CÁLCULO

Funciones de una variable (Parte I)

Funciones de una variable (Parte I)

- Definiciones básicas.
- Gráfica de una función.
- Inyectividad y sobreyectividad. Función inversa.

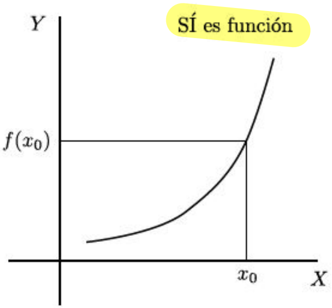
Definiciones básicas

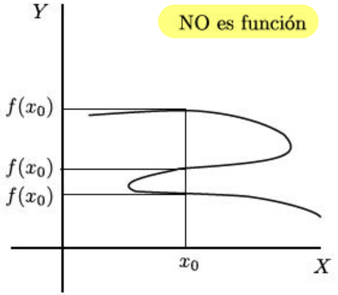
Definición

Sean I y J dos subconjuntos de $\mathbb{R}$. Una *función real de variable real* es una correspondencia $f : I \to J$ que asigna a cada punto $x \in I$ un **único** punto $y \in J$.

- $x \to$ var. independiente; $y = f(x) \to$ var. dependiente.
- Al conjunto I se denomina: dominio de f, y se denota $dom(f)$.
- Al conjunto J se denomina: codominio de f.
- Al subconjunto de J determinado por todos los puntos que son imagen de algún punto de I lo denominaremos imagen de f y se denota como $Im(f)$, i.e.,

$$Im(f) = \{y \in J : y = f(x) \text{ para algún } x \in I\}.$$





- Figura de la izquierda: Esquema de la definición de una función como una correspondencia, donde a cada $x_0 \in X$ se le hace corresponder un único elemento $f(x_0) \in Y$.
- Figura de la derecha: No se verifica la definición de función.

Dominio e Imagen

Ej 1. $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & x^2 \end{array}$ $dom(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = [0, \infty)$.

Ej 2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 5$ $dom(f) = (-\infty, 2)$, $Im(f) = (5, \infty)$.

Ej 3. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, $Im(f) = ?$.

$(-1, \infty)$

Gráfica de una función

Definición

Sea $f : I \to J$ una función real de variable real. Definimos la gráfica de f como el subconjunto de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dado por:

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\}.$$

La gráfica de una función permite visualizar fácilmente diversos tipos de información:

- su dominio e imagen.
- su crecimiento/decrecimiento.
- su acotación.
- su periodicidad.
- sus simetrías.

Gráfica de una función

- Intersección con los ejes coordenados:
  - Una función f interseca al eje X en x_0 si $f(x_0) = 0$.
  - Una función f interseca al eje Y en $f(0)$.
- Periodicidad:
  - Diremos que una función f es periódica si existe un valor t tal que $f(x) = f(x+t)$ para todo x. Al menor valor t que satisface lo anterior se le denomina el período de la función.

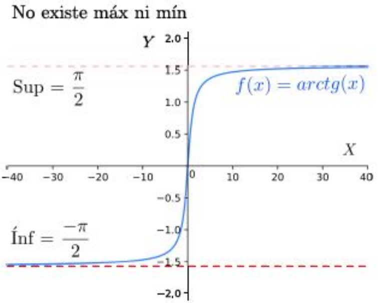
Gráfica de una función

- Simetrías:
  - Una función f es simétrica respecto al eje y si, para cada punto (x, y) en la gráfica se tiene que $(-x, y)$ también pertenece a la gráfica, i.e., la función f verifica que $f(-x) = f(x)$. Se le denomina **función par**.
  - Una función f es simétrica respecto al origen si, para cada punto $(x, -y)$ en la gráfica se tiene que $(-x, y)$ también pertenece a la gráfica, i.e., $f(-x) = -f(x)$. Se le denomina **función impar**.

