

# TEMA 1

## INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA

## INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA VECTORIAL

## TEORÍA DE CAMPOS

# INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA

***"La FÍSICA es la ciencia de la naturaleza que tiene por objeto descubrir, dar forma matemática y estructurar en teorías las leyes universales que relacionan entre sí las magnitudes medibles/ que intervienen en la descripción de los fenómenos del Universo".***

## **Características:**

- Ciencia experimental
- Finalidad: conocer el cómo y el por qué de las cosas.
- Herramientas:
  - Modelos físicos y Leyes naturales
  - Matemáticas

**Magnitudes Físicas:** *Propiedad física de un cuerpo susceptible de ser cuantificada objetivamente mediante un proceso de medición, esto es, mediante su comparación con otra magnitud de la misma naturaleza que se adopta convencionalmente como referencia y que se denomina **unidad**. Se clasifican en **fundamentales y derivadas**.*

**Dimensión:** *Indica la naturaleza física de una magnitud.*

**Teorema Fundamental del Análisis Dimensional:** *en cualquier expresión matemática que represente el comportamiento de un sistema físico las dimensiones de los dos miembros de la misma deben ser las mismas.*

## SISTEMA INTERNACIONAL

Magnitudes Fundamentales	Unidad	Dimensión
Longitud	Metro (m)	L
Masa	Kilogramo (kg)	M
Tiempo	Segundo (s)	T
Intensidad eléctrica	Amperio (A)	A
Temperatura	Kelvin (K)	K
Cantidad de sustancia	Mol (mol)	S
Intensidad luminosa	Candela (cd)	C

# INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA VECTORIAL

## TIPOS DE MAGNITUDES:

- **Escalares:** se expresan mediante un número real
- **Vectoriales:** se expresan mediante un número real y una dirección y sentido.

Temperatura

Fuerza

Masa

Energía

Aceleración

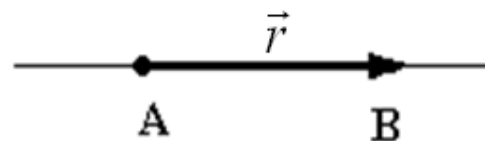
Velocidad

# VECTORES:

Segmento de recta dirigido y orientado en el espacio

## Elementos Característicos:

- Origen o punto de aplicación
- Módulo
- Dirección
- Sentido



## Tipos de vectores (según su punto de aplicación):

- Fijos
- Deslizantes
- **Libres** (Dos vectores libres  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son iguales,  $\vec{a} = \vec{b}$ , si  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$  y  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  apuntan en la misma dirección)

## Coordenadas Cartesianas de un Vector (base ortonormal)

Coordenadas Cartesianas

$$\vec{A}: (A_x, A_y, A_z) \Rightarrow \vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

