Capítulo 3

Integral doble

3.1. Introducción

IntroducciónIntegrales múltiples En la primera parte de la asignatura se vieron las integrales de funciones de una sola variable sobre un intervalo $[a, b]$. Aquí vamos a introducir el concepto de *integral múltiple*, que funciona de manera análoga a las que ya conocemos, pero con la diferencia de que el integrando será una función de varias variables. En particular, una *integral doble* será aquella cuyo integrando es una función de dos variables y una *integral triple* tendrá como integrando una función de tres variables. Las integrales de funciomes de una sola variable serán llamadas *simples*.

Así como usábamos las integrales simples para calcular áreas de regiones en el plano, usaremos las dobles (y en cierto sentido las triples) para calcular volúmenes de sólidos en el espacio, definir y calcular áreas de superficies en el espacio, centros de masas y momentos de inercia junto con algunas magnitudes especiales de la teoría de la probabilidad.

Recordemos que dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y positiva ($f(x) \geq 0$ para cada $x \in [a, b]$), la integral definida $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ coincidía con el área R comprendida entre la curva $y = f(x)$, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje de abcisas.

Para definir tal integral (o área) se usaba un método de aproximación basada en rectángulos, cuyas áreas son fáciles de calcular. Se consideraba una partición del intervalo $[a, b]$, esto es, una serie de puntos ordenados (pero no necesariamente equiespaciados)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b;$$

se notaba $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ a la longitud del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, se tomaba un punto $s_k \in [x_{k-1}, x_k)$ y considerábamos el rectángulo de base $[x_{k-1}, x_k]$ y altura $f(s_k)$, cuya área es $f(s_k)\Delta x_k$. Sumando las áreas de todos los rectángulos

$$\sum_{k=1}^{n} f(s_k)\Delta x_k$$

se obtenía una aproximación del área de R, denominada *suma de Riemann*

A medida que tomamos más puntos en la partición (partición más fina) la aproximación es mejor. Esto lleva a definir la integral definida como

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(s_k)\Delta x_k.$$

No siempre existe este límite (es un número real). Cuando existe, se dice que f es integrable en $[a, b]$.

En la definición anterior, no se necesita que f tome valores positivos. En particular, tal integral existe (su valor es un número real) cuando f es continua en $[a, b]$ o más generalmente, cuando f es continua en $[a, b]$ salvo quizás un número finito de puntos donde hay discontinuidades evitables o de salto finito.

3.2. Integrales dobles y cálculo de volúmenes

3.2.1. Integrales dobles sobre rectángulos

Integrales doblesIntegrales dobles sobre rectángulos

En esta primera sección vamos a considerar una región rectangular de lados paralelos a los ejes de coordenadas:

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$$

sobre el plano y una función $f : [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ de dos variables, que en principio supondremos continua (aunque no es necesario) y positiva, es decir, $f(x, y) \geq 0$ para cada $(x, y) \in R$. Estamos interesados en calcular el volumen de la región sólida comprendida bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre el dominio rectangular $[a, b] \times [c, d]$. Esta región se puede definir como

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

Para ello se utiliza un proceso de aproximación análogo al visto para funciones de una sola variable.

<u>Paso 1</u>. Se toma una partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos y otra del intervalo $[c, d]$ en m subintervalos. Trazando paralelas a los ejes, estas subdivisiones dan lugar a una partición P del rectángulo R en $N = n \cdot m$ celdas (o subrectángulos) como se muestra en la figura que denotaremos por R_k.

<u>Paso 2</u>. En cada celda o rectángulo R_k se toma un punto arbitrario (x_k, y_k) y evaluamos la función f en ese punto: $f(x_k, y_k)$. Notamos por ΔA_k el área del rectángulo R_k. Entonces, el producto

$$f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k = f(x_k, y_k) \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_k$$

nos da el volumen del paralelepípedo (o prisma rectangular) que tiene por base el rectángulo R_k y por altura el valor $f(x_k, y_k)$.

De esta forma, la suma

$$\sum_{k=1}^{N=n\cdot m} f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k = \sum_{k=1}^{N} f(x_k, y_k) \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_k$$

aproxima el volumen de la región sólida mediante la suma de N volúmenes de prismas, tal y como sucedía en el caso de una variable. A la suma anterior se le llama *suma de Riemann de f con respecto de la partición P*.

<u>Paso 3</u>. La aproximación anterior del volumen parece que se puede mejorar si tomamos más rectángulos, pues esto haría que los rectángulos de la cuadrícula o partición sean cada vez más peque nos y así se mejora la precisión.

Cuando aplicamos un proceso donde cada vez obtengamos más celdas (el número de celdas es N) se puede plantear el límite

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k.$$

Lo ideal sería que este límite existiese pues este parece que nos daría el volumen de la región.

(<u>Nota</u>. Se puede definir la norma de una partición P, $\|P\|$, como la longitud de la diagonal más larga de los rectángulos. Refinar una partición sería añadir más celdas, de tal manera que la norma disminuya. $\|P\| \to 0\mathbb{R}Rightarrow N \to \infty$.)

Esto nos lleva a dar la siguiente definición de integral doble sobre un rectángulo de lados paralelos a los ejes, en la que no es necesario suponer que f es positiva.

Si f es una función en las variables x e y definida sobre el rectángulo del plano $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces *la integral doble de f sobre R*, que denotaremos $\displaystyle\int\int_R f(x, y)dA$, se define como

$$\int\int_R f(x, y)dA := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k = \sum_{k=1}^{N} f(x_k, y_k) \cdot \Delta x_k \cdot \Delta y_k$$

siempre y cuando este límite exista. Si existe, diremos que f es *integrable sobre R*.

En el caso en que f sea positiva $\displaystyle\int\int_R f(x, y)dA$ coincide con el volumen de la región sólida comprendida entre la gráfica de f (superficie $z = f(x, y)$) y el dominio rectangular R. De hecho, todos tenemos una idea intuitiva y geométrica del concepto de volumen pero en general no sabemos dar una definición de este concepto. Las integrales nos permiten definir matemáticamente el concepto de volumen, así como nos permiten definir conceptos como el de área. Es decir, podríamos, a la vista de la construcción dada anteriormente, definir el volumen de tal región como la integral doble $\displaystyle\int\int_R f(x, y)dA$ (supuesto f positiva).

Se puede demostrar (la prueba está fuera del alcance de este curso) el siguiente resultado:

Si f es continua en el rectángulo R entonces f es integrable sobre R.

Al igual que sucede con el caso de una variable, hay funciones que no son continuas y son integrables. Se puede demostrar que si f es acotada y continua, salvo quizás en un conjunto de área nula, también es integrable. Este es más o menos el contenido de un importante teorema (que queda fuera del alcance de este curso, no sólo en la prueba, sino además en enunciado), que es conocido como **Teorema de Lebesgue**.

3.2.2. Integrales iteradas y cálculo de integrales dobles

Integrales doblesIntegrales dobles sobre rectángulos Nos planteamos calcular una integral doble. De la misma forma que no usamos la definición para calcular las derivadas e integrales simples o derivadas direccionales, tampoco es práctico calcular una integral doble usando su definición en términos de límite.

El matemático italiano Guido Fubini (1879-1943) probó un método para calcular integrales dobles, basado en el cálculo de integrales simples, que se conoce como *procedimiento de integración sucesiva (integrales inmediatas)*. Para explicar el método necesitamos conocer antes algunas nociones sobre las llamadas *integrales iteradas*.

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables. En la práctivca, para calcular las derivadas parciales de la función lo que hacemos es considerar constante una de las variables y derivar respecto de la otra. Pues bien, podemos realizar operaciones inversas a las anteriores que consisten en integrar parcialmente f respecto de una variable considerando constante a la otra. Más concretamente, si consideramos constante a la variable y, podemos calcular la integral indefinida

$$\int f(x, y)dx$$

a la que llamamos *integral parcial de* f *con respecto a* x. (El símbolo dx nos dice que integramos respecto de la x manteniendo la y constante). De la misma forma, si consoderamos a x como constante, podemos calcular

$$\int f(x, y)dy$$

a la que llamamos *integral parcial de* f *con respecto a* y. Así, si $f(x, y) = 3x^2y$ entonces

$$\int f(x, y)dx = \int 3x^2ydx = y\int 3x^2dx = yx^3 + C(y).$$

$$\int f(x, y)dy = \int 3x^2ydy = 3x^2\int ydy = 3x^2\frac{y^2}{2} + C(x).$$

Observemos que las constantes de integración son constantes respecto de la variable respecto a la cual estamos integrando, así que pueden depender de la variable que consideramos constante.

Si consideramos las funciones $F(x, y) = yx^3 + C(y)$ y $G(x, y) = 3x^2\frac{y^2}{2} + C(x)$, se tiene

$$\frac{\partial F}{dx}(x, y) = 3x^2y = f(x, y), \quad \frac{\partial G}{dy}(x, y) = 3x^2y = f(x, y).$$

Hemos llevado a cabo una operación inversa a la derivación parcial.

De manera análoga podemos considerar *integrales definidas*

$$\int_a^b f(x, y)dx \quad \text{ó} \quad \int_c^d f(x, y)dy.$$

Así:

$$\int_{-1}^{1}(x^2y)dx = \frac{x^3}{3}y\Big]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}y.$$

Como se puede observar en el ejemplo, después de realizar el cálculo $\int_a^b f(x, y)dx$, lo que se obtiene es una función en la variable y. Esta función podría ser ahora integrada en otro intervalo. Es decir, podemos realizar la siguiente operación

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

siguiendo con el ejemplo anterior podemos hacer:

$$\int_2^3 \left(\int_{-1}^1 (x^2y)dx \right) dy = \int_2^3 \frac{2}{3}ydy = \left.\frac{y^2}{3}\right]_2^3 = \frac{5}{3}.$$

Vemos que el cálculo sucesivo de las dos integrales nos da un número.

