Capítulo 1

Cálculo y Geometría Elemental

1.1. Los números reales

Los conjuntos con los que trabajaremos a lo largo del curso estarán formados por números que están divididos en varias categorias:

- **Los números naturales.** Son los números que utilizamos para contar. El conjunto de los números naturales se denota con la letra $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}.$$

  (Algunos matemáticos consideran que el cero también debería ser natural).

- **Los números enteros.** Son los naturales con signo junto con el cero. El conjunto de los números enteros se representa con la letra $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} := \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

- **Los números racionales.** Son las fracciones de la forma: $\frac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$. El conjunto de los números racionales se representa con la letra $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

- **Los números reales.** Son todos los números que conocemos. Se representan con la letra $\mathbb{R}$. Los números reales son necesarios para poder efectuar operaciones como las raices cuadradas, las cúbicas, etc. Gráficamente se suelen representar en una linea recta (la recta real).

- **Los números irracionales.** Son los números reales que no son racionales. Los denotamos por $\mathbb{I}$.

Se tienen las siguientes relaciones de inclusión:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}.$$

1.2. Desigualdades

Los números reales pueden ordenarse. Se pueden visualizar usando un sistema de coordenadas unidimensional que se llama la recta real (numérica).

Dados dos números reales a y b, diremos que a es menor que b, y lo representamos $a < b$, si a queda a la izquierda de b en la recta real. De modo análogo se definen:

- $a > b$ "a es mayor que b".
- $a \leq b$ "a es menor o igual que b".
- $a \geq b$ "a es mayor o igual que b".

Propiedades de orden

Para cualesquiera números reales a, b, c y d se verifican las siguientes propiedades:

- Ley de la tricotomía: Una y sólo una de las siguientes relaciones es cierta:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

- Propiedad transitiva: Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.
- Propiedad aditiva: Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.
  Caso particular: Si $a \leq b$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces $a + k \leq b + k$, independiente del signo de k.
- Propiedad multiplicativa: Si $a \leq b$ y $k \geq 0$ entonces $ak \leq bk$. Si $a \leq b$ y $k \leq 0$ entonces $ak \geq bk$.

Ejemplo: Hallar los valores de x que verifiquen $-2x + 5 \leq 7$.

Primero sumamos -5 en ambos miembros de la desigualdad y simplificamos:

$$-2x + 5 + (-5) \leq 7 + (-5) \Rightarrow -2x \leq 2.$$

Ahora multiplicamos por $-\frac{1}{2}$, teniendo en cuenta que como es negativo la desigualdad cambia:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) \geq \left(-\frac{1}{2}\right) 2 \Rightarrow x \geq -1.$$

Solución: $x \geq -1$ ó $-1 \leq x$.

1.3. Intervalos

Sean a y b números reales con $a \leq b$. Definimos primero los intervalos acotados de extremos a y b:

- Intervalo cerrado. $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.

  Dicho de otra forma, $[a,b]$ es el conjunto de los números reales que hay entre a y b incluyendo a los extremos a y b.

- Intervalo abierto. $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.

  Dicho de otra forma, (a,b) es el conjunto de los números reales que hay entre a y b sin incluir a los extremos a y b.

- Intervalo semiabierto. $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

  En este caso a pertenece al conjunto pero b no.

  De modo análogo se define $(a,b]$.

También podemos hablar de intervalos infinitos:

- $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$. Esto es, el conjunto de los números reales que son mayores que a incluyendo al a.
- $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$. Esto es, el conjunto de los números reales que son mayores que el a sin incluir al b.
- $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$. Esto es, el conjunto de los números reales que son menores que el b incluyendo al b.
- $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$. Esto es, el conjunto de los números reales que son menores que el b sin incluir al b.

Observaciones

1. Es importante notar que ∞ es sólo un símbolo, no hay que confundirlo con un número. Por eso no tiene sentido expresiones como:

$$[-\infty,a) \quad \text{ó} \quad [b,\infty].$$

2. Es claro que $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$.

Ejemplo: El conjunto de números que verifican la desigualdad $-2x+5 \leq 7$ ha resultado ser el intervalo $[-1,\infty)$.

Ejercicio: Hallar el conjunto de números reales tales que $x^2 < x+6$.

