CALCULO MAIN

1. ¡A por el exámen!

1.1. Ejercicio 1

1. Dados los siguientes puntos : $(0,1)$ $(2,4)$ $(6,3)$ de una función desconocida definida en $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que simula la el número de linces avistados en España en el periodo de un año.

a) Determina si la función es biyectiva.

b) Siendo x=0 enero y x=11 diciembre ¿cuantos linces se avistaron entre marzo y agosto?.

c) ¿Es posible que entre abril y mayo exista un mes en que se avistaran el máximo número de linces ?.

2. Considera la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

a) Demuestra que existe al menos un valor de c en el intervalo $[-2, 2]$ tal que $f(c) = 0$.

b) Encuentra un intervalo más pequeño en el cual también se pueda aplicar el Teorema de Bolzano (Pista: usa la derivada de $f(x)$).

1.2. Ejercicio 2

Resuelva los siguientes limites:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

b)

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\ln x^3 + 2x}$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin^2(t) + \log(t+1)}{x}$$

1.3. Ejercicio 3

1. Calcule el volumen engendrado por la rotación del eje x de la elipse dada por

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = 1$$

.

2. Calcule las siguientes integrales.

a)

$$\int \ln(x) \cdot x \ dx$$

b)

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

c)

$$\int \cos(\ln(x)) \ dx$$

1.4. Ejercicio 4

1. Se tiene un alambre de 1m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado.

Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.

2. Halla el volumen máximo de una caja en la que la suma de las longitudes de sus aristas es 1.

1.5. Ejercicio 5

Determina si las siguientes funciones son continuas.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2 \cdot x^2 + 2xy + y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determina si la siguiente función es continua, exiten derivadas parciales y es derivable.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{5x^2 \cdot y^2}{x^3+y^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1.6. Ejercicio 6

1. Sea $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

   a) Hallar la dirección de máximo crecimiento en el punto $(1,1)$ ¿A que razón?

   b) ¿En qué dirección debemos movernos para que la temperatura disminuya lo más rápidamente posible?

   c) Si no quisiéramos apreciar cambio alguno de temperatura, ¿qué dirección debemos tomar? (Dirección nula)

2. Si la temperatura de un depósito cilíndrico viene dada por la función

$$T(x,y,z) = 10(x \cdot e^{-y^2} + z \cdot e^{-x^2})$$

y nos situamos en el punto de coordenadas $(0,0,1)$, se pide:

   a) Determinar cuál es la razón de cambio de la temperatura al desplazarnos hacia el punto de coordenadas $(2,3,1)$.

   b) ¿En qué dirección debemos movernos para que la temperatura disminuya lo más rápidamente posible? ¿Y para que aumente?

   c) Si no quisiéramos apreciar cambio alguno de temperatura, ¿qué dirección debemos tomar?

1.7. Ejercicio 7

Multipelcadores

Integrales dobles

1. Dados los siguientes puntos : $(0,1)$ $(2,4)$ $(6,3)$ de una función desconocida definida en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que simula la el número de linces avistados en España en el periodo de un año.

a) Determina si la función es biyectiva.

b) Siendo x=0 enero y x=11 diciembre ¿cuantos linces se avistaron entre marzo y agosto?.

c) ¿Es posible que entre abril y mayo exista un mes en que se avistaran el máximo número de linces ?.

2. Considera la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

a) Demuestra que existe al menos un valor de c en el intervalo $[-2, 2]$ tal que $f(c) = 0$.

b) Encuentra un intervalo más pequeño en el cual también se pueda aplicar el Teorema de Bolzano (Pista: usa la derivada de $f(x)$).

