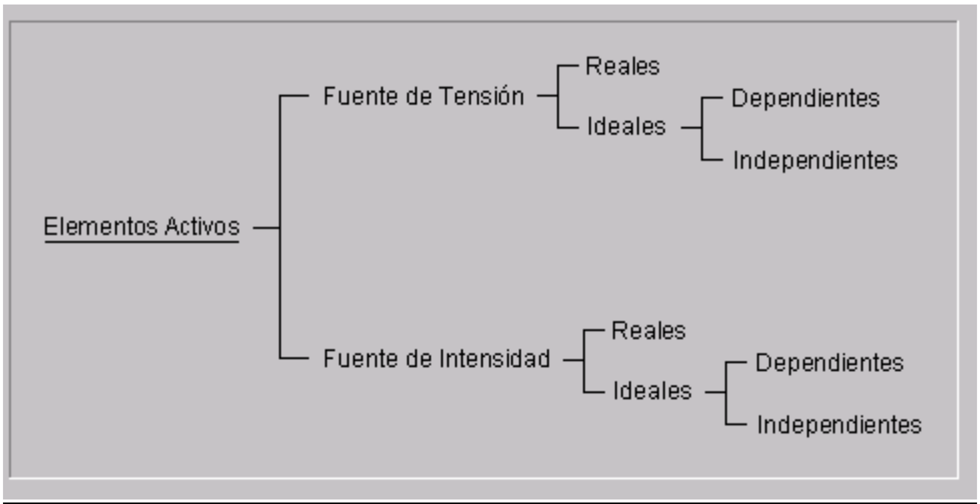
RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS

1.- GENERADORES Y RECEPTORES DE ENERGIA ELECTRICA



Las cargas, al moverse, chocan con iones positivos de la red cristalina, cediendo una energía y una cantidad de movimiento (lo que se traduce en calentamiento por efecto Joule). Esta energía debe de proceder de algún manantial que genere un campo no irrotacional E_m, al que hemos denominado campo electromotor, y lo mantenga para que la corriente perdure; este manantial de energía se denomina generador eléctrico.

En un tema anterior, al hablar de fuerza electromotriz y campo electromotor ya se indicó que la fuerza electromotriz representa la causa o fuerza motora de la corriente en un circuito y puede definirse mediante la ecuación:

$$\varepsilon = \int E \, . \, dl = \int E_m \, . \, dl$$

En definitiva, un generador eléctrico es un dispositivo capaz de transformar cualquier tipo de energía en energía eléctrica. Así, por ejemplo, una pila o batería transforma energía química; en una dinamo es la energía mecánica aplicada al rótor la que se transforma en eléctrica, etc. A estos se les llama elementos activos del circuito.

Elementos Activos.

Son los elementos que suministran energía al circuito eléctrico, esta excitación corresponde a los generadores o fuentes. Utilizaremos dos tipos, la fuente de tensión y la de intensidad. Cada uno de ellos se puede a su vez subdividir en dos tipos, reales e ideales. Dentro del grupo de las fuentes ideales se podría hacer una distinción más, entre independientes y dependientes. No estudiaremos en detalle las dependientes puesto que no las utilizaremos en la simulación. Para explicar los elementos activos independientes nos vamos a referir a fuentes de continua, pero la generalización no presenta ninguna dificultad.

-Fuente de Tensión Ideal.

Es aquella que produce una diferencia de potencial entre sus terminales constante e independiente de la intensidad que es capaz de suministrar a un circuito exterior.

-Fuente Real de Tensión.

Supongamos una fuente de tensión ideal que se conecta a una resistencia variable. La intensidad que circula vendrá dada por la ley de Ohm: **I = U / R**

Si se hace R cada vez más pequeña, I aumentará progresivamente llegándose al caso de que si R = 0, entonces la intensidad se hará infinita; pero ello sería a costa de una fuente que suministrase una potencia infinita, lo cual no es posible en la vida real. Por consiguiente la fuente de tensión debe tener una resistencia interna Rg. De esta forma si R tiende a cero la intensidad no tiende a infinito y su valor toma un máximo.

$$I_{max} = I_{cc} = \frac{E}{R_g}$$

A medida que R aumenta se producen intensidades más pequeñas, hasta que R = ∞ donde la intensidad se anula y U = E . La figura siguiente se ha realizado suponiendo que la fuente es de continua.

Generadores Independientes

Los generadores independientes son aquellos que no dependen de ninguna magnitud eléctrica del circuito del cual forman parte.

Generadores Dependientes

Son aquellos que dependen, según una relación lineal, de alguna magnitud eléctrica (tensión o intensidad) del cual forman parte.

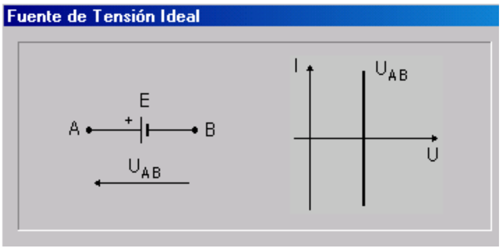
Las magnitudes que caracterizan un generador son su fuerza electromotriz ε y su resistencia interna r: ambas son características intrínsecas ya que son prácticamente independientes de la intensidad de corriente que suministre la fuente (de la carga).

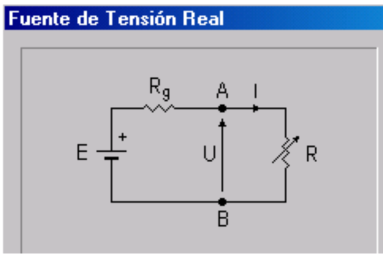
Desde un punto de vista energético podríamos definir la fuerza electromotriz de un generador como la relación o cociente entre la energía no-eléctrica (química, térmica, mecánica, etc.) dW, necesaria para hacer pasar por él una carga dq y la magnitud de dicha carga. Es decir:

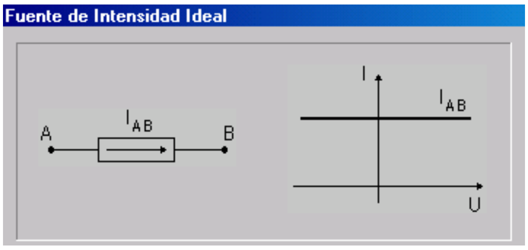
$$\varepsilon = dW / dq = \int E_m \cdot dl \qquad (1)$$

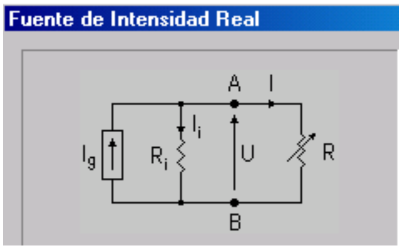
Debe observarse que la fuerza electromotriz de una fuente es siempre una magnitud positiva; en efecto, la orientación del elemento de arco dl se elige coincidiendo con el sentido de la corriente y como, convencionalmente, se admite que la corriente se debe al flujo de cargas eléctricas positivas, el campo electromotor E_m y la intensidad de corriente I tienen el mismo sentido.

<u>Los símbolos usuales para fuentes o generadores en corriente contínua son los que se indican a continuación:</u>









Si a los terminales de un generador de fuerza electromotriz ε y resistencia interna r, conectamos una resistencia de carga R, durante un tiempo dt, el balance energético, se traduce en la ecuación siguiente:

$$\varepsilon \cdot I \cdot dt = I^2 (r + R) \cdot dt \qquad (.2)$$

La (.2) indica que la energía comunicada a las cargas se transforma en energía calorífica en las resistencias r y R.

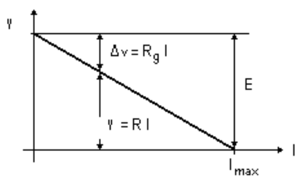
Como $I^2 R = V I = V^2 / R$ es la potencia disipada en la carga (potencia útil P_u), la (.2), en términos de potencias se escribe:

$$\varepsilon = V - I R \qquad (.4)$$

que es la ecuación del generador.

Por consiguiente, la tensión V en los terminales de un generador, decrece linealmente con la intensidad de corriente I que suministra (con la carga).

