Estructuras de Datos

EEDD - GRADO EITABIASHASHORMATICA - UCO

ChangeLog

24/4/2025

- Adaptar a usar iteradores.
- Mejoras estéticas.

25/4/2025

- Añadido functor Key2Int al crear una tabla hash.
- Corregir diseño del algoritmos usando iteradores.

29/4/2025

- Añadidos diseños de algoritmos para encadenamiento.
- Añadidos diseños para iterador.

30/4/2025

- Corregido Hash Table::insert para encadenamiento. Debe devolver un iterador.
 Corregido Hash Table::end(). Debe devolver un iterador al final de la cadena de la última posición.
- Corregido nombre atributo num used entries en diseño de HashTable en direc. abierto.
- Corregida especificación de TableEntry eliminando operación no necesaria "setEmpty".

Contenidos

- Definición de Tabla Hash.
- Diseño de funciones hash.
- Técnicas para la resolución de colisiones.

EEDD - GRADO EN ING. INFORMATICA - UCO

Motivación

- Se está diseñando un detector de ataques DOS ("Denial Of Service") para un servidor (por ejemplo DNS, web, mail, sshd ...).
- Para ello se rastrea, cada segundo, un log del EE sistema con las ip's que han accedido al servicio - UCC durante la última hora.
 - Si una ip ha accedido más de número máximo de veces, se considera que está haciendo un ataque DOS y se bloqueará en el firewall durante un tiempo predeterminado.

Motivación

```
Algorithm DOS_detector(
   log:Log,//Array of pairs <Time, IP>
   maxAcc:Integer)//Max. num. of acc.

Aux
   i:Integer //First unprocessed line of log.
   j:Integer //First line in current 1h window.
   c:? //Save a counter by active ip.

Begin

i - 0
j - 0
while system::sleep(1) do //sleep 1 second.
   updateCounters(log, i, j, c, maxAcc)
   end-while
end.
```

```
Algorithm updateCounters(
  log:Log,
  Var i:Integer,
  Var j:Integer,
  Var c:?,
  maxAcc:Integer)
Begin
  //update new accesses.
  while log[i] time < system::now() do
    increment(log[i].ip, c)
    if nAcc(log[i].ip, c) >= maxAcc then
      system::banIP(log[i].ip])
    end-if
    i \leftarrow i + 1
  end-while
  //remove old accesses.
  while log[j].time < system::now()-3600 do</pre>
    decrement(log[j].ip, c)- 1
    j ← j + 1
  end-while
end.
```

```
Algorithm nAcc(ip:IP, c:?):Integer //number of actives accesses for ip.

Algorithm increment(ip:I0, c:?) //increment the number of accesses.
    //post: nAcc(ip) = nAcc(ip:IP, old(c))+1

Algorithm decrement(ip:IP, c:?) //decrement the number of accesses.
    //post: nAcc(ip) = nAcc(ip:IP, old(c))-1
```

Motivación

- Implementación simple.
 - Una IP tiene la forma 150.214.110.3 → se puede convertir en un entero de 32bits: $150x2^{24}+214x2^{16}+110x2^{8}+3=2530635267$
- Representar c como un array de 2³² enteros (un contador c para cada posible IP).
 - Tiempo: O(1)
 - Memoria: O(2³²)
 - ¿IPv6?
 - Memoria: !!O(2¹²⁸)!!

```
Algorithm ipToInt(ip:IP):Integer //0(1)
    return ip[0]*2^24+ip[1]*2^16+ip[2]*2^8+ip[3]

Algorithm nAcc(ip:IP, c: ???):Integer //0(1)
    return c[ipToInt(ip)]

Algorithm increment(ip:IO, var c:Array[Integer])//0(1)
    c[ip2Int(c)] ← c[ip2Int(c)] + 1

Algorithm decrement(ip:IP, var c:Array[Integer])//0(1)
    c[ip2Int(c)] ← c[ip2Int(c)] - 1
```

Tabla Hash

- · Definición.
 - Combinación de Array de tamaño m y una función hash:
 - h: Keys → Integers {0...m-1}.
 - m es la cardinalidad de la función h.
 - La función hash mapea las claves a un índice del array con O(1).
 - Se producirán colisiones si |K|>m.

