Capítulo 3

Cálculo Diferencial

En este tema centraremos nuestra atención en el concepto de derivada, y daremos reglas para calcularlas.

La derivada es una de las ideas fundamentales del Cálculo y la piedra angular de las matemáticas superiores.

Si conocemos la mecánica de la derivación, podemos pensar que ya conocemos todo lo que va a contener este tema, pero, la idea de derivadas es mucho más que las reglas para calcularlas. Además de calcular derivadas hay que entender el concepto de derivada si se quiere ser capaz de usar las matemáticas para hacer juicios en la investigación científica.

Este capítulo es de fundamental importancia dentro del Cálculo. Vamos a desarrollar las ideas principales del Cálculo Diferencial. El concepto central dentro del Cálculo Diferencial es el concepto de derivada.

3.1. El concepto de derivada. Recta tangente

Los antiguos matemáticos griegos ya construian tangentes a circunferencias y otras curvas sencillas. Sin embargo, antes del siglo XVII, no se tenía un procedimiento para hallar la ecuación de la tangente a la gráfica de una función en un punto dado. Para resolver este problema, Isaac Newton usó un método del matemático francés Pierre de Fermat. Este método conduce a la definición de derivada.

3.1.1. El concepto de derivada

Idea física.

Vamos a hablar de un problema físico en el que aparece la derivada. Es el problema de la velocidad instantanea.

Consideremos un movil que se desplaza sobre una recta (movimiento unidimensional). Sea $s(t)$ la posición del movil en el instante de tiempo t.

Objetivo: determinar la velocidad instantanea del movil en un instante de tiempo particular, t_0.

Sea t un instante de tiempo con $t_0 < t$ y consideremos $s(t_0)$ y $s(t)$. La velocidad media del movil entre los instantes t_0 y t es:

$$\frac{\text{espacio recorrido}}{\text{tiempo empleado en recorrerlo}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Nos preguntamos si podemos definir la velocidad instantanea en el instante de tiempo t_0.

Si hacemos medias en intervalos de tiempo muy pequeños $\dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ estará “cerca”de la “velocidad instantanea.$^{\text{en}}$ t_0.

Así, se define la “velocidad instantanea”de la partícula en el instante t_0 como

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Idea geométrica.

Nos planteamos ahora un problema diferente: el cálculo de la recta tangente.

En matemáticas elemental se define la tangente a una circunferencia como una recta del plano que corta a la circunferencia en un único punto. Este punto de vista es demasiado restrictivo para el Cálculo. Vamos a estudiar el concepto general de tangente a una curva (no necesariamente una circunferencia) en un punto dado. Dada la gráfica de una función $y = f(x)$, y dado un punto x_0 del dominio de f, queremos determinar la recta tangente a la gráfica en el punto $P(x_0, f(x_0))$.

Para definir una recta en el plano, necesitamos un punto por el que pasa y la pendiente de dicha recta. En general, no es un asunto sencillo determinar la pendiente de la recta tangente. La razón es que para calcular esta pendiente necesitamos conocer por ejemplo la inclinación de la recta con el eje horizontal, o conocer dos puntos de la misma, luego aparte del punto de tangencia, hay que conocer otro punto. La estrategia consiste en aproximar la recta tangente por otras rectas que pasan por el punto P y cuyas pendientes se puedan calcular fácilmente (porque se conozcan dos puntos). Se tratan de las rectas secantes, que son rectas que cortan a la curva pero no son tangentes, las cuales pasan por P (el de tangencia) y otro punto $Q(x, y)$.

Está claro que una recta secante es una buena aproximación de la recta tangente, siempre que el punto Q esté próximo a P (mientras más próximo mejor aproximación), ya que mientras más próximo esté x de x_0, más próximo está $f(x)$ de $f(x_0)$. Esto da una idea intuitiva de cómo definir la pendiente de la recta tangente.

La pendiente de la recta secante a la gráfica en los puntos $P(x_0, f(x_0))$ y $Q(x, f(x))$ es:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Para hacer que la recta secante se aproxime a la recta tangente, se mueve Q hacia P sobre la gráfica de f, por el procedimiento de hacer tender x a x_0. Cuando esto ocurre, la pendiente de la recta secante se debe aproximar a la pendiente de la recta tangente en P.

Esto nos lleva a la siguiente definición:

<u>Pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto.</u>

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es el número dado por la fórmula:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

siempre y cuando el límite exista.

Hay otro procedimiento distinto para calcular la recta tangente a una función f en el punto $P(x_0, f(x_0))$; y es, determinando el ángulo α que forma la gráfica $y = f(x)$ en x_0 con el eje de abcisas

Gráficamente podemos comprobar que el ángulo α_x se puede determinar a partir de su tangente del siguiente modo:

$$\operatorname{tg}(\alpha_x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

<u>Ejercicios:</u>

1. Calcula la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2$ en el punto $P(-1, 1)$.
2. Calcula la fórmula de la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$.

Todas las ideas que hemos analizado anteriormente, dan pie a la definición formal de derivada:

Definición 3.1.1. Sean $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$.

Se dice que f es *derivable en* x_0 si existe (es un número real) el siguiente límite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

En tal caso, a este límite se le llama *la derivada de la función* f *en el punto* x_0 y se denota por $f'(x_0)$.

Se dice que f es *derivable en* (a, b) si es derivable en todos los puntos de (a, b).

Si consideramos el conjunto $A = \{x \in (a, b) : f$ es derivable en $x\}$ y $A \neq \emptyset$, podemos definir la función

$$f' : A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x).$$

A esta función se le llama *función derivada de* f. (A veces, por abuso del lenguaje se le llama simplemente la derivada de f).

Observaciones

1. f es derivable en x_0 si y sólo si existe (es un número real) el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

(Basta comprobar la igualdad

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.)$$

2. El concepto de derivada es local: si f y g son dos funciones que coinciden en un intervalo que contiene al punto x_0 (es decir, son iguales en ese intervalo), entonces f es derivable en x_0 si y sólo si g es derivable en x_0, y en este caso $f'(x_0) = g'(x_0)$.

Ejemplos

1. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$, donde $c \in \mathbb{R}$.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$, ¿ es f derivable en x_0 ?.

Para todo $x \neq x_0$ se tiene

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = \frac{0}{x - x_0} = 0,$$

por tanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0.$$

Luego f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$. Como esto es válido para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos asegurar que f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x) = 0.$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$. (Función identidad).

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Para todo $x \neq x_0$ se tiene

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$

por tanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1.$$

Luego f es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y $f'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x) = 1.$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Para todo $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0,$$

por tanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0 = 2x_0.$$

Luego f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 2x$.

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x) = 2x.$$

4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$.

Esta función va a ser derivable en $\mathbb{R} - 0$. (En los puntos donde aparecen "picos", la función no es derivable).

Sea $x_0 > 0$. Podemos considerar la función $g : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Debido al caracter local de la derivada, estudiar la derivabilidad en x_0 de la función f equivale a estudiar la derivabilidad en x_0 de la función g.

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1, \quad \text{para todo } x \neq x_0,$$

luego si $x_0 > 0$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = 1.$$

La función f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 1$.

De igual forma, si $x_0 < 0$, f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = -1$.

Estudiemos la derivabilidad en 0. Para todo $x \neq 0$ tenemos

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Vemos que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}.$$

Por tanto, f no es derivable en 0.

$$f' : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

DERIVADAS LATERALES .

En la definición de derivada tiene sentido considerar los ímites laterales, dando lugar a los conceptos de derivadas laterales:

Definición 3.1.2. Sea $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in (a,b)$.

La función f es *derivable por la derecha en* x_0 si existe el límite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

En tal caso, a este límite se le llama *derivada de* f *en* x_0 *por la derecha* y lo denotamos $f'_+(x_0)$:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La función f es *derivable por la izquierda en* x_0 si existe el límite

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

En tal caso, a este límite se le llama *derivada de* f *en* x_0 *por la izquierda* y lo denotamos $f'_-(x_0)$:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Como consecuencia de estas definiciones se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.1.1. *Una función, f, es derivable en un punto x_0 si y sólo si es derivable por la izquierda y por la derecha en x_0 y la derivada por la derecha y por la izquierda coinciden*

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Ejemplos

1. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

La función f es derivable por la izquierda y por la derecha en 0 y

$$f'_+(0) = 1, \quad \text{y} \quad f'_-(0) = -1.$$

Sin embargo, puesto que las derivadas laterales no coinciden, f no es derivable en 0.

2. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

Si $x_0 > 0$, $f(x) = x$ para todo $x \in \left(x_0, \frac{x_0}{2}\right)$, luego f es derivablle en x_0 y $f'(x_0) = 1$.

Si $x_0 < 0$, $f(x) = x^2$ para todo $x \in \left(x_0, \frac{|x_0|}{2}\right)$, luego f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 2x_0$.

Veamos si f es derivable en 0. Para ello estudiemos las derivadas laterales

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{luego} \quad f'_+(0) = 1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0 \quad \text{luego} \quad f'_-(0) = 0.$$

Vemos que f es derivable por la izquierda y por la derecha en 0, pero no es derivable en 0.

Ejercicio.

Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}.$$

En general, una función no va a ser derivable en los puntos donde la gráfica tenga un "pico". Tampoco va a ser derivable en los puntos de discontinuidad según el siguiente resultado:

Teorema 3.1.2. *Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in (a, b)$.*

1. *Si f es derivable en x_0 por la derecha entonces f es continua en x_0 por la derecha.*
2. *Si f es derivable en x_0 por la izquierda entonces f es continua en x_0 por la izquierda.*
3. *Si f es derivable en x_0 por la derecha y por la izquierda entonces f es continua en x_0.*

Observemos que en el tercer apartado del teorema no se pide que f sea derivable en x_0. Las derivadas laterales no tienen que coincidir. Por ejemplo; $f(x) = |x|$, no es derivable en 0, lo es por la izquierda y por la derecha.

Corolario 3.1.3. *Si una función f es derivable en un punto x_0 entonces f es continua en x_0.*

Observación

El recíproco del resultado anterior no es cierto:

1. Una función f puede ser continua en un punto sin ser derivable en ese punto.

   Ejemplo

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|.$$

2. Una función f puede ser continua en un punto sin tener derivadas laterales en ese punto.

   Ejemplo

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{|x|}.$$

   La función f es claramente continua en 0. Estudiemos la derivabilidad en 0.