La gráfica que representa esta variación de V con I, recibe el nombre de "característica externa del generador", y es la que se indica en la Figura



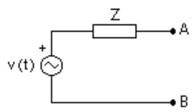
$E = R_g I + R I$

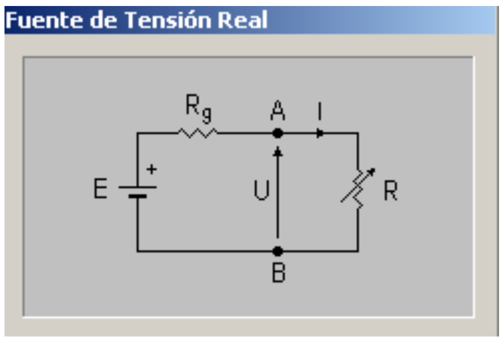
$v = E - R_g I$

$=f(I)$ es la característica de la tensión en bornas del generador real en función de la intensidad que suministra. Si R_g se se hace cada vez menor, la pendiente de la recta disminuirá y cuando $R_g = 0$ la recta será paralela al eje de abscisas, $U = E$, y estaríamos en el caso de fuente ideal de tensión.

En una fuente de tensión real la diferencia de potencial disminuye a medida que aumenta la intensidad que suministra.

La representación que se ha hecho de un generador real de tensión, no es exactamente el mismo en todos los casos, por ejemplo, para un generador de corriente alterna (alternador) el circuito es el de la figura, formado por una fuente ideal de tensión en serie con una combinación de elementos pasivos que designaremos por Z, y que se conoce con el nombre de impedancia.





La fuerza electromotriz de un generador coincide con la tensión en sus terminales a circuito abierto.

Cuando $V = 0$ # $I = I_{oc} = \varepsilon / r$

Por consiguiente la intensidad de cortocircuito sólo está limitada por la resistencia interna de la fuente, alcanzando, en general, valores muy elevados.

Desde el punto de vista de técnicas de análisis de circuitos, interesa definir dos tipos de generadores eléctricos: fuentes de tensión y fuentes de corriente.

DEF. 1.- Fuente ideal de tensión: aquella de da una tensión constante a la salida (entre sus terminales) cualquiera que sea la corriente que suministre (con independencia de la carga).

Como se sabe, la tensión en los terminales de un generador de resistencia interna r, conectado a una resistencia de carga R, si es ε su fuerza electromotriz, se escribe:

$$V = \varepsilon - I\, r = \varepsilon \,.\, R / r + R = \varepsilon / 1 + r / R \qquad (.6)$$

Por consiguiente, si la resistencia de carga es mucho mayor que la resistencia interna de la fuente, la tensión en los terminales del generador es prácticamente constante e independiente de la corriente que suministre. En un generador real, la tensión en terminales decrece linealmente con la intensidad de la corriente que toma la carga. Es decir, un generador real solamente se aproxima a un generador ideal, y la limitación se debe a la resistencia interna.

En la práctica, lo normal es que la resistencia interna de un generador sea mucho menor que la resistencia de carga, por lo que los generadores reales se aproximan más a los que hemos definido como fuentes de tensión constante. Sin embargo, como indicábamos antes, desde el punto de vista de análisis de circuitos, es útil manejar esos dos elementos activos de circuito: fuentes de tensión y fuentes de corriente.

DEF. 3.- Fuente real de tensión: Es un elemento activo de circuito cuya tensión en terminales decrece linealmente con la intensidad que suministra, de acuerdo con la ley: $V = \varepsilon - r\, I$. Podemos representar, por tanto, una fuente real de tensión como una fuente ideal de tensión en serie con su resistencia interna

DEF. 4.- Fuente real de corriente: elemento activo de circuito que suministra una corriente en terminales que decrece linealmente con la tensión en los mismos, de acuerdo con la ley: $I = I_{cc} - g\, V$, siendo g la conductancia interna de la fuente. Representaremos, por ello, una fuente real de corriente mediante una fuente ideal de corriente en paralelo con su resistencia interna (Figura 6).

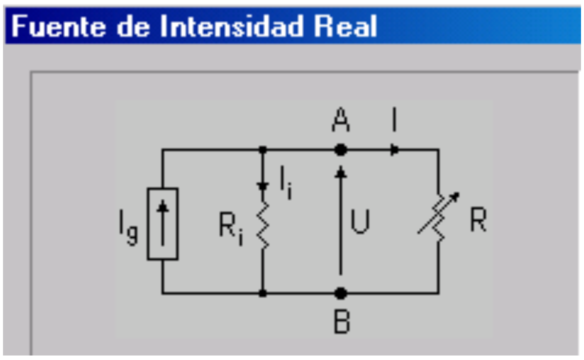
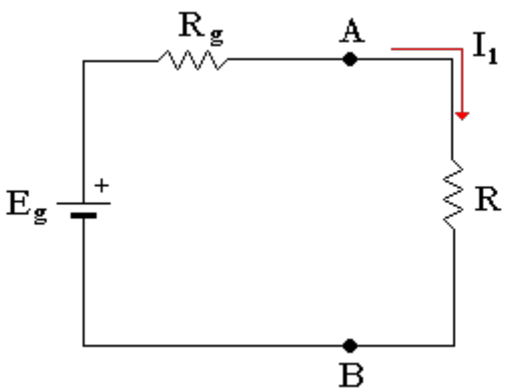


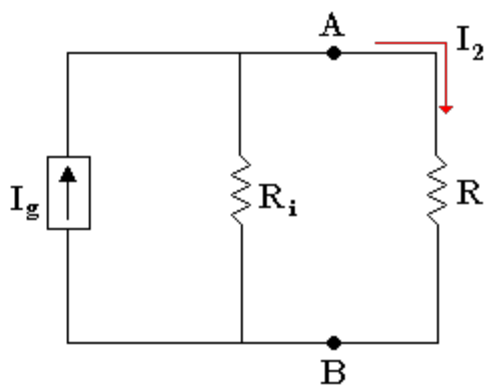
Figura 6 : Fuente real de intensidad

Para el estudio de determinados circuitos, a veces, es mejor actuar con fuentes de corriente que de tensión o viceversa. Valor a buscar la relación que hay entre un generador real de tensión y un generador real de corriente (Teorema de equivalencia de fuentes).

Equivalencia entre fuentes reales

Sean dos fuentes reales de continua como las que tenemos a continuación, estudiaremos la condición necesaria para que sean equivalentes. Las fuentes que utilizaremos serán la senoidal y la de continua, aunque por supuesto, este estudio es aplicable a cualquier otra.





Las dos fuentes anteriores serán equivalentes $I_1=I_2$, es decir, cuando suministren la misma intensidad a la misma carga (Resistencia o impendancia en general).

$$I_1 = \frac{E_g}{R + R_g} \qquad I_2 = I_g \frac{R_i}{R + R_i}$$

A partir de estas expresiones obtendremos otra que tiene que cumplirse para cualquier valor de la resistencia de carga, llegándose a la siguiente condición:

$$R_i = R_g$$

que junto con:

$$E_g = I_g R_g \qquad I_g = \frac{E_g}{R_g}$$

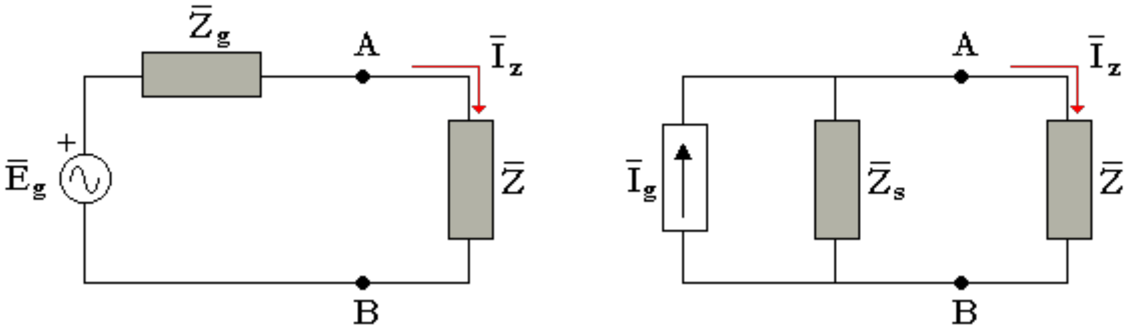
forman las condiciones de equivalencia.

Como ya hemos dicho con anterioridad, vamos a utilizar, en la parte referente al régimen permanente, fuentes de continua y fuentes de onda senoidal, con lo que usaremos fundamentalmente números complejos para realizar los cálculos, por ello, el estudio que acabamos de llevar a cabo, tambien tiene una solución en forma compleja, para fuentes reales de forma senoidal.

Consideremos dos fuentes reales de tensión e intensidad, de onda senoidal, siendo:

$\overline{Z}_g = Z \underline{|\varphi_g}$ ➘ Impedancia interna de la fuente de tensión.

$\overline{Y}_S = Y \underline{|\varphi_S} = \dfrac{1}{\overline{Z}_S}$ ➘ Admitancia interna de la fuente de intensidad.



