Boletines de Alfonso

Sesión 2

1- a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$ Para que sea biyectiva, tiene que ser inyectiva y sobreyectiva.

Inyectividad: Supongamos que $f(a) = f(b)$ $\xrightarrow{\text{Solo pasa si } a=b}$

$$f(a) = \frac{2a+1}{3a-1} \qquad f(b) = \frac{2b+1}{3b-1}$$

$$\frac{2a+1}{3a-1} = \frac{2b+1}{3b-1} \rightarrow 2a+1(3b-1) = 2b+1(3a-1)$$

$$6ab - 2a + 3b - 1 = 6ab - 2b + 3a - 1$$

$$-2a + 3b = -2b + 3a$$

$$5b = 5a$$

Por lo tanto es inyectiva $\leftarrow$ $\boxed{b = a}$

Sobreyectividad: Supongamos que $f(a) = b$

$$f(a) = \frac{2a+1}{3a-1} = b \xrightarrow{\text{Despejo } a} 2a+1 = 3ab - b$$

$$2a - 3ab = -b - 1$$

$$3ab - 2a = b + 1$$

$$a(3b-2) = b+1$$

$$a = \frac{b+1}{3b-2}$$

Por lo tanto

$$f(a) = f\left(\frac{b+1}{3b-2}\right) = b$$

$$\rightarrow \frac{2\left(\frac{b+1}{3b-2}\right)+1}{3\left(\frac{b+1}{3b-2}\right)-1} = b \rightarrow \frac{2b+2}{3b-2} + 1 = \frac{3b^2+3b}{3b-2} - b$$

$$2b + \cancel{2} + \cancel{3b} - \cancel{2} = \cancel{3b^2} + \cancel{3b} - \cancel{3b^2} + 2b$$

f es sobreyectiva $\leftarrow$ $f(a) = b = b$ $\leftarrow$ $2b = 2b$

→ Por lo tanto f $\boxed{\text{es biyectiva}}$ y admite inversa.

La inversa de la función es:

- Hacemos cambio de y por x → $x = \dfrac{2y+1}{3y-1}$;

- Despejamos y → $y = \dfrac{x+1}{3x-2}$.

La inversa es $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{3x-2}}$

b) $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}+3\right)$ Para que sea biyectiva debe ser inyectiva y sobreyectiva.

Inyectividad: Supongamos $f(a) = f(b) \xrightarrow{\text{solo pasa si}} a = b$

$$f(a) = \tan\left(\frac{a}{2}+3\right) \qquad \tan\left(\frac{a}{2}+3\right) = \tan\left(\frac{b}{2}+3\right)$$

$$f(b) = \tan\left(\frac{b}{2}+3\right) \qquad \arctan\left(\tan\left(\frac{a}{2}+3\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{b}{2}+3\right)\right)$$

$$\frac{a}{2}+\cancel{3} = \frac{b}{2}+\cancel{3}$$

f es inyectiva. $\leftarrow a = b$

Sobreyectividad: Supongamos $f(a) = b \Rightarrow$

$$f(a) = \tan\left(\frac{a}{2}+3\right) = b$$

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{a}{2}+3\right)\right) = \arctan(b)$$

$$\frac{a}{2} = \arctan(b) - 3 \rightarrow \underline{a = 2\arctan(b) - 6}$$

Por lo tanto

$$f(a) = f(2\arctan(b) - 6) = \tan\left(\frac{2\arctan(b)-6}{2}+3\right) = b$$

$$\hookrightarrow \tan\left(\frac{\cancel{2}\arctan(b)}{\cancel{2}} - \cancel{\frac{6}{2}} + \cancel{3}\right) = b$$

$$\tan(\arctan(b)) = b$$

$$\arctan(\tan(\arctan(b))) = \arctan(b)$$

f es sobreyectiva $\leftarrow b = b$

Y por lo tanto f $\boxed{\text{es biyectiva}}$. Y su inversa es:

$$x = \tan\left(\frac{y}{2}+3\right) \rightarrow \arctan x = \arctan\left(\tan\left(\frac{y}{2}+3\right)\right)$$

$$y = 2\arctan(x) - 6$$

Por lo que $\boxed{f^{-1}(x) = 2\arctan(x) - 6}$

2- (SIN USAR L'HÔPITAL)

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}\right) = \infty - \infty$ (INDETERMINACIÓN)

- Multiplico y divido por el conjugado:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}\right)} =$$

- El numerador es identidad notable $\rightarrow [(a+b)(a-b) = a^2-b^2]$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}+\sqrt{x} - \cancel{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}} =$$

- Sacamos factor común de $\sqrt{x}$ en el denominador:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}} + \sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{x}}}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{0}} + \sqrt{1-\sqrt{0}}} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

b) $\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \frac{0}{0}$ (INDETERMINACIÓN) =

$$\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} \cdot \frac{2+\sqrt{x-3}}{2+\sqrt{x-3}} = \frac{4-x+3}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})} \rightarrow$$

$$\lim_{x\to 7} \frac{7-x}{(x+7)(x-7)(2+\sqrt{x-3})} = \frac{-\cancel{(x-7)}}{(x+7)\cancel{(x-7)}(2+\sqrt{x-3})} \rightarrow$$

$$\lim_{x\to 7} \frac{-1}{(7+7)(2+\sqrt{7-3})} = \boxed{\frac{-1}{56}}$$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\pi/6 + x) - 1/2}{x} = \frac{0}{0}$ (INDETERMINACIÓN) $=$

↳ Sabiendo que $sen(a \pm b) = sen(a)\cos(b) \pm \cos(a) sen(b)$

→ $\lim_{x \to 0} \frac{sen(\frac{\pi}{6})\cos(x) + \cos(\frac{\pi}{6}) sen(x) - \frac{1}{2}}{x} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}}{0} = \frac{0}{0}$

(INDETERMINACIÓN)

→ $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}}{2} sen(x) - \frac{1}{2}}{x} = \frac{\cos(x) + \sqrt{3} sen(x) - 1}{2x}$

3- a) $\lim_{x \to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$ cuando nos acercamos a 3 por la izquierda o por la derecha el numerador en cualquier caso va a ser positivo ya que está en V.A.; pero el denominador va a ser positivo y negativo. Esto significa que los límites laterales no coinciden por tanto el límite $\nexists$.

b) $\lim_{x \to 4} E(x-1)$, donde $E(x)$ denota la parte entera de x.

