Estructuras de Datos

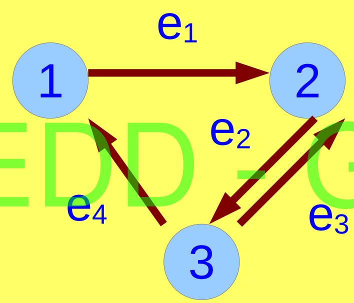
Grafos: búsqueda de caminos.
Conectividad

Contenidos

- **¿Están dos vértices conectados?: Algoritmo de Warshall.**
- Todos los caminos mínimos desde un vértice origen al resto: Algoritmo de Dijkstra.
- El camino mínimo entre dos vértices: Algoritmo A*.
- Todos los caminos mínimos entre todos los pares de vértices: Algoritmo de Floyd.

¿Están dos vértices conectados?

- Potencias de la matriz de adyacencia.



$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = AxA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2xA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^1 + A^2 + A^3 = B^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$¿B^3>0? \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{A^1}$ es la matriz de adyacencia.
- $\mathbf{a^r_{ij}}$= ¿están los vértices i,j conectados por un camino de longitud ≤ r?
- $\mathbf{B^n=A+A^2+A^3+...A^n}$ = número de caminos de longitud ≤N que conectan dos vértices.
- **P**, con $\mathbf{p_{ij}=1}$ si $\mathbf{b^n_{ij} >0}$, *matriz de conectividad* o *matriz de caminos*.
- Complejidad para obtener la matriz de conectividad **P** en un grafo de N vértices:

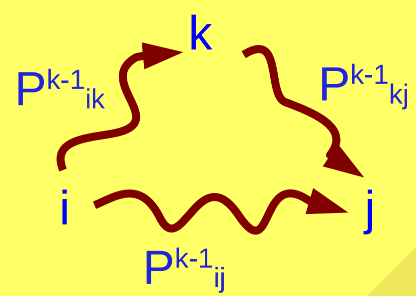
$$A^rxA = O(N^3) \text{ x } N \rightarrow \mathbf{O(N^4)}$$

¿Están dos vértices conectados?

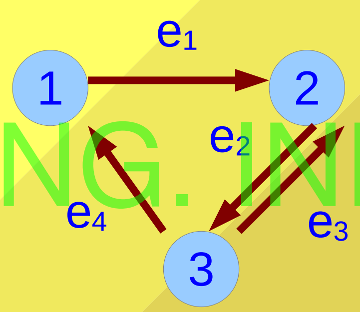
- Algoritmo de Warshall.

Claves:

- Generar $A=P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \ldots P^n=P$
- $P^k_{ij}=1$ si ya existe camino entre **i,j** con vértices intermedios en el conjunto **$\{v_1,\ldots,v_{k-1}\}$** o el vértice **v_k** conecta a **i** con **j**.



$P^k_{ij} = P^{k-1}_{ij}$ **O** $[\, P^{k-1}_{ik}$ **Y** $P^{k-1}_{kj} \,]$



$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{A=P^0}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{P^1}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{P^2}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} \end{bmatrix}} \quad \underset{P^3}{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} \end{bmatrix}}$$

Búsqueda de caminos

- Algoritmo de Warshall.

```
Algorithm Warshall(In: A:Matrix[Integer]) //O(¿?)
Prec: A.rows()==A.cols()
Aux
  i,j,k: Integer
  P:Matrix[Integer](A.rows(), A.cols())
Begin
  P ← A
  For k ← 1 to A.rows() Do //Add k to the set
                           //of intermediate nodes.

    //Update P using the new intermediate node.
    For i ← 1 to P.rows() Do
      For j ← 1 to P.cols() Do
        If P[i,j]=0 Then
          P[i,j]←P[i,k]*P[k,j] //Can i,j connect
                               //using k as intermediate?
        End-If
      End-For
    End-For

  End-For
End.
```

Búsqueda de caminos

- Algoritmo de Warshall. Ejemplo.

Vértices intermedios

0: Iniciar con los caminos directos

2: usando vértices {1, 2}
1 conecta con 4

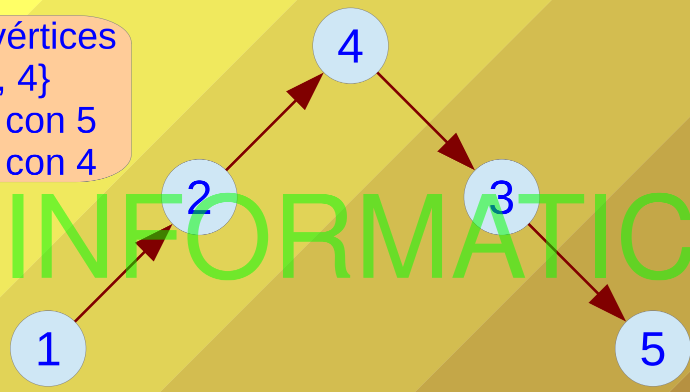
4: usando vértices {1, 2, 3, 4}
1 conecta con 5
2 conecta con 4

{}	{1}	{1,2}	{1,2,3}	{1,2,3,4}	{1,2,3,4,5}
1,2 2,4 4,3 3,5		1,2,4	4,3,5	1,4,3 1,4,5 2,4,3 2,4,5	

1: usando vértices {1}
no se añade más

3: usando vértices {1, 2, 3}
4 conecta con 5

5: usando vértices {1, 2, 3, 4, 5}
no se añade nada



$$P^0: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P^2: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P^3: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^4: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Búsqueda de caminos

- Resumiendo:
  - Para saber si dos vértices están conectados por algún camino o ciclo elemental:
    - Potencias de la matriz de adyanciencia. O(N^4)
    - Algoritmo de Warshall O(N^3)

Referencias

- Lecturas recomendadas:
  - Caps. 14, 15 y 16 de “Estructuras de Datos”, A. Carmona y otros. U. de Córdoba. 1999.
  - Wikipedia:
    - Alg. Warshall: en.wikipedia.org/wiki/Floyd%E2%80%93Warshall_algorithm
    - Alg. Dijkstra: en.wikipedia.org/wiki/Dijkstra%27s_algorithm
    - Alg. A*: en.wikipedia.org/wiki/A*_search_algorithm
    - Alg. Floyd:en.wikipedia.org/wiki/Floyd%E2%80%93Warshall_algorithm

Estructuras de Datos

Grafos: búsqueda de caminos. Conectividad