Sin modificar su capacidad se reduce a la mitad la carga de un condensador. ¿Qué fracción de su energía almacenada se extrae del condensador junto con su carga?

DATOS

Situación Inicial	Situación final
C_1	$C_2 = C_1$
Q_1	$Q_2 = \dfrac{Q_1}{2}$
U_1	$U_2 = ?$

PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN

Aplicamos la definición de Energía Electroestática almacenada en un condensador.

Primero deducimos la expresión que nos permite calcular la energía almacenada en un condensador:

$$dU = Vq \cdot dq = \frac{q}{C} dq$$

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Ahora, calculamos la energía almacenada en el condensador tras haber extraído la mitad de su carga inicial:

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1}$$

$$U_2 = \frac{Q_2^2}{2 \cdot C_2} = \frac{\left(\frac{Q_1}{2}\right)^2}{2 \cdot C_1} = \frac{Q_1^2}{4 \cdot 2 \cdot C_1} = \frac{1}{4}\frac{Q_1^2}{2 \cdot C_1} = \frac{1}{4}U_1 .$$

Por tanto, si en el condensador queda almacenada un cuarto de la energía que había inicialmente, se han extraído $\frac{3}{4}U_1$.

Un condensador de placas paralelas, separadas por aire, tiene una capacidad de 0'14 μF. Las placas están separadas entre sí 0'5 mm y sobre una de ellas existe una carga de 3'2 μC y sobre la otra una carga de −3'2 μC. ¿Cuánta energía hay almacenada?

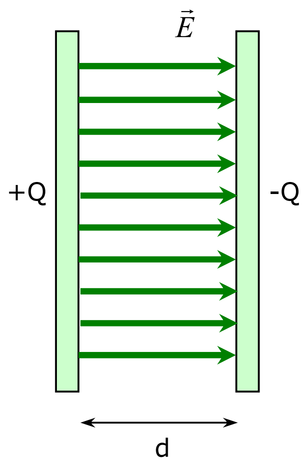
DATOS

ε_{aire}

C = 0,14 μF

Q = 3,2 μC

d = 0,5 mm



PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN

Aplicamos la definición de Energía Electroestática almacenada en un condensador. Primero deducimos la expresión que nos permite calcular la energía almacenada en un condensador:

$$dU = Vq \cdot dq = \frac{q}{C} dq$$

$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Ahora sustituimos los datos que tenemos:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{3,2^2}{2 \cdot 0,14 \cdot 10^{-6}} = 3,57 \cdot 10^7 \ J$$

Dos placas paralelas poseen cargas Q y –Q. Si el espacio entre las placas está desprovisto de materia, el campo eléctrico es de 2.5 x 10^5 V/m. Si Q es igual a 10 nC ¿Cuál es el área de las placas?

DATOS:
La carga Q = 10 nC
Campo eléctrico (desprovisto de materia entre las placas)= 2.5 x 10^5 V/m

PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN:

b) Teniendo en cuenta las siguientes fórmulas:
$C = \frac{(\varepsilon_0 \cdot A)}{d}$ despejamos A: $A = \frac{Cd}{\varepsilon_0}$; por otra parte $C = \frac{Q}{V}$, así que sustituyendo quedaría: $A = \frac{Qd}{V\varepsilon_0}$; y sabiendo que *V* = *Ed,* volviendo a sustituir quedaría: $A = \frac{Qd}{Ed\varepsilon_0}$ con lo que la *d* se iría, por consiguiente la fórmula quedaría adaptada a los datos que poseemos: $A = \frac{Q}{E\varepsilon_0}$, por lo tanto:

$$A = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{2,5 \cdot 10^5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} = 4,5 \cdot 10^{-3}\, m^2$$

Un condensador de placas paralelas tiene las placas de 2 m^2 de área y una separación de 1.0 mm. Se carga hasta 100 V.

a) ¿Cuál es el campo eléctrico existente entre las placas?

b) ¿Cuál es la energía por unidad de volumen en el espacio situado entre las placas?.

c) Halla la energía total multiplicando la respuesta dada a la parte b) por el volumen entre las placas

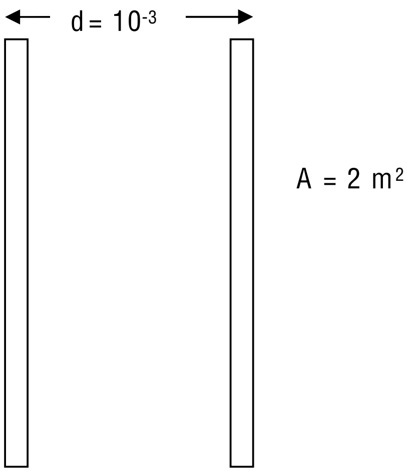
DATOS:

Distancia (d) = 10^{-3} m.

V = 100 V.

Área = 2 m^2

PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN:



a)

El campo eléctrico uniforme que crea es:

$$E = \frac{V}{d}$$

$$E = \frac{100}{10^{-3}} = 100 \cdot 10^{3} \frac{V}{m}$$

b)

Usando la fórmula de la energía en un campo electrostático:

$u_e = \dfrac{energía}{volumen} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ sustituimos $\dfrac{1}{2} 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot (100 \cdot 10^{3})^2 = 4{,}43 \cdot 10^{-2} \dfrac{J}{m^3}$

c)

$Volumen = A \cdot d$ por tanto $Volumen = 10^{-3} \cdot 2 = 0.002 m^3$; y sabiendo que:

$U_{total} = Volumen \cdot u_e$; sustituimos:

$U_{total} = 0.002 \cdot 4{,}43 \cdot 10^{-2} = 8{,}86 \cdot 10^{-5} J$;

Un condensador de 3μF se carga a 100V.
a) ¿Cuánta energía se almacena en el condensador?
b) ¿Cuánta energía adicional se necesita para cargar el condensador desde 100 a 200 V?

a) DATOS

Carga C = 3μF

Potencial V = 100 V

PLANTEAMIENTO

Se nos pide calcular la energía U almacenada en el condensador.

Para la resolución de este problema aplicaremos:

-Definición de capacidad

-Energía eléctrica almacenada en un condensador.

RESOLUCIÓN

Aplicando la definición de energía eléctrica almacenada en un condensador sabemos que: $dU = Vdq$ donde $V = \frac{Q}{C}$, luego:

$$dU = \frac{Q}{C}dq$$

$$U = \int_{Q_0}^{Q_1} \frac{Q}{C}dq = \int_0^Q \frac{Q}{C}dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Así pues, necesitamos averiguar la carga del condensador, para lo cual aplicamos la definición de capacidad:

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$Q = CV = 3{\cdot}10^{-6}{\cdot}100C = 3{\cdot}10^{-4}C$$

Sustituimos éste resultado en la fórmula anterior:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{3{\cdot}10^{-4}}{3{\cdot}10^{-6}}J = 5{\cdot}10^{-11}J$$

RESULTADO

La energía acumulada es de $5{\cdot}10^{-11}J$

b) DATOS

Potencial inicial V_0 = 100V

Potencial final V_1 = 200V

Carga C = 3 μ F

PLANTEAMIENTO

Para la resolución de este problema aplicaremos:

-Definición de capacidad

-Energía eléctrica almacenada en un condensador.

RESOLUCIÓN

Sabemos a través de la definición de energía eléctrica almacenada en un condensador que:

$$U = \int_{Q_0}^{Q_1} \frac{Q}{C} dq = \frac{1}{C}[\frac{Q^2}{2}]_{Q_0}^{Q_1} = \frac{1}{C}(\frac{(Q_1)^2}{2} - \frac{(Q_0)^2}{2})$$

Donde Q_0 es la carga del condensador cuando está sometido a V_0 y Q_1 es la carga cuando está sometido a V_1. Para calcular Q_0 y Q_1 aplicaremos la definición de capacidad de un condensador.

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$Q_0 = CV_0 = 3{\cdot}10^{-6}{\cdot}100C = 3{\cdot}10^{-4}C$$

$$Q_1 = CV_1 = 3{\cdot}10^{-6}{\cdot}200C = 6{\cdot}10^{-4}C$$

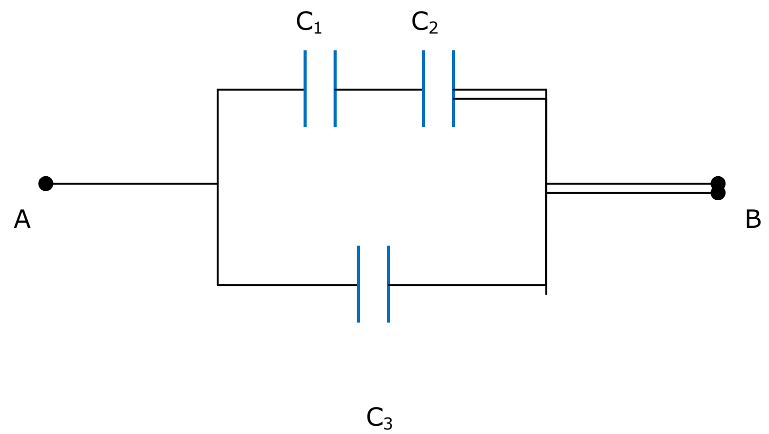
Ahora solo nos falta sustituir el valor de Q_0 y Q_1 en la fórmula que hemos hallado para la energía, y obtendremos la energía necesaria.

$$U = \frac{1}{C}(\frac{Q_1^2}{2} - \frac{Q_0^2}{2}) = \frac{1}{3{\cdot}10^{-6}}(\frac{(6{\cdot}10^{-4})^2}{2} - \frac{(3{\cdot}10^{-4})^2}{2})J = 2.7{\cdot}10^{-9}J$$

RESULTADO

Se necesitan $2.7{\cdot}10^{-9}J$

Un condensador de 3,0 μF y otro de 6,0 μF se conectan en serie y la combinación se conecta en paralelo con un condensador de 8,0 μF. ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta combinación?



Datos:

$C_1 = 3{,}0\ \mu F$

$C_2 = 6{,}0\ \mu F$

$C_3 = 8{,}0\ \mu F$

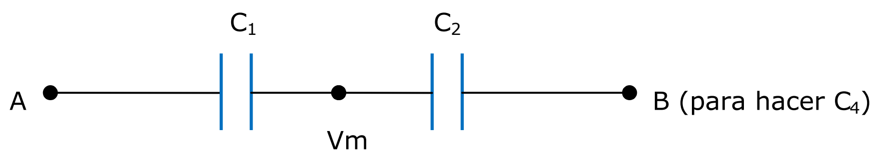
Planteamiento:

Definición de capacidad. $C = \dfrac{Q}{\Delta V}$

Asociación de condensadores.

¿Cuál es la capacidad equivalente de esta combinación?

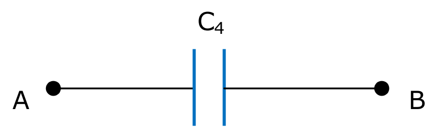
C_4: C_1 en serie con C_2



En los condensadores en serie la carga que se almacena es la misma y la llamaremos Q. Llamaremos V_m a la distancia entre condensadores.

$$\left.\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{Q}{\Delta V} = \dfrac{Q}{V_1} \Rightarrow V_1 = \dfrac{Q}{C_1} \\ V_1 = V_a - V_m = \dfrac{Q}{C_1} \\ V_2 = V_m - V_b = \dfrac{Q}{C_2} \end{array}\right\} \Delta V = V_1 + V_2 = V_a - V_b = Q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

Y obtenemos un condensador equivalente:



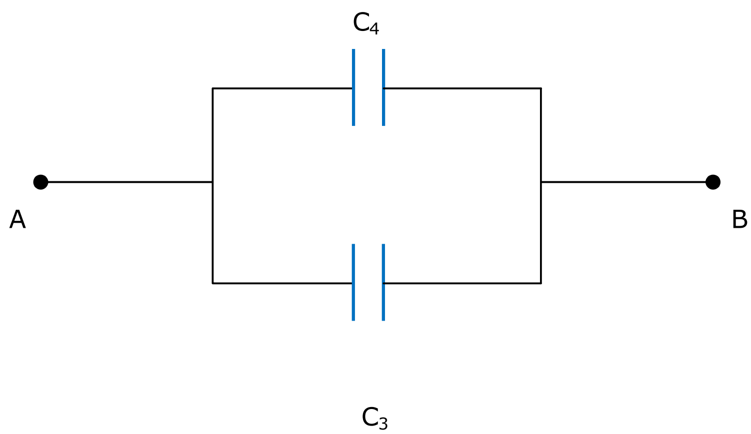
$$Ceq \Rightarrow V_a - V_b = \Delta V = \frac{Q}{Ceq}$$

Si igualamos las dos expresiones:

$$\frac{Q}{Ceq} = Q \cdot \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \Rightarrow \frac{1}{Ceq} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_4 = 2\mu F$$

Ahora obtenemos un nuevo circuito donde podemos asociar los dos condensadores en serie.

