MATEMÁTICA DISCRETA

Operaciones con Grafos

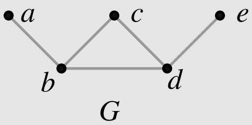
Subgrafos de un grafo

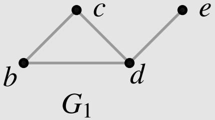
Definición

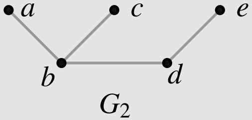
Un grafo $H = (V', E')$ es un **subgrafo** del grafo $G = (V, E)$ si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.

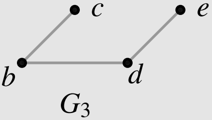
Ejemplo

Determina tres subgrafos de G.





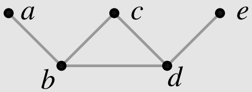




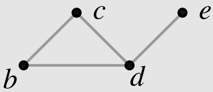
- Sea $G=(V,E)$ un grafo y $S \subseteq V$ un subconjunto de vértices de G. Se define el **subgrafo generado** o **inducido** por S en G como el grafo $\langle S \rangle = (S,E')$, de tal manera que $\{u,v\} \in E' \Leftrightarrow \{u,v\} \in E$ y $u,v \in S$. Así, el conjunto de las aristas de $\langle S \rangle$ son las que, siendo de G, conectan vértices de S.
- Sean $G=(V,E)$ y $H=(V',E')$ dos grafos. Se dice que H es un **subgrafo generador** o **de expansión** de G si $V'=V$ y $E' \subseteq E$.

Ejemplo

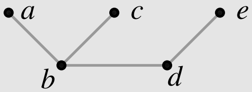
Entre estos subgrafos de G, solo G_2 es un subgrafo generador de G.



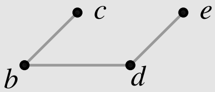
G



G_1



G_2



G_3

Complemento de un grafo

Definición

Se define el **complemento** de un grafo $G=(V,E)$ como el grafo $G^c=(V,E')$, donde

$$\{u,v\} \in E' \longleftrightarrow \{u,v\} \notin E.$$

Observación

Dos grafos son isomorfos si y sólo si lo son los complementos respectivos. Es decir,

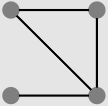
$$G \cong H \longleftrightarrow G^c \cong H^c$$

Ejemplo

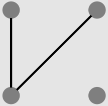
$(K_n)^c = N_n$ y $(N_n)^c = K_n$.

Ejemplo

Un grafo de orden 4 y su complemento



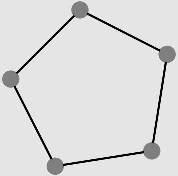
G

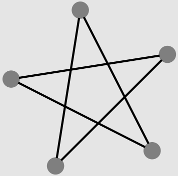


G^c

Ejemplo

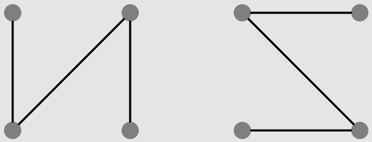
El grafo C_5 y su complemento, que también es C_5.





Ejemplo

La figura siguiente muestra que el camino de orden 4 también es autocomplementario: $(P_4)^c = P_4$

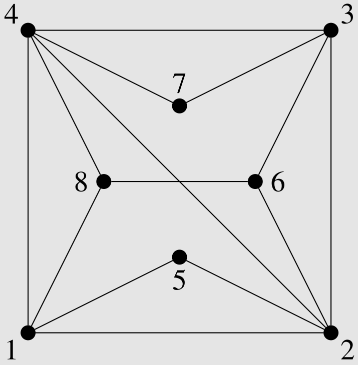


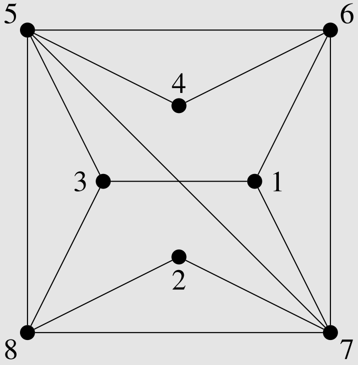
Ejemplo

Un grafo G que es isomorfo a su complemento: $G \cong G^c$.

Ejemplo

Un grafo G (a la izquierda) que es isomorfo a su complemento (a la derecha): $G \cong G^c$.

