MATEMÁTICA DISCRETA

Distancias en Grafos

Distancias en grafos

Definición

Dado un grafo conexo $G=(V,E)$, la **distancia** entre dos vértices $u,v \in V$ es la mínima de las longitudes de los caminos que conectan u y v:

$$d_G(u,v) = \min\{\ell(C) : \ C \text{ es un } u-v \text{ camino}\}$$

Definición

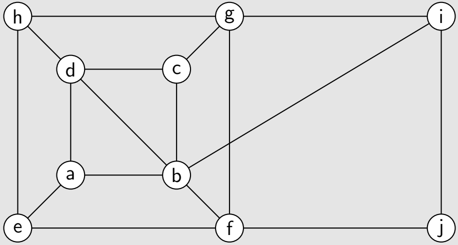
Sea $G=(V,E)$ un grafo conexo y sea $v \in V$.

- La **excentricidad** de v es $\varepsilon(v) = \max_{u\in V}\{d_G(u,v)\}$.
- El **radio** de G es $r(G) = \min_{u\in V}\{\varepsilon(v)\}$.
- El **diámetro** de G es $D(G) = \max_{u\in V}\{\varepsilon(v)\}$.

Ejemplo

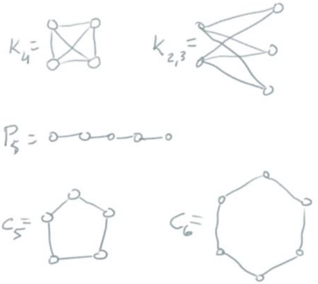
Para el grafo G de la siguiente figura, se tiene que:

- $d(a,h) = d(a,c) = d(a,f) = d(a,i) = 2$,
- $d(a,g) = d(a,j) = 3$,
- $\varepsilon(a) = 3 = D(G)$,
- $\varepsilon(b) = r(G) = 2$.



Ejercicio

Determina el diámetro de los siguientes grafos: K_n, $K_{r,s}$, C_n, P_n.



Ejercicio

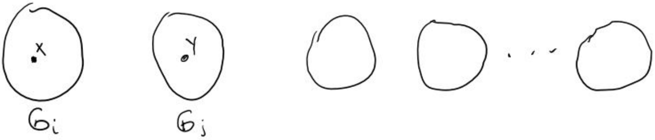
Determina el diámetro de los siguientes grafos: K_n, $K_{r,s}$, C_n, P_n.

Solución:

- $D(K_n) = 1$.
- $D(K_{r,s}) = 2$ si $r \geq 2$ ó $s \geq 2$.
- $D(P_n) = n-1$, $n \geq 2$.
- $D(C_n) = \dfrac{n}{2}$ si n es par y $D(C_n) = \dfrac{n-1}{2}$ si n es impar.

Proposición

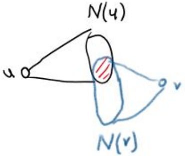
Para todo grafo G no conexo se cumple que G^c es conexo y $D(G^c) \leq 2$.



- Sean $G_1, G_2, \dots, G_k$ las componentes conexas de G.
- Sean $x \in V(G_i)$, $y \in V(G_j)$ con $i \neq j$.
- Para todo vértice $z \notin V(G_i)$ tenemos $d_{G^c}(x,z) = 1$ y para todo $z \notin V(G_j)$ tenemos $d_{G^c}(y,z) = 1$.
- Así, x es adyacente a y en G^c y todos los vértices de G^c que no sean adyacentes a x también serán adyacentes a y.
- Por lo tanto, G^c es conexo y $D(G^c) \leq 2$.

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo de orden n tal que para todo par de vértices $u,v\in V$ se cumple $\delta(u)+\delta(v)\geq n-1$. Prueba que G es conexo. Obtén una cota superior para el diámetro de G.



$N(u)\cap N(v)\neq\phi$

Solución

Si $n=2$, entonces G es isomorfo a K_2.
Supongamos que $n>2$. Si dos vértices no adyacentes, $u,v\in V$, no tienen ningún vecino en común, entonces $\delta(u)+\delta(v)\leq n-2$, lo que contradice que $\delta(u)+\delta(v)\geq n-1$. Por lo tanto, $N(u)\cap N(v)\neq\varnothing$. Así, el grafo G es conexo y $D(G)\leq 2$.

Definición

El **centro** de un grafo G es el conjunto

$$\mathcal{C}(G) = \{v \in V(G) : \varepsilon(v) = r(G)\}.$$

Ejercicio

Ponga dos ejemplos de grafos $G = (V, E)$ tales que $\mathcal{C}(G) = V$.