1. $(0,1),(2,4),(6,3)$

a) $X_0 = 0 \;;\; f(X_0) = 1$

$X_1 = 2 \;;\; f(X_1) = 4$

$X_2 = 6 \;;\; f(X_2) = 3$

$$P(x) = f(X_0)L_0(x) + f(X_1)L_1(x) + f(X_2)L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(X-2)(X-6)}{(0-2)(0-6)} = \frac{X^2-8X+12}{12} = \frac{X^2}{12} - \frac{2X}{3} + 1$$

$$L_0(x) = \frac{(X-0)(X-6)}{(2-0)(2-6)} = \frac{X^2-6X}{-8} = -\frac{X^2}{8} + \frac{3X}{4}$$

$$L_0(x) = \frac{(X-0)(X-2)}{(6-0)(6-2)} = \frac{X^2-2X}{24} = \frac{X^2}{24} - \frac{X}{12}$$

$$1\left(\frac{X^2}{12} - \frac{2X}{3} + 1\right) + 4\left(-\frac{X^2}{8} + \frac{3X}{4}\right) + 3\left(\frac{X^2}{24} - \frac{X}{12}\right)$$

$$= \frac{X^2}{12} - \frac{2X}{3} + 1 - \frac{X^2}{2} + 3X + \frac{X^2}{8} - \frac{X}{4}$$

$$= \frac{2X^2 - 16X + 24 - 12X^2 + 72X + 3X^2 - 6X}{24} = \frac{7X^2 + 5X + 24}{24}$$

Bisectiva = inyectiva y sobreyectiva :

Inyectiva : $f(x) = f(y)$

Sobreyectiva : $D{:}f \geq D{:}f^{-1}$

$$\frac{7x^2+5x+24}{24} = \frac{7y^2+5y+24}{24}$$

$7x^2+5x+24 = 7y^2+5y+24$; $\frac{7x+5}{y} = \frac{7y+5}{x}$; $7x^2-7y^2+5x-5y=0$

$7(x^2-y^2)+5(x-y)=0$; $7(x-y)(x+y)+5(x-y)=0$; $(x-y)(7(x+y)+5)=0$

No es inyectiva por lo que no es biyectiva

b) marzo $x=2$, agosto $x=7$ $\rightarrow \int_2^7 f(x)\,dx = \int_2^7 \frac{7x^2+5x+24}{24}$

$$= \left[\frac{7x^3}{72} + \frac{5x^2}{48} + 24x\right]_2^7 = \frac{6085}{144}$$

c) abril $x=3$, mayo $x=4$, $f(x) = \frac{7x^2+5x+24}{24}$

Rolle :

Continuo $[3,4]$ } Es un polinomio

Derivable $(3,4)$ }

$f(a) = f(b)$; $4{,}625 \neq 4{,}\overline{6}$

Como no se cumple no hay máximo

2. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

a) $[-2, 2]$ $f(c) = 0$

Bolzano $\begin{cases} \text{Continua } [-2,2] \rightarrow \text{Un polinomio lo cumple} \\ \text{Derivable } (-2,2) \rightarrow \text{Un polinomio lo cumple} \\ f(a) \cdot f(b) < 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} f(2) = 8 - 6 + 1 = 3 \\ f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1 \end{array}\right\} f(a) f(b) = 3(-1) < 0$

Existe al menos un valor que cumple $f(c) = 0$ en el intervalo $[-2, 2]$

b) $f'(x) = 3x^2 - 3$; $3x^2 = 3$; $x = \pm 1$

$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 \\ f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3 \end{array}\right\} f(a) f(b) = (-1)3 < 0$

Existe al menos un valor que cumple $f(c) = 0$ en el intervalo $[-1, 1]$

Resuelva los siguientes limites:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$$

b)

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\ln x^3 + 2x}$$

c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \sin^2(t) + \log(t+1)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen } x} = \frac{1-1}{0} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{\ln x^3 + 2x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{3}{x} + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}^{1}}{\cancel{3}^{0} + 2\cancel{x}^{1}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \text{sen}^2(t) + \ln(t+1)}{x} = \frac{0+0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2(x) + \ln(x+1)}{\cancel{1}}$$

$$= 0 + 0$$

1. Calcule el volumen engendrado por la rotación del eje x de la elipse dada por

$$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{9} = 1$$

.