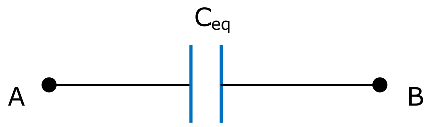


C_5: C_4 paralelo con C_3

En los condensadores en paralelo la diferencia de potencial es la misma $\Delta V_4 = \Delta V_3 = \Delta V$.

$$\left.\begin{array}{l} Q_4 = \Delta V \cdot C_4 \\ Q_3 = \Delta V \cdot C_3 \end{array}\right\} Q_T = Q_4 + Q_3 = \Delta V \cdot (C_4 + C_3)$$

El condensador equivalente seria:



$$Ceq \Rightarrow \Delta v = V_a - V_b = Q_T$$

$$Ceq = \frac{Q_T}{\Delta V} \Rightarrow Q_T = Ceq \cdot \Delta V$$

Si igualamos las Q_T: $Ceq \cdot \Delta V = \Delta V \cdot (C_4 + C_3) \Rightarrow Ceq = (C_4 + C_3)$

$$C_5 = (2 + 8) = 10 \mu F$$

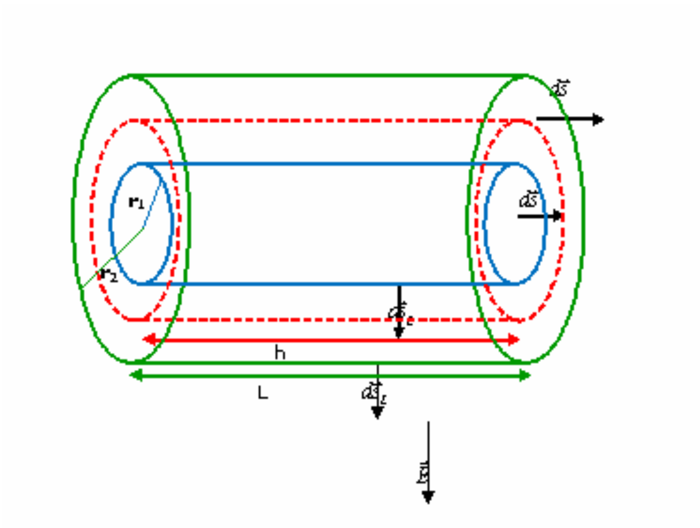
C_5 es la capacidad de nuestro condensador equivalente.

Un tubo Geiger se compone de un alambre de 0.2 mm de radio y una longitud de 12 cm con un conductor cilíndrico coaxial de la misma longitud y 1,5 cm de radio.
a) Hallar su capacidad admitiendo que el gas en el interior del tubo tiene una constante dieléctrica de 1.
b) Hallar la carga por unidad de longitud sobre el alambre en el caso de que el condensador se cargue a 1,2 Kv.

a)

Datos:
Radio Cilindro Interior (r_1)=0,2 mm = 0,002 m
Radio Cilindro Exterior (r_2)=1,5 mm = 0,015 m
Longitud L = 12 cm = 0,012 m

Planteamiento. Usaremos:
- Definición de capacidad para condensadores cilíndricos
- Definición de diferencia de potencial
- Ley de Gauss



EL campo ($\vec{E}$) es perpendicular a la superficie lateral del cilindro.
Queremos calcular la capacidad que hay entre el cilindro interior y el exterior. Para calcularlo ponemos una superficie gaussiana que será un cilindro entre el cilindro interior y el exterior.
Calcularemos el campo en la superficie gaussiana con la ley de Gauss.

Sabemos que:

$$C = \frac{Q}{V}$$
$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E \cdot dr$$
$$\phi = \frac{Qencerrada}{\varepsilon}$$

Calculamos el flujo de la superficie gaussiana:

$$\phi = \oint_{SG} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{B1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{B2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{Sl} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Como $\vec{E}$ es perpendicular a $d\vec{S}$ las integrales sobre las bases de la gaussiana (B1 y B2) son cero, por lo tanto:

$$\phi = \oint_{Sl} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{Sl} E \cdot dS \cdot \cos(0) = E \int_{Sl} dS = E \cdot 2\Pi \cdot r \cdot h$$

La Qencerrada es la carga que hay entre los dos cilindros y en la única parte que hay carga es en el cilindro interior, por lo tanto, a esa carga encerrada la llamaremos Q.

$$E \cdot 2\Pi \cdot r \cdot h = \frac{Q}{\varepsilon}$$

Ponemos Q función de sigma y la superficie del cilindro. El radio r es el radio del cilindro exterior, al que hemos llamado r_2 y la altura (h) del cilindro es L.

$$Q = \sigma \cdot S_L = \sigma \cdot 2\Pi \cdot r_2 \cdot h = \sigma \cdot 2\Pi \cdot r_2 \cdot L$$

$$E = \frac{Q}{2\Pi \cdot r \cdot L \cdot \varepsilon} = \frac{\sigma \cdot 2\Pi \cdot r_2 \cdot L}{2\Pi \cdot r \cdot L \cdot \varepsilon} \Rightarrow \frac{\sigma \cdot r_2 \cdot}{\varepsilon \cdot r}$$

Para calcular la diferencia de potencial (la cual necesitamos para poder calcular la capacidad) hacemos la integral entre "a" y "b", siendo "a" al radio del cilindro interior y a "b" al radio del cilindro exterior.

$$V_{ab} = -\int_a^b \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \frac{r_2}{r} dr = -\frac{\sigma \cdot r_2}{\varepsilon \cdot r} \int_{r1}^{r2} \frac{1}{r} dr = -\frac{\sigma \cdot r_2}{\varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{\sigma \cdot r_2}{\varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Sabemos que $\varepsilon = K\varepsilon_0$, siendo K la constante del dieléctrico que en este caso es 1.

$$C=\frac{Q}{V_{ab}}=\frac{Q}{\left(\frac{\sigma\cdot r_2}{\varepsilon}\right)\cdot\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}=\frac{\sigma\cdot 2\Pi\cdot r_2\cdot L}{\frac{\sigma\cdot r_2}{\varepsilon}\cdot\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}=\frac{2\Pi\varepsilon L}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}=\frac{2\Pi(K\cdot\varepsilon_0)L}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}=\frac{2\Pi(\varepsilon_0)(0{,}012)}{\ln\left(\frac{0{,}002}{0{,}015}\right)}=$$

$$C=1{,}7348\cdot 10^{-10}\,F$$

b)

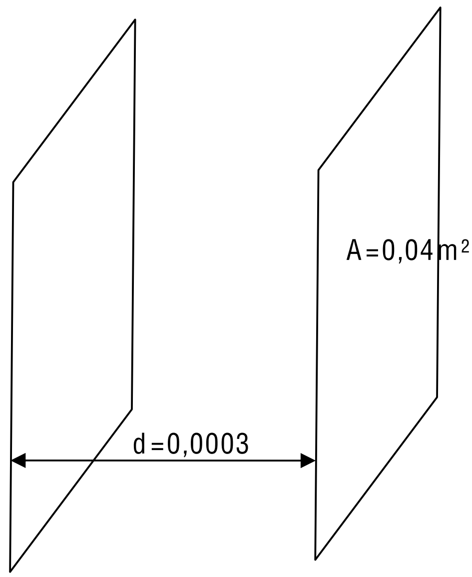
Volvemos a usar la definición de capacidad:

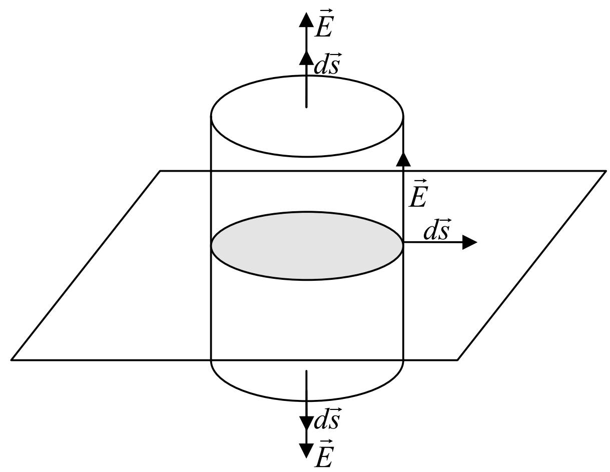
$$C=\frac{Q}{V}\Rightarrow Q=C\cdot V$$

Como la carga la piden en unidad de longitud dividiremos por la longitud:

$$\frac{Q}{L}=\frac{C\cdot V}{L}=17{,}348\cdot 10^{-6}\,C/m$$

61. Se construye un condensador de placas paralelas colocando polietileno (k=2.3) entre dos hojas de aluminio. El área de cada hoja es de 400 cm^2 y la separación de 0.3 mm. Hallar la capacidad.





Se calcula el campo electrostático en el interior del condensador aplicando la ley de Gauss. Primero, se hace para un plano y, a continuación, el campo total creado por los dos planos.

$$\Phi = \oint_{dL} \vec{E}d\vec{s} = \oint_{S1} \vec{E}d\vec{s} + \oint_{S2} \vec{E}d\vec{s} + \oint_{SL} \vec{E}d\vec{s} = ES_1 + ES_2$$

$$S_1 = S_2 = S$$

$$\sigma = \frac{dq}{ds}; \qquad \int dq = \int \sigma ds; \qquad Q_{enc} = \sigma S$$

$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad 2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

$$E_T = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

La capacidad electrostática entre dos placas es:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{Q}{\frac{Q}{A\varepsilon_0}d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Se calcula la diferencia de potencial entre las placas:

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E}d\vec{r} = E\int_a^b dr\cos 0 = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d = \frac{Q}{A\varepsilon_0}d$$

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

El campo eléctrico que se forma entre dos placas cuando hay un dieléctrico es:

$$E = \frac{\sigma}{K\varepsilon_0}$$

La capacidad electrostática entre dos placas con un dieléctrico es:

$$C_d = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{Q}{\frac{Q}{KA\varepsilon_0}d} = K\frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi K}$$

La diferencia de potencial entre las dos placas con el dieléctrico es:

$$V_{ab} = \int_a^b \vec{E}d\vec{r} = E\int_a^b dr\cos 0 = Ed = \frac{\sigma}{K\varepsilon_0}d = \frac{Q}{KA\varepsilon_0}d$$

$$\sigma = \frac{Q}{A}$$

Se sustituyen los datos en la fórmula y nos da la capacidad del condensador:

$$C_d = \frac{2{,}3\times 0{,}04}{4\pi\times 8{,}99\times 10^9\times 0{,}0003} = 2{,}714\times 10^{-9}\,F$$

Un condensador de placas paralelas, separadas por aire, tiene una capacidad de 0,14μF. Las placas están separadas entre sí 0,5mm. ¿Cuál es el área de cada placa?

*Datos:

Constante del medio: vacío= 1

Capacidad: C= 0,14μF= $14 \cdot 10^{-14}$F

Distancia: d= 0,5mm= 0,0005m

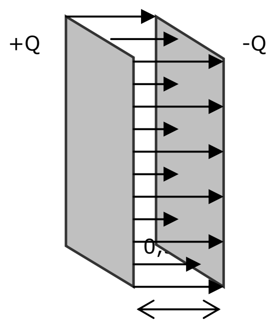
$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12} C^2/N \cdot m^2$

*Planteamiento y resolución:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \Rightarrow A = \frac{C \cdot d}{\varepsilon_0} = \frac{14 \cdot 10^{-14} F \times 0{,}0005m}{8{,}8542 \cdot 10^{-12} C^2 / Nm^2} \Rightarrow A = 7{,}91 \cdot 10^{-6} m^2 = 7{,}91 mm^2$$

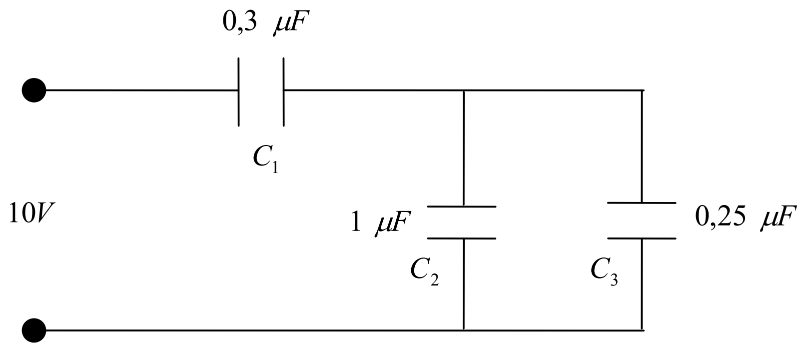
*Resultados:

El área de las placas del condensador de capacidad 0,14μF y que están separadas por una distancia de 0,5mm es de 7,91mm^2 cada una.



Calcular para el dispositivo de la figura:

a) La capacidad total efectiva entre los terminales
b) La carga almacenada en cada uno de los condensadores
c) La energía total almacenada



a)

Planteamiento:

En primer lugar averiguamos la capacidad 4 que es la suma de la capacidad 2 y 3 ya que estas se encuentran en paralelo. Una vez obtenida la capacidad 4 se puede deducir la capacidad 5 o capacidad total, la cual se obtiene de la asociacion en serie de la capacidad 1 y 4.

Solucion:

- $C_4 : C_2 paralelo C_3$

$$C_4 = C_2 + C_3 = 1\mu F + 0.25\mu F = 1.25\mu F$$

- $C_{eq} = C_5 : C_1 serie C_4$

$$\frac{1}{C_5} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_4} = \frac{1}{0.30\mu F} + \frac{1}{1.25\mu F} = \frac{1.55\mu F}{0.375\mu F} \Rightarrow C_5 = \frac{0.375\mu F}{1.55\mu F} = 0.241\mu F$$

b)

Planteamiento:

Deducimos el valor de la carga total y a partir de este valor hallamos el voltaje que pasa por cada condensador, y posteriormente, se deduce la carga de cada condensador a traves de deducir en la formula de la capacidad.

Solucion:

$$Q_5 = 0.241\mu F \cdot 10V = 2.41\mu C \Rightarrow \quad Q_1 = 2.41\mu C$$

$$Q_4 = 2.41\mu C$$

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{2.41\mu C}{1.25\mu F} = 1.94V \qquad \Rightarrow \quad V_4 = V_2 = V_3$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V_2 = 1.94 \cdot 1 = 1.94\mu C$$

$$Q_3 = C_3 \cdot V_3 = 1.94 \cdot 0.25 = 0.484\mu C$$

c)

Planteamiento:

La energia total sera igual a la suma de las energias almacenada en cada una de los condensadores del circuito. La energia que pasa por cada condensador es el cociente obtenido de dividir la carga al cuadrado entre 2 por la capacidad en esa resistencia.

