MATEMÁTICA DISCRETA

Ecuaciones Diofánticas Lineales

Definición

Una *ecuación diofántica lineal en dos variables* es una ecuación de la forma:

$$ax + by = c$$

en donde $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

- El objetivo es encontrar las soluciones enteras para las incógnitas x e y de la ecuación $ax + by = c$.
- Geométricamente, significa encontrar los puntos (x^*, y^*) en el plano de coordenadas enteras que estén situados sobre la recta $ax + by = c$.

Teorema

La ecuación diofántica $ax+by=c$ admite solución si y sólo si $mcd(a,b) \mid c$.

Demostración:
Primeramente consideremos que existen $x,y \in \mathbb{Z}$ tal que $ax+by=c$.
Como $mcd(a,b) \mid a$ y $mcd(a,b) \mid b$, entonces $mcd(a,b) \mid ax+by$. Como $ax+by=c$, se obtiene que $mcd(a,b) \mid c$.

Finalmente, asumamos que $mcd(a,b) \mid c$. Por definición, existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $mcd(a,b) \cdot d = c$.
Si $c=0$, entonces $x=y=0$ es solución de la ecuación $ax+by=c$.
Si $c \neq 0$, entonces existen $u,v \in \mathbb{Z}$ tal que $au+bv=mcd(a,b)$.
Multiplicando la ecuación por d se obtiene

$$a(ud)+b(vd)=mcd(a,b)\cdot d=c$$

Por tanto, $x=ud$ e $y=vd$ es solución de la ecuación $ax+by=c$.

Ejemplo

Para cada declaración, diga si es V o F.

- La ecuación diofántica $2x+4y=5$ no tiene soluciones. V
- La ecuación diofántica $2x+3y=10$ si tiene soluciones. V
- La ecuación diofántica $24x+16y=180$ no tiene soluciones. V

Método de Resolución

Consideremos la ecuación diofántica $ax+by=c$. Entonces

- Si $mcd(a,b)$ no divide a c, entonces la ecuación no tiene solución.
- Si $mcd(a,b) \mid c$, entonces
  - la ecuación tiene infinitas soluciones enteras, y
  - Si (x_0,y_0) es una solución particular, entonces todas las soluciones vienen dadas como:

$$\left.\begin{array}{rl} x = & x_0 + \frac{bk}{mcd(a,b)} \\ y = & y_0 - \frac{ak}{mcd(a,b)} \end{array}\right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

  Una solución particular se obtiene con ayuda del algoritmo de Euclides y la identidad de Bézout.

Ejercicio

¿Admite soluciones la ecuación diofántica $40x + 16y = 180$? En caso afirmativo, obtenga todas las soluciones.

Solución:

Como $mcd(40, 16) = 8$ y 8 no divide a 180, entonces la ecuación diofántica $40x + 16y = 180$ no tiene soluciones.

Ejercicio

¿Admite soluciones la ecuación diofántica $10x+6y=104$? En caso afirmativo, obtenga todas las soluciones.

Solución:

Como $mcd(10,6)=2$ y $2 \mid 104$, entonces la ecuación diofántica $10x+6y=104$ sí tiene soluciones.
// Es necesario encontrar una solución particular
Por Identidad de Bezout: $10u+6v=2 \quad (1)$.
Por Algoritmo de Euclides: $2=-10+2\cdot 6 \quad (2)$.

Multiplicando la ecuación (2) por $104/mcd(10,6)=52$, se obtiene $104=-52\cdot 10+104\cdot 6$. Sol. particular: $(x_0,y_0)=(-52,104)$.

$$\left.\begin{array}{rl} x= & x_0+\frac{bk}{mcd(a,b)} \\ y= & y_0-\frac{ak}{mcd(a,b)} \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{rl} x= & -52+3k \\ y= & 104-5k \end{array}\right\}, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ejercicio

Juan arregla cañones de proyección y también compra camisetas a una ONG. Por cada cañón arreglado gana 9 euros y por cada camiseta paga 32 euros. ¿Cuántas formas tengo de obtener un superávit de 21 euros?

Solución:

x: número de cañones arreglados.

y: número de camisetas compradas.

Hipótesis: $9x - 32y = 21, \quad x, y \geq 0.$

Como $mcd(9, -32) = mcd(9, 32) = 1$ y $1 \mid 21$, entonces la ecuación sí tiene soluciones.

$$-147 \cdot 9 + 42 \cdot 32 = 21$$

Sol. particular: $(x_0, y_0) = (-147, -42)$.

Sol. general: $(x, y) = (-147 - 32k, -42 - 9k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Como $x, y \geq 0$, entonces $k \leq -5$. Por tanto:

Sol. problema: $(x, y) = (-147 - 32k, -42 - 9k)$, $k \in \{z \in \mathbb{Z} : z \leq -5\}$.