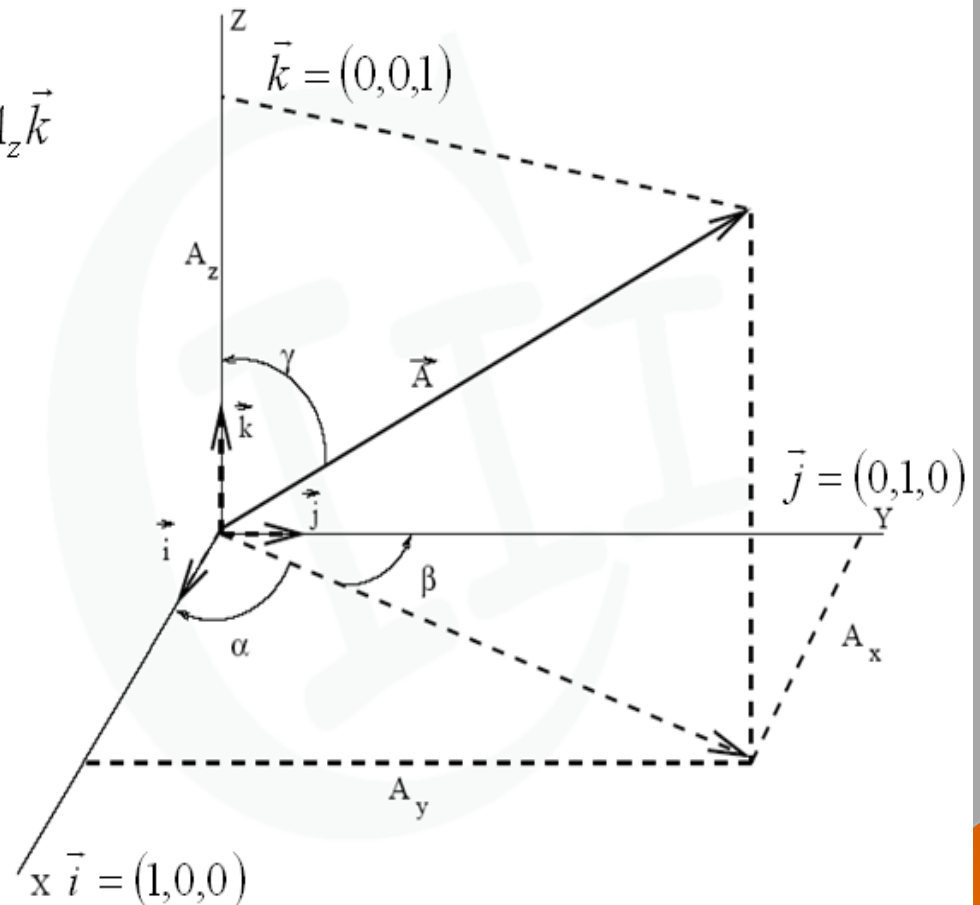
$$\text{Módulo: } |\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$$

Cosenos directores:

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|}$$

$$\cos \beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|}$$

$$\cos \gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

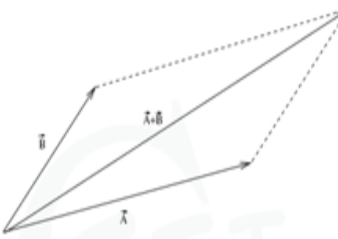


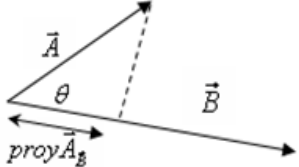


## Operaciones con vectores:

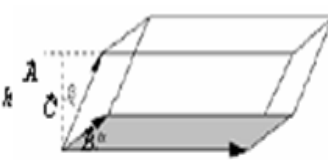


	Definición	Propiedades	Coordenadas Cartesianas	Interpretación Geométrica
<b>Producto de un vector por un escalar</b>	Sea $\lambda$ (escalar) y $\vec{A}$ (vector), el producto de $\vec{A}$ por $\lambda$ será otro vector que tiene la misma dirección que $\vec{A}$ , el mismo sentido si $\lambda > 0$ o sentido contrario si $\lambda < 0$ , de forma que su módulo, $ \lambda\vec{A}  = \lambda \vec{A} $ se alarga si $ \lambda  > 1$ y se acorta en caso contrario.	<b>Conmutativa:</b> $\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$ <b>Distributiva:</b> $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ <b>Elemento Neutro:</b> $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$ <b>Elemento Opuesto:</b> $-1\cdot\vec{a} = -\vec{a}$	Si $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k} \Rightarrow$ $\lambda\vec{A} = \lambda A_x\vec{i} + \lambda A_y\vec{j} + \lambda A_z\vec{k}$	



<b>Suma de dos vectores</b>	<p>Dados dos vectores <math>\vec{A}</math> y <math>\vec{B}</math>, se define el vector suma: <math>\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}</math></p>	<p><b>Conmutativa:</b> <math>\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}</math></p> <p><b>Asociativa:</b> <math>(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})</math></p> <p><b>Elemento Neutro:</b> <math>\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}</math></p> <p><b>Elemento Opuesto:</b>  <math>\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}</math></p>	<p><math>\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}</math></p> <p><math>\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}</math></p> <p><math>\vec{C} = (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j} + (A_z + B_z) \vec{k}</math></p>	
-----------------------------	---	---	---	--

