Formulario 1er parcial física

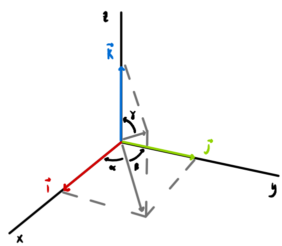
1. Álgebra vectorial

- Sistema internacional
  - Longitud metro (m) L
  - Masa Kilogramo (Kg) M
  - Tiempo Segundo (s) T
  - Intensidad eléctrica Amperio (A) A
  - Temperatura Kelvin (K) K
  - Cantidad de sustancia Mol (mol) S
  - Intensidad lumínica Candela (cd) C

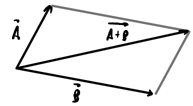
- Tipos de magnitudes
  - Escalares (número real)
  - Vectoriales (número real, dirección y sentido)

- Coordenadas cartesianas de un vector (base ortonormal)
  - $\vec{A} : (A_x , A_y , A_z) \rightarrow \vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$
  - Módulo: $|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$
  - Cosenos directores:

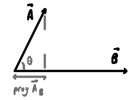
$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$



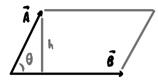
- Operaciones con vectores



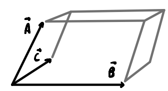
- Producto vector - escalar ($\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ y λ) : $\lambda\vec{A} = \lambda A_x \vec{i} + \lambda A_y \vec{j} + \lambda A_z \vec{k}$
- Suma de dos vectores ($\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$) : $\vec{A}+\vec{B} = (A_x+B_x)\vec{i} + (A_y+B_y)\vec{j} + (A_z+B_z)\vec{k}$
- Producto escalar ($\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$) : $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$
  - $Proy\ \vec{A}_B = |\vec{A}| \cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{B}|}$
  - $\theta = \arccos \dfrac{|\vec{A}||\vec{B}|}{\vec{A}\cdot\vec{B}}$



- Producto vectorial ($\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$) : $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$
  - $S = |\vec{A}||\vec{B}| \operatorname{sen}\theta = |\vec{A}\times\vec{B}|$



- Producto mixto ($\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$, $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ y $\vec{C}(C_x, C_y, C_z)$) : $\vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$
  - $V_{ABC} = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$



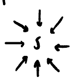
- Derivada de un vector
  - ($\vec{A}(t) = (A_x, A_y, A_z)$) : $\dfrac{d(\vec{A})}{dt} = \dfrac{dA_x}{dt}\vec{i} + \dfrac{dA_y}{dt}\vec{j} + \dfrac{dA_z}{dt}\vec{k}$
  - ($\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ y λ) : $\dfrac{d}{dt}(\vec{\lambda}\cdot\vec{A}) = \lambda\dfrac{d(\vec{A})}{dt} + \vec{A}\dfrac{d(\vec{\lambda})}{dt}$
  - ($\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$) :
    - $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\pm\vec{B}) = \dfrac{d(\vec{A})}{dt} \pm \dfrac{d(\vec{B})}{dt}$
    - $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \dfrac{d(\vec{A})}{dt}\cdot\vec{B} + \dfrac{d(\vec{B})}{dt}\cdot\vec{A}$
    - $\dfrac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \dfrac{d(\vec{A})}{dt}\times\vec{B} + \dfrac{d(\vec{B})}{dt}\times\vec{A}$
- Integral de un vector
  - ($\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$) : $\int(\vec{A}+\vec{B})\,dt = \int\vec{A}\,dt + \int\vec{B}\,dt$
  - ($\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ y λ) : $\int(\lambda\vec{A})dt = \lambda\int\vec{A}\,dt$

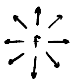
- Operador Nabla $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

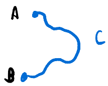
  $\text{grad}\, U = \vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$

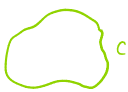
  $\text{div}\, \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)$

  $\overrightarrow{\text{rot}\, F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

- Líneas de campo
  - Sumidero 

  - Fuente 

- Circulación de un campo vectorial
  - $C = \int_{cA}^{B} \vec{F}\, d\vec{l}$ 

  - $C = \int_c \vec{F}\, d\vec{l}$ 

  - Campo conservativo $\oint_c \vec{F}\, d\vec{l} = 0$

- Flujo de campos vectoriales
  - $\Phi = \int_s \vec{F}\, d\vec{s}$
  - Indicador de líneas de campo que atraviesan una superficie
  - Campos solenoidales $\oint \vec{F}\, d\vec{s} = 0$
  - El número de líneas que entran es igual a las que salen

- Teorema de Gauss o Teorema de la divergencia

$$\int_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \oint_S \vec{F}\, d\vec{S}$$

