CÁLCULO

Extremos de funciones de varias variables

Extremos de funciones de varias variables

Extremos de funciones de varias variables

- Definiciones básicas.

Extremos de funciones de varias variables

- Definiciones básicas.
- Extremos relativos para funciones diferenciables.

Extremos de funciones de varias variables

- Definiciones básicas.
- Extremos relativos para funciones diferenciables.
- Dominios con frontera: Extremos condicionados.

Extremos de funciones de varias variables

- Definiciones básicas.
- Extremos relativos para funciones diferenciables.
- Dominios con frontera: Extremos condicionados.
  - Método de los multiplicadores de Lagrange.

Definiciones básicas

Definiciones básicas

Definición

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función y $(x_0, y_0) \in D$. Entonces:

- f tiene un **mínimo local (o relativo)** en (x_0, y_0) si existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para cualquier $(x, y) \in D \cap B((x_0, y_0), \delta)$.
- f tiene un **mínimo global (o absoluto)** en (x_0, y_0) si se verifica que $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$ para cualquier $(x, y) \in D$.
- f tiene un **máximo local (o relativo)** en (x_0, y_0) si existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para cualquier $(x, y) \in D \cap B((x_0, y_0), \delta)$.
- f tiene un **máximo global (o absoluto)** en (x_0, y_0) si se verifica que $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ para cualquier $(x, y) \in D$.

Teorema

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua definida sobre un **dominio compacto** (dominio **cerrado**(que contiene a su propia frontera) y **acotado** (que está totalmente contenido en una bola de radio suficientemente grande)). Entonces f alcanza en D su máximo y mínimo global.

Definición

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Un punto $(x_0, y_0) \in D$ es un *punto crítico* si una de las siguientes condiciones se satisface.

(i) $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ no existe.

(iii) (x_0, y_0) está sobre la frontera de D.

Definición

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Un punto $(x_0, y_0) \in D$ es un *punto crítico* si una de las siguientes condiciones se satisface.

(i) $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ o $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ no existe.

(iii) (x_0, y_0) está sobre la frontera de D.

Definición

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Un punto crítico $(x_0, y_0) \in D$ se dice *punto de silla* si para cada bola $B((x_0, y_0), \delta)$ existen puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) tales que $f(x_1, y_1) < f(x, y)$ y $f(x_2, y_2) > f(x, y)$.

Teorema (Condición necesaria para extremos relativos)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Si f es diferenciable y tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), entonces $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, y por lo tanto, (x_0, y_0) es un punto crítico.

Teorema (Condición necesaria para extremos relativos)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Si f es diferenciable y tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), entonces $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, y por lo tanto, (x_0, y_0) es un punto crítico.

Ejemplo: Demuestra que $(-2, 3)$ es un punto crítico de $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$.

Teorema (Condición necesaria para extremos relativos)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Si f es diferenciable y tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), entonces $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, y por lo tanto, (x_0, y_0) es un punto crítico.

Ejemplo: Demuestra que $(-2, 3)$ es un punto crítico de $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$.

Solución:

Teorema (Condición necesaria para extremos relativos)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Si f es diferenciable y tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), entonces $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, y por lo tanto, (x_0, y_0) es un punto crítico.

Ejemplo: Demuestra que $(-2, 3)$ es un punto crítico de $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$.

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 8,$$

Teorema (Condición necesaria para extremos relativos)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Si f es diferenciable y tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), entonces $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, y por lo tanto, (x_0, y_0) es un punto crítico.

Ejemplo: Demuestra que $(-2, 3)$ es un punto crítico de $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$.

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 8, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 6.$$

Teorema (Condición necesaria para extremos relativos)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Si f es diferenciable y tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), entonces $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, y por lo tanto, (x_0, y_0) es un punto crítico.

Ejemplo: Demuestra que $(-2, 3)$ es un punto crítico de $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$.

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 8, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 6.$$

Entonces, $\nabla f(x, y) = (4x + 8, 2y - 6)$

Teorema (Condición necesaria para extremos relativos)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función. Si f es diferenciable y tiene un extremo relativo en (x_0, y_0), entonces $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, y por lo tanto, (x_0, y_0) es un punto crítico.

