DISTRIBUCIONES DISCRETAS.

UNIFORME	La probabilidad de cualquier valor de X es la misma.
BERNOUILLI	Experimento aleatorio con dos posibles resultados (X=0 fracaso, X=1 éxito).
BINOMIAL	Número de éxitos total en las n pruebas. (n experimentos Bernouilli). CON REEMPLAZAMIENTO (intentos independientes).
HIPERGEOMÉTRICA	Nº de éxitos en una muestra aleatoria de tamaño *n* seleccionada de entre *N* resultados posibles, de los cuales *a* son éxitos y *b* fracasos (a+b=N). SIN REEMPLAZAMIENTO.
POISSON	Nº de ocurrencias del suceso A (éxito) durante un gran número de pruebas. (Una binomial con *n* grande y *p* pequeño).
GEOMÉTRICA	Número de la prueba en la que aparece el primer éxito.
BINOMIAL NEGATIVA	Número de la prueba en la que aparece el éxito número k.

ejercicios B3

B3 → Parámetros
→ Ω
→ f.d → f(x)) $\int f(x)dx$
→ F.D → F(x)

1. Se dispone de una urna que contiene 6 bolas Rojas y 4 bolas Blancas. Se extraen 5 bolas, y se define la variable aleatoria X= "Número de bolas Blancas extraídas". Se pide completar la tabla adjunta en cada uno de los dos supuestos:

   a) Las bolas se extraen de una en una devolviéndolas a la urna después de cada extracción, es decir, Con Reposición.

   b) Las bolas se extraen de una en una (o bien se extraen de una sola vez), es decir, Sin Reposición.

X	0	1	2	3	4	5
$P(X=x)$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$F(x)$	$F(0)$	$F(1)$	$F(2)$	$F(3)$	$F(4)$	$F(5)$

1

a) Con reposición (intentos independientes)

X= nº bolas BLANCAS extraídas

6R
4B

5 Bolas

$X_i \in B(p)$ → 0'4 (4/10)
- $X_i = 0$ (No es Blanca → fracaso)
- $X_i = 1$ (ser Blanca → éxito)

Bernouilli

$X = \sum_{i=1}^{5} X_i \in b(\underbrace{n=5, p=0'4}_{\text{parámetros}})$ → Binomial

> $S_X (0,1,2,3,4,5)$ → Ω

> $F(x) = \binom{5}{x} \, 0'4^x (1-0'4)^{5-x}$ → f.d.

	P(X=x)	F(X=x)
X=0	0'0778	0'0778
X=1	0'2592	0'337
X=2	0'3456	0'6826
X=3	0'2304	0'913
X=4	0'0768	0'9898
X=5	0'0102	1

b)

X= nº bolas Blancas extraídas

$X_i \in B(p)$ → varia con los intentos
- $X_i = 0$ → No Blanca
- $X_i = 1$ → Blanca

$i = 1, \dots, 5$

parámetros

* a+b=N *

$X = \sum_{i=1}^{5} X_i \in \begin{cases} h(\underset{\text{veces exp}}{n}=5, \underset{\text{bolas éxito}}{a}=4, \underset{\text{bolas fracaso}}{b}=6) \\ H(\underset{\text{posibles bolas}}{N}=10, \underset{\text{nº intentos}}{n}=5, \underset{\text{bolas éxito}}{a}=4) \end{cases}$

Hipergeométrica

$S_X = (0,1,2,3,4)$ → Ω

$f(x) = \dfrac{\binom{4}{x}\binom{6}{5-x}}{\binom{10}{5}}$ → f. d.

	P(X=x)	F(X=x)
X=0	0'0238	0'0238
X=1	0'2381	0'2619
X=2	0'4762	0'7381
X=3	0'2381	0'9762
X=4	0'0238	1

2

2. En un proceso de fabricación de conmutadores, la probabilidad de producir un conmutador defectuoso es 0,01. Se detiene la producción para una revisión del proceso cuando ensayando 10 conmutadores elegidos al azar, fallan uno o más.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el proceso se revise?.

   b) ¿Cuantos conmutadores deberán probarse si se desea que el proceso se revise con probabilidad 0,95?.

a) $X_i \in B(p=0'01)$

- $X_i = 0$ si no es defectuoso
- $X_i = 1$ si es defectuoso

X = nº de conmutadores defectuosos

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i \in b(n=10,\ p=0'01)$$

$S_x : (0, 1, 2 \ldots, 10)$

$$f(x) = \binom{10}{x} \cdot 0'01^x \,(1-0'01)^{10-x}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0'9044 = 0'0956$$

b)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0'9044 = 0'0956$$

$$1 - \binom{n}{0} \cdot 0'01^0 \cdot (0'99)^{n-0} = 0'95$$

$$\downarrow$$

$$n \log(0'99) = \log(0'05)$$

$$n = 298$$

3

3. Una compañía petrolera decide abrir pozos en diferentes zonas, y su éxito o fracaso es independiente de una zona a otra. Si suponemos que la probabilidad de éxito en cualquier zona es de 0,25, se pide:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que perforadas 10 zonas, en tres de ellas encuentre petróleo?.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que perforadas 10 zonas, se encuentre petróleo en las zonas 2, 5 y 7?.