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ \frac{\sqrt{-x}}{x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{\sqrt{-x}}{-x} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{\sqrt{-x}} = -\infty.$$

   Vemos que no existen las derivadas laterales en 0.

   Este ejemplo muestra que el tercer apartado del teorema anterior no es una equivalencia.

Ejemplos

1. Consideremos la función $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

La función f no es derivable en 0, porque no es continua en 0. No es derivable ni por la derecha ni por la izquierda en 0, porque no existen los l'ımites $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.

2. Consideremos la función $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} .$$

¿Es f derivable en 0 ?.

Lo primero que hay que preguntarse es si f es continua en 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0),$$

por tanto f es continua en 0.
Para todo $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Como no existe $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, la función f no es derivable en 0.

3. Consideremos la función $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} .$$

¿Es f derivable en 0 ?.

Para todo $x \neq 0$,

$$0 \leq \left| x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2,$$

luego usando la regla de sandwich podemos asegurar que $\lim_{x\to 0} |f(x)| = 0$ y en consecuencia $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Esto dice que f es continua en 0.

Para todo $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

Esto dice que f es derivable en 0 y $f'(0)=0$.

4. Consideremos la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q} \\ -x & \text{si} \quad x\in\mathbb{I} \end{cases}.$$

Si $x_0\neq 0$, la función f no es derivable en x_0 por no ser continua en x_0 (no existe el límite $\lim_{x\to x_0} f(x)$).

La función f sí es continua en 0. ¿Es derivable en 0?.

Para todo $x\neq 0$ tenemos

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q} \quad x\neq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x\in\mathbb{I} \end{cases}.$$

Vemos que no existe el límite $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (no existen los límites laterales), luego f no es derivable en 0.

5. **Ejercicio**

Estudiar la derivabilidad de la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x\in\mathbb{Q} \\ -x^2 & \text{si} \quad x\in\mathbb{I} \end{cases}.$$

Notaciones

Se suelen usar otros símbolos distintos de $f'(x)$ para denotar a la derivada. En particular, si se usa la letra y para la función ($y=f(x)$), la derivada se escribe como y' ó $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en lugar de $f'(x)$. Esta última notación se llama *notación de Leibniz*.

Así, si $y=x^2$, su derivada es $y'=2x$ y, en notación de Leibniz es $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$.

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ se lee " derivada de y con respecto a x".

Cuando queremos escribir el valor de la derivada en $x = c$ en notación Leibniz, escribiremos

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,|_{x=c}\;.$$

Así, si queremos calcular la derivada de $y = x^2$ en el punto $x = 3$, escribiremos

$$2x\,|_{x=3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Omitiendo cualquier referencia a y ó a f, podemos escribir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x,$$

que se lee "la derivada de x^2 con respecto a x es $2x$".

Hay que tener claro que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ es un símbolo, no una fracción. Más adelante introduciremos la definición de diferencial, que dará significado a las expresiones $\mathrm{d}y$ y $\mathrm{d}x$ por separado.

Para una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en cada punto $x_0 \in (a, b)$ hemos definido la función derivada de f en la forma:

$$f' : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x).$$

Si el dominio de la función es un intervalo cerrado o semicerrado, hay que considerar las derivadas laterales. Por ejemplo, decir que una función f es derivable en $[a, b]$, significa que es derivable en (a, b) y que existen (son números reales) $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$. La función derivada es:

$$f' : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x) = \begin{cases} f'_+(a) & \text{si} \quad x = a \\ f'(x) & \text{si} \quad x < 0 \\ f'_-(b) & \text{si} \quad x = b \end{cases}.$$

3.1.2. Recta tangente

La derivada tiene multitud de aplicaciones. Se puede usar la derivada para el estudio de tasas de variación, valores máximos y mínimos de una función, concavidad y convexidad, etc.

Nosotros hemos usado este concepto para definir la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Estudiemos ahora esta recta.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$, la hemos definido en la forma:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

siempre y cuando el límite exista.

Este número, no es más que la derivada de f en el punto x_0: $f'(x_0)$.

Definición 3.1.3. Sea f una función derivable en un punto x_0. Se define la *recta tangente a f en el punto* $(x_0, f(x_0))$, como la recta que pasa por este punto y tiene por pendiente $f'(x_0)$.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ejercicio:

Calcular la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto 2.

Recta normal a la gráfica de una función en un punto

También podemos considerar la *recta normal (perpendicular) a $y = f(x)$ en x_0* teniendo en cuenta que dos rectas son perpendiculares si y sólo si el producto de sus pendientes es -1; de este modo, la recta de ecuación:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

es la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en x_0.

Observemos que esto sólo tiene sentido si $f'(x_0) \neq 0$. Si $f'(x_0) = 0$, significa que el ángulo que forma la gráfica de f con el eje de abcisas es cero, por lo que la recta tangente en x_0 será paralela a dicho eje, y su ecuación es $y = f(x_0)$. Por tanto, la recta normal en x_0 será vertical y tendrá de ecuación $x = x_0$ (en este caso se dice que la pendiente en x_0 es infinita).

Ejercicio:

Calcular la recta normal a $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$.

Ángulo entre dos curvas

Otra utilidad de la derivada es calcular el ángulo entre dos curvas. Sean f y g dos funciones derivables en x_0 y tales que $f(x_0) = g(x_0)$ (esto es, la gráfica $y = f(x)$ corta en la abcisa x_0 a la gráfica $y = g(x)$). Definimos el *ángulo entre las gráficas de f y de g en el punto x_0*, como el ángulo que forman las correspondientes rectas tangentes en dicho punto. Dicho ángulo puede calcularse usando la siguiente fórmula:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)} \right|.$$

3.2. Técnicas de derivación. Regla de la cadena. Derivadas de las funciones inversas.

3.2.1. Técnicas de derivación

El teorema que viene a continuación amplía la clase de funciones que podemos derivar fácilmente, dando reglas para derivar ciertas combinaciones de funciones, como sumas, diferencias, productos y cocientes.

Teorema 3.2.1 (Reglas básicas para combinar derivadas). *Sean $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$. Supongamos que f y g son derivables en x_0. Entonces:*

1. *La función suma, $f + g$, es derivable en x_0 y*
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
2. *La función diferencia, $f - g$, es derivable en x_0 y*
$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$
3. *La función producto, $f \cdot g$, es derivable en x_0 y*
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$
Caso particular:
Si $c \in \mathbb{R}$, la función $c \cdot f$ es derivable en x_0 y
$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0).$$
4. *Si $g'(x_0) \neq 0$, la función cociente, $\frac{f}{g}$, es derivable en x_0 y*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$
Caso particular:
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Observaciones

1. Las propiedades 1.- y 3.- descritas anteriormente se pueden generalizar a un número finito de funciones:
   Si $f_1,\ f_2, \cdots, f_n$ son funciones derivables en un punto x_0 entonces la función suma, $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$, y la función producto, $f_1 \cdot f_2 \cdots f_n$, son derivables en x_0 y
   $$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \cdots f_n'(x_0).$$
   $$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)'(x_0)$$
   $$= f_1'(x_0) \cdot f_2(x_0) \cdots f_n(x_0) + f_1(x_0) \cdot f_2'(x_0) \cdot f_3(x_0) \cdots f_n(x_0) + f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) \cdots f_n'(x_0).$$
2. Es claro que la derivada es lineal :
   $$(\alpha f + g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + g'(x_0).$$
3. La función $f + g$ puede ser derivable en un punto x_0 si que ni f ni g sean derivables en x_0.

   Ejemplo

   Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por
   $$f(x) = |x| \quad \text{y} \quad g(x) = -|x|.$$
   Las funciones f y g no son derivables en 0. Sin embargo, la función suma definida por, $(f+g)(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, es derivable en todos los puntos.
4. Si f es derivable en x_0 y g no es derivable en x_0 entonces $f + g$ no es derivable en x_0.
   De suponer que lo es, al escribir g en la forma $g = (f + g) - f$, obtendríamos que es derivable en x_0 por ser diferencia de funciones derivables en ese punto, en contra de lo que estamos suponiendo.

A continuación damos una lista con las derivadas de las funciones más importantes:

- $f(x) = k \Longrightarrow f'(x) = 0.$
- $f(x) = x \Longrightarrow f'(x) = 1.$
- $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}.$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f'(x) = -n \cdot \dfrac{1}{x^{n+1}}.$
- $f(x) = \sqrt{x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

- $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$.
- $f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \ln(a)$, para $a > 0$ $a \neq 1$.
- $f(x) = \ln(x) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$.
- $f(x) = \log_a(x) \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$.
- $f(x) = \operatorname{sen}(x) \Longrightarrow f'(x) = \cos(x)$.
- $f(x) = \cos(x) \Longrightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.
- $f(x) = \operatorname{tag}(x) \Longrightarrow f'(x) = 1 + \operatorname{tag}^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$.
- $f(x) = \operatorname{arcsen}(x) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \arccos(x) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $f(x) = \operatorname{arctag}(x) \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Ejercicio

Demostrar que las derivadas de las funciones anteriores son las dadas.

Ejemplos (Uso de las reglas básicas para calcular derivadas)

Derive las siguientes funciones:

$$f(x) = 2x^2 - 5x, \quad g(x) = (3x^2 - 1)(7 + 2x^3), \quad h(x) = \frac{4x - 7}{3 - x^2}.$$

Para derivar la función f aplicamos las reglas de linealidad y de la potencia:

$$f'(x) = 2(2x) - 5 = 4x - 5.$$

Para derivar la función g aplicamos la regla del producto, la de linealidad y la de potencia:

$$g'(x) = [3(2x)-0](7+2x^3)+(3x^2-1)[0+2(3x^2)] = 6x(7+2x^3)+(3x^2-1)6x^2 = 6x(5x^3-x+7).$$

Para derivar la función h aplicamos sucesivamente la regla del cociente, de linealidad y de potencia:

$$h'(x) = \frac{4(3-x^2) - (4x-7)(-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{12 - 4x^2 + 8x^2 - 14x}{(3-x^2)^2} = \frac{4x^2 - 14x + 12}{(3-x^2)^2}.$$

Derivadas de orden superior.

Supongamos que una función, f, es derivable en un intervalo (a, b) y consideremos su función derivada f'. Puede ocurrir que dicha función sea a su vez derivable en un punto $x_0 \in (a, b)$, es decir, que exista el límite,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

En tal caso decimos que f tiene segunda derivada en x_0. Al límite anterior se le llama *segunda derivada de f en x_0* y se denota $f''(x_0)$.