De forma análoga, podemos realizar el cálculo sucesivo de integrales

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

En nuestro ejemplo sería

$$\int_{-1}^1 \left(\int_2^3 (x^2y)dy \right) dx.$$

Por un lado,

$$\int_2^3 x^2ydy = \left.\frac{1}{2}x^2y^2\right]_2^3 = \frac{5}{2}x^2.$$

Entonces

$$\int_{-1}^1 \left(\int_2^3 (x^2y)dy \right) dx = \int_{-1}^1 \frac{5}{2}x^2dx = \left.\frac{5}{2}\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{5}{3}.$$

De nuevo nos sale un número, que además coincide con el que hemos obtenido antes, pero que en general no tiene porqué coincidir. El orden de integración es importante.

Como hemos podido observar, en el cálculo sucesivo de las integrales

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy, \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx$$

se opera de dentro hacia fuera. En la primera se integra primero respecto a x y luego respecto a y, y en la segunda se integra primero respecto a y y luego respecto a x.

Las integrales de este tipo, donde se calculan dos integrales simples de forma sucesiva, se llaman *integrales iteradas* y se suelen notar simplemente (quitando los paréntesis) como

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy, \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

El magnífico resultado que probó Fubini en 1907 y al que hacíamos referencia antes (el lo probó para situaciones más generales) es que una integral doble se puede calcular mediante integrales iteradas.

[Teorema de Fubini para rectángulos]

Si f es una función continua sobre un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$, la integral doble $\int\int_R f(x,y)dA$ se puede calcular por integración iterada en cualquier orden, es decir,

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy, \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx.$$

Una prueba de este resultado cae dentro de un curso de Cálculo avanzado, por lo que no se lleva a cabo aquí. No obstante, posteriormente daremos bajo un ejemplo una interpretación geométrica de lo que dice el teorema.

Teniendo en cuenta el ejemplo visto antes del Teorema podemos decir que la integral doble

$$\int\int_{[-1,1]\times[2,3]} x^2 y dA = \frac{5}{3}.$$

Recordemos que en tal ejemplo hicimos el cálculo de las dos integrales iteradas y resultó el mismo valor ($\frac{5}{3}$).

<u>**Ejemplo 1**</u>. Calcular $\int\int_R (2-y)dA$, donde R es el rectángulo del plano cuyos vértices son $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,2)$ y $(0,2)$.

El recinto de integración es el interior del rectángulo $R = [0,3] \times [0,2]$.

La función $f(x,y) = 2 - y$ es continua. Podemos calcular la integral doble así:

$$\int\int_R (2-y)dA = \int_0^2 \int_0^3 (2-y)dxdy$$

o también así

$$\int\int_R (2-y)dA = \int_0^3 \int_0^2 (2-y)dydx.$$

De la primera forma obtenemos

$$\int_0^2 \int_0^3 (2-y)dxdy = \int_0^2 \left.(2-y)x\right]_0^3 dy = \int_0^2 3(2-y)dy = 3\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = 6.$$

De la segunda forma obtenemos

$$\int_0^3 \int_0^2 (2-y)dydx = \int_0^3 \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx = \int_0^3 2dx = \left.2x\right]_0^3 = 6.$$

Como podemos ver el resultado de las integrales iteradas es el mismo.

Ejemplo 2. Determinar el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie $z = x^2y^5$ y el dominio rectangular $R = [1, 2] \times [0, 1]$.

Nos estan pidiendo la integral $\displaystyle\int\int_R f(x, y)dA$, donde $f(x, y) = x^2y^5$ y $R = [1, 2]\times[0, 1]$.

La función f es continua, luego podemos calcular la integral doble por integración iterada en cualquier orden: Por tanto,

$$\int\int_R x^2y^5dA = \int_1^2 \left(\int_0^1 x^2y^5dy\right) dx = \int_1^2 \left[x^2\frac{y^6}{6}\right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2}{6}dx = \left[\frac{x^3}{18}\right]_1^2 = \frac{8}{18} - \frac{1}{18} = \frac{7}{18}.$$

En los ejemplos anteriores, la cantidad de trabajo para realizar la integración iterada en cualquiera de los dos órdenes es practicamente el mismo. Esto no ocurre en todos los casos, como prueba el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3. Calcular las siguientes integrales:

- $\displaystyle\int\int_R x\cos(xy)dA$, siendo $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$.
- $\displaystyle\int\int_R \frac{1}{y^3}e^{\frac{2x}{y}}dA$, siendo $R = [0, 2] \times [1, 2]$.

Las funciones $f(x, y) = x\cos(xy)$ y $g(x, y) = \frac{1}{y^3}e^{\frac{2x}{y}}$ son continuas, luego las integrales dobles se pueden calcular mediante integración iterada en cualquier orden.

Consideremos la primera integral. Integrando primero respecto a y:

$$\int\int_R x\cos(xy)dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 x\cos(xy)dy\right) dx.$$

Integrando primero respecto de x:

$$\int\int_R x\cos(xy)dA = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(xy)dx\right) dy.$$

Observemos que en el segundo caso, para integrar respecto de x necesitariamos una integración por partes. Sin embargo, si integramos primero respecto de y es más sencillo, pues

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 x\cos(xy)dy\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left([\operatorname{sen}(xy)]_{y=0}^{y=1}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x dx = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Calcular la segunda integral usando los dos órdenes de integración y comprobar la diferencia.

Interpretación geométrica del Teorema de Fubini

Supongamos que f es una función en las variables x e y que es positiva en el rectángulo de lados paralelos a los ejes R. Si existe la integral $\int\int_R f(x,y)dA$, sabemos que representa el volumen del sólido limitado por arriba por la superficie $z = f(x,y)$ y por debajo por el rectángulo R.

Fijemos $y \in [c,d]$ y consideremos la sección transversal perpendicular al eje y en ese punto elegido. Sea $A(y)$ el área de esta sección transversal. Este área sería

$$\int_a^b f(x,y)dx.$$

De esta forma

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

Por tanto, hemos demostrado que

$$\int\int_R f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

De manera análoga, fijando un $x \in [a,b]$ y haciendo un razonamiento similar al anterior se llega a

$$V = \int_c^d A(y)dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

El proceso se entiende mejor si se imagina un *doble barrido*. En la integración interior, una recta vertical barre el área de una sección transversal y en la integración exterior, la sección transversal barre el volumen.

3.2.3. Integrales dobles sobre regiones no rectangulares

Integrales doblesIntegrales dobles sobre regiones no rectangulares

Supongamos que D es una región *acotada* del plano que no es un rectángulo de lados paralelos a los ejes (trabajando con rigor hay que exigirle a la región D que tenga una frontera razonable, lo que se entiende pior frontera de área nula, pero esto se sale del nivel de este curso).

Si f es una función en las variables x e y que es posaitiva en cada punto de D, podemos estar interesados en definir y calcular el volumen V de la región sólida limitada por la superficie $z = f(x, y)$ y la región D.

Al ser D acotado, podemos considerar un rectángulo R de lados paralelos a los ejes que contenga a D. Definamos sobre R la función F que coincida con f en todos los puntos de D y valga cero en el resto

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Parece lógico, por la interpretación de una integral doble como volumen (cuando $f(x, y) \geq 0$), que el volumen pedido coincida con

$$\int\int_R F(x, y)dA$$

porque fuera del dominio D la función F no aporta nada.

Por tanto, es lógico que se de la siguiente definición para una función f cualquiera (no necesariamente positiva).

Si F es una función integrable sobre el rectángulo R se dirá que f es integrable sobre D, y se define la *integral doble de f sobre D*, que se denota $\int\int_D f(x, y)dA$, por la igualdad

$$\int\int_D f(x, y)dA = \int\int_R F(x, y)dA,$$

siendo F la función que coincide con f en los puntos de D y se anula fuera.

Observemos que la definición no depende del rectángula R elegido.

Si f es continua sobre D entonces f es integrable sobre D.

Si f es integrable sobre la región acotada D y $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in D$, el *volumen* de la región sólida acotada inferiormente por D y superiormente por la gráfica de f se define como

$$V = \int\int_D f(x, y)dA.$$

Parece lógico que cuando $f(x,y)=1$ para cada $(x,y)\in D$, tal volumen coincide con el área de la región D en el plano. Esto es claro, teniendo en cuenta que el volumen es el área de la base por la altura. Por tanto, podemos dar la siguiente definición

Si D es una región acotada del plano definimos el *área de* D como

$$\text{área de } D=\int\int_D 1dA=\int\int_D dA.$$

De la misma forma que nos hemos planteado calcular los valores máximos y mínimos de una función sobre una región, nos podemos plantear también calcular el valor medio de la función en la región.

Se llama *media* o *promedia* de f sobre D al valor

$$\frac{1}{\text{área de } D}\int\int_D f(x,y)dA.$$

Vamos a ver algunas de las propiedades que tienen las integrales dobles, muchas de las cuales las tienen también las integrales simples.

Propiedades de las integrales dobles

Sean f y g dos funciones de dos variables integrables en la región acotada D del plano y sea c una constante. Se verifican las siguientes propiedades:

1. $\displaystyle\int\int_D cf(x,y)dA=c\int\int_D f(x,y)dA.$

2. $\displaystyle\int\int_D (f(x,y)\pm g(x,y))dA=\int\int_D f(x,y)dA\pm\int\int_D g(x,y)dA.$

3. Regla de dominación: si $g(x,y)\leq f(x,y)$ en D entonces

$$\int\int_D g(x,y)dA\leq\int\int_D f(x,y)dA.$$

4. Regla de subdivisión: si la región de integración D se divide en dos subconjuntos D_1 y D_2 $(D=D_1\cup D_2)$ que no se solapen, es decir, que las puntos comunes esten en la frontera de división de ambos conjuntos (no pueden tener puntos interiores comunes) entonces

$$\int\int_D f(x,y)dA=\int\int_{D_1} f(x,y)dA+\int\int_{D_2} f(x,y)dA.$$

Cálculos de integrales dobles sobre regiones acotadas y el Teorema de Fubini

En general, el Teorema de Fubini visto anteriormente para el cálculo de integrales dobles sobre rectángulos de lados paralelos a los ejes, sirve para el cálculo de cualquier integral doble sobre una región acotada, teniendo en cuento que, según nuestra definición,

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R F(x,y)dA$$

siendo R un rectángulo que contiene a D de lados paralelos a los ejes y F la función de dos variables que coincide con f en D y se anula fuera.