Ejemplo: Demuestra que $(-2, 3)$ es un punto crítico de $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$.

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 8, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 6.$$

Entonces, $\nabla f(x, y) = (4x + 8, 2y - 6) \quad \to \quad \nabla f(-2, 3) = (0, 0)$.

Por tanto, $(-2, 3)$ es un punto crítico de f.

$$Hess\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \qquad \text{(Matriz Hessiana de } f\text{)}$$

$$Hess\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \qquad \text{(Matriz Hessiana de } f\text{)}$$

Teorema (Criterio del Hessiano)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función con todas sus derivadas parciales de segundo orden continuas, y $(x_0, y_0) \in D$ un punto crítico de f ($\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$). Sea $Hf(x_0, y_0)$ el determinante de la matriz Hessiana. Entonces

(i) Si $Hf(x_0, y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x_0, y_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en (x_0, y_0).

(ii) Si Si $Hf(x_0, y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(x_0, y_0) < 0$, entonces f tiene un máximo local en (x_0, y_0).

(iii) Si $Hf(x_0, y_0) < 0$, entonces f tiene un punto de silla en (x_0, y_0).

Resumen

La búsqueda de extremos relativos en funciones diferenciables puede hacerse siguiendo los siguientes pasos.

- A1 Buscar los puntos críticos desechando aquellos que no pertenezcan al dominio, ya que éstos son los candidatos a ser extremos relativos.
- A2 Clasificar los candidatos usando el criterio del Hessiano (u otro si $Hf(x_0, y_0) = 0$).
- A3 Conclusiones sobre los extremos locales.

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Solución:

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Solución: $\nabla f(x,y) = (-3x^2 + 4y, 4x - 4y)$

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Solución: $\nabla f(x,y) = (-3x^2 + 4y, 4x - 4y) = (0,0)$.

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Solución: $\nabla f(x, y) = (-3x^2 + 4y, 4x - 4y) = (0, 0)$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen como candidatos a extremos los puntos $(0, 0)$ y $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Solución: $\nabla f(x,y) = (-3x^2 + 4y, 4x - 4y) = (0,0)$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen como candidatos a extremos los puntos $(0,0)$ y $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

La matriz Hessiana de f es: $Hess\, f = \begin{pmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de la función $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Solución: $\nabla f(x,y) = (-3x^2 + 4y, 4x - 4y) = (0,0)$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen como candidatos a extremos los puntos $(0,0)$ y $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

La matriz Hessiana de f es: $Hess\, f = \begin{pmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

- $Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -16 < 0 \rightarrow (0,0)$ es un punto de silla.
- $Hf(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 16 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \rightarrow (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ es un máximo relativo.

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de la función $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Solución: $\nabla f(x, y) = (-3x^2 + 4y, 4x - 4y) = (0, 0)$.

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtienen como candidatos a extremos los puntos $(0, 0)$ y $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

La matriz Hessiana de f es: $Hess\, f = \begin{pmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

- $Hf(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -16 < 0 \rightarrow (0, 0)$ es un punto de silla.
- $Hf(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 16 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \rightarrow (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ es un máximo relativo.

La función f tiene un punto de silla en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, donde la función toma el valor $f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{59}{27}$.

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1\}.$$

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1\}.$$

Solución:

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1\}.$$

Solución:

$\nabla f(x,y) = (2x(4-y^2), -2y(x^2-1))$

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de $f(x, y) = (x^2 - 1)(4 - y^2)$ en el dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1\}.$$

Solución:

$\nabla f(x, y) = (2x(4 - y^2), -2y(x^2 - 1)) = (0, 0).$

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2 - 1)(4 - y^2)$ en el dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{16} < 1\}.$$

Solución:

$\nabla f(x,y) = (2x(4-y^2), -2y(x^2-1)) = (0,0).$

Observa que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ si y sólo si $x = 0$ ó $y \in \{2, -2\}$.

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1\}.$$

Solución:

$\nabla f(x,y) = (2x(4-y^2), -2y(x^2-1)) = (0,0).$

Observa que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ si y sólo si $x = 0$ ó $y \in \{2,-2\}$.