Cuando x se acerca a 4 desde valores ligeramente menores a él; la parte entera de $x-1$ es 2; sin embargo cuando lo hace por la derecha; la parte entera es 3; esto significa que los límites laterales no coinciden y por tanto el límite $\nexists$.

4- Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0}$ → NO LA HE USADO

similar → Generalmente $\lim_{x \to 0} \frac{sen(\alpha x)}{\alpha x} = 1$

Calcula:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3\sin(3x)}{3x} = 3 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \frac{sen^2(x)}{x \cdot x \cdot (1+\cos x)}$

$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos(x)} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

5- Estudia la continuidad:

$$f(x) = \begin{cases} E(|x|), & x \neq 0 \\ 10, & x = 0 \end{cases};$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=0$; se tienen que cumplir tres cosas.

1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$ 2) $\exists f(x_0)$ 3) $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

→) $f(0) = 10$

$\lim_{x \to 0^-} E(|x|) = 0 = \lim_{x \to 0^+} E(|x|)$

$f(0) \neq \lim_{x \to 0} f(x)$

f es discontinua en $x=0$

6- Prueba, usando Bolzano que $\tan(\frac{\pi x}{2}) - \pi x = k$; $k \in \mathbb{R}^+$ para cualquier valor positivo de la constante real k:

El teorema de Bolzano establece que si una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$; y toma valores de distinto signo para $f(a)$ y $f(b)$; entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

Sabemos que la función es continua en intervalos de π; por lo que podemos considerar el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ para probar el teorema.

$f(0) = \tan(0) - 0 = 0$; $f(\frac{\pi}{2}) = \tan(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2}) - |\pi \cdot \frac{\pi}{2}| \simeq -5173\,4$;

Como los valores toman signos opuestos; $\exists c \in [0, \pi/2]$ tal que $f(c) = 0$.

Sesión 3

1- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\hookrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{x} & ; x > 0. \\ \frac{1}{2}x & ; x \leq 0 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) Determinar si $\exists f'(0)$ y calcularlo en caso afirmativo.

a) Para que f sea continua en un punto x_0 se tiene que cumplir que; $\exists \lim\limits_{x \to x_0}$; $\exists f(x_0)$; $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Continuidad en $x=0$;

$f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$;

$\lim\limits_{x \to 0^-} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$; $\lim\limits_{x \to 0^+} = \frac{1-\cos(0)}{0} = \frac{0}{0}$ (Indeterminación)

$\hookrightarrow$ L'Hopital $\to \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1} = \frac{0}{1} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \to f$ $\boxed{\text{es continua en } x=0}$.

b) Para determinar si $\exists f'(0)$; $f(x)$ tiene que ser derivable en $x=0$.

$f'(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1} & ; x > 0 \\ \frac{1}{2} & ; x \leq 0 \end{cases}$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=0$: $f'(0)^- = f'(0)^+$

$f'(0)^- = \frac{1}{2}$.

$f'(0)^+ = \frac{\operatorname{sen}(0)}{1} = 0$

$\frac{1}{2} \neq 0 \to f$ no es derivable en $x=0$

Así que $\nexists f'(0)$

2-

i) $f(x) = (x^3 - 3x)(x+2)$;

$f'(x) = (3x^2 - 3)(x+2) + (x^3 - 3x)$.

ii) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin x$

$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \sin x + \sqrt{x} \cos x$.

iii) $f(x) = x^3 \cos(x^2)$

$f'(x) = 3x^2 \cos(x^2) + x^3(-2x \operatorname{sen}(x^2))$

iv) $f(x) = \frac{x^2}{\arccos(x)}$

$f'(x) = \frac{2x \arccos(x) - x^2\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\arccos(x))^2}$

v) $f(x) = \frac{\sec^7(x)}{7} - \frac{\sec^5(x)}{5}$

$7\cos^{-7}(x) - 5\cos^{-5}(x)$

$\frac{\frac{1}{\cos^7(x)}}{7} - \frac{\frac{1}{\cos^5(x)}}{5} = \frac{1}{7\cos^7(x)} - \frac{1}{5\cos^5(x)}$

$f'(x) = -49\cos^{-8}(x) + 25\cos^{-6}(x) = -49\sec^8(x) + 25\sec^6(x)$.

vi) $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\Rightarrow f'(x) = 3\sqrt{x^2+1} - 3x\left[2x(x^2+1)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2}\right]$

3- a) Calcula la derivada $f^{(50)}(x)$ de $f(x) = \cos(2x)$.

$f'(x) = -2\operatorname{sen}(2x)$
$f''(x) = -4\cos(2x)$
$f'''(x) = 8\operatorname{sen}(2x)$
$f''''(x) = 16\cos(2x)$
$f'''''(x) = -32\operatorname{sen}(2x)$
$f''''''(x) = -64\cos(2x)$
$f'''''''(x) = 128\operatorname{sen}(2x)$
$f''''''''(x) = 256\cos(2x)$

Podemos observar que

$f^{(n)}(x) = 2^n \cdot \operatorname{sen}/\cos(2x)$

$\to$ sen cuando n es impar
$\to$ cos cuando n es par.

Y que cada $2n$ cambia de signo la expresión.

$f^{(50)}(x) = -2^{50}\cos(2x)$

b) Calcula la n-ésima derivada de $f(x) = \frac{x}{e^x}$

$$f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{\cancel{e^x}(1-x)}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$f''(x) = \frac{-e^x - e^x + xe^x}{e^{2x}} = \frac{-2e^x + xe^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-2+x)}{e^{2x}} = \frac{-(2-x)}{e^x}$$

$$f'''(x) = \frac{e^x + 2e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{3e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{\cancel{e^x}(3-x)}{e^{2x}} = \frac{3-x}{e^x}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{-(n-x)}{e^x} \Big/ \frac{n-x}{e^x}$$

↳ Con el signo negativo cuando n es par.
Con el signo positivo cuando n es impar.