Para que sean equivalentes los dos circuitos ha de ocurrir que I_z sea igual en ambos circuitos.

Siguiendo el mismo razonamiento del caso anterior, vamos a obtener las condiciones para la equivalencia de fuentes reales de onda senoidal.

$$\overline{Z}_g = \overline{Z}_S$$

que junto con:

$$\overline{E}_g = \overline{I}_g \overline{Z}_g$$

constituyen las condiciones de equivalencia.

Por tanto, considerando las fuentes como elementos de circuito, para convertir una fuente de tensión en otra equivalente de corriente bastará con que se disponga de una fuente ideal en serie con una resistencia (que no tiene por que ser necesariamente la resistencia interna). Igualmente, para pasar de fuente de corriente a fuente de tensión, es suficiente y necesario que se tenga una fuente ideal de corriente en paralelo con alguna resistencia.

Hasta ahora, se han estudiado, básicamente, dos tipos de elementos de circuito: elementos pasivos (que en c. continua a son resistores o resistencias) y generadores (que son elementos activos).

Como es bien conocido, existen otro tipo de elementos activos en los que la energía eléctrica se transforma, además de por efecto Joule, por otro mecanismo similar al que tiene lugar en los generadores, pero de efecto contrario: se trata de los receptores de energía eléctrica (realmente vamos a denominar así a los que con más propiedad habría que llamar receptores activos).

Un receptor eléctrico es un sistema o dispositivo capaz de transformar energía eléctrica en otra forma de energía (mecánica, química, etc.) distinta de la calorífica. Así, por ejemplo, en una pila secundaria el proceso de descarga es reversible, por lo que puede recibir energía eléctrica y transformarla en química. En un dinamo, también se pueden invertir las transformaciones de energía, y dar, a costa de una energía eléctrica, una energía mecánica que hace girar al rotor (se comporta de esta forma como motor).

Los receptores son, por tanto, elementos activos que están caracterizados por un campo contraelectromotor E'_m de sentido opuesto a la corriente que los atraviesa.

Las características intrínsecas de estos elementos activos son la fuerza contraelectromotriz ε' y la resistencia interna r.

Naturalmente, en un receptor la corriente pasa de los potenciales altos a los bajos, por lo que los símbolos usuales de receptores eléctricos son los mismos que para los generadores invirtiendo el sentido de la corriente.

En lo sucesivo, como un elemento activo presente en un red eléctrica se comporta como generador o como receptor dependiendo, únicamente, del sentido de la corriente que lo atraviesa, hablaremos en cualquier caso de fuerza electromotriz ε, entendiendo que una f.c.e.m. es, también, una f.e.m. negativa.

Si un receptor de fuerza contraelectromotriz ε y resistencia interna r, está alimentado en sus terminales con una tensión V, podemos hacer el siguiente balance energético.

$$V.\ I..\ dt = I^2 .\ r .\ dt + \varepsilon .\ I.\ Dt \qquad (.15)$$

$$V .\ I = I^2 .\ r + \varepsilon .\ I \qquad (.16)$$

$$V = r .\ I + \varepsilon \qquad (.17)$$

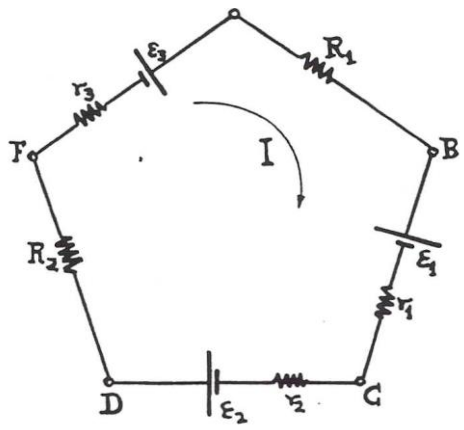
La ecuación (.17) es la ecuación de un receptor , que es la misma que la ecuación de un generador cambiando el signo a la intensidad de corriente.

El rendimiento de la transformación energética en un receptor será:

$H = \varepsilon . I / V I = \varepsilon / V = V - r . I / V = 1 - r I / V$ (.18)

.2.- LEY DE OHM EN CIRCULOS ELECTRICOS

Supongamos un circuito de corriente continua como el de la Figura siguiente en el que existen diferentes elementos activos y pasivos. El sentido de la corriente se ha fijado de forma arbitraria. El elemento activo ε_2 y ε_3 se comportan como fuentes.



Recordando la ley de Ohm en un conductor (o en un elemento pasivo) y las ecuaciones del generador y del receptor, se tiene:

$$V_A - V_B = V_{AB} = I R_1$$

$$V_{BC} = \varepsilon_1 + I r_1$$

$$V_{CD} = - \varepsilon_2 + I r_2$$

$$V_{DF} = I R_2$$

$$V_{FA} = - \varepsilon_3 + I r_3$$

$$0 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + I (R_1 + R_2 + r_1 + r_2 + r_3)$$

$$I = - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + / (R_1 + R_2 + r_1 + r_2 + r_3) = \sum \varepsilon / \sum (R + r)$$

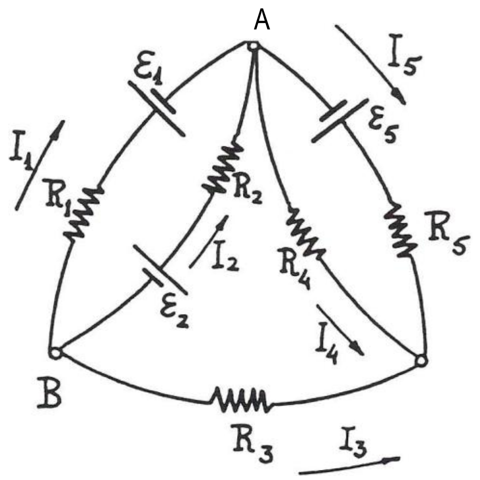
En alterna las ecuaciones son idénticas, únicamente las resistencias son sustituidas por impedancias.

.3.- REDES DE CORRIENTE . DEFINICIONES

Una red eléctrica es un conjunto de elementos pasivos (resistencias en cc y resistencias, bobinas y condensadores en ca) y de elementos activos (generadores y receptores) conectadas mediante hilos conductores. Lo usual es representar, en los esquemas eléctricos, las fuentes reales como fuentes ideales en serie con su impedancias interna (caso de que se trate de fuentes de tensión); así mismo, los conductores que interconectan los diferentes elementos los podemos considerar ideales (carentes de impedancias), siempre que, en serie, se indique la impedancia correspondiente. Es decir, se trata de individualizar las impedancias, tanto las internas de las fuentes como las de los hilos conductores, como elementos de circuito.

Para entender la terminología habitual, veamos, a continuación, algunas definiciones referentes a redes eléctricas:

DEF. 1.- Nudo: punto de la red común a dos o más conductores o elementos del circuito. Recibe el nombre de nudo principal o conjunción aquel que es común a tres o más elementos. En lo sucesivo omitiremos el calificativo de "principal", ya que prácticamente siempre nos referiremos a este tipo de nudos principales o conjunciones.



En la red de la Figura son nudos los 1,2 y 3

DEF. 2.- Rama: conjunto de elementos activos y pasivos conectados en serie entre nudos adyacentes. Una rama se llama activa si contiene algún elemento activo, y pasiva en caso contrario.

En la red de la Figura existen cinco ramas, en cada una de las cuales se ha indicado la intensidad de corriente que la atraviesa.

DEF. 3.- Malla: circuito o camino cerrado que se logra partiendo de un nudo y volviendo a él, sin pasar dos veces por un mismo elemento., en la figura siguiente hay tres mallas.

.4.- LEYES DE KIRCHHOFF

4.1.- Primera ley de Kirchhoff (ecuaciones de los nudos)

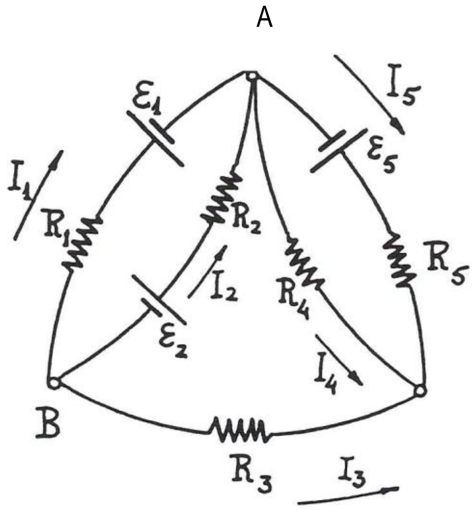
En régimen permanente, la intensidad es conservativa. Por tanto, en ningún punto del circuito puede haber acumulación de carga eléctrica. En consecuencia la suma algebraica de las intensidades de las corrientes que atraviesan un nudo ha de ser igual a cero.

$$\sum I = 0 \qquad (19)$$

En el nudo 1 de la Figura suponiendo los sentidos de las intensidades indicados, la primera ley de Kirchhoff se escribe: $I_1 + I_2 – I_5 – I_4 = 0$

Generalmente, en una red eléctrica las incógnitas son las intensidades en cada elemento, es decir, las corrientes en cada rama. Por ello, para resolver una red habrá que plantear un sistema de ecuaciones independientes cuyo número coincida con el número de ramas N_R.