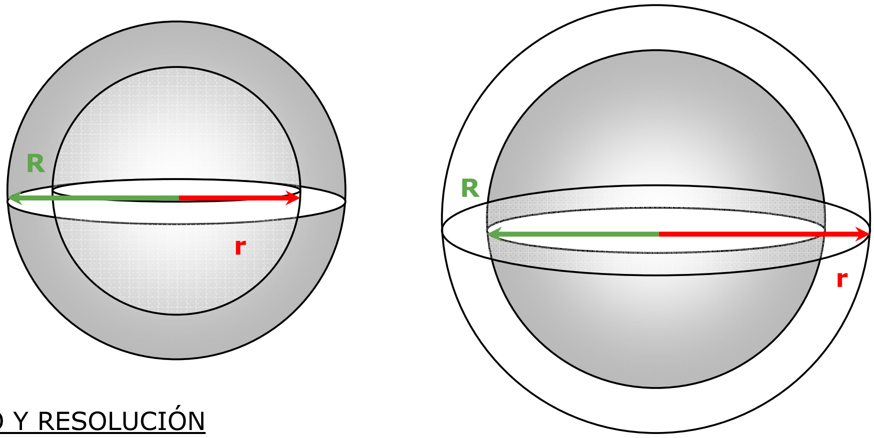
Solucion:

$$U_T = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{C_2} + \frac{1}{2}\frac{Q_3^2}{C_3} = \frac{1}{2}\frac{5.85}{0.30} + \frac{1}{2}\frac{3.76}{1} + \frac{1}{2}\frac{0.23}{0.25} = 1.2 \cdot 10^{-5} J$$

Explicar por qué el campo eléctrico crece con r, en lugar de disminuir según 1/r^2 cuando nos desplazamos hacia fuera desde el centro interior de una distribución esférica de carga de densidad volúmica de carga constante.

DATOS

$\rho = cte$



PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN

Aplicamos la Ley de Gauss y la definición de Flujo Eléctrico.

$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Primero, analizamos el campo eléctrico en el exterior de la esfera:

r > R

$$\Phi = \oint_{gauss} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \left\{\vec{E} \parallel d\vec{s}\right\} = \oint_{gauss} E\cdot ds\cdot \cos 0^o = E\cdot s = 4\pi r^2\cdot E$$

Puesto que fuera de la superficie no hay carga, la carga encerrada por la gaussiana es la de la esfera y por tanto

$$Q_{enc}\begin{cases}\rho = \dfrac{dq}{dV} \Rightarrow dq = \rho\, dV \\ \displaystyle\int_{esf} dq = \int_{esf} \rho\, V = \left\{V = \frac{4}{3}\pi\, r^3 \Rightarrow dV = 4\pi\, r^2\cdot dr\right\} = \int_{esf} 4\pi r^2 \rho\cdot dr = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Phi = 4\pi r^2\cdot E \\ \Phi = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \dfrac{4\pi R^3 \rho}{3\varepsilon_0}\end{array}\right\} \Rightarrow 4\pi r^2\cdot E = \frac{4\pi R^3\rho}{3\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho R^3}{3 r^2 \varepsilon_0}$$

Después, analizamos el campo eléctrico en el interior de la esfera:

r < R

$$\Phi = \int_{gauss} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \left\{ \vec{E} \parallel d\vec{s} \right\} = \oint_{gauss} E \cdot ds \cdot \cos 0^{o} = E \cdot s_{gauss} = 4\pi r^{2} \cdot E$$

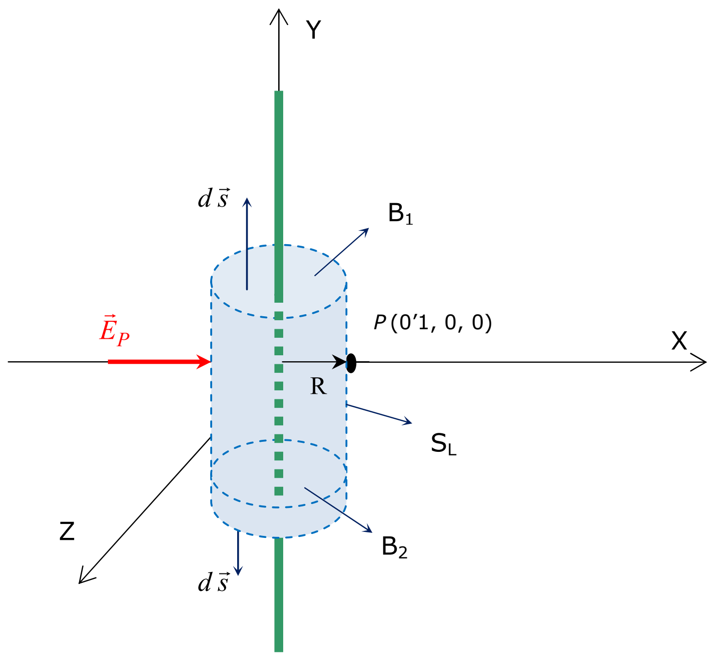
$$Q_{enc} \begin{cases} \rho = \dfrac{dq}{dV} \quad \Rightarrow \quad dq = \rho \, dV \\ \displaystyle\int_{gauss} dq = \int_{gauss} \rho \, V = \left\{ V = \frac{4}{3} \pi \, r^{3} \quad \Rightarrow \quad dV = 4\pi \, r^{2} \, dr \right\} = \int_{gauss} 4\pi r^{2} \rho \cdot dr \quad \Rightarrow \quad Q_{enc} = \frac{4}{3} \pi r^{3} \rho \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi = 4\pi r^{2} \cdot E \\ \Phi = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_{0}} = \dfrac{4\pi r^{3} \rho}{3\varepsilon_{0}} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad 4\pi r^{2} \cdot E = \frac{4\pi r^{3} \rho}{3\varepsilon_{0}}$$

$$E = \frac{\rho \, r}{3\varepsilon_{0}}$$

La carga por unidad de longitud en un filamento recto e infinitamente largo es -90 pC/m. Determine el campo eléctrico a las siguientes distancias del filamento:

a) 10 cm b) 20 cm c) 100 cm



DATOS

$\lambda = -90\ \dfrac{pC}{m}$

$P(0'1, 0, 0)$ m

$Q\ (0'2, 0, 0)$ m

$T(1, 0, 0)$ m

PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN

Al trabajar con un hilo infinito se trata de un caso con simetría cilíndrica. Por tanto, podemos utilizar Gauss para un cilindro de radio pequeño. Aplicamos la Ley de Gauss y la definición de Flujo Eléctrico.

Primero, hallamos la expresión general:

$$\Phi = \oiint_{cil} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oiint_{B_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \oiint_{B_2} \vec{E}\cdot d\vec{s} + \oiint_{S_L} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oiint_{B_1} E\cdot ds\cdot cos\ 90^o + \oiint_{B_2} E\cdot ds\cdot cos\ 90^o + \oiint_{S_L} E\cdot ds\cdot cos\ 0^o =$$

$$= E\cdot s_L = 2\pi rh\cdot E$$

$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}; \qquad \lambda = \frac{dq}{dL} \quad \Rightarrow \quad \int_{gauss} dq = \int_{gauss} \lambda\ dL\ ; \quad Q_{enc} = \lambda\ h$$

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= 2\pi rh\cdot E \\ \Phi &= \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o} = \frac{\lambda\ h}{\varepsilon_o} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad 2\pi rh\cdot E = \frac{\lambda\ h}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi r\cdot \varepsilon_0}$$

Después, sustituimos en cada caso:

a) En $P(0'1, 0, 0)$ m

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(-\vec{i}\right) = -16'09\vec{i}\ \frac{N}{C}$$

b) En Q (0'2, 0, 0) m

$$\vec{E} = \frac{-\lambda}{2\pi r \cdot \varepsilon_0}\vec{i} = \frac{90 \cdot 10^{-12}}{2\pi \cdot 0'2 \cdot 8'9 \cdot 10^{-12}} = -8'047\,\vec{i}\ \ ^{N}\!/_{C}$$

c) T (1, 0, 0) m

$$\vec{E} = \frac{-\lambda}{2\pi r \cdot \varepsilon_0}\vec{i} = \frac{90 \cdot 10^{-12}}{2\pi \cdot 1 \cdot 8'9 \cdot 10^{-12}} = -1'609\,\vec{i}\ \ ^{N}\!/_{C}$$

Consideremos dos cortezas cilíndricas concéntricas infinitamente largas. La corteza interior tiene un radio R_1 y posee una densidad de carga superficial uniforme σ_1 , mientras que la exterior tiene un radio R_2 y una densidad de carga superficial uniforme σ_2 . Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en las regiones $r<R_1$, $R_1<r<R_2$ y $r>R_2$.

Datos: Radio interior de la corteza interior= R_1 σ_1 = cte

Radio interior de la coreteza exterior= R_2 σ_2 = cte

Planteamiento:

Aplicamos la ley de Gauss y definición de flujo electrostático

<u>r< R_1</u>

$$\phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\phi = \oint_{gauss} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \oint_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Como $\vec{E} \perp d\vec{s}$ en nuestras superpies B_1 y B_2, el producto escalar sale 0

$$\phi = \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{S_L} E \cdot ds \cdot \cos 0 = \oint_{S_L} E \cdot ds = E\oint_{S_L} ds = E \cdot S_L = E 2\pi rh$$

Nuestra superficie gaussiana en este caso está encerrada dentro de las dos cortezas cilíndricas y, por lo tanto, no encierra carga alguna, es decir, $Q_{enc} = 0$

Sustituimos valores en la Ley de Gauss

$$E 2\pi rh = \frac{0}{\varepsilon_0} \qquad E = 0$$

<u>R_1<r<R_2</u>

$$\phi = \oint_{gauss} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \oint_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Como $\vec{E} \perp d\vec{s}$ en nuestras superpies B_1 y B_2, el producto escalar es igual a 0

$$\phi = \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{S_L} E \cdot ds \cdot \cos 0 = \oint_{S_L} E \cdot ds = E\oint_{S_L} ds = E \cdot S_L = E 2\pi rh$$

$$Qenc : \sigma_1 = \frac{dq}{ds} \rightarrow \int dq = \int \sigma_1 \cdot ds \rightarrow Qenc = \sigma_1 \int ds = \sigma_1 \cdot S = \sigma_1 2\pi R_1 h$$

Sustituimos valores en la ley de Gauss

$$E 2\pi rh = \frac{\sigma_1 2\pi R_1 h}{\varepsilon_0} \qquad E = \left(\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r}\right) N/C$$

<u>r> R_2</u>

$$\phi = \oint_{gauss} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \oint_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Como $\vec{E} \perp d\vec{s}$ en nuestras superpies B_1 y B_2, el producto escalar es igual a 0

$$\phi = \oint_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{S_L} E \cdot ds \cdot \cos 0 = \oint_{S_L} E \cdot ds = E \oint_{S_L} ds = E \cdot S_L = E 2\pi \cdot rh$$

La carga encerrada por la superficie gaussiana es igual a la suma de la carga encerrada por la corteza cilíndrica pequeña mas la carga encerrada por la corteza cilíndrica mayor.

Corteza cilíndrica pequeña:

$$(Q_{enc})_1 = \sigma_1 2\mathrm{R}_1 \pi h$$

Corteza cilíndrica mayor:

$$(Q_{enc})_2 : \sigma_2 = \frac{dq}{ds} \rightarrow \int dq = \int \sigma_2 \cdot ds \rightarrow (Q_{enc})_2 = \sigma_2 \int ds = \sigma_2 \cdot S = \sigma_2 2\mathrm{R}_2 \pi h$$

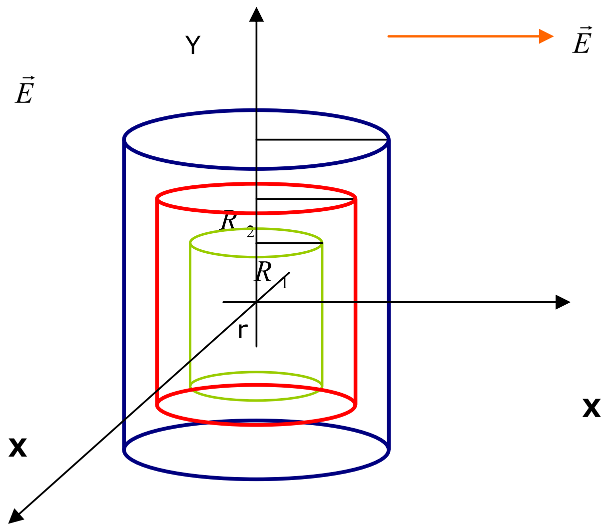
$$(Q_{enc})_T = 2\pi(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2)h$$

$$\phi = \frac{Qenc_T}{\varepsilon_0}$$

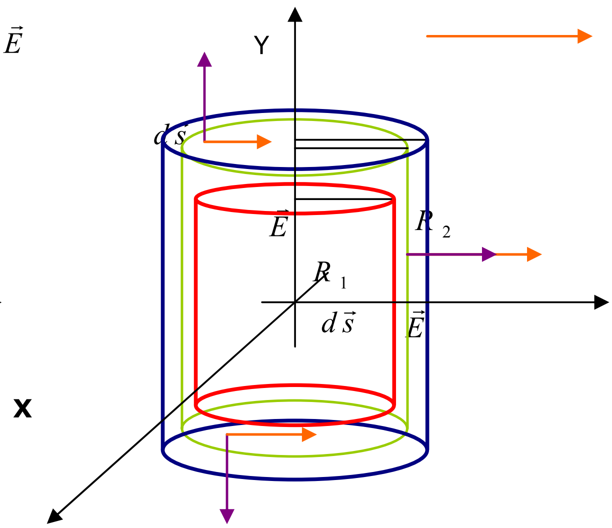
$$E2\pi \cdot rh = \frac{2\pi \cdot \mathrm{h}(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2)}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2)}{\varepsilon_0 r} N/C$$