1.4. Valor absoluto

Definición 1.4.1. El *valor absoluto de un número real* x es el mismo dígito pero con signo positivo y lo denotamos por $|x|$. De este modo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} .$$

El valor absoluto de x siempre va a ser moyor o igual que cero, independientemente del signo de x. Se puede ver también como la distancia que hay entre x y 0 en la recta real:

El valor absoluto se usa para definir la distancia entre dos puntos (números) de la recta real. La distancia entre dos números reales a y b es: $|a - b|$

Algunas propiedades básicas del valor absoluto:

- $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
- $|-x| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $|xy| = |x||y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $y \neq 0$.
- $|x| = +\sqrt{x^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $|x^n| = |x|^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$.
- Sea $c \geq 0$. Entonces $|x| \leq c$ si y sólo si $-c \leq x \leq c$.
- Sea $c \geq 0$. Entonces $|x| \geq c$ si y sólo si $x \geq c$ ó $x \leq -c$.
- Desigualdad triangular:

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: Hallar los valores de x tales que $|x - 3| \leq 2$.

$$|x - 3| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x - 3 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5.$$

Gráficamente, la expresión $|x - 3| \leq 2$ significa que la distancia de x a 3 es menor o igual que 2, y evidentemente esto sólo se cumple para los números que estén entre 1 y 5.

Ejercicio: Hallar los valores de x para los que $|x - 2| > 3$.

1.5. Raiz cuadrada de un número positivo

Definición 1.5.1. Sea a un número real positivo (positivo significa mayor que 0), definimos la *raiz cuadrada de* a, $\sqrt{a}$, como el único número real positivo cuyo cuadrado es a. Si $a = 0$, $\sqrt{a} = 0$.

Entonces tenemos:

Si $a \geq 0$, $\sqrt{a} = b$ si y sólo si $b \geq 0$ y $b^2 = a$.

Observaciones

1. El símbolo $\sqrt{\cdot}$ denota siempre una cantidad mayor o igual que cero. Un malentendido habitual es escribir cosas del tipo: $\sqrt{4} = \pm 2$.

2. Es correcto hacer operaciones como la que sigue:

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

3. Un error muy frecuente es decir $\sqrt{x^2} = x$, pero esto es falso. Lo hemos anotado como una propiedad del valor absoluto y es muy fácil de razonar. Por ejemplo: $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$.

Propiedades

1. Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ entonces
$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}.$$

2. $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Ejercicio: Hallar los valores de x para los que la expresión $\sqrt{4 - x^2}$ tiene sentido.

1.6. Los números complejos

Observemos que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real. Hay muchas otras ecuaciones sin solución real, es decir, ningún número real las verifica.

El cuerpo de los números complejos se introduce con el fin de que estas ecuaciones tengan siempre solución.

Introducimos una nueva unidad: i y le asignamos la propiedad:

$$i^2 = 1 \quad \text{o bien} \quad \sqrt{-1} = i.$$

Si aceptamos este hecho, entonces observamos que la ecuación $x^2 = -1$ tiene como solución i y $-i$.

Si multiplicamos i por un número real obtenemos un *número imaginario*. Por ejemplo: $2i$ es un número imaginario que tiene la propiedad:

$$(2i)^2 = 2^2 i^2 = 4(-1) = -4.$$

Los *números complejos* se definen como el conjunto:

$$\mathbb{C} := \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

es decir, están formados por la suma de un número real mas un número imaginario.

Sea $z = a + ib$ un número complejo

- El número real a se llama *parte real* y el número real b *parte imaginaria*.
- El número $\overline{z} = a - ib$ se llama *conjugado de z*.
- El número $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se llama *módulo de z*.
  También se tiene la relación $|z|^2 = z\overline{z}$.

Observaciones

1. Si la parte imaginaria de un número complejo z es 0, $z \in \mathbb{R}$, luego $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
2. En el contexto de los números complejos, los números negativos tienen raiz cuadrada.
3. En $\mathbb{C}$ no hay relación de orden.
4. Todas las ecuaciones polinómicas tienen al menos una solución.

1.7. Razones trigonométricas: seno, coseno, tangente

1.7.1. Ángulos

Dos semirectas con origen común determinan dos ángulos.

Para evitar confusiones sobre el ángulo al que nos referimos podemos establecer un orden entre los lados y considerar que el ángulo queda determinado por un giro que hace coincidir su primer lado sobre el segundo. De esta forma hablaremos de *ángulos orientados* y diremos que el ángulo es *positivo* si el giro se efectua en sentido contrario al de las agujas del reloj, y *negativo* si se efectua en el mismo sentido.

Definimos *ángulo recto* como el ángulo positivo que determinan dos semirrectas perpendiculares con origen común.

A partir de ahora nos centramos en ángulos positivos.

1.7.2. Medida de ángulos

Para dar la medida de un ángulo cualquiera tomaremos como referencia el ángulo recto.