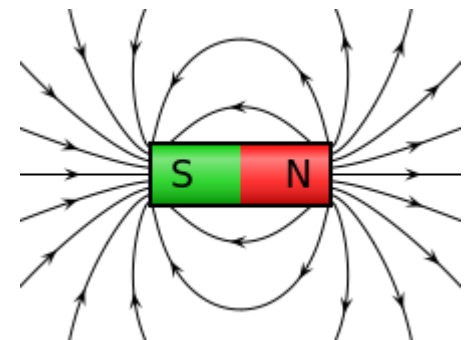
<b>Producto Escalar</b>	<p>Dados dos vectores <math>\vec{A}</math> y <math>\vec{B}</math>, se define su producto escalar: <math>\vec{A} \cdot \vec{B} =  \vec{A}   \vec{B}  \cos \theta</math></p>	<p><b>Conmutativa:</b> <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}</math></p> <p><b>Distributiva:</b> <math>\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}</math></p> <p><math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 0</math> si <math>\vec{a}</math> y <math>\vec{b}</math> son <math>\perp</math></p> <p>Sea <math>\lambda</math> un escalar, <math>(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})</math></p>	<p><math>\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}</math></p> <p><math>\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}</math></p> <p><math>\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z</math></p>	 <p><math>proy \vec{A}_B =  \vec{A}  \cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{ \vec{B} }</math></p> <p><math>\theta = \arccos \left( \frac{ \vec{A}   \vec{B} }{\vec{A} \cdot \vec{B}} \right)</math></p>
<b>Producto Vectorial</b>  	<p>El <b>producto vectorial</b> de los vectores <math>\vec{A}</math> y <math>\vec{B}</math> es un vector de módulo <math> \vec{A} \times \vec{B}  =  \vec{A}   \vec{B}  \sin \theta</math>, dirección normal al plano formado por los vectores y sentido determinado por la regla de la mano derecha.</p>	<p><b>Anticonmutativa:</b> <math>\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}</math></p> <p><b>Distributiva:</b>  <math>\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}</math></p> <p><b>Antiasociativa:</b>  <math>\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}</math></p> <p><math>\vec{a} \times \vec{b} = 0</math> si <math>\vec{a}</math> y <math>\vec{b}</math> son paralelos</p>	<p><math>\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}</math></p> <p><math>\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}</math></p> <p><math>\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} &amp; \vec{j} &amp; \vec{k} \\ A_x &amp; A_y &amp; A_z \\ B_x &amp; B_y &amp; B_z \end{vmatrix}</math></p>	 <p><math>S =  \vec{A}   \vec{B}  \sin \theta =  \vec{A} \times \vec{B} </math></p>

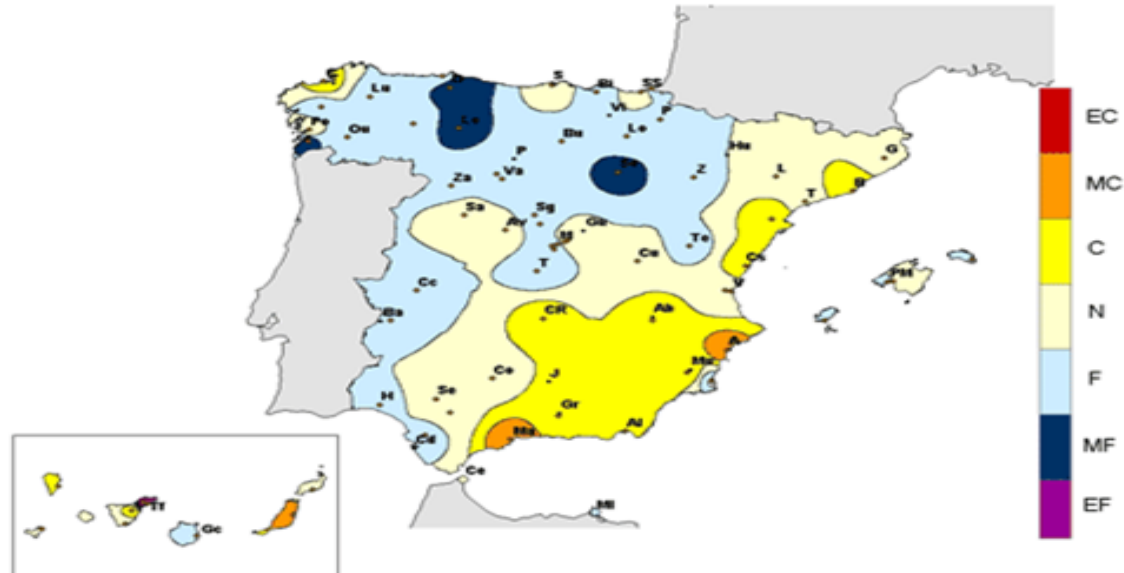
<b>Producto Mixto</b>	<p>Dados tres vectores <math>\vec{A}</math>, <math>\vec{B}</math> y <math>\vec{C}</math>, se define su producto mixto como <math>\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})</math></p>		$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$ $\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j} + C_z \vec{k}$ $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$	 $V_{ABC} = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$
<b>Derivada de un Vector respecto de un Escalar</b>	<p>Dado un vector <math>\vec{v}(t)</math>, se define su derivada como:</p> $\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$	<p>Sea <math>\vec{a}(t) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}</math>, su derivada será</p> $\frac{d}{dt} [\vec{a}(t)] = \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}$ <p>Sea <math>\vec{a}(t)</math> un vector y <math>\lambda(t)</math> un escalar, se verifica que :</p> $\frac{d}{dt} [\lambda(t) \vec{a}(t)] = \lambda(t) \frac{d\vec{a}(t)}{dt} + \vec{a}(t) \frac{d\lambda(t)}{dt}$ <p>Sean dos vectores <math>\vec{a}(t)</math> y <math>\vec{b}(t)</math>:</p> $\frac{d}{dt} [\vec{a}(t) \pm \vec{b}(t)] = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \pm \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$ $\frac{d}{dt} [\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)] = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$ $\frac{d}{dt} [\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)] = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$		