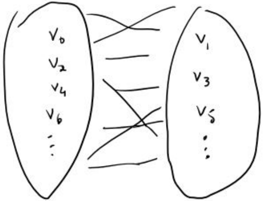
Solución

- Los grafos completos, $G = K_n$.
- Los grafos bipartitos completos $G = K_{r,s}$ con $r, s \geq 2$.

Teorema

Un grafo es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar.

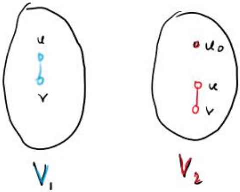
$(\Rightarrow)$



Ciclo $v_0 v_1 v_2 v_3 \cdots v_{k-1}$ $v_k = v_0$

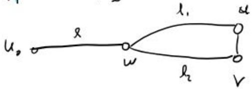
$l = k$ par

$(\Leftarrow)$



$V_2 = \{u_0\} \cup \{v \in V : d(u_0, v) \text{ es } \underline{\text{par}}\}$

$V_1 = V \setminus V_2$



$l_1 + l_2$ par

$d(u_0, u) = l + l_1$

$d(u_0, v) = l + l_2$

Corolario

Todos árbol es un grafo bipartito.

Ejercicio

Sean G y H dos grafos. Determina una condición necesaria y suficiente para que los siguientes grafos sean bipartitos.

(a) $G \odot H$

(b) $G + H$

Solución

(a) $G \odot H$ es bipartito si y sólo si G es bipartito y H es nulo.

(b) $G + H$ es bipartito si y sólo si G y H son nulos.

Problema del camino mínimo

Definición

Un **grafo ponderado** es un par (G, w) donde $G = (V, E)$ es un grafo y w es una función $w : E \to \mathbb{R}$ que asigna pesos a las aristas del grafo.

Definición

Dado un grafo ponderado (G, w) y un camino $C : v_0, v_1, \ldots, v_k$ se define el **peso del camino** C como

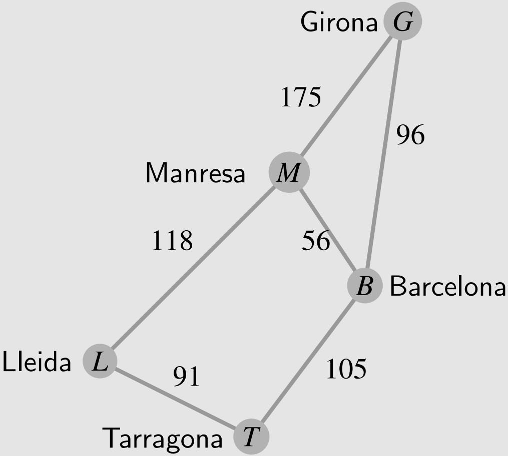
$$w(C) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i).$$

y la **distancia** entre dos vértices $u, v \in G$ como

$$d_G(u, v) = \text{mín}\{w(C) : \ C \text{ es un } u - v \text{ camino } \}.$$

Ejemplo

Determina la distancia entre cada par de ciudades.



Algoritmo de Dijkstra

- Se aplica sobre un grafo (o digrafo) ponderado.
- Calcula la distancia desde un vértice inicial s al resto de vértices del grafo.
- En cada paso del algoritmo se etiquetan los vértices con $(dist(u); v)$, donde $dist(u)$ es la distancia mínima actual desde el vértice s al vértice u. El vértice v es el predecesor de u en el camino mínimo que une s y u.

Estructuras necesarias para la formulación del algoritmo

- Un grafo ponderado $(G;w)$ representado mediante una lista de adyacencias.
- Un conjunto U de los vértices que se han visitado, en el orden en que se ha realizado.
- Una tabla de distancias, $dist()$, indexada por los vértices de G, que registra la distancia del vértice inicial a los vértices que se van visitando.
- Al final, la tabla $dist()$, registra la distancia desde el vértice inicial al resto de vértices.

