Capítulo 5

Integral Definida

5.1. Introducción

En la escuela elemental se estudia el concepto de área y se calculan las áreas de unas ciertas figuras planas con bordes rectos. También se da la fórmula del área del círculo, pero no se enseña, en general, a calcular áreas de regiones planas limitadas por curvas. El proceso de hallar el área de una tal región se llama cuadratura. El área bajo una curva juega un papel central en Cálculo. Es razonable definir el área como el límite de una suma. Veamos la idea superficialmente.

Dada una función f, continua y no negativa definida en un intervalo $[a, b]$, el esquema general de aproximación del área bajo la curva $y = f(x)$, es el siguiente:

Primeramente construimos una partición de $[a, b]$ (esto es, una serie de puntos ordenados, empezando en a y terminando en b) en n subintervalos de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. En cada subintervalo consideramos el rectángulo de base ese subintervalo y altura el valor de la función en el extremo derecho del subintervalo, y calculamos el área de ese rectángulo. Está claro que la suma de estas áreas, da una estimación del área que queremos calcular.

$$S_n = f(a + \Delta x)\Delta x + f(a + 2\Delta x)\Delta x + \cdots + f(a + n\Delta x)\Delta x,$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Está claro que mientras más puntos tenga la partición, mejor será la aproximación. Esto se consigue haciendo que $\Delta x \to 0$. En Cálculo avanzado se prueba que la continuidad de f implica la existencia de $\lim_{\Delta x \to 0} S_n$ y se usa este límite para definir el área, como se indica a continuación:

Área como límite de una suma:

Supongamos que f es continua y $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$. El área de la región bajo la curva $y = f(x)$ por encima de ese intervalo es

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x)\Delta x + f(a + 2\Delta x)\Delta x + \cdots + f(a + n\Delta x)\Delta x,$$

donde $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

La definición de área como límite de una suma es coherente con el concepto de área introducido en geometría plana. Por ejemplo, no es difícil usar esta fórmula para demostrar que el área de un rectángulo es $A = bh$, o que la de un triángulo es $A = \frac{1}{2}bh$. Hay que hacer notar, no obstante que, aunque decimos que la fórmula $A = bh$ es la definición del área de un rectángulo, en el caso del área bajo una curva lo propio es definirla como el límite de la suma.

5.2. Concepto de integral definida

No sólo el área, sino también otras magnitudes como la distancia, el volumen, la masa y el trabajo se pueden aproximar primero por sumas, y luego se puede obtener exactamente tomando límites de esas sumas. La clase especial de límites que aparece en este contexto se llama *la integral definida*, en honor al matemático alemán Bernhard Riemann, que fue el inventor del proceso. Vamos a describir la integración como una generalización del método de cálculo de áreas que hemos introducido anteriormente. Después introduciremos un instrumento clave para la integración, el Teorema Fundamental del Cálculo.

Sumas de Riemann

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, b]$. Nos planteamos el problema de calcular el área R delimitada bajo la curva $y = f(x)$ (concretamente, el área comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas verticales $x = a$, $x = b$ y el eje de abcisas).

Usaremos un método de aproximación basado en rectángulos, cuyas áreas son fáciles de calcular. Consideremos una partición del intervalo $[a, b]$, esto es, una serie de puntos ordenados (pero no necesariamente aquiespaciados):

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, llamemos $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ (longitud del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$) y tomemos un punto arbitrario $\lambda_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Para cada k, construimos el rectángulo de base $[x_{k-1}, x_k]$ y altura $f(\lambda_k)$. El área de dicho rectángulo será $f(\lambda_k)\Delta x_k$. Sumando ahora el área de los rectángulos, obtenemos una aproximación al área R, denominada *suma de Riemann*:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\Delta x_k.$$

Esto es una generalización de los cálculos de áreas que hemos tratado antes. Siempre que escribamos

$$\sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\Delta x_k$$

se le llamará una *suma de Riemann*. Se usan las sumas de Riemann para hallar la integral correcta para una aplicación correcta.

Integral Definida

Comparando la suma de Riemann con la S_n que usábamos en la sección anterior para el cálculo del área, vemos que ésta última es un tipo especial de aquella con

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{y} \quad \lambda_k = a + k\Delta x, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Como cada intervalo de la partición P asociada con S_n tiene longitud Δx, la norma de la partición (es decir, lo que mide cada subintervalo de la partición) es $\|P\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$. Este tipo de partición se llama *partición regular*.

Cuando escribimos que el área bajo la curva $y = f(x)$ es $A = \text{lím}_{\Delta x \to 0} S_n$, estamos diciendo que se puede aproximar A con la precisión que se desee hallando una suma de Riemann de la forma S_n con norma $\|P\| = \frac{b-a}{n}$ lo suficientemente pequeña, o lo que es lo mismo, hacer n lo suficientemente grande. Es lógico pensar que, haciendo un paso al límite (esto es, $\|P\| \to 0$, o lo que es equivalente $n \to \infty$), las sumas de Riemann tenderán al área buscada R. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 5.2.1. Sea f una función definida en el intervalo cerrado $[a, b]$. Decimos que f es *integrable* en $[a, b]$ si existe (es un número real) el límite

$$I = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\Delta x_k, \quad \text{(ó equivalentemente)} \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)\Delta x_k.$$

En tal caso, a dicho límite se le llama *integral definida* de f entre a y b, y se representa

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Si existe el límite de una suma de Riemann de f cuando $\|P\| \to 0$ y es finito, decimos que f es integrable. Esto significa, en particular, que se puede aproximar el número I hasta el grado de precisión que se quiera mediante cualquier suma de Riemann de f con norma suficientemente pequeña.