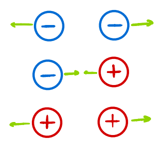
- Teorema de Stokes

$$\int_S \overrightarrow{\operatorname{rot} F}\, d\vec{S} = \int_C \vec{F}\, d\vec{l}$$

2. Campos electroestáticos y fuerzas electroestáticas

Propiedades de las cargas eléctricas

- Principio de Cuantificación de la Carga eléctrica
  - Todas las cargas se presentan en cantidades enteras de la unidad fundamental de la carga
- Principio de Conservación de la Carga
  - La carga neta de un sistema aislado siempre se conserva
- Masa y carga
  - Electrón $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ Kg$ $\quad q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$
  - Protón $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ Kg$ $\quad q_p = +1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$
  - Neutrón $m_n = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ Kg$ $\quad q_n = 0$



Ley de Coulomb

- La fuerza de origen electroestático que dos cargas experimentan es:
  - Está dirigida por la recta que une las dos cargas
- Constante de Coulomb $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
- Permitividad eléctrica en el vacío $\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12}\ \dfrac{C^2}{N m^2}$
- Fuerza eléctrica $\vec{F} = K \dfrac{|q_1 q_2|}{r^2}\vec{u} = q_2 \vec{E}$

Ley acción y reacción

- $\vec{F}_{21} = K \dfrac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$
- $\vec{F}_{21} = K \dfrac{q_2 q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

- Principio de superposición

  - $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} (\vec{r}-\vec{r}_i)$

- Campo electroestático

  - $\vec{E} = K \frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} (\vec{r}-\vec{r}\,')$ N/C
  - $\vec{F}_e = q_0 \vec{E}$
  - Principio de superposición

    $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} (\vec{r}-\vec{r}_i)$

- Líneas de campo electroestático
  - El número de líneas por unidad de superficie es proporcional al módulo del campo en esa región
  - Las líneas de campo no se pueden cortar

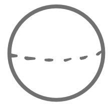
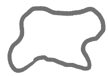
- Campo gravitatorio - electroestático

Característica	Interacción electroestática	Interacción gravitatoria
Propiedad relacionada	Carga (q)	Masa (m)
Carácter de la fuerza	Partículas cargadas	Todas las partículas
Dirección de la fuerza	Atractiva ($q = -q$), repulsiva ($q = q$)	Siempre atractiva
Expresión matemática	$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r$	$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r$
Constante en el vacío	$K_0 = 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$
Dependencia del medio	Depende de la permitividad del mismo	Es una constante universal

Movimiento de partículas cargadas en el seno de un campo electrostático

- $\sum \vec{F} = m\vec{a} \rightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \rightarrow a = \dfrac{q\vec{E}}{m}$
- Campo electrostático uniforme = aceleración constante

Distribuciones continuas de carga

- Densidad volumínica de carga $\rho = \dfrac{Q}{V}$ 
- Densidad lineal de carga $\lambda = \dfrac{Q}{l}$ 
- Densidad superficial de la carga $\sigma = \dfrac{Q}{S}$ 

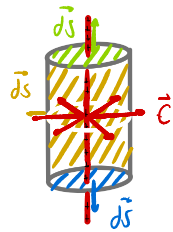
Teorema de Gauss

- $\Phi = \int_S \vec{E}\, d\vec{S}$
- $\Phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$$\frac{q}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E}\, d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\vec{E}\, dV = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, dV \rightarrow \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Ejemplo. Campo electrostático de un hilo cargado. Teorema de Gauss

A partir de la simetría de la distribución de la carga, sabemos que las líneas de campo salen radialmente del hilo (suponiendo λ positivo).



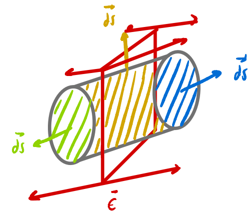
$$\Phi = \oint \vec{E}\, d\vec{S} = \int_{sup\ lat} \vec{E}\, d\vec{S} + \cancel{\int_{base\ 1} \vec{E}\, d\vec{S}} + \cancel{\int_{base\ 2} \vec{E}\, d\vec{S}} = \int_{sup\ lat} E\, dS \cos 0°$$

La superficie es un cilindro de radio R y longitud l ($\Phi = E\, 2\pi R l$)

Aplicando el teorema de Gauss

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= E\, 2\pi R l \\ \Phi &= \frac{q}{\varepsilon_0} \end{aligned}\right\} E = \frac{q}{\varepsilon_0 2\pi R l} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi R} \rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi R}\vec{u}_r$$

Ejemplo. Campo electroestático creado por una superficie



A partir de la simetría de la distribución de la carga, sabemos que las líneas de campo salen radialmente del hilo (suponiendo λ positivo).