Por tanto, si $R = [a,b] \times [c,d]$, tenemos

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b F(x,y)dx\right) dy.$$

Fijemos $x \in [a,b]$. Para calcular $\int_c^d F(x,y)dy$ debemos fijarnos en la sección (conjunto de puntos (x,y) que se encuentran en D) que no se salen de D (fuera de D la función se anula) e integrar en el intervalo correspondiente la función $y \to f(x,y)$.

Es evidente, como se puede ver en el dibujo, que para cada x esta sección es distinta y, por tanto, el intervalo de integración también. Luego vemos que los límites de integración dependerán de x, serán funciones de x.

Lo mismo sucede si fijamos $y \in [c,d]$ e intentamos calcular $\int_a^b F(x,y)dx$. Los límites de integración no son a y b sino que van a depender del y fijado y por tanto serán funciones de y.

Existen regiones donde es fácil visualizar ésto, más concretamente visualizar los límites de integración, y obtener una fórmula para el cálculo de la integral doble, usando Fubini. Estudiamos a continuación varios casos especiales de regiones.

CASO I: banda horizontal

Supongamos que nuestro dominio es de la forma

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

donde a y b son constantes y g_1 y g_2 son dos funciones continuas tales que $g_1(x) \leq g_2(x)$ para cada $x \in [a,b]$.

Para cada x fijo entre las constantes a y b, la coordenada y varia entre $g_1(x)$ y $g_2(x)$. En este caso, parece lógico que utilicemos las integrales iteradas

$$\int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)dy\right) dx$$

para el cálculo de $\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R F(x,y)dA$, pues fijado $x \in [a,b]$

$$\int_c^d F(x,y)dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy$$

y así se sigue del Teorema de Fubini para regiones rectangulares paralelas a los ejes el siguiente resultado:

Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, donde a y b son constantes y g_1 y g_2 son dos funciones continuas tales que $g_1(x) \leq g_2(x)$ para cada $x \in [a,b]$, entonces

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

siempre y cuando las integrales existan.

La novedad es que, como ya hemos dicho (y esto va a suceder en todas las regiones no rectangulares), una de las integrales en la integral iterada anterior no tiene límites de integración constantes sino que dependen de una de las variables, en este caso de la x, pero la integral se calcula respecto de la variable y.

Lo que no tiene sentido es que la variable de integración (en este caso la y) aparezca en los límites de la integral.

En los demás dominios nos vamos a encontrar con situaciones análogas; es decir, los límites interiores de integración pueden ser variable respecto de la variable de integración exterior. Por el contrario, los límites exteriores de integración han de ser constantes respecto de las dos variables de integración.

Este tipo de regiones incluyen a los rectángulos de lados paralelos a los ejes (caso de que g_1 y g_2 sean funciones constantes). También incluyen otros recintos como círculos o elipses.

Así, si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}$, podemos escribir $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -a \leq x \leq a, -\sqrt{a^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}\}$. En este caso, $g_1(x) = -\sqrt{a^2-x^2}$ y $g_2(x) = \sqrt{a^2-x^2}$.

CASO II: banda vertical

Este es el caso en el que el dominio es de la forma:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde c y d son constantes y h_1 y h_2 son funciones continuas en $[c,d]$ con $h_1(y) \leq h_2(y)$ para cada $y \in [c,d]$.

Para un y fijo entre c y d, la coordenada x varia entre $h_1(y)$ y $h_2(y)$.

En este caso, es lógico que usemos las integrales iteradas

$$\int_c^d \left(\int_a^b F(x,y)dx \right) dy$$

para el cálculo de $\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R F(x,y)dA$. En este caso, fijado $y \in [c,d]$

$$\int_a^b F(x,y)dx = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx$$

y así se sigue del Teorema de Fubini para regiones rectangulares paralelas a los ejes el siguiente resultado:

Si $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$, donde c y d son constantes y h_1 y h_2 son funciones continuas en $[c,d]$ con $h_1(y) \leq h_2(y)$ para cada $y \in [c,d]$, entonces

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

siempre y cuando las integrales existan.

Antes de ver algunos ejemplos de aplicación de estos casos, vamos a detenernos en observar algunas cuestiones sobre el área de regiones planas.

Hemos definido el área de una región acotada D en el plano como la integral doble de la función constante 1 sobre D:

$$\text{área}(D) = \int\int_D dA.$$

En el caso de una banda horizontal:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Podíamos calcular este área con integrales simples en la forma

$$A = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))dx.$$

Ahora bien, podemos escribir $g_2(x) - g_1(x)$ como una integral definida. En concreto, si consideramos que x está fija y hacemos variar y desde $g_1(x)$ hasta $g_2(x)$, tenemos

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1dy = g_2(x) - g_1(x).$$

Por tanto,

$$A = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1dy \right) dx$$

y según lo que hemos visto en el Teorema de Fubini

$$\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1dy \right) dx = \int\int_D 1dA.$$

Lo mismo se puede hacer con las regiones del tipo II.

Observaciones

1. Cuando se aplica el Teorema de Fubini en regiones no rectangulares resulta de gran ayuda dibujar el recinto D y hallar las ecuaciones de las curvas frontera de D. Un dibujo de este tipo posee la información necesaria para determinar si D es del tipo I o del tipo II o de ninguno de los dos y para conocer los límites de integración de una integral iterada.

2. La dificultad de una integral doble radica tanto en la función a integrar como en la forma del recinto.

Veamos a continuación algunos ejemplos:

Ejemplo 1 Calcular $\int\int_D \sqrt{x}ydA$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt[4]{x}\}$.

Antes de calcular la integral tengamos en cuenta que al ser $f(x,y) \geq 0$ sobre D, debe ser $\int\int_D \sqrt{x}ydA \geq 0$.

Tenemos una región del tipo anterior donde $g_1(x) = x^2$ y $g_2(x) = \int\int_D \sqrt{x}ydA$. Por tanto,

$$\int\int_D \sqrt{x}ydA = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt[4]{x}} \sqrt{x}ydy \right) dx.$$

Ejemplo 2 Calcular $\int\int_D xydA$, donde D es la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcular asímismo el área del recinto.

Calculemos los puntos de corte: $x^3 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 0, x = 1$.

Podemos considerar la región como una del tipo I, donde $g_1(x) = x^3$ y $g_2(x) = \sqrt{x}$. Por tanto,

$$\int\int_D xydA = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} xydy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[x\frac{y^2}{2} \right]_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2 - x^7}{2} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^8}{8}\right]_0^1 = \frac{5}{48}.$$

El área de D sería:

$$\int\int_D 1dA = \int_0^1 \left(\int_{x^3}^{\sqrt{x}} 1dy\right) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{5}{12}.$$

También podríamos haber considerado la región como de tipo II, donde $h_1(y) = y^2$ y $h_2(y) = \sqrt[3]{y}$. La integral a calcular presenta la misma dificultad.

Ejemplo 3 (En clase) Calcular $\int\int_D (x+y)dA$ donde el recinto D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$; es decir,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \quad y \geq 0; x + y \leq 1\}.$$

Realmente D se puede considerar de tipo I o de tipo II. Ante la duda, lo mejor es siempre fijar una de las variables y trazar la sección para ver cómo varía la otra variable.

Observemos que la recta que une los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$ es $y = 1 - x$. Así, fijado $x \in [0,1]$ para que $(x,y) \in D$ debe suceder que $0 \leq y \leq 1 - x$. Por tanto, podemos escribir

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

donde $g_1(x) = 0$ y $g_2(x) = 1 - x$. Si fijamos $y \in [0,1]$, para que $(x,y) \in D$ debe suceder que $0 \leq x \leq 1 - y$. Por tanto, podemos escribir

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde $h_1(y) = 0$ y $h_2(y) = 1 - y$.

Entonces

$$\int\int_D x + ydA = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x + ydy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} x + ydx\right) dy.$$

La dificultad para realizar la integral iterada según un orden de integración u otro, es la misma debido a la simetria de f respecto de x e y.

Nota: Aparte del cálculo de la integral doble resulta de interés la igualdad que se obtiene entre las dos integrales iteradas. Para cualquier función continua f se tendría

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x,y)dx\right) dy.$$

Este hecho lo comentaremos más adelante, pues a veces será de mucha utilidad.

Un ejemplo parecido al anterior es:

Ejemplo 4 Hallar el volumen del sólido limitado por arriba por el plano $z = y$ y por abajo por la región D del plano dada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Como $f(x, y) = y \geq 0$ sobre D, nos estan pidiendo calcular $\displaystyle\int\int_D ydA$.

Podemos considerar a D de tipo I o de tipo II. Así podemos escribir:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

donde $g_1(x) = 0$ y $g_2(x) = \sqrt{1 - x^2}$, o también:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

donde $h_1(y) = 0$ y $h_2(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

En todos los ejemplos anteriores el orden de integración era opcional, ya que las regiones eran a la vez del tipo I y II. Además la función a integrar no presentaba mayor dificultad en un caso o en otro. Pero esto no siempre sucede. Como ya se vió para recintos rectangulares paralelos a los ejes de coordenadas, el orden de integración si es en general importante. Vamos a ver un ejemplo significativo.