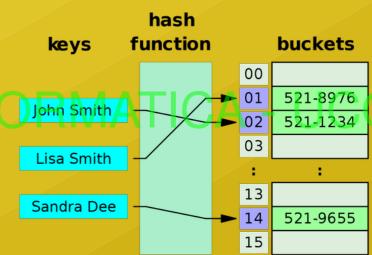


Tabla Hash

Especificación.

EEDD - GF

ADT HashTable[K, V] implement Map[K,V] interface.

Makers:

- create(m:Integer, h:HashFunction, k2Int:Key2Int) //make an empty table.
 - post-c: loadFactor()==0

Observers:

loadFactor():Float //The load factor.

- Objetivos.
 - Se debe calcular de forma rápida.
 - Debe ser determinista.
- Debe generar una distribución uniforme sobre el conjunto de EDDenteros [0,4M-1]. EN ING. INFORMATICA UC
 - Debe reducir las colisiones de claves.

Ejemplos de malos diseños para una cardinalidad de 1000.

```
h1(num_telf): return <primeros 3 dídigitos> //957 211 035 \rightarrow 957 (no uniforme). 
h2(num_telf): return <últimos 3 dígitos> //957 211 035 \rightarrow 035 (más uniforme, muchas colisiones) 
h2(num_telf): return rand() % 1000 //957 211 035 \rightarrow 01 (no es determinista)
```

Definición de Familia Universal.

Sea U el universo de las claves (todas las posibles claves). Un conjunto de funciones hash:

es llamado una "**familia universal**" si para toda función h∈H la probabilidad de colisión es

$$Prob[h(x)=h(y)] \leq \frac{1}{m}, con x, y \in U, x \neq y,$$

siendo 'm' es la cardinalidad de la función hash.

"m" también será el número de posiciones de la tabla.

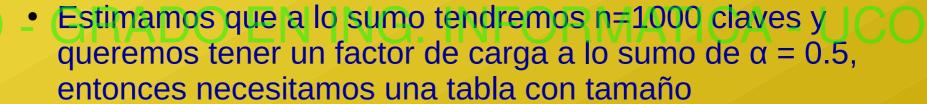
- Uso de aleatoriedad.
 - Usar h(x) = rand()%m da una prob. de colisión de 1/m y es uniforme en [0, m).
- EEDD Pergesto no es determinista FORMATICA UCC
 - Sin embargo, si podemos seleccionar una función 'hash' de la familia H de forma aleatoria y usarla en el resto de algoritmos.

- Factor de carga.
 - "Si h se escoge de forma aleatoria dentro de una familia universal, el número de colisiones en una celda de la tabla será O(1+α)."
- EEDD EI valor α es el factor de carga de la tabla: TICA UCC

$$\alpha = \frac{\text{número de claves almacenadas}}{\text{número de posiciones de la tabla}} = \frac{n}{m}$$

 Si mantenemos α<1 conseguimos un número de colisiones por entrada amortizado Θ(1).

- Determinación de la cardinalidad: conocido N.
 - Tablas estáticas con tamaño $\mathbf{m} = n/\alpha$.
 - Por ejemplo:



m = 1000/0.5 = 2000.

- Determinación de la cardinalidad: Tablas dinámicas.
 - No se puede estimar n o tiene gran varianza.
 - Copiar la idea de los arrays dinámicos. Empezar con un tamaño pequeño y aumentarlo para mantener α<1.
- Llamar a rehash () después de cada operación inserción.

```
Algorithm HashTable::rehash():Integer
Var oldT:array[Entry[K,V]]; loadFactor:Float
beain
  loadFactor ← numOfUsedEntries_ / t.size()
 if loadFactor > 0.5 then
    oldT ← t
    t_ ← Array[Entry[K,V]]::crete(t_.size()*2)
    h_ ← pickup at random from H with
          cardinalitiy t .size()
    numOfUsedEtries ← 0
    For-Each entry in oldT: Do
       if (entry.isValid())
         insert(e.key(), e.value())
  end-if
  Return t_.size()
end.
```

HashTable[K, V]

t_:Array[Entry[K,V]]
h_:HashFunction
k2int_:Key2unt
num0fUsedEntires_:Integer

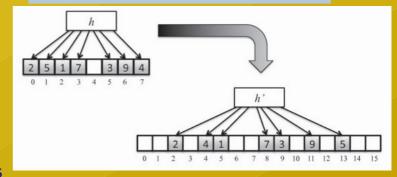


imagen tomada de [2].

Función hash para enteros.