2. Calcule las siguientes integrales.

a)

$$\int \ln(x) \cdot x \, dx$$

b)

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

c)

$$\int \cos(\ln(x)) \, dx$$

Arco
Log
Pot
Exp
Sen/Cos

1. $y^2/4 + x^2/9 = 1$; $y = \sqrt{\frac{36 - 4x^2}{9}}$

$y = 0$; $\frac{36 - 4x^2}{9} = 0$; $4x^2 = 36$; $x^2 = 9$; $x = 3$

$$\pi \int_{-3}^{3} f(x)^2 \, dx = \pi \int_{-3}^{3} \frac{36 - 4x^2}{9} \, dx = \pi \left[\frac{36x}{9} - \frac{4x^3}{27} \right]_{-3}^{3} = \pi (12 - 4 + 12 - 4) = 16\pi$$

2.

a) $\int x \ln(x) \, dx$

$dv = x \, dx$ $\quad v = \frac{x^2}{2}$

$u = \ln(x)$; $du = \frac{dx}{x}$

$$\frac{x^2 \ln(x)}{2} - \int \frac{x^2}{2x} dx = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

b) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

$t = e^x + 1$ $\qquad dt = e^x \, dx$

$$\int \frac{dx}{t} = \ln(t) = \ln(e^x + 1) + C$$

c) $\int \cos(\ln(x))\, dx =$

$\ln(x) = t \; ; \; \frac{1}{x}\, dx = dt \; ; \; dx = x\, dt$

$\int \cos(t)\; x\, dt =$

$\ln(x) = t \; ; \; e^{\ln(x)} = e^{t} \; ; \; x = e^{t}$

$\int \cos(t)\, e^{t}\, dt =$

$u = \cos(t) \qquad du = -\operatorname{sen}(t)\, dt$

$dv = e^{t}\, dt \qquad v = e^{t}$

$\cos(t)\, e^{t} + \int \operatorname{sen}(t)\, e^{t}\, dt$

$u = \operatorname{sen}(t) \qquad du = \cos(t)\, dt$

$dv = e^{t}\, dt \qquad v = e^{t}$

$\cos(t)\, e^{t} + \operatorname{sen}(t)\, e^{t} - \int \cos(t)\, e^{t}\, dt$

$\int \cos(t)\, e^{t}\, dt = \cos(t)\, e^{t} + \operatorname{sen}(t)\, e^{t} - \int \cos(t)\, e^{t}\, dt$

$$\int \cos(t)\, e^{t}\, dt = \frac{\cos(t)\, e^{t} + \operatorname{sen}(t)\, e^{t}}{2} + C$$

1. Se tiene un alambre de 1m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado.

Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.

2. Halla el volumen máximo de una caja en la que la suma de las longitudes de sus aristas es 1.

1. 1m de largo

$2\pi x + 4y = 1 \; ; \; y = \frac{1}{4} - \frac{\pi x}{2}$

$x^2 + \pi y^2 = \text{mín}$

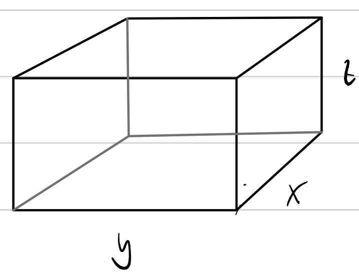
$x^2 + \pi y^2 = x^2 + \pi\left(\frac{1}{4} - \frac{\pi x}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{\pi}{16} - \frac{\pi^2 x}{4} + \frac{\pi^3 x^2}{4} = x^2\left(1 + \frac{\pi^3}{4}\right) - x\,\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{16}$

$dx = 2x\left(1 + \frac{\pi^3}{4}\right) - \frac{\pi^2}{4} = 0 \; ; \; x = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2\left(1 + \frac{\pi^3}{4}\right)} = \frac{\pi^2}{8 + 2\pi^3}$