<p><b>Integral de un Vector respecto de un parámetro t</b></p>	<p>La integral de un vector <math>\vec{v}(t)</math>, es otro vector de componentes</p> $\vec{w}(t) = \int \vec{v}(t) dt$ $w_x(t) = \int v_x(t) dt ;$ $w_y(t) = \int v_y(t) dt ;$ $w_z(t) = \int v_z(t) dt$	<p>Sean dos vectores <math>\vec{a}(t)</math> y <math>\vec{b}(t)</math>, se verifica que</p> $\int [\vec{a}(t) \pm \vec{b}(t)] dt = \int \vec{a}(t) dt \pm \int \vec{b}(t) dt$ <p>Sea <math>\vec{a}(t)</math> un vector y <math>\lambda</math> una constante, se verifica que</p> $\int [\lambda \cdot \vec{a}(t)] dt = \lambda \int \vec{a}(t) dt$		
--	--	--	--	--

# TEORIA DE CAMPOS

- Se dice que existe un CAMPO asociado a una magnitud física, en una región del espacio, si se puede asignar un valor a dicha magnitud para todos los puntos de dicha región en cada instante. Representa la distribución espacial de una magnitud física que muestra cierta variación en una región del espacio.
- Históricamente fue introducido para explicar la acción a distancia de las fuerzas de gravedad, eléctrica y magnética, aunque con el tiempo su significado se ha extendido substancialmente, para describir variaciones de temperatura, tensiones mecánicas en un cuerpo, propagación de ondas, etc.



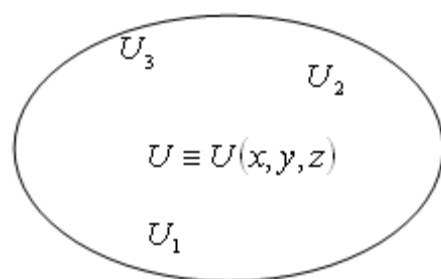


### Según la dependencia con respecto a otras variables:

- **Campo uniforme:** aquel en el que la magnitud física que representa no varía con las coordenadas espaciales siendo su valor igual en todos los puntos
- **Campo no uniforme:** aquel en el que la magnitud física que representa varía con la posición.
- **Campo estacionario:** aquel en el que la magnitud física que representa es independiente del tiempo.
- **Campo no estacionario:** aquel en el que la magnitud física que representa varía con el tiempo.