Se puede ver que la primera ley de Kirchhoff proporciona un número de ecuaciones independientes igual al número de nudos N_N (nos referimos a nudos principales) menos uno.



Nº de ecuaciones. Independientes 1ª Ley de Kirchhoff. = $N_N – 1$

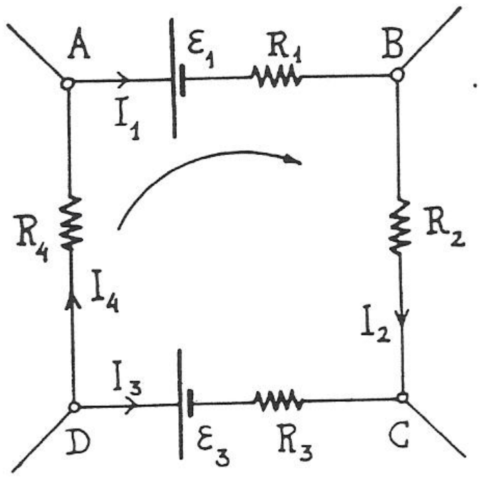
.4.2.- Segunda ley de Kirchhoff (ecuaciones de las mallas).

En una malla el recorrido cerrado en un sentido determinado, partiendo de un nudo y volviendo al mismo, conlleva variaciones de potencial entre los nudos adyacentes, por lo que la suma algebraica de estas caídas o elevaciones de potencial, a lo largo del recorrido, es nula.

Otra forma de enunciar la segunda ley de Kirchhoff es la siguiente: a lo largo de una malla, la suma algebraica de fuerzas electromotrices (considerando las contraelectromotrices como electromotrices negativas) ha de ser igual a la suma algebraica de las caídas de tensión en los elementos pasivos.

$$\sum \varepsilon = \sum I\,R \qquad (.21$$

Vamos a aplicar esta ley al ejemplo concreto de la figura



$$\varepsilon_1 - \varepsilon_3 + I_1R_1 + I_2R_2 - I_3R_3 + I_4R_4 = 0$$

$$-\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = I_1R_1 + I_2R_2 - I_3R_3 + I_4R_4$$

Para aplicar correctamente la segunda ley de Kirchhoff, cuando está formulada como se indica en la relación (.21) han de seguirse las siguientes reglas:

a) Se indican las intensidades desconocidas en cada rama de la malla con sentido elegido arbitrariamente.

b) Se asigna un sentido de recorrido o de circulación arbitrario a la malla.

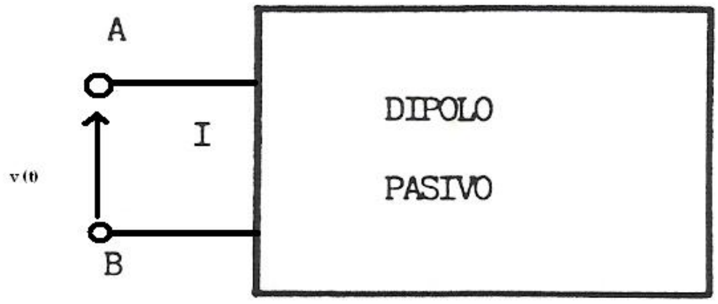
c) Una f.e.m. tendrá signo positivo cuando, en el sentido de circulación asignado en b), se atraviese al elemento activo correspondiente pasando por él de – a +. Una f.e.m. se considerará negativa en caso contrario.

d) Una caída de tensión del tipo I R será positiva cuando la intensidad en la rama correspondiente tenga igual orientación que el sentido asignado en b), y negativa en caso contrario.

En el análisis de circuitos, las incógnitas naturales son las corrientes en cada elemento. Como los elementos conectados en serie están atravesados por una misma corriente, en general, el número de incógnitas a determinar será igual al número de ramas N_R. Puesto que la primera ley de Kirchhoff proporciona N_N -1 ecuaciones independientes, la segunda ley de Kirchhoff, para que el sistema de ecuaciones sea determinado, deberá proporcionar $N_R - (N_N - 1)$ ecuaciones independientes.

.5.- IMPEDANCIA EQUIVALENTE. ASOCIACION DE IMPEDANCIAS

Sea el dipolo pasivo (red pasiva de dos terminales) de la figura .



La impedancia equivalente del dipolo pasivo entre los terminales A y B se define como el cociente entre la tensión , supuestamente aplicada entre los terminales A y B, y la intensidad de la corriente que toma el dipolo en estas condiciones. Es decir:

$$Z_{AB} = V / I \qquad (.22)$$

También se la denomina, impedancia de entrada o resistencia vista desde los terminales A y B.

Como aplicación del concepto anterior, veamos tres casos clásicos que permiten, en muchos casos simplificar o reducir una red eléctrica.

A) Asociación de impedancias en serie.

Puede comprobarse fácilmente que la impèdancia equivalente de varias Z_i conectadas en serie (atravesadas por la misma intensidad de corriente), es la suma compleja de las impedancias individuales.

$$Z_{eq} = \sum Z_i \qquad (.23)$$

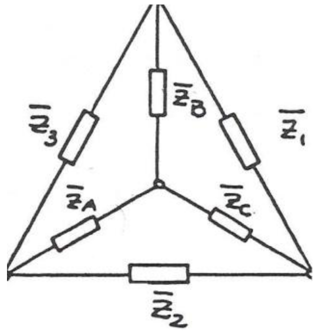
B) Asociación de impedancias en paralelo

Es inmediato verificar que la impedancia equivalente de varias conectadas en paralelo (misma tensión en terminales), sigue la siguiente ley:

$$1 / Z_{eq} = \sum 1/Z_i \qquad (.24)$$

C) <u>Transformación estrella- triángulo</u> (Y – Δ)

Supongamos que en una red se tienen tres impedancias Z_a, Z_b y Z_c conectadas como se indica en la siguiente Figura o sea en estrella. Se pretende sustituir en la red este grupo de impedancias por otras tres Z_1, Z_2 y Z_3 con configuración en triángulo.



Los terminales x, y, z podemos agruparlos dos a dos de las tres formas siguientes: xy, yz, xz. Evidentemente para que la equivalencia sea válida, la resistencia de entrada, entre cualquier pareja de terminales, ha de ser la misma en la configuración en triángulo. Por tanto, se deberá cumplir:

Del sistema anterior, podemos considerar como incógnitas las Z_1, Z_2 y Z_3 y despejarlas en función de Z_a, Z_b y Z_c, caso de que se quiera pasar de estrella a triángulo. O viceversa, despejar Z_a, Z_b y Z_c para obtener las fórmulas de equivalencia triángulo-estrella.

En definitiva, quedarían las siguientes ecuaciones:

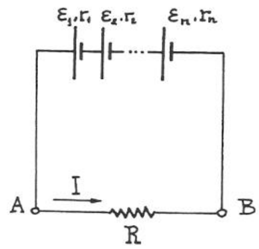
$$Z_1 = \frac{Z_A \cdot Z_B + Z_B \cdot Z_C + Z_A \cdot Z_C}{Z_A} \qquad\qquad Z_A = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

6.- <u>ASOCIACION DE GENERADORES</u>

El estudio se va a realizar con fuentes de corriente continua, el tratamiento con corriente alterna es idéntico, sólo hay que tener en cuenta que las operaciones es con complejos y que en vez de resistencias estamos trabajando con impedancias.

6.1.- <u>En serie</u>

Supongamos un sistema de "n" fuentes de tensión, caracterizadas, cada una de ellas, por su f.e.m. ε_1 y su resistencia interna r_i (i = 1, 2,…, n).



Se pretende pasar del esquema de la Figura a otro equivalente en el que sólo aparezca una fuente de tensión.

