CÁLCULO

Integrales Indefinidas (Parte I)

Integrales Indefinidas (Parte I)

- Definición de función primitiva.
- Dos resultados sobre las primitivas de una función.
- Definición y propiedades de la integral indefinida.
- Integrales inmediatas.
- Métodos de Integración.
  - Método de Sustitución (cambio de variable).

Primitiva de una función

Definición

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que una función $F : X \to \mathbb{R}$ es una **primitiva** de f si

$$F'(x) = \frac{\partial}{\partial x}F(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Ejemplos:

- La función $F(x) = x^2$ es una primitiva de la función $f(x) = 2x$.
- La funciones $F(x) = \sin(x)$ y $G(x) = \sin(x) + 7$ son primitivas de la función $f(x) = \cos(x)$.

Observación: Si $F(x)$ es una primitiva de una función $f(x)$, entonces para cualquier constante real C, la función $F(x) + C$ también es una primitiva de $f(x)$.

Proposición

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Si F es una primitiva de $f(x)$, entonces cualquier otra función primitiva de $f(x)$ es de la forma $F(x) + C$, donde C es una constante real.

Proof. Sea $G(x) \neq F(x)$ una función primitiva de $f(x)$. Sea $H(x) = G(x) - F(x)$. Observa que para todo $x \in X$ se tiene que

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Por tanto, H es una función constante, i.e., $H(x) = C$, por lo que $G(x) = F(x) + C$.

Definición

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función que admite una primitiva F. La *integral indefinida* de f, denotada por

$$\int f(x)dx,$$

es el conjunto formado por todas las primitivas de f, i.e.,

$$\int f(x)dx = \{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\} \equiv F(x) + C.$$

La integral indefinida verifica las siguientes propiedades:

- $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$.

Integrales Inmediatas

Ejemplos:

- $\int (x^2 + x^3) dx = \int x^2 dx + \int x^3 dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C.$
- $\int (\operatorname{sen} x + \frac{1}{x}) dx = \int \operatorname{sen} x dx + \int \frac{1}{x} dx = -\cos x + \ln |x| + C.$
- $\int \frac{2x^3 - 3x + 5}{x} dx = \int (2x^2 - 3 + \frac{5}{x}) dx = \frac{2}{3}x^3 - 3x + 5 \ln |x| + C.$

Método de Sustitución

Regla de la Cadena: $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

El Método de Sustitución es válido para calcular una primitiva de la expresión $g'(f(x))f'(x)$, es decir, cuando queremos calcular

$$\int g'(f(x))f'(x)dx.$$

- Se considera $f(x)$ como una "única variable", digamos $t = f(x)$, lo cual implica que $dt = f'(x)dx$.

$$\int g'(f(x))f'(x)dx = \int g'(t)dt = g(t) + C = g(f(x)) + C.$$

Ejemplo 1: Calcula $\int 2x\cos(x^2)dx$.

Solución: Consideremos el cambio $t = x^2$. Entonces $dt = 2xdx$. Sustituyendo en la integral se obtiene:

$$\int 2x\cos(x^2)dx = \int \cos(t)\,dt = \sin(t) + C = \sin(x^2) + C.$$

Ejemplo 2: Calcula $\int \frac{dx}{(3+2x)^2}$.

Solución: Consideremos el cambio $t = 3 + 2x$. Entonces $dt = 2dx$. Sustituyendo en la integral se obtiene:

$$\int \frac{dx}{(3+2x)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(3+2x)} + C.$$

Ejemplo 3: Calcula $\int e^{-5x} dx$.

Solución: Consideremos el cambio $t = -5x$. Entonces $dt = -5dx$. Sustituyendo en la integral se obtiene:

$$\int e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} \int e^{t} dt = -\frac{1}{5} e^{t} + C = -\frac{1}{5} e^{-5x} + C.$$

Ejemplo 4: Calcula $\int \cos(x) \sin(x)\, dx$.

Solución: Consideremos el cambio $t = \sin(x)$. Entonces $dt = \cos(x)\, dx$. Sustituyendo en la integral se obtiene:

$$\int \cos(x) \sin(x)\, dx = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2(x)}{2} + C.$$

CÁLCULO

Integrales Indefinidas (Parte II)

Integración por partes

Regla del producto para la derivada: $(uv)' = u'v + v'u$.

Integrando la igualdad anterior, se obtiene la fórmula siguiente:

$$\int (uv)' = \int u'v + \int v'u \quad \leftrightarrow \quad uv = \int u'v + \int uv'$$

Teorema

Si u y v son funciones derivables, entonces

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

La fórmula de integración por partes se puede escribir así:

$$\int udv = uv - \int duv.$$

Observaciones

La fórmula de integración por partes expresa la integral original en térrminos de otra integral. Dependiendo de la elección de u y dv, puede ser más fácil de evaluar la segunda integral que la original.

- Intentar tomar como dv la "porción" más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
- Intentar tomar como u la "porción" del integrando cuya derivada sea una función más simple que u, y como dv el factor restante del integrando.

Ejemplo 1: Calcula $\int x \ln x \, dx$.

Solución: Hagamos $u = \ln x$ y $dv = x dx$. Entonces $du = \frac{dx}{x}$ y $v = \frac{x^2}{2}$. Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se obtiene:

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

Ejemplo 2: Calcula $\int x \, e^x \, dx$.

Solución: Hagamos $u = x$ y $dv = e^x dx$. Entonces $du = dx$ y $v = e^x$. Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se obtiene:

$$\int x \, e^x \, dx = x \, e^x - \int e^x \, dx = x \, e^x - e^x + C.$$

Ejemplo 3: Calcula $\int x\cos(2x)\,dx$.