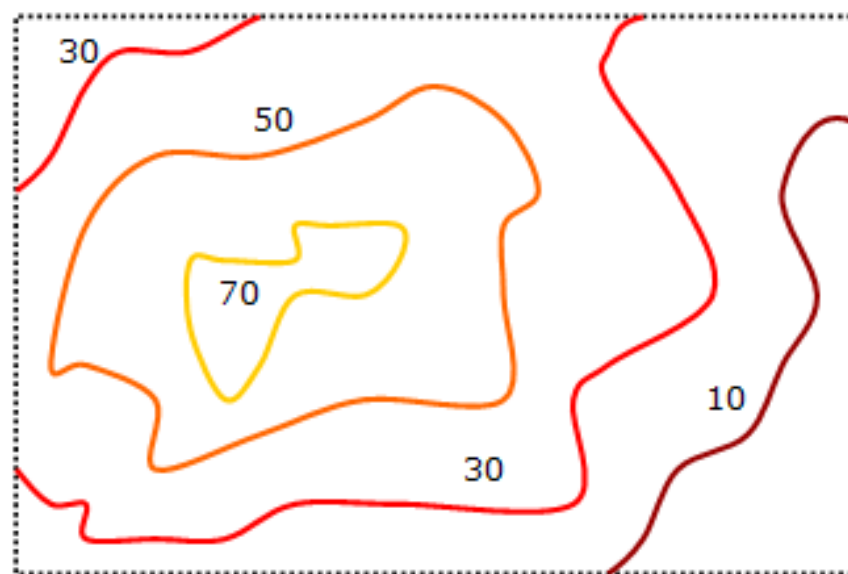
### **CAMPOS ESCALARES:**

Se dice que en una región del espacio existe definido un ***campo escalar***  $U \equiv U(x, y, z)$  si en cada punto de dicha región la magnitud física escalar  $U$  toma un determinado valor.



## Superficies Equiescalares y Líneas de Nivel

Dado un campo  $U \equiv U(x, y, z)$  definido en el espacio (plano), las **superficies (líneas) equiescalares** son el lugar geométrico de los puntos del espacio en los que la magnitud física escalar definida toma el mismo valor.



# Operador Nabla

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

$$\text{grad } U = \vec{\nabla} U = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right)$$

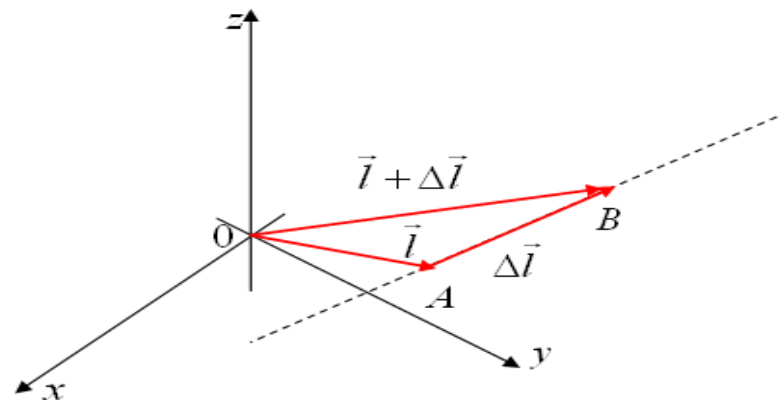
$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)$$

$$\overline{\text{rot } \vec{F}} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

## CAMPOS ESCALARES:

### Gradiente de un Campo Escalar

Este concepto matemático se introduce para estudiar cómo varía una magnitud escalar en una dirección determinada.





**Vector gradiente** de una función escalar es aquel cuyas componentes son las derivadas parciales de la función escalar que define el campo.

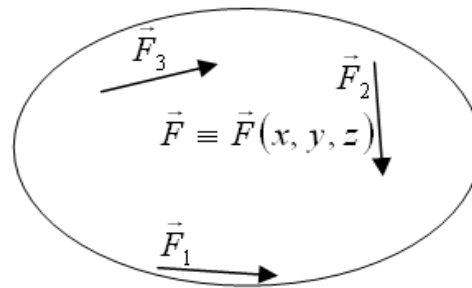
$$\vec{\nabla}U = \left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

## Propiedades

- Representa la dirección de máxima variación de la magnitud escalar que define el campo.
- Es siempre perpendicular a las superficies equiescalares de dicho campo.