Existen dos formas de medir ángulos:

Grados sexagesimales. La primera es asignarle al ángulo recto 90°. A partir de ahí el ángulo que bisecta al ángulo recto sería de 45°, la suma de dos ángulos rectos daría 180°, una vuelta completa (una circunferencia) tendría 4 ángulos rectos, luego sería $4 \times 90° = 360°$.

Radianes. La segunda forma de medir ángulos se basa en la geometría de la circunferencia. Sabemos que la longitud de una circunferencia de radio r viene dada por la expresión:

$$L = 2\pi r.$$

Entonces la proporción entre longitud y radio de una circunferencia es siempre constante:

$$\frac{L}{r} = 2\pi.$$

O sea, el perímetro de una circunferencia contiene exactamente 2π radios suyos.

Esto nos indica que podemos utilizar la constante 2π y asignársela al ángulo de una vuelta completa. O sea, diremos que una vuelta completa tiene un ángulo de 2π radianes. De esta forma, un ángulo recto tendría asignado un ángulo equivalente a $\frac{1}{4}$ el de la circunferencia. O sea, un ángulo recto mediría $\frac{\pi}{2}$ radianes, etc.

La ventaja de utilizar radianes en lugar de grados consiste en que si tenemos una circunferencia de radio 1, y trazamos un ángulo, la longitud del arco de circunferencia que se forma es exactamente igual a la medida del ángulo en radianes.

1.7.3. Triángulos

Decimos que dos triángulos son *semejantes* cuando los ángulos de uno coinciden con los del otro. Dados dos triángulos semejantes, el Teorema de Thales nos dice que los lados de uno son proporcionales a los del otro.

ABC es semejante a ADE y por tanto,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Suma de los ángulos de un triángulo. Recordemos que la suma de los ángulos de un triángulo es π, o sea, 180°.

Trazamos una linea paralela a uno de los lados (el de abajo) y prolongamos los otros dos. Se forma de este modo tres nuevos ángulos que coinciden con los originales. La suma $\alpha + \beta + \gamma$ es un ángulo llano, luego $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Usando esta propiedad deducimos que para que dos triángulos sean semejantes, basta que comprobemos que tienen dos ángulos iguales; el tercero también será igual automáticamente.

Triángulo rectángulo. Un triángulo *rectángulo* es aquel que tiene un ángulo recto (los otros dos ángulos han de tener medida inferior). En las figuras que siguen, el ángulo recto está se nalado por un cuadrado.

Dado un triángulo rectángulo con ángulo α, definimos los siguientes términos:

- **Hipotenusa:** es el lado del triángulo opuesto al ángulo recto.
- **Cateto opuesto a α:** es el lado opuesto al ángulo α.
- **Cateto adyacente a α:** es el lado restante.

El teorema de Pitágoras dice que:
La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

1.7.4. Razones trigonométricas

Si dos triángulos rectángulos cualesquiera tienen un ángulo α entonces son semejantes (ya que tienen dos ángulos iguales: α y $\frac{\pi}{2}$) y por el teorema de Thales sus lados son proporcionales

$$\frac{a}{c} = \frac{\widetilde{a}}{\widetilde{c}}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{c}}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}.$$

Como estas proporciones sólo dependen del ángulo α (no dependen del triángulo concreto que usemos) podemos definirlas en función de α.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Estas son las razones trigonométricas más importantes. Las hemos definido sobre un triángulo rectángulo pero también se puede definir geométricamente a partir de una circunferencia de radio r.

En estas condiciones se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Otras razones trigonométricas destacables son: cosecante, secante y cotangente, que no son más que las inversas de las anteriores:

$$\text{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \text{cotan}\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Propiedades

1. El seno y el coseno de cualquier ángulo están comprendidos entre -1 y 1.

2. Las razones trigonométricas $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$ pueden ser relacionadas entre sí utilizando el teorema de Pitágoras. La fórmula trigonométrica más importante, porque a partir de ella se pueden deducir muchas otras, es

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

   Si dividimos entre $\cos^2\alpha$ y $\operatorname{sen}^2\alpha$ obtenemos respectivamente:

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha, \quad 1 + \text{cotan}^2\alpha = \text{cosec}^2\alpha.$$

3. Suma y diferencia de ángulos:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

4. Ángulo doble:

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha.$$

5. Ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

6. Otras fórmulas trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

En la siguiente tabla aparecen algunos valores del seno, coseno y la tangente frecuentemente usados

Ángulo	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe

Hasta ahora sólo hemos tratado con ángulos entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Si representamos las razones trigonométricas en una circunferencia de radio 1, también llamada *circunferencia goniométrica*, podemos extender las definiciones de seno, coseno y tangente para que abarquen todos los ángulos posibles. Además con la ayuda de la circunferencia unidad, es muy fácil visualizar los valores de las razones trigonométricas y obtener relaciones entre ellas, entre las que se encuentran las dadas anteriormente.

