Capítulo 2

Funciones reales de una variable real

La mayoría de las ideas del Cálculo tienen interpretaciones geométricas útiles y se pueden visualizar en términos de funciones. En este tema empezamos estudiando los conceptos básicos sobre funciones de variable real; presentamos las funciones elementales y las operaciones fundamentales con ellas. Como ejemplo de un tipo de gráficas especialmente frecuentes se estudian las cónicas y sus propiedades más importantes. Todos estos conceptos constituyen el punto de partida para las secciones y temas siguientes. Una técnica esencial en Cálculo es hacer "cambios infinitesimales" en una cantidad; damos un significado preciso a esta noción introduciendo y explorando el límite de una función y el concepto de continuidad, que está intimamente relacionado con él; primero estudiamos la continuidad de una función en un punto, y luego en un intervalo, destacando dos resultados importantes: el Teorema de Bolzano y el Teorema de los Valores Intermedios.

2.1. Funciones

Tal vez, el concepto matemático más importante (después del de número) sea el concepto de función. Es la columna vertebral del Cálculo.

Los científicos, economistas y otros investigadores estudian relaciones entre cantidades. Por ejemplo, un ingeniero puede necesitar saber la relación entre la iluminación que produce una fuente de luz sobre un objeto y la distancia entre el objeto y la fuente. El estudio matemático de esta relación requiere el concepto de función.

Una función no es más que una "regla" que asigna a cada número, otro número. Expresa la idea de una cantidad que depende de otra o que es determinada por otra. Por ejemplo, el área de un cuadrado depende de la longitud de su lado.

Definición 2.1.1. Una *función* f, es una "regla" que asigna a cada elemento x de un conjunto X un único elemento y de un conjunto Y. El elemento y se llama *imagen de x por f* y se denota por $f(x)$ (se lee f de x).

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$x \longrightarrow y = f(x)$$

Llamaremos a x *variable independiente*, porque puede tomar cualquier valor de X, mientras que y es la *variable dependiente*, ya que depende del valor elegido para x.

Definición 2.1.2. Consideremos la función $f : X \longrightarrow Y$.

El conjunto X se llama *dominio* de f. Se denota por $\mathrm{Dom}(f)$.

El conjunto formado por las imágenes de todos los elementos de X se llama *imagen*, *rango* o *recorrido*. Se denota por $f(X)$ ó $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) : x \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

Claramente $f(X) \subset Y$ aunque pueden no ser iguales.

En este tema vamos a trabajar con funciones con valores reales de una variable real, lo que restringe el dominio y el rango a los números reales.

Notación funcional

Las funciones se pueden representar de muchas maneras, pero la más usual, es la de una fórmula matemática consistente en escribir la ecuación que relacionan las variables x e y.

Ejemplo

El área de un cuadrado de lado x es x^2.

Esto se expresa por la fórmula $f(x) = x^2$.

A veces hay que definir las funciones a trozos porque su dominio se compone de varios trozos. Estas funciones requieren más de una fórmula para su definición, y se llaman *funciones definidas a trozos*.

Observación

El dominio de una función puede darse de dos formas distintas:

- De forma explícita. Por ejemplo $f(x) = \frac{1}{x}$, $\mathrm{Dom}(f)$ =[1,2].
- De forma implícita. Por ejemplo $f(x) = \frac{1}{x}$.

  En este caso, se sobreentiende que el dominio de f es el mayor conjunto de puntos donde puede estar definida la función. Dicho de otra forma, cuando se de en forma implícita, el dominio consta de todos los números a los que es posible aplicar f. En el caso anterior sería $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ejemplos

Estudiemos el dominio de las funciones $f(x) = \sqrt{1-2x}$ y $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}$.

Para el estudio del dominio de la función f, hay que tener en cuenta que la raiz cuadrada sólo está definida para los números positivos, por lo que ha de ocurrir $1-2x \geq 0$, de donde $x \leq \frac{1}{2}$. Así:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{1}{2}\} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$$

La expresión de la función g tiene sentido para los valores reales x que cumplan; $x^2 + 1 \geq 0$ y $x^2 - 4 \neq 0$. Evidentemente, para todo x se cumple $x^2 + 1 \geq 0$, luego sólo tendremos que excluir los valores x para los que $x^2 - 4 = 0$, es decir, 2 y -2. Así:

$$\mathrm{Dom}(g) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty).$$

Observación

En general, el cálculo de la imagen de una función es más difícil que la determinación de su dominio. De todos modos, para nuestro propósito será más importante el estudio del dominio que el del recorrido, por lo que dejaremos a ésta un poco de lado.

Los conceptos que vamos a dar a continuación se pueden usar para reducir a la mitad el trabajo necesario en muchos problemas.

Definición 2.1.3. Diremos que una función f es:

- par, si $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$
- impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$

La función, $f(x) = x^2$, es un ejemplo de función par, y la función, $g(x) = x^3$, es un ejemplo de función impar.

Definición 2.1.4. Dos funciones f y g son iguales, si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- tienen el mismo dominio.
- $f(x) = g(x)$ para todo x del dominio.

Ejemplos

Estudiar el dominio de las siguientes funciones y decidir cuáles son iguales:

$$f(x) = 2x - 1; \quad g(x) = 2x - 1,\ x \neq -3; \quad h(x) = \frac{(2x-1)(x+3)}{x+3}; \quad F(x) = \sqrt{x+2}.$$

El dominio de f son todos los números reales.
El dominio de g son todos los números reales salvo el -3.
El dominio de h son todos los números reales salvo el -3 porque la expresión tiene sentido sólo para $x \neq -3$.
F tiene sentido sólo si $x + 2$ es positivo, por tanto el dominio es $[-2, \infty)$.

Las funciones f y h no son iguales porque no tienen el mismo dominio. En cambio, las funciones g y h sí son iguales ya que tienen el mismo dominio y, para $x \neq -3$, se puede simplificar la fracción por $x + 3$.

Definición 2.1.5.

- Una función, f, es *inyectiva* si cada elemento de la imagen proviene de un único elemento del dominio. Dicho de otra forma: si $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Una función, f, es *sobreyectiva* si $f(X) = Y$. Es decir, si cualquier elemento $y \in Y$ proviene de algún elemento $x \in X$: $f(x) = y$.
- Una función es *biyectiva*, si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Los gráficos tienen un cierto impacto visual. También suministran información que puede no ser evidente en los tratamientos algebraicos o calculísticos.