Lema:

 $H_p = \left\{ h_p^{a,b}(X) = ((aX+b)\%p)\%m \right\}$ $para\ todo\ a\ , b\ : 1 \le a \le p-1, 0 \le b \le p-1$ $es\ una\ familia\ universal\ .$

donde:

p es un número primo > |U|m es la cardinalidad de la función hash (y el tamaño de la tabla).

Por lo tanto:

$$Prob[h(x)=h(y)] \leq \frac{1}{m}.$$

Ejemplo:

Para almacenar Ip's v4 usaremos el número primo $p=4294967311 > 2^32$.

Aleatoriamente han sido seleccionamos por ejemplo los valores a=32 y b=2.

Se estima que en condiciones normales el número de ip's diferentes durante una hora es alrededor de 1000. Queremos un factor de carga de α =0.5 luego m = n/ α = 1000/0.5 = 2000.

Calculamos h(150.214.110.3) ipToInt(150.214.110.3)=2530635267 h(2530635267) = ((32*2530635267+2) % p) % 2000 3670916948 % 2000 = 948

Función hash para strings: La familia polinomial.

Familia Polinomial

se define como:

$$P_{p} = \left\{ h_{p}^{x}(S) = \sum_{i=0}^{|S|-1} (x^{i}S[i]\% p) \right\}$$

con p un número primo fijo y $1 \le x \le p-1$

Supongamos que usamos x=2 y p=4294967311

Ejemplo "HOLA" → códigos ascii → 72,79,76,65

 $h = (72)\%p + (79*2^1)\%p + (76*2^2)\%p + (65*2^3)\%p$ h = 72 + 158 + 304 + 520 = 1054

!OJO! la aritmética entera debe permitir operar con números muy grandes, al menos del orden del valor de p.

Función hash para strings: Rendimiento.

Lema:

Dados dos strings s_1 y s_2 con tamaño a lo sumo L+1, si escogemos al azar una función h_p de P_p (elegimos al azar x en [1, p-1]) la CA probabilidad de colisión será:

$$Prob[h_p(s_1)=h_p(s_2)] \leq \frac{L}{p}.$$

¿Cual será el **menor entero válido** para el parámetro **p** si queremos asegurar que el hash de dos claves distintas, de hasta 10 caracteres, no colisione con probabilidad $\leq 1/100$?



- Función hash para strings: acotando PolyHash.
 - El PolyHash h_p puede devolver valores [0, p-1] pero nuestra tabla tendrá un tamaño m < p en general.
 - Solución: usar una segunda función hash h_m para enteros elegida al azar de una familia universal H con cardinalidad m y P > p.
 - La probabilidad de colisión de dos cadenas s_1 , s_2 con longitud $\leq L+1$ y p>mL será:

$$Prob[h_m(h_p(s_1)) = h_m(h_p(s_2))] \le \frac{1}{m} + \frac{L}{p}.$$

Ajuste del valor PolyHash a un tamaño de la tabla m

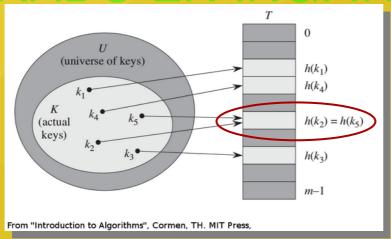
```
Algorithm h<sub>m</sub>(s:String):Integer

Begin
h<sub>p</sub> ← PolyHash(S, p, x)
h<sub>m</sub> ← hash_int(h<sub>p</sub>, a, b, P, m)
return h<sub>m</sub>

End.
```

- Alternativas.
 - Direccionamiento cerrado (chaining").
 - Direccionamiento abierto ("open addressing").

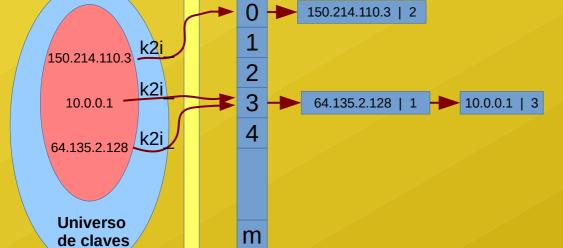
EEDD - GRADO EN ING. INFORMATICA - UCO



colisión

- Encadenamiento: diseño.
 - Cada entrada en la tabla almacena una lista (cadena) con las claves que han colisionado.