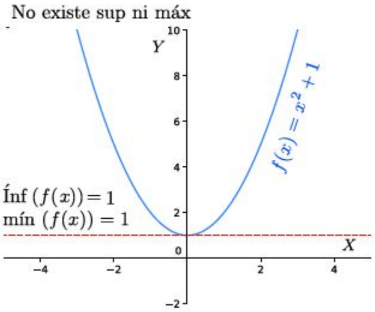
Gráfica de una función

- Crecimiento/Decrecimiento:
  - Diremos que una función f es creciente (estrictamente creciente) en un dominio I si para todo $x, y \in I$ con $x < y$ se tiene que $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) < f(y)$). El concepto de decrecimiento se define análogamente.

- Acotación:
  - Diremos que una función f está acotada superiormente (resp. inferiormente) si existe un valor $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq M$ (resp. $f(x) \geq M$) para todo $x \in Dom(f)$.
  - Al menor (resp. mayor) valor M que satisface lo anterior se le denomina el supremo (resp. ínfimo) de la función.
  - Si existe un valor x_0 en el dominio de modo que $f(x_0) = M$, entonces M se denomina máximo (resp. mínimo) de la función.



- La función $f(x) = arctg(x)$ está acotada tanto superior como inferiormente. Por tanto, tiene supremo e ínfimo (en $\pi/2$ y $-\pi/2$ correspondientemente), pero como dichos valores no se alcanzan, la función no tiene máximo ni mínimo.



- La función $f(x) = x^2 + 1$ solo está acotada inferiormente. Como el ínfimo de la función se alcanza en $x = 0$, éste es un mínimo.

Inyectibidad y Sobreyectividad

Definición

Sea $f : I \to J$ una función real de variable real. Diremos que f es:

1. Inyectiva: Si dados $x, y \in I$ $(x \neq y)$, se tiene que $f(x) \neq f(y)$.
2. Sobreyectiva: Si $Im(f) = J$.
   si para todo $y \in J$ existe $x \in I$ tal que $f(x) = y$.
3. Biyectiva: Si es tanto inyectiva como sobreyectiva.

Ejemplo 1:
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida como $f(x) = x^2$.

- No es inyectiva: $f(1) = f(-1)$.
- No es sobreyectiva: $Im(f) = [0, \infty) \neq \mathbb{R}$.

Ejemplo 2:
Sea $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una función definida como $g(x) = x^2$.

- No es inyectiva: $f(1) = f(-1)$.
- Si es sobreyectiva: $Im(f) = [0, \infty) = codom(f)$.

Ejemplo 3:
Sea $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función definida como $h(x) = x^2$.

- Es biyectiva.

Función inversa

Definición

Sean $f : I \to J$ y $g : J \to K$ dos funciones. La *composición* $g \circ f : I \to K$ es la función definida como $g \circ f(x) = g(f(x))$.

$$\begin{array}{rcccccc} g \circ f : & I & \to & J & \to & K \\ & x & \to & f(x) & \to & g(f(x)) \end{array}$$

Definición

Sea $f : I \to J$ una función. Diremos que una función $g : J \to I$ es la *función inversa* de f si $f \circ g(y) = y$ y $g \circ f(x) = x$ para todo $y \in J$ y todo $x \in I$.

Observación: Toda función biyectiva admite una función inversa.

Función inversa

Ejemplo 1: En caso de ser posible, calcula la inversa de la función $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ definida como $h(x) = x^2$.

Solución: La función h es biyectiva $\to$ existe la inversa de h.

$$\begin{array}{cccc} h^{-1}: & [0,\infty) & \to & [0,\infty) \\ & y & \to & \sqrt{y} \end{array}$$

Ejemplo 2: En caso de ser posible, calcula la inversa de la función $f : [0, 2] \to [0, 5]$ definida como $f(x) = 2x$.

Solución: La función f no es sobreyectiva $\to$ no existe la inversa.

CÁLCULO

Funciones de una variable (Parte II)

Límites de funciones de una variable

- Límite de una función en un punto.
- Límites laterales.
- Propiedades de los límites.
- Límites infinitos y límites en el infinito.

