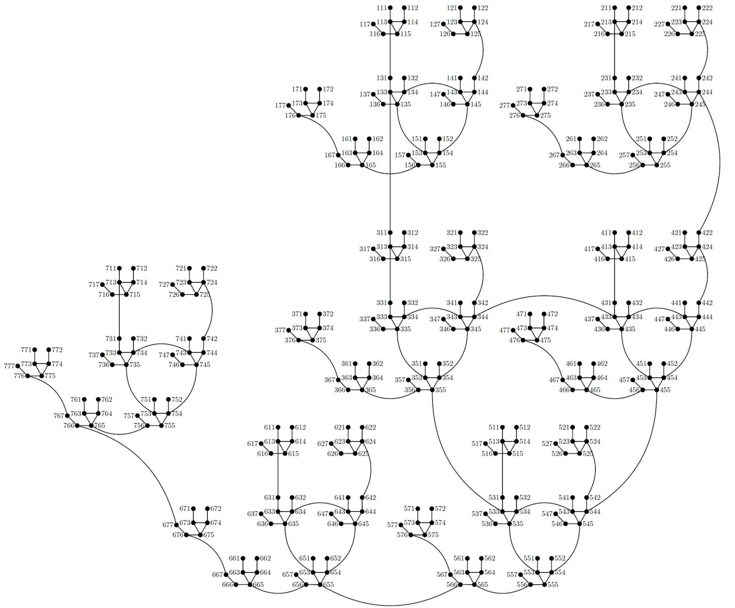
# MATEMÁTICA DISCRETA

## Grafos: Conceptos básicos (Parte 1)



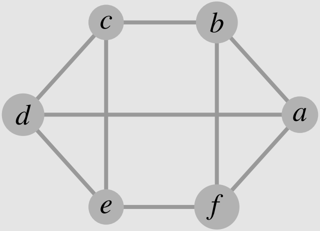
## Definición

Un **grafo** $G = (V, E)$ es una par ordenado donde:

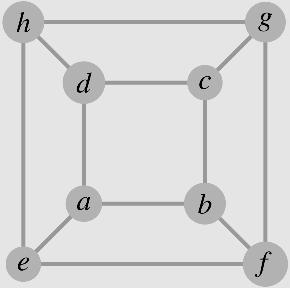
- los elementos de $V$ se denominan **vértices**, o **nodos**, de $G$,
- los elementos de $E$ son pares no ordenados de vértices llamados **aristas** de $G$.

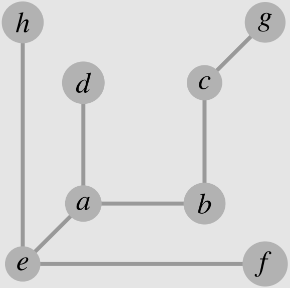
—

- El **orden** de $G$ es el número de vértices.
- La **medida** de $G$ es el número de aristas.
- Una arista $\{u, v\} \in E$ también se denota por $uv \in E$



## Ejemplos

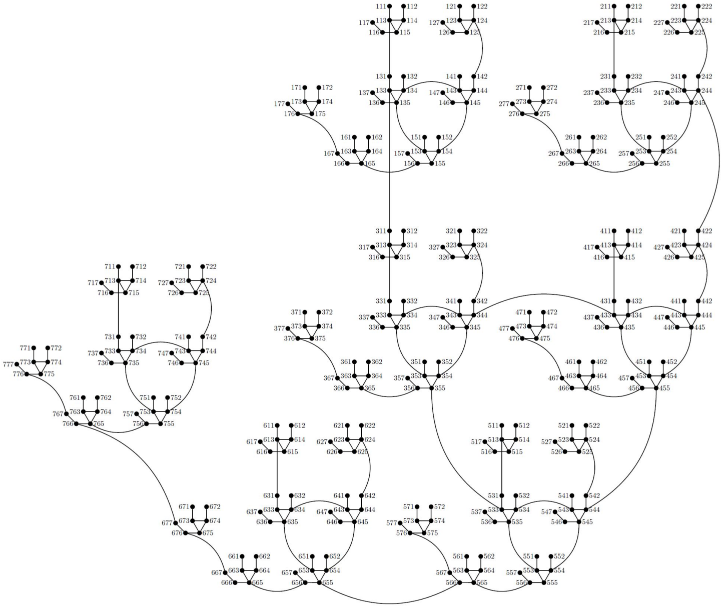



- El grafo de la izquierda tiene orden $n = 8$ y medida $m = 12$
- El grafo de la derecha tiene orden $n = 8$ y medida $m = 7$.