$2\pi x + 4y = 1 \; ; \; y = \frac{1 - 2\pi x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{\pi x}{2} = \frac{1}{4} - \frac{\pi\left(\frac{\pi^2}{8 + 2\pi^3}\right)}{2} = \frac{1}{4} - \frac{\pi^3}{16 + 4\pi^2}$

2. Suma de aristas: $4(x + y + z) = 1 \; ; \; x + y + z = 1/4$ función

Volumen: $f = xyz$ Condición



$z = \frac{1}{4} - x - y$

$xy\left(1/4 - x - y\right) = \frac{xy}{4} - x^2 y - xy^2$

$f_x = y/4 - 2xy - y^2 = 0$

$f_y = x/4 - 2xy - x^2 = 0$

$x = y$

$\frac{y}{4} - 2y^2 - y^2 = 0 \; ; \; \frac{y}{4} - 3y^2 = 0 \; ; \; y\left(\frac{1}{4} - 3y\right) = 0 \; \begin{cases} y = 0 & x = 0 \\ y = \frac{1}{12} \; , & x = \frac{1}{12} \end{cases}$

$$f_{xx} = -2y = 0$$
$$f_{yy} = -2x$$
$$f_{xy} = 1/4 - 2x - 2y = f_{yx}$$

$H < 0$ Pto silla

$H > 0 \begin{cases} f_{xx} > 0 & \text{Min} \\ f_{xx} < 0 & \text{Max} \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2y & 1/4 - 2x - 2y \\ 1/4 - 2x - 2y & -2x \end{vmatrix}$$

$$f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{16} < 0 \text{ pto silla}$$

$$f(1/12, 1/12) = \begin{vmatrix} -1/6 & -1/12 \\ -1/12 & -1/6 \end{vmatrix} = \frac{1}{36} - \frac{1}{144} > 0 \to -1/6 < 0 \to \text{máximo}$$

$$z = \frac{1}{4} - x - y = \frac{3}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} \qquad f(1/12, 1/12, 1/12) \text{ máximo}$$

* 4.2

$$x + y + z = 1/4 \to g(x) = x + y + z - 1/4$$
$$f(x,y,z) = xyz$$

$$\nabla f(x,y) = \nabla \overset{\text{condición}}{g}(x)\, x$$

$$L(x,y,z,\lambda) = \nabla xyz - \lambda(\nabla(x + y + z - 1/4))$$

$$f_x = yz - \lambda = 0 \to \lambda = yz \to yz = xz;\ y = x$$
$$f_y = xz - \lambda = 0 \to \lambda = xz \to xz = xy;\ y = z$$
$$\left.\right\} \begin{matrix} x = y = z \\ x = 0 \end{matrix}$$
$$f_z = xy - \lambda = 0 \to \lambda = xy$$
$$f_\lambda = x + y + z - 1/4 = 0 \to 3x - 1/4 = 0;\ x = y = z = 1/12$$

$$f(x,y,z) = xyz = (1/12)^3 > 0 \quad \text{Máximo}$$

Determina si las siguientes funciones son continuas.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2\cdot x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y) \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \xrightarrow[\text{coord polares}]{\text{Pasamos a}} \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \end{array}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2(\theta)\,\text{sen}(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+r^2\,\text{sen}^2(\theta)} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^2(\theta)\,\text{sen}(\theta)}{\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta)} = 0$$

Es continua ya que $f(x) = \lim$

$$f(x,y) \begin{cases} \frac{2x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2} \xrightarrow[\text{coord polares}]{\text{Pasamos a}} \begin{array}{l} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\text{sen}(\theta) \end{array}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{2r^2\cos^2(\theta)+2r^2\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)+r^2\,\text{sen}^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta)+r^2\,\text{sen}^2(\theta)}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{2\cos^2(\theta)+2\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta)+\text{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta)}$$

Como el lim no depende de r sino de θ puede haber un ángulo que de $\lim \neq 0$ por lo que no es continua

