Ejercicios resueltos

Tema 3: Álgebra de Conmutación

Ejercicio 1

Obtener la expresión algebraica para la función XNOR de dos entradas a partir de la expresión de la función XOR de dos entradas. $XNOR\ x\,,y = x\ y \quad x\ y$.

$$XOR(x,y) = x\bar{y} + \bar{x}y$$

$$XNOR(x,y) = \overline{x\bar{y} + \bar{x}y} = \overline{x\bar{y}} \cdot \overline{\bar{x}y} = (\bar{x}+y)\cdot(x+\bar{y}) = \cancel{\bar{x}x} + \bar{x}\bar{y} + yx + \cancel{y\bar{y}}$$

Ejercicio 2

Utilizando las leyes de DeMorgan reiteradamente obtener una expresión en forma de suma de productos para las siguientes funciones:

a) $F = \overline{x \quad y \quad \overline{x\ y \quad z}}$

b) $G = \overline{\overline{x\ y \quad x\ z} \quad \overline{x \quad y\ z}}$

a) $F = \overline{(x+y)\,\overline{(x\bar{y}+z)}} = \overline{(x+y)} + (x\bar{y}+z) = \bar{x}\bar{y} + x\bar{y} + z = \bar{y} + z$

b) $G = \overline{\overline{(\bar{x}\bar{y} + xz)} \cdot \overline{(\bar{x} + \bar{y}\cdot z)}} = \bar{x}\bar{y} + xz + \bar{x} + \bar{y}z = \bar{x} + xz + \bar{y}z = \bar{x} + z + \bar{y}z =$

$\bar{x} + z$

Ejercicios resueltos

Tema 3: Álgebra de Conmutación

Ejercicio 3

Verificar las siguientes igualdades utilizando los postulados y teoremas del Álgebra de Boole. Indíquese en cada paso qué postulado o teorema se ha utilizado:

a) $x \quad y \quad x\,y \quad x \quad y \quad x\,y = 0$

b) $x \quad y \quad x\,y \quad x\,y \quad x\,z \quad y\,z = x\,y \quad x\,y\,z$

c) $a\,b\,c \quad d \quad c \quad d \quad c \quad d \quad e = a\,b\,c \quad d$

a) $(x+\bar{y}+xy)(x+\bar{y})\bar{x}y = 0$

$(x+\bar{y})(x+\bar{y})\bar{x}y = 0$ $(A+AB=A)$

$(x+\bar{y})\bar{x}y = 0$ $(A \cdot A = A)$

$x\bar{x}y+\bar{y}y\bar{x} = 0$

$0 + 0 = 0$ $(A \cdot \bar{A} = 0)$

b) $(x+\bar{y}+x\bar{y})(xy+\bar{x}z+yz) = xy+\bar{x}\bar{y}z$

$(x+\bar{y})(xy+\bar{x}z+yz) = xy+\bar{x}\bar{y}z$ $(A+AB=A)$

$xy+xyz+\bar{x}\bar{y}z = xy+\bar{x}\bar{y}z$

$xy+\bar{x}\bar{y}z = xy+\bar{x}\bar{y}z$ $(A+AB=A)$

c) $(abc+d)(c+d)(c+d+e) = abc+d$

$(abc+d)(c+d) = abc+d$ $(A\cdot(A+B)=A)$

$abc+abcd+cd+d = abc+d$

$abc+d = abc+d$ $(A+AB=A)$

Ejercicios resueltos

Tema 3: Álgebra de Conmutación

Ejercicio 4

Suponiendo que $x= y\,z \quad y\,z$, comprobar las siguientes igualdades:

a) $x= y\,z \quad y\,z$

b) $y= x\,z \quad x\,z$

c) $z= x\,y \quad x\,y$

$x = \bar{y}z + y\bar{z} = y \oplus z$

a) $\bar{x} = yz + \bar{y}\bar{z}$; $\bar{x} = \overline{y \oplus z}$. Ver ej 1

b) $y = \bar{x}z + x\bar{z}$; $y = x \oplus z = y \oplus z \oplus z = y \oplus 0 = y$

c) $z = \bar{x}y + x\bar{y}$; $z = x \oplus y = y \oplus z \oplus y = z \oplus 0 = z$