Del mismo modo, pueden obtenerse las derivadas tercera, cuarta,...,etc, siempre que se cumplan las condiciones apropiadas de derivabilidad.

En general, la derivada n-ésima de una función f se obtiene derivando la derivada $(n-1)$-ésima:

$$f^{(n)}(x) = (f^{n-1})'(x).$$

Más concretamente, la derivada n-ésima se define por inducción:

Supongamos que existe la derivada $(n-1)$-ésima de una función f en todo punto de (a, b). Si esta función es derivable en un punto $x_0 \in (a, b)$, decimos que f tiene derivada n-ésima en x_0. Al límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{n-1}(x) - f^{n-1}(x_0)}{x - x_0}$$

se le llama *derivada n-ésima de f en x_0* y se denota $f^{(n)}(x_0)$.

Ejemplos

1. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$. Esta función es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y $f'(x) = e^x = f(x)$. La función f' es por tanto también derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$, luego f tiene segunda derivada en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y $f''(x) = (f')'(x) = e^x = f(x)$. Continuando sucesivamente, se ve que f tiene derivada de orden n, para todo $n \in \mathbb{N}$, en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y $f^{(n)}(x) = e^x$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$.

2 Sea $a > 0$ y $a \neq 1$ y consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$. Esta función es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(x) = a^x \log(a) = f(x) \cdot \log(a)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De igual forma, f' es derivable en $\mathbb{R}$ y $f''(x) = \log(a) f'(x) = \log^2(a) \cdot a^x = \log^2(a) \cdot f(x)$.

Por inducción se puede demostrar que f tiene derivada de orden n en todo $x \in \mathbb{R}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $f^{(n)}(x) = \log^n(a) \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

3. Ejercicio

Estudiar las derivadas de orden superior de la función $f(x) = \text{sen}(x)$.

3.2.2. Regla de la cadena

La regla de la cadena es una de las más importantes del Cálculo. Es una regla para derivar funciones compuestas. En particular, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces y es la función compuesta $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$, y se puede escribir la regla de la cadena así:

Teorema 3.2.2. *Sean $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(D(f)) \subset D(g)$. (En tal caso podemos considerar la composición $g \circ f$ y $D(g \circ f) = D(f)$).*

Sea $x_0 \in D(f)$. Si f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$ entonces $g \circ f$ es derivable en x_0 y

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

En definitiva, lo que dice la regla de la cadena es, que cuando tengamos una función compuesta y consideremos la función interna y la externa, la derivada se calcula multiplicando la derivada de la función interna por la derivada de la función externa evaluada en la función interna.

Ejemplos

1. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}(x^2)$. Podemos ver esta función como la composición $g \circ u$, donde $g, u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ estan definidas por $g(x) = \text{sen}(x)$ y $u(x) = x^2$.

Las funciones g y u estan en las condiciones anteriores. Además,

- g es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y $g'(x) = \cos(x)$.
- u es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y $u'(x) = 2x$.

Entonces, usando la regla de la cadena, podemos asegurar que $f = g \circ u$ es derivable en todo punto $x \in \mathbb{R}$ y

$$f'(x) = (g \circ u)'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

2. Ejercicio

Sean $f : D(f) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D(g) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $h : D(h) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(D(f)) \subset D(g)$ y $g(D(g)) \subset D(h)$. Sea $x_0 \in D(f)$. Si f es derivable en x_0, g es derivable en $f(x_0)$ y h es derivable en $g(f(x_0))$ entonces $h \circ g \circ f$ es derivable en x_0 y

$$(h \circ g \circ f)'(x_0) = h'((g \circ f)(x_0)) \cdot g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

3. Consideremos la función $F(x) = \operatorname{sen}(\ln(x^2 + 1))$. Claramente F está definida en $\mathbb{R}$.

Sean $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \ln(x)$ y $h(x) = \operatorname{sen}(x)$. Claramente $F = h \circ g \circ f$.

La función f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $f'(x) = 2x$.

La función g es derivable en $(0, \infty)$ y $g'(x) = \frac{1}{x}$, luego como para todo $x \in \mathbb{R}$ $x^2 + 1 \in (0, \infty)$, podemos asegurar que g es derivable en $x^2 + 1$, es decir, g es derivable en $f(x)$.

La función h es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $h'(x) = \cos(x)$, luego es derivable en $(g \circ f)(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Podemos asegurar que $F = h \circ g \circ f$ es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$ y

$$f'(x) = (h \circ g \circ f)'(x) = h'((g \circ f)(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos(\ln(x^2 + 1)) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x.$$

4. Ejercicio

Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.
2. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

3.2.3. Derivadas de las funciones inversas

Teorema 3.2.3. *Sea I un intervalo y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e inyectiva. Sea $b \in f(I)$ y supongamos que f es derivable en $f^{-1}(b)$. Entonces:*

1. *Si* $f'(f^{-1}(b)) = 0$, f^{-1} *no es derivable en* b.
2. *Si* $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$, f^{-1} *es derivable en* b *y* $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Derivadas de las funciones trigonométricas inversas

1.- Consideremos la función $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$, $f(x) = \text{sen}(x)$. Su función inversa es la función arcseno:

$$f^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad f^{-1}(x) = \text{arcsen}(x).$$

La función f es derivable en todo $\mathbb{R}$, en particular es derivable en todo punto $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $f'(x) = \cos(x)$.
Para todo $b \in [-1, 1]$, $f^{-1}(b) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que f es derivable en $f^{-1}(b)$.
Según el teorema anterior, f^{-1} es derivable en $b \in [-1, 1]$ si y sólo si $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$.
Para todo $b \in [-1, 1]$,

$$f'(f^{-1}(b)) = \cos(f^{-1}(b)) = \cos(\text{arcsen}(b)).$$

Como $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, deducimos que $\cos^2(\text{arcsen}(b)) = 1 - \text{sen}^2(\text{arcsen}(b)) = 1 - b^2$.
De estas igualdades vemos que

$$f'(f^{-1}(b)) = 0 \Leftrightarrow 1 - b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 1 \text{ ó } b = -1.$$

Por tanto, si $b = 1$ ó $b = -1$ f^{-1} no es derivable en b. Si $b \in (-1, 1)$, f^{-1} es derivable en b y

$$(f^{-1})'(b) = \text{arcsen}'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}(b))}.$$

Como $\text{arcsen}(b) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(\text{arcsen}(b)) > 0$, por lo que $\cos(\text{arcsen}(b)) = \sqrt{1 - b^2}$.
Hemos demostrado que si $b \in (-1, 1)$, $\text{arcsen}'(b) = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$.

De forma similar se demuestra:

$$\text{Si } b \in (-1, 1), \quad \text{arccos}'(b) = -\frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} \quad \text{y}$$

$$\text{arctag}'(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

3.3. Valores extremos de una función continua

Ya hemos usado la derivada para calcular tangentes y tasas de variación. El objetivo principal de esta sección es mostrar otra aplicación de las derivadas: hallar valores máximos y mínimos; es decir, la optimización, que es una de las aplicaciones más importantes del Cálculo

3.3.1. Máximos y mínimos. Teorema de los valores extremos.

Uno de los principales objetivos del Cálculo es investigar el comportamiento de las funciones. Con frecuencia es muy importante saber cuál es el valor máximo o mínimo de una función y dónde se dan esos valores extremos. Vamos a estudiar cómo se puede usar la derivada para hallar esos valores extremos.

Definición 3.3.1. Sean $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$.

Decimos que x_0 es un *máximo relativo o local de* f (respectivamente *mínimo relativo o local de* f) si existe un intervalo $I \subset D$ que contiene a x_0 tal que $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivamente $f(x) \geq f(x_0)$) para todo $x \in I$. Dicho de otra forma, $f(x_0)$ es el valor máximo (valor mínimo) que alcanza la función f en un entorno del punto x_0.

Los máximos y mínimos relativos se llaman *extremos relativos o locales*.

Decimos que x_0 es un *máximo absoluto o global de* f (respectivamente *mínimo absoluto o global de* f) si $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivamente $f(x) \geq f(x_0)$) para todo $x \in D$. Dicho de otra forma, $f(x_0)$ es el valor máximo (valor mínimo) que alcanza la función f en todo su dominio.

Los valores máximo y mínimo absoluto se llaman conjuntamente *valores extremos o extremos absolutos*

Observaciones

1. Se pueden definir los extremos en sentido estricto considerando las desigüaldades estrictas.
2. Una función puede poseer muchos extremos relativos en sentido estricto, pero los máximos y mínimos absolutos en sentido estricto, si existen, son únicos.

No toda función tiene extremos en un intervalo. Por ejemplo, la función continua $g(x) = x$ no tiene máximo ni mínimo en el intervalo $(0, 1)$.

La función discontinua

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

tiene máximo en el intervalo cerrado $[-1, 1]$ pero no tiene mínimo. Además, con esta función se prueba que el valor máximo se puede alcanzar en varios puntos. En este caso el valor máximo se alcanza en los puntos $(-1, 1)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$. Si una función es continua en un intervalo cerrado y acotado (es decir, compacto), entonces necesariamente alcanza el máximo absoluto y el mínimo absoluto. Este resultado se conoce con el nombre de Teorema de los valores extremos, y juega un papel importante en nuestra área.

Teorema 3.3.1 (Teorema de los valores extremos). *Una función f continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ alcanza en el los valores máximo y mínimo absolutos.*

El teorema no se verifica en general si la función no es continua o si el intervalo no es compacto.

Si comparamos una función con su gráfica, vemos que el máximo absoluto es el punto más alto y el mínimo absoluto el más bajo.

Ejemplo

Explicar por qué cada uno de los ejemplos siguientes no contradice el teorema de los valores extremos:

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(b) $g(x) = x^2$ para $0 < x \leq 2$.

(a) La función f no tiene máximo. Toma todos los valores arbitrariamente próximos a 2 (y menores que 2), pero nunca toma el valor 2. No se contradice el Teorema de los valores extremos porque f no es continua en $[0, 2]$ (vemos que no es continua en el punto $x = 1$).