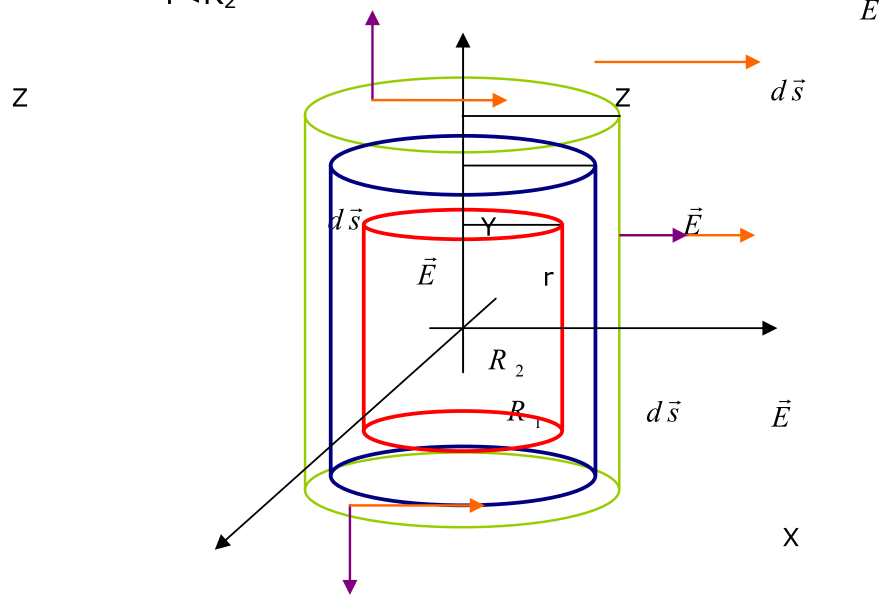
r< R_1



R_1 <r<R_2



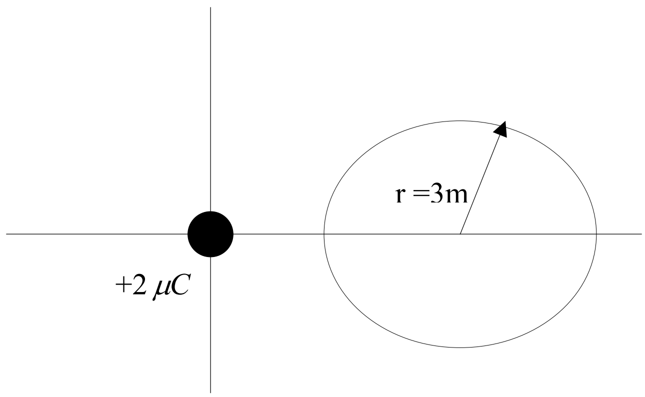
r<R_2



Z $d\vec{s}$ $\vec{E}$

Una sola carga puntual q = +2 μC está en el origen. Una superficie esférica de 3,0m de radio tiene su centro en el eje x en el punto x = 5 m. ¿Cuál es el flujo neto del campo eléctrico debido a la carga puntual que atraviesa la superficie esférica?

__Datos__:



__Planteamiento__:

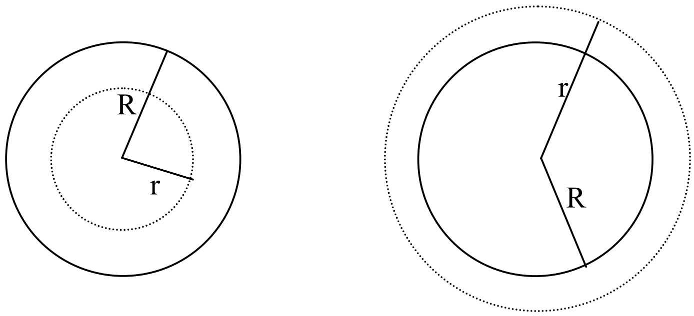
Ley de Gauss

$\text{Ø}_{neto} = \oint_S E_n dA = 4\pi k Q_{dentro}$

La superficie esférica no tiene carga en su interior por lo que

$\text{Ø}_{neto} = \oint_S E_n dA = 4\pi k Q_{dentro} = 0$

Considere un cascarón esférico delgado de radio 14 cm con una carga total de 32 micro culombios distribuida uniformemente en su superficie. Encuentre el campo eléctrico para las siguientes distancias desde el centro de la distribución de carga: a) r=10cm y b) r=20cm



Para la resolución de este problema aplicaremos la Ley de Gauss: $\Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

$$\Phi = \oint \vec{E} d\vec{s} = \oint E ds \cos 0 = E \oint ds = E 4\pi r^2$$

a) $\boldsymbol{r < R}$

$$Q_{enc} = 0$$

$$E4\pi r^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad E = 0$$

b) $\boldsymbol{r > R}$

$$\sigma = \frac{dq}{ds}; \quad Q_{enc} = Q_{corteza} = \int_{corteza} \sigma ds = \sigma \int_{corteza} ds = \sigma S = \sigma 4\pi R^2$$

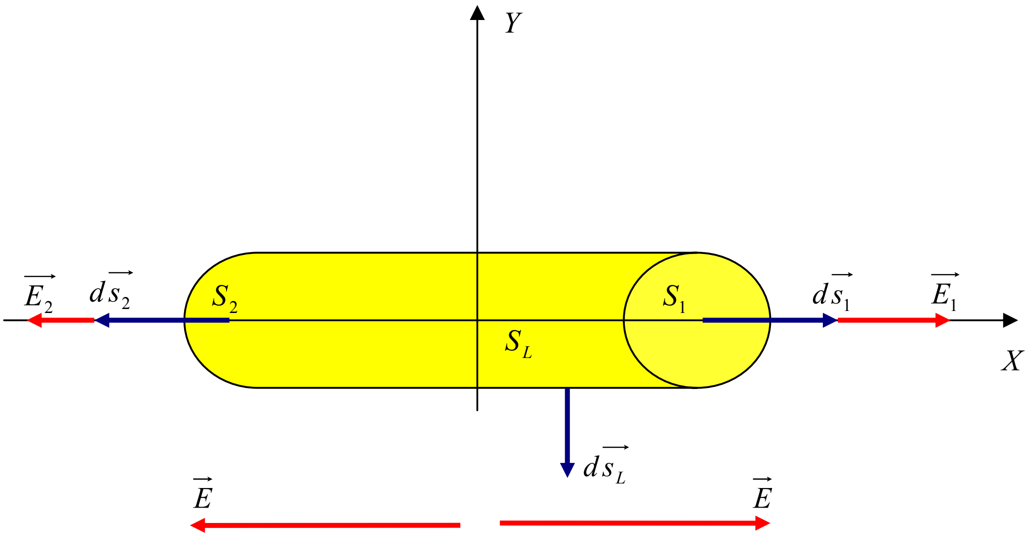
$$E4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

$$E = \frac{32 \times 10^{-6} \times 0{,}14^2 \times 4\pi k}{0{,}2^2} = 1{,}771 \times 10^6 \frac{N}{C}$$

La dirección del campo será radial

El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada de forma cilíndrica es de $8.60 \cdot 10^4$ Nm^2/C. ¿Cuál es la carga neta dentro del cilindro?



Planteamiento del problema: debemos determinar la carga neta entro del cilindro y para ello usaremos la Ley de Gauss y la ecuación del flujo eléctrico.

$$Flujo\ eléctrico \Rightarrow \Phi = \oint_{cilindro} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

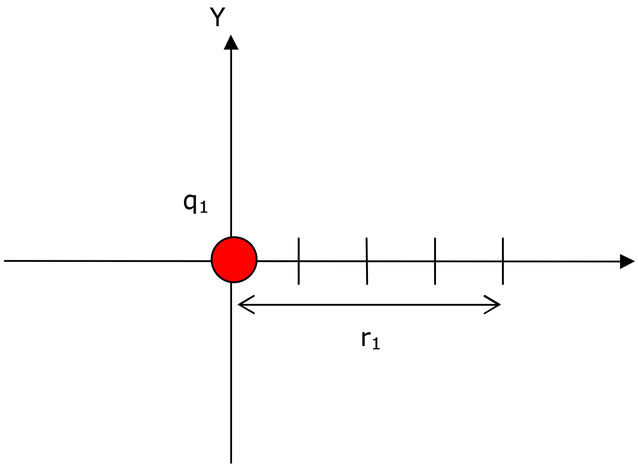
$$Ley\ de\ Gauss \Rightarrow \Phi = \frac{Q_{ENC}}{\varepsilon_0}$$

Sustituimos los valores en la Ley de Gauss y ese es el resultado de nuestro problema:

$\Phi = \frac{Q_{ENC}}{\varepsilon_0}$; $Q_{ENC} = \Phi \cdot \varepsilon_0$; $Q_{ENC} = 8.60 \cdot 10^4 * 8.84 \cdot 10^{-12} = 7.60 \cdot 10^{-7}$ C.

Una carga positiva de valor $2\mu C$ está en el origen.

a) ¿Cuál es el potencial eléctrico V en un punto a 4m del origen respecto al valor V=0 en el infinito?



Datos:

Potencial de referencia: $V_\infty = 0V$

$q_1 = 2\mu C \Rightarrow (0,0)m$

$r_1 = 4m$

Planteamiento:

Potencial creado por cargas puntuales. $V = K \cdot \dfrac{q}{r}$

¿Potencial en el punto (4,0)m?

$$V(4,0) = K \cdot \frac{q_1}{r_1} = 8.99 \cdot 10^9 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4} = 4495V$$

Un campo eléctrico uniforme de valor 2kN/C está en la dirección x. Se deja en libertad una carga puntual Q = 3μC inicialmente en reposo en el origen.

a) ¿Cuál es la diferencia de potencial V (4 m) – V(0)?

b) ¿Cuál es la variación de energía potencial de la carga desde x = 0 m hasta x = 4 m?

c) ¿Cuál es la energía cinética de la carga cuando está en x = 4 m?

Calcular el potencial V(x) si se toma como

d) Cero para x = 0 m   e)4kV para x = 0   f) cero para x =1 m

<u>DATOS</u>

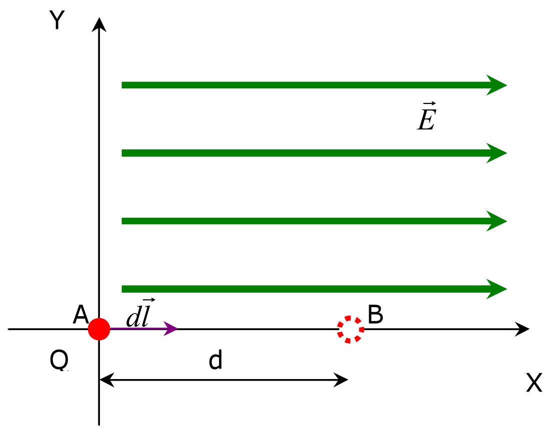
E = 2 kN/C

A (0, 0) m

B (4, 0) m

Q = 3 μC (0,0) m

d = 4 m



<u>PLANTEAMIENTO Y RESOLUCION</u>

a) Aplicamos la definición de Potencial Eléctrico.

Primero deducimos la expresión del potencial eléctrico en un campo eléctrico uniforme, cuando la línea que une los puntos A y B es paralela a las líneas de campo:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_A^B E \cdot dl \cdot \cos 0^\circ = -E\int_A^B dl = -E \cdot d$$

Después sustituimos los valores:

$$\Delta V = -2 \cdot 10^3 \cdot 4 = -8 \cdot 10^3 V$$

b) Aplicamos la definición de Energía Potencial.

$$\Delta U = U_B - U_A = -Q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = Q\cdot\Delta V = 3\cdot 10^{-6}\cdot(-8\cdot 10^3 V) = -24\cdot 10^{-3} J$$

c) Aplicamos el principio de Conservación de la Energía Mecánica.

$$E_{m_A} = E_{m_B}$$
$$E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}$$
$$E_{C_B} = E_{C_A} + E_{P_A} - E_{P_B}$$
$$E_{C_B} = 0 - (-24\cdot 10^{-3}) = 24\cdot 10^{-3}\ J$$

En los siguientes casos, aplicamos la definición de Potencial Eléctrico en un punto:

d) Tomando como referencia x = 0 m, donde el potencial será 0.

$$V_A = V_0 = 0$$
$$V_x - V_0 = -\int_0^x \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_0^x E\cdot dl\cdot\cos 0^{\circ} = -E\cdot x = -2{\cdot}10^3 x\ \ V$$

e) Tomando como referencia x = 0 m, donde el potencial será 4 kV.

$$\left.\begin{aligned} &V_A = V_0 = 4\cdot 10^3 V \\ &V_x - V_0 = -\int_0^x \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_0^x E\cdot dl\cdot\cos 0^{\circ} = -E\cdot x \Rightarrow \quad V_x = -E\cdot x + V_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V_x = (4-2x)10^3\ \ V$$

f) Tomando como referencia x = 1 m, donde el potencial será 0

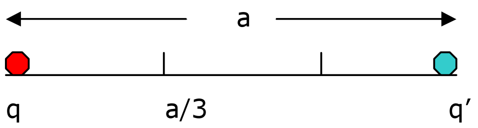
$$V_A = V_1 = 0$$
$$V_x - V_1 = -\int_1^x \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_1^x E\cdot dl\cdot\cos 0^{\circ} = -E\,(x-1) = -2{\cdot}10^3(x-1)\ \ V$$

Dos cargas puntuales q y q' están separadas por una distancia "a". En un punto a la distancia a/3 de q y a lo largo de la línea que une las dos cargas, el potencial es cero. Determinar la relación q/q'.