## CAMPOS VECTORIALES:

Se dice que en una región del espacio existe definido un **campo vectorial**  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  si en cada punto de dicha región la magnitud física vectorial  $\vec{F}$  toma un determinado valor.

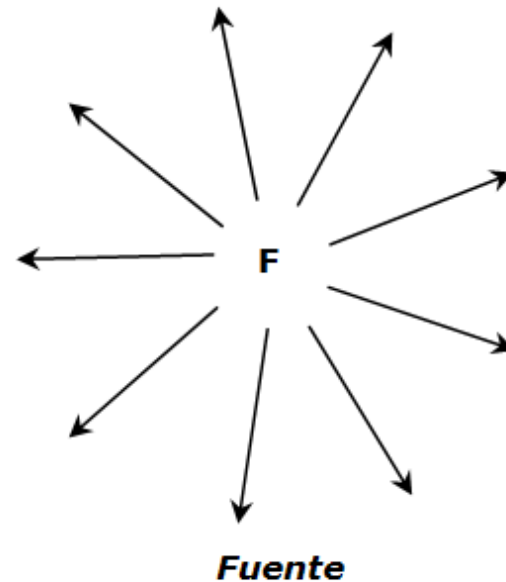
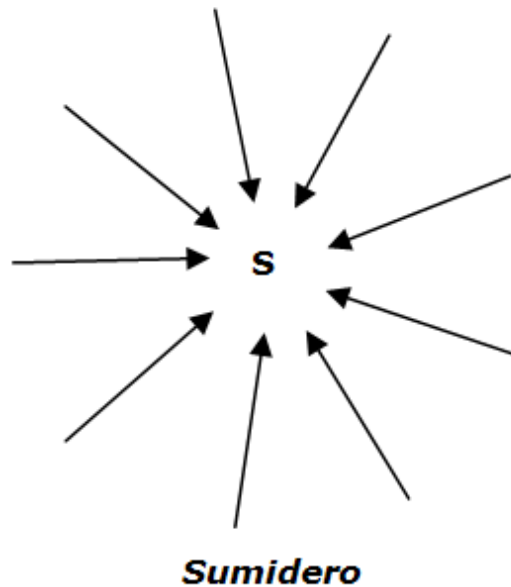


### Líneas de Campo

*Líneas imaginarias tales que en todos y cada uno de sus puntos la dirección del campo vectorial es tangente a la línea.*

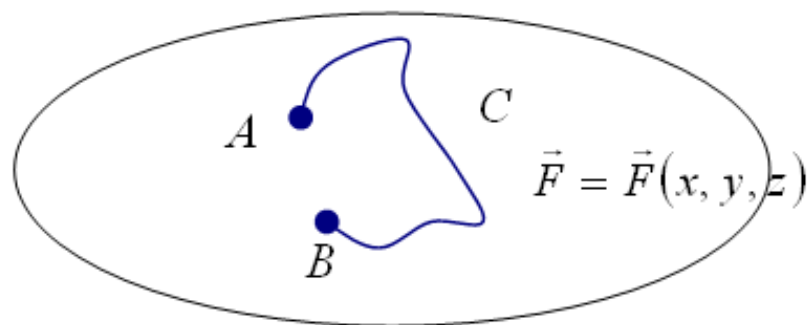
El módulo del campo en un determinado punto viene determinado por la densidad de líneas de campo en el mismo.

Según el sentido de las líneas de campo, se dice que un punto es un **sumidero** si en él las líneas de campo entran y **fuelle** si, por el contrario, emergen.

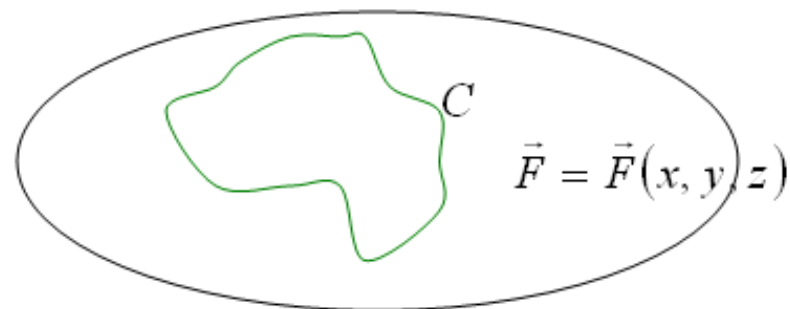


# CAMPOS VECTORIALES:

## Circulación de un Campo Vectorial



$$C = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



$$C = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$d\vec{l}$  : vector diferencial de longitud en cada punto de la curva.