(b) Aunque los valores $g(x)$ (que son positivos) se hacen arbitrariamente pequeños cuando $x \to 0$, el valor 0 no se alcanza, luego g no tiene mínimo. La función g es continua en $(0, 2]$, y no se contradice el Teorema de los valores extremos porque el intervalo no es cerrado.

3.3.2. Extremos relativos

Típicamente, los extremos de una función se alcanzan en los extremos del intervalo o en los puntos donde la gráfica tiene 'una cima.º "un valle", es decir, puntos donde la gráfica es más alta o más baja que en los puntos de un entorno. Las cimas y los valles son los extremos relativos, que hemos definido antes.

Pretendemos ahora diseñar un procedimiento para hallar los extremos relativos. De manera intuitiva, los extremos relativos se alcanzan en puntos de tangente horizontal o donde no existe la derivada (no hay tangente). Esto nos lleva a la siguiente definición:

Definición 3.3.2. Sea f una función y x_0 un punto del dominio.

- Si $f'(x_0) = 0$ decimos que x_0 es un *valor singular de* f.
- Se dice que x_0 es un *valor crítico de* f si es un valor singular o $f'(x_0)$ no existe.

El punto $P(x_0, f(x_0))$ se llama *punto crítico*

Existe una relación entre valor crítico y extremo relativo. Esto queda reflejado en el siguiente teorema:

Teorema 3.3.2 (**Teorema del extremo interior**). *Sea I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea x_0 un punto interior de I (es decir, $x_0 \in I$ es tal que existe un intervalo abierto I_1 que contiene a x_0 y tal que $I_1 \subset I$). Si x_0 es un extremo relativo o local de f en I entonces x_0 es un valor crítico, es decir, o bien f no es derivable en x_0, o bien $f'(x_0) = 0$.*

Observaciones

1. Si x_0 no es un punto interior, x_0 no tiene porqué ser valor crítico (en particular, si f es derivable en x_0 (por la derecha o por la izquierda), no tiene porqué ocurrir que la derivada se anule).

   Ejemplo

   Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
   La función f es derivable en 1 por la izquierda y $f'_-(1) = 1$. Además, $f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0, 1]$ luego 1 es un máximo (global) y sin embargo 1 no es punto interior de $[0, 1]$.

2. El recíproco del teorema no es cierto, es decir; no tiene porqué ocurrir que en cada valor crítico se deba alcanzar un extremo relativo (en particular, si x_0 es un punto de I, f es derivable en x_0 y $f'(x_0) = 0$, x_0 no tiene porqué ser máximo o mínimo local de f en I).

Ejemplo

Sea $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.
$x_0 = 0$ es un punto interior de $[-1,1]$, $f'(x) = 3x^2$ luego $f'(0) = 0$ pero 0 no es máximo ni mínimo local de f en $[-1,1]$.

3.3.3. Extremos absolutos

Supongamos que buscamos los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$. Sabemos, por el teorema de los valores extremos, que éstos existen. Además el Teorema del extremo interior nos da posibles candidatos. Esto indica el siguiente procedimiento de actuación:

Procedimiento a seguir para ver si una función tiene extremos (máximos o mínimos)

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Para los extremos absolutos de f en $[a,b]$ puede ocurrir:

1. Que el máximo o mínimo sea a o b.
2. Que esté en (a,b). En este caso:
   - o bien f no es derivable en ese punto;
   - o bien f es derivable en ese punto, en cuyo caso la derivada en ese punto vale 0.

Por tanto, los pasos a seguir para el cálculo de los extremos son:

Paso 1

Calculamos f' y hallamos los valores críticos de f.

Paso 2

Hallamos el valor de f en a, en b y en cualquier valor crítico.

Paso 3

Comparamos los valores obtenidos en el paso anterior.

Estudiando los valores obtenidos se deciden cuáles son los extremos: el valor mayor es el máximo absoluto de f en $[a, b]$, y el menor valor es el mínimo absoluto.

Ejemplo

Estudiar los extremos de la función $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(5 - 2x)$ en el intervalo $[-1, 2]$.

1.- Calculamos f'.

$$f'(x) = \frac{10}{3}\frac{1-x}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Es claro que f' no existe en $x = 0$ (se podría haber justificado desde el principio).

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Los valores críticos son $x = 1$ y $x = 0$.

2.- $f(-1) = 7$, $f(2) = 2^{\frac{2}{3}}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 3$.

3.- Se alcanza máximo en -1 y el valor máximo es 7 y un mínimo en 0 y el valor mínimo es 0.

Ejercicios

1.- Hallar los extremos de $f(x) = x^3 - x$ en el intervalo $[-1, 2]$.

2.- Hallar los extremos de $T(x) = \frac{1}{2}(\text{sen}^2(x) + \cos(x)) + 2\text{sen}(x) - x$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3.4. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio

El teorema de Rolle y el Teorema del Valor Medio son resultados fundamentales sobre funciones derivables, y extremadamente importantes en Cálculo, tanto para la teoría como para las aplicaciones prácticas.

3.4.1. Teorema de Rolle

El punto clave para la demostración del Teorema del Valor Medio es el Teorema de Rolle, que es justamente, como veremos, un caso particular del Teorema del Valor Medio.

Teorema 3.4.1 (Teorema de Rolle). *Supongamos que una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b).*

Si $f(a) = f(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Geométricamente la interpretación del teorema de Rolle es sencilla: si la función f toma el mismo valor en los extremos entonces debe haber algún punto intermedio donde la tangente a la gráfica $y = f(x)$ sea paralela al eje de abcisa (ya que su pendiente vale cero), o lo que es lo mismo, paralela a la cuerda $y = f(a) = f(b)$, que va desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$.

Observaciones

1. El punto c del teorema no tiene porqué ser único. (Basta considerar cualquier función constante).

2. Todas las hipótesis del teorema son suficientes. Si alguna falla no podemos asegurar nada sobre la conclusión del teorema:

   (a) Si $f(a) \neq f(b)$ no tiene porqué existir c con $f'(c) = 0$.

   Ejemplo

   $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x.$

   (b) Si f no es derivable en algún punto de (a, b) no tiene porqué existir c con $f'(c) = 0$.

   Ejemplo

   $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = |x|.$

   (c) Si f no es continua en algún punto de $[a, b]$ no tiene porqué existir $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in (0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} .$$

Consecuencias del teorema de Rolle

Una consecuencia inmediata del teorema de Rolle es que entre dos raices o ceros de la función f siempre hay una raiz de su derivada f'. Para verlo, supongamos que $x_1, x_2 \in [a,b]$ son dos raices de f, es decir; $f(x_1) = 0 = f(x_2)$, y que $x_1 < x_2$. Consideremos entonces la función restringida $f : [x_1, x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ que es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2), ya que $[x_1, x_2] \subset [a,b]$. Como $f(x_1) = 0 = f(x_2)$, el teorema de Rolle asegura que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = 0$, es decir; c es una raiz de la derivada que está entre las dos raices de f.

Ejemplo

Probar que existe una única solución de la ecuación $\cos(x) = x$ en el intervalo $(-1,1)$.

Consideremos la función $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x) - x$ Hemos de probar que f posee una única raiz en $(-1,1)$.

Por una parte, notemos que f es una función continua en el intervalo $[-1,1]$ por ser diferencia de funciones continuas. Como $f(-1)f(1) < 0$, el teorema de Bolzano asegura que existe algún $c \in (-1,1)$ tal que $f(c) = 0$.

Por otro lado, f es derivable en $(-1,1)$ por ser diferencia de funciones derivables, además, su derivada es $f'(x) = -\text{sen}(x) - 1$. Si f tuviera dos raices en $(-1,1)$, por el teorema de Rolle existiría alguna raiz de la derivada en dicho intervalo. Pero como $f'(x) \neq 0$ en $(-1,1)$, no pueden haber dos raices. Esto prueba la existencia de una única raiz de f en $(-1,1)$, o lo que es lo mismo, una única solución de la ecuación $\cos(x) = x$ en el intervalo $(-1,1)$.

3.4.2. Teorema del Valor Medio

Teorema 3.4.2 (**Teorema del valor medio / de los incrementos finitos / de Lagrange**). *Si* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua en* $[a,b]$ *y derivable en* (a,b) *entonces* *existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Observemos que el teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio, ya que si $f(a) = f(b)$ según el teorema del valor medio $f'(c) = 0$.

Al teorema del valor medio podemos darle interpretaciones físicas y geométricas importantes.

Interpretación física.

Si un automovil hace una media de 60 Km/h en un viaje, es razonable pensar que el velocímetro ha marcado 60 Km/h al menos una vez durante el viaje.

Más generalmente, supongamos que un objeto tiene un movimiento rectilineo y dista $s(t)$ del punto de partida en el instante t. La velocidad media del objeto entre los instantes $t = a$ y $t = b$ viene dada por la razón

$$\frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Lo mismo que en el caso del automovil, es razonable pensar que debe haber un instante entre a y b tal que la velocidad en ese instante, es decir la velocidad instantánea, sea igual a la velocidad media. Es decir, existe t_0 tal que

$$s'(t_0) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Interpretación geométrica

El cociente $\dfrac{fb) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta que una los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

$f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a f en el punto $(c, f(c))$.

Ya hemos dicho que el Teorema de Rolle se puede interpretar como que, si $f(a) = f(b)$, existe un punto intermedio c tal que la tangente en $(c, f(c))$ es paralela a la cuerda $y = f(a) = f(b)$, que va desde el punto $(a, f(a))$ al punto $(b, f(b))$. Es razonable pensar que se verifica lo mismo aun cuando los extremos de la gráfica no están a la misma altura. Pues efectivamente, el Teorema del Valor Medio nos dice que hay un punto c donde la recta tangente a la función $y = f(x)$ es paralela a la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Ejemplo

Pruebe que la función $f(x) = x^3 + x^2$ verifica las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo cerrado $[1, 2]$ y hallar un número c entre 1 y 2 tal que

$$f'(c) = \frac{fb) - f(a)}{b - a}.$$

Como f es una función polinómica, es derivable y por tanto continua en el intervalo $[1, 2]$. Así se satisfacen las hipótesis del Teorema del Valor Medio.

Derivando f se tiene $f'(x) = 3x^2 + 2x$ para todo x. Por tanto, es $f'(c) = 3c^2 + 2c$ y la ecuación del Teorema del Valor Medio se satisface cuando

$$3c^2 + 2c = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 12 - 2 = 10.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado resultante se tiene que

$$c = \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{3}.$$

El valor negativo no está en el intervalo $(1, 2)$, pero el positivo

$$c = \frac{-1 + \sqrt{31}}{3} \approx 1,5225$$

satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio.