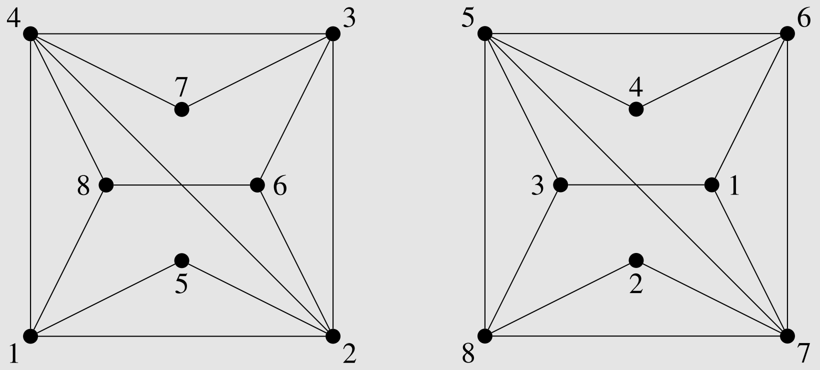




Observación

Sea $G=(V,E)$ un grafo de orden n. Para todo vértice $v \in V$ se cumple

$$\delta_{G^c}(v) = n-1-\delta_G(v).$$



Ejercicio

Determina una fórmula para calcular la medida de G^c en función del orden y la medida de G.

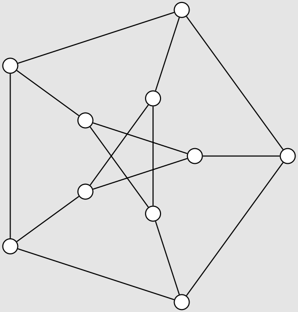
Solución:

$$n(G^c) = n(G).$$

$$m(G^c) = \binom{n(G)}{2} - m(G).$$

Ejercicio

Calcula la medida del complemento del grafo de Petersen.



Solución:

$$m(G) = \frac{n\delta}{2} = 15 \longrightarrow m(G^c) = \binom{10}{2} - 15 = 30.$$

Ejercicio

Sea $G=(V,E)$ un grafo de orden $n=6$. Demuestra que el grafo G o su complemento G^c contiene algún triángulo.

Solución

- Sea α uno de los seis vértices de G.
- Distribuimos los 5 vértices restantes en dos "cajas": en la caja 1 se ponen los adyacentes a α, y en la caja 2 los que no son adyacentes.
- Dado que $5 > 2 \cdot 2$, podemos afirmar que en una de las cajas hay por lo menos tres vértices.
- Supongamos que la caja 1 contiene los vértices β, γ, δ. Si dos de ellos, digamos β y γ, son adyacentes, entonces α, β, γ forman un triángulo. Si ningún par de vértices entre β, γ, δ son adyacentes, entonces β, γ, δ forman un triángulo en G^c.
- Un razonamiento análogo se puede realizar si es la caja 2 la que contiene tres (o más) vértices.

Unión de grafos

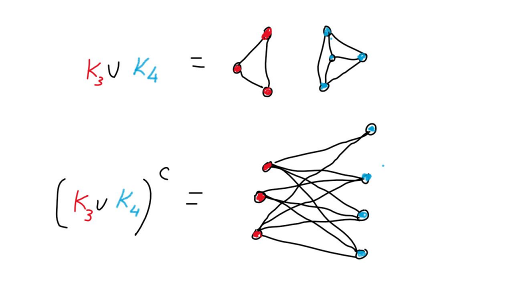
Definición

La **unión** de dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, donde $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, es el grafo

$$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2).$$

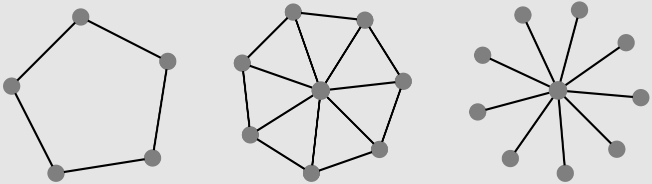
Ejemplo

$(K_r \cup K_s)^c = K_{r,s}$.



Ejemplo

El grafo de la siguiente figura se puede expresar como $G = C_5 \cup R_8 \cup K_{1,9}$.



Suma de grafos, "+"(join)

Definición

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos tales que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. La **suma** $G_1 + G_2$ es el grafo

$$G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, (E_1 \cup E_2 \cup \{\{u, v\} \mid u \in V_1,\ v \in V_2\})).$$

Ejercicio

Expresa los siguientes grafos como suma de grafos conocidos.

- $K_{r+s} = K_r + K_s$.
- $K_{r,s} = N_r + N_s$.

Ejercicio

Determina una fórmula para la medida de $G+H$.

Solución:

El grafo $G+H$ se obtiene tomando una copia del grafo G y una del grafo H y luego uniendo cada vértice de G con todos los de H. Por lo tanto, la medida de $G+H$ es

$$m(G+H) = m(G) + m(H) + n(G) \cdot n(H).$$

Ejercicio

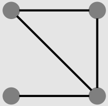
Determina la medida de $G = (K_4 \cup K_3)^c + P_4$.