(4-) Derivar implícitamente:

a) $\sqrt{xy} - 4y^2 = 12$

1) → Sustituir $y = f(x)$:

$$\sqrt{x \cdot f(x)} - 4 \cdot f^2(x) = 12$$

2) → Derivar a ambos lados:

$$f'(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x f(x)}} - 8 \cdot f(x) \cdot f'(x) = 0$$

3) → Despejar $f'(x)$:

$$f'(x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x f(x)}} - 8 \cdot f(x)\right) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{0}{\sim} = 0$$

4) → Deshacer cambio $y = f(x)$:

$$\boxed{y' = 0}$$

b) $y\sqrt{x} - x\sqrt{y} = 16$

1) $f(x)\sqrt{x} - x\sqrt{f(x)} = 16$

2) $f'(x)\sqrt{x} + f(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{f(x)} - x f'(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$

3) $f'(x)\left(\sqrt{x} + \frac{f(x)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{f(x)} - \frac{x}{2\sqrt{x}}\right) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{0}{\sim}$

4) $\boxed{y' = 0}$

(5-) Estudiar $\left\{ \text{- Monotonía} \quad \text{- Extremos} \quad \text{- Convexidad} \right\}$

a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ $\quad I = \mathbb{R}$

Puntos críticos → $f'(x) = 0$ → $f'(x) = 3x^2 - 10x + 8 = 0$ → $x = \frac{4}{3}$, $x = 2$

$f'(x)>0$ 4/3 $f'(x)<0$ 2 $f'(x)>0$

$-\infty$ ← ↗ ↘ ↗ → $+\infty$

f es creciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty)$

" decreciente " " $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$

Extremos → 4/3 es un máximo local.
2 es un mínimo local.

Convexidad: $f''(x) = 0$ → Puntos de inflexión posibles.

$$f''(x) = 6x - 10 = 0$$

$$x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$f''(x)<0$ 5/3 $f''(x)>0$

cv $\cup$ cx $\cap$

$\left(\frac{5}{3}, f\left(\frac{5}{3}\right)\right)$ es un punto de inflexión.

Sesión 4

(1-) Estudia monotonía, extremos y curvatura de:

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$; $I = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \to -x^2+1=0 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} \to 2x^3-6x=0$$
$$2x(x^2-3)=0 \to x_1=0;\ x_2=+\sqrt{3};\ x_3=-\sqrt{3}.$$

Monotonía: $-\infty$ — $f'(x)<0$ ↘ — -1 — $f'(x)>0$ ↗ — 1 — $f'(x)<0$ ↘ — $+\infty$

f es creciente en el intervalo $(-1,1)$.
" decreciente " " $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Extremos: $(-1, f(-1))$ es un mínimo local.
$(1, f(1))$ es un máximo local.

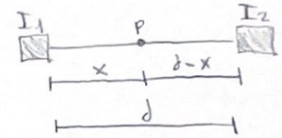
Curvatura: Puntos posibles de inflexión $\to x=0$; $x=+\sqrt{3}$; $x=-\sqrt{3}$

$-\infty$ — $f''(x)<0$ — $-\sqrt{3}$ — $f''(x)>0$ — 0 — $f''(x)<0$ — $\sqrt{3}$ — $f''(x)>0$ — $+\infty$
CV ∪ — CX ∩ — CV ∪ — CX ∩

f es convexa en el intervalo $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$.
" cóncava " " $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$.

(Igual para los demás apartados).

(2-)



$I_T = I_1 + I_2$

$f(x) = \frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(d-x)^2}$ ← Función de iluminación (Directamente proporcional a la intensidad / Inversamente proporcional a la distancia)

$f'(x) = \frac{I_2\cdot 2}{(d-x)^3} - \frac{I_1\cdot 2}{x^3} \to$ Igualamos a 0

$\to \frac{I_2\cdot \cancel{2}}{(d-x)^3} = \frac{I_1\cdot \cancel{2}}{x^3} \to \frac{I_2}{I_1} = \frac{(d-x)^3}{x^3}$

$\to$ Raíz cúbica de todo:

de. $= \sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}} = \frac{d-x}{x} \to x\left(\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}\right) = d-x$

Despejamos la x (distancia):

$\to x + x\left(\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}\right) = d \to x\left(1+\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}\right) = d$

$\to \boxed{x = \frac{d}{\left(1+\sqrt[3]{\frac{I_2}{I_1}}\right)}}$ Es el único punto donde se anula $f'(x)$.

Ese es el punto a minimizar; siendo $x=0$ la posición de I_1 y $x=d$ la de I_2; la solución es esa.

3-

$C(x) = 2x + \frac{200000}{x}$

TE AMO ♥ MUCHO

$C'(x) = 2 + \frac{-300000}{x^2} = \frac{2x^2 - 300000}{x^2}$

$2x^2 - 300000 = 0$

$x^2 = 150000$

$x = \pm 387{,}3$ uds. → (Descartamos la raíz negativa)

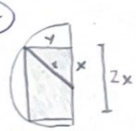
$x = 387{,}3$ uds.

1) Como el máximo volumen de pedido era de $\boxed{300 \text{ uds.}}$ Esas son las uds que minimizan el costo.

$f''(x) = \frac{600000}{x^3}$. $f''(387{,}3) > 0$ → mínimo.

2) En el caso de que el camion sí que pueda llevar 400 uds. El pedido que minimizaría el costo sería $\boxed{387{,}3 \text{ uds.}}$

4-



C.L.: $10^2 = y^2 + x^2$ → $y = \sqrt{100 - x^2}$

F.O.: $f(x,y) = 2xy$ } $f(x) = 2x\sqrt{10^2 - x^2}$

$f'(x) = 2\sqrt{100-x^2} + 2x \frac{1}{2}\frac{(-2x)}{\sqrt{100-x^2}} =$

$= 2\sqrt{100-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{2(\sqrt{100-x^2})^2 - 2x^2}{\sqrt{100-x^2}} =$

→ Igualamos a cero → $f'(x) = 0$ → $2(100 - x^2) - 2x^2 = 0$

$200 - 2x^2 - 2x^2 = 0$

$100 - x^2 - x^2 = 0$

$100 = 2x^2$ → $50 = x^2$

$\boxed{x = \pm\sqrt{50}}$ → Descarto raíz negativa.

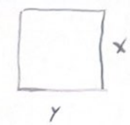
→ $f''(x) = -\frac{600x + 4x^3}{\sqrt{100-x^2}\,(100-x^2)}$

$f''(\sqrt{50}) = \frac{-600(\sqrt{50}) + 4(\sqrt{50})^3}{\sqrt{100-\sqrt{50}^2}\,(100-\sqrt{50})} \simeq -4{,}3 < 0$

Por lo tanto las dimensiones del rectangulo de mayor area son Lado 1 $= y = \sqrt{100 - (\sqrt{50})^2} = \sqrt{50} = \boxed{5\sqrt{2}}$

Lado 2 $= 2x = 2\sqrt{50} = \boxed{10\sqrt{2}}$

5-



C.L.: $P = 2x + 2y$ → Perímetro = cte.