   c) Si necesita únicamente 3 pozos, ¿cuál es la probabilidad de que realice 10 perforaciones?. Binomial Negativa

   d) La empresa puede ir a la quiebra si necesita perforar 10 veces para encontrar el primer pozo de petróleo, ¿cual es la probabilidad de que la empresa quiebre?.

a) $X_i \in B(p=0'25)$

- $X_i = 0 \rightarrow$ no petróleo (fracaso)
- $X_i = 1 \rightarrow$ sí petróleo (éxito)

X = nº zonas en las que hay petróleo

$$X = \sum_{i=1}^{10} X_i \in b(n=10,\ p=0'25) \qquad S_x = (0, 1, 2, 3 \ldots 10)$$

$$P(X=3) = \binom{10}{3} \cdot 0'25^3 \,(1-0'25)^{10-3} = 0'2502$$

b) E = hay petróleo
F = no hay petróleo

$$P(F_1 \cap E_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap E_5 \cap F_6 \cap E_7 \cap F_8 \cap F_9 \cap F_{10}) = 0'75^7 \cdot 0'25^3 = 2'085 \cdot 10^{-3}$$

3. Una compañía petrolera decide abrir pozos en diferentes zonas, y su éxito o fracaso es independiente de una zona a otra. Si suponemos que la probabilidad de éxito en cualquier zona es de 0,25, se pide:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que perforadas 10 zonas, en tres de ellas encuentre petróleo?.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que perforadas 10 zonas, se encuentre petróleo en las zonas 2, 5 y 7?.
   c) Si necesita únicamente 3 pozos, ¿cuál es la probabilidad de que realice 10 perforaciones?. BINOMIAL NEGATIVA
   d) La empresa puede ir a la quiebra si necesita perforar 10 veces para encontrar el primer pozo de petróleo, ¿cual es la probabilidad de que la empresa quiebre?.

Geométrica

c) A = nº perforaciones realizadas hasta el 3º éxito

$X \in bn(K=3; p=0'25)$

$P(X=10) \Rightarrow \binom{10-1}{3-1} \cdot 0'25^{3-1} \cdot 0'75^{10-3} \cdot 0'25 = 0'07506$

$S_X = (3,4,5,\dots)$

d) $B \in g(p=0'25) \rightarrow P(X=10) = (1-0'25)^9 \cdot 0'25 = 0'0187$

$S_X (1,2\dots)$

4. Los años de vida de una determinada pieza es una v.a. con función de densidad:

$$f(t) = k(10-t)t \quad 0 \le t \le 10$$

Siendo k una constante a determinar. Se pide:

   a) ¿Probabilidad de que una pieza que pase de los 5 años, dure hasta los 8 o más?.
   b) ¿Cuál será la probabilidad de que la vida de una pieza difiera de su vida media en menos de una vez y media su desviación típica?.
   c) A los 8 años de vida de la pieza, el servicio técnico recomienda cambiar la pieza. Si disponemos de 40 piezas como la descrita, ¿cual es la probabilidad de que tengamos que cambiar 10 piezas a los 8 años?.

4

a) $f(t) \geq 0 \ \forall \ t \in \mathbb{R} \Rightarrow K > 0$

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 \rightarrow \int_0^{10} K(10-t)t\,dt = 1 \Rightarrow K \int_0^{10} 10-t\,dt = K\left[10t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^{10} = K\left[1000 - \frac{1000}{3}\right] = 1$

$6 \cdot 10^{-3}$

$P(X \geq 8 \mid X \geq 5) = \frac{P[(X\geq 8) \cap (X \geq 5)]}{P(X \geq 5)} = \frac{P[X \geq 8]}{P(X \geq 5)} = \frac{\int_8^{10} 6 \cdot 10^{-3}(10t - t^2)\,dt = 0'104}{\int_5^{10} 6\cdot 10^{-3}(10t - t^2)\,dt = 0'5} = 0'208$

b) $P(|T-\mu_t| < 1'5_T) = P(\mu_t - 1'5_T < T < \mu_T + 1'5_T) = P(1'646 < T < 8'354)$

$\mu_T = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$

$\int_{1'646}^{8'354} f(t)\,dt = 0'8553$

11. Un radar utilizado en tráfico detecta la velocidad de los vehículos con un cierto error, de modo que la velocidad registrada por el aparato sigue una ley normal de media V y desviación típica V/100, siendo V la velocidad real del vehículo investigado. El Agente que controla el tráfico considera sancionable una velocidad detectada que rebase en un 10 % a la velocidad máxima autorizada. Para un tramo de carretera en que existe una limitación de velocidad de 80 Km/h, calcular la probabilidad de que sea sancionado un turismo

a) que circula a 75 Km/h.

b) que circula a 90 Km/h.

c) Determinar la velocidad a la que debe circular un turismo para que haya una probabilidad del 95 % de que su velocidad sea detectada como sancionable.