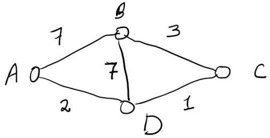
Algoritmo Dijkstra (G,s)

$U \leftarrow \emptyset$ (U es la lista de vértices visitados)
para $v \in V \backslash \{s\}$
    $dist(v) \leftarrow \infty$
    Se etiqueta v con $(dist(v), s)$
finpara
$dist(s) \leftarrow 0$
Se etiqueta s con $(dist(s), s)$
para $i \leftarrow 0$ hasta $\leftarrow n-1$
    u_i **vértice que alcanza** $\min_{v \in V-U} \{dist(v)\}$
    $U \leftarrow U \cup \{u_i\}$
    para $v \in V-U$ adyacente a u_i
        si $dist(u_i) + w(u_i, v) < dist(v)$
            entonces $dist(v) \leftarrow dist(u_i) + w(u_i, v)$
            Se etiqueta v con $(dist(v), u_i)$
        finsi
    finpara
finpara
retorno (*dist*)

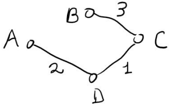
Observaciones

- Cuando sea posible visitar más de un vértice, siempre eligiremos por conveniencia el de menor índice en la ordenación de los vértices disponibles.
- A cada paso se fija la distancia de uno de los vértices del grafo. Por tanto, tras n pasos se habría calculado la distancia a todos los vértices del grafo.
- El algoritmo se puede utilizar para obtener un camino de longitud mínima entre el vértice inicial y cualquier otro vértice.

Ejemplo



Árbol de distancias



A	B	C	D
(0,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)*	(7,A)	(∞,A)	(2,A)
	(7,A)	(3,D)	(2,A)*
	(6,C)	(3,D)*	
	(6,C)*		

d(A,B)=6
d(A,C)=3
d(A,D)=2

Ejercicio

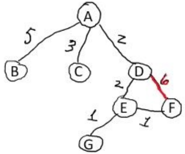
Determina la distancia de A a cada una de los vértices de la red de carreteras mostrada en la tabla.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	5	3	2	-	-	-
B	5	0	2	-	3	-	1
C	3	2	0	7	7	-	-
D	2	-	7	0	2	6	-
E	-	3	7	2	0	1	1
F	-	-	-	6	1	0	-
G	-	1	-	-	1	-	0

Determina la distancia de A a cada una de los vértices de la red de carreteras mostrada en la tabla.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	5	3	2	-	-	-
B	5	0	2	-	3	-	1
C	3	2	0	7	7	-	-
D	2	-	7	0	2	6	-
E	-	3	7	2	0	1	1
F	-	-	-	6	1	0	-
G	-	1	-	-	1	-	0

Subgrafo reconstruido a partir de la tabla:



A	B	C	D	E	F	G
(0,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)*	(5,A)	(3,A)	(2,A)	(∞,A)	(∞,A)	(∞,A)
(0,A)	(5,A)	(3,A)	(2,A)*	(4,D)	(8,D)	(∞,A)
(0,A)	(5,A)	(3,A)*	(2,A)	(4,D)	(8,D)	(∞,A)
(0,A)	(5,A)	(3,A)	(2,A)	(4,D)*	(5,E)	(5,E)
(0,A)	(5,A)*	(3,A)	(2,A)	(4,D)	(5,E)	(5,E)
(0,A)	(5,A)	(3,A)	(2,A)	(4,D)	(5,E)*	(5,E)
(0,A)	(5,A)	(3,A)	(2,A)	(4,D)	(5,E)	(5,E)*

Caminos mínimos:

A-5-B

A-3-C

A-2-D

A-2-D-2-E

A-2-D-2-E-1-F

A-2-D-2-E-1-G

Ejemplo

La siguiente matriz es la matriz de adyacencia de un grafo ponderado de vértices A, B, C, D, E y F.

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplica el algoritmo de Dijkstra partiendo del vértice C

La siguiente matriz es la matriz de adyacencia de un grafo ponderado de vértices A, B, C, D, E y F.

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 7 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplica el algoritmo de Dijkstra partiendo del vértice C

A	B	C	D	E	F
(∞,C)	(∞,C)	(0,C)	(∞,C)	(∞,C)	(∞,C)
(∞,C)	(7,C)	(0,C)*	(8,C)	(∞,C)	(3,C)
(∞,C)	(7,C)	(0,C)	(7,F)	(12,F)	(3,C)*
(15,B)	(7,C)*	(0,C)	(7,F)	(9,B)	(3,C)
(15,B)	(7,C)	(0,C)	(7,F)*	(9,B)	(3,C)
(14,E)	(7,C)	(0,C)	(7,F)	(9,B)*	(3,C)
(14,E)*	(7,C)	(0,C)	(7,F)	(9,B)	(3,C)

Caminos mínimos:

$C \xrightarrow{7} B \xrightarrow{2} E \xrightarrow{5} A$

$C \xrightarrow{7} B$

$C \xrightarrow{3} F \xrightarrow{4} D$

$C \xrightarrow{7} B \xrightarrow{2} E$

$C \xrightarrow{3} F$

La excentricidad de C es 14

Árbol de distancias