F.O.: $f(x,y) = xy$ } $f(x) = x\left(\frac{P - 2x}{2}\right)$

$f'(x) = \frac{P - 4x}{2}$ → $f'(x) = 0$ → $\frac{P-4x}{2} = 0$ → $4x = P$ $\boxed{x = \frac{P}{4}}$

$f''(x) = \frac{1}{2}(-4) = -2$ → (Siempre negativa) → Máximiza.

Por lo tanto $x = \frac{P}{4}$ $y = \frac{P - 2\frac{P}{4}}{2} = \frac{P - \frac{P}{2}}{2} = \frac{2P - P}{4} = \frac{P}{4}$

$\boxed{\text{Lados iguales } x = y = \frac{P}{4}}$

6-

$f(x) = 1/x$ Nodos → $x_0 = 1$, $x_1 =$

Hallar el error máximo al estimar f en

Nodos → $(1,1)$; $(2{,}5\ ,\ 0{,}4)$ y $(4,$

Interpolación polinómica

$P(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \dots L_n(x)y_n$

Donde:

$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Por ejemplo: con 3 nodos: x_0, x_1, x_2

$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}$ $L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$

$P(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + L_2(x)y_2$

$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{(x - 2{,}5)}{(1 - 2{,}5)} \cdot \frac{(x-4)}{(1-4)} = \frac{2x^2 - 13x + 20}{9}$

$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{(x-1)}{(2{,}5-1)} \cdot \frac{(x-4)}{(2{,}5-4)} = -\frac{4x^2 - 20x + 16}{9}$.

$L_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{(x-1)}{(4-1)} \cdot \frac{(x - 2{,}5)}{(4 - 2{,}5)} = \frac{2x^2 - 7x + 5}{4}$.

$P(x) = \left(\frac{2x^2 - 13x + 20}{9}\right) \cdot 1 + \left(-\frac{4x^2 - 20x + 16}{9}\right) \cdot \frac{2}{5} + \left(\frac{2x^2 - 7x + 5}{9}\right) \cdot \frac{1}{4} =$

$P(x) = \frac{2x^2 - 15x + 33}{20}$.

Sesión 5

1-

x	0.5	0.6	0.7
f(x)	0.4794	0.5646	0.6442

Siendo $h = 0{,}1$; que es el intervalo entr...

- Derivada progresiva:

$$f'(0{,}6) \approx \frac{f(0{,}6+0{,}1) - f(0{,}6)}{0{,}1} = \ldots$$

- Derivada regresiva:

$$f'(0{,}6) \approx \frac{f(0{,}6) - f(0{,}6-0{,}1)}{0{,}1} = \frac{0.5646 - 0.4794}{0{,}1} = \boxed{0.852}$$

Derivadas progresiva y regresiva

- Progresiva:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Regresiva:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

siendo h el interv... cada x que me da

2-

Sea: $x^3 - x = 1$.

a) Para determinar un intervalo de $\mathbb{R}$ para el que la ecuación tenga solo una solución podemos usar el teorema de rolle y Bolzano.

Consideramos la ecuación $f(x) = x^3 - x - 1$;

Consideremos el intervalo $[1,2] \to \mathbb{R}$. Si $f(1)$ tiene distinto signo que $f(2)$; aseguramos que existe al menos una solución c en el intervalo (a,b) tal que $f(c) = 0$.

$$\begin{cases} f(1) = -1 < 0 \\ f(2) = 5 > 0 \end{cases}$$ Por lo tanto existe al menos un $c \in (1,2)$ tal que $f(c) = 0$.

¿Como aseguramos que no existen dos soluciones en este intervalo? Segun el teorema de rolle; si existieran dos soluciones a y b en un intervalo; en este caso (1,2) tal que $1 < a < b < 2$. Como $f(a) = f(b) = 0$; tiene que existir un $k \in (a,b)$ tal que $f'(k) = 0$; ya que en algun momento, necesariamente la pendiente de la recta tangente a k vale 0. De esta forma $1 < a < k < b < 2$. Es decir: $f'(k) = 3k^2 - 1 = 0 \to k_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $k_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; lo cual no es posible ya que las soluciones no pertenecen al intervalo (1,2).

b)

Siendo $f(x) = x^3 - x - 1$ y $f'(x) =$

Inicializamos $\underline{x_0 = 1}$ y aplicamos la Newton-Rhapson para obtener los siguien...

Generalmente es: $x_{n+1} = x_n - \ldots$

Método Newton-Rhapson

Forma general: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Ejemplo de 3 iteraciones: (cada vez se va aproximando más exacto)

1. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$
2. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$
3. $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

1. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1 = 1 - \ldots$
2. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_2 = \frac{3}{2} - \frac{718}{7318} = \frac{205}{146} \approx 1{,}404109589$
3. $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = x_3 = \frac{205}{146} - \frac{0{,}3641257966}{4{,}9145\,71714} \approx 1{,}330018528$.
4. $x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = x_4 = 1{,}330018528 - \frac{0{,}02271679521}{4{,}306841853} \approx \boxed{1{,}324743952}$

3-

a) $$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \qquad \sqrt{x} = t \quad \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$$

$$2\int \cos(t)\,dt = 2\operatorname{sen}(t) + C = \boxed{2\operatorname{sen}(\sqrt{x}) + C}$$

b) $$\int \tan^2(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \int \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \int \frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\,dx =$$

$$= \overbrace{\int \frac{1}{\cos^2(x)}dx}^{\text{Inmediata}} - \int 1\,dx = \boxed{tg\,x - x + C}$$

c) $$\int \arctan(2x)\,dx \qquad \left[\begin{matrix} u = \arctan(2x) & du = \frac{2}{1+(2x)^2} \\ dv = dx & v = x \end{matrix}\right]$$

$$= x\arctan(2x) - \int x \cdot \frac{2}{1+(2x)^2}\,dx = \int \frac{2x}{1+4x^2} = \frac{2}{8}\int \frac{8x}{1+4x^2} = \frac{2}{8}\ln|1+4x^2| =$$

$$\Rightarrow x\arctan(2x) - \frac{1}{4}\ln|1+4x^2| + C$$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \Rightarrow \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt \end{array} \to 2\int \frac{dt}{1-t} = -2\int \frac{-dt}{1-t} =$

