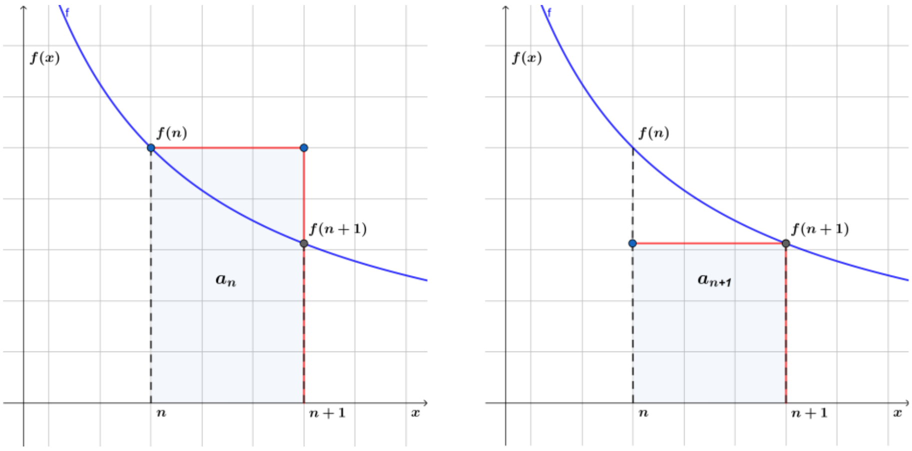
La suma de dicha serie es la suma de las áreas de un conjunto infinito:

$$\int_k^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

Algunas de estas integrales divergen y otras convergen por lo que:

$$\int_k^{\infty} f(x)dx \; diverge \; \rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \; diverge$$

$$\int_k^{\infty} f(x)dx \; converge \; \rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n \; converge$$



Función decreciente en el intervalo $[1, \infty]$ (curva azul)
Figura izquierda: Área del valor enésimo de la sucesión a_n con altura $f(n)$
Figura derecha: Área del valor enésimo de la sucesión a_{n+1} con altura $f(n+1)$

En caso de que converja, además obtenemos dos cotas (inferior y superior) de tal manera que:

$$\int_k^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=k}^{\infty} a_n \leq a_k + \int_k^{\infty} f(x)dx$$

Por ejemplo:

$$\int_3^{\infty} \frac{2}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{7}$$

Por lo que como $\int_3^{\infty} \frac{2}{(2x+1)^2}dx$ converge, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$ también converge.

$$a_3 = \frac{2}{49}$$

$$\frac{1}{7} \leq \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} \leq \frac{9}{49}$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^2} \in \left[\frac{1}{7}, \frac{9}{49}\right]$$

- Criterios de comparación

Principalmente encontramos criterios que nos permiten comparar series dada otra con carácter convergente o divergente conocido.

Supongamos que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \, converge \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, converge$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, diverge \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, diverge$$

Esto es debido a que debido a los parámetros anteriormente mencionados y lo podemos justificar como:

1. Si b_n converge a B :

$$0 \leq S_k \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_k \leq b_1 + b_2 + \cdots + b_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

   Para $n \geq 1$. Por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ esta acotada, lo que significa que debe converger en un punto A.

2. Si a_n diverge, al no ser negativos los términos de la serie:

$$\lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_k) \geq \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = \infty$$

   Por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también es divergente.

- Convergencia absoluta

Los criterios mencionados anteriormente (Criterio integral y criterio de comparación) solo se aplican para términos positivos. Por ello, que hacemos sin nos encontramos una serie de términos positivos y negativos (no alternados).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} = \sin 1 + \frac{\sin 2}{8} + \frac{\sin 3}{27} + \frac{\sin 4}{64} + \cdots$$

Contiene números positivos y negativos, pero no alternan sus signos. Para ello calculamos los 6 primeros términos y comprobamos. Para series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, podemos comprobarlo viendo si converge para los valores absolutos $(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|)$. Si lo es, se dice que esta serie es **absolutamente convergente** (o tiene **convergencia absoluta**). En este caso, podríamos aplicar criterios para series de términos positivos.

Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Deducimos que es una serie geométrica convergente $\left(|r| = \frac{1}{2} < 1\right)$ por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ es absolutamente convergente.

- ## Criterio del cociente

El criterio del cociente es uno de los métodos más eficaces para llegar a la convergencia absoluta. Es aplicable a series muy diversas, entre las que destacamos las series de potencias. Dado $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con $a \neq 0$ para todo n. Suponemos que:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

Donde

1. Si $L < 1$, la serie es absolutamente convergente.
2. Si $L > 1$, (o si $L = \infty$), la serie diverge.
3. Si $L = 1$, no se llega a ninguna conclusión.

Por ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{e^n} \rightarrow \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{e^{n+1}}}{\frac{n!}{e^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!\, e^n}{n!\, e^{n+1}} = \frac{1}{e} \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{1} = +\infty$$

La serie diverge por el criterio del cociente.