Representamos un triángulo rectángulo de ángulo distinguido α en la circunferencia colocando el vértice en el centro, y el cateto adyacente sobre el eje horizontal positivo. De este modo se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa vale 1 (porque coincide con el radio de la circunferencia). Entonces $\operatorname{sen}\alpha$ es exactamente lo que mide el cateto opuesto, es decir, la linea vertical, y $\cos\alpha$ es el valor del cateto adyacente (linea horizontal).

Si queremos visualizar el valor de $\tan\alpha$, sólo tenemos que prolongar la hipotenusa, de manera que se forme un triángulo equivalente al anterior pero con cateto adyacente de longitud 1, así, el valor de $\tan\alpha$ es el valor del otro cateto.

En los otros cuadrantes, es decir, cuando el ángulo es más grande que $\frac{\pi}{2}$, el razonamiento es similar, aunque tenemos que hacer caso de la siguiente regla de signos:

Cuadrante	1	2	3	4
sen	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-

Además se puede observar en el dibujo relaciones como las que siguen:

$$\operatorname{sen}(2\pi+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(2\pi+\alpha) = \cos\alpha.$$

$$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

$$\operatorname{sen}(\pi+\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha.$$

$$\operatorname{sen}(-\alpha)=\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha \qquad \cos(-\alpha)=\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha.$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha.$$

1.8. El número e

Un número real que tiene particular importancia en todas las ciencias es el número e. Tal vez sea, junto con el número π, el número más famoso de las matemáticas; tiene propiedades muy variopintas y suele aparecer donde menos se lo espera uno, como veremos a lo largo del curso. Daremos una idea intuitiva de su definición.

Su origen resulto ser más una curiosidad que otra cosa. Nació como consecuencia del estudio de la siguiente familia de números reales:

$$\left\{a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Calculemos los primeros términos de esta familia, es decir, sustituyamos n por 1,2,3,4,etc.:

$$a_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2 \qquad a_2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2,25$$

$$a_3=\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\approx 2,37\cdots \qquad a_4=\left(1+\frac{1}{4}\right)^4=\left(\frac{5}{4}\right)^4=\frac{625}{256}\approx 2,44\cdots$$

A primera vista, observamos que cuanto mayor sea el valor de n en estos primeros términos, mayor es el valor de a_n. ¿Qué pasará cuando n sea muy grande?; ¿obtendremos que a_n también será muy grande, o por el contrario, se acercará hacia un número fijo?.

Se puede comprobar que los términos de esta familia verifican $a_n\le a_{n+1}$ y $a_n\le 3$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Como ya hemos visto que $a_1=2$, todos los términos de esta familia tienen que estar comprendidos entre 2 y 3.

En estas condiciones, parece lógico pensar que a medida que n se hace grande, a_n se acerca a algún número que estará comprendido entre 2 y 3. A este número es al que llamaremos ***número*** e.

En un principio, esta definición del número e parece muy artificial, (y lo es). Sin embargo este número tiene unas propiedades tan interesantes que le convierten en una herramienta muy importante en Matemáticas como veremos a lo largo del curso.

1.9. Exponentes y logaritmos

Consideremos un organismo unicelular que se reproduce utilizando el método de bipartición: después de cada periodo de tiempo fijo, y bajo condiciones ideales, cada célula se divide generando dos células nuevas. Así, si partíamos de una sola célula, entonces el número de células que hay en cada generación sigue la relación que se ve en la tabla.

generación	0	1	2	3	4	5	$\cdots$	n
células	1	2	4	8	16	32	$\cdots$	2^n

¿Cuántas células tendremos en la décima generación?. Si para pasar de una generación a otra hemos de multiplicar por 2 el número de células, y sabemos que en la primera generación hay 2 células, entonces la décima generación tendrá

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} \quad \text{células.}$$

En la n-ésima generación habrá por tanto 2^n células.

Ahora hagámonos la pregunta inversa, ¿en qué generación alcanzaremos una cifra de 2^{20} células?. Está claro que esto sucederá en la generación 20.

Las operaciones que estamos realizando son *exponenciales y logaritmos*. Hagamos un repaso de estos conceptos.

1.9.1. Potencias

Sea a un número real. Definimos $a^1 := a$ y si $n \in \mathbb{N}$ $a^{n+1} = a^n \cdot a$.