$= -2\ln|1-t| = \boxed{-2\ln|1-\sqrt{x}| + C}$

e) $\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$

$P(x) \,|\, Q(x)$, $C(x) \to C(x)\cdot Q(x) + R(x) = P(x)$, $R(x)$

$Q(x)\left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\right) = P(x)$

$C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$

$$\begin{array}{l|l} x^3 + x & x-1 \\ \hline -x^3 + x^2 & x^2 + x + 2 \\ \quad x^2 + x & \\ \quad -x^2 + x & \\ \qquad 2x & \\ \qquad -2x + 2 & \\ \qquad\quad 2 & \end{array}$$

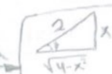
$\Rightarrow \int x^2 + x + 2 + \int \frac{2}{x-1} =$

$= \boxed{\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C}$

f) $\int \sin^6(x)\cos^3(x)\,dx$ $\quad t = \operatorname{sen}(x)$, $dt = \cos(x)\,dx$

$= \int t^6(1-t^2)\,dt = \int (t^6 - t^8)\,dt = \boxed{\frac{\operatorname{sen}^7(x)}{7} - \frac{\operatorname{sen}^9(x)}{9} + C}$

g) $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ Sustitución trigonométrica



$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2} \to x = 2\operatorname{sen}\theta$

$\theta = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$

$dx = 2\cos\theta\, d\theta$

$= \int 4\operatorname{sen}^2\theta \cdot 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta\, d\theta = 16\int (\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta)^2 = 16\int \left(\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}\right)^2 = 4\int \operatorname{sen}(2\theta)\operatorname{sen}(2\theta)\,d\theta =$

$= 4\int \frac{1-\cos(4\theta)}{2}\,d\theta = 2\int d\theta - 2\int \cos(4\theta)\,d\theta = 2\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(4\theta) =$

$= \boxed{2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(4\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C;\quad C \in \mathbb{R}}$

h) $\int \sin(3x)\sin(6x)\,dx = \int \frac{\cos(3x) - \cos(9x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(3x)\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(9x)\,dx$

$= \boxed{\frac{1}{6}\operatorname{sen}(3x) - \frac{1}{18}\operatorname{sen}(9x) + C,\quad C \in \mathbb{R}}$

i) $\int (x^2+1)e^{-x}\,dx = \begin{bmatrix} u = x^2+1 & du = 2x \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = \frac{-x^2-1}{e^x} + \int 2xe^{-x} \begin{bmatrix} u = 2x & du = 2 \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} =$

$= \frac{-2x}{e^x} + \int 2e^{-x}\,dx \to = 2\int e^{-x}\,dx = \frac{-2}{e^x}$ $\quad$ Final $= \frac{-x^2-1-2x-2}{e^x} =$

$= \boxed{\frac{-x^2-3-2x}{e^x} + C,\quad C \in \mathbb{R}}$

j) $\int \sin(\log x)\,dx$

k) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}} \to$

$\operatorname{sen}\theta = x/5$ $\quad \theta = \arcsin\left(\frac{x}{5}\right)$

$\cos\theta = \sqrt{25-x^2}/5$ $\quad x^2 = 25\operatorname{sen}^2(\theta)$

$x = 5\operatorname{sen}\theta$ $\quad dx = 5\cos\theta$

$\frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2 \frac{\sqrt{25-x^2}}{5}} = \frac{1}{5}\int \frac{5\cos\theta\, d\theta}{25\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta} = \frac{1}{25}\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{25}\int \csc^2\theta\, d\theta =$

$-\frac{1}{25}\operatorname{cotg}\theta + C = -\frac{1}{25}\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} + C = -\frac{1}{25}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} + C$

$= \boxed{\frac{-\sqrt{25-x^2}}{25x} + C;\quad C \in \mathbb{R}}$

4-

$$\int \frac{x}{(x-2)(1+x^2)(x+4)}\,dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{(1+x^2)} + \frac{D}{(x+4)} =$$

$$x = A(1+x^2)(x+4) + (Bx+C)(x-2)(x+4) + D(x-2)(1+x^2) \Rightarrow$$

$$x = (A+Ax^2)(x+4) + (Bx^2-2Bx+Cx-2C)(x+4) + (Dx-2D)(1+x^2) \Rightarrow$$

$$x = Ax + 4Ax^2 + Bx^3 - 2Bx^2 + Cx^2 - 2Cx + 4Bx^2 - 8Bx + 4Cx - 8C + Dx - 2D + Dx^3 - 2Dx^2.$$

$$x = Ax + 4Ax^2 + Bx^3 + 2Bx^2 + Cx^2 + 2Cx - 8Bx - 8C + Dx^3 - 2Dx^2 + Dx - 2D$$

$$x = 4Ax^2 + Ax + Bx^3 + 2Bx^2 - 8Bx + Cx^2 + 2Cx - 8C + Dx^3 - 2Dx^2 + Dx - 2D.$$

$x=0 \to 0 = -8C - 2D$

$x=1 \to 4A + A + B + 2B - 8B + C + 2C - 8C + D - 2D + D - 2D = 1$

$1 = 5A - 5B - 5C - 2D.$

$x=-1 \to 4A - A - B + 2B + 8B + C - 2C - 8C - D - 2D - D + 2D = -1$

$-1 = 3A + 9B - 9C - 2D$

$x=-2 \to 16A - 2A - 8B + 8B + 16B + 4C - 4C - 8C - 8D - 8D - 2D - 2D = -2$

$-2 = 14A + 16B - 8C - 20D.$

$$\begin{cases} -4C - D = 0 \\ 5A - 5B - 5C - 2D = 1 \\ 3A + 9B - 9C - 2D = -1 \\ 7A + 8B - 4C - 10D = -1 \end{cases}$$

$\to 5A - 5B - 5C - 2D = 1$
$\to 3A + 9B - 9C - 2D = -1$ $\ominus$
$2A - 14B + 4C = 2$

$\to -8C - 2D = 0$
$\to 5A - 5B - 5C - 2D = 1$ $\ominus$
$-5A + 5B - 3C = -1$

$15A + 45B - 45C - 10D = -5$
$\ominus$ $7A + 8B - 4C - 10D = -1$
$8A + 37B - 41C = -4$

$$\begin{cases} A - 7B + 2C = 1 \\ 8A + 37B - 41C = -4 \\ -5A + 5B - 3C = -1 \end{cases}$$

$$(A, B, C, D) = \left(\frac{25}{353}, -\frac{48}{353}, -\frac{4}{353}, \frac{16}{353}\right)$$

Conjuntos.

Sesión 6

1- Ya hecho. → 3-K) sesión 5.