Solución: Hagamos $u = x$ y $dv = \cos(2x)dx$. Entonces $du = dx$ y $v = \frac{\sin(2x)}{2}$. Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se obtiene:

$$\int x\cos(2x)\,dx = \frac{x\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2}\,dx = \frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4} + C.$$

Ejemplo 4: Calcula $\int \ln x\,dx$.

Solución: Hagamos $u = \ln x$ y $dv = dx$. Entonces $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = x$. Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se obtiene:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Ejemplo 5: Calcula $\int e^x \cos(x)dx$.

Solución: Hagamos $u = \cos(x)$ y $dv = e^x dx$. Entonces $du = -\sin(x)dx$ y $v = e^x$. Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se obtiene:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(x)dx &= e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)dx \\ &= e^x \cos(x) + \left(e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx\right)\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int e^x \cos(x)dx = \frac{e^x}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + C.$$

Ejemplo 6: Calcula $\int \sin(\sqrt{x})dx$.

Solución:
Haciendo $t = \sqrt{x}$, se obtiene que $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \to 2tdt = dx$.Entonces:

$$\int \sin(\sqrt{x})dx = 2\int t\sin(t)dt$$

Haciendo $u = t$ y $dv = \sin(t)dt$, obtenemos que $du = dt$ y que $v = -\cos(t)$. Sustituyendo en la fórmula de integración por partes se obtiene:

$$\int t\sin(t)dt = -t\cos(t) + \int \cos(t)dt = -t\cos(t) + \sin(t) + C.$$

Por tanto:

$$\int \sin(\sqrt{x})dx = 2\sin(\sqrt{x}) - 2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + C$$

CÁLCULO

Integrales Indefinidas (Parte III)

Integrales Indefinidas (Parte III)

Integrales Indefinidas (Parte III)

- Métodos de Integración.
  - Integración de funciones racionales.

Se llama función racional a toda función de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas.

- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional propia si el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$.
- $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional impropia si no es propia.

Ejemplo:

- $f_1(x) = \frac{3x+1}{3x^2+1}$ es una función racional propia.
- $f_2(x) = \frac{x^2+1}{x}$ es una función racional impropia.

Observación

Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional impropia, entonces:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

donde $C(x)$ es un polinomio y $\frac{R(x)}{Q(x)}$ es una función racional propia.

Por el resultado anterior, podemos suponer que la función $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ es una función racional propia.

Toda función racional propia $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede descomponer en suma de fracciones simples.

- Primero: Se factoriza $Q(x)$:
  - Por cada factor binómico $(x-a)^k$ de multiplicidad k, aparece la suma de las k fracciones siguientes:

$$\frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k};$$

  - Por cada factor cuadrático $(x^2+cx+d)^r$ de multiplicidad r, aparece la suma de las r fracciones siguientes:

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+cx+d)} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+cx+d)^2} + \ldots + \frac{M_rx+N_r}{(x^2+cx+d)^r};$$

- Segundo: Se establece la igualdad entre $\frac{P(x)}{Q(x)}$ y la suma de todas las fracciones que aparecen, y se opera para obtener los numeradores de las fracciones simples.

Ejemplo 1: Descomponer $\frac{x^2-6x+3}{(x-2)^3}$ en suma de fracciones simples

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-6x+3}{(x-2)^3} &= \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{A_3}{(x-2)^3}.\\ &= \frac{1}{(x-2)} + \frac{-2}{(x-2)^2} + \frac{-5}{(x-2)^3}.\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Descomponer $\frac{8x-1}{x^2-x-2}$ en suma de fracciones simples

Solución:

$$\frac{8x-1}{x^2-x-2} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+1} = \frac{5}{x-2} + \frac{3}{x+1}.$$

Ejemplo 3: Descomponer $\frac{-3x^3-x}{(x^2+1)^2}$ en suma de fracciones simples

Solución:

$$\frac{-3x^3 - x}{(x^2+1)^2} = \frac{A_1x + B_1}{x^2+1} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2+1)^2}.$$

$$= \frac{-3x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Fracciones simples en cuestión

- $\frac{A}{(x-a)^n}$, con $n \in \mathbb{N}$.
- $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, con $m = 1$.

Si $n = 1$, entonces $\displaystyle\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A \ln |x-a| + C.$

Si $n > 1$, entonces $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$

Integral de la función racional $f(x) = \frac{Mx+N}{x^2+px+q}$

Este tipo de integrales da lugar a logaritmos y arcotangentes

Ejemplo: Calcula $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x^2+2x+3}dx$.

Solución:

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+3}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{4}{3}}{x^2+2x+3}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2-2+\frac{4}{3}}{x^2+2x+3}dx$$

$$= \frac{3}{2}\left(\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx + \int \frac{-\frac{2}{3}}{x^2+2x+3}dx\right)$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Observación:

$$x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 = 2\left[\frac{1}{2}(x+1)^2+1\right] = 2\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$$

Ejercicio: Calcular $\int \frac{2x-1}{x^2+3x+2}\,dx$.

Solución:

$$\int \frac{2x-1}{x^2+3x+2}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{5}{x+2}\right) dx$$

$$= \int \frac{-1}{x+1}\,dx + \int \frac{5}{x+2}\,dx$$

$$= -\ln|x+1| + 5\ln|x+2| + C.$$

Ejercicio: Calcular $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x^2+1)}$.

Solución:

$$\frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= -\tfrac{1}{2(x+1)} - \tfrac{1}{2}\arctan(x) + C$$