MATEMÁTICA DISCRETA

Grafos: Conceptos básicos (Parte 2)

- Grafos: Conceptos básicos (Parte 1).
- Grafos: Conceptos básicos (Parte 2).

Grafos: Conceptos básicos (Parte 1)

Ejercicio

Sea $G = (V,E)$ un grafo de n vértices, t de los cuales son de grado k y el resto, de grado $k+1$. Probar que $t = (k+1)n - 2m$, siendo m el número de aristas.

Solución:

Aplicando la fórmula de los grados se obtiene la relación

$$2m = kt + (k+1)(n-t).$$

De la relación obtenida se deriva inmediatamente la relación buscada.

Ejercicio

Sea G un grafo 3-regular de orden n. Sea $X \subset V$ tal que $|X| = \frac{2n}{5}$ y cada vértice de $V \setminus X$ tiene al menos dos vecinos en X. Prueba que entre los vértices de X no hay adyacencias.

Solución:

- Sea c el número de aristas que va de X a $V \setminus X$.
- En $V \setminus X$ hay $\frac{3n}{5}$ vértices.
- Como cada vértice de $V \setminus X$ tiene al menos dos vecinos en X, entonces $2 \cdot \frac{3n}{5} \leq c$.
- Como G es 3-regular, $c \leq 3 \cdot \frac{2n}{5}$.
- Así, $c = \frac{6n}{5}$ y, por consiguiente, cada vértice de X tiene exactamente 3 vecinos en $V \setminus X$.
- Por tanto, entre los vértices de X no hay adyacencias.

Grafos: Conceptos básicos (Parte 2)

Algunas familias de grafos

Grafos nulos

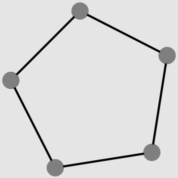
El **grafo nulo** N_n de orden $n \geq 1$ es el grafo de n vértices y 0 aristas.
El grafo N_1 se denomina **grafo trivial**.

La figura muestra el grafo nulo N_8.

Algunas familias de grafos

Ciclos

El grafo ciclo de orden $n \geq 3$ es $C_n = (V, E)$, donde $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$.

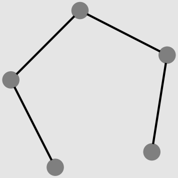


La figura muestra el grafo ciclo C_5.

Algunas familias de grafos

Caminos

El grafo camino $P_n = (V, E)$ de orden $n \geq 2$ es el grafo que cumple $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n\}$. El grafo P_n se puede obtener de la eliminación de una arista del grafo ciclo C_n.

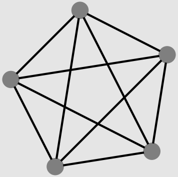


La figura muestra el grafo camino P_5.

Algunas familias de grafos

Completos

El grafo completo K_n es el grafo de n vértices con todas las aristas posibles.

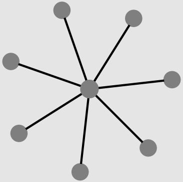


La figura muestra el grafo completo K_5.

Algunas familias de grafos

Grafos estrella

El grafo estrella E_n de orden $n \geq 2$ es el grafo de n vértices y $n-1$ aristas que tiene un vértice de grado $n-1$ y $n-1$ vértices de grado 1.



La figura muestra el grafo estrella E_8.

Grafos bipartitos

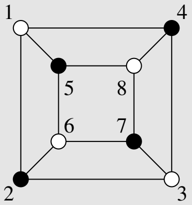
Definición

Un grafo $G = (V, E)$ no nulo es **bipartito** si $V = V_1 \cup V_2$, con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, de manera que las aristas existentes sólo conectan vértices de V_1 con vértices de V_2.

Será bipartito el cubo?

Ejemplo

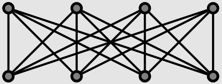
El cubo es un grafo bipartito.



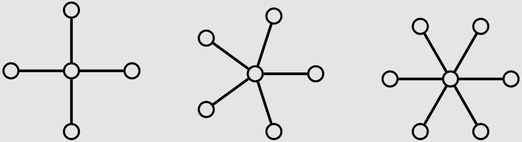
Grafos bipartitos completos

El **grafo bipartito completo**, denotado por $K_{r,s} = (V_1 \cup V_2, E)$, es un grafo bipartito donde $|V_1| = r$, $|V_2| = s$, con todas las aristas posibles conectando vértices de V_1 con vértices de V_2.