2- a) $\int_1^{3/2} \frac{x^3-2x^2-4}{x^3+2x^2}\,dx$

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-4 & x^3+2x^2 \\ -x^3-2x^2 & 1 \\ \hline -4x^2-4 & \end{array}$$

$P(x) = C(x)\cdot Q(x) + R(x) \to P(x) = Q(x)\left(C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}\right)$

Teorema del resto $\to \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$

$$= \int 1\,dx - 4\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2}\,dx = x - 4\boxed{\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2}\,dx}$$

Metodo de descomposición en fracciones simples:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x+2)}\,dx = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} \to$$

$\to x^2+1 = A(x(x+2)) + B(x+2) + Cx^2$

$x=1 \to 2 = 3A + 3B + C \to 2 = 3A + 3B + \frac{5}{4} \to \frac{3}{4} = 3A + 3B$

$x=-2 \to 5 = 4C \to C = 5/4$

$x=-3 \to 10 = 3A - B + \frac{45}{4} \to -\frac{5}{4} = 3A - B \to -\frac{5}{4} = 3A - B$ $\ominus$

$-\frac{5}{4} + \frac{2}{4} = 3A$

$\boxed{A = -\frac{1}{4}}$

$2 = 4B$

$\boxed{B = 1/2}$

$$\to x - 4\int \frac{-1/4}{x} - 4\int \frac{1/2}{x^2} - 4\int \frac{5/4}{x+2} =$$

$$= \left[x + \ln x + \frac{2}{x} - 5\ln|x+2|\right]_1^{3/2} = (-3.025016401 - (-2.44306144))$$

$$= \boxed{-0{,}531954458}$$

2- Hechas ya (indefinidamente).
(Resto)

3- —

4- Area delimitada por $f(x) = 5x - x^2$ y $g(x) = x$

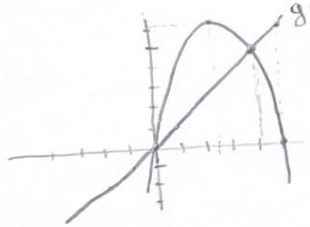
(Primer cuadrante y area por encima de la recta $g(x) = x$.

$f(x) = -x^2 + 5x \to x(-x+5) \begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases}$

$f(x) = g(x) \to -x^2+5x-x=0$ Cortan en

$-x^2+4x=0 \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$

Vertice de $f(x) = \frac{-b}{2a} \to \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$ $f(\frac{5}{2}) = \frac{25}{4} \to (\frac{5}{2}, \frac{25}{4})$



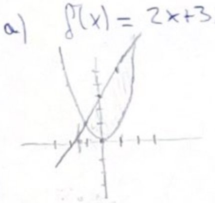
$$\int_0^4 (5x - x^2 - x)\,dx = \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} - 0 = \boxed{\frac{32}{3}u^2}$$

Sesión 7

1-

a) $f(x) = 2x+3$; $g(x) = x^2$;



Donde $f(x)$ corta al eje x $\to f(x) = 0 \to x = \boxed{\frac{-3}{2}}$

Donde se cortan $f(x)$ y $g(x) \to 2x+3 = x^2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x=-1$ $x=3$

$$\int_{-1}^{3} (2x+3-x^2)\,dx = x^2+3x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3} = (9+9-9) - (1+3+\frac{1}{3}) =$$

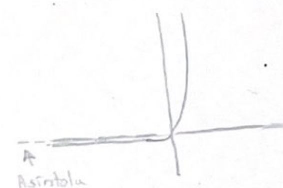
$$9 - (-\frac{5}{3}) = \boxed{\frac{32}{3}}$$

b) $\sin(x)$; $\cos(x)$;

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{5\pi/4} \operatorname{sen} x - \cos x = \left[-\cos x - \operatorname{sen} x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{5\pi/4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}}$$

c) $f(x) = xe^x$; $f(x) = 0$;



$$\int_{-\infty}^{0} -xe^x\,dx = \lim_{b\to-\infty} \left(\int_b^0 -xe^x\,dx\right) =$$

La integral indefinida queda

$$\begin{bmatrix} u=-x & du=-1 \\ dv=e^x dx & v=e^x \end{bmatrix} \to \int -xe^x dx = -xe^x - \int -e^x\,dx =$$

$$= -xe^x + e^x$$

Volviendo:

$$\lim_{b\to-\infty} \left[-xe^x + e^x\right]_b^0 = (0+1) - \lim_{b\to-\infty} \cancel{-be^b + e^b}_{\to 0} = 1 - 0 =$$

$$= \boxed{1}$$

2- Metodo de simpson :

$$\to \int_a^b f(x)\,dx = \frac{\frac{b-a}{n}}{3}\Big[f(x_0)+4 \ldots$$

Nuestras divisiones son 5; entonces: $\frac{1/2-\ldots}{5}$ ... intervalos son

$\left[0,\frac{1}{10}\right],\left[\frac{1}{10},\frac{1}{5}\right],\left[\frac{1}{5},\frac{3}{10}\right],\left[\frac{3}{10},\ldots\right.$

Aplicando el método de simpson :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(e^{\frac{x}{2}})\,dx = \frac{\frac{\frac{1}{2}-0}{5}}{3}\left[f(0)+4f\left(\tfrac{1}{10}\right)+2f\left(\tfrac{1}{5}\right)+4f\left(\tfrac{3}{10}\right)+2f\left(\tfrac{2}{5}\right)+f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{30}\left[\sin(e^{\frac{0}{2}})+4\cdot\sin(e^{\frac{1}{20}})+2\cdot\sin(e^{\frac{1}{10}})+4\cdot\sin(e^{\frac{3}{20}})+2\cdot\sin(e^{\frac{1}{5}})+\sin(e^{\frac{1}{4}})\right] =$$

$$= \frac{1}{30}\left(0.2755623454\right) \simeq \boxed{9.185411513\cdot 10^{-3}}$$

3- $$\int_0^{\infty} \frac{2\,dx}{(x+2)\sqrt{1+x}} \xrightarrow{\text{Indefinidamente}} 2\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{1+x}} =$$

$$\left\{\begin{matrix} t=\sqrt{x+1} & dt=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}} \\ t^2=x+1 & t^2+1=x+2 \end{matrix}\right\} \to 4\int \frac{dx}{(x+2)\,2\sqrt{1+x}} =$$

$$=4\int \frac{dt}{1+t^2} = 4\,\operatorname{arctg}(t) = 4\operatorname{arctg}(\sqrt{x+1}).$$