$$\Phi = \oint \vec{E}\,\vec{dS} = \int_{sup\ ext} \vec{E}\,\vec{dS} + \int_{base\ 1} \vec{E}\,\vec{dS} + \int_{base\ 2} \vec{E}\,\vec{dS} = 2\int_{cara} E\,dS = 2ES$$

Aplicando el teorema de Gauss

$$\left.\begin{array}{l} \Phi = 2ES \\ \Phi = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

3. Potencial electroestático

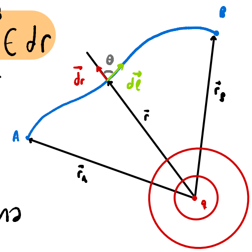
Potencial electroestático

- Trabajo: $dW = \vec{F}\,\vec{dl} = q_0 \vec{E}\,\vec{dl}$
- Energía potencial: $dU = -dW = -\vec{F}\,\vec{dl} = -q_0 \vec{E}\,\vec{dl}$
- Potencial electroestático: $dV = \frac{dU}{q_0} = -\vec{E}\,\vec{dl}$

Potencial electroestático debido a cargas puntuales

- Variación de energía potencial por unidad de carga del sistema carga-campo entre dos puntos: $\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\,\vec{dl} = -\int_A^B E\,\underbrace{dl\cos\theta}_{dr} = -\int_A^B E\,dr$

$$= -\int_A^B \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$



- Potencial en un punto: Trabajo requerido para trasladar una partícula desde el infinito hasta dicho punto: $\Delta V = V_\infty - V_r$

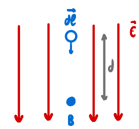
$$= -\int_r^\infty \vec{E}\,\vec{dl} = -\int_r^\infty E\,dl\cos\theta = -\int_r^\infty E\,dr = -\int_r^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\overset{0}{\cancel{\frac{1}{r_\infty}}} - \frac{1}{r}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- Principio de superposición: $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$
- Depende únicamente de las cargas que crean el campo

- Superficies equipotenciales
  - Lugar geométrico de los puntos del espacio en los que la función potencial toma el mismo valor
  - Dos superficies equipotenciales no se pueden cortar
  - Son perpendiculares a las líneas de campo
  - Se dirigen en dirección de los potenciales decrecientes
  - q_0 se acelera en la dirección del campo
  - La carga se mueve hacia la región de menor energía potencial.

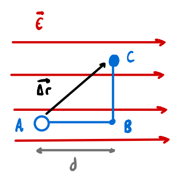
Ejemplo. Diferencia de potencial en un campo electrostático uniforme

1. $\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_A^B E\, dl \cos\theta = -\int_A^B E\, dl = -Ed$



2. $\Delta V = V_C - V_A = -\int_A^C \vec{E}\, d\vec{l} = -\vec{E}\int_A^C d\vec{l} = -\vec{E}\,\vec{\Delta r}$

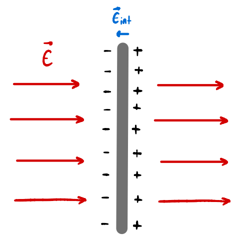
$= -|\vec{E}||\vec{\Delta r}|\cos\theta = -Ed = V_B - V_A$



- Potencial electrostático debido a distribuciones continuas de carga
  - Principio de superposición (No valido con cargas al ∞) $V = \int K \frac{dq}{r}$
  - Definición de potencial $dV = -\vec{E}\, d\vec{l}$

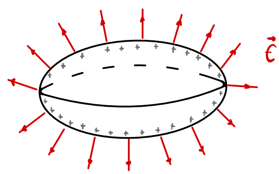
- Campo electrostático a partir del potencial
  - $dV = -\vec{E}\,d\vec{l} = -E_i\,dl \rightarrow \boxed{E_i = -\frac{dV}{dl}}$
    - $\vec{E} = E_x \vec{i}$
      - $dV(x) = -\vec{E}\,d\vec{l} = -E_x \vec{i}\,(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}) = -E_x\,dx \rightarrow \boxed{E_x = -\frac{dV(x)}{dx}}$
    - $\vec{E} = E_y \vec{j}$
      - $dV(y) = -\vec{E}\,d\vec{l} = -E_y \vec{j}\,(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}) = -E_y\,dy \rightarrow \boxed{E_y = -\frac{dV(y)}{dy}}$
    - $\vec{E} = E_z \vec{k}$
      - $dV(z) = -\vec{E}\,d\vec{l} = -E_z \vec{k}\,(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}) = -E_z\,dz \rightarrow \boxed{E_z = -\frac{dV(z)}{dz}}$
  - El campo electrostático deriva del potencial a través del gradiente: $\boxed{\vec{E}(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k} = -\vec{\nabla} V}$