Ejemplo 5 (En clase) Calcular $\int\int_D e^{y^2} dA$, donde D es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$.

Podríamos calcular $\displaystyle\int\int_D e^{y^2} dA$ fijando x entre 0 y 1. En tal caso:

$$\int\int_D e^{y^2} dA = \int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} dy\right) dx.$$

Nos encontramos con un gran problema. No podemos calcular $\int_x^1 e^{y^2} dy$. No existe primitiva en términos elementales de la función e^{y^2}. Luego tenemos que invertir el orden de integración para intentar solucionar el problema. Si fijamos y entre 0 y 1, la x varía desde 0 a y. Así

$$\int\int_D e^{y^2} dA = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} dx\right) dy = \int_0^1 y e^{y^2} dy = \frac{e-1}{2}.$$

<u>Observación</u>: Es posible que en un determinado cálculo nos encontremos directamente con la necesidad de calcular $\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} dy\right) dx$, lo cual no es posible. Observemos que usando la integral doble y el Teorema de Fubini, hemos podido invertir el orden de integración y afirmar que

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 e^{y^2} dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y e^{y^2} dx\right) dy = \frac{e-1}{2}.$$

De hecho, para cualquier función continua f se tiene:

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 f(x,y) dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y f(x,y) dx\right) dy.$$

El único problema que hay es que para pasar de un orden de integración a otro, nos tenemos que hacer una idea de cómo es el dominio de integración D a partir de la integral iterada dada. Este problema se trata más adelante.

Hasta ahora el cálculo de las integrales de una variable que hemos tenido que hacer han sido simples (salvo quizás el caso $\int e^{y^2} dy$). Obviamente esto no siempre sucede y por tanto, habrá que tener en cuenta todas las técnicas estudiadas en la primera parte del curso para el cálculo de primitivas (integración por partes, cambio de variables, integrales trigonométricas....).

<u>**Ejemplo 6**</u> (Ejercicio)

Hallar el volumen de la región sólida que está limitada por el paraboloide $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano xy ($z = 0$).

Queremos ahora hacer hincapié en que a veces por la forma que tiene el dominio y/o la estrategia a seguir en el orden de integración (por dificultades de $f(x,y)$) es conveniente descomponer el dominio D en dos o más dominios que no se solapen y que sean de los tipos I o II; por ejemplo $D = D_1 \cup D_2$ y aplicar la propiedad de subdivisión

$$\int\int_D f(x,y) dA = \int\int_{D_1} f(x,y) dA + \int\int_{D_2} f(x,y) dA.$$

Vamos a ver algunos dominios donde se puede seguir esta estrategia:

D_1 es un rectángulo y D_2 es del tipo I o II. Así:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_{D_1} f(x,y)dA + \int\int_{D_2} f(x,y)dA$$

$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 f(x,y)dy \right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^2 f(x,y)dy \right) dx.$$

También es cierto que D es del tipo II, luego podemos hacer

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx \right) dy.$$

Consideremos ahora el siguiente dominio:

En este caso D_1 y D_2 son dos triángulos luego

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_{D_1} f(x,y)dA + \int\int_{D_2} f(x,y)dA$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x,y)dy \right) dx.$$

Desarrollamos un ejemplo: Calcular $\int\int_D e^{x+y}dA$, donde D es la región romboidal de vértices $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ y $(0,-1)$.

Podemos escribir

$$D = \{(x,y) \in R^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

Parece lógico considerar $D = D_1 \cup D_2$, donde D_1 y D_2 son los triángulos representados en las figuras siguientes:

Son dos regiones que no se solapan, así:

$$\int\int_D e^{x+1}dA = \int\int_{D_1} e^{x+1}dA + \int\int_{D_2} e^{x+1}dA.$$

Podemos considerar a D_1 y D_2 de tipo I, luego

$$\int\int_{D_1} e^{x+1}dA = \int_{-1}^0 \left(\int_{-1-x}^{1+x} e^{x+y}dy \right) dx$$

y

$$\int\int_{D_2} e^{x+1}dA = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} e^{x+y}dy \right) dx.$$

3.3. Inversión del orden de integración en integrales iteradas

Inversión del orden de integración en integrales iteradasInversión del orden de integración en integrales iteradas A veces, es útil invertir el orden de integración en una integral iterada. Esto se puede llevar a cabo reconociendo el dominio D en el plano que, según Fubini, daría lugar a esta integral iterada para el cálculo de $\int\int_D f(x,y)dA$ y posteriormente, si la región es de un tipo adecuado, como las vistas anteriormente, se cambia el orden de integración. Muestras de esto ya se han obtenido en los ejemplos 3 y 5 en los que las regiones son triángulos.

En el ejemplo 3 obtuvimos

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x,y)dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} f(x,y)dx\right)$$

al integrar sobre el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

En el ejemplo 5 (muy significativo porque nos permite hacer un cálculo que en principio no es posible) obtuvimos

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 f(x,y)dy\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{y} f(x,y)dx\right)$$

al integrar sobre el triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$.

Supongamos ahora que nos dan una integral iterada, por ejemplo

$$\int_0^2 \int_1^{e^x} f(x,y)dydx.$$

Lo primero que vamos a hacer es dibujar la región D a partir de los límites de integración dados. En este ejemplo vemos que primero integramos respecto de la y luego se trata de una región de tipo I.

Los límites interiores son: $y = e^x$; que es la curva superior, y $y = 1$; que es la curva inferior.

Por tanto se dibujan los límites de x que deben ser constantes ($x = 0$ límite izquierdo y $x = 2$ límite derecho) y las curvas anteriores.

Por una parte

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_0^2 \left(\int_1^{e^x} f(x,y)dy\right) dx.$$

Aplicando Fubini de la otra forma, fijaríamos y entre 1 y e^2 y en la región D x se extiende desde $\ln y$ (porque $y = e^x$) hasta $x = 2$. Por tanto

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_1^{e^2} \left(\int_{\ln y}^{2} f(x,y)dx\right) dy.$$

Luego hemos obtenido, invirtiendo el orden de integración

$$\int_0^2 \int_1^{e^x} f(x,y)dydx = \int_1^{e^2} \int_{\ln y}^2 f(x,y)dxdy.$$

3.4. Cambio de variables en integrales dobles

Cambio de variables en integrales doblesCambio de variables en integrales dobles
Cuando vimos las integrales simples $\int_a^b f(x)dx$ pudimos comprobar que un cambio de variable adecuado, $x = g(u)$, siendo g una función derivable y con g' continua, podía facilitar el cálculo de la integral. Así, si $a = g(c)$ y $b = g(d)$, se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(u))g'(u)du.$$

Nota: Lo anterior es válido para cualquier disposición de a y b, pero aun siendo $a < b$ puede suceder que sea $c > d$. Por otra parte, el intervalo que une $g(c)$ con $g(d)$ no tiene porque coincidir con el intervalo $g([c,d])$, cuando $c < d$.

Sin embargo, cuando $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ es monótona y derivable con derivada continua se tiene

$$\int_{g([c,d])} f(x)dx = \int_{[c,d]} f(g(u))|g'(u)|du.$$

Esta última fórmula es la que se generaliza, en cierto modo, a varias variables.

Resulta que en las integrales dobles, triples, $\cdots$, los cambios de variable son también de gran utilidad y, quizás, de mayor utilidad que en las integrales simples puesto que, a diferencia de las integrales simples, la dificultad en las integrales múltiples puede estar en la función que se integra o en el dominio (recinto de integración) o en ambos casos a la vez. Así, cuando se realiza un cambio de variable en una integral doble o triple, puede que se haga o bien por la dificultad de la función a integrar (en este caso se intenta hacer un cambio que simplifique el integrando y no complique el recinto de integración) o bien por simplificar el recinto de integración. Hay veces en que un cambio de variable simplifica ambas cosas a la vez. El cambio más utilizado en integrales dobles es el cambio a coordenadas polares, pero antes de analizar este damos una idea general (poco formal) de un cambio de variables en integrales dobles.

En las integrales simples al hacer el cambio $x = g(u)$, los límites de integración a y b se transforman en otros; c y d, tales que $a = g(c)$ y $b = g(d)$. Al hacer un cambio de variable en una integral doble se transforma el recinto de integración D en otra región D^* con el propósito de que D^* sea más simple que D o al menos del tipo de D si el objeto es simplificar la expresión de f.

Por otra parte, recuérdese que el cambio de variable en una integral simple introduce un nuevo factor en el integrando: $g'(u)$. Es razonable pensar que lo mismo sucede con el caso de dos variables. En este caso, y en el caso de integrales múltiples, va a aparecer el llamado *jacobiano* del cambio de variables, llamado así en honor al matemático alemán Carl Coustav JACOBI, que fué el primero en trabajar con cambios de variables.

En general, un cambio de variables viene dado por una Transformación biyectiva T de una región B del plano uv en una región D del plano xy de forma que

$$(x, y) = T(u, v) = (g(u, v), h(u, v))$$

donde g y h tienen derivadas parciales de primer orden continuas en la región B. (ver Larson, 1278).

En una integral doble, al tener dos variables x, y, al realizar un cambio aparecen dos nuevas variables u y v. Por tanto, un cambio de variables en una integral doble sería del tipo

$$\left\{ \begin{array}{l} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{array} \right. \quad \text{ó} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right. \tag{3.4.1}$$

donde se supone que g y h son funciones con derivadas parciales de primer orden continuas.

A las funciones g y h hay que pedirle más condiciones para que funcione el cambio de variable, pero son propiedades que quedan fuera del alcance del curso.

Dado el cambio de variables (3.4.1) consideremos la función

$$J(u, v) = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{array} \right| .$$

A $J(u, v)$ se le llama el jacobiano del cambio de las variable $\{x, y\}$ a las variables $\{u, v\}$.

También se designa por $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ al jacobiano.