El teorema del valor medio se puede generalizar.

Teorema 3.4.3 (Teorema de Cauchy o del valor medio generalizado). *Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Observemos que el teorema del valor medio se puede obtener a partir de este tomando $g(x) = x$.

Observación

Bajo la hipótesis adicional $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$ podemos decir que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Necesariamente $g(a) \neq g(b)$ ya que en caso contrario estaríamos en las condiciones del teorema de Rolle en $[a, b]$, sin embargo estamos suponiendo $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

3.4.3. Algunas consecuencias del Teorema del Valor Medio

El teorema del valor medio se puede aplicar a situaciones muy variadas. Se usa en particular para demostrar algunos resultados teóricos claves para el Cálculo. Por ejemplo, usamos el Teorema del Valor Medio para probar que una función cuya derivada es cero en todo un intervalo debe ser constante en ese intervalo. Este resultado, aparentemente tan simple, es crucial en el desarrollo del cálculo integral.

Teorema 3.4.4 (El Teorema de la derivada nula). *Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b). Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, la función f es constante en $[a, b]$.*

Demostración: Sean x_1, x_2 dos puntos arbitrarios en $[a, b]$ con $x_1 < x_2$. La función f satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[x_1, x_2]$. Existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Entonces, como $f'(c) = 0$ se deduce que $f(x_2) = f(x_1)$. Esto dice que f es constante en $[a, b]$.

$\square$

Como consecuencia del teorema anterior se tiene que dos funciones con derivadas iguales en un intervalo abierto difieren en él en una constante:

Teorema 3.4.5 (Teorema de la diferencia constante). *Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivables en el intervalo abierto (a, b). Si $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$ existe una constante C tal que*

$$f(x) = g(x) + C, \qquad \textit{para todo } x \in [a, b].$$

Demostración: Sea $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

La función h es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Además $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. Entonces por el teorema anterior podemos asegurar que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = C$ para todo $x \in [a, b]$, es decir; $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in [a, b]$.

□

Dos funciones con derivadas iguales en un intervalo abierto difieren en una constante.

Ejemplo

Sean $f, g : [-2, -1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \text{arctag}(x)$ y $g(x) = -\text{arctag}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Las funciones f y g son continuas en $[-2, -1]$.

Las funciones f y g son derivables en $(-2, -1)$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{y}$$

$$g'(x) = -\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Vemos que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (-2, -1)$. Podemos asegurar que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = g(x) + C \qquad \text{para todo } x \in (-2, -1).$$

¿Cómo podemos determinar el valor de la constante C?

La igualdad se cumple para todo $x \in (-2, -1)$ en particular para $x = -1$. Por tanto;

$$f(-1) = \text{arctag}(-1) = -\frac{\pi}{4} \text{ y } g(-1) = -\text{arctag}(-1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$f(-1) = g(-1) + C \Longrightarrow C = f(-1) - g(-1) \Longrightarrow C = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, $f(x) = g(x) - \frac{\pi}{2}$.

El Teorema del Valor Medio también se puede usar para demostrar cierto tipo de desigualdades.

Teorema 3.4.6. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Supongamos que existe $M > 0$ tal que*

$$|f'(x)| \leq M \quad \textit{para todo } x \in (a, b).$$

Entonces existe una constante C tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \quad \textit{para todo } x, y \in [a, b].$$

Demostración: Sean $x, y \in [a, b]$.

Si $x = y$ el resultado es obvio. Supongamos $x \neq y$, por ejemplo $x < y$. Consideremos la función $f : [x, y] \longrightarrow \mathbb{R}$. Esta función es continua en $[x, y]$ y derivable en (x, y). Por el teorema del valor medio existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{x - y} \Longleftrightarrow f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Entonces

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)(y - x)| = |f'(c)||y - x| \leq M|y - x|.$$

□

Ejercicios

1.- Probar que $|\text{sen}(x) - \text{sen}(y)| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

2.- Demostrar que $|\text{arctag}(x) - \text{arctag}(y)| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in [0, 2\pi]$.

3.5. Crecimiento de funciones en intervalos

Otra aplicación del teorema del valor medio es estudiar la monotonía de las funciones.

Se puede usar el signo de la derivada de una función para determinar si la función es creciente o decreciente en un intervalo dado. Usaremos esta información para desarrollar un procedimiento llamado el test de la derivada primera para decidir si un punto crítico dado es máximo, mínimo o ninguno de los dos.

Definición 3.5.1 (**Funciones crecientes y decredientes).** Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ donde I es un intervalo.

La función f es *creciente* (respectivamente *estrictamente creciente*) en I, si dados $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) \leq f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) < f(x_2)$).

La función f es *decreciente* (respectivamente *estrictamente decreciente*) en I, si dados $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ se tiene $f(x_1) \geq f(x_2)$ (respectivamente $f(x_1) > f(x_2)$).

Dado $x_0 \in I$ decimos que f es creciente en x_0 si existe un intervalo $J \subset I$ con $x_0 \in J$ tal que f es creciente en J.

Dado $x_0 \in I$ decimos que f es decreciente en x_0 si existe un intervalo $J \subset I$ con $x_0 \in J$ tal que f es decreciente en J.

Definición 3.5.2. Una función se llama *monótona* (respectivamente *estrictamente monótona*) si es creciente o decreciente (respectivamente estríctamente creciente o decreciente).

El ser monótona está relacionado con el signo de la derivada. En particular, si la gráfica de una función sólo tiene rectas tangentes con pendientes positivas en un intervalo, la gráfica se elevará y la función será creciente en el intervalo. Como la pendiente de la recta tangente en cada punto de la gráfica se calcula con la derivada, estudiando el signo de la función derivada conoceremos la monotonía de la función.

Supongamos que f es derivable en I y $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Sean $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Haciendo uso del teorema del valor medio podemos asegurar que existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Longleftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$$\Longleftrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Longleftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1).$$

Esto demuestra que f es creciente en I. De forma análoga se obtienen los siguientes resultados:

Teorema 3.5.1. *Supongamos que f es derivable en un intervalo abierto (a, b). Entonces*

1. *Si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es creciente en (a, b).*
2. *Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es estrictamente creciente en (a, b).*
3. *Si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es decreciente en (a, b).*
4. *Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f es estrictamente decreciente en (a, b).*

Para determinar cuándo una función f es creciente o decreciente, comenzamos hallando los valores críticos (son los puntos donde la derivada es cero o no existe). Estos valores dividen al eje de abcisa en intervalos. Basta comprobar el signo de la derivada en cada intervalo y aplicar el teorema anterior.

Se sabe que todo extremo relativo es un valor crítico. Sin embargo, no todo valor crítico es un extremo relativo. ¿ Cómo podemos saber si un valor crítico es un extremo relativo ?.

Si la derivada es positiva a la izquierda del valor crítico y negativa a la derecha, la gráfica cambia de creciente a decreciente y el valor crítico debe ser un máximo relativo. Si la derivada es negativa a izquierda y positiva a derecha del valor crítico, la gráfica cambia de creciente a decreciente y el valor crítico debe ser un mínimo relativo. Si el signo se conserva, el valor crítico no es ni máximo ni mínimo.

Estas observaciones se resumen en un procedimiento que se llama el **test de la derivada primera para extremos relativos**.

Sea f una función continua.

Paso 1. Se hallan todos los valores críticos de f, es decir, los números c tales que está definido $f(c)$ y sea $f'(c) = 0$ no exista $f'(c)$.

Paso 2. Para cada valor crítico se tiene

1. El punto $(c, f(c))$ es un máximo relativo si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo abierto (a, c) a la izquierda de c y $f'(c) < 0$ para todo x de intervalo abierto (c, b) a la derecha de c.
2. El punto $(c, f(c))$ es un míximo relativo si $f'(x) < 0$ para todo x de un intervalo abierto (a, c) a la izquierda de c y $f'(c) > 0$ para todo x de intervalo abierto (c, b) a la derecha de c.
3. El punto $(c, f(c))$ no es extremo relativo si $f'(x)$ tiene el mismo signo en intervalos abiertos (a, c) y (c, b) a ambos lados de c.

Ejemplo

Determine el crecimiento de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$, así como los extremos relativos.

Primero calculamos la derivada $f'(x)$ y resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$. Tenemos $3x^2 - 6x - 9 = 0$, lo que da como raices $x = -1$ y $x = 3$. Estos valores críticos dividen al eje x en tres partes $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ y $(3, \infty)$. Estudiamos el signo de $f'(x)$ en cada intervalo. Como $g'(x)$ es continua,éste es constante en cada intervalo, basta tomar en cada parte un número arbitrario y estudiamos el signo de la derivada en esos valores. Tomamos, por ejemplo, -2, 0 y 4. Como $f'(-2) = 15 > 0$, $f'(0) = -9 < 0$ y $f'(4) = 15 > 0$, podemos asegurar:

La función f es creciente (y además estríctamente) en $(-\infty, -1)$ y $(3, \infty)$, y es decreciente (estríctamente) en $(-1, 3)$. Por tanto, el test de la primera derivada nos dice que f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un míximo relativo en $x = 3$.

Otra forma de determinar si un valor singular (es decir, aquel donde la derivada vale 0) es extremo relativo consiste en recurrir a la segunda derivada (suponiendo que exista).

Teorema 3.5.2 (Test de la derivada segunda para extremos relativos). *Sea f una función y sea c tal que $f'(c) = 0$. Supongamos que existe $f''(c)$. Entonces:*

1. *Si $f''(c) > 0$, la función f tiene un mínimo local en c.*
2. *Si $f''(c) < 0$, la función f tiene un máximo local en c.*
3. *Si $f''(c) = 0$, no podemos asegurar nada.*

Demostración: Por definición

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{x - c}.$$

Supongamos $f''(c) > 0$.

Si $x > c$ necesariamente $f'(x) > 0$ y si $x < c$ necesariamente $f'(x) < 0$. Por tanto, f decrece a la izquierda de c y crece a la derecha. Necesariamente c es un mínimo local.

El segundo apartado se justifica de la misma forma.

$\square$

En el caso en que $f^{''}(c) = 0$, recurrimos a las derivadas siguientes.

Sea n el primer natural tal que $f^{(n)}(c) \neq 0$.