Observemos que en la definición anterior, f no necesita ser continua ni tomar valores positivos. Cuando esto sucede, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ representa el área bajo la curva $y = f(x)$:

Área como integral

Supongamos que f es continua y que $f(x) \geq 0$ en el intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces el área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es la integral definida de f en $[a, b]$, es decir

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx.$$

Normalmente usamos las integrales para calcular áreas, pero a veces podemos usar las áreas para calcular integrales. En el punto en que estamos, no es fácil calcular sumas de Riemann. Por tanto, si se ve que una integral representa el área de una figura geométrica conocida, se puede usar la fórmula del área para hallar la integral.

Observación

Puede probarse que la definición de integral definida que hemos dado no depende de la partición que tomemos ni de los puntos λ_k que elijamos.

Podemos definir como límites de sumas otras magnitudes distintas del área. Una de ellas es la distancia. Lo enunciamos sin entrar en detalle:

Distancia:

La *distancia recorrida por un móvil* con velocidad continua $v(t)$ a lo largo de una recta desde el instante $t = a$ al instante $t = b$ es

$$S = \int_a^b |v(t)|dt.$$

Al definir $\int_a^b f(x)dx$ hemos supuesto $a < b$. Podemos ampliar la definición al resto de casos como sigue:

Definición 5.2.2 (Definiciones de dos integrales definidas especiales)**.**

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

Se tienen los siguientes resultados importantes:

Teorema 5.2.1. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Podemos generalizar este resultado:

Teorema 5.2.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, salvo quizás en un número finito de puntos en los que hay discontinuidades evitables o de salto finito, entonces f es integrable. Además, si los puntos de discontinuidad son $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_n}^b f(x)dx.$$

Propiedades de la integral definida

En los cálculos con integrales son a menudo útiles las siguientes propiedades elementales que se enuncian en el siguiente teorema:

Teorema 5.2.3. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables en $[a, b]$:*

- *Regla de linealidad: La función $rf + sg$ es también integrable en $[a, b]$ para todo par de constantes r y s y*

$$\int_a^b [rf(x) + sg(x)]dx = r\int_a^b f(x)dx + s\int_a^b g(x)dx.$$

- *Regla de subdivisión : Si $a \leq c \leq b$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

suponiendo que existan todas las integrales.

- *Si $f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

- *Regla de dominación: Si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- *Si $m \leq f(x) \leq M$ para cada $x \in [a, b]$, entonces*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a).$$

La interpretación geométrica de esta propiedad es sencilla: el área bajo la curva $y = f(x)$ está comprendida entre las áreas de dos rectángulos, uno pequeño y otro grande.

5.3. El Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

En el Tema 2 dimos una herramienta matemática muy útil, llamada el teorema del valor medio del Cálculo Diferencial, que dice que, bajo hipótesis razonables, hay al menos un número c en el intervalo $[a, b]$ tal que el valor de la derivada en $x = c$ es igual a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

El teorema del valor medio del cálculo integral es similar y, en el caso especial en que $f(x) \geq 0$, tiene una interpretación geométrica que facilita su comprensión. En particular, el teorema dice que se puede hallar al menos un número c en el intervalo $[a, b]$ tal que el área del rectángulo de altura $f(c)$ y base $b - a$ es la misma que la de la región bajo la curva en $[a, b]$.

Teorema 5.3.1 (Teorema del valor medio del cálculo integral). *Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$, existe al menos un número c entre a y b tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Este teorema no dice cómo hallar c: simplemente afirma su existencia.

Hay muchas situaciones prácticas en las que interesa hallar el valor medio de una función continua en un intervalo. Ejemplos de estas situaciones son el hallar el valor medio del nivel de contaminación atmosférica en un día, la productividad media de un trabajador en un proceso de fabricación, etc. Se pueden calcular las medias de este tipo por la fórmula que damos en la definición siguiente:

Definición 5.3.1 (Valor Medio). Si f es continua en el intervalo $[a, b]$, el *valor medio* de f en ese intervalo es el número

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Como vemos, el valor medio de una función continua f en un intervalo $[a, b]$, no es más que el valor $f(c)$ del teorema del valor medio del cálculo integral.. En otras palabras, podemos decir que, una función debe tomar su valor medio al menos una vez en un intervalo $[a, b]$ en el que la función es continua.

Esta afirmación es muy razonable porque el teorema del valor intermedio para funciones continuas nos dice que una función continua toma todos los valores entre su máximo M y su mínimo m, y es de esperar que el valor medio esté entre esos dos.

Ejemplo

Supongamos que x horas después de medianoche, la temperatura en una cierta ciudad de Europa Central obedece aproximadamente a la fórmula

$$T(x) = 2 - \frac{1}{7}(x-13)^2.$$

Hallar la temperatura mediaentre las 2:00 y las 14:00, y la hora a la que se alcanza dicha temperatura media.