- Campo electroestático en un conductor
  - Los conductores están en equilibrio electroestático.
  - El campo electroestático es nulo en el interior de un conductor
  - La carga neta está distribuida por su superficie
  - El campo electroestático exterior es perpendicular a la superficie y de módulo $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S\varepsilon_0}$



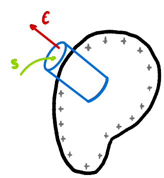
  - Son superficies equipotenciales
  - Campo potencial electroestático en un conductor $\vec{E}_T = \vec{E} - \vec{E}_{int}$
  - Carga neta sobre la superficie

$$\left.\begin{array}{l} - \ \Phi = \oint \vec{E}\, d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \\ - \ \vec{E} = 0 \end{array}\right\} Q = 0$$



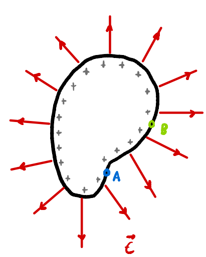
  - Carga electroestática exterior perpendicular a la superficie y de módulo constante

$$\left.\begin{array}{l} - \ \Phi_E = \oint \vec{E}\, d\vec{l} = ES \\ - \ \Phi_E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



  - Para comprobar que son superficies equipotenciales

$$\left.\begin{array}{l} - \ \vec{E} \perp d\vec{l} \rightarrow \vec{E}\, d\vec{l} = 0 \\ - \ V_B - V_A = \int_A^B \vec{E}\, d\vec{l} \end{array}\right\} V_B - V_A = 0 \rightarrow V_A = V_B \longrightarrow V \text{ constante}$$



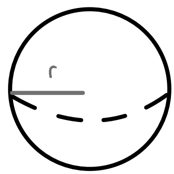
4. Energía electroestática y capacidad

- **Capacidad de un conductor cargado y aislado**
  - Cantidad de carga capaz de albergar en su superficie
  - $C = \frac{Q}{V}$ F
  - Es indepenciente a la carga y diferencia del potencial
  - Depende de la forma y tamaño del conductor

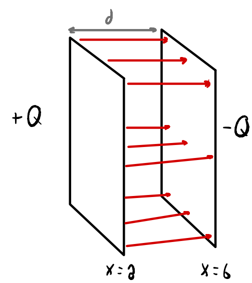
Ejemplo. Capacidad de un conductor esférico

$$\left.\begin{aligned} V &= -\int \vec{E}\, d\vec{l} \\ \vec{E} &= \frac{KQ}{r^2}\vec{u}_r \end{aligned}\right\} V = \int K\frac{dQ}{r} = K\frac{Q}{r}$$

$$\left.\begin{aligned} V &= K\frac{Q}{r} \\ C &= \frac{Q}{V} \end{aligned}\right\} C = \frac{Q}{\frac{KQ}{r}} = \frac{r}{K} = 4\pi r \varepsilon_0$$



- **Sistema binario: Condensador**
  - Conjunto de conductores A y B iguales y proximos que reciben cargas iguales y opuestas



- $C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{Q}{V_a - V_b}$
- $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \rightarrow \Delta V = V_A - V_B = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$

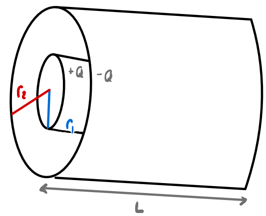
$$\rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Qd}{\varepsilon_0 A}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Ejemplo. Un cable coaxial con radio interior r_1 y exterior r_2. De longitud L m. Considerar como condensador cilíndrico.

$$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \int E\,ds\cos\theta = E\,2\pi r_2 l \rightarrow E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l} \rightarrow \Delta V = \int_a^b E\,dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\int_a^b \frac{1}{r}$$

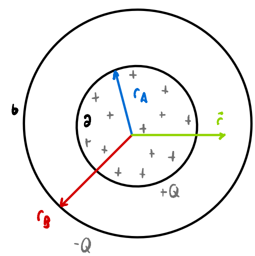
$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}(\ln b - \ln a) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a} \rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{E\,2\pi\varepsilon_0 r l}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}}$$

$$= \frac{2\pi\varepsilon_0 r l}{E r\ln\frac{b}{a}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{b}{a}}$$



- Capacidad de un condensador esférico

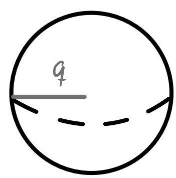
- $\vec{E} = \frac{KQ}{r^2}\vec{u}_r \rightarrow -\Delta V = V_a - V_b = \int E\,dl = \int_A^B K\frac{Q}{r^2}\,\vec{dr} = KQ\int_A^B \frac{dr}{r^2} = KQ\left(\frac{r_B - r_A}{r_B r_A}\right)$
- $C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{KQ\left(\frac{r_B - r_A}{r_B r_A}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_B r_A}{r_B - r_A}$