Determina si la siguiente función es continua, exiten derivadas parciales y es derivable.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{5x^2\cdot y^2}{x^3+y^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{5x^2y^2}{x^3+y^3} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{5x^2y^2}{x^3+y^3}=\frac{0}{0},\ \text{cambio a polar}\begin{cases}x=r\cos(\alpha)\\ y=r\,\text{sen}(\alpha)\end{cases}$$

$$\lim_{r\to0}\frac{5r^4\cos^2(\alpha)\,\text{sen}^2(\alpha)}{r^3\cos^3(\alpha)+r^3\,\text{sen}^3(\alpha)}=\frac{5r\cos^2(\alpha)\,\text{sen}^2(\alpha)}{\cos^3(\alpha)+\text{sen}^3(\alpha)}=0$$

Com lim = f(x) es continua

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h+x_0,y_0)-f(x_0,y_0)}{h+x_0}=\frac{f(h,0)-\cancelto{0}{f(0,0)}}{h}=\frac{\frac{5h^2\cdot0^2}{h^3+0}}{h}=\frac{\frac{0}{h^3}}{h}=\frac{0}{h}=0$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0,y_0)-f(x_0,h+y_0)}{h+y_0}=\frac{f(0,h)-\cancelto{0}{f(0,0)}}{h}=\frac{\frac{5\cdot0^2\cdot h^2}{h^3+0}}{h}=\frac{\frac{0}{h^3}}{h}=\frac{0}{h}=0$$

Como las derivadas parciales son = 0 existen y es diferenciable

1. Sea $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   a) Hallar la dirección de máximo crecimiento en el punto $(1, 1)$ ¿A que razón?

   b) ¿En qué dirección debemos movernos para que la temperatura disminuya lo más rápidamente posible?

   c) Si no quisiéramos apreciar cambio alguno de temperatura, ¿qué dirección debemos tomar? (Dirección nula)

2. Si la temperatura de un depósito cilíndrico viene dada por la función

$$T(x, y, z) = 10(x \cdot e^{-y^2} + z \cdot e^{-x^2})$$

y nos situamos en el punto de coordenadas $(0, 0, 1)$, se pide:

   a) Determinar cuál es la razón de cambio de la temperatura al desplazarnos hacia el punto de coordenadas $(2, 3, 1)$.

   b) ¿En qué dirección debemos movernos para que la temperatura disminuya lo más rápidamente posible? ¿Y para que aumente?

   c) Si no quisiéramos apreciar cambio alguno de temperatura, ¿qué dirección debemos tomar?

1. a) $\text{grad}(x, y) = \left(\frac{d}{dx} f(x,y), \frac{d}{dy} f(x,y)\right) = \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right) \xrightarrow{(1,1)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

   b) $-\text{grad}(x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

   c) $\text{grad}(x,y) \cdot (x,y) = 0$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(x, y) = 0$; $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 0$; $x = -y$

   $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2. $T(x,y,z) = 10(xe^{-y^2} + ze^{-x^2})$

a) $(2,3,1) - (0,0,1) = (2,3,0)$

Normalizamos

$|2,3,0| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

$|u| = \dfrac{2,3,0}{\sqrt{13}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}, 0\right)$

$\operatorname{grad}(x,y,z) = -\left(\dfrac{d}{dx} f(x,y,z), \dfrac{d}{dy} f(x,y,z), \dfrac{d}{dz} f(x,y,z)\right)$

$= \left(10(e^{-y^2} - 2xze^{-x^2}), 10(-2yxe^{-y^2}), 10(e^{-x^2})\right) \xrightarrow{(0,0,1)} (10,0,10)$

$\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}, 0\right)(10,0,10) = \left(\dfrac{20}{\sqrt{13}}, 0, 0\right)$

b) $-\operatorname{grad}(x,y,z) = (-10, 0, -10)$

c) $\operatorname{grad}(x,y,z) = 0$; $(10,0,10)(x,y,z) = 10x + 10z = 0$; $x = -z$