Sólo se supondran admisibles aquellos cambios de variables para los que el jacobiano en cada punto sea distinto de cero.

Supongamos que queremos calcular la integral doble $\displaystyle\int\int_D f(x, y)dA$, es decir, que D es el recinto de integración de f y mediante el cambio de variables transformamos un recinto D^* del plano uv en la región D del plano xy.

Entonces el resultado es el siguiente (teorema del cambio de variable en una integral doble):

$$\int\int_D f(x, y)dA = \int\int_{D^*} f(x(u, v), y(u, v))|J(u, v)|dudv.$$

La demostración y el enunciado correcto del teorema se salen del alcance de este curso.

Así pues, se cambia el recinto de D a D^*, tal y como se cambian los límites de integración en una integral simple y el cambio introduce un nuevo factor; el valor absoluto del jacobiano $|J(u,v)|$, que viene a ser el sustituto de $g'(u)$ (o más exactamente de $|g'(u)|$ en el caso de g monótona).

Cambio de variables a coordenadas polares

Las coordenadas polares, muy útiles para distintas cuestiones, fueron utilizados para el estudio de ciertos *límites indeterminados* cuando la función $f(x,y)$ tenía una descripción simple en polares. En la integración ocupan un papel estelar. Estas se usan con frecuencia en las integrales dobles principalmente cuando el integrando o la región de integración, o ambas, tienen una descripción simple en polares, pues facilitan mucho los cálculos. Esto es especialmente cierto para regiones circulares y para integrandos donde aparezcan x^2+y^2.

Las fórmulas de cambio de coordenadas polares, que notaremos (r,θ), a coordenadas cartesianas o rectangulares (x,y) son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{array}\right. , \qquad r \geq 0,\ \ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

En este caso, el jacobiano de la transformación a polares sería

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r.$$

Luego $J(r,\theta) = r$. Obtenemos que el jacobiano es distinto de cero para todo punto $(r,\theta) \neq (0,0)$ y además $|J(r,\theta)| = r$ pues siempre $r \geq 0$.

De esta forma, al hacer el cambio a polares, si B es la región del plano $r\theta$ que se transforma en el recinto de integración D del plano xy mediante tal cambio, se sigue del resultado del cambio de variables visto que

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_B f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)rdrd\theta.$$

Vamos a ver un primer ejemplo donde se ve claramente la utilidad de la fórmula anterior y después veremos algunos tipos de recintos especiales donde suele ser útil el cambio a polares.

Ejemplo 1

Calcular $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{x^2+y^2+1}dA$ donde D es el disco de centro $(0,0)$ y radio 4.

Integrando D como una región del tipo I (banda horizontal) vemos que para cada x fijo entre -4 y 4, y varía desde la semicircunferencia inferior (de ecuación $y = -\sqrt{16-x^2}$) hasta la superior (de ecuación $y = \sqrt{16-x^2}$) y así

$$\int\int_D \frac{1}{x^2+y^2+1} dA = \int_{-4}^{4} \left(\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \frac{1}{x^2+y^2+1} dy \right) dx.$$

La integral iterada anterior es fácil de calcular. Sin embargo, tanto el integrando como el dominio de integración D se pueden expresar en polares de manera simple.

Observemos que el integrando se puede expresar, haciendo $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ como $f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \frac{1}{r^2+1}$, que al multiplicar por el jacobiano $|J(r,\theta)| = r$, queda

$$\frac{r}{r^2+1}$$

expresión que es muy fácil de integrar respecto de la variable r.

Por otra parte, el dominio también se simplifica mucho. En coordenadas polares D se puede describir como el conjunto de puntos (r,θ) tales que, para cada ángulo θ entre 0 y 2π, la r varía desde 0 (el origen) hasta $r = 4$ (circunferencia exterior). De esta forma, D se puede describir en coordenadas polares como

$$B = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 4, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Este conjunto se transforma en D mediante el cambio a polares. Por tanto,

$$\int\int_D \frac{1}{x^2+y^2+1} dA = \int\int_B \frac{r}{r^2+1} dr d\theta.$$

Podemos observar otra ventaja, y es que B es un rectángulo de lados paralelos a los ejes de coordenadas

Sabemos que el cálculo de integrales dobles sobre rectángulos de este tipo es muy fácil aplicando Fubini, pues en tal caso

$$\int\int_B \frac{r}{r^2+1} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \frac{r}{r^2+4} dr \right) d\theta.$$

O bien

$$\int\int_B \frac{r}{r^2+1} dr d\theta = \int_0^{4} \left(\int_0^{2\pi} \frac{r}{r^2+4} d\theta \right) dr.$$

<u>Algunos recintos de integración para los que suele ser útil el cambio a polares</u>

Vamos a dar una serie de recintos expresados en coordenadas cartesianas y su correspondiente descripción en polares:

1. Disco centrado en el origen:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2\}.$$

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

2. Un trozo de un disco:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 \leq a^2, x^2 \geq 0, y^2 \geq 0\}.$$

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

3. Un anillo (región circular o corona circular):

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}.$$

$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

4. Sector circular

$$D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq a, \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

5. Trozo de anillo

$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}.$$

Como vemos en todos los casos anteriores, la ventaja que tiene la descripción a polares es el que el conjunto que obtenemos es un rectángulo de lados paralelos a los ejes. De hecho, la última expresión

$$D = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

incluye todos los demás casos.

En estos casos, al ser D un rectángulo, la integral doble

$$\int\int_D f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r dr d\theta$$

es muy fácil de calcular aplicando Fubini como hemos visto en el ejemplo 1. Así

$$\int\int_D f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r dr d\theta = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) dr\right) d\theta$$

o bien se puede utilizar la otra integral iterada.

En resumen, hemos obtenido el siguiente resultado:

Si el recinto de integración D viene descrito es coordenadas polares por $a \leq r \leq b$ $(a, b \geq 0)$ y $\alpha \leq \theta \leq \beta$ $(0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi)$, es decir,

$$D = \{(x, y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

entonces

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)rdr\right) d\theta = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)rd\theta\right) dr.$$

Ejemplo 2 Calcular $\int\int_D (x^2+y^2)^2 dA$, donde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$.

D se describe mediante coordenadas polares como

$$\{(r,\theta).(0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Por tanto,

$$\int\int_D (x^2+y^2)^2 dA = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 r d\theta\right) dr = \frac{\pi}{12}.$$

En este ejemplo, tanto la función como el recinto de integración se prestaban claramente a que se hiciese el cambio a polares. En el siguiente ejemplo se realiza el cambio a polares únicamente por la forma que tiene el recinto.

Ejemplo 3 Calcular $\int\int_D (x^2+y)dA$, donde D es la región anular entre las dos circunferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=5$. Calcular asímismo el área de D.

La descripción de D en coordenadas polares es

$$\{(r,\theta) : 1 \leq r \leq \sqrt{5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Por tanto

$$\int\int_D (x^2+y)dA = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^{\sqrt{5}} (r^2\cos^2\theta + r\operatorname{sen}\theta)rdr\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^{\sqrt{5}} (r^3\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}\theta)dr\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4}\cos^2\theta + \frac{r^3}{3}\operatorname{sen}\theta\right]_{r=1}^{r=\sqrt{5}} d\theta = \int_0^{2\pi} \left(6\cos^2\theta + \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\operatorname{sen}\theta\right) d\theta.$$

Usando la identidad $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$, podemos seguir con la integral anterior y decir que es igual a:

$$\int_0^{2\pi} \left(3 + 3\cos(2\theta) + \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\operatorname{sen}\theta\right) d\theta = \left[3\theta + 3\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} - \frac{5\sqrt{5}-1}{3}\operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi} = 6\pi.$$

El cálculo del área es más simple y lo dejamos como ejercicio.

<u>**Ejemplo 4**</u> (Ejercicio) Probar que el volumen de la región encerrada por la esfera de centro el origen y radio a es

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

<u>**Ejemplo 5**</u> (Área de una región encerrada entre dos curvas)

Sea D la región comprendida entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$ y las rectas $y = x$ y $y = \sqrt{3}x$ que se encuentran en el primer cuadrante. Hallar el área de D.

Tenemos

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{3}x\}.$$

Está claro que en esta región $1 \leq r \leq 2$. Veamos ahora cuál es el intervalo de variación del ángulo θ.

Como $y = x$ es la bisectriz debe ser $\alpha = \frac{\pi}{4}$. De todas formas, de manera analítica procedemos así:

Un punto (x, y) de la recta escrito en forma polar $(r \cos\alpha, r \operatorname{sen}\alpha)$, debe verificar que $y = x$, es decir, $r \operatorname{sen}\alpha = r \cos\alpha$ o equivalentemente $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$, es decir, $\tan\alpha = 1$. Por tanto, $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Para determinar el ángulo β que caracteriza los puntos de la recta $y = \sqrt{3}x$, observemos que la pendiente es $\sqrt{3}$, luego β debe ser tal que $\tan\beta = \sqrt{3}$ y por tanto $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Por tanto, la descripción del sector anular D en polares es:

$$\{(r, \theta) : 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}.$$

De esta forma, el área de D se calcula:

$$\int\int_D 1 dA = \int_1^2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} r d\theta \right) dr.$$

Ejemplo 6 (Volumen de una región encerrada entre dos superficies)

Calcular el volumen del sólido limitado por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - (x^2 + y^2)$.

Tenemos que determinar el dominio D del plano en el que se proyecta tal sólido. Una vez que tengamos ese dominio D el volumen se puede poner como diferencia de dos volúmennes $V = V_1 - V_2$, donde V_1 es el volumen del sólido que está por debajo de la superficie $z = 2 - (x^2 + y^2)$ y por encima de D y V_2 es el volumen del sólido que está por debajo de la superficie $z = x^2 + y^2$ y por encima de D.