11

$X \in N(\mu = V, \sigma = V/100)$ V = velocidad real del vehículo investigado

S: ser sancionado por velocidad máx 88 km/h

a) $P(x \geq 88) = \left(z \geq \frac{88-75}{0'75}\right) = 0$

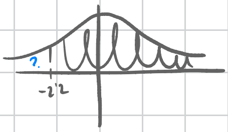
$N(75, 75/100)$

$\downarrow$ 17'3

b) $P(x \geq 88) = \left(z \geq \frac{88-90}{0'9}\right) = 1 - (z \geq 2'2) = \boxed{0'9868}$

$N(90, 90/100)$

$\downarrow$ $-2'2$ $\quad$ 0'0132



c) $P(x \geq 88) = P\left(z \geq \frac{88-V}{V/100}\right) = 0'95 = -1'65$

1-0'05 buscar tabla

$100(88-V) = -1'65V$

$8800 = 100V - 1'65V$

$\boxed{V = 89'48 \text{ km/h}}$

12. Una persona acude al médico preocupada por su peso, actualmente esta persona pesa 80 Kg. y mide 1.80 m. de estatura. El médico consulta unas tablas obtenidas sobre la población y observa que para la edad y sexo de la persona, el peso sigue una v.a. normalmente distribuida de media 76,5 Kg. y con varianza de 9 Kg^2, y la altura otra v.a. también normal de media 1,75 m. y con desviación típica de 0,25 m.
A la vista de los resultados se pide:

a) ¿A que porcentaje de la población supera en altura esta persona?.

b) Si suponemos que una persona es alta cuando su altura está por encima del tercer cuartil, ¿cuanto debería crecer esta persona para que se la pueda considerar alta?.

c) ¿Puede decir el médico que esa persona no se encuentra entre el 10 % de los más gruesos?.

d) Si se supone que una persona es delgada cuando se peso se sitúa por debajo de la mediana, ¿cuántos Kg. tiene que adelgazar esta persona para ser considerada delgada?.

e) Suponiendo que las dos variables en estudio son independientes, ¿cual es la probabilidad de elegir a una persona alta o delgada?.

12

$P \begin{cases} 80\text{kg} \\ 1'8 \text{ m} \end{cases}$

P: peso $\quad$ A: altura

$P \in N(\mu = 76'5, \sigma^2 = 9)$

$A \in N(\mu = 1'75, \sigma = 0'25)$

a) $P(A \leq 1'8) = 1 - P(A \geq 1'8) = 1 - P\left(z \geq \frac{1'80 - 1'75}{0'25}\right) = 1 - P(z \geq 0'2) = 1 - 0'4207 = \boxed{0'5793}$

$\downarrow$ 0'2

b) $P(A \leq a) = 75\% \quad P\left(z \leq \frac{a - 1'75}{0'25}\right) = 0'75$ $\Rightarrow$ POR TANTO, p, debe crecer 11'75 cm

$\downarrow$ 1 - 0'25

$\frac{a - 1'75}{0'25} = 0'67 \rightarrow a = 1'92 \text{m}$

12. Una persona acude al médico preocupada por su peso, actualmente esta persona pesa 80 Kg. y mide 1.80 m. de estatura. El médico consulta unas tablas obtenidas sobre la población y observa que para la edad y sexo de la persona, el peso sigue una v.a. normalmente distribuida de media 76,5 Kg. y con varianza de 9 Kg^2, y la altura otra v.a. también normal de media 1,75 m. y con desviación típica de 0,25 m.
A la vista de los resultados se pide:

a) ¿A que porcentaje de la población supera en altura esta persona?.

b) Si suponemos que una persona es alta cuando su altura está por encima del tercer cuartil, ¿cuanto debería crecer esta persona para que se la pueda considerar alta?.

c) ¿Puede decir el médico que esa persona no se encuentra entre el 10 % de los más gruesos?.

d) Si se supone que una persona es delgada cuando se peso se sitúa por debajo de la mediana, ¿cuántos Kg. tiene que adelgazar esta persona para ser considerada delgada?.

e) Suponiendo que las dos variables en estudio son independientes, ¿cual es la probabilidad de elegir a una persona alta o delgada?.