$(10, 0, -10)$

Ej. $f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 3 \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$

$$L(x,y,\lambda) = \nabla(x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 3) - \lambda(\nabla(x^2 + y^2 - 1))$$

$f_x = 4x^3 + 4xy^2 - \lambda(2x) = 0 \;;\; x(4x^2 + 4y^2 - 2\lambda) = 0 \to x = 0$

$f_y = 4y^3 + 4x^2y - \lambda(2y) = 0 \to y = 0$

$f_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$4x^2 + 4y^2 = 2\lambda$

$\lambda = 2x^2 + 2y^2$

$x = 0 \qquad y^2 + 1 = 0 \;;\; y = \pm 1 \qquad (0,1), (0,-1)$

$y = 0 \qquad x^2 + 1 = 0 \;;\; x = \pm 1 \qquad (1,0), (-1,0)$

$f(0,1) = -2$

$f(0,-1) = -2$

$f(1,0) = -2$

$f(-1,0) = -2$

Ej. $\iint_D (x^2+4y^2)\,dA$ $\quad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; \ y\geq x^2, \ x\geq y^2\}$

T1 $dy\,dx$

T2 $dx\,dy$

- $y = x^2$
- $x = y^2 \ ; \ y=\sqrt{x}$

$x^2=\sqrt{x} \ ; \ x^4 = x \ ; \ x(x^3-1)=0 \ ; \ x=1 \ ; \ x=0$

$x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$

$0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+4y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{4}{3}y^3\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x^{5/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} - x^4 - \frac{4}{3}x^6 \, dx$$

$$= \left[\frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{8}{15}x^{5/2} - \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{21}x^7\right] = \frac{2}{7} + \frac{8}{15} - \frac{1}{5} - \frac{4}{21} = \frac{30+56-21-20}{105} = \frac{45}{105} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

Ej. $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4} \, dx \, dy$

- $x = \sqrt[3]{y}$
- $x = 2$
- $y = 8$
- $y = 0$

$0 \leq y \leq x^3$

$0 \leq x \leq 2$

$$\int_0^2 \int_0^{x^3} e^{x^4} \, dy \, dx = \int_0^2 \left[y e^{x^4} \right]_0^{x^3} dx = \int_0^2 x^3 e^{x^4} \, dx$$

$t = x^4$; $dt = 4x^3$ $\quad 2^4 = 16$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{16} e^t \, dt = \frac{1}{4} \left[e^t - 1 \right]_0^{16} = \frac{1}{4} (e^{16} - 1)$$

Ej. $\iint 2xy \, dA$ $\quad (0,0)\,,\ (0,2)\,,\ (1,1)$

$$\left.\begin{array}{l} a(0)+b=0 \ ;\ b=0 \\ a(1)+b=1 \ ;\ a=1 \end{array}\right\} f(x)=x$$

$$\left.\begin{array}{l} a(1)+b=1 \ ;\ a=-1 \\ a(0)+b=2 \ ;\ b=2 \end{array}\right\} f(x)=2-x$$

$$f(x)=0$$

* $0 \leq y \leq x$, $0 \leq x \leq 1$ * $0 \leq y \leq 2-x$, $1 \leq x \leq 2$

$$\int_0^1\int_0^x 2xy\,dy\,dx + \int_1^2\int_0^{2-x} 2xy\,dy\,dx = 2\int_0^1\int_0^x 2xy\,dy\,dx$$

Ej. $x+y+z=12$

$x^2+y^2+z^2=min$

$L(x,y,z,\lambda)=\nabla f(x,y,z)-\lambda(g(x))$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x-\lambda=0 \quad ; \quad \lambda=2x \\ f_y = 2y-\lambda=0 \quad ; \quad \lambda=2y \\ f_z = 2z-\lambda=0 \quad ; \quad \lambda=2z \end{array}\right\} x=y=z$$

$f_\lambda = x+y+z-12=0$

$3x=12; \quad x=4$

como solo hay un punto $f(4,4,4)$