- Si n es par y $f^{(n)}(c) < 0$ entonces c es un máximo relativo.
- Si n es par y $f^{(n)}(c) > 0$ entonces c es un mínimo relativo.
- Si n es impar c no es un extremo.

Ejemplo

Use el test de la derivada segunda para determinar si cada valor crítico de la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ corresponde a un máximo relativo, mínimo relativo, o ninguno de los dos.

Calculamos las derivadas primera y segunda

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x-1)(x+1)$$

$$f^{''}(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1)$$

Para aplicar el test de la derivada segunda, hallamos el valor de la derivada segunda para los valores críticos $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$

$$f''(0) = 0; \quad \text{el test falla } en x = 0.$$

$$f^{''}(1) = 30 > 0; \quad \text{el test da un mínimo relativo en } x = 1.$$

$$f^{''}(-1) = -30 < 0; \quad \text{el test da un máximo relativo en } x = -1.$$

Cuando falla el test de la derivada segunda (en este caso en $x = 0$), hay que volver al de la derivada primera:

La derivada primera es negativa a la derecha e izquierda de 0, luego no puede haber extremos.

3.6. Funciones convexas y funciones cóncavas

El saber si una curva es creciente o decreciente da sólo una visión parcial de la misma. Esto no es suficiente para distinguir cuál es la gráfica correspondiente a la función. Tenemos que saber además, de qué forma crece o decrece.

Nuestro centro de atención va a ser una característica de las gráficas, llamado convexidad (introducimos los conceptos de concavidad y convexidad), que nos permitirá distinguir a las funciones.

Empecemos dando las definiciones geométricas de concavidad y convexidad para una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definición 3.6.1. Diremos que f es *convexa en* I si para cada $x_1, x_2 \in I$ el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por encima de la gráfica $y = f(x)$.

Diremos que f es *cóncava en* I si para cada $x_1, x_2 \in I$ el segmento que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ queda por debajo de la gráfica $y = f(x)$.

Ejemplo

La función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ es convexa.

Obsevemos que f no es derivable en el punto 0.

En caso de que una función sea derivable, podemos dar una definición analítica de concavidad y convexidad:

Definición 3.6.2. La función f es *convexa en* I si en cada punto de I, la recta tangente a la función en ese punto queda por debajo de la gráfica de la función.

La función f es *cóncava en* I si en cada punto de I, la recta tangente a la función en ese punto queda por encima de la gráfica de la función.

Definición 3.6.3. Diremos que un punto $x_0 \in D(f)$ es un *punto de inflexión de* f si en él, la función pasa de ser convexa a cóncava o al revés.

En general, la convexidad de la gráfica variará sólo en los puntos donde $f'' = 0$ o no existe f'', es decir, en los puntos críticos de la primera derivada. Se llamará *valor crítico de segundo orden* a un número x_0 tal que $f''(x_0) = 0$ o no existe $f''(x_0)$. En este contexto, un valor crítico "ordinario"se llamará *valor crítico de primer orden*. Los puntos de inflexión corresponden a los valores críticos de segundo orden, y deben ser puntos de la gráfica de f. Más concretamente, un número x_0 tal que

$f''(x_0)$ no está definida y la convexidad de f cambia en x_0 corresponderá a un punto de inflexión sólo si $f(x_0)$ está definida.

Una función continua no tiene por qué tener un punto de inflexión donde $f'' = 0$. Por ejemplo, si $f(x) = x^4$, tenemos que $f''(x) = 12x^2$, luego $f''(0) = 0$, pero la gráfica de f es convexa en su totalidad

Observemos que si f' es creciente, necesariamente la función f ha de ser convexa, y si es decreciente, la función tiene que ser cóncava. De este modo se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.6.1. *Para una función f definida en un intervalo I se tiene:*

1. *Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces f es convexa en I.*
2. *Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$ entonces f es cóncava en I.*

Ejemplo

Halle dónde es convexa o cóncava la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x + 1$, así como sus puntos de inflexión.

Tenemos que $f'(x) = 3x^2 + 3$ y $f''(x) = 6x$. Ambas derivadas están definidas en todo $\mathbb{R}$ y $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$, así que sólo puede haber punto de inflexión en $x = 0$. Tenemos que $f''(x) < 0$ si $x < 0$ y $f''(x) > 0$ si $x > 0$, luego la gráfica de f es cóncava para $x < 0$ y convexa para $x > 0$. El punto de inflexión se alcanza en $(0, 1)$.

Ejercicio

Estudiar la concavidad y convexidad de la función $f(x) = \frac{x^2}{2\sqrt{2}} + \mathrm{sen}(x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y hallar los puntos de inflexión de f.

3.7. Límites infinitos y Asíntotas

Para terminar nuestro estudio sobre el dibujo de curvas, necesitamos introducir dos conceptos: asíntotas y límites con infinito.

Nuestro objetivo es estudiar otra clase de límites infinitos, distintos de los estudiados en el tema 1.

Sea f una función y x_0 un punto de su dominio. Supongamos que cuando x tiende a x_0 por cualquier lado, los valores de la función crecen (en valor absuluto) de forma no acotada, y la gráfica se acerca a la recta vertical $x = x_0$. Geométricamente este comportamiento se describe diciendo que la recta $x = x_0$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de f.

Supongamos ahora que, cuando x crece o decrece de forma no acotada (esto es, cuando se desplaza a la derecha o la izquierda sobre el eje x), la gráfica de f sigue la recta $y = mx + n$. En este caso decimos que la recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una *asíntota oblicua*.

Por último, si la función f se acerca a la recta $y = y_0$ cuando x crece o decrece de manera no acotada, decimos que la recta $y = y_0$ es una *asíntota horizontal*.

Concretamente, una *asíntota* es una recta que tiene la propiedad de que la distancia desde un punto P de la curva a la recta tiende a cero cuando P se aleja del origen de manera no acotada, y P está en una parte adecuada de la curva. Hay tres tipos de asíntotas que aparecen cuando dibujamos curvas: verticales, horizontales y oblícuas.

Definiremos formalmente esztos conceptos más adelante en esta sección. Sin embargo, tenemos que estudiar primero límites infinitos.

3.7.1. Límites infinitos

Si los valores de la función f se aproximan más y más al número L cuando x crece de manera no acotada, decimos que $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a infinito y se escribe $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$. Si $f(x)$ se aproxima a L cuando x decrece de manera no acotada escribimos $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Se pueden definir formalmente estos conceptos de la manera siguiente:

Definición 3.7.1 (Límites en el infinito). La notación $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ significa que, para todo número $\varepsilon > 0$, existe un número N_1 tal que, para todo $x > N_1$ del dominio de f, es $|f(x) - L| < \varepsilon$. Análogamente, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ significa que, para todo número $\varepsilon > 0$, existe un número N_2 tal que, para todo $x < N_2$ del dominio de f, es $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Por abuso del lenguaje, cuando estemos tomando límite cuando $x \to +\infty$, así como cuando el resultado de un límite sea $+\infty$ como veremos más adelante, usaremos la notación ∞, entendiéndola como $+\infty$.

Con esta definición formal se puede comprobar que todas las reglas de límites vistas en el tema 1 son válidas para $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Enunciamos estas reglas para $x \to \infty$:

Reglas para límites:

Sean f y g funciones tales que existen y $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$. Entonces se tiene:

- **Regla de la potencia:** $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to\infty} f(x)]^n$.
- **Regla de linealidad:** $\lim\limits_{x\to\infty}[af(x)+bg(x)] = a\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + b\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, donde a y b son constantes.
- **Regla del producto:** $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\cdot g(x)] = \left[\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right]\cdot\left[\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\right]$.
- **Regla del cociente:** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to\infty} f(x)}{\lim_{x\to\infty} g(x)}$ si $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\neq 0$.

Las mismas reglas son válidas para $x\to -\infty$.

El teorema siguiente nos permitirá calcular con facilidad ciertos límites en el infinito.

Teorema 3.7.1 (Límites en el infinito). *Si n es un número racional positivo y A es un número real npo nulo, entonces*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A}{x^n} = 0.$$

Más aún, si x^n está definido cuando $x<0$, entonces

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{A}{x^n} = 0.$$

Ejemplo

Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{3x-5}{x-2}}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x-5}{x-2}\right)^3$.

Observemos que, para $x\neq 0$,

$$\frac{3x-5}{x-2} = \frac{x\left(3-\frac{5}{x}\right)}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \frac{(3-\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}}.$$

Por el teorema anterior sabemos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 0.$$

Calculamos los límites usando la regla del cociente, la regla de la potencia y el teorema anterior:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x-5}{x-2}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-5}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{3x-5}{x-2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\frac{\lim_{x\to\infty} 3x-5}{\lim_{x\to\infty} x-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3-0}{1-0}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Análogamente,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-5}{x-2}\right)^3 = 3^3 = 27.$$

Cuando se calcula límites de la forma

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, es útil dividir numerador y denominador por la máxima potencia de x. Así se puede hallar el límite por el teorema anterior.

Ejercicio

Hallar los siguientes límites: $\lim_{x\to\infty}\dfrac{9x^3+57x+30}{x^5-1000}$, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x}{x-1}$.

En matemáticas se usa el símolo ∞, entre otras cosas, para indicar, bien el proceso de crecimiento no acotado, bien el resultado final de este crecimiento. Entendiendo esto podemos hablar de límites infinitos, es decir, límites que crecen o decrecen de manera no acotada. La notación $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ se puede definir formalmente así:

Definición 3.7.2 (Límite infinito). Se escribe $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ si, para todo número $N > 0$ (arbitrariamente grande), existe un número $\delta > 0$ tal que, para todo x tal que $0 < |x - x_0| < \delta$ se verifica $f(x) > N$.

Ejemplo

Calcular $\lim_{x\to2^-}\dfrac{3x-5}{x-2}$ y $\lim_{x\to2^+}\dfrac{3x-5}{x-2}$.

Observemos que $\frac{1}{x-2}$ crece de forma no acotada cuando x tiende a 2 por la derecha y decrece de forma no acotada cuando x tiende a 2 por la izquierda. Es decir,

$$\lim_{x\to2^-}\frac{1}{x-2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to2^+}\frac{1}{x-2} = \infty.$$

Por otra parte, $\lim_{x\to2} 3x-5 = 1$, luego

$$\lim_{x\to2^-}\frac{3x-5}{x-2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to2^+}\frac{3x-5}{x-2} = \infty.$$

3.7.2. Asíntotas

Ya se pueden definir formalmente las asíntotas de una función. Los límites infinitos que acabamos de estudiar, junto con las técnicas de dibujo que hemos visto hasta ahora, se usan para obtener gráficas con asíntotas.