## Definición

- Dos vértices $u, v \in V$ de un grafo $G = (V, E)$ son **adyacentes** si y solo si $uv \in E$.
- La adyacencia de los vértices $u$, $v$ se denota por $u \sim v$.
- Si $u \sim v$ se dice que la arista $uv$ une o conecta los vértices $u$ y $v$, que estos son sus **extremos**.
- Si $u \sim v$ se dice que $u$ y $v$ son vértices **vecinos**.



111 112 113 114 115 116 117
121 122 123 124 125 126 127
131 132 133 134 135 136 137
141 142 143 144 145 146 147
151 152 153 154 155 156 157
161 162 163 164 165 166 167
171 172 173 174 175 176 177
211 212 213 214 215 216 217
221 222 223 224 225 226 227
231 232 233 234 235 236 237
241 242 243 244 245 246 247
251 252 253 254 255 256 257
261 262 263 264 265 266 267
271 272 273 274 275 276 277
311 312 313 314 315 316 317
321 322 323 324 325 326 327
331 332 333 334 335 336 337
341 342 343 344 345 346 347
351 352 353 354 355 356 357
361 362 363 364 365 366 367
371 372 373 374 375 376 377
411 412 413 414 415 416 417
421 422 423 424 425 426 427
431 432 433 434 435 436 437
441 442 443 444 445 446 447
451 452 453 454 455 456 457
461 462 463 464 465 466 467
471 472 473 474 475 476 477
511 512 513 514 515 516 517
521 522 523 524 525 526 527
531 532 533 534 535 536 537
541 542 543 544 545 546 547
551 552 553 554 555 556 557
561 562 563 564 565 566 567
571 572 573 574 575 576 577
611 612 613 614 615 616 617
621 622 623 624 625 626 627
631 632 633 634 635 636 637
641 642 643 644 645 646 647
651 652 653 654 655 656 657
661 662 663 664 665 666 667
671 672 673 674 675 676 677
711 712 713 714 715 716 717
721 722 723 724 725 726 727
731 732 733 734 735 736 737
741 742 743 744 745 746 747
751 752 753 754 755 756 757
761 762 763 764 765 766 767
771 772 773 774 775 776 777

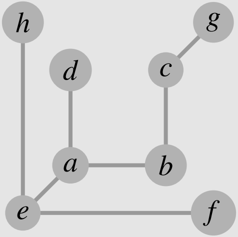
## Definición

Dado un vértice $v \in V$ del grafo $G = (V, E)$ se define el **grado** $\delta(v)$ del vértice $v$ como el número de vértices que son adyacentes a $v$. Esto es,

$$\delta(v) = |\{u \in V : \ v \sim u\}| = |\{u \in V : \ \{u, v\} \in E\}|$$

Los vértices de grado cero se denominan **vértices aislados**.

## Ejemplo




$\delta(e) = \delta(a) = 3,\ \delta(c) = 2,\ \delta(f) = 1.$

## Observación

Para todo vértice $v$ de un grafo de orden $n$ se cumple que

$$0 \leq \delta(v) \leq n-1.$$

## Ejemplo

¿Existe algún grafo con la secuencia de grados $2,2,2,3,3,4,8$?

## Solución

- Si existe dicho grafo, es de orden $n = |V| = 7$
- Si existe un vértice $v$ de grado 8, entonces $8 = \delta(v) \leq n-1 = 6$, lo que es imposible.

## Ejercicio

Probar que cualquier grafo con un mínimo de dos vértices siempre tiene un mínimo de dos vértices del mismo grado.

## Solución

Sea $G=(V,E)$ un grafo de orden $n$ ($n \geq 2$).

- Para todo vértice $v \in V$ se cumple $0 \leq \delta(v) \leq n-1$.
- Sólo pueden existir los grados $0, 1, \ldots, n-1$.
- No puede haber vértices de grado $0$ y $n-1$ a la vez.
- Los grados está en alguno de los siguientes conjuntos: $\{0, 1, ..., n-2\}$ o $\{1, ..., n-1\}$.
- Por el principio de las cajas, concluimos que hay al menos dos vértices del mismo grado.