Si $x = 0 \to \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 2y = 0$

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2 - 1)(4 - y^2)$ en el dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1\}.$$

Solución:

$\nabla f(x,y) = (2x(4 - y^2), -2y(x^2 - 1)) = (0,0).$

Observa que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ si y sólo si $x = 0$ ó $y \in \{2, -2\}$.

Si $x = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 2y = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0.$

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{16} < 1\}.$$

Solución:

$\nabla f(x,y) = (2x(4-y^2), -2y(x^2-1)) = (0,0).$

Observa que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ si y sólo si $x = 0$ ó $y \in \{2,-2\}$.

Si $x = 0 \to \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 2y = 0 \quad \to \quad y = 0.$

Si $y = 2 \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,2) = -4(x^2-1) = 0$

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{16} < 1\}.$$

Solución:

$\nabla f(x,y) = (2x(4-y^2), -2y(x^2-1)) = (0,0)$.

Observa que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ si y sólo si $x = 0$ ó $y \in \{2,-2\}$.

Si $x = 0 \to \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 2y = 0 \quad \to \quad y = 0.$

Si $y = 2 \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,2) = -4(x^2-1) = 0 \quad \to \quad x \in \{1,-1\}.$

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{16} < 1\}.$$

Solución:

$\nabla f(x,y) = (2x(4-y^2), -2y(x^2-1)) = (0,0)$.

Observa que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ si y sólo si $x = 0$ ó $y \in \{2,-2\}$.

Si $x = 0 \to \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 2y = 0 \quad \to \quad y = 0$.

Si $y = 2 \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,2) = -4(x^2-1) = 0 \quad \to \quad x \in \{1,-1\}$.

Si $y = -2 \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,-2) = 4(x^2-1) = 0$

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1\}.$$

Solución:

$\nabla f(x,y) = (2x(4-y^2), -2y(x^2-1)) = (0,0).$

Observa que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ si y sólo si $x = 0$ ó $y \in \{2,-2\}$.

Si $x = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 2y = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0.$

Si $y = 2 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,2) = -4(x^2-1) = 0 \quad \rightarrow \quad x \in \{1,-1\}.$

Si $y = -2 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x,-2) = 4(x^2-1) = 0 \quad \rightarrow x \in \{1,-1\}.$

Ejemplo: Calcula los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{16} < 1\}.$$

Solución:

$\nabla f(x,y) = (2x(4-y^2), -2y(x^2-1)) = (0,0).$

Observa que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ si y sólo si $x = 0$ ó $y \in \{2,-2\}$.

Si $x = 0 \to \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 2y = 0 \quad \to \quad y = 0.$

Si $y = 2 \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,2) = -4(x^2-1) = 0 \quad \to \quad x \in \{1,-1\}.$

Si $y = -2 \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,-2) = 4(x^2-1) = 0 \quad \to x \in \{1,-1\}.$

Entonces, el gradiente de la función f se anula en los puntos:

$$(0,0),(1,2),(-1,2),(1,-2) \text{ y } (-1,-2)$$

Observa que todos estos puntos pertenecen al dominio D.

La matriz Hessiana de f es: $\mathit{Hess}\, f = \begin{pmatrix} 2(4-y^2) & -4xy \\ -4xy & -2(x^2-1) \end{pmatrix}$.

Entonces, el gradiente de la función f se anula en los puntos:

$$(0,0),(1,2),(-1,2),(1,-2) \text{ y } (-1,-2)$$

Observa que todos estos puntos pertenecen al dominio D.

La matriz Hessiana de f es: $Hess\, f = \begin{pmatrix} 2(4-y^2) & -4xy \\ -4xy & -2(x^2-1) \end{pmatrix}$.

- $Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0$

Entonces, el gradiente de la función f se anula en los puntos:

$$(0,0),(1,2),(-1,2),(1,-2) \text{ y } (-1,-2)$$

Observa que todos estos puntos pertenecen al dominio D.

La matriz Hessiana de f es: $\mathit{Hess}\, f = \begin{pmatrix} 2(4-y^2) & -4xy \\ -4xy & -2(x^2-1) \end{pmatrix}$.

- $Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0 \ \rightarrow (0,0)$ es un punto de mínimo relativo.
- $Hf(x,y) < 0$ para el resto de los puntos (x,y) obtenidos. Por tanto, todos ellos son puntos de silla.