Para representar geométricamente una función $y = f(x)$ como una gráfica, es tradicional usar un sistema de coordenadas cartesianas, con las unidades para la variable independiente x marcadas en el eje horizontal y las de la variable dependiente y en el eje vertical.

Definición 2.1.6. El *grafo* de una función f es el conjunto

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{Dom}(f)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

La representación gráfica es el dibujo de $\mathrm{Gr}(f)$ sobre unos ejes de coordenadas. Muchas veces se llama función a la gráfica, esto no es del todo correcto; en realidad, el dibujo, es sólo el grafo de la función. La función como tal, es un concepto abstracto y no se puede dibujar.

Se pueden dibujar con bastante precisión gráficas de funciones. Este no es nuestro objetivo.

Operaciones de funciones

Dadas dos funciones f y g, podemos hacer varias operaciones básicas con ellas:

- **Suma:** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

  El dominio de la función suma es la intersección de los dominios de f y g, ya que tienen que tener sentido $f(x)$ y $g(x)$.

- **Diferencia:** $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$.

  El dominio de la función diferencia vuelve a ser la intersección de los dominios.

- **Producto:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

  De nuevo, el dominio de la función producto es la intersección de los dominios.

  Como caso particular destacamos aquel en el que una de las funciones es constante: si $f(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$, entonces $(c \cdot g)(x) = c \cdot g(x)$. De esta forma, la función diferencia se puede ver como consecuencia de ésta operación y la operación suma.

- **Cociente:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

  En este caso, el dominio está formado por los puntos de la intersección de los dominios, que no anulen al denominador:

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) : g(x) \neq 0\}.$$

Hay muchas situaciones en que una magnitud viene dada en función de una variable que, a su vez, es función de otra variable. El proceso de evaluar una función de una función da una idea de lo que es la composición de funciones:

Definición 2.1.7. Si f y g son dos funciones podemos definir la función *composición* $f \circ g$, que se lee "g compuesta con f"por la igualdad:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Obviamente, el dominio de $f \circ g$ estará formado por aquellos números x del dominio de g (para poder aplicar $g(x)$), tales que $g(x)$ está en el dominio de f (para poder aplicar $f(g(x))$).

$$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathrm{Dom}(g) : g(x) \in \mathrm{Dom}(f)\}.$$

Hay que señalar que no es lo mismo $f \circ g$ que $g \circ f$, no se cumple la propiedad conmutativa para la composición de funciones.

Ejemplo

Sean $f(x) = 3x + 5$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

Es claro que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = [0, \infty)$, luego $\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [0, \infty)$. Entonces:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 3x + 5 + \sqrt{x}$, y $\text{Dom}(f + g) = [0, \infty)$.
- $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = 3x + 5 - \sqrt{x}$, y $\text{Dom}(f - g) = [0, \infty)$.
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x + 5) \cdot \sqrt{x}$, y $\text{Dom}(f - g) = [0, \infty)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{\sqrt{x}}$, y $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (0, \infty)$, ya que hay que quitar los puntos que anulan al denominador. Como $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tendremos que quitar este punto de la intersección.

Vamos a hallar las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$.

Se define la función $f \circ g$ como $f(g(x))$, luego

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = 3\sqrt{x} + 5.$$

Se define la función $g \circ f$ como $g(f(x))$, luego

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 5) = \sqrt{3x + 5}.$$

Con este ejemplo vemos que la composición de funciones no es conmutativa.

Definición 2.1.8. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función inyectiva. La *función inversa de* f, que denotamos f^{-1}, está definida sobre la imagen de f, $f^{-1} : f(X) \longrightarrow X$, de la siguiente forma:

Dado $y \in f(X)$ existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Entonces $f^{-1}(y) = x$. Dicho de otra forma, f^{-1} asigna al elemento $f(x)$ el elemento x. Se tiene entonces que $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

Se deduce de la definición que si existe la función inversa, ésta es única.

Transformación de funciones

A veces se puede dibujar la gráfica de una cierta función trasladando la de otra o tomando una simétrica a otra. A las traslaciones y simetrias las llamamos *transformaciones de una función*. Los tipos básicos de transformaciones son los siguientes:

Tomamos $c > 0$ y sea f una función.

- Traslación vertical de c unidades hacia arriba: $y = f(x) + c$.
- Traslación vertical de c unidades hacia abajo: $y = f(x) - c$.
- Traslación horizontal de c unidades hacia la izquierda: $y = f(x + c)$.
- Traslación horizontal de c unidades hacia la derecha: $y = f(x - c)$.
- Reflexión o simetría respecto del eje x: $y = -f(x)$.
- Reflexión o simetría respecto del eje y: $y = f(-x)$.

2.2. Clasificación de funciones

Podemos clasificar a las funciones en grandes grupos con propiedades bien definidas. Un gran número de fenómenos de la vida real pueden representarse mediante modelos matemáticos construidos a partir de una colección de funciones denominadas *funciones elementales*. Las funciones elementales se distribuyen en tres categorías:

1. Funciones algebraicas (polinómicas, radicales, racionales).
2. Funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, etc.).
3. Funciones exponenciales y logarítmicas.

Funciones polinómicas

El tipo más común de función algebraica es una función polinómica. Es aquella de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo y los números a_i, que se llaman coeficientes, son números reales. Si $a_n \neq 0$ el entero n se llama grado del polinomio

El dominio de las funciones polinómicas es $\mathbb{R}$.

Las funciones *constantes* $f(x) = c$ son los polinomios de grado cero y son las más sencillas posibles, ya que para todo valor x devuelven el mismo valor c. Su representación gráfica es una recta horizontal de altura c. Evidentemente estas funciones no son inyectivas.

Las funciones *lineales* tienen la forma $f(x) = ax$ donde a es un número real. Si a una función lineal le añadimos una constante, obtenemos una función *afín*, que tendrá la forma: $f(x) = ax + b$ con b un número real. Son los polinomios de grado uno. Su representación gráfica es una linea recta de pendiente a que pasa por los puntos $(0, b)$ y $(1, a + b)$. La pendiente de la recta es a, por tanto, el ángulo α que forma la recta con el eje horizontal, es aquel cuya tangente es a.

Los polinomios de grado dos son las funciones cuadráticas. La forma general de estas funciones es $f(x) = ax^2 + bx + c$ siendo a, b y c números reales. También se pueden expresar de forma general del siguiente modo: $f(x) = a(x+\alpha)^2+\beta$, con a, α y β números reales. Siempre se puede pasar de una forma a otra:

$$ax^2 + bx + c = a(x + \alpha)^2 + \beta \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = a(x^2 + \alpha^2 + 2x\alpha) + \beta$$

$$\Longrightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + 2a\alpha x + a\alpha^2 + \beta.$$

De aquí deducimos:

$$2a\alpha = b \quad \text{y} \quad a\alpha^2 + \beta = c.$$

Las funciones cúbicas son los polinomios de grado tres, las funciones cuárticas son los polinomios de grado cuatro, etc.