Propiedades

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y $n, m \in \mathbb{N}$.
2. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$.
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y todo $n, m \in \mathbb{N}$.
4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y todo $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$.
5. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

A continuación, definiremos las potencias de base real y exponente entero no natural, de forma que las propiedades establecidas se verifiquen para $n, m \in \mathbb{Z}$. Así, dado $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, ha de ser:

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n.$$

Por tanto, definimos $a^0 := 1$.

Siguiendo esta lógica, tenemos que si $n \in \mathbb{N}$:

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1.$$

Por tanto, definimos $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
Otra propiedad: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y todo $n, m \in \mathbb{Z}$.

El siguiente paso consiste en definir a^x cuando a es un número real positivo y x es un número racional cualquiera. Queremos extender las definiciones anteriores y que se verifiquen las propiedades mencionadas también para exponentes racionales.

Si $x = \frac{p}{q}$ y $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$, queremos que $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q = a^p$ y esto nos sugiere claramente la definición de $a^{\frac{p}{q}}$.

Sea a un número real positivo y sea $\frac{p}{q}$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Definimos $a^{\frac{p}{q}}$ como el único número real positivo que elevado a q nos da a^p, es decir,

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

La existencia de la raiz q-ésima positiva de a^p está asegurada.

Nuestro próximo objetivo es definir a^x, donde a es un número real positivo y x es un número real cualquiera. Lo que haremos será aproximar x mediante números racionales r_n. Daremos una idea intuitiva.

Dado un número real x cualquiera, podemos encontrar una familia de números racionales $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que a medida que n crece, r_n se acerca a x. Por tanto, si consideramos la familia $\{a^{r_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, esta también se acercará a un número a medida que n crece. Es lógico definir a^x como este número.

Se tienen todas las propiedades anteriores.

1.9.2. Logaritmos

Del mismo modo que la resta es la operación contraria a la suma, y la división es la operación contraria a la multiplicación, existen dos operaciones contrarias a la potenciación. Una de ellas es la extracción de raices: si $a^b = c$, entonces la raiz de orden b de c es a, es decir, $\sqrt[b]{c} = a$. Sin embargo, en esta sección nos concentraremos en la otra operación contraria a la potenciación: los *logaritmos*.

Consideremos de nuevo la célula que se reproduce por bipartición. Supongamos que en un momento dado se observan, por ejemplo, 1024 células. Nos preguntamos entonces en qué generación nos encontramos. Como sabemos que el número de células que debería haber en la generación n es 2^n, entonces nos encontramos con que queremos resolver la ecuación

$$2^n = 1024.$$

Esto es, queremos encontrar el exponente n, de manera que 2 elevado a dicho exponente sea 1024. Sin mucho esfuerzo se puede comprobar que la solución es $n = 10$.

La operación "búsqueda de exponente" es lo que llamamos *logaritmo*. En nuestro caso particular, queremos calcular el logaritmo en base 2 de 1024, que corresponde al exponente al que tenemos que elevar 2 para obtener 1024. Así

$$\log_2 1024 = 10 \quad \text{porque} \quad 2^{10} = 1024.$$

En general, si $a > 0$ y $a \neq 1$, decimos que el logaritmo en base a de una cantidad positiva x es y, si y es el exponente al que tenemos que elevar a para obtener x

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x.$$

<u>**Observación:**</u> $\log_a x = y$ sólo tiene sentido si $x > 0$ porque $x = a^y > 0$. Además, ha de ser $a \neq 1$ porque si $a = 1$, $a^x = 1$.

<u>Propiedades de los logaritmos</u>

Como el cálculo de logaritmos es una operación contraria a la exponenciación, los logaritmos van a tener propiedades contrarias, en cierto sentido, a las potencias.

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
2. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$.
3. $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$.
4. $\log_a(x^y) = y \log_a x$.
5. $x = a^{\log_a x} = \log_a(a^x)$.
6. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$, para todo a, b positivos distintos de 1.

Los logaritmos son muy prácticos porque permiten reducir la complejidad de las operaciones. En otras palabras, si tenemos que hacer una multiplicación, podemos tomar logaritmos y sumarlos (propiedad 1). También, si tenemos que hacer una potencia, tomamos logaritmos, y se nos queda reducido a una multiplicación (propiedad 4).

Notación.

- Si la base es 10, entonces escribiremos $\log_{10}$ como log.
- Si la base es e, entonces escribiremos $\log_e$ como ln, L ó Ln. Estos son los llamados logaritmos neperianos o naturales. (No obstante, a veces podemos ver el logaritmo neperiano escrito log).