Álgebra Lineal
Grado en Ingeniería Informática
Universidad de Córdoba
Curso 2023-2024

Relación de problemas Tema 5

Diagonalización

1. Diagonaliza las siguientes matrices, especificando la matriz de paso.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalice cuando sea posible las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Obtenga la base ortonormal de vectores propios para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 0 \\ 10 & 8 & -2 & -4 \\ 10 & 6 & 0 & -4 \\ 22 & 12 & -8 & -5 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 35 & 5 & -30 \\ 1 & -6 & 11 & 16 \\ -1 & 11 & -8 & -18 \\ 1 & -11 & 11 & 21 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Estudiar para qué valores de a y b A es diagonalizable.

5. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada A tiene dos valores propios distintos respecto a la base canónica: $\lambda_1 = 2$ doble y $\lambda_2 = 0$ simple. Los autoespacios propios asociados son $V_1 = \{(1,0,1),(0,1,2)\}$ y $V_2 = \{(1,1,1)\}$, respectivamente.

   (a) Razona por qué A es diagonalizable.

   (b) Escribe una matriz D diagonal semejante a A. ¿Cuál es la matriz de paso?

   (c) Halla A.

6. Considerando la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \leftarrow \mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(x,y,z,t) = (x+y+t, x-y+z+t, 2y-z, 3t) \tag{1}$$

   (a) Exprese la aplicación en forma matricial respecto a la base canónica.

   (b) Halla los autovectores de dicha matriz.

   (c) Expresa la aplicación mediante una matriz diagonal.

7. Determina los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A es diagonalizable en $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha+4 & 1-\alpha & -2\alpha-\alpha^2 \\ 0 & 4-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4-\alpha^2 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliza las siguientes matrices, especificando la matriz de paso.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$|A - \lambda I| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)((1-\lambda)^2 - 9) = (5-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2-9) = (5-\lambda)(\lambda^2-2\lambda-8)$$
$$= 5\lambda^2 - 10\lambda - 40 - \lambda^3 + 2\lambda^2 + 8\lambda = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 2\lambda - 40$$

Ec característica $(-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 2\lambda - 40 = 0)$

Autovalores: $(\lambda - 5)(\lambda + 2)(\lambda - 4)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & -1 & 7 & -2 & -40 \\ 5 & & -5 & 10 & 40 \\ \hline & -1 & 2 & 8 & 0 \\ -2 & & 2 & -8 & \\ \hline & -1 & 4 & 0 & \end{array}$$

Autovalores $\begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$
$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$

Buscamos los autovectores asociados a $\lambda_1 = 5$

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_2 + F_3}{\overset{F_2 = F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{F_2 = 3F_2 + F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$V_1 \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad V_1(0, 1, 1)$$

Buscamos los autovectores asociados a $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - F_2}{\overset{F_2 = \frac{F_2}{3}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$V_2 \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \quad v_2(0,1,-1)$$

Buscamos los autovectores asociados a $\lambda_2 = -2$

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 + F_2}{\overset{F_2 = \frac{F_2}{3}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$V_3 \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad v_3(0,1,1)$$

Tenemos una matriz diagonalizable D y una de paso P

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

No existe inversa

$$D = P^{-1}AP$$

$$P^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3 = F_2 - F_3}{\sim} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \overset{F_1 = F_2 - F_3}{\sim} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = 0 :$$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((2-\lambda)^2 - 16) - 3(3(2-\lambda)) = (2-\lambda)(4-2\lambda+\lambda^2-16) - (18-9\lambda)$$
$$= 8-4\lambda+2\lambda^2-32-4\lambda+2\lambda^2-\lambda^3+16\lambda-18-9\lambda = -\lambda^3+4\lambda^2-\lambda-42$$

Ec característica $(-\lambda^3+4\lambda^2+17\lambda-42=0)$

Autovalores : (λ

$$\begin{array}{r|rrr|r} & -1 & 4 & -1 & -42 \\ -2 & & 2 & -12 & -26 \\ \hline & -1 & 6 & -13 & \end{array}$$

Autovalores $\begin{cases} \lambda_1 = \\ \lambda_2 = \\ \lambda_3 = \end{cases}$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}\}$
$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$

Buscamos los autovectores asociados a $\lambda_1 =$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3 = 4F_3}{\overset{F_2 = 5F_2+3F_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 20 & 0 \\ 0 & 16 & -20 & 0 \end{array}\right) \overset{F_3 = F_2+F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 20 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$v_1 \begin{cases} x = \\ y = \\ z = 0 \end{cases}$, $v_1(\ , \ , \ )$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$|A - \lambda I| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = (1-2\lambda+\lambda^2)(1-\lambda) - (1-\lambda) = 1-2\lambda+\lambda^2-\lambda+2\lambda^2-\lambda^3-1+\lambda$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$$

Ec característica $(-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda = 0)$

Autovalores: $(\lambda-1)(\lambda-2)\lambda$

	-1	3	-2	0
1		-1	2	
	-1	2	0	0

Autovalores $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

Buscamos los autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$V_1 \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$, $V_1(1,0,1)$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$(A - I\lambda)\vec{v} = 0$

$SCI \to |A - \lambda I| = 0$

Buscamos los autovectores asociados a $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$V_2 \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$, $V_2(1,-1,-1)$

Buscamos los autovectores asociados a $\lambda_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$V_3 \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$, $V_3(1,1,1)$