Unos cuantos ejemplos de funciones racionales son los siguientes:

$$f(x) = 5; \quad f(x) = 2x - \sqrt{2}x; \quad f(x) = 3x^2 + 5x - \frac{1}{2}; \quad f(x) = \sqrt{2}x^3 - \pi x.$$

La función identidad, $f(x) = x$, la función cuadrática estándar ,$f(x) = x^2$, y la función cúbica estándar, $f(x) = x^3$, son también ejemplos de funciones polinómicas.

Funciones racionales

Una función racional es el cociente de dos funciones polinómicas $p(x)$, $q(x)$:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad q(x) \neq 0.$$

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathrm{Dom}(p) \cap \mathrm{Dom}(q) : q(x) \neq 0\}.$$

Unos ejemplos de funciones racionales son los siguientes:

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2+2x-5}; \quad f(x) = x^{-3} + \sqrt{2}x.$$

Funciones potenciales

Si r es un número real distinto de cero, la función $f(x) = x^r$ se llama función potencial de exponente r:

1. Si r es un entero positivo, f es una función potencial entera, y en este caso $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
2. Si r es un entero negativo, f es una función potencial recíproca, y en este caso $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.
3. Si r es un número racional, f es una función radical. En este caso el dominio depende del signo de r y de la paridad del radical.

Ejemplos característicos de funciones potenciales son: la función hiperbólica $f(x) = \frac{1}{x}$ o la función raiz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$.

Una función se llama *algebraica* si se puede construir a partir de funciones polinómicas con las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división o radicación. Cualquier función racional es algebraica.

Las funciones que no son algebraicas se llaman *trascendentes*. Así, las funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas son funciones trascendentes.

Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas más importantes son el seno, el coseno y la tangente.

El dominio de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ es todo $\mathbb{R}$, sin embargo su imagen es sólo el intervalo $[-1, 1]$. Además, son periódicas de periodo 2π; esto es, $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Por otra parte, la función $\tan x$ tiene como dominio el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, y como imagen, todo $\mathbb{R}$. La función $\tan x$ es periódica de periodo π; esto es, $\tan(x + \pi) = \tan x$.

Son también importantes las inversas de las anteriores: la función $arcsenx$, la función $\arccos x$ y la función $\arctan x$. Observemos que como las funciones seno, coseno y tangente no son inyectivas, para definir sus inversas tenemos que quedarnos con sólo una parte del dominio donde sí lo sean.

La función $\operatorname{sen} x$ es inyectiva en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, y su imagen es $[-1,1]$. De esta forma, la función $\arcsin x$ está definida en $[-1,1]$ y su imagen es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

La función $\cos x$ es inyectiva en $[0,\pi]$, y su imagen es $[-1,1]$. De esta forma, la función $\arccos x$ está definida en $[-1,1]$ y su imagen es $[0,\pi]$.

La función $\tan x$ es inyectiva en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y su imagen es $\mathbb{R}$. Por tanto, la función $\arctan x$ está definida en $\mathbb{R}$ y su imagen es $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARíTMICAS

Las funciones lineales, cuadráticas, polinómicas y racionales se llaman funciones algebráicas. Las que no son algebráicas se llaman funciones trascendentes. Ejemplos de funciones trascendentes son las trigonométricas que acabamos de estudiar. En este apartado introducimos otras dos, las funciones exponenciales y las logarítmicas.

Una función exponencial, es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$ (función exponencial de base a).

Debemos destacar entre todas las funciones exponenciales, la función exponencial de base el número e.

El dominio de estas funciones es $\mathbb{R}$ y su imagen es $(0,\infty)$. Son además inyectivas, luego tienen inversa.

A la inversa de la función exponencial de base a se le llama función logaritmo en base a, $f(x) = \log_a x$. Se tiene la relación $\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$.

El dominio de la función logaritmo es $(0,\infty)$ y su imagen es $\mathbb{R}$.

Debemos destacar entre las funciones logaritmo, la función logaritmo neperiano, que es el logaritmo en base e, $\ln x$.

Propiedades de las funciones exponenciales

Sean x, y números reales y a, b números reales positivos. Se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $a \neq 1$, entonces $a^x = a^y$ si y sólo si $x = y$.
2. Si $x > y$ y $a > 1$, entonces $a^x > a^y$.
3. Si $x > y$ y $0 < a < 1$, entonces $a^x < a^y$.
4. $a^x a^y = a^{x+y}$.
5. $\frac{a^x}{a^y} = \frac{a^x}{a^y}$.
6. $(a^x)^y = a^{xy}$.

7. $(ab)^x = a^x b^x$.

8. Si $a > 1$, $\text{lím}_{x\to infty} a^x = 0$ y $\text{lím}_{x\to\infty} a^x = \infty$.

Ejemplo: Ecuaciones exponenciales

Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $2^{x^2+3} = 16$.

2. $2^x 3^{x+1} = 108$.

1. Para resolver la primera ecuación, realizamos las siguientes operaciones:

$$2^{x^2+3} = 16 \Leftrightarrow 2^{x^2+3} = 2^4 \Leftrightarrow x^3 + 3 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

2. Para resolver la segunda ecuación, realizamos las siguientes operaciones:

$$2^x 3^{x+1} = 108 \Leftrightarrow 2^x 3^x 3 = 3 \cdot 36 \Leftrightarrow (2 \cdot 3)^x = 36 \Leftrightarrow 6^x = 6^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Propiedades de las funciones logarítmicas

Sea $a > 1$ y $b \neq 1$, entonces se verifica:

1. $x = y \Rightarrow \log_a x = \log_a y$.

2. $x > y$ y $a > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a y$.

3. $x > y$ y $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a y$.

4. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

6. $\log_a x^p = p \log_a x$, para todo número p.

7. Si $a > 1$ se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x\to c} \log_a x = \log(\lim_{x\to c} x).$$

Ejemplo: Cálculo de una expresión logarítmica

Calcular $\log_2(\frac{1}{8}) + \log_2 128$.
Podemos usar las propiedades anteriores de la siguiente forma:

$$\log_2(\frac{1}{8}) + \log_2 128 = \log_2(2)^{-3} + \log_2 2^7 = \log_2[2^{-3}(2^7)] = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4.$$

Ejercicio: Resuelva la ecuación $\log_3(2x+1) - 2\log_3(x-3) = 2$.