EED claves G h A Tabla: cadenas | G | NFORMATICA - UCC HashTable[K,V] t_ :Array[List[Pair[K,V]] h :HashFunction



HashTableIterator[K,V]

num_keys_:Integer

t_ :Array[List[Pair[K,V]]

idx_:Integer

k2i : key2Int

it_ :List[Pair[K,V]::Iterator

Encadenamiento: diseño.

```
HashTable::find(k:K):HashTableIterator
Var
  idx:Integer
  it :List[Pair[K,V]]::iterator
Begin
   idx := h_(k2i_(k))
  it := t [idx].find(k)
   If it<>t [idx].end() Then
     Return HashTableIterator(t , idx,
                              it)
   Else
     Return end()
End.
HashTable::has(k:K):Bool
Begin
   Return find(k)<>end()
End.
HashTable::get(k:K):V
Pre-c: has(k)
Begin
   Return find(k).getValue()
End.
```

```
HashTable::Insert(k:K,v:V):HashTableIterator
Var
  idx:Integer,
  it :List[Pair[K,V]]::iterator
Begin
 \int_{it}^{idx} \int_{-it}^{it} \frac{h(k2i)(k)}{[idx]\cdot find(k)} ATICA - UC
  If it=t [idx].end() Then
    t [idx].pushFront(Pair(k,v))
    it := t_[idx].begin()
    num_keys_++
    If t_.size()<>rehash() Then
      Return find(k)
  Else
    it.setValue(v)
  Return HastableIterator(t_, idx, it)
End.
HashTable::remove(it:HashTableIterator)
Pre-c: it.isValid()
Begin
  it.t_[it.idx_].remove(it.it_)
  num_keys_--
End.
```

Encadenamiento: diseño.

```
HashTableIterator::create(
      :Array[List[Pair[K,V]],
   idx:Integer,
   it :List[Pair[K,V]]::Iterator)
Begin
   idx := idx
   it := it
End.
HashTableIterator::getValue():V
Pre-c: isValid()
Begin
   Return it_.get().second()
End.
HashTableIterator::getKey():K
Pre-c: isValid()
Begin
   Return it_.get().first()
End.
```

```
HashTableIterator::gotoNext()
Pre-c: isValid()
Begin
  it_.gotoNext()
  If it = t [idx]] end() Then
    Repeat
      idx_{-} := idx_{-}+1
    Until idx =t .size()-1 Or
            t_[idx_].size()>0
    it_ := t_[idx_].begin()
  End-If
End.
HashTableIterator::setValue(v:V)
Pre-c: isValid()
Begin
   it .get().setSecond(v)
End.
```

Encadenamiento: diseño.

```
Var

idx:\Integer
it_List[Pair[K,V]]:\Iterator INFORMATICA - UCO

Begin
idx := 0
While idx<t_.size()-1 And t_[idx].size()=0 Do
idx := idx + 1
End-While
Return HashTableIterator(t_, idx, t_[idx].begin())
End.

HashTable::End():HashTableIterator
Begin
Return HashTableIterator(t_, t_.size()-1,
t_[t_.size()-1].end())
End.
```

HashTable::begin():HashTableIterator

Encadenamiento. Rendimiento.

El gasto en memoria será O(m+n)

La complejidad promedio de las operaciones es $\Theta(1+c)$ donde c es la longitud de la cadena más larga.

Si h se elige aleatoriamente de una familia universal entonces:

 $c \approx \alpha$

Asumiendo que α «1 las operaciones de inserción/borrado (usando lista doble) será $\Theta(1)$

COLORARIO:

Si se utiliza un función *h* de una *Familia Universal* y el esquema de encadenamiento para la resolución de colisiones en una tabla hash de tamaño *m* vacía.

realizar n operaciones de {inserción, borrado, búsqueda}, de las cuales hay O(m) operaciones de inserción, tendrá un complejidad conjunta promedio $\Theta(n)$,

De esta forma las operaciones se ejecutarán con un tiempo amortizado

 $\Theta(1)$

^{*} ver [2] para su demostración.

- Direccionamiento abierto: funcionamiento general.
 - Una entrada de una tabla podrá tener tres estados:

{vacía, ocupada, borrada}.

