MATEMÁTICA DISCRETA

Relaciones en Recurrencia

Definición

Una sucesión de números reales es una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Usualmente se escribe $f(n) = x_n$ para indicar el término n-ésimo de la sucesión y $\{x_n\} = x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ para indicar la secuencia de términos.

Una sucesión se puede definir de distintas maneras:

- Mediante una *fórmula explícita*, donde el término n-ésimo viene dado directamente como función de n. Ejemplo: $x_n = n! + n^2$.
- Mediante una *recurrencia*. En este caso, el término n-ésimo viene expresado en función de algunos de los términos anteriores. Ejemplo: $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, donde $n \geq 3$ y $x_1 = x_2 = 1$.

Definición

- Una ecuación $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}, n)$, $n > k$, se denomina **recurrencia de orden** k.
- Llamaremos **recurrencias lineales homogéneas** de orden k con coeficientes constantes a las recurrencias de la forma $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k}$, donde $a_1, \ldots a_k \in \mathbb{R}$ y $a_k \neq 0$.
- Llamaremos **recurrencias lineales no homogéneas** de orden k con coeficientes constantes a las recurrencias de la forma $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k} + R_n$, donde $a_1, \ldots a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$ y $R_n \neq 0$.

Dos problemas clásicos relacionados con las recurrencias son:

1. Plantear una *recurrencia* que nos ayude a resolver un problema combinatorio en el que, por ejemplo, sea necesario contar algo que dependa de un número $n \in \mathbb{N}$.
2. Encontrar la *forma explícita* de una sucesión dada en forma recurrente.

Ejemplo

Sea X un conjunto de cardinalidad n. Para $k \leq n$, calcular el número de subconjuntos de X de cardinalidad k.

Solución:

- Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ y sea P_k el conjunto formado por los subconjuntos de X de cardinalidad k.
- Llamemos $C(n,k) = |P_k|$. Observa que $C(n,1) = n$ y $C(n,n) = 1$.
- Asumamos que $k < n$. Sea $P_k^1 = \{S \in P_k : x_1 \in S\}$.
- $|P_k^1| = C(n-1,k-1)$ (cada elemento S de P_k^1 se puede formar tomando $k-1$ elementos de los $n-1$ elementos de $X \setminus \{x_1\}$)
- $|P_k \setminus P_k^1| = C(n-1,k)$ (cada elemento S de $P_k \setminus P_k^1$ se puede formar tomando k elementos de los $n-1$ elementos de $X \setminus \{x_1\}$)
- $C(n,k) = |P_k| = |P_k^1| + |P_k \setminus P_k^1| = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$.

Ejemplo

Tenemos que subir una escalera de $n \geq 1$ peldaños. Decidimos, en cada paso, subir un peldaño o bien subir dos. Bajo estas condiciones, calcula de cuántas maneras diferentes podemos subir la escalera.

Solución:

Sea x_n la cantidad de maneras de subir una escalera de $n \geq 1$ peldaños. Observa que podemos descomponer el conteo en dos subtotales:

- Calcular la cantidad de maneras de subir hasta el peldaño $n-1$ y luego subir el último peldaño en un paso. $\to x_{n-1}$
- Calcular la cantidad de maneras de subir hasta el peldaño $n-2$ y luego subir hasta el último peldaño dando un paso de dos peldaños. $\to x_{n-2}$

Por tanto, si $n \geq 3$, entonces $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, donde $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Dos problemas clásicos relacionados con las recurrencias son:

1. Plantear una *recurrencia* que nos ayude a resolver un problema combinatorio en el que, por ejemplo, sea necesario contar algo que dependa de un número $n \in \mathbb{N}$.
2. Encontrar la *forma explícita* de una sucesión dada en forma recurrente.

El segundo problema lo abordaremos para los siguientes casos de <u>recurrencias lineales</u> con coeficientes constantes:

- de orden 1 $\quad (x_n = \alpha x_{n-1} + R_n)$
- homogéneas de orden 2 $\quad (x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2})$

¿Cómo se resuelve la recurrencia $x_n = \alpha x_{n-1} + R_n, \quad n \geq 1$?

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \alpha x_0 + R_1 \\
x_2 &= \alpha x_1 + R_2 \\
&= \alpha(\alpha x_0 + R_1) + R_2 \\
&= \alpha^2 x_0 + \alpha R_1 + R_2 \\
x_3 &= \alpha x_2 + R_3 \\
&= \alpha(\alpha^2 x_0 + \alpha R_1 + R_2) + R_3 \\
&= \alpha^3 x_0 + \alpha^2 R_1 + \alpha R_2 + R_3 \\
&\dots \\
x_n &= \alpha^n x_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha^{n-j} R_j.
\end{aligned}
$$

Ejemplo

Encuentra una fórmula explícita para la siguiente recurrencia:

$$x_n = x_{n-1} + 2n \quad \forall n \geq 1, \text{ donde } x_0 = 3.$$

Solución:

- $x_n = \alpha^n x_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha^{n-j} R_j$.
- En nuestro caso, $\alpha = 1$ y $R_n = 2n$. Por tanto, la solución es

$$x_n = 3 + \sum_{j=1}^{n} 2j = 3 + 2\sum_{j=1}^{n} j = 3 + n(n+1).$$

¿Cómo se resuelve la recurrencia $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2}, \quad n \geq 3$?

Definición

Dada la recurrencia $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, la ecuación $t^2 - at - b = 0$ se denomina **ecuación característica** de dicha recurrencia.

Teorema

Dada la recurrencia $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, sean λ_1 y λ_2 las soluciones de la ecuación característica $t^2 - at - b = 0$.

- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces, para toda solución $\{y_n\}$ de la recurrencia, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que $y_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$.
- Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ entonces, para toda solución $\{y_n\}$ de la recurrencia, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que $y_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^{n-1}$.

Ejemplo

Resuelve la recurrencia $x_n = x_{n-1} + 6x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ con las condiciones iniciales $x_0 = 0, x_1 = 1$.

Solución:

- La solución general es $x_n = \alpha(-2)^n + \beta \cdot 3^n$.
- Como $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$, obtenemos,

$$\begin{aligned} 0 = x_0 = \alpha(-2)^0 + \beta \cdot 3^0 &= \alpha + \beta \\ 1 = x_1 = \alpha(-2)^1 + \beta \cdot 3^1 &= -2\alpha + 3\beta \end{aligned}$$

- Se obtiene que $\alpha = -\frac{1}{5}, \beta = \frac{1}{5}$.
- Por tanto, $x_n = -\frac{1}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n$.

Ejemplo

Resuelve la recurrencia $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ con las condiciones iniciales $x_0 = 1, x_1 = 2$.

Solución:

- La solución general es $x_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot n \cdot 1^{n-1}$.
- Como $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$, obtenemos,

$$\begin{aligned} 1 &= x_0 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha \\ 2 &= x_1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = \alpha + \beta \end{aligned}$$

- Se obtiene que $\alpha = \beta = 1$. Por tanto, $x_n = 1 + n$.