En la figura anterior, una resistencia de carga R tomaría una intensidad de corriente I, dada por:

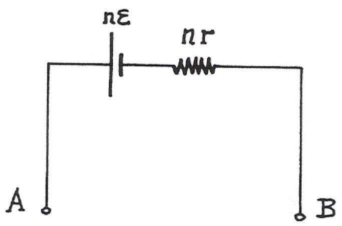
$I = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n) / (R + r_1 + r_2 + \ldots + r_n) = (\sum\varepsilon) / (R + \sum r)$ (.26)

Por tanto, la misma resistencia de carga R, tomaría la misma corriente I de una única fuente cuyas f.e.m. y resistencia interna, fueran:

$E_{eq} = \sum^{n}_{i=1} \varepsilon_i$ (.27)

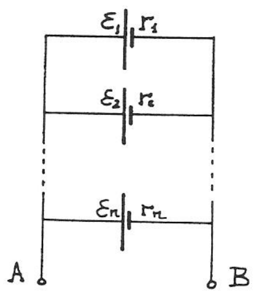
$R_{eq} = \sum^{n}_{i=1} r_i$ (.28)

Si las “n” fuentes de tensión fueran idénticas, cada una de ellas de f.e.m. ε y resistencia interna r, el esquema de la FIG. .14 se reduce al siguiente:

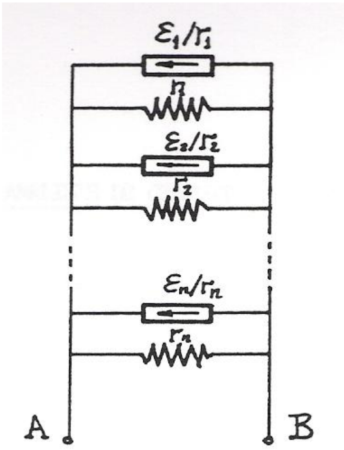


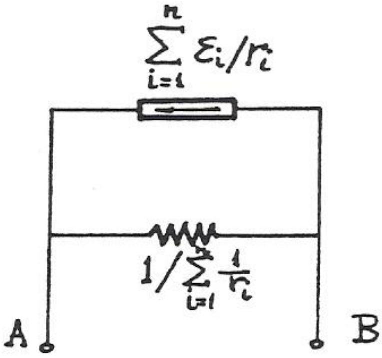
6.2.- <u>En paralelo</u>

Sean las “n” fuentes de tensión reales, conectadas como se indica en la figura siguiente, es decir, en paralelo:



Utilizando el teorema de intercambio de fuentes, convertimos las fuentes de tensión en fuentes de corriente:



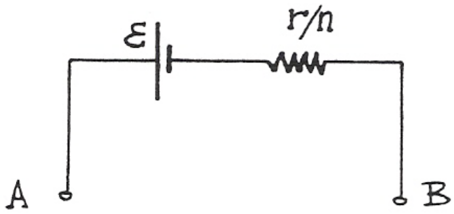


Pasando de nuevo a fuentes de tensión:

$$\boxed{\varepsilon_{eq} = \frac{\sum \varepsilon_i / r_i}{\sum 1/r_i}}$$

$$\boxed{r_{eq} = \frac{1}{\sum 1/r_i}}$$

Si todas las fuentes fuesen de iguales características (ε, r), el esquema de la Figura se reduce al siguiente:



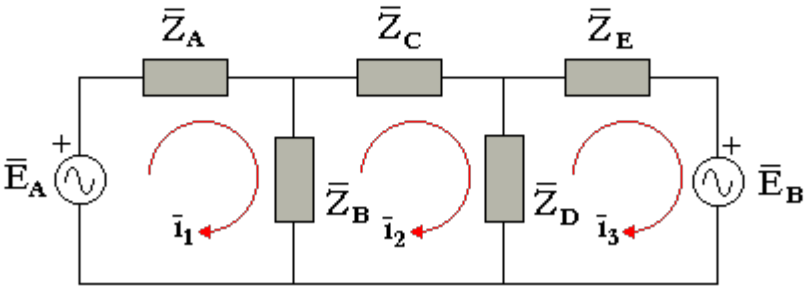
7.- <u>ANALISIS DE CIRCUITOS POR MALLAS Y NUDOS</u>

El análisis de circuitos, es decir, la determinación de corrientes y tensiones en cada elemento, puede hacerse empleando, exclusivamente, las dos leyes de Kirchhoff. Sin embargo, existen procedimientos más ágiles o técnicas de análisis más adecuadas, tales como los clásicos métodos de mallas y de nudos que estudiaremos a continuación y que, en definitiva, lo que pretenden es introducir un menor número de incógnitas.

7.1.- <u>Método de mallas</u>

Consiste en aplicar, de una forma explícita, solo la segunda ley de Kirchhoff o ley de tensiones. Si es N_N el número de nudos de una red y N_R el número de ramas, la segunda ley de Kirchhoff habrá que aplicarla a $N_R – (N_N – 1)$ mallas independientes. Una ecuación de malla será independiente de las que se hayan escrito previamente, cuando el camino de la red escogido incluya, al menos, un nuevo elemento del circuito.

Consideremos el siguiente circuito:



Para aplicar el método de las mallas, hay que elegir en primer lugar líneas cerradas, lazos o mallas, asignándole una corriente que se denominará “corriente mallal”. A continuación se describen las ecuaciones de la 2ª ley de Kirchhoff para cada lazo o malla, tomando las intensidades de corriente i_1, i_2 e i_3 como variables desconocidas, y resolviendo el sistema así formado.

En el circuito anterior, la corriente en Z_A será i_1, y la corriente en Z_B es i_1-i_2 si i_1 es mayor que i_2, o i_2-i_1 en caso contrario.

Vamos a llamar malla 1 a la situada a la izquierda, malla 2 a la central y malla 3 a la que se encuentra en la parte derecha del circuito. Obtendremos a continuación el sistema de ecuaciones del circuito que hemos tomado como ejemplo:

En la malla izquierda:

$$\bar{Z}_A \bar{I}_1 + \bar{Z}_B(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) = \bar{E}_A$$

En la malla central:

$$\overline{Z}_C\overline{I}_2 + \overline{Z}_B(\overline{I}_2 - \overline{I}_1) + \overline{Z}_D(\overline{I}_2 - \overline{I}_3) = 0$$

En la malla derecha:

$$\overline{Z}_E\overline{I}_3 + \overline{Z}_D(\overline{I}_3 - \overline{I}_2) = -\overline{E}_B$$

Ordenando, tendríamos lo siguiente:

$$\overline{I}_1(\overline{Z}_A + \overline{Z}_B) - \overline{I}_2\overline{Z}_B = \overline{E}_A$$

$$\overline{I}_1\overline{Z}_B + \overline{I}_2(\overline{Z}_B + \overline{Z}_C + \overline{Z}_D) - \overline{I}_3\overline{Z}_D = 0$$

$$\overline{I}_2\overline{Z}_D + \overline{I}_3(\overline{Z}_D + \overline{Z}_E) = -\overline{E}_B$$

La ecuación de una malla cualquiera se obtendrá efectuando una suma de términos, en el que uno sería el producto de la corriente mallal por la suma de impedancias a lo largo de la malla, y el resto de los términos serían el producto de las otras corrientes mallales, por las impedancias compartidas de la malla en cuestión con las otras mallas. Igualaremos esta suma de términos a la suma de tensiones debidas a fuentes en la malla.

Hay que observar, que en el método de las mallas, el número de mallas elegidas ha de ser suficiente, no siendo válido elegir un número menor.

Si el circuito es plano y sencillo, el número de mallas se deduce a simple vista. En casos más complejos es preciso tener algún criterio que proporcione el número de ecuaciones linealmente independientes, necesario para resolver el circuito. La norma más utilizada para determinar el número de mallas necesarias es la siguiente:

nº de ecuaciones = nº de mallas – (nº de nudos –1)

A este sistema de ecuaciones se podría haber llegado de otra forma. Basta con asignar a cada una de las mallas consideradas las corrientes I_1, I_2 e I_3, que se denominan <u>corrientes de malla o de lazo</u> (corrientes de Maxwell).