Definidamente :

$$\lim_{b\to\infty}\left[4\operatorname{arctg}(\sqrt{x+1})\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}\left(4\operatorname{arctg}(\sqrt{b+1})\right)-\left(4\operatorname{arctg}(\sqrt{0+1})\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{2}\ 2\pi - \frac{4\pi}{4} = \boxed{\pi}$$

Metodo de Simpson :

- Sirve para aproximar integrales definidas:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{\Delta x}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2) \ldots + f(x_n)\right). \Rightarrow$$

Ejemplo $n=4 \to \int_0^1 x\,dx$

$\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} \to$ Intervalos $=(0,\frac{1}{4})(\frac{1}{4},\frac{2}{4})(\frac{2}{4},\frac{3}{4})(\frac{3}{4},1)$

$$=\frac{1}{12}\left[f(0)+4f\left(\tfrac{1}{4}\right)+2f\left(\tfrac{2}{4}\right)+4f\left(\tfrac{3}{4}\right)+f(1)\right]$$

Sesión 9

1- a) $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$; $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2x}{(x+y)^2}$

b) $f(x,t)=\arctan(x\sqrt{t})$; $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\sqrt{t}}{1+x^2t}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial t}=\frac{x}{1+x^2t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}$

2- b) $f(x,y)=\arctan\left(\frac{x}{y}\right) \to D_x f(2,3)=\frac{1}{y\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)} \Rightarrow \frac{1}{3\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)}=\boxed{\frac{3}{13}}$

c) $f(x,y,z)=\frac{y}{x+y+z} \to D_y f(2,1,-1)=\frac{x+y+z-y}{(x+y+z)^2} \Rightarrow \frac{2-1}{(2+1-1)^2} = \boxed{\frac{1}{4}}$

3- Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ de: (Derivación implícita)

a) $x^2+y^2+z^2=3xyz$

$\frac{\partial z}{\partial x} \to 2x+2z\frac{\partial z}{\partial x} = 3yz+3xy\frac{\partial z}{\partial x} \to \frac{\partial z}{\partial x}(2z-3xy)=3yz-2x$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3yz-2x}{2z-3xy}}$$

$\frac{\partial z}{\partial y}=2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=3xz+3xy\frac{\partial z}{\partial y} \to \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3xz-2y}{-3xy+2z}$

4.- Derivada direccional de $f(x,y) = ye^{-x}$ en el punto $(0,4)$ para la dirección dada por $\theta = \frac{2\pi}{3}$

$\rightarrow \vec{u} = \left(\cos\frac{2\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

$\nabla f(x_0, y_0) = \left(-ye^{-x}, e^{-x}\right) = (-4, 1)$

$\nabla f(x,y) \cdot \vec{u} = D_{\vec{u}} f \rightarrow D_{\vec{u}} f = (-4,1)\left(\cos\frac{2\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= \boxed{2 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$

5.- $f(x,y) = ye^{-xy}$ ¿Para que direcciones de $\vec{u}$ es $D_{\vec{u}} f(0,2) = 1$.

$\nabla f(x,y) = \left(-y^2 e^{-xy}, e^{-xy} - e^{-xy} xy\right).$

$\nabla f(0,2) = (-4, 1).$

$D_{\vec{u}} f(0,2) = (-4,1) \cdot (u_1, u_2) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} -4u_1 + u_2 = 1 \\ u_1^2 + u_2^2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow u_2 = 1 + 4u_1 \\ \rightarrow u_1^2 + 1 + 8u_1 + 16u_1^2 - 1 = 0 \end{array}$$

$17u_1^2 + 8u_1 = 0$

$u_1(17u_1 + 8) = 0 \begin{array}{l} \nearrow u_1 = 0 \\ \searrow u_1 = \frac{-8}{17} \end{array}$

$u_1 = 0$

$0 + \boxed{u_2 = 1}$

$u_1 = -\frac{8}{17} \quad \frac{32}{17} + u_2 = 1 \rightarrow u_2 = 1 - \frac{32}{17} = \boxed{\frac{-15}{17} = u_2}$

Las direcciones son

$$\boxed{\begin{array}{l} \rightarrow (0,1) \\ \rightarrow \left(\frac{-8}{17}, \frac{-15}{17}\right) \end{array}}$$

1.- Criterio Hessiano

Sesión 10

$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4.$

$$\text{Hess} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

Buscamos puntos críticos $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$\nabla f(x,y) = (2x + 2xy, 2y + x^2) = (0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2yx = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow 2x + 2\left(-\frac{x^2}{2}\right)x = 0 \rightarrow 2x - x^3 = 0 \\ \rightarrow y = \frac{-x^2}{2} \end{array}$$

$x^3 - 2x = 0$

$x(x^2 - 2) = 0 \begin{array}{l} \nearrow x = 0 \\ \searrow x = \pm\sqrt{2} \end{array}$

$\rightarrow \cancel{x=0} \rightarrow 0 + 0 = 0 \rightarrow \nexists$ NO

$x = \sqrt{2} \rightarrow 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}y = 0 \rightarrow y = \frac{2\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = -1 \rightarrow (\sqrt{2}, -1) \leftarrow$ Pto crítico

$x = -\sqrt{2} \rightarrow 2(-\sqrt{2}) + 2(-\sqrt{2})y = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (-\sqrt{2}, -1) \leftarrow$ Pto crítico

Comprobamos en la matriz hessiana:

$\text{Hess} f(\sqrt{2}, -1) = \begin{vmatrix} 2-2=0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = -4\sqrt{2} < 0 \rightarrow$ Pto silla.

$\text{Hess} f(-\sqrt{2}, -1) = \begin{vmatrix} 2-2=0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = -4\sqrt{2} < 0 \rightarrow$ Pto silla.

