MATEMÁTICA DISCRETA

Conceptos Básicos de la Teoría de Conjuntos (Parte II)

Conceptos Básicos de la Teoría de Conjuntos (P-II)

- Operaciones con conjuntos.
- Diagramas de Venn.
- Leyes del Álgebra de conjuntos.

Operaciones con conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

- La unión de los conjuntos A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o que pertenecen a B.

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

- La intersección de los conjuntos A y B, denotada por $A \cap B$, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y que pertenecen a B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}.$$

Ejemplo 10: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $C = \{5, 6, 7, 8\}$.

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. (Observa: $A \cup C = A \cup B \cup C$).
- $A \cap B = \{3, 4\}$ y $A \cap C = \emptyset$.

Operaciones con conjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

- La diferencia de los conjuntos A y B, denotada por $A \setminus B$, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y que no pertenecen a B.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$$

- El complemento de A, denotado por A^c, es el conjunto de elementos que no pertenecen a A (con relación al conjunto universal U, es decir, al mayor conjunto que nos podamos imaginar en cada contexto).

$$A^c = \{x : x \in U \ \wedge \ x \notin A\} = \{x : x \notin A\}.$$

Ejemplo 11: Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $U = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

- $B \setminus A = \{5, 6\}$. $A \setminus B = \{1, 2\}$.
- $A^c = \{5, 6, 7, \ldots\}$. $B^c = \{1, 2\} \cup \{7, 8, 9, \ldots\}$.

Ejercicio 1: Si $A \cup B = A \cup C$, ¿Podemos deducir que $B = C$? Justifica la respuesta.

Solución(Ejercicio 1): No necesariamente se cumple que $B = C$. Observa que si $B \subseteq A$, $C \subseteq A$ y $B \neq C$, entonces también se satisface que $A \cup B = A \cup C$.

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 2\}, \quad C = \{2, 3\} \quad \text{y} \quad A \cup B = A \cup C = A.$$

Ejercicio 2: Si $A \cap B = A \cap C$, ¿Podemos deducir que $B = C$? Justifica la respuesta.

Solución(Ejercicio 2): No necesariamente se cumple que $B = C$. Observa que si $A \subseteq B$, $A \subseteq C$ y $B \neq C$, entonces también se satisface que $A \cap B = A \cap C$.

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3\}, \quad C = \{1, 2, 4\} \quad \text{y} \quad A \cap B = A \cap C = A.$$

Ejercicio 3: Sean X e Y dos conjuntos. Demuestra que:

$$X \setminus Y = X \cap Y^c.$$

Solución(Ejercicio 3): Observa que:

$$X \setminus Y = \{x : x \in X \ \wedge \ x \notin Y\} = \{x : x \in X \ \wedge \ x \in Y^c\} = X \cap Y^c.$$

Ejercicio 4: Sean X e Y dos conjuntos. Demuestra que:

$$(X \setminus Y) \cap Y = \emptyset.$$

Solución(Ejercicio 4): Observa que:

$$\begin{aligned}
(X \setminus Y) \cap Y &= \{x : x \in X \setminus Y \ \wedge \ x \in Y\} \\
&= \{x : x \in X \ \wedge \ x \notin Y \ \wedge \ x \in Y\} \\
&= \{x : x \in X\} \cap \{x : x \notin Y \ \wedge \ x \in Y\} \\
&= \{x : x \in X\} \cap \emptyset \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Diagramas de Venn

- (Informalmente), un Diagrama de Venn es una representación gráfica que permite agrupar elementos en diferentes conjuntos y mostrar sus relaciones mediante el uso de círculos.
- Permiten mostrar la agrupación y relaciones de elementos organizados en distintos conjuntos.
- Generalmente, son útiles cuando se trata de mostrar de forma visual las relaciones entre elementos pertenecientes a distintos conjuntos que no son disjuntos entre sí.
- Entre las funciones de un Diagrama de Venn se tiene:
    - Definir los conjuntos de elementos que forman el conjunto universo o un subconjunto de éste (mediante círculos).
    - Determinar a qué conjunto o conjuntos pertenece cada uno de los elementos.
    - Identificar a aquellos elementos que no pertenecen a ningún conjunto.

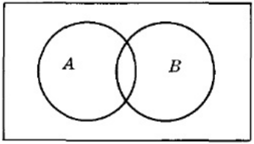
Ejemplo 1: En cada uno de los siguientes Diagramas de Venn, sombrea: (i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$.