Si una ecuación loigarítmica tiene base distinta de e Ó 10, podemos resolverla usando las reglas anteriores. El siguiente resultado suministra una regla útil para pasar de una base a otra.

Cambio de base

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

(Recuérdese que la definición de logaritmo exige que $a > 0$, $a \neq 1$).

Ejemplo (Cómo resolver una ecuación exponencial por cambio de base):

Resuelva la ecuación $6^{3x+2} = 200$.

Podemos realizar las siguientes operaciones:

$$6^{3x+2} = 200 \Leftrightarrow 3x + 2 = \log_6 200 \Leftrightarrow 3x = \log_6 200 - 2 \Leftrightarrow x = \frac{\log_6 200 - 2}{3}.$$

Como la base e es la que se usa más a menudo, es útil enunciar algunas de las propiedades de los logaritmos neperianos:

Teorema 2.2.1 (Propiedades básicas de los logaritmos neperianos).

1. $\ln 1 = 0$.

2. $\ln e = 1$.

3. $e^{\ln x} = x$, *para todo* $x > 0$.

4. $\ln e^y = y$, *para todo* y.

5. $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ *para todo* $a > 0$, $a \neq 1$.

6. $a^x = e^{x \ln a}$ *para todo* $a > 0$, $a \neq 1$.

2.2.1. Cónicas

Consideremos ahora unas curvas de gran interés, pero que no son en su mayoría gráficas de funciones, porque asignan más de un valor a un mismo número: Se trata de las *cónicas*, que son las secciones que forman un doble cono al cortarlo con un plano. Estas curvas son la *circunferencia*, la *elipse*, la *parábola* y la *hipérbola*.

La *circunferencia* se obtiene cuando el plano es perpendicular al eje del cono, y se define como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otro interior llamado *centro*. La distancia al centro es el radio. su ecuación es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

donde (x_0, y_0) es el centro y r el radio.

La *elipse* aparece cuando el ángulo entre el plano y el eje del cono es menor que $\frac{\pi}{2}$ y mayor que la abertura del cono desde su eje. Se define como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a un par de puntos dados, los *focos*, es constante. Su *forma canónica*, que es la ecuación que la define cuando está centrada en el origen y con los focos sobre uno de los ejes es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde a y b son los *semiejes* $(a, b > 0)$, y corresponden a la mitad del ancho y del alto de la elipse; los focos están situados en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$ si $a > b$ (donde $a^2 + b^2 = c^2$) y en los puntos $(0, c)$ y $(0, -c)$ si $a < b$ (donde $b^2 = a^2 + c^2$). La suma de distancias a los focos es igual al doble del semieje mayor. Si trasladamos el centro de la elipse al punto (x_0, y_0), la ecuación correspondiente es:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

La *parábola* es la intersección del doble cono con un plano que forma con el eje un ángulo igual a la abertura del cono, y se define como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto y una recta dados, llamados el *foco* y la recta *directriz* respectivamente. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz es el *eje de la parábola* y el punto donde corta a la parábola es el *vértice*.

Cualquier polinomio de grado dos, $f(x) = ax^2+bx+c$, tiene como gráfica una parábola con vértice en la abcisa $x = -\frac{b}{2a}$. Las ramas de la parábola van "hacia arriba"si $a > 0$ y van "hacia abajo"si $a < 0$. También son parábolas las raices cuadradas de polinomios de grado uno, como $y = \sqrt{ax+b}$. En este caso la gráfica corresponde sólo a media parábola; la otra media corresponde a la función $y = -\sqrt{ax+b}$. La parábola completa puede escribirse como $y^2 = ax + b$; es evidente que esto no es una función puesto que a cada punto de su dominio (excepto al punto $x = -\frac{b}{a}$) le asigna dos valores.

La *hipérbola* se obtiene cuando el plano de corte forma un ángulo con el eje del cono más pequeño que la abertura del cono y es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a sus dos focos es constante. Su forma canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$ son las pendientes de las rectas a las que se acerca la hipérbola, que reciben el nombre de *asíntotas*. Los focos están situados en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, con $c^2 = a^2 + b^2$. Otra forma canónica de la hipérbola es

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde lo que cambia respecto de la hipérbola anterior es que ahora los focos están en $(0, c)$ y $(0, -c)$. Si las hipérbolas están centradas en el punto (x_0, y_0) en lugar de en el origen, las ecuaciones respectivas son:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \qquad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

También son hipérbolas las gráficas de las funciones

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

con $ad \neq bc$ y $c \neq 0$, como por ejemplo $y = \frac{1}{x}$. Sus asíntotas son $y = \frac{a}{c}$ (asíntota horizontal) y $x = -\frac{d}{c}$ (asíntota vertical).

Las cónicas pueden verse como funciones si las consideramos a trozos para que estén bien definidas, tal y como hemos visto con el caso de las parábolas .

2.3. Límites de funciones

En esta sección se introduce la noción de *límite*. El desarrollo de este concepto es uno de los mayores descubrimientos en la historia de las matemáticas. Es el concepto más importante, y quizás también el más difícil, del Cálculo infinitesimal y es lo que hace que lo diferencie de otras ramas, como el Álgebra.

Para poder dar una definición rigurosa de límite, y poder introducir después variantes, vemos primero intuitivamente el concepto de límite de una función.

2.3.1. Noción intuitiva de límite

El límite de una función f es una herramienta para estudiar el comportamiento de la función cuando la variable independiente se va aproximando a un cierto valor x_0.

Definición 2.3.1 (Definición informal de límite de una función). Consideremos una función f. Intuitivamente diremos que la función f tiende hacia el límite l cerca de x_0 (donde l y x_0 son números reales) si $f(x)$ está tan cerca como se quiera de l haciendo que x esté suficientemente cerca de x_0.

Dicho de otra forma, si cuando x se va acercando al punto x_0, entonces $f(x)$ se va acercando a l.

Lo representaremos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Si $f(x)$ se aproxima arbitrariamente a l cuando x tiende a x_0 por ambos lados, entonces decimos que l es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0. Este límite va a existir, si y sólo si al acercarnos a x_0 por la derecha y por la izquierda, el comportamiento de la función es el mismo. Esto sugiere que se puedan definir los límites laterales. Por tanto, el límite de una función existirá cuando existan los límites por la derecha (cuando x se acerca a x_0 por la derecha) y por la izquierda (cuando x se acerca a x_0 por la izquierda) y son iguales.