Queremos hallar la temperatura media en el intervalo $[2, 14]$. Este valor medio es

$$T = \frac{1}{14-2}\int_2^{14}\left[2 - \frac{1}{7}(x-13)^2\right]dx = \frac{1}{12}\left[2x - \frac{1}{7}\frac{1}{3}(x-13)^3\right]_2^{14}$$

$$\frac{1}{12}\left[\frac{587}{21} - \frac{1415}{21}\right] \approx -3,2857143.$$

Esto significa que la temperatura media en ese intervalo horario es de, aproximadamente, 3,2857143 grados bajo cero. Para hallar cuándo se alcanza dicha temperatura, se resuelve la ecuación:

$$\text{TEMP. MEDIA} = \text{TEMP. EN EL INSTANTE } x \leftrightarrow -3,2857143 = 2 - \frac{1}{7}(x-13)^2$$

$$37 = (x-13)^2 \leftrightarrow x = 13 \pm \sqrt{37} \approx 19,082763 \text{ ó } 6,9172375.$$

El primer valor no es admisible porque se pasa de las 14:00 horas, luego la temperatura media se alcanza 6,917 horas después de medianoche, o sea, a las 06:55, aproximadamente.

5.4. Resultados fundamentales: Teorema Fundamental del Cálculo y Regla de Barrow

Se han visto ya dos de las principales ramas del Cálculo: el Cálculo Diferencial (presentado con el problema de la recta tangente) y el Cálculo Integral (el problema del área). En este punto, podría parecer que estos dos problemas no se relacionan, aunque tienen una conexión muy estrecha. La conexión fué descubierta independientemente por Isaac Newton y Gottfried Leibniz.

Hemos visto que se puede aproximar numéricamente el valor de una integral definida y que, usando fórmulas sumatorias, se pueden calcular algebraicamente algunas integrales. Estos métodos son complicados y es dudoso que la integración fuera una herramienta tan potente si ésas fueran las únicas maneras de calcular una integral.

Por otro lado, a simple vista, parece que la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ (que es un número) no tiene nada que ver con la integral indefinida $\int f(x)dx$ (que es un conjunto de funciones) estudiado en el tema anterior. Entonces ? 'por qué usamos el mismo símbolo $\int$ para ambos conceptos?. Dicho de otro modo ¿qué relación hay entre las integrales definida e indefinida?.

Presentaremos en esta sección resultados que enuncian la conexión entre los problemas del Cálculo arriba mencionado y que relacionan las integrales definidas e indefinidas, además de darnos un medio para poder calcular las integrales definidas.

Teorema 5.4.1 (Teorema Fundamental del Cálculo). *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable. Definamos la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ como*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$

Entonces F es continua en $[a, b]$. Además, si f es continua en $[a, b]$, entonces F es derivable en $[a, b]$ y $F' = f$, dicho de otro modo, F es una primitiva de f.

Este teorema dice simplemente, que toda función continua tiene primitiva, que puede escribirse además como $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Es muy importante notar que la variable x aparece en el símbolo de la integral, por lo que variamos el intervalo de integración: para cada x integramos f en el intervalo $[a, x]$.

Ejemplo (Aplicación del Teorema Fundamental del Cálculo)

Calcular la derivada de $\displaystyle\int_0^x \sqrt{t^2+1}dt$.

Observemos que $f(t) = \int_0^x \sqrt{t^2+1}dt$ es continua en toda la recta real. Aplicando, por tanto, el Teorema Fundamental del Cálculo que acabamos de ver se obtiene

$$\left(\int_0^x \sqrt{t^2+1}dt\right)' = \sqrt{x^2+1}$$

Este ejemplo constituye una aplicación directa del Teorema Fundamental del Cálculo.

A veces es necesario derivar una integral en la que uno de los límites de integración es una función. Concretamente, supongamos que $u(x)$ es una función de x, derivable, y que F es la función definida por

$$F(u) = \int_a^{u(x)} f(t)dt,$$

donde f es una función continua. Entonces F es una función de u y el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que

$$F'(u) = \left(\int_a^u f(t)dt \right)' = f(u).$$

Sin embargo, se puede considerar a F como la composición de dos funciones, la función $u(x)$, y la función $G(y) = \int_a^y f(t)dt$. Es claro que $F(x) = (G \circ u)(x)$, Así que, aplicando la regla de la cadena, tenemos que la derivada de la función F es

$$F'(x) = G'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Por tanto

$$F'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x).$$

<u>**Ejemplo**</u>

Hallar la derivada de la función $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^3} \cos t dt$.

Haciendo $u(x) = x^3$, podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo junto con la regla de la cadena.

$$F'(x) = F'(u(x))u'(x) = \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{x^3} \cos t dt \right)' = (\cos u(x)) \cdot (3x^2) = \cos x^3 \cdot 3x^2.$$

Más generalmente, se puede derivar una integral cuyos límites de integración sean ambos funciones derivables aplicando el siguiente resultado:

Teorema 5.4.2 (Regla de Leibniz). *Si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones de x derivables, entonces*

$$\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt \right)' = f(u(x)) \cdot u'(x) - f(v(x)) \cdot v'(x).$$

<u>**Ejemplo**</u> (Aplicación de la Regla de Leibniz)

Derivar la función $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2-3x} \tan t dt$.

