MATEMÁTICA DISCRETA

Principios básicos de recuento

- El análisis combinatorio, o simplemente **combinatoria**, es la técnica que permite saber cuántos objetos o elementos hay en un conjunto sin realmente tener que conocerlos.
- Principios o técnicas básicas de recuento.
  - Principio de Adición.
  - Principio de Multiplicación.
  - Principio de las Cajas.

Principio de Adición

Este principio se traduce en la técnica de recuento por casos, es decir, si las tareas $T_1, \ldots, T_n$ se pueden realizar, respectivamente, de $t_1, \ldots, t_n$ maneras distintas y todas las tareas son incompatibles dos a dos, entonces hay $t_1 + \ldots + t_n$ maneras distintas de realizar una de ellas.

Principio de Adición (enunciado en términos de conjuntos)

Si $X_1, \ldots, X_n$ son conjuntos finitos y disjuntos dos a dos, entonces el cardinal de $X_1 \cup \cdots \cup X_n$ es la suma de los cardinales de cada conjunto. Es decir,

$$|X_1 \cup \cdots \cup X_n| = |X_1| + \cdots + |X_n|.$$

Ejemplo

¿De cuántas maneras se pueden obtener 5, 7 o 9 puntos, si lanzamos dos dados (uno azul y el otro rojo)?

Solución:

Sean X_5, X_7 y X_9 los conjuntos formados por las diferentes maneras de obtener 5, 7 y 9, respectivamente.

$$X_5 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\},$$
$$X_7 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\},$$
$$X_9 = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}.$$

La solución es $|X_5 \cup X_7 \cup X_9| = |X_5| + |X_7| + |X_9| = 4+6+4 = 14.$

Ejemplo

Si se lanzan a la vez cuatro monedas distintas, ¿cuántas formas hay de conseguir al menos dos caras?

Solución:

Para $i \in \{2,3,4\}$, sea A_i el conjunto formado por los lanzamientos (de cuatro monedas) en los que se obtienen exactamente i caras.

Observa que $A_i \cap A_j = \emptyset$ con $i \neq j$ y $i,j \in \{2,3,4\}$.

$$A_2 = \{(c,c,x,x),(c,x,c,x),(c,x,x,c),(x,c,c,x),(x,c,x,c),(x,x,c,c)\},$$
$$A_3 = \{(c,c,c,x),(c,c,x,c),(c,x,c,c),(x,c,c,c)\},$$
$$A_4 = \{(c,c,c,c)\}.$$

La solución es $|A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_2| + |A_3| + |A_4| = 6+4+1 = 11$.

Principio de Multiplicación

Este principio se traduce en la técnica de recuento secuencial. Supongamos que una tarea requiere realizar sucesivamente las tareas $T_1, \ldots, T_n$. Si la tarea T_1 puede realizarse de t_1 formas; y para $i \in \{2, \ldots, n\}$, la tarea T_i puede realizarse de t_i formas después de haber realizado las tareas $T_1, \ldots, T_{i-1}$, entonces hay $t_1 \cdot \cdots \cdot t_n$ formas de completar la tarea.

Principio de Multiplicación (en términos de conjuntos)

Si $X_1, \ldots, X_n$ son conjuntos finitos, entonces el cardinal del **producto cartesiano** $X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}$ es el producto de los cardinales de cada conjunto. Es decir,

$$|X_1 \times \cdots \times X_n| = |X_1| \cdot \cdots \cdot |X_n|.$$

Ejemplo

Si lanzamos tres dados distinguibles (rojo, azul, verde), ¿cuántos resultados son posibles?

Solución:

- Cada resultado puede ser representado como una terna, por ejemplo, un posible resultado es $(2, 5, 1)$.
- $|X \times X \times X| =?$ donde $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- $|X \times X \times X| = |X| \cdot |X| \cdot |X| = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216$.

Ejemplo

Una empresa de ordenadores utiliza, para identificar las máquinas, un número (número de identificación) formado por dos letras, seguidas de dos dígitos decimales, dos letras más y, finalmente, cuatro dígitos decimales más. ¿Cuántos números de identificación son posibles? (el alfabeto es de 26 letras.)