- Al buscar un dato visitaremos ("probe") una secuencia de posiciones de la tabla hasta encontrarlo o determinar que no está almacenado.
- Se redefine la función hash h de la forma:

h(k:K, probe:Integer):Integer

- La función h idealmente debe asegurar que:
 - la secuencia de pruebas para una clave k: {h(k, 0), h(k, 1), h(k, 2), ..., h(k, m-1)} debe ser una permutación de las posiciones de la tabla {0, 1, 2, ..., m-1}.
 - Lo ideal sería que todas las permutaciones posibles son equi probables.

Direccionamiento abierto. Rendimiento.

El gasto en memoria será O(n)

Eligir **h** aleatoriamente de una familia universal H asegura secuencias de pruebas uniformes:

Teorema 1GRADO EN ING

Suponiendo que el factor de carga α =n/m < 1, el número esperado de pruebas en una **búsqueda fallida** es a lo sumo 1/(1- α).

Teorema 2:

Suponiendo que el factor de carga α =n/m < 1, el número esperado de pruebas en una **búsqueda satisfactoria** es a lo sumo $1/\alpha$ * Ln[1/(1- α)].

*Ver en [2] su demostración.

COLORARIO:

Si α < 1, el número de pruebas necesarias para insertar una clave serán a lo sumo 1/(1- α) (requiere una búsqueda fallida para encontrar un hueco).

Si α <1 es constante y (rehash) la inserción tendrá un coste amortizado $\Theta(1)$

- Direccionamiento abierto: diseño.
 - Una entrada de una tabla podrá tener tres estados: {vacía, válida, borrada}.

ADT TableEntry[K,V];

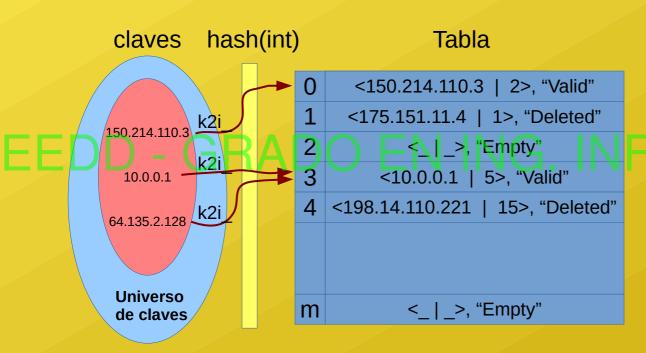
- create() //create an empty table entry.
 - post-c: isEmpty()

Observers:

- isEmpty():Bool //Is the entry empty?
- isDeleted():Bool //Is the entry deleted?
- isValid():Bool //Has the entry valid data?
- getKey():K //Get the key value.
 - pre-c: not isEmpty()
- getValue():V //Get the data value.
 - pre-c: not is Empty()

- set(k, v):
 - post-c: isValid()
 - post-c: getKey()==k
 - post-c: getValue()==v
- setValue(new_v:V)
 - pre-c: isValid()
 - post-c: isValid()
 - post-c: getValue()==new_v
- setDeleted()//Mark the entry as deleted.
 - post-c: isDeleted()

Direccionamiento abierto: diseño.



HashTable[K, V]

HashTableIterator[K,V]

```
t_ :Array[TableEntry[K,V]]
idx_:Integer
```

Direccionamiento abierto: diseño.

```
Algorithm HashTable::findPosition(k:K):Integer
//pre-c: loadFactor()<1.0</pre>
Var
  keyAsInt:Integer
  probe:Integer
  goOut:Boolean;
  idx:Integer
Beain
  keyAsInt := k2Int_(k)
  probe := 0
  Repeat
     idx := h(keyAsInt, probe)
     probe := probe+1
  Until t_[idx].isEmpty() Or t_[idx].key()=k
  Return idx
End.
```

Cuando se borra una clave, hay que dejar la entrada marcada como "borrada" en vez de "empty" para no romper las cadenas de colisiones de otras claves que pasan por esta entrada a borrar.

```
Algorithm HashTable::remove(iter:HashTableIterator)
pre-c: iter.isValid()
Begin
t_[iter.idx_].setDeleted()
End.
```

```
Algorithm HashTable::find(k:Key):HashTableIterator
Var idx:Integer
 Begin
              idx := findPosition(k)
if t_[idx].isValid() And t_[idx].key()=k Then A The
              Else
                            Return end()
End.
Algorithm HashTable::has(k:Key):Bool
 Begin
              Return find(k) <> end()
End.
Algorithm HashTable::get(k:Key):V
pre-c: has(k)
Begin
              Return find(k).getValue()
End.
```