c) $P(X \geq 80) = P\left(Z \geq \underbrace{\frac{80-76'5}{\sqrt{9}}}_{1'1\widehat{6}}\right) = \boxed{0'1230 \text{, por tanto sí podría}}$

d) mediana: el valor central de los datos $P(X \geq x) = 0'5$

$P(X \leq p) = 0'5 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{p-76'5}{\sqrt{9}}\right) = 0$

$p = 76'5 \longrightarrow$ $\boxed{\text{Tendría que adelgazar } 3'5\text{kg}}$

e) $P(A \geq 1'92 \cup P \leq 76'5) = P(A \geq 1'92) + P(P \leq 76'5) - P(A \geq 1'92 \cap P \leq 76'5)$

$0'25 + 0'5 - [0'25 \cdot 0'5] = \boxed{0'625}$

14. Sea X una variable aleatoria que representa la duración en horas de una resistencia. Se supone que X sigue una distribución cuya Función de Distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad X < 0 \\ x^2/400 & si \quad 0 \leq X \leq 20 \\ 1 & si \quad X \geq 20 \end{cases} \qquad f(x) \begin{cases} 0 & \text{resto} \\ x/200 & 0 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

14

p = durar + de 18 h

a) Si se compran cuatro resistencias, y se supone que las duraciones de cada resistencia son independientes, calcular la probabilidad de que al menos una dure más de 18 horas. ¿Y la probabilidad de que las cuatro duren mas de 18 horas?.

b) Si se utilizan de manera consecutiva en un mismo aparato un total de 175 resistencias, calcular la probabilidad de que el número total de horas de funcionamiento sea superior a 2500 horas.

a) $P(D) = P(X > 18) = F(x) = P(X \leq x)$

$1 - \underbrace{F(18)}_{0'81} = 0'19 \rightarrow$ probabilidad de éxito

$X \in b(n=4 \,;\, p=0'19)$

$F(x) = \binom{4}{x} 0'19^x (1-0'19)^{4-x}$

$P(X \geq 1) = 1 - \underbrace{F(0)}_{0'43} = \boxed{0'57}$

$P(X=4) = \boxed{1'3 \cdot 10^{-3}}$

b) $X_i \in D(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X_i \in D(\mu = 13'\widehat{3} \,;\, \sigma^2 = 22'31)$

$\mu = n\mu$

$\sigma^2 = n\sigma^2$

$\mu = \alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{x}{200} dx = \frac{1}{200}\left[\frac{x^3}{3}\right] = \left[\frac{x^3}{600}\right]_0^{20} = 13'\widehat{3}$

$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \Rightarrow \alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{200}\left[\frac{x^4}{4}\right] = \left[\frac{x^4}{800}\right]_0^{20} = 200 \Rightarrow \sigma^2 = 200 - (13'33)^2 = 22'31$

$X_i \in D\,(\mu = 13'3\ ;\ \sigma^2 = 22'31)\ N\,(\mu = n\mu\ ;\ \sigma^2 = n\sigma^2) \rightarrow X \in N(\mu = 2332'75\ ;\ \sigma^2 = 3904'25)$

$$P(X > 2500) = P\left(Z > \frac{2500 - 2332'75}{\sqrt{3904'25}}\right) = P(Z > 2'69) = \boxed{0'0036}$$

15

15. El precio de un artículo es una variable aleatoria, cuya distribución es $X \in N(\mu, \sigma^2)$. Se sabe que el 20 % de ellos cuestan más de 6,01€ y que el 30 % sobrepasan los 4,81€. Si el Costo de fabricación (C) de dicho artículo está relacionado con el precio de venta del mismo de acuerdo con la ecuación:

$$C = 2{,}10 + X - 0{,}00015X^2$$

Calcular el Costo medio de un articulo.

$P \in N(\mu, \sigma^2)$

$\left.\begin{array}{l} P(X > 6'01) = 0'2 \\ P(X > 4'81) = 0'3 \end{array}\right]$ sistema ecuaciones

$P \in N(\mu = 2'86\ ,\ \sigma^2 = 14'063)$

$\left.\begin{array}{l} \mu + 0'84\,\sigma = 6'01 \\ \mu + 0'52\,\sigma = 4'81 \end{array}\right|$ $\quad 0'32\,\sigma = 1'2$

$\sigma = 3'75 \rightarrow \sigma^2 = 14'063$

$\mu = 2'86$

$$E[C] = \int_{-\infty}^{\infty} c \times f(c)\, dc$$

$$E[2'10 + X - 0'00015X^2] = 2'10 + \underbrace{E[X]}_{\mu\ \rightarrow\ 2'86} - 0'00015\,\underbrace{E[X^2]}_{\sigma_X^2 + \mu_X^2 = 3'75^2 + 2'86^2\ \rightarrow\ 22'317}$$

$V[X] = E[X^2] - \mu^2$

$V[X] + \mu^2$