<u>Ecuaciones generales</u>

Las ecuaciones generales, que resultan para un circuito de n mallas, son:

$$
\begin{aligned}
\overline{Z}_{11}\overline{I}_1 + \overline{Z}_{12}\overline{I}_2 + \overline{Z}_{13}\overline{I}_3 + \ldots.. + \overline{Z}_{1n}\overline{I}_n &= \overline{E}_1 \\
\overline{Z}_{21}\overline{I}_1 + \overline{Z}_{22}\overline{I}_2 + \overline{Z}_{23}\overline{I}_3 + \ldots.. + \overline{Z}_{2n}\overline{I}_n &= \overline{E}_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\overline{Z}_{n1}\overline{I}_1 + \overline{Z}_{n2}\overline{I}_2 + \overline{Z}_{n3}\overline{I}_3 + \ldots.. + \overline{Z}_{nn}\overline{I}_n &= \overline{E}_n
\end{aligned}
$$

Z_{hh} ➘

Los términos de este tipo serán las sumas de las impedancias a lo largo de la malla h, son todos positivos y se llaman IMPEDANCIA PROPIA de la malla.

Z_{hk} ➘

Serán la impedancia compartida entre la malla h y la malla k, su signo dependerá del sentido de las corrientes. Si está recorrido por corrientes de igual sentido será positivo, y en caso contrario, negativo. Estos términos se denominan COPEDANCIAS.

E_h ➘

Obviamente será la suma de las fuerzas electromotrices a lo largo de la malla, y será positiva cuando la corriente mallal salga por su punto de mayor potencial, y negativa en caso contrario.

Este método parece preparado para cuando el circuito sólo tiene fuentes de tensión, y evidentemente sería más cómodo que así fuera, pero es obvio que si hay fuentes de intensidad, puede aplicarse efectuando las correspondientes transformaciones.

Forma matricial

La ecuación general puede escribirse en forma matricial:

$$
(\overline{Z})(\overline{I}) = (\overline{E})
$$

$$
\begin{pmatrix}
\overline{Z}_{11} & \overline{Z}_{12} & \overline{Z}_{13} & \ldots\ldots & \overline{Z}_{1n} \\
\overline{Z}_{21} & \overline{Z}_{22} & \overline{Z}_{23} & \ldots\ldots & \overline{Z}_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\overline{Z}_{n1} & \overline{Z}_{n2} & \overline{Z}_{n3} & \ldots\ldots & \overline{Z}_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \\ \vdots \\ \overline{I}_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\overline{E}_1 \\ \overline{E}_2 \\ \vdots \\ \overline{E}_n
\end{pmatrix}
$$

En la que la matriz intensidad es la incógnita. A continuación vemos el valor de las intensidades de malla, donde Δz es el determinante de la matriz de impedancias.

$$\bar{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{E}_1 & \bar{Z}_{12} & \bar{Z}_{13} \dots\dots & \bar{Z}_{1n} \\ \bar{E}_2 & \bar{Z}_{22} & \bar{Z}_{23} \dots\dots & \bar{Z}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{E}_n & \bar{Z}_{n2} & \bar{Z}_{n3} \dots\dots & \bar{Z}_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta z}$$

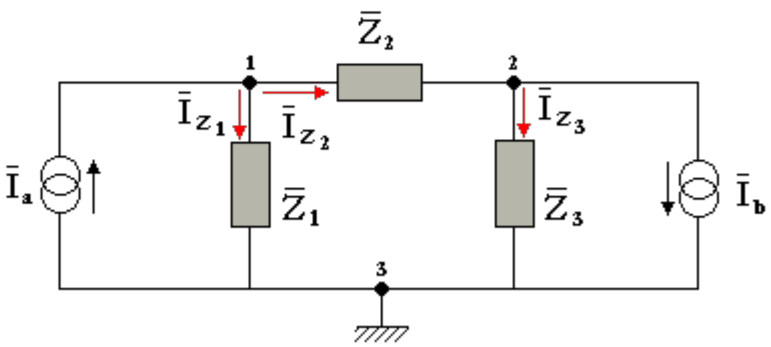
$$\bar{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{E}_1 & \bar{Z}_{13} \dots\dots & \bar{Z}_{1n} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{E}_2 & \bar{Z}_{23} \dots\dots & \bar{Z}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{Z}_{n1} & \bar{E}_n & \bar{Z}_{n3} \dots\dots & \bar{Z}_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta z}$$

El resto de intensidades se obtiene de forma análoga, sustituyendo la columna correspondiente de la matriz de impedancias por la columna de fuentes de tensión en cada malla.

7.2.- Método nodal

Este método resulta de aplicar la 1ª ley de Kirchhoff a un circuito, estimando como incógnitas las tensiones de los nudos. Como sabemos, la citada ley no se puede aplicar a todos los nudos, sino a n-1 nudos, por lo que en un circuito que tenga n nudos, tendremos n-1 incógnitas. El nudo no considerado nos servirá para ser tomado como referencia por los anteriores, entendiendo que cuando hablamos de un potencial en un nudo, en realidad estamos hablando de la diferencia de potencial de ese nudo respecto al tomado como referencia.

Consideremos el circuito de la figura, donde las fuentes de intensidad son de carácter senoidal:



Aplicando la 1ª ley de Kirchhoff:

Nudo 1:

$$\overline{I}_a = \overline{I}_{Z_1} + \overline{I}_{Z_2}$$

Nudo 2:

$$\overline{I}_{Z_2} = \overline{I}_{Z_3} + \overline{I}_b$$

Ponemos las siguientes intensidades en función de los potenciales:

$$\overline{I}_{Z_1} = \frac{\overline{V}_1 - \overline{V}_3}{\overline{Z}_1} = \frac{\overline{V}_1}{\overline{Z}_1} \qquad \overline{I}_{Z_2} = \frac{\overline{V}_1 - \overline{V}_2}{\overline{Z}_2} \qquad \overline{I}_{Z_3} = \frac{\overline{V}_2}{\overline{Z}_3}$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones obtenidas para los nudos 1 y 2, y distinguiendo entre corrientes debidas a fuentes y las corrientes en los elementos pasivos, obtendremos lo siguiente:

$$\overline{I}_a = \overline{V}_1(\overline{Y}_1 + \overline{Y}_2) + \overline{V}_2(-\overline{Y}_2)$$

$$-\overline{I}_b = \overline{V}_1(-\overline{Y}_2) + \overline{V}_2(\overline{Y}_2 + \overline{Y}_3)$$

Estudiaremos las últimas expresiones, tratando de generalizar. En el miembro de la izquierda hemos situado las corrientes debidas a fuentes, las cuales serán positivas cuando se acerquen a un nudo, y negativas cuando se alejen. Esto nos puede hacer suponer que el método de los nudos sólo sirve si las fuentes son de intensidad, y no es así, ya que si se tratara de fuentes de tensión, se transformarían en fuentes de intensidad.

En el miembro de la derecha están expuestos los productos de las tensiones en los nudos por las admitancias (inversa de la impedancia). En la ecuación del nudo 1, V_1 multiplicaría a la suma de las admitancias que concurren en el nudo 1, y V_2 a la admitancia comprendida entre el nudo 1 y el nudo 2. Si mantenemos V_2 positivo, esta admitancia habrá que expresarla negativamente en todos los casos, ya que siempre una corriente será la diferencia de potenciales multiplicada por la admitancia.

Ecuaciones generales

Procedemos ahora a generalizar lo que hemos estado comentando anteriormente; expresaríamos para un sistema de n+1, es decir, con n nudos, lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\bar{I}_1 &= \bar{Y}_{11}\bar{V}_1 + \bar{Y}_{12}\bar{V}_2 + \ldots.. + \bar{Y}_{1n}\bar{V}_n \\
\bar{I}_2 &= \bar{Y}_{21}\bar{V}_1 + \bar{Y}_{22}\bar{V}_2 + \ldots.. + \bar{Y}_{2n}\bar{V}_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\bar{I}_n &= \bar{Y}_{n1}\bar{V}_1 + \bar{Y}_{n2}\bar{V}_2 + \ldots.. + \bar{Y}_{nn}\bar{V}_n
\end{aligned}
$$

Todo esto, expresado en forma matricial sería:

$$(\bar{Y})(\bar{V}) = (\bar{I})$$

$$
\begin{pmatrix}
\bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \bar{Y}_{13} \ldots\ldots & \bar{Y}_{1n} \\
\bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & \bar{Y}_{23} \ldots\ldots & \bar{Y}_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\bar{Y}_{n1} & \bar{Y}_{n2} & \bar{Y}_{n3} \ldots\ldots & \bar{Y}_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \vdots \\ \bar{V}_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_n
\end{pmatrix}
$$

$(\bar{I})$ ➘

Es la matriz columna de n filas, en la que cada término expresa la suma de corrientes debidas a fuentes, con el convenio de que serán positivas las que entren y negativas las que salgan. Es la suma algebráica de las corrientes, originadas por elementos activos, que concurren en el nudo "i". Una corriente será positiva si se dirige hacia el nudo, y negativa en caso contrario. Es obvio que el método de análisis nodal, en general, resulta más cómodo cuando las fuentes existentes en la red son fuentes de corriente. En nuestro ejemplo, los elementos de la matriz de corrientes, se determinan sin más que convertir las dos fuentes de tensión en fuentes de corriente.