- Energía total almacenada

- $C = \frac{q}{V} \rightarrow V = \frac{q}{C}$
- $dU = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq$

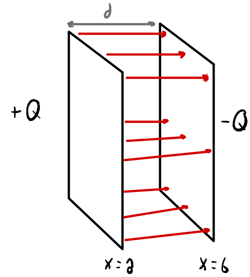
$$U = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{C^2V^2}{2C} = \frac{CV^2}{2}$$



Energía total electrostática almacenada en un condensador

- $U = \dfrac{CV^2}{2}$
- $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{d}$
- $\Delta V = Ed$

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 S}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{E^2 S d \varepsilon_0}{2} = \frac{E^2 \varepsilon_0 \overset{\text{volumen}}{V}}{2}$$



Densidad de energía

- $u = \dfrac{U}{Sd} = \dfrac{U}{V} = \dfrac{E^2 \varepsilon_0}{2}$ $\quad \dfrac{J}{m^3}$
- Es la energía potencial almacenada por unidad de volumen

Asociación de condensadores

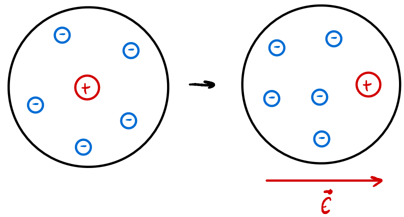
- En paralelo
  - La diferencia de potencial entre las placas es la misma
  - La carga total es $Q_T = Q_1 + Q_2 + \ldots$
    - $Q_1 = C_1 \Delta V$
    - $Q_2 = C_2 \Delta V$

    $\Rightarrow Q = C_{eq} \Delta V$
  - Capacidad equivalente $C_{eq} \Delta V = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V \rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots$

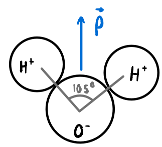
- En serie
  - La carga almacenada es igual en todas las placas
  - $\Delta V = V_A - V_B = V_1 + V_2 = Q\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right)$
  - $C_{eq} = \dfrac{Q}{\Delta V} \rightarrow \Delta V = \dfrac{Q}{C_{eq}}$
  - Capacidad equivalente $\dfrac{1}{C_{eq}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \ldots$

Dieléctricas

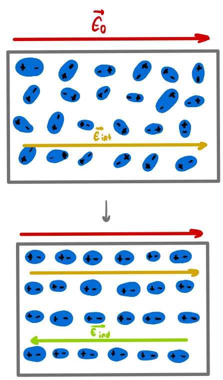
- Dipolos inducidos
  - Un átomo posee un núcleo positivo y una nube de electrones con carga negativa
  - El núcleo se ve desplazado en el sentido del campo y los electrones en sentido contrario
  - El átomo se encuentra polarizado



- Alineamiento de moléculas polares
  - Algunas moléculas presentan un momento dipolar no nulo en ausencia de un campo eléctrico externo
  - Ante un campo eléctrico externo estas moléculas polares tienden a girar de forma que su momento dipolar quede paralelo al campo

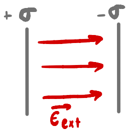


- Polarización
  - Materiales no polares
    - Aparece en cada átomo un momento dipolar paralelo al campo eléctrico
  - Materiales polares
    - Cada molécula experimenta un momento de fuerzas que tiende a alinearlas con el campo
      - La alineación no es perfecta por la agitación térmica

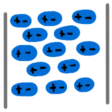


  - En ambos tenemos un dieléctrico polarizado
  - $\vec{E}_{int} = \vec{E}_0 - \vec{E}_{ind} = \dfrac{\vec{E}_0}{K_r}$
  - Constante de permeabilidad $K_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

Ejemplo. Comparación condensadores vació - dieléctrico



$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \\ C_{vacio} &= \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{Q}{E d} \end{aligned}\right\} C_{vacio} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$



$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Q}{\varepsilon A} \\ C_{dielec} &= \frac{Q}{V_{AB}} = \frac{Q}{E d} \end{aligned}\right\} C_{dieléctrico} = \varepsilon \frac{A}{d}$$

$$\frac{C_{dieléctrico}}{C_{vacío}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = K_r$$

- Densidad de energía dieléctrico $u = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$

5. Corriente eléctrica. Electrocinética

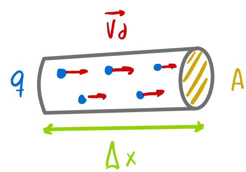
- Corriente eléctrica = Flujo ordenado de carga
- Tipos de corriente eléctrica
  - Transitoria
  - Permanente
    - Continua
    - Alterna
- Electrocinética: movimientos de cargas eléctricas
  - Sólidos
    - Conductores: metales (materiales ohmicos)
    - Semiconductores: diodos, transistores...
    - Aislantes
  - Líquidos (Iones)
    - Electrolisis
    - Pilas
  - Gases
    - Gases ionizados
    - Plasma