Solución(Ejemplo 1):

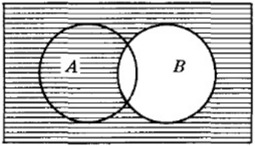
$A \cup B$

$A \cap B$

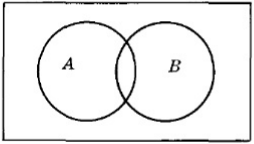
Ejemplo 2: En el siguiente Diagrama de Venn, sombrea B^c.



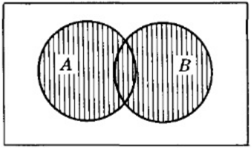
Solución(Ejemplo 2):



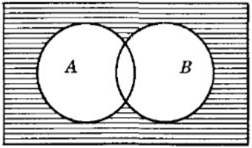
Ejemplo 3: En el siguiente Diagrama de Venn, sombrea $(A \cup B)^c$.



Solución(Ejemplo 3):

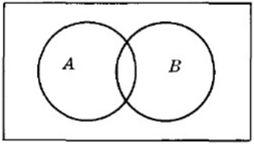


$A \cup B$

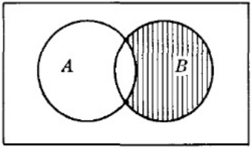


$(A \cup B)^c$

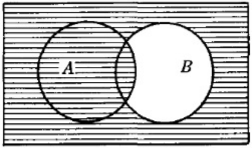
Ejemplo 4: En el siguiente Diagrama de Venn, sombrea $(B \setminus A)^c$.



Solución(Ejemplo 4):

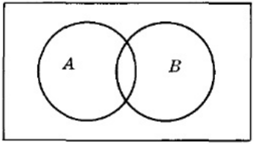


$B \setminus A$

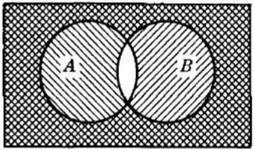


$(B \setminus A)^c$

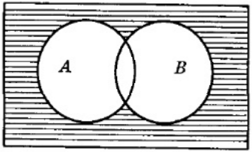
Ejemplo 5: En el siguiente Diagrama de Venn, sombrea $A^c \cap B^c$.



Solución(Ejemplo 5):



A^c and B^c



$A^c \cap B^c$

Leyes del Álgebra de Conjuntos

Dados $A, B, C \in U$ se tiene:

- Propiedades asociativas:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \text{y} \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- Propiedades conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{y} \quad A \cap B = B \cap A$$

- Propiedades distributivas:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Propiedades del elemento complementario:

$$A \cup A^c = U \quad \text{y} \quad A \cap A^c = \emptyset$$

- Propiedades del elemento neutro:

$$A \cup \emptyset = A \quad \text{y} \quad A \cap U = A$$

Ejemplo 6: Demuestra la Propiedad distributiva

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Solución(Ejemplo 6): Observa que:

$$\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= \{x : x \in A \quad \wedge \quad x \in B \cup C\} \\
&= \{x : x \in A \quad \wedge \quad (x \in B \quad \vee \quad x \in C)\} \\
&= \{x : (x \in A \quad \wedge \quad x \in B) \ \vee \ (x \in A \quad \wedge \quad x \in C)\} \\
&= \{x : x \in A \cap B \quad \vee \quad x \in A \cap C\} \\
&= \{x : x \in A \cap B\} \cup \{x : x \in A \cap C\} \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{aligned}$$

Leyes del Álgebra de Conjuntos

Dados $A, B \in U$ se tiene:

- Leyes de idempotencia:

$$A \cup A = A \qquad \text{y} \qquad A \cap A = A$$

- Leyes de acotación:

$$A \cup U = U \qquad \text{y} \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$

- Leyes de absorción:

$$A \cup (B \cap A) = A \qquad \text{y} \qquad A \cap (B \cup A) = A$$

- Leyes de involución:

$$(A^c)^c = A, \qquad \emptyset^c = U \qquad \text{y} \qquad U^c = \emptyset$$

- Leyes de Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad \text{y} \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Ejemplo 6: Demuestra la Ley de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Solución(Ejemplo 6): Observa que:

$$\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= \{x : x \notin A \cup B\} \\
&= \{x : \neg(x \in A \cup B)\} \\
&= \{x : \neg(x \in A \ \vee \ x \in B)\} \\
&= \{x : x \notin A \ \wedge \ x \notin B\} \\
&= \{x : x \in A^c \ \wedge \ x \in B^c\} \\
&= \{x : x \in A^c \cap B^c\} \\
&= A^c \cap B^c.
\end{aligned}$$