El grafo $K_{4,4}$.



Grafos estrella $E_{r+1} = K_{1,r}$



$E_5 = K_{1,4}$ $\quad$ $E_6 = K_{1,5}$ $\quad$ $E_7 = K_{1,6}$

Ejercicio

Si $G=(V,E)$ es un grafo bipartito de orden n, ¿cuál será el número máximo de aristas de este grafo?

Solución:

- Si x es el número de vértices del conjunto V_1, entonces $n-x$ será el número de vértices de V_2.
- El número total de aristas será $x(n-x)$.
- Por lo tanto, hace falta maximizar la función $f(x)=x(n-x)$.
- Si n es par, el máximo se alcanza en $x=\frac{n}{2}$. En cambio, si n es impar, se alcanza en $x=\frac{n-1}{2}$ y en $x=\frac{n+1}{2}$.
- La solución será $\frac{n^2}{4}$ para n par y $\frac{n^2-1}{4}$ para n impar.

Teorema

Si un grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, E)$ es regular, entonces $|V_1| = |V_2|$.

Demostración

- Cada arista tiene un extremo en V_1 y el otro en V_2
- La medida de G es $m = \sum_{v \in V_1} \delta(v)$ y también es $m = \sum_{v \in V_2} \delta(v)$.
- Entonces, si G es k-regular, $|V_1|k = |V_2|k$.
- Por consiguiente, $|V_1| = |V_2|$.

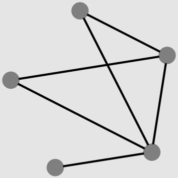
Secuencias gráficas

Definición

Una secuencia de números enteros no negativos, $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$ se denomina **secuencia gráfica** si existe un grafo $G = (V, E)$ de orden n tal que s es la secuencia de grados de G.

Ejemplo

La secuencia $s : 4, 3, 2, 2, 1$ es gráfica.



Ejemplo

La secuencia $s : 4, 3, 3, 2, 1$ no es una secuencia gráfica, puesto que tiene un número impar de números impares.

Teorema. Caracterización de **Havel-Hakimi**

Una secuencia $s: d_1, d_2, \ldots, d_n$ de números enteros no negativos, con $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, es una secuencia gráfica si y sólo si la secuencia $d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$ es gráfica.

Ejemplo

Aplicamos la caracterización de Havel-Hakimi a la secuencia
$s: 2, 2, 4, 3, 3, 2, 3, 5$.
5,4,3,3,3,2,2,2
3,2,2,2,1,2,2
3,2,2,2,2,2,1
1,1,1,2,2,1
2,2,1,1,1,1
1,0,1,1,1
1,1,1,1,0
0,1,1,0
1,1,0,0
0,0,0. Por lo tanto, la secuencia es gráfica.

Ejercicio

Considera la secuencia $d-2, d-2, d-1, d-1, d-1, d-1, d+2$, donde d es un número entero ¿Para qué valores de d la secuencia es gráfica?

Como $d \geq 2$ y $d+2 \leq 6$, tenemos que $d \in \{2,3,4\}$.
Para $d=2$, la secuencia $0,0,1,1,1,1,4$ es gráfica ya que al aplicar el algoritmo de Havel-Hakimi se obtiene la secuencia $0,0,0,0,0,0$.
Para $d=3$ la secuencia es $1,1,2,2,2,2,5$, que no es gráfica por tener un número impar de números impares.
Finalmente, para $d=4$ la secuencia es $2,2,3,3,3,3,6$ y al aplicar el algoritmo de Havel-Hakimi se obtiene:

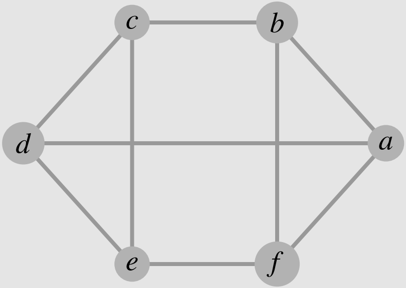
$6,3,3,3,3,2,2$
$2,2,2,2,1,1$
$1,1,2,1,1$
$2,1,1,1,1$
$0,0,1,1$
$1,1,0,0$
$0,0,0$ Por lo tanto, la secuencia es gráfica.