- Intensidad de corriente
  - $I_{media} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ A/t
  - $I = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \dfrac{dQ}{dt}$ A
  - Intensidad de un hilo de corriente
    - $\Delta Q = (n A \Delta x_e) q$
    - $\Delta x_d = v_d \Delta t$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta Q = (n A \Delta x_e)\, q \\ \Delta x_d = v_d \Delta t\end{array}\right\} \Delta Q = n A v_e \Delta t\, q \rightarrow I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n A v_e q$$

- Densidad de corriente
  - $\vec{j} = nq\vec{v}_d$
  - $A = S = |\vec{S}|$
  - $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = n q v_d A \rightarrow d I = n q \vec{v}_d A\, d\vec{S}$

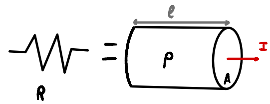
$$\left.\begin{array}{l}\vec{dI} = \vec{j}\, \vec{dS} \rightarrow \\ I = \int dI = \int \vec{j}\, d\vec{S} = j\, S \cos\alpha \\ \rightarrow \text{Como } j \parallel S \rightarrow I = j S\end{array}\right.$$



Conductividad

- Resistencia y ley de Ohm
  - $J = \sigma E_r \rightarrow \frac{J}{\sigma} = E_{ext} \rightarrow \frac{I}{A\sigma} n\, dl = E_{ext}\, dl \rightarrow n \parallel dl$

    $\rightarrow \int_1^2 \frac{I}{A\sigma} dl = \int_1^2 E_{ext}\, dl = \mathcal{E} = \phi_1 - \phi_2$
- Resistividad $R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{A} = \rho \frac{l}{A} \rightarrow \rho = \frac{1}{\sigma}$



- Ley de Ohm $I = \frac{V_a - V_b}{R}$

Efecto Joule

- $W_i^f = q(V_i - V_f)$
- Trabajo realizado por el campo $dW = dq\,(V_i - V_f)$
- Potencia suministrada al circuito para mantener corriente
  - $P = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}(V_i - V_f) = I(V_i - V_f)$ W
- Potencia disipada por la resistencia
  - $P = I(V_i - V_f) = \frac{(V_i - V_f)^2}{R} = I^2 R$

- Fuerza electromotriz
  - Un generador de fem es un dispositivo que puede transformar cualquier forma de energía y fuerza eléctrica de forma reversible.
  - $\Delta V = IR$
  - $\Delta V = \varepsilon - Ir$

$$\varepsilon = IR + Ir \rightarrow I = \frac{\varepsilon}{R+r} \xrightarrow{\times I} I^2(R+r) = I\varepsilon$$

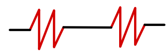
- Fuerza contraelectromotriz
  - Un receptor a un dispositivo que transforma una parte de la energía eléctrica que recibe del circuito en otra forma de energía distinta de la calorífica producida por el efecto Joule (fcem)
  - $\varepsilon' = \dfrac{dW'}{dq}$
  - $P' = \dfrac{dW'}{dt} = \dfrac{dW'}{dq}\dfrac{dq}{dt} = \varepsilon' I$
  - $P_1 = I^2 r'$
  - $P = (V_A - V_B) I$

$$(V_A - V_B) I = I^2 r' + \varepsilon' I$$

$$(V_A - V_B) = Ir' + \varepsilon'$$

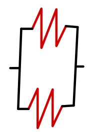
- Asociación de resistencias en serie
  - $\Delta V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)$
  - $\Delta V = I R_{eq}$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta V = IR_1 + IR_2 = I(R_1+R_2) \\ \Delta V = I R_{eq} \end{array}\right\} R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots$$



- Asociación de resistencias en paralelo

$$\left.\begin{array}{l} I = I_1 + I_2 = \dfrac{\Delta V}{R_1} + \dfrac{\Delta V}{R_2} \\ I = \dfrac{\Delta V}{R_{eq}} \end{array}\right\} \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$$



- Carga de un condensador
  - Un condensador está inicialmente descargado $V_\varepsilon - IR - \frac{q}{C} = 0$
  - Derivando respecto al tiempo para obtener carga e intensidad

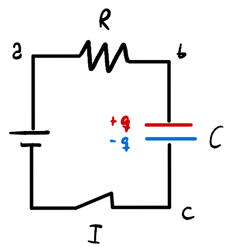
$$-R\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