Entonces, el gradiente de la función f se anula en los puntos:

$$(0,0),(1,2),(-1,2),(1,-2) \text{ y } (-1,-2)$$

Observa que todos estos puntos pertenecen al dominio D.

La matriz Hessiana de f es: $Hess\, f = \begin{pmatrix} 2(4-y^2) & -4xy \\ -4xy & -2(x^2-1) \end{pmatrix}$.

- $Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0 \ \rightarrow (0,0)$ es un punto de mínimo relativo.
- $Hf(x,y) < 0$ para el resto de los puntos (x,y) obtenidos. Por tanto, todos ellos son puntos de silla.

La función f tiene un punto de mínimo relativo en $(0,0)$, donde la función toma el valor $f(0,0) = -4$. Los puntos $(1,2)$, $(-1,2)$, $(1,-2)$ y $(-1,-2)$ son puntos de silla.

Dominios con frontera: Extremos condicionados

Dominios con frontera: Extremos condicionados

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (donde D incluye su frontera).

Dominios con frontera: Extremos condicionados

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (donde D incluye su frontera). El análisis de los puntos extremos de f se realiza en dos fases:

Dominios con frontera: Extremos condicionados

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (donde D incluye su frontera). El análisis de los puntos extremos de f se realiza en dos fases:

- Estudiar la función restringida al interior del dominio (el conjunto al quitarle la frontera).

Dominios con frontera: Extremos condicionados

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (donde D incluye su frontera). El análisis de los puntos extremos de f se realiza en dos fases:

- Estudiar la función restringida al interior del dominio (el conjunto al quitarle la frontera).
- Analizar los posibles extremos en la propia frontera.

Dominios con frontera: Extremos condicionados

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (donde D incluye su frontera). El análisis de los puntos extremos de f se realiza en dos fases:

- Estudiar la función restringida al interior del dominio (el conjunto al quitarle la frontera).
- Analizar los posibles extremos en la propia frontera.

El método de los multiplicadores de Lagrange nos permite resolver un problema como el siguiente, que denominaremos un *problema de extremos condicionados*.

Dominios con frontera: Extremos condicionados

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (donde D incluye su frontera). El análisis de los puntos extremos de f se realiza en dos fases:

- Estudiar la función restringida al interior del dominio (el conjunto al quitarle la frontera).
- Analizar los posibles extremos en la propia frontera.

El método de los multiplicadores de Lagrange nos permite resolver un problema como el siguiente, que denominaremos un *problema de extremos condicionados*.

Calcular los extremos de $f(x, y)$ (función objetivo)
sujeto a la condición $g(x, y) = 0$ (restricción)

Teorema

Sean f y g funciones con derivadas parciales de primer orden continuas tales que f tiene un extremo condicionado en (x_0, y_0) (es decir, (x_0, y_0) es un extremo en $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$). Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, entonces existe un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$

Al valor λ_0 se le llama **multiplicador de Lagrange** asociado al punto (x_0, y_0).

El método de los multiplicadores de Lagrange consiste en el siguiente proceso:

El método de los multiplicadores de Lagrange consiste en el siguiente proceso:

(1) Se define la función $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$, y se calculan los puntos críticos de esta función. Es decir, los puntos (x_0, y_0, λ_0) que cumplen que $\nabla\mathcal{L}(x_0, y_0, \lambda_0) = (0, 0, 0)$, i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = & \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = & \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ g(x, y) & = & 0 \end{array} \right.$$

(2) Una vez obtenidos los candidatos a extremos en la frontera, evaluamos la función en cada uno de ellos. El mayor (resp. menor) de los valores será el máximo (resp. mínimo) de $f(x, y)$ sujeto a la restricción $g(x, y) = 0$.

Ejemplo: Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}.$$

Ejemplo: Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}.$$

Solución:

Ejemplo: Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}.$$

Solución: Observa que:

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1\}.$$

Ejemplo: Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{16} \leq 1\}.$$

Solución: Observa que:

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{16} < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{16} = 1\}.$$

El estudio del interior del dominio ($\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1\}$) derivó en 4 puntos de silla y un mínimo relativo en $(0,0)$ con $f(0,0) = -4$.