Por tanto:

$$V = \int\int_D [2 - (x^2 + y^2)]dA - \int\int_D (x^2 + y^2)dA = 2\int\int_D [1 - (x^2 + y^2)]dA.$$

Para determinar el recinto D, determinamos la curva intersección de las dos superficies y la proyectamos en el plano xy.

$$\left.\begin{array}{l} z = 2 - (x^2 + y^2) \\ z = x^2 + y^2 \end{array}\right\} \mathbb{R} \Rightarrow 2 - (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)\mathbb{R} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

La ecuación no contiene a z. Ello significa que esta ecuación es la de un cilindro proyectante de la curva de intersección sobre el plano xy, si se le interpreta en el espacio o bien la ecuación de la proyección de esa curva sobre el plano xy (para que $z = 0$). Tal curva es una circunferencia centrada en $(0, 0)$ y radio 1. Así:

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

o en polares

$$\{(r, \theta) : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Por tanto:

$$V = 2\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (1 - r^2) r d\theta\right) dr = \pi.$$

3.5. Áreas de superficies

Área de superficies

En la primera parte de la asignatura se vió cómo calcular la longitud del trozo de gráfica $y = f(x)$ (arco de curva) entre los puntos $x = a$ y $x = b$. Así, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es derivable, con derivada f' continua la longitud se calcula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

La idea era tomar una partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$, considerar la poligonal, formada por los segmentos que unen los puntos $(x_k, f(x_k))$ cuya longitud $L_n^{\sim}$ se toma como aproximación de L. Obtenemos

$$L_n^{\sim} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\Delta x_k$$

con $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, lo cual es una suma de Riemann correspondiente a la función $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ y haciendo el paso al límite se deduce la fórmula. ($L = \lim_{n\to\infty} L_n^{\sim}$)

El objetivo de esta sección es estudiar una fórmula análoga para el área de una superficie que constituye la gráfica de una función de dos variables.

Tengamos en cuenta que a estas alturas conocemos algunas cosas de la región sólida comprendida entre una superficie y una región acotada D del plano xy. Por ejemplo, sabemos hallar los extremos de f en D, el área de la base del sólido y el volumen del sólido. Aquí vamos a ver cómo calcular el área de la superficie.

Supongamos que D es una región acotada (y cerrada) del plano y que $f : D \to \mathbb{R}$ tiene primera derivadas parciales continuas. De manera análoga a como se calcula la longitud del arco de curva con aproximaciones poligonales cuyas longitudes son sumas de Riemann de una función de una variable, la idea es aproximar esta superficie mediante unas sumas de Riemann de una función de dos variables, de manera que finalmente el área coincide con una integral doble sobre la región D de una función de dos variables que se fabrica a partir de las dos derivadas parciales de f (tal como se hacia con la longitud de un arco, en el que la función a integrar es $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$).

En este caso el proceso es mucho más complicado. En síntesis consiste en encerrar la región D dentro de un rectángulo del que se hace una partición mediante una malla con lineas paralelas a los ejes coordenados. Esto crea un cierto número de celdas, de las cuales consideramos las que caen dentro de D, $R_1, R_2, \ldots, R_n$.

En cada una de ellas (R_k) se elige una esquina (x_k, y_k) (por ejemplo la más próxima al origen) y en el punto $(x_k, y_k, z_k) = (x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ de la superficie S se considera el plano tangente T_k, el cual existe por ser f diferenciable en (x_k, y_k). El área de la porción de plano tangente que está justo encima de R_k es aproximadamente igual al área de la superficie encima de R_k (cuanto más pequeño sea R_k, es decir k grande, mejor será la aproximación). Entonces la suma de las áreas de todas estas porciones de planos tangentes dan una aproximación del área de la superficie $z = f(x, y)$.

Por problemas de tiempo no vamos a profundizar más en el tema. Puede verse con detalle en "Larson").

Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas sobre una región D cerrada y acotada del plano xy, entonces el área de la porción de superficie $z = f(x, y)$ que se proyecta sobre la región D es

$$\int\int_D \sqrt{1+(f_x(x,y))^2+(f_y(x,y))^2}dA.$$

Observemos que al ser el integrando una función no negativa, la integral también lo es.

Lo que quiere decir esto: Se puede considerar la región D como la proyección del trozo de superficie $z = f(x,y)$ sobre el plano xy. Si hubiera una fuente de luz con rayos perpendiculares al plano xy. La región D sería la sombra sobre el plano del trozo de superficie.

Al igual que las integrales para la longitud de arco, las que dan el área de una superficie suelen ser muy difíciles de calcular. No obstante, hay excepciones como los de los próximos ejemplos.

Ejemplo 1 (Área de una superficie plana)

Calcular el área de la porción del plano $x+y+z=2$ que se proyecta sobre el círculo $x^2+y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante.

Aquí el plano $x+y+z=2$ es la gráfica de la función $f(x,y)=2-x-y$ y el dominio de integración es

$$D = \{(x,y) \in R^2 : x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Como $f_x(x,y) = -1$ y $f_y(x,y) = -1$ el área de la superficie viene dada por

$$S = \int\int_D \sqrt{1+(f_x(x,y))^2+(f_y(x,y))^2}dA = \int\int_D \sqrt{3}dA$$

$$= \sqrt{3}\int\int_D dA = \sqrt{3} \times \text{área de } D.$$

Por tanto la integral es simplemente $\sqrt{3}$ veces el área de la región D. Como el área de D es $\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi$ el área pedida es $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$.

Ejemplo 2

Hallar el área de la porción de superficie $x^2-y+z=1$ situada encima de la región triangular de vértices $(1,0,0)$, $(0,-1,0)$ y $(0,1,0)$.

La superficie es la gráfica de la función $f(x,y) = 1-x^2+y$ y

$$D = \{(x,y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad x-1 \leq y \leq 1-x\}.$$

Como $f_x(x,y) = -2x$ y $f_y(x,y) = 1$ el área de la superficie es

$$S = \int\int_D \sqrt{1 + (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2} dA = \int\int_D \sqrt{2 + 4x^2} dA = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ejemplo 3

Hallar el área de la parte del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 5$ que está por encima del plano $z = 1$. Aproximar hasta la centésima.

El paraboloide corta al plano $z = 1$ en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, ya que

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z = 5 \\ z = 1 \end{array}\right\} \mathbb{R} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Así que la parte del paraboloide cuyo área buscamos se proyecta en el disco (círculo)

$$x^2 + y^2 \leq 4.$$

Tenemos $f(x,y) = 5 - (x^2 + y^2)$ luego $f_x(x,y) = -2x$ y $f_y(x,y) = -2y$. Por tanto el área pedida se calcula como sigue:

$$S = \int\int_D \sqrt{1 + (f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y)^2} dA = \int\int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA,$$

donde D es el disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Dado el dominio de integración y la expresión de la función a integrar, parece conveniente realizar un cambio a coordenadas polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ y así, como la descripción de D en polares es

$$\{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

tenemos

$$S = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2\cos^2\theta + 4r^2\operatorname{sen}^2\theta} r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{1 + 4r^2} r dr \right) d\theta$$

o bien

$$S = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4r^2} r d\theta \right) dr.$$

Utilizando la última forma de calcular el área, llegamos a obtener

$$S = 2\pi \int_0^2 r(1 + 4r^2)^{\frac{1}{2}} dr = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1).$$

Ejemplo 4 (Ejercicio)

Calcular el área de la esfera de centro el origen y radio r.

3.6. Masa, centro de masas y momentos de inercia de una lámina

Masa, centro de masas y momentos de inercia de una lámina Un cuerpo lo suficientemente "plano" como para poder ser considerado bidimensional se llama una *lámina*. Supongamos que una lámina ocupa una región acotada D del plano xy. Una *lámina homogénea* es la que tiene densidad constante; en este caso, la densidad ρ es la masa por unidad de área; es decir

$$\rho = \frac{m}{A}$$

donde m es la masa de la lámina y A es el área de la lámina.

Recordemos que elárea de D viene dada por la integral doble

$$\int\int_D 1dA$$

luego la masa de la lámina verifica

$$m = \int\int_D \rho dA$$

ya que ρ es constante.

Una *lámina no homogénea* es la que tiene densidad variable, es decir, en cada punto (x, y) de la lámina hay una densidad $\rho(x, y)$ que puede variar de un punto a otro.

En este caso parece lógico que la masa de la lámina venga definida como exponemos a continuación.

Masa de una lámina plana de densidad variable

Sea ρ la función de densidad sobre la lámina que está extendida sobre una región D del plano xy. Suponiendo que la función ρ es integrable sobre D (es suficiente con que sea continua sobre D), entonces la masa m de la lámina viene dada por

$$m = \int\int_D \rho(x, y)dA.$$

Definimos a continuación unos conceptos, los *momentos*, que tienen interés por sí mismos, pero cuyos cálculos suelen ser un paso intermedio hacia un objetivo más relevante: el *centro de masas*.

El *momento* (momento de masa) de un objeto respecto a un eje es el producto de su masa por la distancia "orientada"desde el eje.

Si tenemos ahora una lámina en la región D de densidad variable $\rho(x, y)$ realizando una partición o malla de D y realizando aproximaciones de los momentos de las celdas y sumas de Riemann se justifica que se den las siguientes definiciones de momentos

$$M_x = \int\int_D y\rho(x, y)dA, \quad M_y = \int\int_D x\rho(x, y)dA.$$

Si la masa de la lámina es m, el *centro de masas* es

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\right).$$

Si la densidad ρ es constante, al punto $(\overline{x}, \overline{y})$ se le llama *centro de gravedad* de la región D. En general, para una región plana D el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ se llama *centroide* de la región.

El conocer el centro de masas es muy útil en muy diversas aplicaciones, pues permite tratar la lámina como si toda su masa estuviera concentrada en ese punto.
Intuitivamente, el centro de masas es el punto equilibrio de la lámina.