Tenemos una matriz diagonalizable D y una de paso P

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Diagonalice cuando sea posible las siguientes matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$|A - \lambda I| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(5-\lambda) + 1 + 1 - (5-\lambda) - (3-\lambda) - (3-\lambda) = (9 - 2\lambda - \lambda^2)(5-\lambda) - 3\lambda - 9$$
$$= 45 - 10\lambda - 5\lambda^2 - 9\lambda - 2\lambda^2 - \lambda^3 - 3\lambda - 9 = -\lambda^3 - 7\lambda^2 - 22\lambda + 36$$

Ec característica $(-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 22\lambda + 36 = 0)$

Autovalores: $(\lambda - 5)(\lambda + 2)(\lambda - 4)$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & -1 & 7 & -22 & 36 \\ 3 & & -2 & & \\ \hline & -1 & & & 0 \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Autovalores $\begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$

b) $(A-\lambda I)\vec{v}=0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$|A-\lambda I|=0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)+2-(1-\lambda)-(1+\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$$

Ec característica $((1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)=0)$

Autovalores: $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$

Autovalores $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$

Buscamos los autovectores asociados a $\lambda_1=1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$V_1 \begin{cases} x=\lambda \\ y=2\lambda \\ z=-\lambda \end{cases}$, $V_1(1,2,-1)$

Buscamos los autovectores asociados a $\lambda_2=2$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$V_2 \begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$, $V_2(1,3,1)$

Buscamos los autovectores asociados a $\lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$V_3 \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}, \quad v_3(1,0,1)$$

Tenemos una matriz diagonalizable D y una de paso P

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $(A-\lambda I)\vec{v}=0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$|A-\lambda I| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$$

Ec característica $(\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0)$

Autovalores : $(\lambda - 1)(\lambda$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & & & & \\ \hline \end{array}$$

Autovalores $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \\ \lambda_3 = \end{cases}$

d) $(A-\lambda I)\vec{v}=0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -3 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$|A-\lambda I|=0$:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -3 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)^2+9(2-\lambda) = (-2+\lambda-2\lambda+\lambda^2)(-1-\lambda)+18-9\lambda$$

$$= 2-\lambda+2\lambda-\lambda^2+2\lambda-\lambda^2+2\lambda^2-\lambda^3+18-9\lambda = -\lambda^3-6\lambda+20$$

Ec característica $(-\lambda^3-6\lambda+20=0)$

Autovalores : $(\lambda-2)(\lambda$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & -1 & 0 & -6 & 20 \\ 2 & & -2 & -4 & -20 \\ \hline & -1 & -2 & -10 & 0 \end{array}$$

Autovalores $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = \\ \lambda_3 = \end{cases}$

3. Obtenga la base ortonormal de vectores propios para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 & 0 \\ 10 & 8 & -2 & -4 \\ 10 & 6 & 0 & -4 \\ 22 & 12 & -8 & -5 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 35 & 5 & -30 \\ 1 & -6 & 11 & 16 \\ -1 & 11 & -8 & -18 \\ 1 & -11 & 11 & 21 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudiar para qué valores de a y b A es diagonalizable.

¿Es diagonalizable?
mult alg = mult algebraicos
↓
nº veces autovalor = nº vector base autoespacio

$(A - \lambda I)\vec{v} = 0$:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$|A - \lambda I| = 0$:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(-\lambda-1)(1-\lambda)$$

Ec característica $((a-\lambda)(-\lambda-1)(1-\lambda)=0)$

Autovalores $\begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$

$\lambda = a$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & -1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1 = (-1-a)F_1 + b(F_2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \end{array}\right)$$

Si $a = -1$; $rg(A|B) = 1$
$\rightarrow \dim(E_{\lambda=-1}) = 2$
$\begin{cases} \lambda = 1 \text{ simple} \\ \lambda = -1 \text{ doble} \end{cases}$

Si $a = 1$; $rg(A|B) = 1$
$\rightarrow \dim(E_{\lambda=1}) = 2$
$\begin{cases} \lambda = 1 \text{ doble} \\ \lambda = -1 \text{ simple} \end{cases}$

$a = 1$:

$\lambda = 1$ (doble)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1 = F_1 - \frac{b}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\lambda = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Si $a = 1$ es diagonalizable $\forall\, b$

$a = -1$:

$\lambda = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$\lambda = -1$ (doble)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & b & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si $a = -1$ $b = 0$

5. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada A tiene dos valores propios distintos respecto a la base canónica: $\lambda_1 = 2$ doble y $\lambda_2 = 0$ simple. Los autoespacios propios asociados son $V_1 = \{(1,0,1),(0,1,2)\}$ y $V_2 = \{(1,1,1)\}$, respectivamente.

   (a) Razona por qué A es diagonalizable.

   (b) Escribe una matriz D diagonal semejante a A. ¿Cuál es la matriz de paso?

   (c) Halla A.

6. Considerando la aplicación $f : \mathbb{R}^4 \leftarrow \mathbb{R}^4$ definida por:

$$f(x, y, z, t) = (x + y + t, x - y + z + t, 2y - z, 3t) \tag{1}$$

(a) Exprese la aplicación en forma matricial respecto a la base canónica.

(b) Halla los autovectores de dicha matriz.

(c) Expresa la aplicación mediante una matriz diagonal.

7. Determina los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A es diagonalizable en $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2\alpha + 4 & 1 - \alpha & -2\alpha - \alpha^2 \\ 0 & 4 - \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \alpha^2 \end{pmatrix}$$