Ejemplo: Calcula los extremos absolutos de $f(x,y) = (x^2-1)(4-y^2)$ en el dominio

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{16} \leq 1\}.$$

Solución: Observa que:

$$\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{16} < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{16} = 1\}.$$

El estudio del interior del dominio ($\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{16} < 1\}$) derivó en 4 puntos de silla y un mínimo relativo en $(0,0)$ con $f(0,0) = -4$.

Para obtener los extremos en la frontera, usaremos el método de los multiplicadores de Lagrange, considerando $f(x,y)$ como función objetivo y $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 16 = 0$ como restricción.

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x^2 - 1)(4 - y^2) - \lambda(4x^2 + y^2 - 16)$$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x^2 - 1)(4 - y^2) - \lambda(4x^2 + y^2 - 16)$$

Los candidatos a extremos condicionados son las soluciones (x_0, y_0) del siguiente sistema (obtenido de $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$):

$$2x(4 - y^2) = 8x\lambda \tag{1}$$

$$-2y(x^2 - 1) = 2y\lambda \tag{2}$$

$$4x^2 + y^2 = 16 \tag{3}$$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x^2-1)(4-y^2) - \lambda(4x^2+y^2-16)$$

Los candidatos a extremos condicionados son las soluciones (x_0, y_0) del siguiente sistema (obtenido de $\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (0,0,0)$):

$$2x(4-y^2) = 8x\lambda \qquad (1)$$

$$-2y(x^2-1) = 2y\lambda \qquad (2)$$

$$4x^2+y^2 = 16 \qquad (3)$$

- Si $x = 0$, de (3) y (2) se obtiene: $y = \pm 4$ y $\lambda = 1$.

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x^2 - 1)(4 - y^2) - \lambda(4x^2 + y^2 - 16)$$

Los candidatos a extremos condicionados son las soluciones (x_0, y_0) del siguiente sistema (obtenido de $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$):

$$2x(4 - y^2) = 8x\lambda \tag{1}$$

$$-2y(x^2 - 1) = 2y\lambda \tag{2}$$

$$4x^2 + y^2 = 16 \tag{3}$$

- Si $x = 0$, de (3) y (2) se obtiene: $y = \pm 4$ y $\lambda = 1$.
- Si $x \neq 0$ y $y = 0$, de (3) y (1) se obtiene: $x = \pm 2$ y $\lambda = 1$.

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (x^2 - 1)(4 - y^2) - \lambda(4x^2 + y^2 - 16)$$

Los candidatos a extremos condicionados son las soluciones (x_0, y_0) del siguiente sistema (obtenido de $\nabla\mathcal{L}(x, y, \lambda) = (0, 0, 0)$):

$$2x(4 - y^2) = 8x\lambda \qquad (1)$$

$$-2y(x^2 - 1) = 2y\lambda \qquad (2)$$

$$4x^2 + y^2 = 16 \qquad (3)$$

- Si $x = 0$, de (3) y (2) se obtiene: $y = \pm 4$ y $\lambda = 1$.
- Si $x \neq 0$ y $y = 0$, de (3) y (1) se obtiene: $x = \pm 2$ y $\lambda = 1$.
- Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$, se obtiene: $x = \pm\sqrt{2}$, $y = \pm 2\sqrt{2}$ y $\lambda = -1$.

Los candidatos obtenidos son:

$$(0, \pm 4), \quad (\pm 2, 0) \;\text{ y }\; (\pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$$

Los candidatos obtenidos son:

$$(0, \pm 4), \;\; (\pm 2, 0) \;\text{ y }\; (\pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$$

Al evaluar la función objetivo en estos valores se obtiene:

$$f(0, \pm 4) = 12, \;\; f(\pm 2, 0) = 12 \;\text{ y }\; f(\pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}) = -4$$

Los candidatos obtenidos son:

$$(0, \pm 4), \;\; (\pm 2, 0) \;\text{ y }\; (\pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$$

Al evaluar la función objetivo en estos valores se obtiene:

$$f(0, \pm 4) = 12, \;\; f(\pm 2, 0) = 12 \;\text{ y }\; f(\pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2}) = -4$$

Por tanto:

- Mínimo absoluto: $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$.
- Máximo absoluto: $(0, \pm 4)$, $(\pm 2, 0)$.