  - Integrando obtenemos $\displaystyle\int_{I_0}^{I} \frac{dI}{I} = \int_{t_0}^{t} -\frac{1}{RC}\,dt \rightarrow I_0 = \frac{V_\varepsilon}{R}$

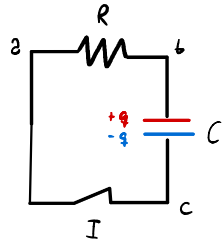
$$\rightarrow \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -\frac{t}{RC} \rightarrow I = \frac{V_\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

  - Como $t_0 = 0$ $\quad q(t) = \displaystyle\int_0^t I\,dt = V_\varepsilon C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

$$\rightarrow i = \frac{dq}{dt} = \frac{V_\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$



- Descarga de un condensador



  - Un condensador está inicialmente cargado $\boxed{IR = \frac{q}{C}}$

$\rightarrow I = -\frac{dq}{dt} \rightarrow \boxed{-R\frac{dq}{dt} = \frac{q}{C}}$

  - Integrando al igual que en la carga obtenemos

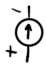
$\boxed{q = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}} \rightarrow \boxed{i = -\frac{dq}{dt} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$

- Leyes de Kirchoff
  - Regla de los nudos
    - Suma de las corrientes que confluyen en un nudo vale 0 (Principio de conservación de la carga).
    - $\Sigma I = 0 \begin{cases} I_n > 0 \text{ si } I_n \text{ entra en el nudo} \\ I_n < 0 \text{ si } I_n \text{ sale del nudo} \end{cases}$
  - Reglas de las mallas
    - Suma de las $\mathcal{E}$ en una malla es igual a la suma de los productos IR en la malla
    - $0 = IR - \Sigma \mathcal{E} \rightarrow \Sigma \mathcal{E} = I \Sigma R$

- Resolver circuitos
  - Le asignamos una letra a cada nudo
  - Se dibujan las intensidades en cada rama/malla, asignando sentidos al azar
  - Se aplica la 1° ley de Kirchoff o la ley de corrientes en todos los nudos meno 1
  - Se aplica la 2° ley de Kirchoff o la ley de tensiones en todas las mallas
  - Si la intensidad en rama coincide con el de malla, IR es positivo, si es opuesto, negativo
  - Tendremos tantas ecuaciones como números de intensidades, resueltas por sustitución o Cramer
  - Los resultados positivos tendrán el mismo sentido que el asignado inicialmente, los negativos, el contrario (debemos cambiarlo)
  - Ya podemos hacer el balance de potencias y contestar el análisis sobre el circuito.

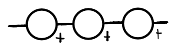
6. Método de análisis de Circuitos

Fuentes y generadores

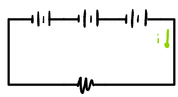
- Elementos activos de un circuito encargadas de suministrar energía
- Tensión
  - Reales
  - Ideales 
- Intensidad o corriente
  - Reales
  - Ideales 

Asociación de fuente

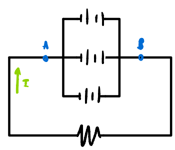
- De tensión
  - Ideales en serie $V_T = \sum V_i$



  - Reales (idénticas) en serie
    - $I = \dfrac{n\mathcal{E}}{R + nr}$ $\begin{cases} \mathcal{E}_{eq} = n\mathcal{E} \\ r_{eq} = nr \end{cases}$

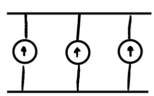


  - Reales (idénticas) en paralelo
    - $V_A - V_B = \mathcal{E} - \dfrac{Ir}{n} = RI \rightarrow I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + \frac{r}{n}}$ $\begin{cases} \mathcal{E}_{eq} = \mathcal{E} \\ r_{eq} = \frac{r}{n} \end{cases}$



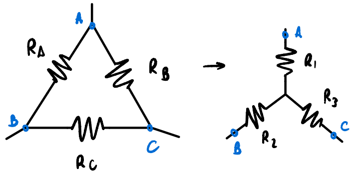
Asociación de fuentes de corriente

- $i_T = \sum i_i$



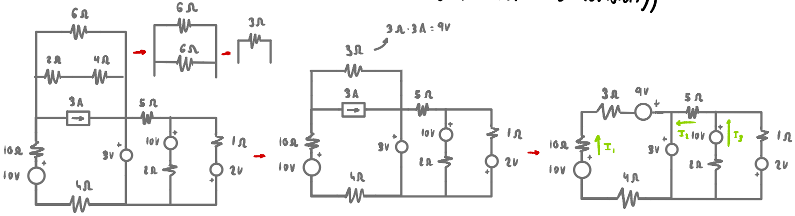
Transformación triángulo de resistencia

- $R_1 = \dfrac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_B}$
- $R_2 = \dfrac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_B}$
- $R_3 = \dfrac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_B}$



