Cálculo - Grado en Ingeniería Informática
Relación de Ejercicios (Integrales Definidas)

1. Usando la definición, calcula la integral definida de la función $f(x) = cx$ en el intervalo $[a, b]$, donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante.

2. Demuestra que:

   a) $\displaystyle\int_a^b k dx = k(b-a)$, donde $k \in \mathbb{R}$.

   b) $\displaystyle\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

3. Calcula los valores de m para que:

   a) $\displaystyle\int_0^m e^{3x} dx = \frac{7}{3}$.

   b) $\displaystyle\int_{m-5}^0 (mx - x^2) dx = 0$.

4. Completa las siguientes afirmaciones.

   a) El valor promedio de una función f en el intervalo $[a, b]$ es ___________.

   b) El Teorema del valor medio para integrales dice que existe un $c \in (a, b)$ tal que el valor promedio de la función f en el intervalo $[a, b]$ es ___________.

   ¿?

   c) Si f es una función impar, entonces $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)dx =$ ___________.

   d) Si f es una función par, entonces $\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)dx =$ ___________.

5. Calcula las siguientes integrales.

   a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$

   b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x \sin^4(x) + x^3 - x^4) dx$

   c) $\displaystyle\int_{-5}^{5} \frac{x^5}{x^2 + 4} dx$

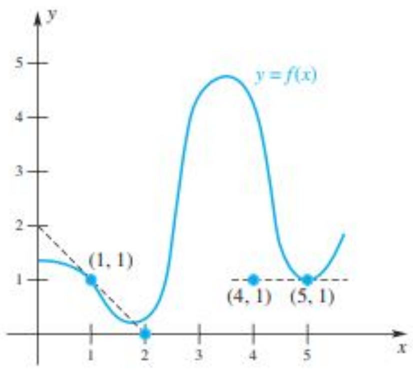
   d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{3 - x}} dx$

6. Calcula las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x| dx$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{2} |2x - 1| dx$

7. La figura muestra la gráfica de una función f que tiene segunda derivada continua. Las líneas discontinuas son tangentes a la gráfica de $y = f(x)$ en los puntos $(1, 1)$ y en $(5, 1)$. Diga, en caso de que sea posible, si las siguientes integrales son positivas, negativas o cero.



a) $\displaystyle\int_1^5 f(x)dx$

b) $\displaystyle\int_1^5 f'(x)dx$

c) $\displaystyle\int_1^5 f''(x)dx$

1. Usando la definición, calcula la integral definida de la función $f(x) = cx$ en el intervalo $[a, b]$, donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante.

La definición de integral definida dice que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \quad \begin{cases} x_i = a + i\Delta x = a + i\,\dfrac{b-a}{n} \\ \Delta x = \dfrac{b-a}{n} \end{cases}$$

Por lo que $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to+\infty} \quad a + i\,\frac{b-a}{n}\Big) \cdot \frac{b-a}{n}$

$$\int_a^b cx\,dx = c\int_a^b x\,dx = c\lim_{n\to+\infty}\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} = c\lim_{n\to+\infty} a\,\frac{b-a}{n} + i\,\frac{(b-a)^2}{n^2}$$

$$= c\lim_{n\to+\infty} a\,\frac{b-a}{n} + \frac{n(n+1)}{2}\,\frac{(b-a)^2}{n^2} = c\left(\cancelto{0}{\lim_{n\to+\infty} a\,\frac{b-a}{n}} + \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}\,\frac{(b-a)^2}{n^{\cancel{2}}}\right)$$

$$= c\lim_{n\to+\infty} \frac{n(b-a)^2 + (b-a)^2}{2n} = c\,\frac{(b-a)^2}{2} = c\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

2. Demuestra que:

a) $\int_a^b k dx = k(b-a)$, donde $k \in \mathbb{R}$. b) $\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

$$\int_a^b k dx = k \int_a^b dx = k \Big[x \Big]_a^b = k(b-a)$$

$$= k \lim_{n \to +\infty} \sum f(x_i) \Delta x = k \lim_{n \to +\infty} \sum f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \frac{b-a}{n}$$

$$= k \lim_{n \to +\infty} a \frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^2}{n^2} i = k \cancelto{0}{\lim_{n \to +\infty} a \frac{b-a}{n}} + \lim_{n \to +\infty} \frac{(b-a)^2}{n^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{n}(n+1)}{2}$$

$$= k \lim_{n \to +\infty} \frac{n(b-a)^2 + b - a}{2n} = k \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$\int_a^b x \, dx = \int_a^b x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sum f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right) \frac{b-a}{n} = \lim_{x \to +\infty} \left(a \frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^2}{n^2} i \right)$$

$$= \cancelto{0}{\lim_{x \to +\infty} a \frac{b-a}{n}} + \lim_{n \to +\infty} \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(b-a)^2 (n+1)}{2n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(b-a)^2 + (b-a)^2}{2n}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}$$

3. Calcula los valores de m para que:

a) $\displaystyle\int_0^m e^{3x}dx = \frac{7}{3}$. b) $\displaystyle\int_{m-5}^0 (mx - x^2)dx = 0$.