En el caso de densidad constante, el centro de gravedad sale así

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{\int\int_D xdA}{\text{area}(D)}, \frac{\int\int_D ydA}{\text{area}(D)}\right).$$

Ejemplo

Determinar la masa y el centro de masas de la lámina correspondiente a la región parabólica

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

si la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia de (x, y) al eje x.

Si la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia de (x, y) al eje x

$$\rho(x, y) = Ky.$$

Masa

$$m = \int\int_D \rho(x, y)dA = K\int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2} ydydx = \frac{256}{15}K.$$

<u>Centro de masas</u>

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right).$$

$$M_x = \int\int_D y\rho(x,y)dA = \int\int_D Ky^2 dA = \frac{4096}{105}K.$$

$$M_y = \int\int_D x\rho(x,y)dA = \int\int_D KxydA = 0.$$

Por tanto,

$$\overline{x} = \frac{M_y}{m} = 0, \quad \overline{y}\frac{M_x}{m} = \frac{\frac{4096}{105}K}{\frac{236}{15}K} = \frac{16}{7} \approx 2,29.$$

El centro de masas es $(0, 2, 29)$.

Momentos de inercia

Los momentos M_x y M_y usados para determinar el centro de masas se suelen llamar *primeros momentos* respecto de los ejes x e y.

Ahora introducimos otro tipo de momentos, el segundo momento o momento de inercia de una lámina respecto de una recta. Así como la masa es una medida de la resistencia de la materia a cambios en un movimiento rectilineo, el momento de inercia mide la resistencia de la materia a cambios en un movimiento de rotación.

Por ejemplo, si unapartícula de masa m dista d de una recta fija, su momento de inercia respecto de ella se define como

$$I = md^2 = (masa)(distancia)^2.$$

Al igual que con los momentos de masa M_x, M_y, podemos generalizar este concepto para obtener los momentos de inercia de una lámina de densidad variable que ocupa una región D, respecto de los ejes x, y. Estos segundos momentos, que se denotan por I_x, I_y, son productos de una masa por el cuadrado de una distancia.

<u>Momentos de inercia</u>

Los momentos de inercia de una lámina de densidad variable ρ alrededor de los ejes x e y son, respectivamente:

$$I_x = \int\int_D y^2\rho(x,y)dA, \quad I_y = \int\int_D x^2\rho(x,y)dA.$$

<u>**Ejemplo**</u>

Calcular el momento de inercia respecto del eje x de la lámina tratada anteriormente.

$$I_x = \int\int_D y^2\rho(x,y)dA = K\int\int_D y^3 dA = K\int_{-2}^{2}\left(\int_0^{4-x^2} y^3 dy\right)dx = \frac{32768}{315}K.$$

$$I_y = \int\int_D x^2\rho(x,y)dA = K\int\int_D x^2 y dA = K\int_{-2}^{2}\left(\int_0^{4-x^2} x^2 y dy\right)dx = \frac{1024}{105}K.$$

3.7. Integrales triples

Integrales triples El procedimiento utilizado para definir una integral triple imita el de las integrales dobles. Una integral doble se calcula sobre una región acotada del plano. Una integral triple

$$\int\int\int_S f(x,y,z)dV$$

se calcula sobre una región sólida acotada (y cerrada) del espacio $\mathbb{R}^3$ y donde la función f es de tres variables.

No vamos a entrar en detalles, por problemas de tiempo, pero esbozaremos una ligera idea de la definición.

Supongamos que f es una función de tres variables definida sobre una región sólida S que está acotada.

Introducimos S en un paralelepípedo (caja) Q del espacio. Formamos una partición o retículo de cajas del paralelepípedo consistete en un número finito de cajas más pequeñas, con lados paralelos a los planos coordenados, como muestra la figura.

Excluimos las cajas que tienen puntos fuera de S. Sean $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ los volúmenes de las cajas que quedan. Se toma un punto (x_k, y_k, z_k) en cada caja y se forma la suma de Riemann:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k.$$

Si repetimos el proceso cada vez más veces llegamos a la siguiente definición:

[Integral triple y volumen]

Si f es una función de tres variables definida sobre la región sólida y acotada S del espacio $\mathbb{R}^3$, entonces la integral triple de f sobre S se define como el siguiente límite

$$\int\int\int_S f(x,y,z)dV := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k.$$

En caso se que el límite existe se dice que la función f es integrable sobre S.

El volumen de la región sólida S viene dado por

$$\int\int\int_S 1dV = \int\int\int_S dV.$$

(Es fácil razonar que el volumen se calcula de esta forma).

Los resultados que aseguran que existe una integral triple son generalizaciones de los obtenidos para integrales dobles.

Todas las propiedades vistas para integrales dobles también se verifican de forma análoga para integrales triples.

Las integrales triples son muy útiles en Física para calcular la masa de un sólido S (integrando su función de densidad), el centro de masas (o centro de gravedad), momentos y momento de inercia.

Cálculo de integrales triples

Al igual que en el caso de las integrales dobles, se calculan las triples por integración iterada, gracias al Teorema de Fubini, que se generaliza a este tipo de integrales (y a otras más generales). Lo que ocurre es que ahora todo se complica más, por dos razones principales:

1. A la hora de usar integrales iteradas simples para calcular las integrales triples, se tienen, en principio, seis posibles órdenes de integración, mientras que en las dobles sólo había dos posibilidades.

   Puede haber integrales iteradas formada por una integral simple y una doble.

2. En general, es más difícil establecer los límites de integración en una integral triple porque la región de integración S es tridimensional.

El caso más simple es integrar sobre un paralelepípedo (caja) de caras paralelas a los planos de coordenadas, que viene a ser como integrar sobre rectángulos de lados paralelos a los ejes de coordenadas en las integrales dobles.

[Teorema de Fubini para un paralelepípedo]

Si f está definida sobre un paralelepípedo $Q = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$. Se puede calcular la integral triple de f sobre Q considerando las integrales iteradas. Esta integración iterada se puede hacer en cualquier orden (en total 6 casos) con el necesario ajuste de los límites de integración. Así

$$\int\int\int_Q f(x, y, z)dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz.$$

El cálculo de la integral iterada exige el cálculo de tres integrales simples y se procede calculando desde dentro hacia fuera.

Ejemplo 1

Calcular $\int\int\int_Q z^2ye^x dV$, donde $Q = [0, 1] \times [1, 2] \times [-1, 1]$.

$$\int\int\int_Q z^2ye^x dV = \int_0^1 \left(\int_1^2 \left(\int_{-1}^1 z^2ye^x dz\right) dy\right) dx = e - 1.$$

En general, se nos planteará el problema de calcular una integral triple sobre una región no paralelepípeda y lo más normal será tener una región sólida S limitada por una superficie "superior" $z = g_2(x, y)$ y una "inferior" $z = g_1(x, y)$, definidas sobre un dominio común D del plano xy. En este caso se puede describir S del siguiente modo

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}.$$

S sería la región sólida limitada por dos gráficos de funciones de dos variables.

El barrido del dominio D se hace entonces mediante una integral doble. Se suponen g_1 y g_2 continuas sobre D. En este caso el Teorema de Fubini dice lo siguiente

Si $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}$, donde g_1 y g_2 son dos funciones continuas sobre D, entonces

$$\int\int\int_S f(x, y, z)dV = \int\int_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right) dA.$$

Observemos que una vez realizado el cálculo de la integral interior, que es una integral simple respecto de la variable z, nos queda una expresión en las variables x e y, que posteriormente se integra sobre el recinto D.

Así, para este tipo de regiones sólidas, el cálculo de la integral triple se reduce a una integral doble, la cuál posteriormente se calculará mediante integrales simples en las variable x e y.

Lo más usual es que nuestro dominio D del plano xy donde estan definidas las funciones g_1 y g_2 sean de alguno de los tipos estándar (tipo I o tipo II) estudiadas en las integrales dobles.

Así por ejemplo, si $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, l_1(x) \leq y \leq l_2(x)\}$ donde l_1 y l_2 son funciones continuas sobre $[a,b]$, entonces sabemos calcular la integral doble

$$\int\int_D h(x,y)dA$$

mediante la integral iterada

$$\int\int_D h(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_{l_1(x)}^{l_2(x)} h(x,y)dy\right) dx.$$

Por tanto, en este caso, la región sólida S vendría descrita así

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, l_1(x) \leq y \leq l_2(x), g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$$

y la integral triple de f sobre S se podrá calcular utilizando una integral iterada en la que aparecen tres integrales simples en el orden $dzdydx$, de manera análoga a como se hace en el caso del paralelepípedo.

El resultado, en resumen, sería el siguiente

Si S es la región sólida definida por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, l_1(x) \leq y \leq l_2(x), g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$$

donde l_1, l_2, g_1 y g_2 son funciones continuas, entonces

$$\int\int\int_S f(x,y,z)dV = \int_a^b \left(\int_{l_1(x)}^{l_2(x)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dy\right) dx$$

Se pueden dar otras regiones estándar; por ejemplo, si el dominio D donde g_1 y g_2 están definidas es del tipo II

$$D = \{(x,y) : c \leq y \leq d, l_1(y) \leq x \leq l_2(y)\}$$

entonces S viene definida por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : c \leq y \leq d, l_1(y) \leq x \leq l_2(y), g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$$

y entonces el cálculo de la integral triple sería

$$\int\int\int_S f(x,y,z)dV = \int_c^d \left(\int_{l_1(y)}^{l_2(y)} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dx\right) dy.$$

Otras regiones estándar

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, l_1(x) \leq z \leq l_2(x), g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq y \leq b, l_1(x) \leq z \leq l_2(x), g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z)\}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, l_1(z) \leq y \leq l_2(z), g_1(x, z) \leq y \leq g_2(x, z)\}$$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, l_1(z) \leq y \leq l_2(z), g_1(y, z) \leq x \leq g_2(y, z)\}$$

La integración sobre estos recintos es análoga.