Método de resolución de mallas

- (Fuentes de tensión o reales de intensidad (convertir a tensión))



$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & R_{12} & R_{13} \\ V_2 & R_{22} & R_{23} \\ V_3 & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{272}{289} = 0{,}94\ A$$

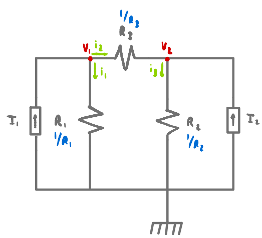
$$P_{4\Omega} = I_1^2 R = 0{,}94^2 \cdot 4 = 3{,}5344\ W$$

Método de tensiones de nudos

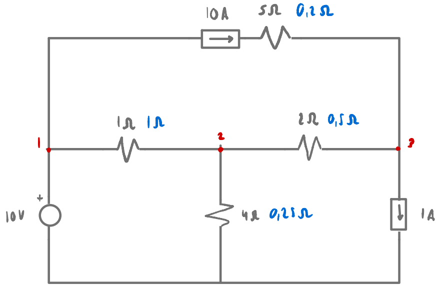
- (Fuentes ideales de intensidad)

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/R_{11} & 1/R_{12} \\ 1/R_{21} & 1/R_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} i_1 & G_{12} \\ i_2 & G_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix}}$$



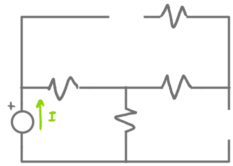
Principio de superposición



$$i_4 = \frac{V}{R} = \frac{3{,}75\uparrow}{4} = 0{,}93\ A\uparrow$$

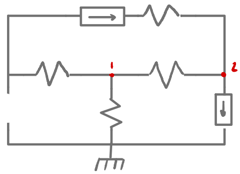
$$I_{T_4} = I + i_4 = 2 - 0{,}93 = 1{,}07\ A\downarrow$$

1. Eliminamos las fuentes de intensidad



$$I = \frac{V}{R} = \frac{10}{4+1} = 2A\downarrow$$

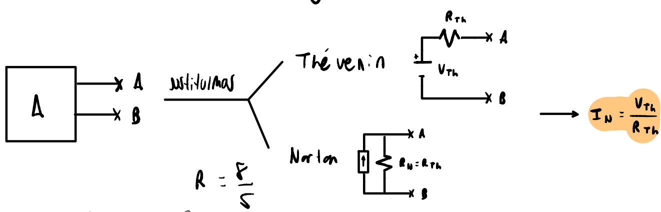
2. Eliminamos las fuentes de tensión



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}75 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

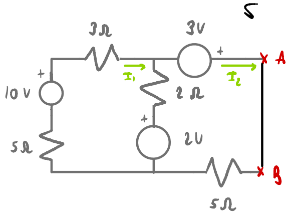
$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -0{,}5 \\ 9 & 0{,}7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1{,}75 & -0{,}5 \\ -0{,}5 & 0{,}7 \end{vmatrix}} = \frac{-4{,}5}{1{,}2} = -3{,}75\,V\downarrow$$

Método de Thévenin y Norton



$$\rightarrow I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}}$$

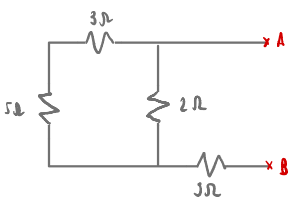
$$R = \frac{8}{5}$$

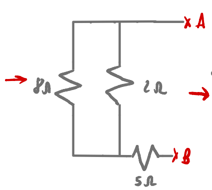


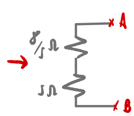
$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = I_N = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 8 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{34}{66} = \frac{17}{33} = 0{,}\widehat{51}\ A$$







$$R_N = R_{Th} = \frac{8}{5} + 5 = 6{,}6\ \Omega$$

$$I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} \rightarrow V_{Th} = I_N R_{Th} = 0{,}51 \cdot 6{,}6 = 3{,}366\ V$$

Extra

- Diferencia de potencial en un campo electrico

$$\Delta V = -\int \vec{E}\, d\vec{s} = -\int_A^B K \frac{q}{r^2}\, d\vec{r} = -Kq \int_A^B \frac{1}{r^2}\, d\vec{r} = Kq \left[\frac{1}{r}\right]_A^B = Kq\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

- Capacidad de un campo eléctrico

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{q}{Kq\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)} = \frac{1}{K\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)} = \frac{1}{K\left(\frac{r_A - r_B}{r_B r_A}\right)} = \frac{r_B r_A}{K(r_A - r_B)} = \frac{r_A r_B}{4\pi \varepsilon_0 (r_A - r_B)}$$