Desde luego esta definición es insuficiente para un desarrollo teórico porque no hemos dado un significado preciso a las expresiones:

“ se puede aproximar tanto a l como se quiera”
o
“suficientemente cerca de x_0”.

<u>Observación</u>

1. No es necesario que el punto x_0 pertenezca al dominio de la función.
2. En general, el límite puede no existir. En caso de que existe, este límite es necesariamente único.

Teniendo en cuenta la definición que acabamos de dar, podemos calcular límites de funciones graficamente (conociendo la gráfica de la función, vemos cómo se comporta cuando nos acercamos a un punto) o numéricamente construyendo una tabla de valores cercanos al punto donde queremos estudiar el límite. Hay que hacer notar que, al usar una tabla de valores de una función para calcular un límite, podemos engañarnos. Lo único que podemos afirmar es que, si el límite existe, entonces se puede calcular mediante una tabla. Para estudiar el límite de una función definida a trozos en el punto que separa las ramas, es necesario recurrir a los límites laterales.

Es importante tener en cuenta que, en cualquier caso, la cercanía de x a x_0, depende de la cercanía que queremos para $f(x)$ a l. Esto nos da la idea de la definición formal de límite. Podemos dar una definición formal de límite por etapas. Debemos tener claro:

1. Hacer $f(x)$ próximo a l, significa hacer $|f(x) - l|$ pequeño (y lo mismo para x y x_0).

2. Hacer $|f(x) - l|$ “tan pequeño como queramos”significa hacer $|f(x) - l| < \varepsilon$ para cualquier cantidad $\varepsilon > 0$ que consideremos.

3. Que x esté “suficientemente cerca de x_0”significa dar condición a x (hacer x próximo a x_0) para que $|f(x) - l|$ sea tan pequeño como queramos. En otras palabras:

   Fijada una cantidad $\varepsilon > 0$, podamos encontrar $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ y $x \neq x_0$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$. Observemos además que decir, $|x - x_0| < \delta$ y $x \neq x_0$, equivale a decir $0 < |x - x_0| < \delta$.

Con estas observaciones ya estamos en condiciones de dar la definición formal de límite:

Definición 2.3.2 (Definición formal de límite). El límite de una función f cuando x tiende a x_0 es l, y escribiremos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, podamos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Observemos que en la definición de límite que hemos dado “ x”puede acercarse al punto x_0 de cualquier forma. Sin embargo, podemos restringir este movimiento haciendo que se acerque sólo por la derecha ($x > x_0$) o sólo por la izquierda ($x < x_0$). Este hecho da lugar a definir los límites laterales como sigue:

Definición 2.3.3 (Límites laterales). Decimos que una función f tiene límite por la derecha (respectivamente por la izquierda) un número real l cuando x tiende a x_0 por la derecha (respectivamente por la izquierda) si para todo $\varepsilon > 0$, podamos encontrar $\delta > 0$ tal que si $0 < x - x_0 < \delta$ (respectivamente $0 < x_0 - x < \delta$) entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Los límites laterales a derecha e izquierda se representan respectivamente por:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Además de para calcular límites de funciones definidas a trozos, o las funciones escalón, los límites laterales son necesarios para comprender la noción de continuidad en un intervalo cerrado, como veremos en la próxima sección.

Cuando el límite por la derecha no es igual al límite por la izquierda, el límite (bilátero) no existe, como lo explica el siguiente resultado:

Teorema 2.3.1 (Existencia de un límite). *Si f es una función y x_0 y l son números reales, el límite de f cuando x se acerca a x_0 es l si y sólo si*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \quad y \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l.$$

Límites que no existen

Puede ocurrir que una función f no tenga un límite (finito) cuando $x \to x_0$. En este caso decimos que f *diverge* cuando x tiende a x_0.

Veamos algunos casos en los que el límite no existe.

Caso 1. Una función que crece o decrece de manera no acotada cuando x tiende a x_0 se dice que *diverge a infinito en* x_0. En este caso escribiremos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{si } f \text{ crece de manera no acotada}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad \text{si } f \text{ decrece de manera no acotada}$$

Ejemplo

Calculemos $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$.

Los valores correspondientes a la función crecen arbitrariamente a medida que x se aproxima a cero. Esto quiere decir que, eligiendo un valor de x lo bastante cercano a 0, se puede lograr que $f(x)$ sea tan grande como se quiera. Por ejemplo, $f(x)$ será mayor que 100 si elegimos valores de x que esten entre $\frac{1}{10}$ y 0. Es decir:

$$0 < |x| < \frac{1}{10} \to f(x) = \frac{1}{x^2} > 100.$$

Por tanto, podemos escribir

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Caso 2. La función se aproxima a números diferentes por la derecha y por la izquierda de x_0.

Ejemplo

Calculemos $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

Evidentemente esta función no está definida en 0. Para valores positivos de x

$$\frac{|x|}{x} = 1, \quad x > 0$$

y para los negativos

$$\frac{|x|}{x} = -1, \quad x < 0.$$

Esto significa que, independientemente de cuánto se aproxime x a 0, existiran tanto valores positivos de x como valores negativos de x que darán $f(x) = 1$ y $f(x) = -1$. De manera específica, si δ es un número positivo, entonces los valores de x que satisfacen la desigualdad $0 < |x| < \delta$ se pueden clasificar en los intervalos $(-\delta, 0)$ y $(0, \delta)$. Los valores de x en el primer intervalo dan $\frac{|x|}{x} = -1$ y los valores de x en el segundo intervalo dan $\frac{|x|}{x} = 1$. Esto implica que el límite no existe.

Caso 3. La función oscila entre dos valores fijos a medida que x se aproxima a x_0.

Ejemplo

Calculemos $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Podemos comprobar fácilmente que la función sen $\frac{1}{x}$ tienen infinitas oscilaciones entre 1 y -1 cuando x tiende a 0. Por ejemplo, $f(x) = 1$ para $x = \frac{2}{\pi}, \frac{2}{5\pi}, \frac{2}{\pi}, \ldots$, y $f(x) = -1$ para $x = \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \ldots$. Como los valores de $f(x)$ no se aproximan a ningún valor l cuando x tiende a 0, el límite no existe.

2.3.2. Cálculo analítico de los límites

Es importante ser capaz de calcular límites fácil y eficazmente, pero los métodos gráficos o de tablas pueden no ser lo uno ni lo otro. Vamos a enunciar algunas reglas sobre límites y veremos cómo usarlas, junto con el álgebra, para calcular límites.