Ejercicios resueltos

Tema 3: Álgebra de Conmutación

Ejercicio 5

Comprobar que la función XOR es asociativa y conmutativa. Comprobar también que $x \quad y \quad z = x\,y \quad x\,z$

ASOCIATIVIDAD

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus b \oplus c$$

$$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b\bar{c} + \bar{b}c) = a\,\overline{(b\bar{c} + \bar{b}c)} + \bar{a}\,(b\bar{c} + \bar{b}c) =$$

$$a(\overline{b\bar{c}} \cdot \overline{\bar{b}c}) + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c = a((\bar{b} + c) \cdot (b + \bar{c})) + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c =$$

$$a(bc + \bar{b}\bar{c}) + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c = abc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c \quad (1)$$

$$(a \oplus b) \oplus c = c \oplus (a\bar{b} + \bar{a}b) = c\,\overline{(a\bar{b} + \bar{a}b)} + \bar{c}\,(a\bar{b} + \bar{a}b) =$$

$$c(\overline{a\bar{b}} \cdot \overline{\bar{a}b}) + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} = c((\bar{a} + b) \cdot (a + \bar{b})) + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} =$$

$$c(ab + \bar{a}\bar{b}) + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} = abc + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}b\bar{c} \quad (2)$$

$$(1) = (2) \Rightarrow a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$$

Por definición, $a \oplus b \oplus c = (1)$ ya que es la expresión que vale 1 cuando el número de 1s de la función es impar

CONMUTATIVIDAD

Al estar basada en sumas y productos, ya que estos son conmutativos, la XOR también lo es.

$$x(y \oplus z) = xy \oplus xz$$

$$x(y\bar{z} + \bar{y}z) = xy\,\overline{xz} + \overline{xy}\,xz$$

$$xy\bar{z} + x\bar{y}z = xy(\bar{x} + \bar{z}) + xz(\bar{x} + \bar{y})$$

$$xy\bar{z} + x\bar{y}z = xy\bar{z} + x\bar{y}z$$

Ejercicios resueltos

Tema 3: Álgebra de Conmutación

Ejercicio 6

Comprobar las siguientes relaciones relativas a la función XOR:

a) $x \quad x = 0 \;;\; x \quad x = 1$

b) $x \quad 0 = x \;;\; x \quad 1 = x$

c) $x \quad y = z \qquad x \quad z = y$

d) $x \quad y = z \qquad x \quad y \quad z = 0$

a) $x \oplus x = 0 \;;\; x\bar{x} + \bar{x}x = 0$

$x \oplus \bar{x} = 1 \;;\; xx + \bar{x}\bar{x} = 1$

b) $x \oplus 0 = x \;;\; x \cdot 1 + \bar{x} \cdot 0 = x$

$x \oplus 1 = \bar{x} \;;\; x \cdot 0 + \bar{x} \cdot 1 = \bar{x}$

c) $x \oplus y = z \Rightarrow x \oplus z = y$ Ver ej: 4

d) $x \oplus y = z \Rightarrow x \oplus y \oplus z = 0 \;;\; x \oplus y \oplus x \oplus y = 0 \oplus 0 = 0$

Ejercicios resueltos

Tema 3: Álgebra de Conmutación

Ejercicio 7

Obtener la tabla de verdad que corresponde a las siguientes funciones de conmutación expresadas algebraicamente:

a) $F = x\ y \quad x\ z \quad y\ z$

b) $G = \ x \quad z \quad y \quad z$

a) $F = xy + \bar{x}z + y\bar{z} = xy(z+\bar{z}) + \bar{x}z(y+\bar{y}) + y\bar{z}(x+\bar{x}) =$

$xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$

x	y	z	F	G
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

b) $G = (\bar{x}+\bar{z})(y+z) = (\bar{x}+\bar{z}+y\bar{y})(y+z+x\bar{x}) =$

$(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})(x+y+z)(\bar{x}+y+z)$