Series de potencias

Vamos a ampliar el estudio a series con términos definidos por funciones de variable x. Este tipo de series abren muchísimas posibilidades, desde las derivadas e integrales hasta aproximar valores de funciones o resolver ecuaciones diferenciales. También podemos definir funciones mediante **series de potencias convergentes**. Muchas funciones relevantes se definen mediante series, por ejemplo, las de Bessel $\left(J_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(1-v+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-v} \right)$.

Para introducir este nuevo término partiremos de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = 1 + (x-2) + (x-2)^2 + \cdots + (x-2)^n + \cdots$$

Sabemos que es una serie geométrica de razón (x-2), por ello sabemos que será convergente si $|r| = |x-2| < 1$ y divergente si $|r| = |x-2| \geq 1$. Para $|x-2| < 1$, la serie converge a:

$$\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-(x-2)} = \frac{1}{3-x}$$

por lo que para cada x en el intervalos (1,3) tenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n = \frac{1}{3-x}$$

Para el resto de los valores de x, la serie es divergente.

Por ello, llegamos a la conclusión de que en general, cualquier serie que cumple:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + a_3(x-b)^3 + \cdots$$

con potencias de (x-b), se llama **serie de potencias** (centrada en b) y con constantes $a_n, n = 0,1,2, \ldots$ llamadas coeficientes de la serie. Lo que significa que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-b)^n$ se define como una función de x. Su dominio es el conjunto de todos los x para los que la serie converge. Principalmente para investigar su convergencia utilizaremos el criterio del cociente.

- Series de Taylor

Las series son un instrumento esencial para explorar y calcular con funciones como $\sin x$, $\cos x$, $\log x$, e^x ...

Supongamos que partimos de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ con radio de convergencia $r > 0$. Lo que significa que esta serie converge absolutamente en $(b-r, b+r)$ a una función f.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + a_3(x-b)^3 + a_4(x-b)^4 + \cdots$$

Derivando obtenemos que para todo $x \in (b-r, b+r)$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(x-b)^{n-1}$$

$$= a_1 + 2a_2(x-b) + 3a_3(x-b)^2 + 4a_4(x-b)^3 + \cdots$$

Si derivamos de nuevo obtenemos que para todo $x \in (c-r, c+r)$:

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)(x-b)^{n-2}$$

$$= 2a_2(x-b) + 3 * 2a_3(x-b) + 4 * 3a_4(x-b)^2 + \cdots$$

También:

$$f'''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)(x-b)^{n-} = 3 * 2a_3 + 4 * 3 * 2a_4(x-b) + \cdots$$

Y así sucesivamente. Si igualamos $x = b$ en cada una de estas derivadas sacamos que:

$$f(b) = a_0$$

$$f'(b) = a_1$$

$$f''(b) = 2a_2$$

$$f'''(b) = 3!\, a_3$$

Con lo que podemos obtener una formula general tal que:

$$f^n(b) = n!\, a_n$$

Despejando a_n :

$$a_n = \frac{f^n(b)}{n!}, \text{ con } n = 0,1,2, \ldots$$

Demostramos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n$ es una serie convergente con radio $r > 0$. Esta converge a una función f:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(b)}{n!}(x-b)^n \text{, } para\ x \in (b-r, b+r)$$

Si nos fijamos desde la función f, que es infinitamente derivable. Podemos conseguir la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(b)}{n!}(x-b)^n$$

que llamamos **serie de Taylor** de f. Esto nos deja dos incógnitas:

- ¿Una serie así es convergente? En cuyo caso, ¿cuál es su radio de convergencia?
- Si la serie es convergente ¿A que función converge?

La primera pregunta se puede resolver en general, usando el criterio del cociente. La segunda requiere de un análisis mayor.

Por ejemplo:

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x \ldots f^n(x) = e^x, para\ k = 0,1,2 \ldots$$

Por ello, la serie de Taylor es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^0}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Por el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!}$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = |x|(0) = 0 < 1\ para\ todo\ x$$

Por lo que deducimos que la serie converge para todo número real x. Pero no sabemos a que función converge.

- **Demostración convergencia series de Taylor**

Para demostrar que las series de Taylor convergen a la función que buscamos utilizaremos la función $f(x) = e^x$ centrada en $x = 0$ y que converge a e^x.

La función de Taylor de dicho valor es:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{e^z}{(n+1)!}x^{n+1}$$

donde z es un punto entre $0\ y\ x$ (dependiente de n). Como buscamos una cota para e^z. Si $x > 0$, entonces $0 < z < x$. Llegando a la conclusión:

$$e^z < e^x$$

Y si $x \leq z \leq 0$:

$$e^z \leq e^0 = 1$$

Forzamos que la mayor de las cotas se llame M $(M = máx\{e^x, 1\})$. Por lo que para cualquier x y n tenemos:

$$e^z \leq M$$

De donde sacamos la estimación de error:

$$|R_n(x)| = \frac{e^z}{(n+1)}|x|^{n+1} \leq M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Para probar que la serie de Tayor converge a e^x usamos la estimación de error para demostrar que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todo x. Como no podemos calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ consideramos la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Donde aplicando el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0$$

Para todo x, donde la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ Converge absolutamente para todo x.