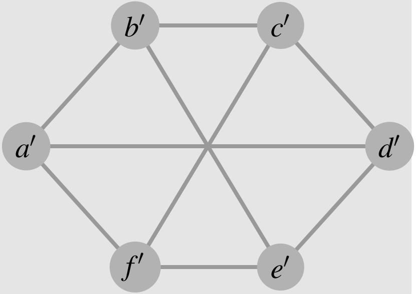
Isomorfismo de grafos

Isomorfismo de grafos

Ejemplo

Aunque los grafos de la siguiente figura tienen el mismo orden, la misma medida y ambos son 3-regulares, no tienen la misma estructura.





Definición

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos.

- G_1 y G_2 son **idénticos** si y sólo si $V_1 = V_2$ y $E_1 = E_2$.
- G_1 y G_2 son **isomorfos** (se denota $G_1 \cong G_2$) si y sólo si existe una biyección

  $$\varphi : V_1 \to V_2$$

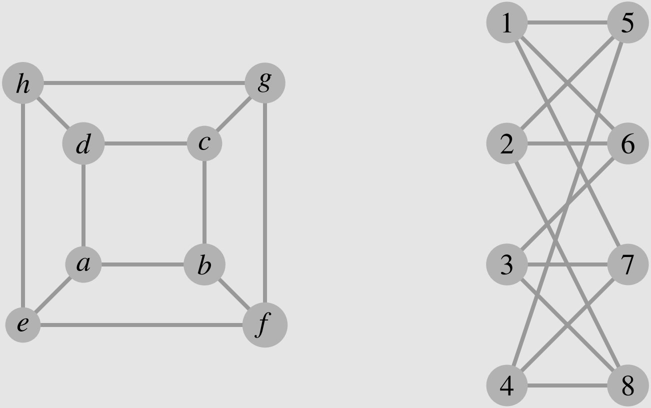
  que conserva las adyacencias y las no adyacencias, es decir,

  $$u \sim v \Leftrightarrow \varphi(u) \sim \varphi(v).$$

  En este caso, se dice que φ es un **isomorfismo** de grafos.

Ejercicio

Determina si los grafos representados en la figura son isomorfos.

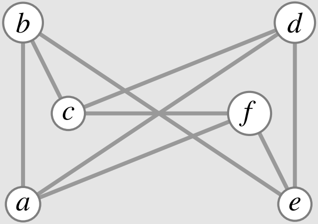


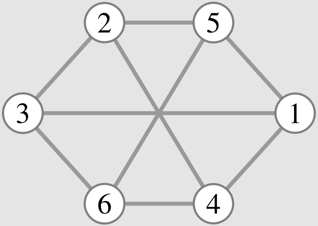
La respuesta es afirmativa y el isomorfismo es:

$$a \to 1,\ b \to 5,\ c \to 2,\ d \to 6,\ h \to 3,\ e \to 7,\ f \to 4,\ g \to 8$$

Ejercicio

Determina si los grafos son isomorfos.





Los grafos son isomorfos y el isomorfismo es:

$$a \to 3,\ \ d \to 1$$
$$b \to 2,\ \ e \to 4$$
$$c \to 5,\ \ f \to 6$$

¿Cómo introducir un grafo al ordenador?

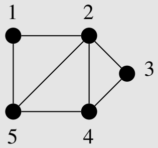
Definición

Sea $G = (V,E)$ un **grafo** y sea $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Se define la **matriz de adyacencia** de G como $A = (a_{ij})$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad v_i \sim v_j; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ejemplo

La matriz de adyacencia del grafo



será la siguiente matriz cuadrada de orden 5×5:

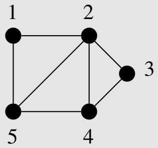
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Definición

Sea $A = (V, E)$ un **grafo** donde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Se define la **matriz laplaciana** de G como la matriz $L = D - A$, donde A es la matriz de adyacencia de G y $D = diag(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n)$ es la matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los grados de los vértices. donde G.

Ejemplo

La matriz laplaciana, $L = D - A$, en el grafo



es la siguiente matriz cuadrada de orden 5×5:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$