Solución:

- Sea A el conjunto formado por las letras del alfabeto y sea D el conjunto formado por los dígitos.
- Nos piden calcular el cardinal del conjunto

$$A \times A \times D \times D \times A \times A \times D \times D \times D \times D$$

- Por el Principio de Multiplicación, la solución es

$$26^2 \cdot 10^2 \cdot 26^2 \cdot 10^4 = 26^4 \cdot 10^6 = 456976 \cdot 10^6$$

Ejemplo

María piensa ir a comer al restaurante A o al restaurante B. Sabiendo que en el restaurante A hay 3 entrantes, 4 segundos platos y 3 postes de su agrado, y que en el restaurante B hay 2 entrantes, 3 segundos y 4 postes de su agrado ¿de cuántas formas diferentes puede elegir María su menú?

Solución:

A_1, A_2 y A_3: conjuntos de entrantes, segundos y postres, del agrado de María en el restaurante A. Análogamente, sean B_1, B_2 y B_3 los conjuntos correspondientes al restaurante B.

Por el Principio de Multiplicación:

$|A_1 \times A_2 \times A_3| = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$ formas de elegir el menú en A.

$|B_1 \times B_2 \times B_3| = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ formas de elegir el menú en B.

Por el Principio de Adición: $36 + 24 = 60$ formas diferentes de elegir el menú.

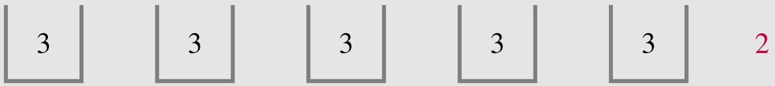
Principio de las cajas (Principio de Dirichlet o del Palomar)

Si se distribuyen n objetos en m cajas, siendo $n > m \cdot t$, entonces por lo menos en una de las cajas habrá como mínimo $t+1$ objetos.

Ejemplo:

Si se distribuyen 17 objetos en 5 cajas, entonces hay al menos una caja que contiene $4 = 3+1$ objetos ($n = 17$, $m = 5$ y $t = 3$, $17 > 5 \cdot 3$)

Si en cada caja tuviéramos como máximo 3 objetos, sobrarían 2



Ejercicio

Demuestra que en un conjunto de nueve números enteros, por lo menos dos tienen como diferencia un múltiplo de 8.

Dados dos enteros a y b, ¿cómo saber si $a-b$ es múltiplo de 8?

- Sean $a = 8q + r$ y $b = 8q' + r'$, donde $r, r' \in \{0, 1, \ldots, 7\}$.
- Si $r = r'$, entonces $a - b$ es múltiplo de 8.

Solución:

- Consideremos 8 cajas $C_0, C_1, \ldots, C_7$, de modo que cada número de la forma $8q + r$ pertenece a la caja C_r.
- Como hay 8 cajas y tenemos 9 números, aplicando el Principio de las Cajas concluimos que por lo menos dos de los nueve números están en una misma caja. Por tanto, la diferencia entre ellos es un múltiplo de 8.

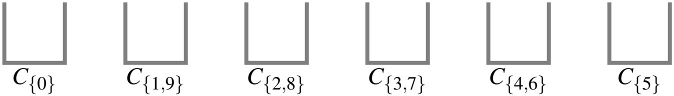
Ejercicio

Demuestra que en toda familia de 7 personas tiene que haber dos personas cuya suma o diferencia de edades es múltiplo de 10.

Si $a,b\in\mathbb{Z}^+$, ¿cuándo $a+b$ ó $a-b$ es múltiplo de 10?

Solución:

- Sean $e_1,\ldots,e_7$ las edades de los familiares.
- Sea $T=\{\{0\},\{1,9\},\{2,8\},\{3,7\},\{4,6\},\{5\}\}$.
- Para todo $S\in T$, sea C_S la caja formada por los números pertenecientes a $\{e_1,\ldots,e_7\}$ cuya unidad pertenece al conjunto S.



- Por el Principio de las Cajas, habrá al menos una caja con dos números $x,y\in\{e_1,\ldots,e_7\}$ los cuales satisfacen que $x+y$ ó $x-y$ es un múltiplo de 10.