Propiedades de los límites

Damos a continuación una lista de propiedades que se pueden usar para calcular una gran cantidad de límites.

Estas propiedades se usan repetidamente y, además, son útiles para deducir otras.

Sea x_0 un número real tal que las funciones f y g tienen límites l y m respectivamente en x_0. Se tienen las siguientes propiedades:

1. Regla de la constante: $\lim_{x\to x_0} k = k$ para toda constante k.

2. Regla de la identidad: $\lim_{x\to x_0} x = x_0$.

3. Regla del múltiplo: $\lim_{x\to x_0} sf(x) = s\lim_{x\to x_0} f(x) = sl$ para toda constante s. Es decir, el límite del producto de una constante por una función es igual a la constante por el límite de la función.

4. Regla de la suma: $\lim_{x\to x_0}[(f+g)(x)] = \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = l+m$. Es decir, el límite de la suma es la suma de los límites.

5. Regla de la diferencia: $\lim_{x\to x_0}[(f-g)(x)] = \lim_{x\to x_0}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = l-m$. Es decir, el límite de la diferencia es la diferencia de los límites. (Esta regla se obtiene como consecuencia de las dos anteriores).

6. Regla del producto: $\lim_{x\to x_0}[(f\cdot g)(x)] = \lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = l\cdot m$. Es decir, el límite del producto es el producto de los límites.

7. Regla del cociente: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f}{g}(x)\right] = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{l}{m}$, siempre que $m\neq 0$. Es decir, el límite del cociente es el cociente de los límites siempre que el límite del denominador sea distinto de 0.

8. Regla de la potencia: $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^n$, donde n es un número racional y existe el límite de la derecha. Es decir, el límite de una potencia es la potencia del límite.

Puede ocurrir que la suma, diferencia, producto o cociente de funciones tenga límite, sin que ninguna o alguna de las funciones tenga límite. Hay que entender bien las reglas aritméticas que hemos dado; en caso de que las dos funciones que intervienen en la operación aritmética tengan límite, dicha operación tiene límite, en otro caso no podemos asegurar nada.

Ejemplo. Las funciones $f(x) = \frac{|x|}{x}$ y $g(x) = -\frac{|x|}{x}$ no tienen límite en el punto 0, pero su suma es la función nula, que evidentemente tiene límite en 0.

Damos a continuación otra regla muy importante y de gran utilidad para el cálculo de límites:

Regla del encaje o criterio del sandwich

Si, en un cierto intervalo de centro x_0 se tiene

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$$

entonces también se tiene

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Lo que quiere decir esto es que si una función está encajada entre otras dos con igual límite, entonces esta función tiene el mismo límite.

Se pueden usar las reglas anteriores para calcular una gran cantidad de límites. No demostraremos ninguna de las reglas, pero algunas de ellas son muy fáciles de probar.

Límite de funciones polinómicas y racionales

- Si P es una función polinómica, entonces

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

- Si R es una función racional definida por $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)},$$

siempre que $Q(x_0) \neq 0$.

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 2}(2x^5 - 9x^3 + 3x^2 - 11), \qquad \lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 3x + 7}{5x^2 + 9x + 6}.$$

Claramente, usando las reglas de la suma, diferencia, múltiplo, constante y potencia, se llega a:

$$\lim_{x\to 2}(2x^5 - 9x^3 + 3x^2 - 11) = -7$$

y como el denominador de la función racional tiene límite distinto de cero en el punto donde tomamos límite, podemos usar la regla del cociente para tener:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - 3x + 7}{5x^2 + 9x + 6} = \frac{9}{2}.$$

Vemos que el límite de las funciones polinómicas y racionales se calcula por simple sustitución directa (siempre que sea posible). Estas funciones son dos de los tipos básicos de funciones algebraicas. Vemos qué ocurre con el tercer tipo de función algebraica: las que contienen un radical

Límite de una función radical

Si n es un entero positivo, el siguiente resultado es válido para todo x_0 si n es impar, y para todo $x_0 \geq 0$ si n es par:

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}.$$

Ejemplo

Calcular $\lim_{x\to -2} \sqrt[3]{x^2 - 3x - 2}$

Usando la regla de la potencia

$$\lim_{x\to -2} \sqrt[3]{x^2 - 3x - 2} = \lim_{x\to -2}(x^2 - 3x - 2)^{\frac{1}{3}} = 2.$$

El siguiente resultado aumentará notablemente la capacidad para calcular límites, ya que muestra cómo tratar el límie de una función compuesta:

Límite de una función compuesta

Si f y g son dos funciones tales que $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$ y $\lim_{x\to l} f(x) = f(l)$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right] = f(l).$$

Ejemplo

Calcular $\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{2x^2-10}$.

Como $\lim_{x\to 3} 2x^2 - 10 = 8$ y $\lim_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = 2$,

$$\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{2x^2-10} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Se ha visto que los límites de muchas funciones algebraicas se pueden calcular por medio de la sustitución directa. Las tres funciones trigonométricas principales también tienen esta propiedad:

Límite de funciones trigonométricas

Sea x_0 un punto del dominio de la función trigonométrica dada, entonces

- $\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$ $\lim_{x\to x_0} \sec x = \sec x_0$.
- $\lim_{x\to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$ $\lim_{x\to x_0} \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} x_0$.
- $\lim_{x\to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$ $\lim_{x\to x_0} \operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} x_0$.

Ejemplo

Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}^2 x, \qquad \lim_{x\to 0}(1-\cos x).$$

usando la regla de la potencia, la regla de la diferencia y la regla de la constante obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}^2 x = [\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x]^2 = 0^2 = 0$$

y

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = \lim_{x\to 0} 1 - \lim_{x\to 0} \cos x = 1 - 1 = 0.$$

Uso del álgebra en el cálculo de límites

A veces no se puede calcular un límite de una función f en un punto x_0 por sustitución directa. En este caso, necesitamos una estrategia que permita calcular el límite de una forma fácil. Esta estrategia consiste en buscar una función que coincida con f para todos los valores de x salvo en $x = x_0$, como se desprende del siguiente resultado:

Teorema 2.3.2. *Sea x_0 un número real y $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq x_0$ en un intervalo abierto que contiene a x_0. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x tiende a x_0, entonces también existe el límite de $f(x)$ y*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Ejemplos

1. Hállese $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$.

Sea $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$. Vemos que tanto numerador como denominador se anulan para $x = 1$, luego no se puede calcular el límite por sustitución. Factorizando y cancelando factores, f se puede escribir como