a = distancia

q = carga

q' = otra carga



De acuerdo con el Principio de Superposición, el potencial en un punto cualquiera debido a un grupo de cargas puntuales se obtiene calculando el potencial V_n debido a cada carga, como si las otras cargas no existieran, y sumando las cantidades así obtenidas. En este caso, el resultado del potencial nos tiene que dar cero, por lo tanto:

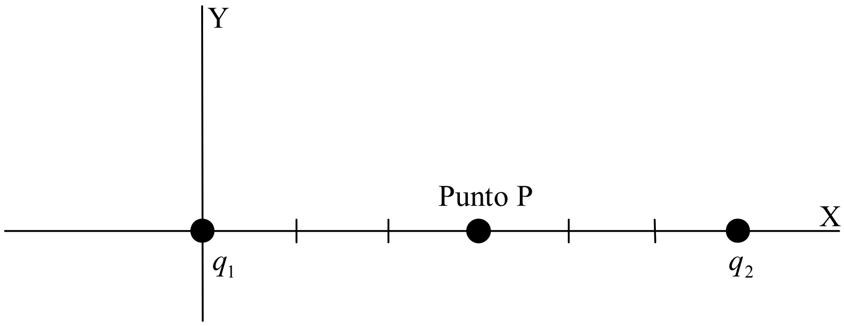
$$q/((1/3)\cdot a) + q'/((2/3)\cdot a) = 0;$$
$$q/q' = -1/2$$

Una carga de $+3.00\mu C$ está en el origen y otra de $-3.00\mu C$ está en el eje x en $x = 6.00m$.

a) Hallar el potencial en el eje x en el punto $x = 3.00m$.

b) Hallar el campo eléctrico en el eje x en el punto $x = 3.00m$.

$$Datos\begin{cases} q_1 = 3.0\mu C \Rightarrow (0,0)m \\ q_2 = -3.0\mu C \Rightarrow (6,0)m \\ P \Rightarrow (3,0)m \end{cases}$$



APARTADO A)

Planteamiento:

El potencial debido a una carga puntual viene dado por la siguiente expresión:

$$V = k \cdot \frac{q}{r}$$

Como hay varias cargas, sumaremos los diferentes potenciales. Esto es el *Principio de Superposición*:

$$V = k \cdot \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Resolución:

El punto *P* se encuentra a 3 metros de cada carga y las dos cargas son iguales, pero de distinto signo. Se sabe que cada potencial resultante es positivo o negativo según el signo de la carga.

$$\left.\begin{matrix} r_1 = r_2 = r = 3m \\ q_1 = -q_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V = k \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) = k \cdot \left(\frac{q_1}{r_1} - \frac{q_1}{r_2} \right) = k \cdot \frac{0}{r} = 0V$$

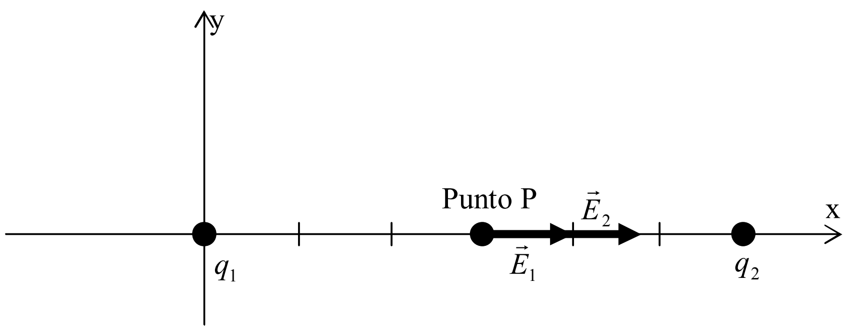
<u>APARTADO B)</u>

<u>Planteamiento:</u>

Se utilizará la fórmula del *campo electrostático*, que es una perturbación en el espacio debida a la presencia de una carga eléctrica en reposo:

$$\vec{E} = k \cdot \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

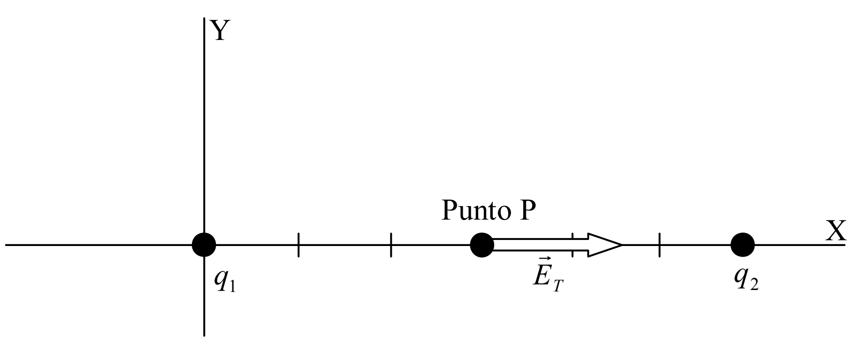
De nuevo se aplicará el *Principio de Superposición*:



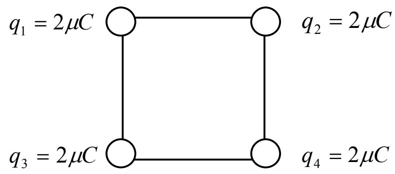
<u>Resolución:</u>

El punto *P* se encuentra a 3 metros de cada carga y las dos cargas son iguales, pero de distinto signo. En esta ocasión el signo de las cargas no se utiliza para el cálculo del campo eléctrico, su dirección y sentido ya se ha dado en el dibujo.

$$\left.\begin{matrix} r_1 = r_2 = r = 3m \\ |q_1| = |q_2| = q \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{E}_T = k \cdot \left(\frac{q_1}{r_1^2} + \frac{q_2}{r_2^2} \right) \vec{i} = \frac{2 \cdot k \cdot q}{r^2} \vec{i} = \frac{2 \cdot 8.99 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6}}{3^2} \vec{i} = 5.99\widehat{3} \cdot 10^3 \frac{N}{C} \vec{i}$$



Cuatro cargas puntuales de 2 microculombios se encuentran situadas en los vértices de un cuadrado de 4 m. de lado. Calcular el potencial en el centro del cuadrado (tomando como potencial cero el correspondiente al infinito) si todas las cargas son positivas.



El potencial creado por una carga puntual viene dado por la expresión:

$$V = \frac{kq}{r}$$

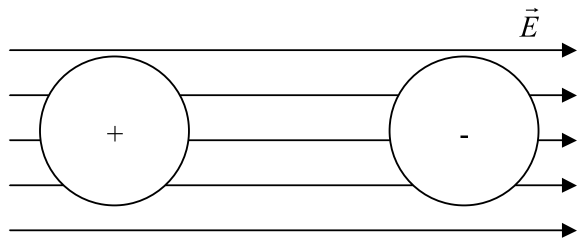
Donde se fija como potencial de referencia V=0 para r = ∞

Aplicando el principio de superposición, el potencial en el centro del cuadrado vendrá dado por:

$$V_T = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + \frac{kq_3}{r_3} + \frac{kq_4}{r_4} = \frac{4kq}{r}$$

$$V_T = \frac{4k \cdot 2 \times 10^{-6}}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{71920}{2.828} = 25431.4V = 25.4314KV$$

Los centros de dos esferas metálicas de radio 10 cm. Están separados 50 cm. sobre el eje x. Las esferas son inicialmente neutras, pero una carga Q se transfiere de una esfera a la otra, creando una diferencia de potencial entre las esferas de 100 V. Un protón se libera desde el reposo en la superficie de la esfera positivamente cargada y se mueve hacia la esfera cargada negativamente. ¿A qué velocidad choca contra la esfera negativa?



Datos:

Diferencia de potencial ΔV= -100 V

Carga del protón q = 1'6x10^{-19} C

Masa del protón m = 1'67x10^{-27} kg

Como el campo electrostático es conservativo, aplicamos el principio de conservación de la energía: la energía mecánica inicial debe ser igual a la final. La energía mecánica es la suma de la energía potencial y la energía cinética:

$$E_{mi} = E_{mf}$$

$$E_{pi} + E_{ci} = E_{pf} + E_{cf}$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

En el punto inicial, la velocidad es 0, por lo que la energía cinética en este punto también:

$$-\Delta E_p = \frac{1}{2}m{v_f}^2$$

Ahora podemos calcular la diferencia de energía potencial:

$$\Delta V = \frac{\Delta E_p}{q}; \Delta E_p = E_{pf} - E_{pi} = \Delta V \cdot q = -100 \cdot 1'6 \times 10^{-19} = -1'6 \times 10^{-17}\, J$$

Y la velocidad final despejando la ecuación:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta E_p}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1'6 \times 10^{-17}}{1'67 \times 10^{-27}}} = 1'38 \times 10^5\, m/s$$

Ejercicios del tema de campos vectoriales. Física, 1er curso Grado de Ingeniería Informática

1. Encontrar un vector perpendicular a la superficie $x^2y + z^3 = 12$ en el punto de coordenadas P (1,4,2)

   $\varphi = x^2\, y + z^3 = 12$

La superficie $x^2\, y + z^3 = 12$ es una superficie equiescalar del campo escalar $f(x, y, z) = x^2\, y + z^3$ ya que está formada por todos los puntos para los que esta función escalar toma el valor 12. Asimismo, se comprueba que el punto (1,4,2) pertenece a la superficie ya que se verifica la ecuación de la misma:

$$x^2\, y + z^3 = 12$$

$$1^2\, 4 + 2^3 = 12$$

Por otra parte, sabemos que el vector gradiente de un campo escalar es siempre perpendicular a las superficies equiescalares de dicho campo. Por lo tanto, calculamos el vector gradiente de acuerdo con su definición:

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (2xy)\vec{\imath} + (x^2)\vec{\jmath} + (3z^2)\vec{k}$$

y sustituyendo las coordenadas del punto obtenemos

$$\boxed{\vec{\nabla} f(x, y, z) = 8\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 12\vec{k}}$$

2. Dada la función escalar $\varphi = 2xz - y^2$
   a) a) calcular su derivada direccional en la dirección del vector $\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ en el punto P (1,3,2).

Por definición, se llama derivada direccional de una función escalar $\varphi(x, y, z)$ según el versor $\vec{V_0}$ al producto escalar de $\vec{V_0}$ por el $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi$.

$$\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}\ ;\ \vec{V_0} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}\ \right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi = \frac{\partial\ \varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\ \varphi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\ \varphi}{\partial z}\vec{k} = 2z\vec{\imath} - 2y\vec{\jmath} + 2x\vec{k}$$

$$\vec{V_0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}\ \right) \cdot \left(2z\vec{\imath} - 2y\vec{\jmath} + 2x\vec{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(4z - 2y - 2x\ )$$

En el punto P (1,3,2):

$$\left(\vec{V_0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi\right)_{\mathrm{P}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(8 - 4 - 4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\vec{V_0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi\right)_{\mathrm{P}} = 0}$$

   b) determinar, en dicho punto, un versor en la dirección de máximo crecimiento de la función.

La dirección del vector gradiente de una función es aquella según la cual esta función varía más rápidamente, siendo el sentido aquel en que la función es creciente.

Por tanto, la dirección de máximo crecimiento de nuestra función nos dará la de un vector unitario en la dirección y sentido del $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi$.

$(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi)_0 = (\vec{\nabla}\,\varphi)_0 = \frac{\vec{\nabla}\varphi}{|\vec{\nabla}\varphi|} = \frac{2}{\sqrt{56}}\left(2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + \vec{k}\right)$ en el punto P representará la dirección de máximo crecimiento de la función.

3. Dado el vector **E** = x^2 ***i*** -2yz ***j***+xz^2 ***k*** y el escalar a=$2x^2y$-$3z^2$, calcular en el punto A (1,0,2) las siguientes expresiones:

a) div $(a \cdot \vec{E})$

$a \cdot \vec{E}$ es el producto de un escalar por un vector y su resultado es un vector. div $\left(a \cdot \vec{E}\right)$ es la divergencia del vector anterior que es un escalar.

$$a \cdot \vec{E} = (2x^4\,y - 3x^2\,z^2)\vec{\imath} + (6z^3\,y - 4x^2\,y^2 z)\vec{\jmath} + (2x^3\,y\,z^2 - 3x\,z^4)\vec{k}$$

$$\mathrm{div}\left(a \cdot \vec{E}\right) = 8x^3\,y - 6x\,z^2 + 6z^3 - 8x^2\,y\,z + 4x^3 y\,z - 12x\,z^3$$

Sustituyendo las variables por los valores del punto A (1,0,2)

$\mathrm{div}\left(a \cdot \vec{E}\right)_{\mathrm{A}} = -72$ $\qquad$ $\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{A}} = \frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial y} + \frac{\partial Az}{\partial z}$

b) $\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}$ a

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,a$ es el gradiente de un escalar, es decir, un vector.