$(\bar{V})$ ➘

Es otra matriz columna que expresa los potenciales de los nudos, considerados como incógnitas.

$(\bar{Y})$ ➘

Es la matriz del sistema y está formada por dos tipos de términos:

Y_{hh} ➘

Representan la suma de admitancias que concurren en el nudo h, y siempre estos términos serán positivos. Se denomina ADMITANCIA PROPIA del nudo en cuestión.

Y_{hk} ↘

Será la suma de las admitancias que unen el nudo h y el nudo k, que siempre serán negativas. Se denominan COMITANCIAS o COADMITANCIAS de los nudos h y k.

Resolviendo por Cramer tendríamos:

$$\overline{V}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \overline{I}_1 & \overline{Y}_{12} & \overline{Y}_{13} \ldots\ldots & \overline{Y}_{1n} \\ \overline{I}_2 & \overline{Y}_{22} & \overline{Y}_{23} \ldots\ldots & \overline{Y}_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \overline{I}_n & \overline{Y}_{n2} & \overline{Y}_{n3} \ldots\ldots & \overline{Y}_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta_Y}$$

$$\overline{V}_n = \frac{\begin{vmatrix} \overline{Y}_{11} & \overline{Y}_{12} & \overline{Y}_{13} \ldots\ldots & \overline{I}_1 \\ \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} & \overline{Y}_{23} \ldots\ldots & \overline{I}_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \overline{Y}_{n1} & \overline{Y}_{n2} & \overline{Y}_{n3} \ldots\ldots & \overline{I}_n \end{vmatrix}}{\Delta_Y}$$

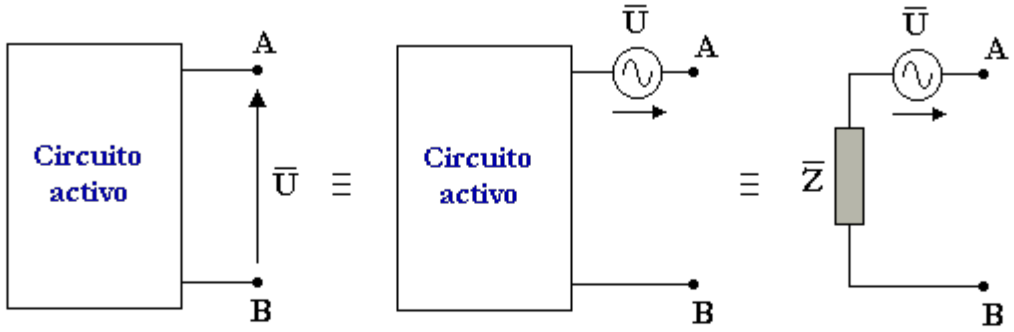
El resto de intensidades se calcula de forma análoga, sustituyendo la columna correspondiente de la matriz de admitancias por la columna de intensidades que llegan o salen de cada nudo.

8.- TEOREMAS DE THEVENIN, NORTON Y SUPERPOSICIÓN

8.1.- TEOREMA DE THEVENIN O DE LA FUENTE DE TENSIÓN EQUIVALENTE

En alguna ocasión, puede que sólo nos interese exclusivamente el comportamiento de una de las ramas del circuito. En tal caso, son de gran utilidad los teoremas de Thévenin y Norton, muy empleados en electrónica y en general en teoría de circuitos por su capacidad simplificadora.

Todo circuito lineal activo con dos terminales accesibles, A y B, puede ser sustituido desde el punto de vista de sus efectos exteriores, por su correspondiente circuito pasivo, obtenido al anular todas las fuentes de excitación, conectado en serie con una fuente ideal de tensión que proporciona una tensión U idéntica a la que aparece en el primitivo circuito con sus terminales A y B abiertos. El circuito pasivo puede sustituirse por una impedancia Z, que es la que ofrece el circuito pasivo en los terminales A y B, es decir, la impedancia equivalente entre dichos terminales; también se podría calificar como la que ofrece el circuito activo entre los terminales citados, anulando todas las fuentes de excitación en él, pero conservando sus impedancias internas.



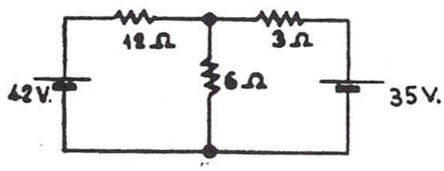
En los circuitos anteriores hemos colocado en la fuente de tensión una flecha indicativa del sentido. Esto no es necesario para el caso de fuente sinusoidal, pero si cuando tengamos una fuente de continua, por eso la hemos puesto, como indicación para dicho supuesto.

El valor V_{th} es el de la tensión que se obtiene en los terminales de salida AB en circuito abierto, es decir sin que esté conectada R_L.

El valor de R_{Th} es la relación entre el voltaje en el circuito y la corriente de cortocircuito entre AB, que también se puede obtener calculando la impedancia vista por observación en los terminales AB y quitando todas las fuentes de energía independientes (cuidado en los circuitos de transistores donde hay fuentes dependientes). Para quitar las fuentes de tensión se cortocircuitan sus terminales y para quitar las de corriente se dejan en circuito abierto.

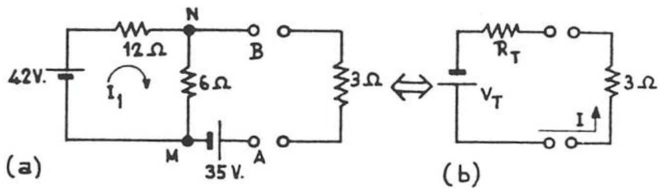
<u>EJEMPLO:</u>

Determínese la corriente en la resistencia de 3 Ω de la figura



Solución:

Vamos a modificar el dibujo

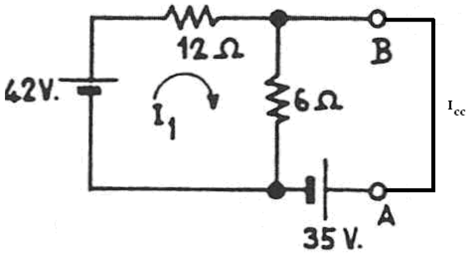


$$v_{AB} = v_{AM} + v_{MN}$$

$$V_{AB} = V_{Th} = 35 - 6\, I_1 = 21$$

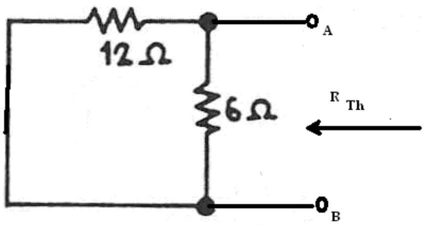
La resistencia se puede calcular de dos formas:

a) Como relación de la tensión de Thevenin y la Intensidad de cortocircuito entre los terminales A y B



$R_{Th} = V_{Th} / I_{cc}$; $R_{Th} = 21 / (21 / 4) = 4\ \Omega$

b) Impedancia equivalente entre los terminales A y B eliminando todas las fuentes de tensión e intensidad que existan entre A y B a circuito abierto:

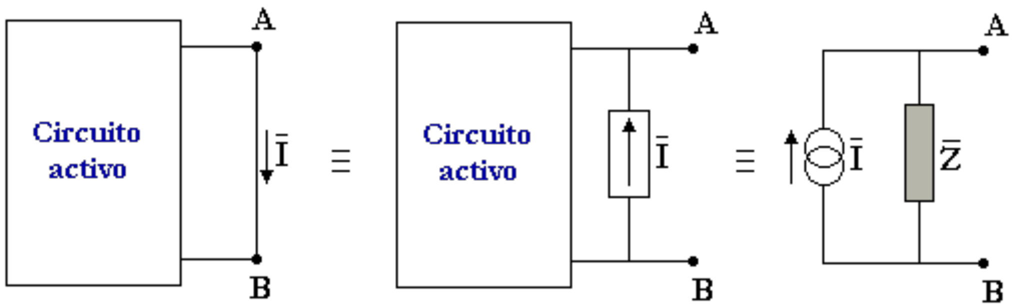


$1 / R_{Th} = 1/12 + 1/6 \implies R_{Th} = 4\ \Omega$

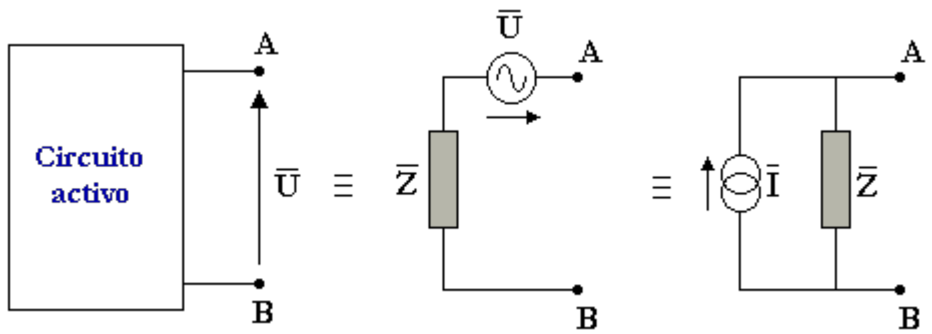
En el caso de tener en el circuito fuentes dependientes, el equivalente de Thevenin sólo es posible resolverlo mediante el primer método o relación entre tensión de Thevenin e Intensidad de cortocircuito.