Aplicaremos la regla de Leibniz con $f(t) = \tan t$, $u(x) = x^2 - 3x$ y $v(x) = \sqrt{x}$. Así,

$$u'(x) = 2x - 3 \quad \text{y} \quad v'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$$

luego

$$F'(x) = (2x-3)\tan(x^2-3x) - \tan\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = (2x-3)\tan(x^2-3x) - \frac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Observación

Una cosa es decir que f posee primitiva y otra muy distinta calcularla. Por ejemplo, el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la función continua $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ posee primitiva, que puede calcularse como $\int_a^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$ (aquí a es arbitraria). Sin embargo, puede demostrarse que $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ no posee primitiva expresable en términos elementales, es decir, como combinación y composición de funciones racionales, logaritmos, exponenciales, radicales y funciones trigonométricas.

Según el comentario anterior, el Teorema Fundamental del Cálculo tiene interés teórico, pero no nos sirve para el cálculo de primitivas. El siguiente resultado será fundamental para el cálculo efectivo de integrales definidas a partir del cálculo de primitivas:

Teorema 5.4.3 (Regla de Barrow (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y sea F cualquier función primitiva de f, o sea, que verifique que $F'(x) = f(x)$ en ese intervalo, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \equiv [F(x)]_a^b.$$

La Regla de Barrow (también llamada Segundo Teorema Fundamental del Cálculo), nos permite calcular la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ del siguiente modo:

- Primero calculamos una primitiva F de f, usando alguno de los métodos de integración que hemos estudiado.

- Después, basta evaluar F en los extremos del intervalo, a y b, y restar.

La cuestión de la existencia de una primitiva es importante y hemos dicho que siempre existe en el caso de que f sea continua en $[a,b]$. De hecho, la existencia de una primitiva es una cuestión tan importante como el cálculo de la integral definida. Por eso estos resultados son los Teoremas Fundamentales del Cálculo. De hecho, en algunos textos, la Regla de Barrow (o Segundo Teorema Fundamental del Cálculo) aparece como Teorema Fundamental del Cálculo y el Teorema Fundamental del Cálculo que hemos enunciado, aparece como Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

Ejemplo

Calculemos $\displaystyle\int_0^\pi \cos(2x)dx$.

La función $\cos(2x)$ es continua en el intervalo $[0, \pi]$ (es continua en todo su dominio, que es $\mathbb{R}$), así que podemos usar la Regla de Barrow para calcular la integral $\int_0^\pi \cos(2x)dx$, por tanto, primero calculamos una primitiva de $\cos(2x)$:

$$\int \cos(2x)dx = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}.$$

A continuación evaluamos esa primitiva en los límites de integración y restamos:

$$\int_0^\pi \cos(2x)dx = \left[\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\right]_0^\pi = \frac{\operatorname{sen}(2\pi)}{2} - \frac{\operatorname{sen}(0)}{2} = 0.$$

Ejemplo (Empleo de la Regla de Barrow para encontrar un área)

Encontrar el área de la región delimitada por la gráfica de $y = 2x^2 - 3x + 2$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

Observemos que $y > 0$ en el intervalo $[0, 2]$.

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)dx$$

La función $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ es continua por ser una función polinómica, entonces podemos usar la Regla de Barrow para calcular la integral definida, para ello hallamos una primitiva de la función, evaluamos en los extremos del intervalo y restamos:

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

5.5. Métodos de Integración para integrales definidas

Alguno de los métodos de integración que hemos estudiado en el tema anterior se pueden adaptar a la integral definida.

CAMBIO DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL DEFINIDA

Teorema 5.5.1 (Cambio de variable en una integral definida)**.** *Supongamos que f es continua en el conjunto de valores que toma g. Si g' es continua en $[a, b]$, y si f tiene una primitiva F en ese intervalo, entonces*

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du \quad \text{donde} \quad u = g(x) \text{ y } du = g'(x)dx$$

siempre y cuando esas integrales existan.

Ejemplo

Calcule $\int_1^2 (4x-5)^3 dx$.

Esta integral se puede hacer de dos formas distintas:

1. Calculamos la integral indefinida mediante el cambio de variable $u = 4x-5$, $du = 4dx$; de este modo

$$\int (4x-5)^3 dx = \int u^3 \frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int u^3 du = \frac{1}{4}\frac{u^4}{4} + C.$$

Deshacemos el cambio

$$\int (4x-5)^3 dx = \frac{1}{4}\frac{(4x-5)^4}{4} + C.$$

Por último usamos la regla de Barrow; consideramos la primitiva para $C = 0$, evaluamos en los extremos del intervalo de integración y restamos:

$$\int_1^2 (4x-5)^3 dx = \left[\frac{1}{4}\frac{(4x-5)^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{16}[3^4 - (-1)^4] = \frac{1}{16}(81-1) = 5.$$

2. Aplicamos el teorema del cambio de variable para integrales definidas, con el mismo cambio de variable que antes; en este caso, si $x = 2$, entonces $u = 4\cdot 2 - 5 = 3$, y si $x = 1$, entonces $u = 4\cdot 1 - 5 = -1$. Por tanto,

$$\int_1^2 (4x-5)^3 dx = \int_{-1}^3 u^3 \frac{du}{4} = \left[\frac{1}{4}\frac{u^4}{4}\right]_{-1}^3 = \frac{1}{16}(81-1) = 5.$$

Observemos que en este caso no se requiere volver a la integral de partida.