$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,a = 4xy\,\vec{\imath} + 2x^2\vec{\jmath} - 6z\,\vec{k}$ $\qquad$ $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ a = \frac{\partial a}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial a}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial a}{\partial z}\vec{k}$

$\left(\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,a\right)$ es el producto escalar de dos vectores, es decir, un escalar, y sustituyendo las variables por los valores del punto A (1,0,2):

$$\left(\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,a\right)_{\mathrm{A}} = -48$$

c) $\vec{E} \times \mathrm{rot}\,\vec{E}$

rot $\vec{E}$ es un vector:

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & -2yz & xz^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -2yz & xz^2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xz^2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \cancelto{0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ x^2 & -2yz \end{vmatrix}}\vec{k} = 2y\vec{\imath} - z^2\vec{\jmath}$$

$\vec{E} \times \mathrm{rot}\,\vec{E}$ es el producto vectorial de 2 vectores, es decir, un vector, y sustituyendo las variables por los valores del punto A (1,0,2):

$$\vec{E} \times \mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{E} \times \mathrm{rot}\,\vec{E} = 16\vec{\imath} - 4\vec{k}}$$

d) $\vec{E} \times \overrightarrow{\text{grad}}\, a$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, a = \frac{\partial a}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial a}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial a}{\partial z}\vec{k} = 4x\,y\,\vec{\imath} + 2x^2\,\vec{\jmath} - 6z\,\vec{k}$$

$$\vec{E} \times \overrightarrow{\text{grad}}\, a = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -12 \end{vmatrix} = 2\vec{k} + 12\vec{\jmath} - 8\vec{\imath} \implies \boxed{\vec{E} \times \overrightarrow{\text{grad}}\, a = -8\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} + 2\vec{k}}$$

4. Calcular la circulación del vector **A** = t ***i*** + t^2 **j** a lo largo de la curva con ecuaciones paramétricas: x = $2t^2$; y = (1/3) t^3 entre los puntos t_0 =0 y t_1 =1

$\vec{A} = t\vec{\imath} + t^2\vec{\jmath}$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2t^2 \\ y &= \left(\frac{1}{3}\right)t^3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} dx &= 4t\,dt \\ dy &= t^2\,dt \end{aligned}$$

$t_0 = 0$
$t_1 = 1$

$$C = \int_{t_0}^{t_1} (t, t^2) \cdot\ (4t\,dt, t^2\,dt) = \int_0^1 (4t^2 + t^4)dt = \frac{4}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} = \frac{4}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15}$$

6. Dado el campo vectorial $\vec{V}= m\,\vec{\imath}$+2y $\vec{\jmath}$ – z $\vec{k}$, determinar el valor del parámetro *m* para que dicho campo sea solenoidal.

La condición que ha de cumplir un campo vectorial para que sea solenoidal es que su divergencia sea nula.

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial Vx}{\partial x} + \frac{\partial Vy}{\partial y} + \frac{\partial Vz}{\partial z}$$

$$\text{div}\,\vec{V} = \frac{\partial m}{\partial x} + 2 - 1$$

$\frac{\partial m}{\partial x} + 1 = 0$, de donde, integrando respecto a la variable *x*:

$\boxed{m = -x + c}$ $\longrightarrow$ valor que ha de tener el parámetro *m* para que $\vec{V}$ sea solenoidal.

7. Dado el campo vectorial $\vec{A} = 2xy\,\vec{\imath} + (x^2 + 2yz^3)\vec{\jmath} + 3y^2z^2\,\vec{k}$, calcular su circulación entre los puntos (0,0,0) y (1,2,3) a lo largo del camino definido:

$$\vec{A} = 2xy\,\vec{\imath} + (x^2 + 2yz^3)\vec{\jmath} + 3y^2z^2\,\vec{k}$$

b) por la recta que pasa por los dos puntos, ¿cómo es el campo?

$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ $\qquad y = 2x$
$\qquad z = 3x$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{\imath} + dy\,\vec{\jmath} + dz\,\vec{k} = dx\,\vec{\imath} + 2dx\,\vec{\jmath} + 3dx\,\vec{k}$$

$$C_{\mathrm{OP}} = \int_0^{\mathrm{P}} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} [(2xy)dx + (x^2 + 2yz^3)dy + (3y^2z^2)dz] =$$

$$= \int_0^1 [(2x\,2x)dx + (x^2 + 2\cdot 2x(3x)^3)2dx + (3(2x)^2(3x)^2)3dx] =$$

$$= \int_0^1 4x^2dx + (x^2 + 4x\cdot 27x^3)2dx + (3\cdot 4x^2\cdot 9x^2)3dx] =$$

$$= \int_0^1 4x^2dx + (108x^4 + x^2)2dx + 108x^4\,3dx] =$$

$$= \int_0^1 (540x^4 + 6x^2)dx = \frac{540}{5}x^5 + \frac{6}{3}x^3\Big]_0^1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{C_{\mathrm{OP}} = 110}$$

a) (0,0,0) $\rightarrow$ (1,0,0)

$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$ $\quad \left.\begin{matrix} y = 0 & dy = 0 \\ z = 0 & dz = 0 \end{matrix}\right\}$ $\; C = \int_{(1,0,0)\to(1,0,0)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 0\cdot dx = 0$

(1,0,0) $\rightarrow$ (1,2,0)

$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$ $\quad \left.\begin{matrix} z = 0 & dz = 0 \\ x = 1 & dx = 0 \end{matrix}\right\}$ $\; C = \int_{(1,0,0)\to(1,2,0)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 1\cdot dy = 2$

(1,2,0) $\rightarrow$ (1,2,3)

$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}$ $\quad \left.\begin{matrix} x = 1 & dx = 0 \\ y = 2 & dy = 0 \end{matrix}\right\}$ $\; C = \int_{(1,2,0)\to(1,2,3)} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_0^3 12z^2\cdot dz = \frac{12}{3}z^3\Big]_0^3 = 108$

$$C_T = 108 + 2 = 110$$

El campo es conservativo.

8. Dado el campo vectorial $\vec{A} = (x-1)\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath}$, calcula el flujo a través de las caras del cubo, limitadas por x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1.

$$\vec{A} = (x-1)\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath}$$

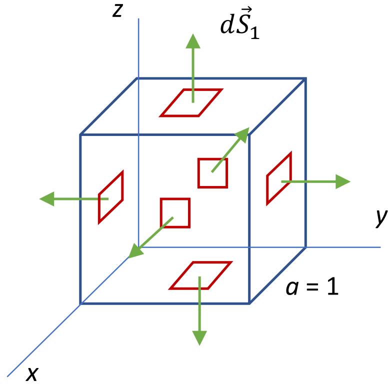
Cara inferior

Para la cara inferior (*z* = 0), el campo en estos puntos vale:

$$\vec{A}(z=0) = (x-1)\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath}$$

$d\vec{S} = -dx\,dy\,\vec{k} \qquad \vec{A} \perp d\vec{S}$

Al ser ortogonales estos dos vectores el flujo vale 0. $\phi_1 = 0$



Cara superior

En la cara superior *z* = 1

$\left.\begin{matrix} \vec{A}(z=1) = (x-1)\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath} \\ d\vec{S} = dx\,dy\,\vec{k} \quad \vec{A} \perp d\vec{S} \end{matrix}\right\}$ Al ser ortogonales estos dos vectores $\phi_2 = 0$

Cara trasera

Para la cara del fondo (x = 0)

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A}(x=0)=-\vec{\imath}\\ d\vec{S}=-dy\,dz\,\vec{\imath}\end{array}\right\}\qquad \phi_3=\int_{S_3}-1(-dy\cdot dz)=y\cdot z=1$$

Cara frontal

Para la cara frontal x = 1

$$\left.\begin{array}{l}\vec{A}(x=1)=y\,\vec{\jmath}\\ d\vec{S}=dy\,dz\,\vec{\imath}\end{array}\right\}\qquad \phi_4=0\ \text{ vectores ortogonales }\ \vec{A}\perp d\vec{S}$$

Cara derecha

Para la cara derecha y = 1

$$\left.\begin{array}{c}\vec{A}(y=1)=(x-1)\vec{\imath}+x\,\vec{\jmath}\\ d\vec{S}=dx\,dz\,\vec{\jmath}\end{array}\right\}\quad \phi_5=\int_{S_5}x\,dx\,dz=\frac{x^2}{2}z=\frac{1}{2}$$

Cara izquierda

Para la cara izquierda y = 0

$$\left.\begin{array}{c}\vec{A}(y=0)=(x-1)\vec{\imath}\\ d\vec{S}=-dx\,dz\,\vec{\jmath}\end{array}\right\}\qquad \phi_6=0\qquad \vec{A}\perp d\vec{S}\ \text{ vectores ortogonales.}$$

$$\phi_T=\phi_3+\phi_5=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

b) Si aplicamos el teorema de Gauss

$\int_S\ \vec{A}\cdot d\vec{S}=\ \int_V\ \operatorname{div}\vec{A}\cdot dv$ siendo V el volumen del cubo.

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial Ax}{\partial x}+\frac{\partial Ay}{\partial y}+\frac{\partial Az}{\partial z}=1+x$$

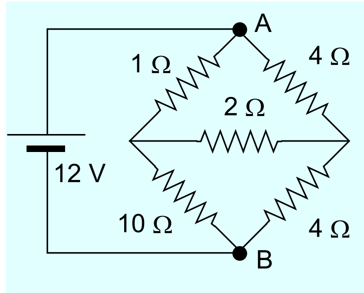
$$\phi=\int_V\ (1+x)dV=\int_V\ (1+x)dx\cdot dy\cdot dz=\int_0^1(1+x)dx\int_0^1 dy\int_0^1 dz=$$

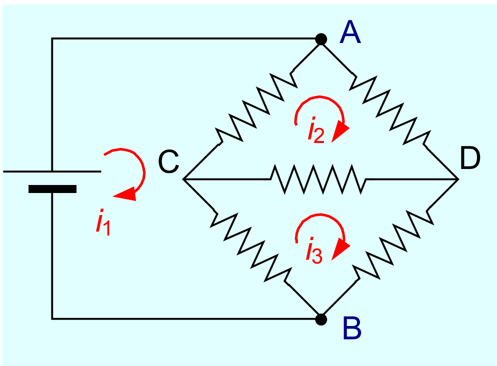
$$=x+\frac{x^2}{2}\bigg]_0^1\cdot y]_0^1\cdot z]_0^1=\frac{3}{2}$$

En el circuito de la figura hállense:

a) La intensidad que circula por cada rama.

b) La resistencia equivalente entre los puntos A y B, del conjunto de resistencias.





Asignando a las intensidades de malla los subíndices y los sentidos representados en la figura, se obtienen las ecuaciones:

$$12 = 1(i_1 - i_2) + 10(i_1 - i_3)$$
$$0 = 4i_2 + 2(i_2 - i_3) + 1(i_2 - i_1)$$
$$0 = 10(i_3 - i_1) + 2(i_3 - i_2) + 4i_3$$

y resolviendo el sistema

$$12 = 11i_1 - i_2 - 10i_3$$
$$0 = -i_1 + 7i_2 - 2i_3$$
$$0 = -10i_1 - 2i_2 + 16i_3$$

resulta

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -1 & -10 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -1 & -10 \\ -1 & 7 & -2 \\ -10 & -2 & 16 \end{vmatrix}} = \frac{1296}{432} = 3\text{ A}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 11 & 12 & -10 \\ -1 & 0 & -2 \\ -10 & 0 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -1 & -10 \\ -1 & 7 & -2 \\ -10 & -2 & 16 \end{vmatrix}} = \frac{432}{432} = 1\text{ A}$$

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -1 & 12 \\ -1 & 7 & 0 \\ -10 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 11 & -1 & -10 \\ -1 & 7 & -2 \\ -10 & -2 & 16 \end{vmatrix}} = \frac{864}{432} = 2\ \text{A}$$

A partir de las intensidades de malla se deduce:

$$i_T = i_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_T = 3\ \text{A}}$$

$$i_{AC} = i_1 - i_2 = 3 - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{AC} = 2\ \text{A}}$$

$$i_{AD} = i_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{AD} = 1\ \text{A}}$$

$$i_{CD} = i_3 - i_2 = 2 - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{CD} = 1\ \text{A}}$$

$$i_{CB} = i_1 - i_3 = 3 - 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{CB} = 1\ \text{A}}$$

$$i_{DB} = i_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{DB} = 2\ \text{A}}$$

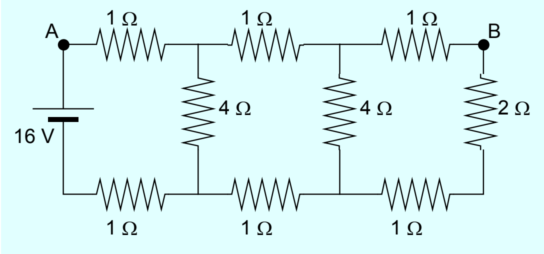
A la vista de los resultados la resistencia equivalente, debe ser atravesada por una intensidad de 3 A cuando entre sus bornes exista una diferencia de potencial de 12 V, de donde se deduce:

$$R_{eq} = \frac{V}{i_T} = \frac{12\ \text{V}}{3\ \text{A}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{eq} = 4\ \Omega}$$

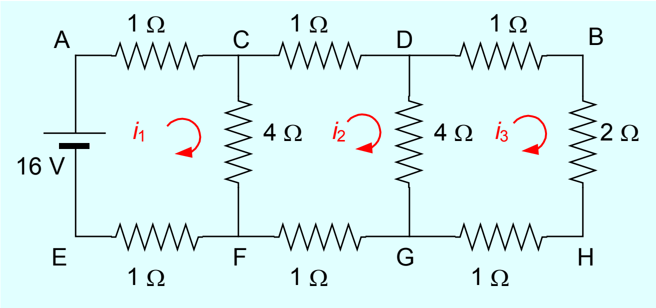
En el esquema de la figura, determínense:

a) Las intensidades que circulan por cada rama.

b) La diferencia de potencial $V_A - V_B$.