Observación sobre el cálculo de volúmenes

Hemos definido inicialmente el volumen de una región sólida acotada en $\mathbb{R}^3$ como

$$V = \int\int\int_S dV.$$

Al dar el concepto de integral doble, definimos, cuando $g(x, y) \geq 0$ el volumen de la región sólida S que está por debajo de la superficie $z = g(x, y)$ y por encima del dominio D como

$$V = \int\int_D g(x, y)dA.$$

De esta forma, el volumen de la región sólida S comprendida entre dos gráficas $z = g_1(x, y)$, $z = g_2(x, y)$, siendo $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$, sobre la región D del plano, sería

$$V = \int\int_D (g_2(x, y) - g_1(x, y))dA.$$

Ahora se aprovecha la definición de integral triple para dar una definición general de volumen, pero está claro que esta definición debe ser compatible con lo ya conocido.

Observemos que la región sólida descrita anteriormente es

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}.$$

Según el Teorema de Fubini que hemos visto,

$$V = \int\int\int_S 1dV = \int\int_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} 1dz\right) dA = \int\int_D (g_2(x, y) - g_1(x, y))dA$$

y como vemos coincide con la fórmula conocida.

Consideraciones prácticas

1. Obviamente, cuando un recinto (región sólida) estándar se puede describir de dos formas diferentes, se utilizará, para calcular la integral sobre él, aquella que simplifiquen los cálculos. Se pone de manifiesto la necesidad de una buena utilización del Teorema de Fubini.

2. Por lo general, para hallar los límites de integración que permiten descubrir una región sólida S como estándar, lo que se hace es determinar los límites más interiores, los cuales pueden ser funciones de las dos variables exteriores. Después, se proyecta la figura en el plano coordenado determinado por estas dos variables y así, usando lo visto en integración doble, se calculan los límites de integración de este recinto plano.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2

Sea S la región sólida del espacio que está por debajo del plano de ecuación $z = x + y$ y por encima del triángulo del plano de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(2, 2)$.

Calcular

$$\int\int\int_S (xy + 2z)dV.$$

Sea D la región triangular del plano. La región sólida S viene dada por

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq x + y\}.$$

El dominio D es una región de tipo I o de tipo II. Considerada de tipo I, fijada x entre $=$ y 2, la variable y varía entre $=$ y x. Así que D se puede describir como

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}.$$

De esta forma

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x + y\}.$$

Por tanto,

$$\int\int\int_S (xy + 2z)dV = \int_0^2 \left(\int_0^x \left(\int_0^{x+y} (xy + 2z)dz\right) dy\right) dx = \frac{44}{3}.$$

Ejemplo 3

Calcular $\displaystyle\int\int\int_S xdV$, donde S es el sólido en el primer octante limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $2y + z = 4$.

La figura muestra el sólido. La superficie superior del sólido es el plano $z = 4 - 2y$ y la inferior es el plano xy (o sea $z = 0$), así que

$$0 \leq z \leq 4 - 2y.$$

La proyección D del sólido sobre el plano xy es el cuarto de disco (círculo) $x^2 + y^2 \leq 4$ (la base del cilindro) con $x \geq 0$ e $y \geq 0$ (porque S está en el primer octante). Esta proyección se puede considerar como una región del tipo I

$$D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}.$$

Por tanto,

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq z \leq 4 - 2y\}.$$

De esta forma se tiene:

$$\int\int\int_S x dV = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(\int_0^{4-2y} x dz \right) dy \right) dx = \frac{20}{3}.$$

También se puede calcular así

$$\int\int\int_S x dV = \int\int_D \left(\int_0^{4-2y} x dz \right) dA = \int\int_D (4x - 2xy) dA,$$

y ahora calcular esta integral doble por polares. (Es parecido al ejemplo 2).

Ejemplo 4 (Volumen de un tetraedro)

Hallar el volumen de un tetraedro T limitado por la parte del plano $2x + y + 3z = 6$ en el primer octante. Utiliza una integral triple.

Cortes del plano con los ejes

$$x = 0, y = 0, \mathbb{R} \Rightarrow z = 2, \quad y = 0, z = 0\mathbb{R} \Rightarrow x = 3, \quad x = 0, z = 0\mathbb{R} \Rightarrow y = 6.$$

Los puntos de corte con los ejes son: $(0, 0, 2), (3, 0, 0), (0, 6, 0)$.
El tetraedro es la región

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \text{ y } 0 \leq z \leq \frac{1}{3}(6 - 2x - y)\}.$$

La proyección del tetraedro sobre el plano xy ($z = 0$) es el triángulo de vértices $(0, 0)$ $(3, 0)$ y $(0, 6)$, luego

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 6 - 2x\}.$$

Por tanto podemos describir T así:

$$T = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 6 - 2x, 0 \leq z \leq \frac{1}{3}(6 - 2x - y)\}.$$

Luego el volumen sería:

$$V = \int\int\int_T dV = \int_0^3 \int_0^{6-2x} \int_0^{\frac{1}{3}(6-2x-y)} dzdydx = 6.$$

Ejemplo 5

Escribir (sin calcular) la integral triple que determina el volumen del sólido S limitado por arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y por abajo por el plano $y + z = 2$.

Obervemos primero que la intersección del plano y la esfera está toda por encima del plano xy. Luego a efectos de resolver el problema, la esfera tiene como ecuación $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ (hemisferio superior).

Los límites de integración de la variable z estarán dados por

$$2 - y \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Para hallar los límites de integración de las variables x e y consideramos la proyección de S sobre el plano xy. Para ello determinaríamos la intersección del hemisferio y el plano $z = 2 - y$:

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = 2 - y \Leftrightarrow x^2 + 2(y - 1)^2 = 2.$$

Aunque hemos calculado la intersección en $\mathbb{R}^3$, la ecuación no contiene a z. Esto significa que esta ecuación es, bien la del cilindro proyectante de la curva de intersección sobre el plano xy si se le interpreta en $\mathbb{R}^3$, o bien la ecuación de la proyección de una curva sobre el ‘plano xy, para el que $z = 0$. Esta curva es una elipse centrada en $(0, 1)$ y de semiejes $\sqrt{2}$ y 1.

$$\frac{x^2}{2} + (y - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{(y - 1)^2}{1^2} = 1.$$

Dada la ecuación de la elipse, aunque la región D sea del tipo I y II, vamos a considerarla del tipo II, lo que significa que integramos primero respecto a x y luego respecto a y.

Observemos que la y varía entre 0 y 2. Fijada esta y entre 0 y 2, la x varía desde $-\sqrt{2(1 - (y - 1)^2)} = -\sqrt{2 - 2(y - 1)^2} = -\sqrt{4y - 2y^2}$ hasta $\sqrt{4y - 2y^2}$.

Por tanto, el sólido queda definido por:

$$\{(x, y, z) : 0 \leq y \leq 2, -\sqrt{4y - 2y^2} \leq x \leq \sqrt{4y - 2y^2}, 2 - y \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Por tanto,

$$V = \int_0^2 \int_{-\sqrt{4y-2y^2}}^{\sqrt{4y-2y^2}} \int_{2-y}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdxdy.$$

Cambio en el orden de integración

Aquí podemos plantear la cuestión análoga a la vista para integrales dobles y la idea es la misma. Así, si nos encontramos con el cálculo de la integral iterada

$$I = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_1^3 \operatorname{sen} y^2 dzdydx$$

tras una integración en el orden dado nos encontramos con el cálculo de

$$\int_x^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2 \operatorname{sen} y^2 dy$$

que no es una función elemental. Para eludir esa dificultad cambiamos el orden de integración a $dzdxdy$ de manera que y quede como variable exterior. La región sólida S, correspondiente a la integral triple $\int\int\int_S$ que da lugar a esa integral iterada viene dada por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, x \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}, 1 \leq z \leq 3\}$$

y la proyección sobre el plano xy da las cotas, fijando $0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} x \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, x varia desde 0 hasta y.

Por tanto, tenemos

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^y \int_1^3 \operatorname{sen} y^2 dzdxdy.$$

El cambio en el orden de integración es esencial para que el cálculo salga muy fácil.

Centro de masas y momentos de inercia de una región sólida

Vamos a ver dos aplicaciones de las integrales triples que son importantes en Ingeniería. Consideremos una región sólida S cuya densidad en (x, y, z) viene dada por la función de densidad ρ. La masa de esta región sólida se calcula

$$m = \int\int\int_S \rho(x, y, z) dV.$$

Los *primeros momentos* de la región S respecto de los planos yz, xz, xy, son respectivamente

$$M_{yz} = \int\int\int_S x\rho(x, y, z) dV, \quad M_{xz} = \int\int\int_S y\rho(x, y, z) dV, \quad M_{xy} = \int\int\int_S z\rho(x, y, z) dV.$$

El *centro de masas* es $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, donde

$$\overline{x} = \frac{M_{y,z}}{m}, \quad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Los primeros momentos de una región sólida se toman respecto de un plano, mientras que los segundos momentos se toman respecto de una recta. Los *segundos momentos* (o *momentos de inercia*) respecto de los ejes x, y, z son respectivamente

$$I_x = \int\int\int_S (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV$$

$$I_y = \int\int\int_S (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)dV$$

$$I_z = \int\int\int_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)dV.$$

En problemas que requieran calcular los tres momentos, se puede ahorrar mucho esfuerzo aplicando la propiedad aditiva de las integrales triples y escribiendo

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}, \quad I_y = I_{yz} + I_{xy}, \quad I_z = I_{yz} + I_{xz}$$

donde

$$I_{xy} = \int\int\int_S z^2\rho(x, y, z)dV, \quad I_{xz} = \int\int\int_S y^2\rho(x, y, z)dV, \quad I_{yz} = \int\int\int_S x^2\rho(x, y, z)dV.$$