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1 = g(x), \qquad \text{para } x \neq 1.$$

De tal modo que para todos los valores distintos de 1, las funciones f y g coinciden. Como g es una función polinómica, el límite se calcula por sustitución directa, y por tanto f tiene el mismo límite en ese punto

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^2+x+1 = 3.$$

2. Calcular $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

De nuevo tanto numerador como denominador se anulan cuando $x = 4$, luego el límite no se puede calcular por sustitución directa. En lugar de esto, racionalizamos el numerador multiplicando y dividiendo por $\sqrt{x}+2$:

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

Límites de funciones definidas a trozos

Para calcular el límite de una función definida a trozos, vemos primero si el punto donde tomamos límite es uno de los valores que separan trozos. Si esto ocurre, no queda más remedio que estudiar los límites laterales separadamente

Ejemplo

Hallar $\lim_{x \to 0} f(x)$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x+5 & \text{si} \quad x > 0 \\ x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Observemos que $f(0)$ no está definido y que es necesario considerar límites a derecha e izquierda.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+5) = 5$$

y

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x) = 0$$

Como los límites laterales no coinciden, el límite no existe.

2.3.3. Ampliación del cálculo de límites

A continuación damos algunos ejemplos de límites importantes sin demostración.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1,\quad \lim_{x\to x}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m,\ (m\in\mathbf{R}),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad (a>1).$$

2.4. Continuidad

Informalmente e intuitivamente hablando, una función continua es aquella cuya gráfica se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, no tiene huecos ni saltos. Sin embargo, esta caracterización geométrica es demasiado simple. La continuidad es un concepto importante y complicado, que juega un papel central en el desarrollo ulterior del Cálculo. Para dar una definición más rigurosa, hay que abordar previamente, como hemos hecho, el concepto de límite de una función en un punto, ya que el concepto de continuidad y el de límite están intimamente relacionados.

Consideremos qué condiciones debe satisfacer una función, f, para que sea continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$:

- En primer lugar, $f(x_0)$ debe estar definido.
- En segundo lugar, f no puede tener ningún salto en $x = x_0$.
  Esto significa que si "x está próximo a x_0", entonces "$f(x)$ debe estar próximo a $f(x_0)$". Esta condición se satisface si existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y coincide con $f(x_0)$.

Definición 2.4.1. Sea f una función real de variable real. Decimos que f es *continua en un punto* x_0 si:

- $f(x_0)$ está definido.
- Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Una función que no es continua en x_0 se dice que tiene una *discontinuidad* en ese punto.

La primera condición se refiere al dominio de la función e ignora lo que ocurre en puntos $x \neq x_0$, mientras que la segunda se refiere a puntos cercanos a x_0 e ignora lo que ocurre en el punto x_0. La continuidad, por tanto, se refiere a la totalidad (en

$x = x_0$ y en los puntos cercanos) e intenta ver si ambos son similares de alguna manera.

Si f es continua en $x = x_0$, la diferencia entre $f(x)$ y $f(x_0)$ es pequeña siempre que x esté próximo a x_0 porque $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Geométricamente esto significa que los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica de f convergen hacia el punto $(x_0, f(x_0))$ cuando $x \to x_0$, y esto es lo que garantiza que la gráfica no tenga fracturas en $(x_0, f(x_0))$, es decir que sea sin cortes ni huecos.

El *dominio de continuidad* de una función es el conjunto de puntos donde la función es continua.

Ejemplos de funciones continuas

1. Las funciones polinómicas son continuas en todo $\mathbb{R}$. Es decir, son continuas todas las funciones de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

2. Las funciones racionales (cociente de dos polinomios), son continuas en todo su dominio.

El dominio de una función racional, son todos los números reales que no anulen al denominador.

3. Las funciones trigonométricas son continuas en sus respectivos dominios.

4. La función valor absoluto es continua en todo $\mathbb{R}$.

5. La función signo es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{signo}x = s(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Se pueden usar las propiedades de los límites dadas en la seción anterior para probar un teorema de continuidad. Este teorema afirma que se pueden combinar funciones continuas de ciertas formas y seguir teniendo funciones continuas.

Teorema 2.4.1 (Propiedades de las funciones continuas). *Sea s un número real, y f y g dos funciones continuas en un punto $x = x_0$, entonces las siguientes funciones son continuas en $x = x_0$:*

- *Múltiplo escalar: sf.*
- *Suma y diferencia: $f + g$ y $f - g$.*
- *Producto: $f \cdot g$.*
- *Cociente $\frac{f}{g}$, si $g(x_0) \neq 0$.*
- *Composición $f \circ g$, si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$.*
  Esta propiedad se deduce de la propiedad de límites: si f es continua en l y $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$, entonces

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f(l) = f[\lim_{x \to x_0} g(x)].$$

  Hablando a groso modo, esta regla dice que el límite de una función continua es la función del valor límite. La composición de funciones continuas quiere decir que una función continua de una función continua es continua.

Cuando una función no es continua, es decir, cuando no se verifica alguna de las condiciones en la definición de continuidad, hemos dicho que la función es *discontinua*. Las funciones no son continuas por distintos motivos, es decir, La gráfica de una función se puede "interrumpir " en un punto x_0 por varias razones. Esto da lugar a distinguir distintos tipos de no ser una función continua y hablar de "tipos de discontinuidad". Las discontinuidades se clasifican en dos categorias: *evitables o removibles* e *inevitables o no removibles*, y estas últimas pueden ser *de salto finito* o *de salto infinito*. Una discontinuidad es evitable o removible si f se puede hacer continua redefiniendo apropiadamente $f(x_0)$. Nosotros no vamos a profundizar en estas distinciones.

2.4.1. Funciones continuas en un intervalo

Hay que hacer una precisión sobre el concepto de función continua en un intervalo. Tenemos que aprender primero cómo manejar los extremos del intervalo.

La continuidad está definida en términos de límite. De igual forma que se pueden considerar límites laterales, podemos definir también la continuidad lateral:

Definición 2.4.2. Sea f una función real de variable real. Decimos que f es *continua por la derecha* (respectivamente *continua por la izquierda* en un punto x_0 si:

- $f(x_0)$ está definido.
- Existe $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (respectivamente $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$).
- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (respectivamente $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

El concepto de límite lateral permite extender la definición de continuidad a ciertos intervalos

Definición 2.4.3. Se dice que una función es *continua en un intervalo abierto* (a, b), si es continua en todos los puntos del intervalo.