Aplicando el método de las mallas de Maxwell, resultan las ecuaciones:



$$\begin{aligned} 16 &= 6i_1 - 4i_2 \\ 0 &= -4i_1 + 10i_2 - 4i_3 \\ 0 &= -4i_2 + 8i_3 \end{aligned}$$

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 16 & -4 & 0 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{1024}{256} = 4\text{ A}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 16 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{512}{256} = 2\text{ A}$$

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -4 & 16 \\ -4 & 10 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{256}{256} = 1\text{ A}$$

Las intensidades de rama se determinan del modo:

$$i_{AC} = i_{FE} = i_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{AC} = 4\text{ A}}$$

$$i_{CF} = i_1 - i_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{CF} = 2\text{ A}}$$

$$i_{CD} = i_{GF} = i_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{CD} = 2\text{ A}}$$

$$i_{DG} = i_2 - i_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{DG} = 1\text{ A}}$$

$$\boxed{i_{DB} = i_{BH} = i_{HG} = 1\text{ A}}$$

La diferencia de potencial $V_A - V_B$ viene dada por:

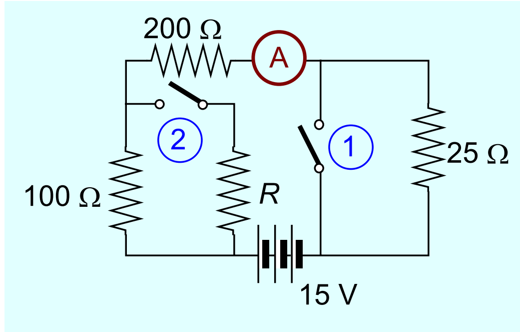
$$V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_B) =$$
$$= 1\,\Omega \cdot i_{AC} + 1\,\Omega\, i_{CD} + 1\,\Omega\, i_{DB}$$

$$\boxed{V_A - V_B = 7\text{ V}}$$

En el esquema de la figura, cuando el interruptor 1 está cerrado el 2 permanece abierto, y cuando el 1 está abierto el 2 está cerrado.

a) ¿Qué valor debe tener la resistencia R para que en ambos casos el amperímetro A marque la misma intensidad?

b) Qué intensidad marca el amperímetro A?



---

a) El amperímetro está en serie con el generador de corriente contínua, y por tanto mide la corriente que de él sale.

Para que no varíe la corriente, no debe variar la resistencia que se coloca en bornes del generador.

En el caso del interruptor 2 abierto y el 1 cerrado, la resistencia es de

$$100\ \Omega + 200\ \Omega = 300\ \Omega$$

En el caso opuesto la resistencia debe ser la misma

$$R_{eq} + 200\ \Omega + 25\ \Omega = 300\ \Omega$$

Luego la resistencia equivalente a las dos resistencias en paralelo deberá ser:

$$R_{eq} = 300\ \Omega - 200\ \Omega - 25\ \Omega = 75\ \Omega$$

que debe ser:

$$\frac{1}{75} = \frac{1}{100} + \frac{1}{R}$$

de donde

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{75} - \frac{1}{100} = \frac{4}{500} - \frac{3}{300} = \frac{1}{300}$$

$$\boxed{R = 300\ \Omega}$$

b) Si la resistencia intercalada en ambos casos es de 300 Ω

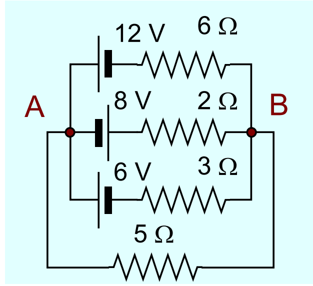
$$I = \frac{15\ \text{V}}{300\ \Omega} = 0{,}05\ \text{A} = 50\ \text{mA}$$

$$\boxed{I = 50\ \text{mA}}$$

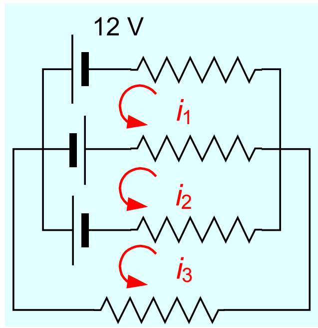
En el circuito de la figura, determínense:

a) Las intensidades que circulan por cada rama.

b) La diferencia de potencial entre los puntos A y B.



Planteando las ecuaciones de las mallas para las intensidades de malla que se representan se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:



$$\begin{aligned} 8\,i_1 \quad -2\,i_2 \qquad\qquad &= 20 \\ -2\,i_1 \quad +5\,i_2 \quad -3\,i_3 &= -14 \\ -3\,i_2 \quad +8\,i_3 &= 6 \end{aligned}$$

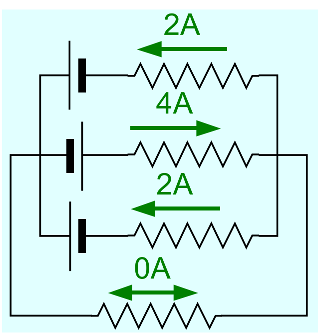
de donde

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 20 & -2 & 0 \\ -14 & 5 & -3 \\ 6 & -3 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 8 \end{vmatrix}} = \frac{432}{216} = 2\ \text{A}$$

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 20 & 0 \\ -2 & -14 & -3 \\ 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}}{216} = \frac{-432}{216} = -2\ \text{A}$$

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -2 & 20 \\ -2 & 5 & -14 \\ 0 & -3 & 6 \end{vmatrix}}{216} = 0\ \text{A}$$

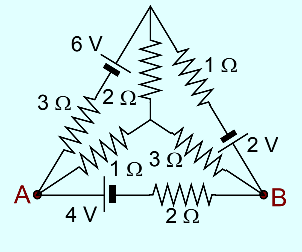
Las intensidades en cada rama se representan en la figura.



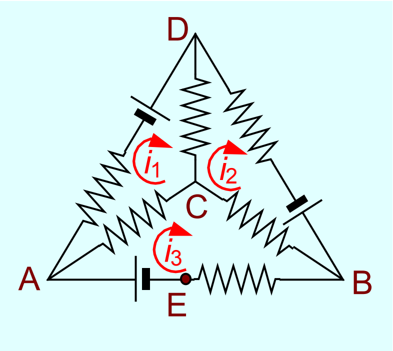
La diferencia de potencial entre los puntos A y B vendrá dada por:

$$V_A - V_B = i_3 \cdot 5\ \Omega \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A - V_B = 0\ \text{V}}$$

En el circuito de la figura, determínense las intensidades que circulan por cada rama y la diferencia de potencial entre los puntos A y B.



Planteando las ecuaciones de las mallas para las intensidades que se representan, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones



$$\begin{aligned} 6\,i_1 \quad -2\,i_2 \quad -i_3 &= 6 \\ -2\,i_1 \quad +6\,i_2 \quad -3\,i_3 &= 2 \\ -i_1 \quad -3\,i_2 \quad +6\,i_3 &= 4 \end{aligned}$$

resolviendo resuta,

$$i_1 = i_2 = i_3 = 2\ \text{A}$$

con lo que las intensidades en las diferentes ramas serán:

$$i_{AD} = i_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{AD} = 2\ \text{A}}$$

$$i_{AC} = i_3 - i_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{AC} = 0\ \text{A}}$$

$$i_{BC} = i_2 - i_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{BC} = 0\ \text{A}}$$

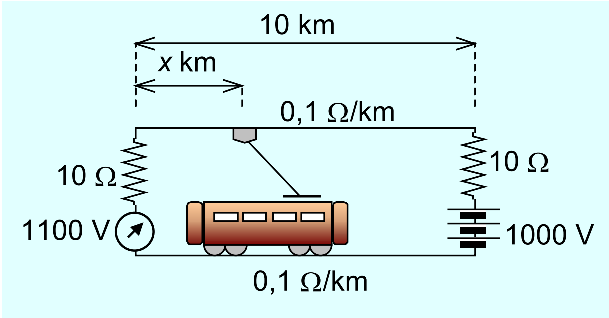
$$i_{BA} = i_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{BA} = 2\ \text{A}}$$

$$i_{DB} = i_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{DB} = 2\ \text{A}}$$

$$i_{DC} = i_1 - i_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_{DC} = 0\ \text{A}}$$

de este modo se podrá determinar $V_A - V_B$, si se tiene en cuenta

$$V_A - V_B = (V_A - V_E) - (V_B - V_E) = 4\ \text{V} - 2\ \Omega \cdot 2\ \text{A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A - V_B = 0\ \text{V}}$$

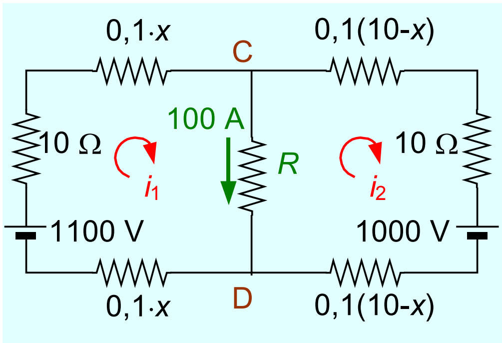


Una línea de tranvía de 10 km de longitud tiene al principio de la misma un generador de corriente continua de 1100 V y resistencia interna 10 Ω, y al final unas baterías de 1000 V y resistencia interna 10 Ω. Las vías tienen una resistencia equivalente a la del cable, de 0,1 Ω/km. El tranvía requiere una intensidad de 100 A. Determinar, para una posición del tranvía de x km de distancia del generador:

a) La tensión de alimentación del tranvía V.

b) Las intensidades suministradas por el generador y por la batería.

El circuito equivalente es el que se representa en la figura



y aplicando las ecuaciones del método de las mallas, resultan

$$1100 = i_1(10 + 2 \cdot 0{,}1 \cdot x) + (i_1 - i_2)R \qquad [1]$$

$$-1000 = i_2[10 + 2 \cdot 0{,}1 \cdot (10 - x)] + (i_2 - i_1)R \qquad [2]$$

y como

$$i_{CD} = 100 \text{ A}$$

y

$$i_{CD} = i_1 - i_2$$

se deduce

$$i_1 - i_2 = 100 \text{ A} \qquad [3]$$

Sumando [1] y [2] resulta

$$100 = i_1(10 + 0{,}2\,x) + i_2(12 - 0{,}2\,x)$$

ecuación que junto con: $100 = i_1 - i_2$

constituye un sistema de ecuaciones, del que se despeja:

$$i_1 = \frac{650 - 10\,x}{11}\,A$$

$$i_2 = -\frac{450 + 10\,x}{11}\,A$$

La intensidad suministrada por el generador, i_G será:

$$\boxed{i_G = i_1 = \frac{650 - 10\,x}{11}\,A}$$

La intensidad suministrada por la batería, i_B será:

$$\boxed{i_B = -i_2 = \frac{450 + 10\,x}{11}\,A}$$

La tensión de alimentación del tranvía será:

$$V_{CD} = R\left(i_1 - i_2\right)$$

y teniendo en cuenta que de la ecuación [1]

$$R\left(i_1 - i_2\right) = 1100 - i_1\left(10 + 0{,}2\,x\right)$$

resulta

$$\boxed{V_{CD} = \frac{2\,x^2 - 30\,x + 5600}{11}\,\mathrm{V}}$$

Un condensador de placas paralelas, separadas por aire, tiene una capacidad de 0’14 μF. Las placas están separadas entre sí 0’5 mm y sobre una de ellas existe una carga de 3’2 μC y sobre la otra una carga de −3’2 μC. ¿Cuánta energía hay almacenada?

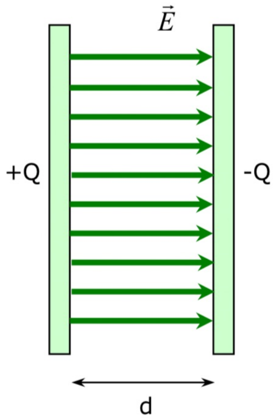
DATOS

ε_{aire}

C = 0,14 μF $1{,}4 \cdot 10^{-7}$ F

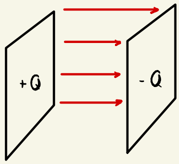
Q = 3,2 μC $3{,}2 \cdot 10^{-6}$ C

d = 0,5 mm



$$\left.\begin{array}{l} U = \int dU = \int V\,dQ \\ C = \dfrac{Q}{V} \end{array}\right\} U = \int \frac{Q}{C}\,dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(3{,}2 \cdot 10^{-6})^2}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-7}} = 3{,}6571 \cdot 10^{-5}\ \text{J}$$

Dos placas paralelas poseen cargas Q y –Q. Si el espacio entre las placas está desprovisto de materia, el campo eléctrico es de 2.5 x 10^5 V/m. Si Q es igual a 10 nC ¿Cuál es el área de las placas?



$$E = 2{,}5 \cdot 10^5 \ V/m$$

$$Q = 10^{-8} \ C$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi = \oint \vec{E} d\vec{S} = E \perp S = E S \operatorname{sen} 90 = E S \\ \phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} E S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$S = \frac{Q}{\varepsilon_0 E} = \frac{10^{-8}}{8{,}8542 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}5 \cdot 10^5} = 4{,}5176 \cdot 10^{-3} \ m^2$$

Un condensador de placas paralelas tiene las placas de 2 m^2 de área y una separación de 1.0 mm. Se carga hasta 100 V.

a) ¿Cuál es el campo eléctrico existente entre las placas?

b) ¿Cuál es la energía por unidad de volumen en el espacio situado entre las placas?.

c) Halla la energía total multiplicando la respuesta dada a la parte b) por el volumen entre las placas

$S = 2\,m^2$

$d = 10^{-3}\,m$

$V = 100\,V$

a) $\epsilon = \dfrac{Kq}{r^2} = \dfrac{V}{r} = \dfrac{100}{10^{-3}} = 10^5\ N/m$

b) $U = \int dU = \int V\,dQ$

$C = \dfrac{Q}{V}$

$U = \int \dfrac{Q}{C}\,dQ = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{C^2V^2}{2C} = \dfrac{CV^2}{2}$

$V = \int \epsilon\,dl = \epsilon d$

$\epsilon = \dfrac{Q}{S\varepsilon_0}$

$V = \int \dfrac{Q}{S\varepsilon_0}\,dl = \dfrac{Qd}{S\varepsilon_0}$

$C = \dfrac{Q}{V}$

$C = \dfrac{Q}{\frac{Qd}{S\varepsilon_0}} = \dfrac{S\varepsilon_0}{d}$

$U = \dfrac{\left(\frac{S\varepsilon_0}{d}\right)(\epsilon d)^2}{2}$

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\frac{\left(\frac{S\varepsilon_0}{d}\right)(\epsilon d)^2}{2}}{V} = \frac{S\varepsilon_0\epsilon^2 d}{2V} = \frac{S\varepsilon_0\epsilon^2 d}{2Sd} = \frac{\varepsilon_0\epsilon^2}{2} = \frac{8{,}8542\cdot 10^{-12}(10^5)^2}{2} = 4{,}4271\cdot 10^{-2}\ J/m^3$$

c) $U = uV = uSd = 4{,}4271\cdot 10^{-2}\cdot 2\cdot 10^{-3} = 8{,}8542\cdot 10^{-5}\ J$

Un condensador de 3μF se carga a 100V.

a) ¿Cuánta energía se almacena en el condensador?

b) ¿Cuánta energía adicional se necesita para cargar el condensador desde 100 a 200 V?