Solución:

$$m(G) = m(K_{4,3}) + m(P_4) + n(K_{4,3}) \cdot n(P_4) = 12 + 3 + 28 = 43.$$

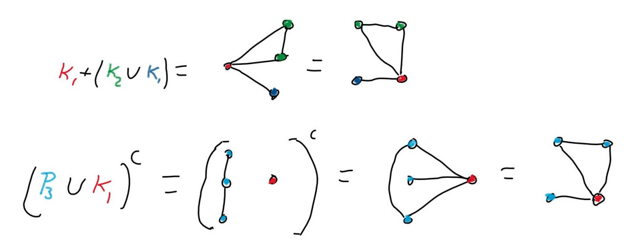
Ejercicio

Expresa el grafo de la figura mediante operaciones de grafos.

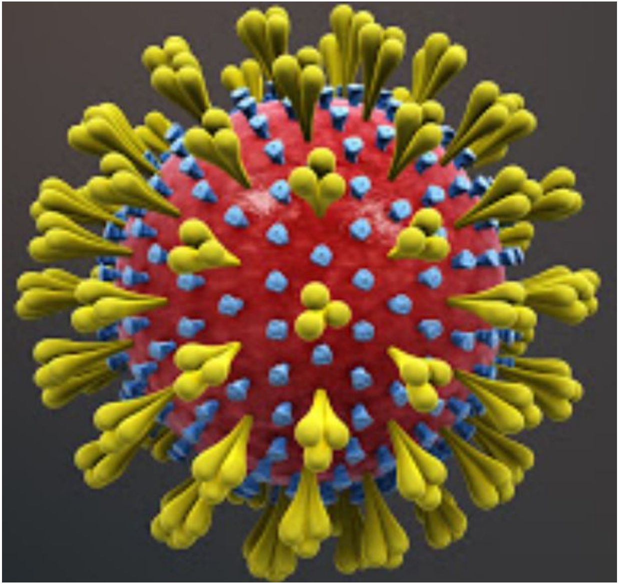


Solución:

$$G = K_1 + (K_2 \cup K_1) = (P_3 \cup K_1)^c.$$



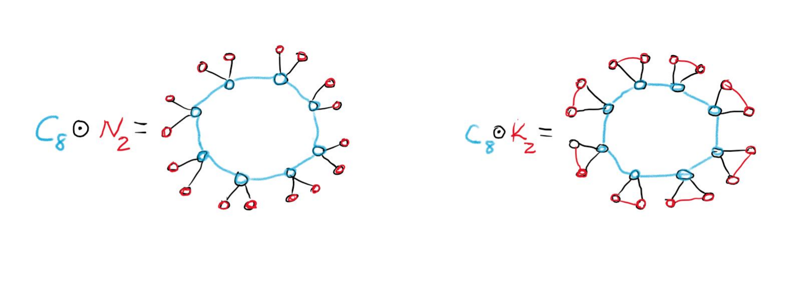
Producto corona de grafos



Definición

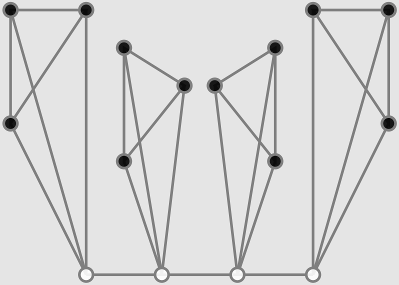
Sean G y H dos grafos. El **producto corona** $G \odot H$ se define a partir de G y H tomando una copia de G y $n(G)$ copias de H, y uniendo (con una arista) cada vértice de la i-ésima copia de H con el i-ésimo vértice de G.

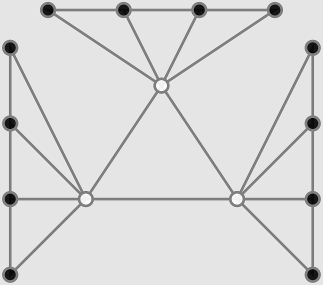
Ejemplos



Ejemplo

La siguiente figura muestra los grafos corona $P_4 \odot C_3$ y $C_3 \odot P_4$.





Ejercicio

Determina una fórmula para el orden y la medida de $G \odot H$.

Solución:

El orden de $G \odot H$ es

$$n(G \odot H) = n(G) + n(G)n(H) = n(G)(1 + n(H))$$

y la medida es

$$m(G \odot H) = m(G) + n(G)m(H) + n(G)n(H).$$

Ejercicio

Calcula el orden y la medida de $G = C_8 \odot N_6$.

Solución:

El orden es

$$n(G) = n(C_8 \odot N_6) = n(C_8)(1 + n(N_6)) = 56.$$

y la medida es

$$m(G) = m(C_8 \odot N_6) = m(C_8) + n(C_8)m(N_6) + n(C_8)n(N_6) = 56.$$