INTEGRACIÓN POR PARTES EN UNA INTEGRAL DEFINIDA

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

Esta fórmula es la misma que la de las integrales indefinidas, salvo que el primer sumando de la derecha está evaluado en los límites de integración.

Ejemplo

Calcule $\int_0^1 xe^{-x} dx$.

Esta integral la podemos hacer de dos formas distintas:

1. Primero calculamos $\int_0^1 xe^{-x}dx$ por partes. Hacemos $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$, de donde

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -(x+1)e^{-x} + C.$$

Ahora aplicamos la Regla de Barrow:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^1 = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

2. Aplicamos la fórmula de integración por partes para integrales definidas. Elegimos los mismos u y v:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = e^{-1} + \int_0^1 e^{-x}dx$$

$$= -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

5.6. Integrales impropias

Hemos estudiado la integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ en un intervalo cerrado y acotado, donde el integrando $f(x)$ es una función acotada. En esta sección extendemos la definición al caso en que el intervalo no está acotado y también al caso en que f no está acotado en dicho intervalo. Ambos casos se llaman *integrales impropias*.

5.6.1. Integrales con límites infinito

En física, economía, estadística y otras áreas aplicadas se necesitan integrales sobre toda la recta real o sobre una de sus semirrectas del tipo $x \geq a$ o $x \leq a$. Si $f(x) \geq 0$, la integral de f en la semirrecta $x \geq a$ se puede imaginar como el área bajo la curva $y = f(x)$ en ese intervalo no acotado. Una estrategia razonable para calcular este área es hallar primero el área desde $x = a$ hasta un número $x = N$ y luego tomar el límite en la expresión anterior cuando $N \to \infty$. Así damos la siguiente definición:

Definición 5.6.1 (Integrales impropias: primera clase (intervalo de integración no acotado)). Sea a un número fijo y supongamos que existe $\displaystyle\int_a^N f(x)dx$ para todo $N \geq a$.

Definimos la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ como

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_a^N f(x)dx.$$

Se dice que la integral impropia *converge* si este límite existe (es un número real), y en caso contrario, que *diverge*.

Ejemplo (Integral impropia convergente)
Calcular $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.
Es fácil ver la gráfica d la función. La región no es acotada, luego parece razonable pensar que su área es infinita. Fijemos $N > 1$ y calculemos primero la integral desde 1 hasta N:

$$\int_1^N \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^N = -\frac{1}{N} + 1.$$

Ahora tomamos límite cuando $N \to \infty$. Así,

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^2} = \lim_{N\to\infty} -\frac{1}{N} + 1 = 1.$$

Vemos que, en este caso, la integral impropia es convergente y vale 1.

Ejemplo(Integral impropia divergente)
Calcular $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.
La función que estamos considerando para integral tiene una gráfica parecida a la del ejemplo anterior. Procedemos como en el ejemplo anterior para calcular la integral impropia:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} [\ln|x|]_1^N = \lim_{N\to\infty} \ln N = \infty.$$

Vemos que, en este caso, el límite no es un número, luego la integral impropia es divergente.

Hemos demostrado que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge y $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ diverge. En lenguaje geométrico esto significa que el área a la derecha de $x = 1$ bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$ es finita, mientras que la que hay bajo la curva $y = \frac{1}{x}$ es infinita. La razón de esta diferencia es que, cuando $N \to \infty$, $\frac{1}{x^2}$ tiende a cero más rápidamente que $\frac{1}{x}$.

Ejercicio

Demuestre que la integral impropia $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge solamente si $p > 1$.

Podemos definir también las integrales impropias para intervalos no acotados por la izquierda o para toda la recta real de manera similar a las anteriores.

Definición 5.6.2 (Integrales impropias: primera clase generalizada). Sea b un número fijo y supongamos que existe $\displaystyle\int_N^b f(x)dx$ para todo $N \leq b$.

Definimos la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)dx$ como

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_N^b f(x)dx.$$

Se dice que la integral impropia *converge* si este límite existe (es un número real), y en caso contrario, que *diverge*.

Definimos la integral impropia de f en toda la recta real así:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx,$$

donde a es un número real cualquiera. La integral impropia del miembro de la izquierda *converge* si las dos integrales del miembro de la derecha convergen, y *diverge* si alguna de estas dos integrales diverge.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x dx$.

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{N\to-\infty} \int_N^0 e^x dx = \lim_{N\to-\infty} [1 - e^N] = 1.$$

En este caso la integral impropia es convergente y su valor es 1.

5.6.2. Integrales con integrando no acotado

Si una función es no acotada en un intervalo $[a, b]$, la integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ no está ni siquiera definida porque sólo las funciones acotadas son integrables Riemann. Sin embargo, es posible definir la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ en ciertos casos.

Vamos a entender como *función no acotada en un punto c* aquella que toma valores arbitrariamente grandes en un entorno de c. La versión geométrica de este hecho es que la recta $x = c$, sea asíntota vertical a la gráfica de la función.