Por lo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Por lo que confirmamos que $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para todo x. Y se confirma que la serie de Taylor converge a e^x:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

- **Series de Taylor de funciones elementales**

Por comodidad, existe una tabla en la que están desarrolladas en serie de Taylor las funciones más utilizadas, las funciones elementales.

Serie de Taylor	Intervalo de contingencia
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$	$(-\infty, \infty)$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$	$(-\infty, \infty)$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$	$(-\infty, \infty)$
$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots$	$(0,2]$
$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$	$(-1,1)$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$	$(-1,1)$
$(1+x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!} x^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$	$(-1,1)^a$

Una vez se conoce la serie de Taylor de una función, se pueden deducir sus desarrollos de Taylor de otras funciones por sustitución.

- Series de Fourier

Muchos fenómenos naturales son periódicos (la luz, el sonido…). Para estos fenómenos las series de Taylor están limitadas. Si miramos alguna gráfica de polinomios de Taylor de funciones periódicas y nos alejamos del punto b donde se centra el desarrollo, la diferencia entre el polinomio y la función crece. Por ello se dice que los polinomios de Taylor son solo fiables localmente.

Una función es periódica con un período $T > 0, f(x+T) = f(x)$ en todo x en el dominio de f. Vamos a verificar la periodicidad en 2π. Para cualquier entero n, sea $f(x) = \sin nx$.

$$f(x+2\pi) = \sin[n(x+2\pi)] = \sin(nx + 2n\pi) = \sin(nx) = f(x)$$

De la misma forma podemos demostrar que cos es 2π periódico.

Por ello si queremos representar funciones periódicas lo hacemos de forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

A lo que se llama **series de Fourier**. Si la serie converge, convergerá la función periódica de período 2π, ya que cada 2π esta se repite. Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots$ y $b_1, b_2, \dots$ Los llamados coeficientes de Fourier. El primer término de la serie $\left(\frac{a_0}{2}\right)$ se refiere a la simplificación de las formulas posteriores para el calculo de los coeficientes. Esto nos hace plantearnos varias cuestiones:

- ¿Qué funciones se pueden desarrollar como leyes de Fournier?
- ¿Cómo se calculan los coeficientes?
- ¿Convergen las series de Fourier? ¿A qué función?

Supongamos que una serie de Fourier converge en el intervalo $[-\pi, \pi]$, representándose:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

donde f debe ser periódica fuera del intervalo. Si integramos respecto el intervalo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx]$$

para todo $n = 1,2,3 \dots$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx = \frac{1}{n} \sin(nx)|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}[\sin(n\pi) - \sin(n\pi)] = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, dx = \frac{1}{n} \cos(nx)|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}[\cos(n\pi) - \cos(n\pi)] = 0$$

lo que reduce la ecuación a:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = a_0 \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

Partiendo otra vez de la ecuación inicial, esta vez multiplicada por $\cos(k\pi)$ y después integrando:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)\, dx]$$

Donde $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\, dx = 0$ para $k = 1,2, \ldots$

Por lo que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx)\, dx\, para\, n = 1,2, \ldots y\ para\ k = 1,2, \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx)\, dx \begin{cases} 0\ si\ n \neq k \\ \pi\ si\ n = k \end{cases}$$

Como todos los términos son 0 menos $k = n$:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx\ \ para\, n = 1,2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\ \ para\, n = 1,2, \ldots$$

Estas son las conocidas como **formulas de Euler-Fourier**.

Bibliografía

- *Cálculo Volumen I* (traducido de *Calculus* de Robert T. Smith y Roland B. Minton).
- *Cálculo. Una variable* (traducido de *Calculus. Singles Variable* de Jon Rogawski).
- Matemáticas Visuales : http://www.matematicasvisuales.com/html/analisis/series/integraltest.html .
- Cálculo Diferencial e Integral II : https://blog.nekomath.com/calculo-diferencial-e-integral-ii-prueba-de-la-integral/ .
- Apuntes de cálculo de distintas universidades andaluzas
  - Universidad de Almería : https://w3.ual.es/~mramirez/relaciones/Inf_Tema_3.pdf
  - Universidad de Jaén : http://www4.ujaen.es/~angelcid/Archivos/An_Mat_ESTADISTICA/Apuntes/T2_Sucesiones_Series.pdf
  - Universidad de Granada : https://www.ugr.es/~rpaya/documentos/CalculoI/2013-14/Series.pdf
  - Universidad Pablo de Olavide (no tienen acceso online).