$$\int_0^m e^{3x}\,dx = \frac{7}{3} \rightarrow \left[\frac{e^{3x}}{3}\right]_0^m = \frac{1}{3}\left(e^{3m} - e^0\right) = \frac{e^{3m}-1}{3}$$

$$\frac{e^{3m}-1}{3} = \frac{7}{3} \rightarrow e^{3m} = 8 \rightarrow \ln e^{3m} = \ln 8 \rightarrow 3m = \ln 8 \rightarrow m = \frac{\ln 8}{3}$$

$$\int_{m-5}^0 (mx - x^2)\,dx = 0 \rightarrow \int_{m-5}^0 mx\,dx - \int_{m-5}^0 x^2\,dx = \left[\frac{mx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{m-5}^0$$

$$-\frac{m(m-5)^2}{2} + \frac{(m-5)^3}{3} = \frac{-m^3+10m^2-25m}{2} + \frac{m^3-15m^2+75m-125}{3}$$

$$= \frac{-3m^3+30m^2-75m+2m^3-30m^2+150m-250}{6} = \frac{-m^3+75m-250}{6} \left\langle \begin{array}{l} m=-10 \\ m=5 \end{array}\right.$$

4. Completa las siguientes afirmaciones.

a) El valor promedio de una función f en el intervalo $[a, b]$ es $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

b) El Teorema del valor medio para integrales dice que existe un $c \in (a, b)$ tal que el valor promedio de la función f en el intervalo $[a, b]$ es $f(c)(b-a)$.

c) Si f es una función impar, entonces $\int_{-2}^{2} f(x)dx =$ 0.

d) Si f es una función par, entonces $\int_{-2}^{2} f(x)dx =$ $2\int_0^2 f(x)\,dx$.

5. Calcula las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$ b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x\sin^4(x) + x^3 - x^4) dx$

c) $\displaystyle\int_{-5}^{5} \frac{x^5}{x^2+4} dx$ d) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{3-x}} dx$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx = \left[\frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{4}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} = 4\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}$$

$$\int_{-2}^{2} (x\sin^4(x) + x^3 - x^4)\, dx =$$

$$\int_{-2}^{2} x\sin^4 x\, dx = \quad \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin^4 x\, dx & v = \frac{3}{8}x - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32} \end{matrix}$$

$$x\left(\frac{3}{8}x - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32}\right) - \int \frac{3}{8}x - \frac{\sin(2x)}{4} + \frac{\sin(4x)}{32}\, dx = 0$$

$$\int_{-2}^{2} (x\sin^4(x) + x^3 - x^4)\, dx = \int_{-2}^{2} x^3 - x^4\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2} = \frac{16}{4} - \frac{32}{5} - \frac{16}{4} - \frac{32}{5} = -\frac{64}{5}$$

$$\int_{-5}^{5} \frac{x^5}{x^2+4}\, dx \rightarrow \begin{matrix} t = x^2+4 \\ dt = 2x\, dx \\ x^4 = (t+4)^2 = t^2+8t+16 \end{matrix} \quad = \frac{1}{2}\int_{-5}^{5} \frac{t^2+8t+16}{t}\, dt = \frac{1}{4}t + 4t + 8\ln(t)$$

$$\left[\frac{x^2+4}{4} + 4x^2 + 16 + 8\ln(x^2+4)\right]_{-5}^{5} = \frac{29}{4} + 100 + 16 + 8\ln(29) - \frac{29}{4} - 100 - 16 - 8\ln(29) = 0$$

$$\int_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{3-x}}\, dx \rightarrow \begin{matrix} t = 3-x \\ x = 3-t \\ dt = -dx \end{matrix} \quad = \int_{1}^{2} \frac{t-3}{\sqrt{t}}\, dt = \int_{1}^{2} \sqrt{t}\, dt - 3\int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} - 6\sqrt{t}$$

$$\left[\frac{2}{3}\sqrt{(3-x)^3} - 6\sqrt{3-x}\right]_{1}^{2} = \frac{2}{3} - 6 - \frac{2}{3}\sqrt{8} + 6\sqrt{8} = \frac{-16+32\sqrt{2}}{3}$$

6. Calcula las siguientes integrales:

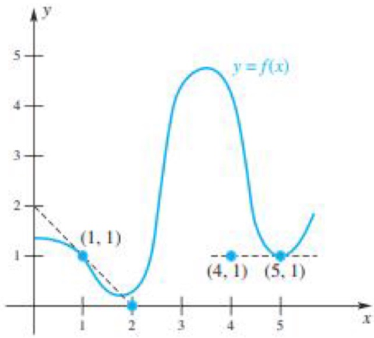
a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |x|dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{2} |2x-1|dx$

$$\int_{-1}^{1} |x| = \int_{0}^{1} x + \int_{0}^{1} x = 2\int_{0}^{1} x = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\,\frac{1}{2} = 1$$

$$\int_{0}^{2} |2x-1| = -\int_{0}^{1/2} 2x-1 + \int_{1/2}^{2} 2x+1 = -\left[x^2-x\right]_0^{1/2} + \left[x^2-x\right]_{1/2}^{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) + \left(4-2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{9}{4} = \frac{5}{2}$$

7. La figura muestra la gráfica de una función f que tiene segunda derivada continua. Las líneas discontinuas son tangentes a la gráfica de $y = f(x)$ en los puntos $(1,1)$ y en $(5,1)$. Diga, en caso de que sea posible, si las siguientes integrales son positivas, negativas o cero.



a) $\int_1^5 f(x)dx$

b) $\int_1^5 f'(x)dx$

c) $\int_1^5 f''(x)dx$

$y = f(x)$ en $(1,1)$ y $(5,1)$

a) Como $f(x)$ es positiva en todo el todo el intervalo sus valores son positivos. El área será 0 ya que $f(x)$ es igual en $f(1)$ y $f(5)$ es decir $f(5)-f(1)=0$

b) Como la pendiente en $f'(1)$ decrece $f'(1)<0$ y en $f'(5)$ es nula; $f'(5)=0$ por lo que

$f'(5)-f'(1) = -f'(1) > 0$

c)