Vamos a estudiar un problema concreto. Sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ para $0 < x \leq 1$. La función f no está acotada en ese intervalo (los valores de la función crecen arbitrariamente cuando nos acercamos a cero, luego lo que estamos diciendo es que la función no está acotada en cero) y, por tanto, la integral $\int_0^1 f(x)dx$ no está definida. En cambio, f es continua en cualquier intervalo $[N, 1]$ con $0 < N \leq 1$. Para estos intevalos se tiene:

$$\int_N^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = [2\sqrt{x}]_N^1 = 2 - 2\sqrt{N}.$$

Si hacemos tender N a 0 tomando valores positivos (es decir, consideramos el límite por la derecha en cero), se ve que

$$\lim_{N\to 0^+} \int_N^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{N\to 0^+} (2 - 2\sqrt{N}) = 2.$$

También a ésta se le llama una integral impropia, y toma el valor 2 porque parece razonable definir

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{N\to 0^+} \int_N^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

En el ejemplo anterior, f es no acotada en el extremo izquierdo del intervalo de integración, pero se aplicaría un razonamiento semejante si lo fuera en el extremo derecho, o en cualquier punto interior. Damos una definición de integral impropia de este tipo:

Definición 5.6.3 (**Integrales impropias: segunda clase).** Si f es no acotada en a y existe la integral $\displaystyle\int_N^b f(x)dx$ para todo N tal que $a < N \leq b$, entonces definimos la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to a^+} \int_N^b f(x)dx.$$

Se dice que la integral impropia *converge* si este límite existe, y , en caso contrario, que *diverge*. De manera análoga, si f es no acotada en b y existe la integral $\displaystyle\int_a^N f(x)dx$ para todo N tal que $a \leq N < b$, entonces definimos la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to b^-} \int_a^N f(x)dx.$$

Si f es no acotada en c, donde $a < c < b$ y son convergentes las integrales $\int_a^c f(x)dx$ y $\int_c^b f(x)dx$ entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Se dice que la integral impropia del miembro de la izquierda *diverge* si diverge cualquiera de las dos de la derecha.

Observación

De la definición anterior se desprende que, si una función continua en un intervalo semiabierto es no acotada en uno de los dos extremos, sustituimos ese extremo por N, integramos, y luego tomamos límite lateral cuando N tiende a ese extremo. Si f es continua en un intervalo $[a, b]$ salvo en un cierto punto interior c donde tiene una discontinuidad infnita, se escribe la integral en la forma

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

y se calculan las dos integrales de la derecha (si existen) tomando los límites correspondientes.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$.

Sea $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$. Esta función es no acotada en el extremo derecho del intervalo de integración y es continua en $[0, N]$ para todo N tal que $0 \leq N < 1$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} &= \lim_{N\to 1^-} \int_0^N \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{N\to 1^-} [3(x-1)^{\frac{1}{3}}]_0^N \\ &= 3 \lim_{N\to 1^-} [(N-1)^{\frac{1}{3}} - (-1)] = 3.\end{aligned}$$

Es decir, la integral impropia converge y vale 3.

Ejercicio

Calcular las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sec x dx.$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x-2} dx.$

Observación

En este caso, se divide el intervalo de integración y expresamos la integral como suma de dos integrales de tal modo que pueda resolverse cada una según los casos que hemos estudiado.

Si f es una función integrable en cada intervalo cerrado y acotado (o dicho de otra forma, *localmente integrable*) tal que $f(x) \geq 0$ si $x \geq M$, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f$ converge o es infinito. Entonces se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5.6.1. *Sean f y g funciones localmente integrables tales que $f(x) \leq g(x)$ si $x \geq M$, para cierto $M \in \mathbb{R}$. Si $\int_a^\infty g(x)dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ también es convergente, y si $\int_a^\infty f(x)dx$ es divergente, entonces $\int_a^\infty g(x)dx$ también es divergente.*

Teorema 5.6.2. *Sean f y g funciones localmente integrables tales que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$, $f(x), g(x) \geq 0$ si $x \geq M$, para cierto $M \in \mathbb{R}$.*

- *Si $l \in (0, \infty)$, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ converge si y sólo si $\int_a^\infty g(x)dx$ converge.*
- *Si $l = 0$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$.*
- *Si $l = \infty$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.*

Los dos teoremas anteriores son válidos también cuando $x \to -\infty$ ó cuando $x \to \alpha \in \mathbb{R}$, si se modifican las hipótesis de manera evidente.

Teorema 5.6.3. *Si $\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente y existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Dicho de otra forma, si existe el límite $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y es distinto de cero, entonces $\int_a^\infty f(x)dx$ es divergente .*

El recíproco del teorema anterior no es cierto.

5.7. Integración numérica: Métodos de los trapecios y método de Simpson

Se puede usar la Regla de Barrow para hallar una integral definida si se conoce una primitiva del integrando. Sin embargo, algunas funciones no tienen primitivas sencillas. Para calcular integrales definidas de estas funciones hay que recurrir a aproximaciones numéricas.

Si $f(x) \geq 0$ en el intervalo $[a, b]$, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ es igual al área bajo la gráfica de f en $[a, b]$. Ya hemos visto que una manera de aproximar este área es usar n rectángulos.

En particular, se puede dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ellos de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; designemos por x_k^* al extremo derecho del subintervalo k-ésimo. La base del rectángulo k-ésimo es el subintervalo k-ésimo, y su altura es $f(x_k^*)$. Por tanto, el área del rectángulo k-ésimo es $f(x_k^*)\Delta x$. La suma de las áreas de esos n rectángulos es una aproximación del área bajo la curva y, por tanto, una aproximación de la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x.$$

Esta aproximación mejora cuando aumenta el número de rectángulos, y podemos aproximar la integral hasta la precisión que queramos con tal de tomar n lo bastante grande. Sin embargo este método se usa poco en la práctica, porque normalmente se requiere un número elevado de rectángulos para conseguir una aproximación razonable.