Definición 3.7.3 (Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas). La recta $x = x_0$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de f si es infinito ($\pm\infty$) uno de sus límites laterales:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

La recta $y = L$ es una *asíntota horizontal* de la gráfica de f si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

La recta $y = mx + n$ es una *asíntota oblicua* de la gráfica de f si f es una función racional tal que el numerador y el denominador no tinen factores comunes y

$$f(x) = \frac{p(x)}{d(x)} = mx + n + \frac{r}{d(x)}$$

donde $\lim_{x\to\infty} \frac{r}{d(x)} = 0$.

3.8. Teorema de Taylor y regla de L' Höpital

Si consideramos una función n veces derivable en un intervalo I, nuestro primer objetivo va a ser hallar una función polinómica que aproxime a f en un entorno de un número x_0 de su dominio. Esta función polinómica será el *polinimio de Taylor de f*.

Podemos usar los teoremas sobre límites de sumas, diferencias, productos y cocientes siempre y cuando aparezcan ciertas expresiones que no significan nada. Por ejemplo, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ da la forma $\frac{0}{0}$ cuando se aplica la regla de límite de un cociente, y esta expresión no tiene significado. En tales casos hay que usar otros métodos para calcular el límite. Johann Bernoulli desarrolló un método más fácil usando derivadas. Vamos a ver este método llamado la *regla de L'Hôpital*.

3.8.1. Teorema de Taylor

Si $p(x)$ es un polinomio, es "fácil" calcular $p(a)$ para cualquier punto $a \in \mathbb{R}$.

Hay funciones elementales, como por ejemplo sen(x), cos (x), e^x, ln(x),..., para las que no son fáciles dar con exactitud el valor de la función en un punto del dominio. Sin embargo, podemos dar una aproximación.

Este tipo de funciones son muy buenas, ya que son continuas en su dominio y tienen derivadas de cualquier orden. El teorema de Taylor es una buena solución al problema de aproximar funciones mediante funciones polinómicas, incluso nos da el error que se comete en la aproximación.

El teorema de Taylor es realmente una generalización del teorema del valor medio. En este, tenemos valores de la función f relacionados con los valores de su derivada. El teorema de Taylor lo que hace es relacionar los valores de la función con las derivadas n-ésimas.

Teorema 3.8.1 (Teorema de Taylor). *Sea I un intervalo y sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $x_0 \in I$. Supongamos que f tiene derivadas continuas hasta el orden n en I y derivada de orden $n+1$ en el interior de I, es decir, existen $f'(x)$, $f''(x)$,..., $f^{(n)}(x)$ para todo $x \in I$, las funciones f', f'',..., $f^{(n)}$, son continuas en I y existe $f^{(n+1)}(x)$ para todo x del interior de I. Sea $R_{n,x_0,f}(x)$ definido por*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n,x_0,f}(x).$$

Entonces existe c en el intervalo abierto de extremos x_0 y x tal que

$$R_{n,x_0,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

El polinomio $f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ se denomina *polinomio de Taylor de orden n en x_0* y se representa por $T_{n,x_0,f}(x)$.

<u>Observaciónes</u>

1. El polinomio de Taylor de orden n en x_0 es el polinomio que mejor aproxima a la función en un entorno del punto x_0. Por otro lado, el punto c que aparece en el resto depende del punto x y no puede, en general, determinarse. Para $x_0 = 0$, la expresión anterior se denomina *fórmula de Maclaurin*.

2. En las calculadoras, las funciones trigonométricas, exponenciales, logarítmicas, etc, suelen implementarse usando un polinomio de Taylor de grado adecuado según el número de cifras decimales disponibles.

Ejemplo

Calcular una aproximación de $\cos(0,1)$ usando el polinomio de Taylor de orden 6 en $x_0 = 0$.

Calculemos primero el polinomio de Taylor de orden 6 en $x_0 = 0$ para la función $f(x) = \cos(x)$. Las primeras seis derivadas de f son:

$$f'(x) = -\mathrm{sen}(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f'''(x) = \mathrm{sen}(x),$$

$$f^{(4)}(x) = \cos(x), \quad f^{(5)}(x) = -\mathrm{sen}(x), \quad f^{(6)}(x) = -\cos(x).$$

Evaluemos en $x_0 = 0$:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = -1, \quad f^{(4)}(0) = 1, \quad f^{(5)}(0) = 0, \quad f^{(6)}(0) = -1.$$

Por tanto, el polinomio de Taylor será:

$$T_{6,0,f}(x) = f(0) + + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}.$$

Aproximamos $\cos(0,1) = f(0,1)$ por $T_{6,0,f}(0,1) \approx 0,995004165$.

3.8.2. Regla de L'Hôpital

En trazado de curvas, optimización y otras aplicaciones es necesario a menudo calcular límites de la forma

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde x_0 es un número. Si $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, se puede usar la regla del cociente. Sin embargo, si numerador y denominador tienden a cero, el límite puede ser cualquier número real o bien $\pm\infty$. Por esta razón, un límite de este tipo se llama una *forma indeterminada* $\frac{0}{0}$. De manera análoga, si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$ son ambos infinitos, el límite del cociente se llama una *forma indeterminada* $\frac{\infty}{\infty}$.

Afortunadamente hay un procedimiento, que se llama la regla de L'Hôpital que nos permite relacionar una forma indeterminada

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

con el límite del cociente de derivadas

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Enunciamos formalmente la regla:

Teorema 3.8.2 (Regla de L'Hôpital). *Sean f y g funciones derivables en un entorno de x_0, con $g'(x) \neq 0$ en dicho entorno. Supongamos que*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,$$

o bien

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Si $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$, *entonces también*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Observaciones

1. El teorema de L'Hôpital es también válido si consideramos los límites laterales o los límites en el infinito (que no vemos).
2. El teorema de L'Hôpital nos permite resolver aquellas indeterminaciones de la forma $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. Más aún, se puede usar la regla de L'Hôpital sucesivamente en una expresión racional reducida mientras se obtenga una de las formas siguientes:
$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{\infty}{-\infty} \quad \frac{-\infty}{\infty} \quad \frac{-\infty}{-\infty}$$
en $x = x_0$. Como la regla de L'Hôpital se puede aplicar repetidas veces, se puede continuar aplicando hasta que se obtenga algo distinto de una de esas formas (para el numerador o el denominador).
3. El recíproco del teorema no es cierto.

Ejemplo

Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \quad g(x) = x.$$

Claramente $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$.

Por otro lado, $g'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Ya hemos visto que f es derivable en $\mathbb{R}$ y haciendo uso de la regla de la cadena podemos ver que

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Estudiemos el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} f'(x).$$

Para todo $x \neq 0$,

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - f'(x).$$

Como no existe el límite $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, tampoco existe el límite $\lim_{x\to 0} f'(x)$ (no es un número real, ni $+\infty$, ni $-\infty$).

Sin embargo, es claro que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} x\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Ejemplos

1. Calculemos $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$.

Vemos que presenta una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. La resolvemos usando la regla de L'Hôpital (en este caso se puede):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

2. Calculemos $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$.

Vemos que presenta una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. La resolvemos usando la regla de L'Hôpital dos veces (en este caso se puede):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Ejercicio

Calcular, usando la regla de L'Hôpital los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\text{sen}^2(x)}\right) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x).$$

3.9. Estudio y representación gráfica de funciones

Para dibujar la gráfica de una función $y = f(x)$ debemos estudiar los puntos que se enumeran a continuación. Para ilustrar el proceso, escribiremos un ejemplo con la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}$.

Dominio y continuidad de la función.

Debemos estudiar los puntos donde la función no está definida o es discontinua. También debemos estudiar el tipo de discontinuidad que aparezca.

Consideremos la función $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-3}$. Por tratarse de una función racional,hemos de estudiar en qué puntos se anula el denominador: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$. El dominio de continuidad es entonces $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. ¿ Qué tipo de discontinuidad es ?. Como $\lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty$, se trata de una discontinuidad de salto infinito, y por tanto inevitable. Conviene recordar esto a la hora de estudiar las asíntotas más adelante.

Cortes con los ejes y signo de la función.

Hemos de resolver (si es posible) la ecuación $f(x) = 0$ (cortes con el eje x) y calcular $f(0)$ (corte con el eje y; notemos que el eje y sólo puede ser cortado una vez). A continuación consideramos los intervalos cuyos extremos son los puntos de corte con el eje x, así como los puntos que no pertenecen al dominio. En cada uno de estos intervalos el signo de la función no cambia, debido al teorema de Bolzano. Por tanto, para conocer el signo de f en cada intervalo basta tomar un punto arbitrario y mirar su signo.

En nuestro caso particular tenemos: por un lado, $f(0) = \frac{2}{3}$, luego la gráfica $y = f(x)$ corta al eje y en el punto $(0, \frac{2}{3})$. Por otro lado,

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2.$$

Los puntos de corte con el eje x son $(-1, 0)$ y $(2, 0)$. Teniendo en cuenta además que $3 \notin D(f)$, consideramos los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, \infty)$. En cada intervalo la función no cambia (si lo hiciera, por el teorema de Bolzano existiría otra raiz dentro del intervalo, lo cual no es posible). Basta tomar un punto en cada intervalo y estudiar su signo:

- Tomemos $-2 \in (-\infty, -1)$; entonces $f(-2) = -\frac{4}{5} < 0$. Por tanto, $f < 0$ en $(-\infty, -1)$.
- Tomemos $0 \in (-1, 2)$; $f(0) = \frac{2}{3} > 0$. De este modo, $f > 0$ en $(-1, 2)$.
- Tomemos $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \in (2, 3)$, $f(\frac{5}{2}) = -\frac{7}{2} < 0$. Entonces $f < 0$ en $(2, 3)$.
- $4 \in (3, \infty)$, $f(4) = 10 > 0$. Por tanto, $f > 0$ en $(3, \infty)$.

Asíntotas.

Calculamos las posibles asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. En particular, para estudiar las asíntotas verticales deberíamos tener en cuenta los puntos de discontinuidad estudiados al principio.