Se dice que una función es *continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$, si es continua en (a, b), continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

Se dice que una función es *continua en un intervalo semiabierto* $[a, b)$, si es continua en (a, b) y continua por la derecha en a.

Se dice que una función es *continua en un intervalo semiabierto* de la forma $(a, b]$, si es continua en (a, b) y continua por la izquierda en b.

A veces es difícil disponer de la gráfica de una función. La tarea de ver si una función es continua se centra en ciertos valores. Lo primero que hay que hacer es identificar esos valores y estudiar el comportamiento de la función en ellos. Por darle nombre a la situación, definamos un *punto sospechoso* como uno donde la definición analítica de la función cambia, o como uno que produce división por cero en la definición de la función.

Ejemplos

1. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si} \quad -5 \leq x < 2 \\ x - 2 & \text{si} \quad 2 \leq < 5 \end{cases} .$$

Hallemos los intervalos donde la función es continua.

El dominio de la función es el intervalo $[-5, 5)$, así que habrá que analizar si f es continua en los puntos de $(-5, 5)$, y si es continua por la derecha en el punto $x = -5$. Entre los ejemplos que hemos visto de funciones continuas, estan las funciones polinómicas. Estudiando f vemos que $f(x) = 3 - x$ en $[-5, 2)$, que es una función polinómica, y por tanto continua, así que f es continua en $(-5, 2)$ y continua por la derecha en $x = -5$. Usando el mismo argumento vemos que f también es continua en $(2, 5)$. El punto sospechoso es aquel en el que la función cambia, luego en este caso $x = 2$. Analizamos la continuidad en este punto:

- $f(2) = 0$, luego f está definida en $x = 2$.
- La segunda condición de continuidad requiere que se pueda calcular el límite de la función en el punto $x = 2$. Para ello, tenemos que calcular los límites laterales, porque la expresión de la función es distinta si nos acercamos a $x = 2$ por la derecha o por la izquierda.

  $$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x - 2 = 0;$$

  $$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3 - x = 1 \neq 0.$$

  Como los límites laterales son distintos, no existe el límite en el punto $x = 2$.
- La tercera condición no se puede verificar en el punto $x = 2$.

Por tanto f no es continua en $x = 2$. Los intervalos donde la función f es continua son: $[-5, 2)$ y $(2, 5)$.

2.4.2. Teorema de Bolzano. Teorema de los valores intermedios.

Destacaremos dos resultados fundamentales sobre continuidad: el teorema de Bolzano y el teorema de los valores intermedios.

Teorema 2.4.2 (Teorema de Bolzano). *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

<u>**Observaciones**</u>

1. La condición $f(a) \cdot f(b) < 0$ significa que la función toma valores con distinto signo en los extremos del intervalo. Entonces intuitivamente, si la función es continua en algún momento tiene que atravesar el eje de las x, y por tanto habrá un valor donde la función se anulará.
2. El teorema asegura que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$. Podemos asegurar que la raiz está en el intervalo abierto (a, b), puesto que ni $f(a)$ ni $f(b)$ son cero.
3. Una utilidad, bastante importante del teorema de Bolzano, es probar la existencia de raices de una función, aunque no nos dice nada sobre el valor de esta raiz. Tampoco dice nada sobre el número de raices que hay en el intervalo.
4. El teorema también se conoce con el nombre de teorema de *localización de raices*.

Ejemplo

Probar que la ecuación $\operatorname{sen} x = x$ posee alguna solución en el intervalo $(-1, 1)$.

La ecuación $\operatorname{sen} x = x$ podemos escribirla $\operatorname{sen} x - x = 0$. (Esta igualdad nos da la idea para definir la función candidata para usar el teorema de Bolzano).
Consideremos la función $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x - x$.
Esta función es continua por ser diferencia de funciones continuas. Además

$$f(-1) = \operatorname{sen}(-1) - (-1) > -1 + 1 = 0.$$

$$f(1) = \operatorname{sen}(1) - 1 < 1 - 1 = 0.$$

Estamos en las hipótesis del teorema de Bolzano, luego podemos asegurar que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = \operatorname{sen} c - c = 0$, o equivalentemente $\operatorname{sen} c = c$.

Dos consecuencias importantes del teorema de Bolzano son los siguientes teoremas:

Teorema 2.4.3. *Si f es una función continua en un intervalo I y no vale cero en ningún punto, entonces no cambia de signo en todo el intervalo, es decir, es siempre positiva, o siempre negativa.*

Teorema 2.4.4 (Teorema de los valores intermedios). *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Si k está entre $f(a)$ y $f(b)$ (esto es, $f(a) \leq k \leq f(b)$ ó $f(b) \leq k \leq f(a)$), entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.*

Si f es una función continua en un intervalo cerrado, y si x toma todos los valores entre a y b, entonces $f(x)$ tiene que tomar todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$.

Observaciones

1. Hablando intuitivamente, si f es una función continua en un intervalo, se puede dibujar su gáfica en ese intervalo "sin levantar el lápiz del papel". Esto es, si $f(x)$ varia continuamente desde $f(a)$ hasta $f(b)$ cuando x va desde a hasta b, entonces debe alcanzar cualquier valor entre $f(a)$ y $f(b)$. Esta característica de las funciones continuas se llama la *propiedad del valor intermedio*.
2. Una consecuencia importante del Teorema del Valor Intermedio es que nos permite hallar, aproximadamente, raices de la ecuación $f(x) = 0$, por tanto, el Teorema de Bolzano se puede obtener como consecuencia del teorema de los valores intermedios.
3. Si f no es continua en algún punto del intervalo, la conclusión del teorema no tiene por qué darse.

   Ejemplo

   Consideremos la función

   $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ 0 \leq x \leq 2 \\ -1 & \text{si } \ -2 \leq x < 0 \end{cases}.$$

   La función es continua en $[-2, 0) \cup (0, 2]$ (que no es un intervalo). Además $f(-2) < 0 < f(2)$. Sin embargo no existe ningún punto $c \in (-2, 2)$ tal que $f(c) = 0$.
4. La función f puede tomar todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$ sin ser continua en $[a, b]$

   Ejemplo

   Consideremos la función

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \ 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } \ 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

   La función f es continua en $[0, 1) \cup (1, 2]$ y toma todos los valores entre $f(0)$ y $f(2)$.

Los teoremas de Bolzano y de los valores intermedios se llaman *teoremas de existencia*. Esto quiere decir que afirman que existen unos valores pero no nos dan métodos para calcularlos ni hablan del número de puntos que lo cumplen. Existen métodos para aproximar raices. Nosotros no lo estudiaremos.