En esta sección estudiaremos aproximaciones por trapecios y por arcos de parábola (regla de Simpson).

5.7.1. Polinomio de interpolación

Supongamos conocidos $n+1$ valores y_0, y_1,...,y_n correspondientes a $n+1$ puntos distintos x_0, x_1,...,x_n. Estos valores pueden ser los que toma una cierta función f en los puntos x_i (esto es, $y_i = f(x_i)$), o bien valores observados experimentalmente correspondientes a los puntos x_i. El polinomio de interpolación es un polinomio $p(x)$ de grado mínimo que tome en cada x_i el valor y_i:

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \cdots, n.$$

El polinomio de interpolación permite:

- Obtener nuevos valores aproximados de la función desconocida f en otros puntos x^* distintos de los x_i : aproximamos $f(x^*)$ por $p(x^*)$.
- Dar una expresión analítica polinomial que represente al conjunto de los puntos (x_i, y_i).

El polinomio de interpolación existe y es único.

Nuestro objetivo principal es dar métodos que permitan aproximar el valor de una integral definida $\int_a^b f(x)dx$ cuando no podemos determinarla mediante un cálculo directo. La idea básica consiste en aproximar la función $f(x)$ por el polinomio de interpolación $p(x)$ en ciertos puntos x_0, x_1,...., x_N (dependiendo de los puntos de interpolación que elijamos, obtendremos distintos métodos), con ordenadas $f(x_0)$, $f(x_1)$,..... $f(x_N)$, hacer:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=0}^{N} A_i f(x_i)$$

donde cada A_i es una constante.

A la expresión final se le conoce como *fórmula de integración numérica*.

Observación

Expliquemos un poco la expresión anterior. Simplememte estamos diciendo que estamos tomando $\int_a^b p(x)dx$ como aproximación de $\int_a^b f(x)dx$. Al ser $p(x)$ un polinomio, su integral es sencilla de calcular y dará como resultado una expresión de la forma $\sum_{i=0}^{N} A_i f(x_i)$, donde cada A_i es una constante.

La eficacia de la fórmula de integración numérica se mide por el grado n del espacio de polinomios para los que la fórmula es exacta, es decir, integra exactamente todos los polinomios de grado menor o igual que n. Dicho de otra forma, la fórmula de integración numérica $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N} A_i f(x_i)$ tiene grado n si:

$$\int_a^b q(x)dx = \sum_{i=0}^{N} A_i q(x_i), \quad \forall q \in \mathcal{P}\backslash$$

donde $\mathcal{P}\backslash$ es el espacio de los polinomios de grado menor o igual que n y existe algún polinomio $\tilde{q}(x)$ de grado $n+1$ de modo que:

$$\int_a^b \tilde{q}(x)dx = \sum_{i=0}^{N} A_i \tilde{q}(x_i).$$

Mientras mayor sea el grado de exactitud, más precisa será la fórmula de integración numérica.

Para calcular el grado de exactitud de una fórmula de integración recurrimos al siguiente resultado:

Teorema 5.7.1. *Una fórmula de integración numérica tiene grado n si y sólo si integra exactamente los polinoimios* $1, x, x^2, \cdots, x^n$ *y no integra exactamente el polinomio* x^{n+1}.

5.7.2. Métodos simples de integración numérica

A continuación vamos a estudiar dos fórmulas de integración muy usuales. En lo que sigue supondremos que f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Denotaremos por $x_0, x_1, \cdots, x_N$ a los puntos donde interpolamos, cuyas correspondientes ordenadas son $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_N)$.

Método de los trapecios

Consideremos un polinomio de interpolación de grado uno, concretamente el polinomio que interpola a los extremos a y b (recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$:

$$p(x) = \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{x-b}{a-b} f(a).$$

Su integral se calcula fácilmente:

$$\int_a^b p(x)dx = \frac{f(b)}{b-a}\left[\frac{x^2}{2} - ax\right]_a^b + \frac{f(a)}{a-b}\left[\frac{x^2}{2} - bx\right]_a^b = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Obtenemos así el *método de los trapecios*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Geométricamente, aproximamos el área bajo la curva $y = f(x)$ por el área del trapecio que define la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

El grado de exactitud de la método de los trapecios es uno.

Ejemplo

Aproximar $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)dx$ mediante el método de los trapecios.

Tenemos que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)dx \approx \frac{\pi}{4}(\operatorname{sen}(0) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 07854.$$

Método de Simpson

Usaremos un polinomio de interpolación de grado dos asociado a los puntos a, $\frac{a+b}{2}$ y b; para no complicar la notación, llamaremos $m = \frac{a+b}{2}$. El polinomio de interpolación es:

$$p(x) = \frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)}f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)}f(m) + \frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}f(b).$$

Integrando, obtenemos el *método de Simpson o de las parábolas*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Geométricamente, aproximamos el área bajo la curva $y = f(x)$ por el área bajo la parábola $y = p(x)$

El grado de exactitud del método de Simpson es tres.