Algorithm HashTable::insert(k:K, v:V):HashTableIterator

Algorithm HashTableIterator::gotoNext()

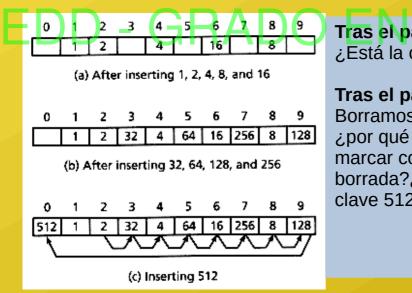
```
pre-c: isValid()
Begin
Repeat
idx_ := idx_+1

Until idx = t_size() Or t_idx_lisValid()

Algorithm HashTableIterator::getValue()
pre-c: isValid()
Begin
Return t_[idx_].getValue()
End.

Algorithm HashTableIterator::getKey()
pre-c: isValid()
Begin
Return t_[idx_].getKey()
End.
```

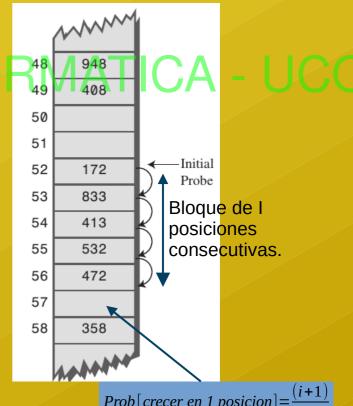
- Direccionamiento abierto: Linear Probing.
 - h(k, i) = (h(k, 0) + i)%m
 - Genera clustering primario.



Tras el paso b) ¿Está la clave 55?

Tras el paso c)

Borramos la clave 4 ¿por qué es necesario marcar como borrada?¿Está la clave 512?

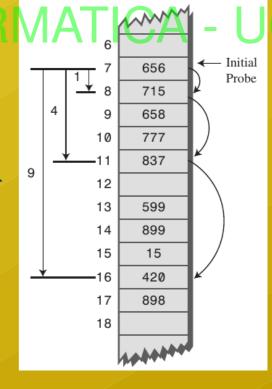


- Direccionamiento abierto: Quadratic Probing.
 - $-h(k,i)=(h(k,0) + c_1*i + c_2*i*i)%m$
 - Si m es potencia de dos, una buena elección es

Ver más posibilidades en [3.4].

- Tiene clustering secundario.

 $c_1 = c_2 = 1/2$



- Direccionamiento abierto: Random probing.
 - h(k, i) : { (i==0) ? h(k,0) : (h(k, i-1)+c)%m }
- Generar una secuencia pseudo-aleatoria con semilla h(k,0).
 - Los parámetros c y m deben ser primos relativos.
 - Reduce clustering primario, pero aún sufre de clustering secundario.

- Direccionamiento abierto: rehashing.
 - Tener varias funciones hash h₁, h₂, h₃, ..., y si no usar "linear/quadratic/random probing" a partir de la última.
- h(k, i): { $(i==0.? h_1(k) : (i==1.? h_2(k) : (i==2.? h_3(k) : "X) probing from <math>h_3(k)$ "))) }
 - Reduce clustering primario y secundario.

Tablas Hash

- Resumiendo:
 - Son una combinación de un array con una función hash.
 - Es muy importante la elección de una buena función función hash.
- El rendimiento y el espacio requerido dependen mucho del factor de carga.
 - Con una buena función hash y un factor de carga < 1 tendremos complejidades en tiempo amortizado de O(1).
 - Son una buena alternativa para implementar un mapa.

Referencias

- Lecturas recomendadas:
 - [1] Cap. 13 de "Data structures and software develpment in an object oriented domain", Tremblay J.P. y Cheston, G.A. Prentice-Hall, 2001.
 - [2] Cap. 11 de "Introduction ot algorithm, Third Edition", Thomas H.
 Cormen et al. MIT Press, 2009.
- EED-C3] WIKIPEDIA: DO EN ING. INFORMATICA UCO
 - [3.1] Tabla hash: en.wikipedia.org/wiki/Hash_table
 - [3.2] Función hash: en.wikipedia.org/wiki/Hash_function
 - Resolución de colisiones:
 - [3.3] Linear y random probing: en.wikipedia.org/wiki/Linear probing
 - [3.4] Quadratic probing: en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_probing
 - [3.5] Rehashing: en.wikipedia.org/wiki/Double_hashing