- Asíntotas verticales. Teniendo en cuenta el dominio de discontinuidad de la función, el único punto donde puede haber una asíntota vertical es $x = 3$. Estudiamos los límites laterales:
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = +\infty, \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3} = -\infty.$$
Por tanto, la recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Además, f se va a infinito por la derecha de $x = 3$ y a menos infinito por la izquierda. Conviene recordar esto a la hora de estudiar los extremos globales.
- Asíntotas horizontales. Notemos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Por tanto, no hay asíntotas horizontales.
- Asíntotas oblicuas. En este caso,
$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x} = 1, \quad n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x - 2}{x - 3} = 2.$$
Por tanto, la recta $y = mx + n = x + 2$ es una asíntota oblicua, tanto en ∞ como en $-\infty$.

Crecimiento y extremos.

Para estudiar el crecimiento de f hemos de recurrir a la primera derivada f'. Primero calculamos los valores singulares. A continuación construimos los intervalos cuyos extremos vienen dados por los valores críticos y los puntos que no pertenecen al dominio de f. Ahora, al igual que hicimos para estudiar el signo, tomamos un punto arbitrario en cada intervalo y miramos el signo de la derivada, que no cambiará debido al teorema de Bolzano.

Para determinar los extremos relativos, es importante tener en cuenta que estos pueden ser tres tipos de puntos:

- Puntos donde f no es derivable.
- Valores singulares: $f'(x) = 0$. Podemos usar el anterior estudio sobre crecimiento para determinar si se tratan de máximos, mínimos o puntos de inflexión. También puede hacerse recurriendo a la segunda derivada o, en caso necesario, a las derivadas de orden superior.
- En el caso de un dominio cerrado, $D(f) = [a, b]$, habría que estudiar además los extremos del intervalo.

Por último, los extremos absolutos es conveniente estudiarlos una vez que se ha dibujado la gráfica, teniendo en cuenta que si hay asíntotas verticales u oblicuas es posible que no hayan máximos o mínimos absolutos.

La primera derivada de f es: $f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$. Para calcular los valores críticos resolvemos la ecuación $f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 5$. Además hemos de tener en cuenta que f no está definida en $x = 3$. Consideramos entonces los siguientes intervalos: $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 5)$ y $(5, \infty)$, y estudiamos el signo de f' en cada una de ellos:

- Tomemos $0 \in (-\infty, 1)$, $f'(0) = \frac{5}{9} > 0$. Por tanto, $f' > 0$ en $(-\infty, 1)$. Esto significa que f es creciente en $(-\infty, 1)$.
- Tomemos $2 \in (1, 3)$, $f'(2) = -3 < 0$. Entonces $f' < 0$ en $(1, 3)$, y por tanto, f es decreciente en $(1, 3)$.
- Tomemos $4 \in (3, 5)$, $f'(4) = -3 < 0$. De este modo, $f' < 0$ en $(3, 5)$, y por tanto f es decreciente en $(3, 5)$.
- Tomemos $6 \in (5, \infty)$, $f'(6) = \frac{5}{9}$. Entonces $f' > 0$ en $(5, \infty)$, y por tanto f es creciente en $(5, \infty)$.

Vemos entonces que el valor crítico $x = 1$ es un máximo relativo y que $x = 5$ es un mínimo relativo.

Por otra parte, como $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$, no hay máximos absolutos. De igual forma, tampoco existen mínimos absolutos, ya que $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$.

Concavidad y convexidad.

Calculamos la segunda derivada f'' y estudiamos los intervalos de concavidad y convexidad teniendo en cuenta las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$, los puntos donde no existe f'' y los puntos que no pertenecen al dominio de f.

En nuestro ejemplo, $f''(x) = \frac{8}{(x-3)^3}$. Es claro que la ecuación $f''(x) = 0$ no tiene soluciones, por lo que sólo hemos de considerar el punto $x = 3 \notin D(f)$. Se forman así dos intervalos: $(-\infty, 3)$ y $(3, \infty)$:

- Tomemos $2 \in (-\infty, 3)$, $f''(2) = -8 < 0$. Por tanto, $f'' < 0$ en $(-\infty, 3)$ y esto significa que f es cóncava en $(-\infty, 3)$.
- Tomemos $4 \in (3, \infty)$, $f''(4) = 8 > 0$. De este modo, $f'' > 0$ en $(3, \infty)$, y por tanto, f es convexa en dicho intervalo.

En este caso, $x = 3$ no sería un punto de inflexión, porque no pertenece al dominio de f.

3.10. Cálculo aproximado de raices de ecuaciones

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $f(a)f(b) < 0$. El teorema de Bolzano nos dice que existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Dicho de otra forma c es una raiz o solución de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[a, b]$. Pero en determinados problemas es importante no sólo conocer que existe solución, sino también determinar dicha solución. En general, no podremos resolver exactamente la ecuación $f(x) = 0$, pero sí podremos aproximar dichas soluciones tanto como queramos, es decir, podremos calcular raices o soluciones aproximadas de la ecuación.

En esta sección presentaremos cuatro métodos clásicos para aproximar soluciones. En todos ellos supondremos que f es continua en $[a, b]$ y que cambia de signo en los extremos, lo que nos asegura la existencia de alguna raiz. También supondremos que hay una única raiz en $[a, b]$ (en el caso en que f sea derivable, esta unicidad puede demostrarse usando el teorema de Rolle).

Método de la bisección

Este método se basa directamente en el teorema de Bolzano. Como $f(a)f(b) < 0$, existe una raiz $c \in (a, b)$ que supondremos única. Tomemos el punto medio $x_0 = \frac{a+b}{2}$ del intervalo y calculemos $f(x_0)$. Pueden ocurrir tres cosas:

- Si $f(x_0) = 0$ hemos acabado, ya que x_0 es la raiz buscada.
- Si $f(a)f(x_0) < 0$, consideramos el intervalo $[a, x_0]$ donde, según el teorema de Bolzano, estará la raiz buscada.
- Si $f(x_0)f(b) < 0$, consideramos el intervalo $[x_0, b]$. Ahora la raiz está en este intervalo, de nuevo por el teorema de Bolzano.

Hemos localizado la raiz en un intervalo cuya longitud es la mitad de la longitud del intervalo inicial. De este modo, tendremos que la distancia entre x_0 y c es menor que $\frac{b-a}{2}$.

Repitamos el proceso anterior partiendo del intervalo $[a, x_0]$ o $[x_0, b]$, según el caso. Obtendremos así un nuevo punto x_1 cuya distancia a la raiz c será menor que $\frac{b-a}{4}$.

Continuando este proceso, obtendremos una sucesión x_0, x_1, x_2,... de raices aproximadas de la ecuación $f(x) = 0$. Como en cada paso la longitud se reduce a la mitad, en el paso n tendremos que

$$\operatorname{dist}(x_n, c) = |x_n - c| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n+1}} = 0$, deducimos que $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, lo que demuestra que las raices aproximadas x_n se acercan cada vez más a la raiz c.

Método de Newton o de las tangentes

Supondremos ahora que f es derivable en (a, b). Tomemos un punto arbitrario $x_0 \in (a, b)$ y consideremos la recta tangente a la gráfica $y = f(x)$ en dicho punto: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Esta recta corta al eje de abcisas en un cierto punto x_1 que se puede calcular fácilmente:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \Longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Por supuesto, esto podremos hacerlo siempre que $f'(x_0) \neq 0$. A este procedimiento se le llama *aproximación por la tangente* .

Observación

Si $f'(x_0) = 0$, entonces la recta tangente a la gráfica en x_0 es paralela al eje de abcisas, por lo que nunca lo cortará, salvo en el caso en que $f(x_0) = 0$. Pero entonces x_0 sería la raiz buscada y habríamos terminado.

Una vez obtenido el punto x_1, trazamos la tangente en x_1 y calculamos el punto x_2 de corte con en eje de abcisas:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

válido siempre que $f'(x_1) \neq 0$. Este proceso se repite y obtenemos así una sucesión x_1, x_2,.... de raices aproximadas, definidas de forma recursiva por la fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

En general, no podemos asegurar que la sucesión generada por el método de Newton converga a la raiz; de hecho, puede incluso que algún x_n caiga fuera del intervalo (a, b). Pueden darse condiciones suficientes para asegurar la convergencia, pero este tipo de cuestiones está fuera del alcance de este curso.

Método de la secante o de las cuerdas

Llamemos $x_0 = a$ y $x_1 = b$. Consideremos la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, y calculemos el punto de corte x_2 con en eje de abcisas. La ecuación de dicha cuerda es:

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

de donde, haciendo $y = 0$, obtenemos:

$$x_2 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}(x_1 - x_0) = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Ahora repetimos el proceso a partir de los puntos x_1 y x_2. Así obtenemos una sucesión x_0, x_1, x_2,..... de aproximaciones, cuya fórmula general puede escribirse así:

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Este método tiene varios inconvenientes. Por un lado, puede ser que algún x_n esté fuera del intervalo (a, b) y que no pertenezca al dominio de f. Por otro lado, puede ser que $f(x_n) = f(x_{n-1})$, con lo que no podríamos construir el término x_{n+1}. Finalmente, aunque la sucesión de aproximaciones x_n pueda construirse, no podemos asegurar que converja hacia la raiz. Sin embargo, podemos modificar ligeramente el método de la secante para que todo funcione bien. Esto será el próximo método que estudiaremos.

Método de “regula falsi ”

El método de “regula falsi ” es una modificación del método de la secante, en el que en cada paso elegimos el subintervalo que contiene a la raiz.

Consideramos la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, y calculamos el punto de corte x_1 con el eje de abcisas. Al igual que en el método de la secante, este punto será :

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Tenemos ahora tres posibilidades:

- Si $f(x_1) = 0$ hemos terminado, ya que x_1 es la raiz buscada.
- Si $f(a)f(x_1) < 0$, la raiz estará en el intervalo (a, x_1). Construimos entonces la cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(x_1, f(x_1))$, y calculamos el punto de corte x_2 de la cuerda con el eje de abcisas.
- Si $f(x_1)f(b) < 0$, la raiz estará en el intervalo (x_1, b). Hacemos entonces lo mismo que en caso anterior pero considerando los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(b, f(b))$.

Repitiendo este proceso, obtenemos una sucesión x_1, x_2,..... de raices aproximadas. Puede demostrarse que esta sucesión siempre converge a la raiz.