## Campos Conservativos y Función Potencial Escalar

***Campo conservativo:***

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Se comprueba que la circulación no depende de la trayectoria sino únicamente de los puntos inicial y final.

Para los campos conservativos, se puede definir un campo escalar  $U \equiv U(x, y, z)$  que llamamos ***potencial escalar*** dado por la expresión:

$$U(p) = \int_0^p k \cdot \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$k$  : constante;  $p$  : punto donde se define el potencial.

*Se comprueba que las líneas de campo de un campo conservativo son perpendiculares a las superficies equiescalares de la función potencial escalar correspondiente.*

# CAMPOS VECTORIALES:

## Flujo de Campo Vectorial

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$d\vec{s}$  : vector diferencial de superficie.

Esta magnitud se comporta como un indicador del número neto de líneas de campo que atraviesan una determinada superficie y es positivo si las líneas salen de la superficie (fuente) y negativo si entran (sumidero).

***Campos Solenoidales:***  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$

Esto equivale a decir que el número de líneas que salen de la superficie es igual al número de las que entran.

## Divergencia de un Campo Vectorial

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int_S \vec{F} \cdot d\vec{s}}{\Delta V}}$$

Representa la densidad de fuentes o sumideros del campo vectorial.

Coordenadas cartesianas  $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{F} = \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial F_z}{\partial z} \right)$

Teorema de Gauss o Teorema de la Divergencia: la integral de volumen de la divergencia de un campo vectorial  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  en un volumen  $V$  es igual al flujo de dicho campo a través de la superficie  $S$  que encierra a  $V$

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dV = \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

## Rotacional de un Campo Vectorial

$$\overrightarrow{rot \ F} = \left( \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) \vec{n}$$

Coordenadas cartesianas  $\Rightarrow \overrightarrow{rot \ F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

**Campo irrotacional:**  $\boxed{rot \vec{F} = \vec{0}}$

Se puede demostrar que decir que un campo es irrotacional o conservativo es equivalente.

Teorema de Stokes: la integral de superficie del rotacional de un campo vectorial  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  en una superficie  $S$  es igual a la circulación de dicho campo a través de la línea  $C$  que encierra a  $S$

$$\int_S \overrightarrow{rot \ F} \cdot d\vec{s} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



Dados los vectores:  $A = 3i + 9j - 5k$ ,  $B = -2i + 8j - 1k$ ,  $C = 2i - 6j - 8k$ , determ

a)  $A + B - C$

b) El producto escalar  $A \cdot B$

c) El producto vectorial  $A \times B$

d) El producto mixto  $(A \times B) \cdot C$

e) El ángulo formado por los vectores  $A$  y  $B$ .

f) Proyección del vector  $A$  sobre el  $B$

g) Un vector de módulo 3 en la dirección del vector  $A$

h) Un versor perpendicular a  $A$  y a  $B$

2° ¿En qué dirección, a partir del punto  $(1, 3, 2)$  es máxima la derivada de la fun

$$\phi = 2 \cdot X \cdot Z - Y^2$$

Demostrar que el campo vectorial obtenido es conservativo

4. Calcular la circulación del vector  $\mathbf{A} = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j}$  a lo largo de la curva con ecuaciones paramétricas:  $x = 2t^2$ ;  $y = (1/3)t^3$  entre los puntos  $t_0=0$  y  $t_1=1$

Dada la función escalar  $\varphi = 2xz - y^2$

b) determinar, en dicho punto, un versor en la dirección de máximo crecimiento de la función

6. Dado el campo vectorial  $\mathbf{V} = m\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ , determinar el valor del parámetro  $m$  para que dicho campo sea solenoidal

8. Dado el campo vectorial  $\mathbf{A} = (x-1)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ , calcula el flujo a través de las caras del cubo, limitadas por

$x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1,$

a) directamente

b) aplicando el teorema de Gauss.