Límite de una función en un punto

Idea Informal: Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que el *límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende a* c *es* L, denotado por

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

si $f(x)$ se aproxima tanto como uno desee a L cuando x se acerca a c suficientemente por ambos lados.

- La proximidad entre dos números reales se precisa por medio del valor absoluto de su diferencia.
- Decimos que $f(x)$ *se aproxima a* L *en menos de un número positivo* ϵ si $|f(x) - L| < \epsilon$.
- Decimos que x *se aproxima a* c *en menos de un número positivo* δ si $|x - c| < \delta$.

Definición

Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real y sea c un punto de acumulación de X. El *límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L*, denotado por

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

si para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

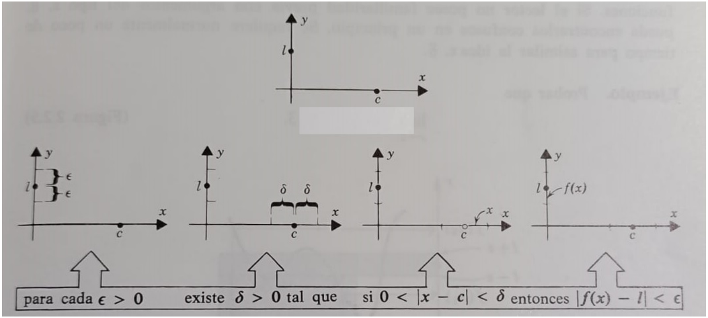
- Dado un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ y un punto $c \in \mathbb{R}$, no necesariamente perteneciente a X, se dice que c es un punto de acumulación de X, si en todo entorno $U(x)$ existe, por lo menos, un punto de X distinto de c (si c pertenece a X).
- No es una restricción el que f no esté definida en c.
- Hay casos en que $f(c) = L$ ó $f(c) \neq L$.

Definición

Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real y sea c un punto de acumulación de X. El *límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L*, denotado por

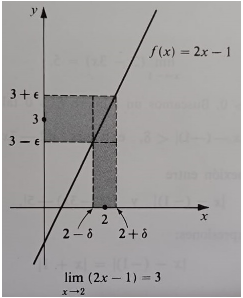
$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

si para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.



Ejemplo : Demuestra que $\lim_{x \to 2}(2x - 1) = 3$.

- Dado un $\epsilon > 0$, debemos buscar un $\delta(\epsilon) > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$, entonces $|(2x - 1) - 3| < \epsilon$.



Proof. Sea $\epsilon > 0$. Sea $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Si $0 < |x - 2| < \delta = \frac{\epsilon}{2}$, entonces

$$|(2x - 1) - 3| = 2|x - 2| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por tanto, $\lim_{x \to 2}(2x - 1) = 3$.

Límites laterales

Definición

Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real y sea $c \in \mathbb{R}$ un punto.

Si c es de acumulación de $X_i = (-\infty, c) \cap X$ y existe el límite L_i de f relativo a X_i en el punto c, se denomina *límite por la izquierda de* c y se denota por

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L_i.$$

Análogamente, si c es de acumulación de $X_d = (c, \infty) \cap X$ y existe el límite L_d de f relativo a X_d en el punto c, se denomina *límite por la derecha de* c y se denota por

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L_d.$$

Proposición

Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real y sea $c \in \mathbb{R}$ un punto, que es de acumulación de X_i y X_d. Entonces f tiene límite en el punto c si y sólo si existen los límites laterales y ambos coinciden. Es decir:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x).$$

Ejemplo: Demuestra que $\lim_{x \to 0} h(x)$ no existe, donde

$$h(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Proof. Observa que $\lim_{x \to 0^-} h(x) = -1$ y $\lim_{x \to 0^+} h(x) = 1$.

Por tanto, $\lim_{x \to 0} h(x)$ no existe.

Propiedades de los límites

Si $\lim_{x\to c} f(x) = l$ y $\lim_{x\to c} g(x) = m$, entonces

(i) $\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)] = l + m$.