2.- $h(x,y) = 1000\operatorname{sin} x + 500 \operatorname{sin} y + 2000.$

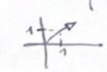
a) $\nabla h(x,y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right) = (0,0) \rightarrow \nabla h(x,y) = (1000\cos(x), 500\cos(y)) = (0,0)$

$$\left.\begin{array}{l} 1000\cos(x) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 500\cos(y) = 0 \rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{array}\right\} (k=0) \rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \\ y = \frac{\pi}{2} \end{array}$$ (Puede ser una cima)

Elevación $= h\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 3500.$

Comprobamos que es un máximo relativo para que sea una cima:

$\text{Hess} f = \begin{pmatrix} -1000\operatorname{sen} x & 0 \\ 0 & -500\operatorname{sen}(y) \end{pmatrix} \rightarrow \text{Hess} f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{vmatrix} -1000 & 0 \\ 0 & -500 \end{vmatrix} > 0$ y $f''_{xx} < 0 \rightarrow \boxed{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ es máximo}}$

b) $D_{\vec{u}} f(0,0) = \nabla h(0,0) \cdot \vec{u} = (1,1) \rightarrow$  $\rightarrow$

$\rightarrow \nabla h(0,0) = (1000, 500) \cdot (1,1) = 1500 \rightarrow$ positiva ; como es la pendiente de la dirección que está yendo el alpinista $\rightarrow$ $\boxed{\text{Está ascendiendo}}$

3- CL $\to 2xy+2xz+2yz=1$

(Vmax)= FO $\to xyz$

Utilizando los Multiplicadores de Lagrange:

$L(x,y,z,\lambda)= xyz-\lambda(2xy+2xz+2yz-1)$

$L(x,y,z,\lambda)= xyz-\lambda 2xy+\lambda 2xz-\lambda 2yz+\lambda)$

$\nabla L(x,y,z,\lambda)=(0,0,0,0)$;

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}&=yz-2\lambda y-2\lambda z=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}&=xz-2\lambda x-2\lambda z=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}&=xy-2\lambda x-2\lambda y=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}&=-2xy-2xz-2yz+1=0\end{aligned}\right\}$$

Despejo landa en cada ecuación y las igualo entre ellas, al final queda:

$$\boxed{x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{6}}$$

Sesión 11

2- $\overset{CL}{L^2=x^2+y^2+z^2}$; $L=$cte. $\overset{FO}{V_{max}=xyz}$.

Por Lagrange: $L(x,y,z,\lambda)=xyz-\lambda(x^2+y^2+z^2-L^2)$.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x}&=yz-x^2=0\\ \frac{\partial L}{\partial y}&=xz-y^2=0\\ \frac{\partial L}{\partial z}&=xy-z^2=0\\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}&=-x^2-y^2-z^2+L^2=0\end{aligned}\right\}$$

$x=y=z$

$\to x^2+x^2+x^2=+L^2$

$3x^2=L^2\to\sqrt{3x^2}=\sqrt{L^2}\to\sqrt{3}x=L$

$x=\frac{L}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{L\sqrt{3}}{3}}$

Por lo tanto el volumen es $\left(\frac{L\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{L^3 3\sqrt{3}}{3^{3}}=\boxed{\frac{L^3\sqrt{3}}{9}}$ uds^3

3-

a) $\iint_R(6x^2y^3-5y^4)\,dA$; donde $R=\{(x,y):0\le x\le 3, 0\le y\le 1\}$

$\to\int_0^3\int_0^1(6x^2y^3-5y^4)\,dy\,dx=\int_0^3\left[\frac{3}{2}x^2y^4-y^5\right]_0^1dx=$

$=\int_0^3\left[\left(\frac{3}{2}x^2-1\right)+(0+0)\right]dx=\int_0^3\left(\frac{3}{2}x^2-1\right)dx=$

$=\left[\frac{x^3}{2}-x\right]_0^3=\left(\frac{27}{2}-3\right)-(0-0)=\boxed{\frac{21}{2}}$

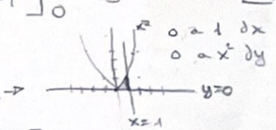
b) $\iint_D x\sqrt{y^2-x^2}\,dA$; donde $D=\{(x,y):0\le y\le 1, 0\le x\le y\}$

$\to\int_0^1\int_0^y\left(x\sqrt{y^2-x^2}\right)dx\,dy=\int_0^1-\frac{1}{2}\int_0^y(\sqrt{t})\,dt\,dy=-\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{2t\sqrt{t}}{3}\right]_0^y dy=$

$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{(2y^2-2x^2)\sqrt{y^2-x^2}}{3}\right]_0^y dy=-\frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{\cancel{(2y^2-2y^2)\sqrt{y^2-y^2}}}{3}\right)-\left(\frac{(2y^2-0)\sqrt{y^2-0}}{3}\right)\right]dy$

$=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{-2y^2\sqrt{y^2}}{3}\right)dy=\frac{+1}{2}\frac{2}{3}\int_0^1 y^3\,dy=\frac{1}{3}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1=\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)-(0)=\boxed{\frac{1}{12}}$

c) $\iint_D x\cos(y)\,dA$, donde D está delimitada por $y=0$; $y=x^2$; $x=1$. $\to$

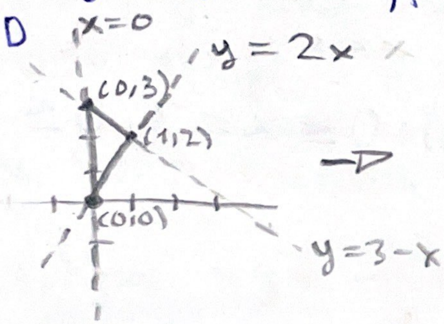


$\to\int_0^1\int_0^{x^2}(x\cos(y))\,dy\,dx=\int_0^1\left[x\,\mathrm{sen}(y)\right]_0^{x^2}dx=\int_0^1\left[(x\,\mathrm{sen}\,x^2)-(x\,\mathrm{sen}(0))\right]dx=$

$=\int_0^1(x\,\mathrm{sen}\,x^2)\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^1-2x\,\mathrm{sen}\,x^2=-\frac{1}{2}\left[\cos(x^2)\right]_0^1=$

$=-\frac{1}{2}\left[(\cos(1)-\cos(0))\right]=\boxed{7.615242\,18\cdot 10^{-5}}=\boxed{-\frac{\cos(1)}{2}}$

d) $\iint_D 2xy\, dA$, donde A es la región triangular de vertices $(0,0),(1,2),(0,3)$:



$\rightarrow$

$$\int_0^1 \int_{2x}^{3-x} (2xy)\, dy\, dx =$$

$$\int_0^1 \left[xy^2\right]_{2x}^{3-x} dx = \int_0^1 \left[\left(x(3-x)^2\right) - \left(x(2x)^2\right)\right] dx =$$

$$= \int_0^1 (9x - 6x^2 - 3x^3)\, dx = \left[\frac{9}{2}x^2 - 2x^3 - \frac{3}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{9}{2} - 2 - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{7}{4}}$$