Ejemplo

Aproximar $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)dx$ mediante el método de Simpson.

En este caso,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)dx \approx \frac{\pi}{12}(\operatorname{sen}(0) + 4\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{12}(1 + 2\sqrt{2}) \approx 1,0022.$$

5.7.3. Métodos compuestos de integración numérica

Para aproximar con precisión la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ se procede del siguiente modo:

1. Se divide el intervalo $[a, b]$ en n partes: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Generalmente se tomarán las partes iguales.
2. Se aplica en cada subintervalo alguna de las fórmulas de integración simple vistas anteriormente. Aunque no es necesario aplicar el mismo método en cada subintervalo, lo haremos así por simplicidad.

En general, mientras más subintervalos tomemos mejor será la aproximación. Este procedimiento da lugar a los llamados *métodos compuestas*.

Método de los trapecios compuesto

Sean $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$. Aplicando el método de los trapecios simple en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, obtenemos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \frac{x_{i+1} - x_i}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Por tanto, sumando:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Simplificando obtenemos el *método de los trapecios compuesto*:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right).$$

Ejemplo

Aproximar $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ mediante el método de los trapecios compuesto con paso $h = 0,25$.

En este caso obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \approx \frac{1}{8}[f(0) + f(1) + 2(f(0,25) + f(0,5) + f(0,75))] \approx 0,697.$$

Método de Simpson compuesto

En este caso dividiremos el intervalo $[a, b]$ en un número par de subintervalos; así, escribiremos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx,$$

donde n es par. Aplicamos el método de Simpson simple en cada trozo, teniendo en cuenta que la longitud de los subintervalos es $2h$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \frac{2h}{6}\left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i+2}+x_i}{2}\right) + f(x_{i+2})\right].$$

Por construcción, se tiene que $\frac{x_{i+2}+x_i}{2} = x_{i+1}$; por tanto:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})].$$

Sumando, obtenemos el *método de Simpson compuesto*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\frac{b-a}{3n}(f(a)+f(b)+2[f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{n-2})]+4[f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{n-1})]).$$

Ejemplo

Aproximar $\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ mediante el método de Simpson compuesto con paso $h = 0,25$. Podemos aplicar el método de Simpson, ya que $n = 4$ es par. Obtenemos:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx \approx \frac{1}{12}[f(0) + f(1) + 2f(0,5) + 4(f(0,25) + f(0,75))] \approx 0,6932.$$

5.7.4. Estimación del error

La diferencia entre el valor de la integral y su valor estimado se llama el *error*. Como el error depende de n, lo designaremos por E_n.

Teorema 5.7.2 (Error en las reglas del trapecio y de Simpson)**.** *Si f tiene derivada segunda continua en $[a,b]$, entonces el error de aproximación de $\int_a^b f(x)dx$ por la regla del trapecio verifica*

Error del trapecio:

$$|E_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}M$$

donde M es el máximo de $|f''(x)|$ en $[a,b]$.

Más aún, si f tiene derivada cuarta continua en $[a,b]$, entonces el error E_n (con n par) de aproximar $\int_a^b f(x)dx$ por la regla de Simpson verifica

Error de Simpson

$$|E_n| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}K$$

donde K es el máximo de $|f^{(4)}(x)|$ en $[a,b]$.

Ejemplo

Hallar la precisión de la aproximación de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ por la regla de Simpson cuando $n = 10$.

Si $f(x) = \frac{1}{x}$, tenemos que $f^{(4)}(x) = 24x^{-5}$. El máximo de esta función se alcanza en un valor crítico (no hay ninguno en $[1,2]$) o en un extremo. Así se ve que el valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ en $[1,2]$ es $|f^{(4)}(1)| = 24$. Apliquemos la fórmula del error con $K = 24$, $a = 1$, $b = 2$ y

$$|E_n| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4}K = \frac{24(2-1)^5}{180(10)^4} \approx 0,0000133.$$

Esto quiere decir que el error cometido en la estimación de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ por la regla de Simpson cuando $n = 10$ es menor o igual que 0,0000133.

En virtud de las acotaciones del error, se puede decidir de antemano cuántos subintervalos se deben usar para lograr una precisión fija.

Ejemplo

Hallar cuántos subintervalos necesitaremos para lograr un error menor que 0,00005 en la aproximación de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, usando la regla del trapecio.

Como $f(x) = x^{-1}$, se tiene que $f''(x) = 2x^{-3}$. El máximo de $|f''(x)|$ en $[1,2]$ es $|f''(1)| = 2$, luego $M = 2$, $a = 1$, $b = 2$ y

$$|E_n| \leq \frac{2(2-1)^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}.$$

Hay que hallar el menor entero n que verifica que $\frac{1}{6n^2} < 0,00005$, o sea, multiplicando por $60000n^2$, tal que $10000 < 3n^2$. Así se tiene

$$10000 - 3n^2 < 0 \Rightarrow (100 - \sqrt{3}n)(100 + \sqrt{3}n) < 0$$

lo que implica que

$$n < -\frac{100}{\sqrt{3}} \quad \text{ó} \quad n > \frac{100}{\sqrt{3}} \approx 57,735027.$$

El menor entero positivo que verifica la condición es $n = 58$. Se necesitan, por tanto, 58 subintervalos para llegar a la precisión requerida.