(ii) $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = lm$.

(iii) $\lim_{x\to c}[\alpha f(x)] = \alpha l$.

(iv) $\lim_{x\to c}[f(x)/g(x)] = l/m$, siempre que $m \neq 0$.

- Si $P(x)$ es un polinomio, entonces $\lim_{x\to c} P(x) = P(c)$.
- Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios y $Q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}.$$

Teorema 1

Si $\lim_{x\to c} f(x) = l \neq 0$ y $\lim_{x\to c} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ no existe.}$$

Proof: Supongamos, por el contrario, que existe un número real L tal que $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$. Entonces,

$$l = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \left[g(x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x\to c} g(x) \cdot \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

lo cual contradice el hecho de que $l \neq 0$.

Ejemplo: Aplicando el Teorema 1 se deduce que los siguientes límites no existen.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1}, \qquad \lim_{x \to 2} \frac{3x-7}{x^2-4} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{4}{x}$$

Ejemplo: Calcula, en caso de que exista, $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$.

Proof. Observa que $\lim_{x \to 3}(x^2 - x - 6) = \lim_{x \to 3}(x-3) = 0$.

Factorizando el numerador, se obtiene: $\frac{x^2-x-6}{x-3} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-3}$.

Para $x \neq 3$, se deduce que $\frac{x^2-x-6}{x-3} = x + 2$.

Por tanto, $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+2) = 5$.

Observación 1

Las siguientes expresiones son equivalentes.

(i) $\lim_{x \to c} f(x) = l$.

(ii) $\lim_{x \to c} (f(x) - l) = 0$.

(iii) $\lim_{x \to c} |f(x) - l| = 0$.

(iv) $\lim_{h \to 0} f(h + c) = l$.

Observación 2

Las expresiones $\lim_{x \to c} f(x) = l$ y $\lim_{x \to c} |f(x)| = |l|$ no son equivalentes.

$\lim_{x \to c} f(x) = l \quad \to \quad \lim_{x \to c} |f(x)| = |l|$. El recíproco es falso.

Límites infinitos y límites en el infinito

Definición

Sea $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real y sea c un punto de acumulación de X. Se dice que f tiene límite $+\infty$ (o $-\infty$) en el punto c, si para cada número real H existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > H \quad (\text{o } f(x) < H)$$

para todo $x \in X$ que satisface $0 < |x - c| < \delta$.

Se escribe $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$, (o $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$).

Ejemplo: La función definida por $f(x) = \frac{1}{|x|}$ para todo $x \neq 0$ satisface que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Idea de la Proof: Para cualquier $H > 0$, basta tomar $\delta = \frac{1}{H}$.

Definición

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función real, con $X \subset \mathbb{R}$ no acotado superiormente (o inferiormente). Se dice que f tiene el límite L cuando x tiende a $+\infty$ (o $-\infty$), si para cada $\epsilon > 0$, existe un número real H tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon,$$

para todo $x \in X$ que satisface $x > H$ (o $x < H$).

Se escribe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, (o $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$).

CÁLCULO

Funciones de una variable (Parte III)

Continuidad

- Continuidad de una función en un punto.
- Funciones continuas. Propiedades.
- Teoremas de la continuidad.

Definición

Sea $f : X \to Y$ una función y $c \in X$ un punto de acumulación. Se dice que f *es continua en* c, si existe $\lim_{x \to c} f(x)$, es finito y coincide con $f(c)$. Es decir:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Definición

Sea $f : X \to Y$ una función y $c \in X$ un punto de acumulación. Se dice que f *es discontinua en* c si no es continua en c.