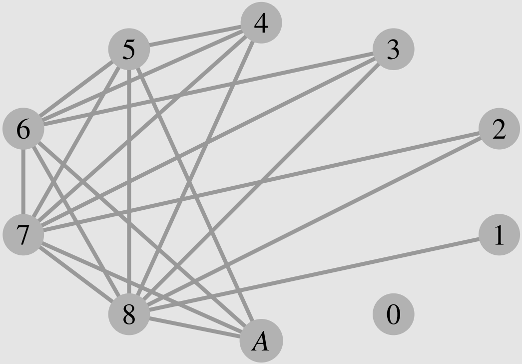
## Ejercicio

El Sr. Andrés y su mujer invitaron a cuatro parejas a una fiesta. Algunas de las personas de la sala saludaron (dando la mano) a otras personas del grupo. Naturalmente, ninguna persona dio y la mano a su cónyuge y ninguna persona dio la mano dos veces a otra persona. Al final, el Sr. Andrés se da cuenta de que ninguno de sus invitados (su mujer incluida) han saludado al mismo número de personas.

1. ¿Es posible que el Sr. Andrés también diera la mano a un número de personas diferente al de las demás?
2. ¿Es posible que el Sr. Andrés diera sólo un número impar de apretones de manos?
3. ¿Hay alguna persona que no dio la mano a nadie?
4. ¿Cuántas veces dio la mano el Sr. Andrés? ¿Y la Sra. Andrés?

## Solución

Nadie saluda a su pareja $\longrightarrow 0 \leq \delta(v) \leq n-2$, $\forall v$.



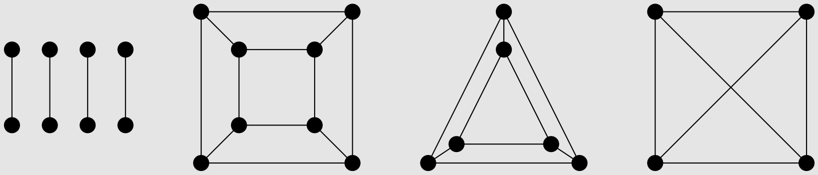

Las parejas son: $8-0$, $7-1$, $6-2$, $5-3$ y $4-A$.

## Definición

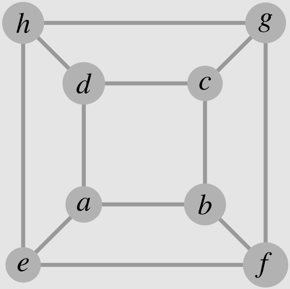
Un grafo es **regular** si todos los vértices tienen el mismo grado.
Si el grado común es $\delta$, entonces se dice que el grafo es $\delta$-**regular**.

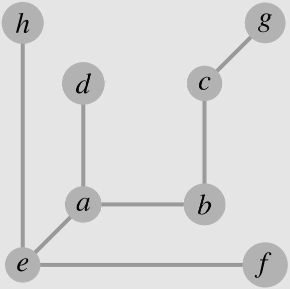
## Ejemplo

Los siguientes grafos son regulares.



## Ejemplo




El grafo de la izquierda es $3$-regular, el de la derecha no es regular.

## Teorema (Fórmula de los grados)

Para todo grafo $G = (V, E)$ de medida $m$ se cumple que

$$m = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \delta(v).$$

## Corolario

La medida de todo grafo $k$-regular de orden $n$ es $m = \frac{nk}{2}$.

## Corolario

En todo grafo, el número de vértices de grado impar es par.

### Ejercicio

¿Existe algún grafo 5-regular de orden impar?

### Solución:

No, ya que el número de vértices de grado impar ha de ser par.

### Ejemplo

¿Existe algún grafo con secuencia de grados $1, 3, 3, 2, 2, 2, 4$?

### Solución:

No, ya que el número de vértices de grado impar ha de ser par.

## Ejercicio

Sea $G$ un grafo de orden $n \geq 10$ tal que todos los vértices son de grado estrictamente mayor que 5. Probar que el número de aristas del grafo es mayor o igual que 30.

## Solución:

- Por hipótesis se tiene que $\delta(v) \geq 6$, $\forall v \in V$.
- Fórmula de los grados: $2m = \sum_{v \in V} \delta(v) \geq \sum_{v \in V} 6 = 6n \geq 6 \times 10 = 60$
- $m \geq 30$

## Ejercicio

Sea $G$ un grafo de orden $n = 20$ y medida $m = 62$. Sabiendo que todos los vértices tienen grado 3 o 7, determina el número de vértices de grado 3.

## Solución:

- Sean $x_3$ y $x_7$ los números de vértices de grado 3 y 7, respectivamente.
- $n = x_3 + x_7$, $2m = 3x_3 + 7x_7$.
- $x_3 = 4$ y $x_7 = 16$.