MATEMÁTICA DISCRETA

Conceptos Básicos de la Teoría de Conjuntos (Parte I)

Conceptos Básicos de la Teoría de Conjuntos (P-I)

- Conjuntos y Elementos.
- Subconjuntos.
- Conjunto potencia de un conjunto.

Conjuntos y Elementos

- (Intuitivamente), un conjunto es una lista o colección de objetos bien definida.
    - Suelen denotarse con letras mayúsculas: $A, B, X, Y, \ldots$
- Se llama elemento de un conjunto a cada uno de los objetos que lo componen.
    - Suelen denotarse con letras minúsculas: $a, b, x, y, \ldots$
    - Si x es un elemento de X, se dice que *x pertenece a X*, y se escribe: $x \in X$.
    - Si x NO es un elemento de X, se dice que *x no pertenece a X*, y se escribe: $x \notin X$.

Conjuntos y Elementos

- (Esencialmente), existen dos formas de representar un conjunto:
  (1) Si es posible, se puede representar listando sus elementos (separados por comas y encerrados entre llaves). Por ejemplo, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es el conjunto cuyos elementos son los números enteros 1, 2, 3, 4 y 5.
  (2) Se puede representar describiendo las propiedades o norma que caracterizan los elementos en el conjunto.Por ejemplo, $B = \{x : \text{ x es un entero positivo}\}$ es el conjunto cuyos elementos son los números enteros positivos.

Ejemplo 1: El conjunto $B = \{x : \text{ x es un entero positivo}\}$ también se puede escribir como sigue: $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

$$100 \in B, \qquad -5 \notin B, \qquad \tfrac{5}{2} \notin B, \qquad a \notin B.$$

Ejemplo 2: El conjunto $Z = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ también se puede escribir como sigue: $Z = \{1, 2\}$.

$$0 \notin Z, \qquad * \notin Z, \qquad 1 \in Z, \qquad x \notin Z.$$

Conjuntos y Elementos

- Dos conjuntos A y B son iguales (y se escribe $A = B$) si, y sólo si, tienen los mismos elementos.
- Los conjuntos se pueden clasificar en finitos o infinitos.Un conjunto es finito si contiene exactamente n diferentes elementos (n es un entero positivo).
  - Si X es un conjunto finito, entonces al número de elementos diferentes de X se le llama *cardinal del conjunto X* y se denota por $\mathrm{Card}(X)$ o $|X|$.

Ejemplo 3: Sea $Z = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $Y = \{1, 2, \frac{6}{3}, 2\}$.

$$Z = \{1, 2\}, \qquad Y = \{1, 2\}, \qquad |Z| = |Y| = 2, \qquad Z = Y.$$

Ejemplo 4: El conjunto $C = \{2, 4, 6, \ldots\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}\}$ es un conjunto infinito.

Ejemplo 5: $D = \{2, 4, 6, \ldots, 100\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es par}, x \leq 100\}$ es un conjunto finito de cardinalidad $|D| = 50$.

Subconjuntos

Sean A y B dos conjuntos.

- Se dice que A es un subconjunto de B si, y sólo si, todo elemento de A es también un elemento de B, i.e. $\underline{\forall x\,(x \in A \to x \in B)}$.
  La notación $A \subseteq B$ indica que A es un subconjunto de B.
- A no es un subconjunto de B si y sólo si, existe un elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$, i.e. $\underline{\exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)}$.
  La notación $A \nsubseteq B$ indica que A no es un subconjunto de B.

Ejemplo 6: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Ejemplo 7: Dados los conjuntos $A = \{1, 3, 5, \ldots\}$, $B = \{5, 10, 15, \ldots\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} : \text{ x es primo}, x > 2\}$. Observa que:

$$C \subseteq A, \qquad B \nsubseteq A \ (20 \in B \text{ y } 20 \notin A)$$

Ejemplo 8: Todo conjunto A satisface que $A \subseteq A$.

Resultados

- Dos conjuntos A y B son iguales si, y sólo si, $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- Sean A, B y C conjuntos. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

Resultados

- El conjunto vacío (denotado por $\emptyset$) es el conjunto que no contiene elementos. Sea $V = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 4 \text{ y } x \text{ es impar}\}$. Observa que $V = \emptyset$.
- Todo conjunto A tiene dos subconjuntos triviales: el conjunto vacío y el propio conjunto A.
- Si $B \subseteq A$ y $B \notin \{A, \emptyset\}$, entonces B se conoce como subconjunto no trivial de A.

Conjunto potencia de un conjunto

- Sea A un conjunto. El conjunto potencia de A, denotado por $\mathcal{P}(A)$, es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A.
- $B \subseteq A$ si y sólo si $B \in \mathcal{P}(A)$.
- Si A es finito y $|A| = n$, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Ejemplo 9: Sea $A = \{a, b, c\}$ un conjunto. Obtenga $\mathcal{P}(A)$ y $|\mathcal{P}(A)|$.

- Como $|A| = 3$, se tiene que $|\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8$.
- $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$.