Una función f es continua en un punto c si:

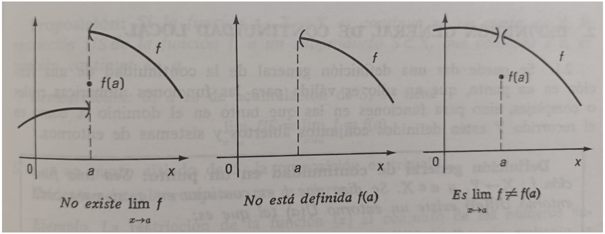
a) Existe $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ y es finito.

b) Existe $f(c)$, i.e., $c \in Dom(f)$.

c) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Una función f es discontinua en un punto c, con:

- Discontinuidad esencial: cuando no se cumple la condición b).
- Discontinuidad evitable: cuando se cumple la condición b) pero falla la condición a) o la condición c).



Definición (continuidad lateral)

Una función f es

- *continua por la izquierda en c* si y solo si $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$.
- *continua por la derecha en c* si y solo si $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$.

Observación: Una función f es continua en c si y solo si es continua por ambos lados en el punto c.

Definición

Una función $f : X \to Y$ es continua en X, cuando es continua en cada uno de los puntos $x \in X$.

Ejemplo: Estudia la continuidad en el punto $x = -1$ de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 1$ si $x \neq -1$ y $f(-1) = 2008$.

Proof. Observa que $f(-1)$ existe ($f(-1) = 2008$).

Por otra parte, $\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x^2 + 1) = (-1)^2 + 1 = 2.$

Por tanto, límite existe y es finito. Sin embargo

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 2 \neq 2008 = f(-1).$$

Entonces, f presenta una discontinuidad evitable en $x = -1$.

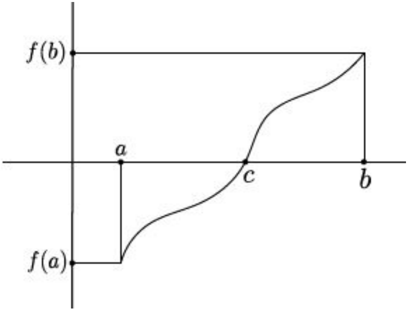
Propiedades de las funciones continuas

Sean $f : X \to \mathbb{R}$ y $g : X \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Entonces

- $f + g$ es continua en X.
- λf es continua en X, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $f \cdot g$ es continua en X.
- $f \circ g$ es continua en X.
- $\frac{f}{g}$ es continua en $X \setminus X'$, donde $X' = \{x \in X : g(x) = 0\}$.

Teorema de Bolzano

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Si se cumple que $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.



Teorema del valor intermedio

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ de forma que $f(a) \neq f(b)$. Entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, i.e., para todo $y \in [f(a), f(b)]$, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = y$.

Proof. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(a) < f(b)$. Si $k \in \{f(a), f(b)\}$, entonces el resultado es trivial.

Sea $k \in (f(a), f(b))$. Solo habría que probar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.

Sea g la función continua en $[a, b]$ definida como $g(x) = f(x) - k$.

Observa que $g(a) = f(a) - k < 0$ y $g(b) = f(b) - k > 0$.

Entonces, aplicando el Teorema de Bolzano, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$.

Por tanto, $f(c) - k = g(c) = 0 \quad \to \quad f(c) = k.$

Observación: El Teorema de Bolzano se puede aplicar para asegurar la existencia de solución de ciertas ecuaciones difíciles de resolver.

Ejemplo: Demuestra que la ecuación $x + e^x = 7$ tiene solución.

Proof. Observa que la ecuación no se puede resolver directamente (intentando despejar x).

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dada por $f(x) = x + e^x - 7$.

Obs: El problema de encontrar una solución de la ecuación dada es equivalente a encontrar un punto $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$.

Idea: Encontrar un intervalo $[a, b]$ en donde f satisface las hipótesis del Teorema de Bolzano.

Observa que $f(0) = -6 < 0$ y $f(3) = 3 + e^3 - 7 > 0$. Aplicando el Teorema de Bolzano a f en el intervalo $[0, 3]$, se deduce que existe $c \in (0, 3)$ tal que $f(c) = 0$, i.e., $c + e^c = 7$.

Por tanto, c es una solución de la ecuación $x + e^x = 7$.