8.2.- TEOREMA DE NORTON O DE LA FUENTE DE INTENSIDAD EQUIVALENTE

Todo circuito lineal activo con dos terminales accesibles A y B, puede sustituirse desde el punto de vista de sus efectos exteriores por su correspondiente circuito pasivo, obtenido anulando todas sus fuentes de excitación, conectado en paralelo con una fuente ideal de intensidad, que produzca la misma intensidad de corriente que la que origina el circuito activo con sus terminales A y B en cortocircuito. El circuito pasivo puede sustituirse por una impedancia Z, que es la que ofrece el circuito pasivo en los terminales A y B, es decir, la impedancia equivalente entre dichos terminales. También se podría calificar como la que ofrece el circuito activo entre los terminales citados, anulando todas las fuentes de excitación en él, pero conservando sus impedancias internas.



Relación entre THEVENIN Y NORTON



Tendremos que V=IZ.

8.3.- TEOREMA DE SUPERPOSICIÓN

En general un teorema de superposición para cualquier fenómeno físico es aquél que dice que si la causa y el efecto están relacionados linealmente el efecto total de varias causas que actúan simultáneamente es igual a la suma de los efectos de las causas individualmente actuando una a una.

En los circuitos eléctricos, las causas son la excitación de voltajes y corrientes, y los efectos los voltajes y corrientes de respuesta.

Cuando se tenga que ver la respuesta del circuito a un solo generador, se tendrán que sustituir todos los demás generadores por su resistencia interna esto es los generadores de tensión se cortocircuitarán y los de corriente se quedarán en circuito abierto.

O sea, el principio de superposición se aplica de la manera siguiente:

a) Se suprime (igualar a cero) todas las fuentes independientes excepto una.

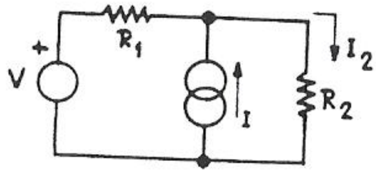
b) Se halla la componente de la tensión o de la corriente debida a dicha fuente conectada.

c) Se repite este proceso para cada una de las fuentes independientes.

d) Finalmente, se suman todas las componentes halladas para obtener el valor total.

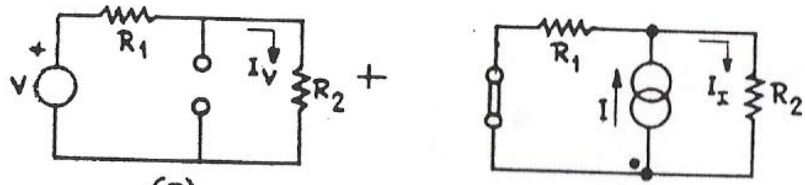
Ejemplo

Calcular por superposición la corriente I_2 en R_2, de la figura



Solución:

Este circuito se resolverá como suma:



(a) (b)

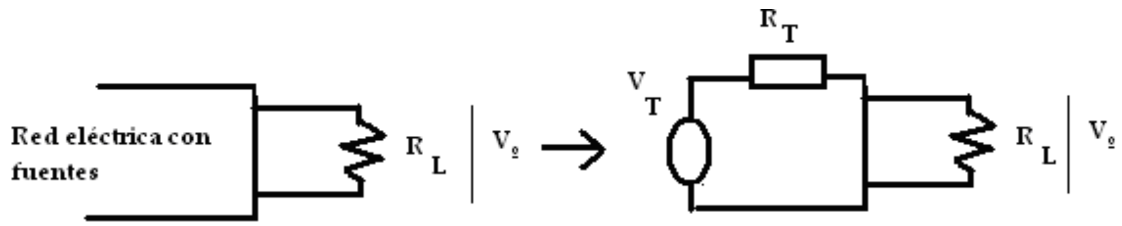
$$I_V = \frac{V}{R_1 + R_2} \qquad + \qquad I_I = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, I$$

$$I_2 = I_V + I_I = \frac{V}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, I$$

9.- TEOREMA DE LA TRANSFERENCIA DE MÁXIMA POTENCIA

Con frecuencia interesa obtener la máxima potencia posible de una red. Un ejemplo típico es el caso de un amplificador de alta fidelidad, cuando se desea seleccionar el altavoz apropiado que reciba la máxima potencia de audio.

En esencia, el problema presentado es el siguiente: ¿Cuál será el valor que debe darse a R_L con el fin de conseguir maximizar la potencia disipada por R_L *y que le transfiere el resto del circuito?*



Para resolver este problema se procede de la manera siguiente

1. Obtener el circuito equivalente de Thevenin de la red.
2. Hallar la expresión de $P_{Rl}(t)$, potencia disipada por R_L en función del tiempo.
3. Calcular $\delta P_{RL} / \delta R_L = O$ y hallar R_L.

Aplicando los tres pasos básicos en la figura anterior se tiene

$$V_o(t) = V_{\text{Th}}(t) \frac{R_L}{R_{\text{Th}} + R_L}$$

Siendo V_o la tensión de salida

$$p_{R_L}(t) = \frac{V_{\text{Th}}^2(t)}{R_L} \frac{R_L^2}{(R_{\text{Th}} + R_L)^2}$$

Para hallar el máximo de $p_{RL}(t)$, obtener su derivada respecto a la variable R_L e igualar a cero.

$$\frac{\partial p_{R_L}}{\partial R_L} = V_{\text{Th}}^2 \frac{(R_{\text{Th}} + R_L)^2 1 - R_L 2(R_{\text{Th}} + R_L)}{(R_{\text{Th}} + R_L)^4} = 0$$

$$R_{\text{Th}}^2 + 2R_{\text{Th}} R_L + R_L^2 - 2R_L R_{\text{Th}} - 2R_L^2 = 0$$

$$R_{\text{Th}}^2 - R_L^2 = 0$$

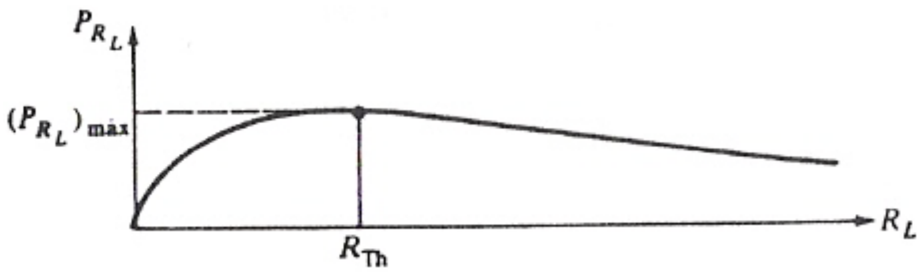
$$R_L = R_{\text{Th}}$$

La potencia máxima es :

$$(p_{R_L})_{\text{máx}} = \frac{V_o^2}{R_L}$$

$$= \frac{(V_{Th}/2)^2}{R_{Th}} = \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}}$$

Este valor máximo se llama potencia utilizable debido a que si se elige correctamente puede obtenerse esa cantidad de potencia. Cuando ocurre esto se dice que la red eléctrica y la carga están acopladas. La elección de otro valor, dará como resultado una potencia menor que la máxima posible que pueda suministrar a R_L.



Cuando se aplica a los circuitos de corriente alterna, el teorema de la máxima transferencia de potencia establece que:

“ Se proporcionara la potencia máxima a una carga cuando la impedancia de carga sea la conjugada de la impedancia de Thevenin a través de terminales”.

$Z_L = Z_{Th}$ y $\Theta_L = -\Theta_{Th\,Z}$