$C = 3 \cdot 10^{-6}$ F

$V = 100$ V

a) $$\left.\begin{array}{l} dU = V\,dQ \\ C = \dfrac{Q}{V} \end{array}\right\} U = \int dU = \int \frac{Q}{C}\,dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2V^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-6}\ 100^2}{2}$$

$$= 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ J$$

b) 1. $U_{100} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ J

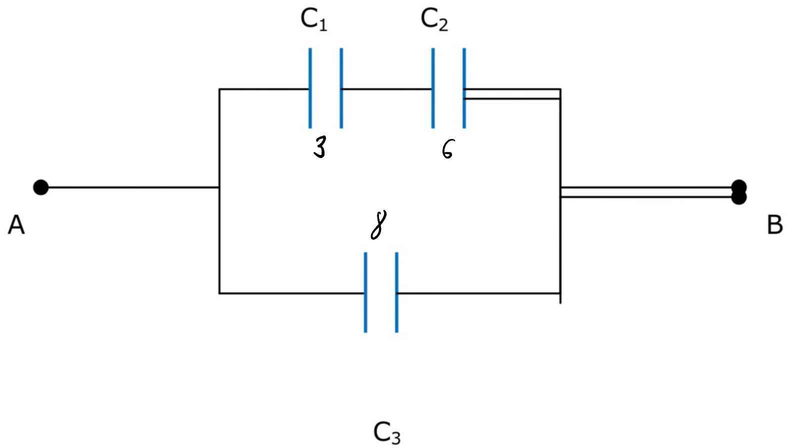
$$U_{200} = \frac{CV^2}{2} = \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 200^2}{2} = 6 \cdot 10^{-2}\ J$$

$$\Delta U = U_{200} - U_{100} = (6 - 1{,}5) \cdot 10^{-2} = 4{,}5 \cdot 10^{-2}\ J$$

2. $$U = \int_{100}^{200} dU = \int_{100}^{200} V\,dQ = \int_{100}^{200} \frac{Q}{C}\,dQ = \frac{1}{2C}\left(Q_{200}^2 - Q_{100}^2\right) = \frac{1}{2C}\left(C^2V_{200}^2 - C^2V_{100}^2\right) = \frac{CV_{200}^2 - CV_{100}^2}{2}$$

$$= \frac{C}{2}\,V_{200}^2 - V_{100}^2 = \frac{3 \cdot 10^{-6}}{2}\left(200^2 - 100^2\right) = 4{,}5 \cdot 10^{-2}\ J$$

Un condensador de 3,0 μF y otro de 6,0 μF se conectan en serie y la combinación se conecta en paralelo con un condensador de 8,0 μF. ¿Cuál es la capacidad equivalente de esta combinación?

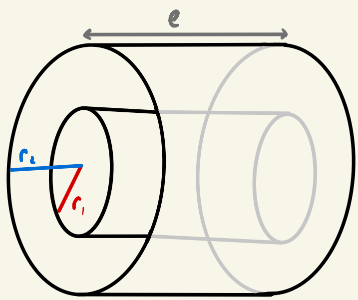


$$C_T = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} + C_3 = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} + 8 = 10\ \mu F = 10^{-5}\ F$$

Un tubo Geiger se compone de un alambre de 0.2 mm de radio y una longitud de 12 cm con un conductor cilíndrico coaxial de la misma longitud y 1,5 cm de radio.

a) Hallar su capacidad admitiendo que el gas en el interior del tubo tiene una constante dieléctrica de 1.

b) Hallar la carga por unidad de longitud sobre el alambre en el caso de que el condensador se cargue a 1,2 Kv.



$r_1 = 2\cdot 10^{-4}$ m

$r_2 = 0{,}015$ m

$l = 0{,}12$ m

a) $\varepsilon_r = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \\ \phi = \int E\,dS = E\,2\pi r l \end{array}\right\} E = \frac{Q}{\varepsilon_0 2\pi r l}$$

$$\left.\begin{array}{l} V = \int E\,dl = \int_1^2 \dfrac{Q}{\varepsilon 2\pi r l}\,dr = \dfrac{Q}{\varepsilon 2\pi l}\int_1^2 \dfrac{1}{r}\,dr = \dfrac{Q}{\varepsilon 2\pi l}\ln r_2 - \ln r_1 = \dfrac{Q}{\varepsilon 2\pi l}\ln\dfrac{r_2}{r_1} \\ C = \dfrac{Q}{V} \end{array}\right\} C = \frac{Q}{\dfrac{Q}{\varepsilon 2\pi l}\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r 2\pi l}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{8{,}8542\cdot 10^{-12}\cdot 1\cdot 2\pi\cdot 0{,}12}{\ln\frac{0{,}015}{2\cdot 10^{-4}}} = 1{,}5462\cdot 10^{-12}\ F$$

b) $V = 1200$ V

$$C = \frac{Q}{V}\ ;\ Q = CV = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r 2\pi l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}V\ ;\ \lambda = \frac{Q}{l} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r 2\pi V}{\ln\frac{r_2}{r_1}} = \frac{8{,}8542\cdot 10^{-12}\cdot 1\cdot 2\pi\cdot 1200}{\ln\frac{0{,}015}{2\cdot 10^{-4}}} = 1{,}5462\cdot 10^{-8}\ C/m$$

61. Se construye un condensador de placas paralelas colocando polietileno (k=2.3) entre dos hojas de aluminio. El área de cada hoja es de 400 cm^2 y la separación de 0.3 mm. Hallar la capacidad.

$\varepsilon_r = 2{,}3$

$S = 0{,}04\ m^2$

$d = 3 \cdot 10^{-4}\ m$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\phi = \int E\,dS = E\,S \\ \phi = \dfrac{Q}{\varepsilon}\end{array}\right\} E = \dfrac{Q}{\varepsilon S} \\ V = \int E\,dl\end{array}\right\} V = \frac{Q}{\varepsilon S}\int dl = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$

$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{Qd}{\varepsilon S} \\ C = \dfrac{Q}{V}\end{array}\right\} C = \frac{Q}{\frac{Qd}{\varepsilon S}} = \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \frac{8{,}8542 \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}3 \cdot 0{,}04}{3 \cdot 10^{-4}}$$

$$= 2{,}7153 \cdot 10^{-9}\ F$$

Un condensador de placas paralelas, separadas por aire, tiene una capacidad de 0,14μF. Las placas están separadas entre sí 0,5mm. ¿Cuál es el área de cada placa?

$C = 1{,}4 \cdot 10^{-7}\ F$

$d = 5 \cdot 10^{-4}\ m$

$$\left.\begin{array}{l} \phi = \int \epsilon \, dS = \epsilon S \\ \phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \epsilon = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S} \\ V = \int \epsilon \, dl \end{array}\right\} V = \int \frac{Q\,dl}{\varepsilon_0 S} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

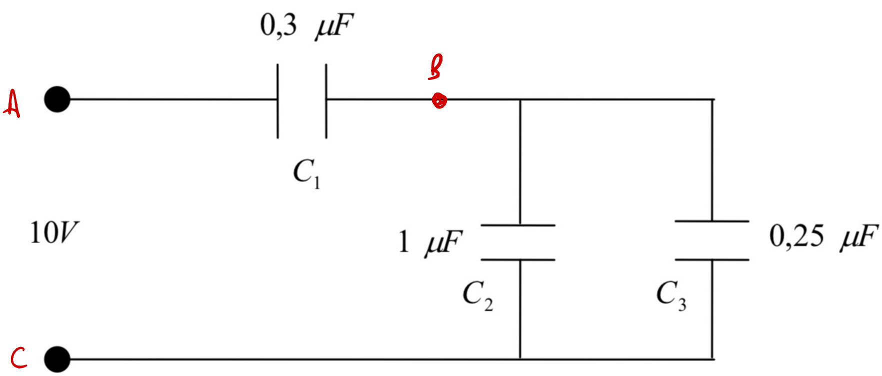
$$\left.\begin{array}{l} V = \dfrac{Qd}{\varepsilon_0 S} \\ C = \dfrac{Q}{V} \end{array}\right\} C = \frac{Q}{\frac{Qd}{\varepsilon_0 S}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \ ; \ S = A = \frac{Cd}{\varepsilon_0} = \frac{1{,}4 \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{8{,}8542 \cdot 10^{-12}} = 7{,}9059\ m^2$$

Calcular para el dispositivo de la figura:

a) La capacidad total efectiva entre los terminales

b) La carga almacenada en cada uno de los condensadores

c) La energía total almacenada



a) $$C_T = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2+C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{0,3}+\frac{1}{1+0,25}} = \frac{15}{62}\cdot 10^{-6} = 2,4194\cdot 10^{-7}\ F$$

b) $$C_T = \frac{Q_T}{V_T} \ ; \ Q_1 = C_1 V_T = 2,4197\cdot 10^{-7}\cdot 10 = 2,4197\cdot 10^{-6}\ C = Q_1 = Q_{2+3}$$

$$V_{BC} = \frac{Q_1}{C_{2+3}} = \frac{2,4196\cdot 10^{-6}}{1,25\cdot 10^{-6}} = 1,9357\ V$$

$$Q_2 = C_2 V_{BC} = 10^{-6}\cdot 1,9357 = 1,9357\cdot 10^{-6}\ C$$

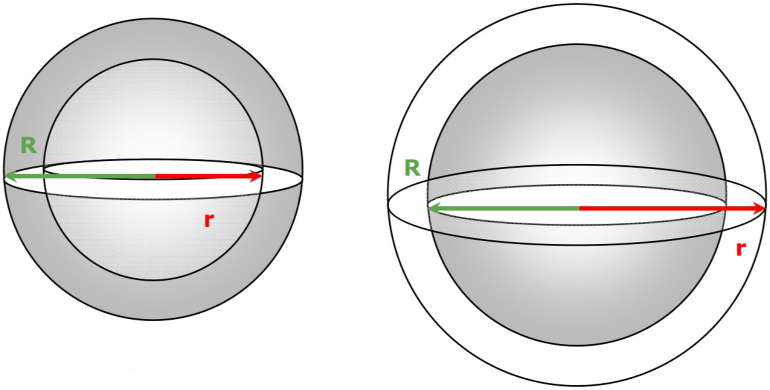
$$Q_3 = C_3 V_{BC} = 2,5\cdot 10^{-7}\cdot 1,9357 = 4,8393\cdot 10^{-7}\ C$$

c) $$\left.\begin{array}{l} U = \int dU = \int V\, dQ \\ C = \frac{Q}{V} \end{array}\right\} U = \int \frac{Q}{C}\, dQ = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2V^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{2,4194\cdot 10^{-7}\cdot 10^2}{2} = 1,2097\cdot 10^{-5}\ J$$

Explicar por qué el campo eléctrico crece con r, en lugar de disminuir según 1/r² **cuando nos desplazamos hacia fuera desde el centro interior de una distribución esférica de carga de densidad volúmica de carga constante.**

<u>DATOS</u>

$\rho = cte$



$$\left.\begin{array}{l}\phi = \int E\,dS = E\,4\pi r^2 \\ \phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\end{array}\right\} E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

$$\rho = \frac{dQ}{dV} \; ; \; Q = \int dQ = \int \rho\, dV = \frac{4\pi r^3 \rho}{3}$$

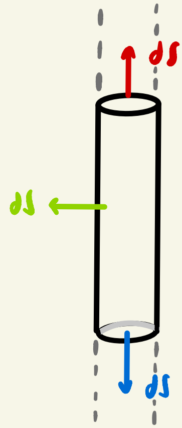
$$E = \frac{\dfrac{4\pi r^3 \rho}{3}}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{r\rho}{3\varepsilon_0}$$

La carga por unidad de longitud en un filamento recto e infinitamente largo es -90 pC/m. Determine el campo eléctrico a las siguientes distancias del filamento:

a) 10 cm b) 20 cm c) 100 cm

$$\lambda = \frac{Q}{\ell} = -9 \cdot 10^{-11} \ C/m$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi = \oint \epsilon \, dS = \int_{c1} \cancelto{x}{\epsilon \, dS} + \int_{c2} \cancelto{-x}{\epsilon \, dS} + \int_{se} \epsilon \, dS = \epsilon \, 2\pi r \ell \\ \phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} \ \epsilon = \frac{Q}{2\pi r \ell \, \varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi r \, \varepsilon_0}$$



a) $\epsilon = \dfrac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} = \dfrac{-9 \cdot 10^{-11}}{2\pi \cdot 0{,}1 \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12}} = -16{,}1776 \ N/C$

b) $\epsilon = \dfrac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} = \dfrac{-9 \cdot 10^{-11}}{2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12}} = -8{,}0888 \ N/C$

c) $\epsilon = \dfrac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} = \dfrac{-9 \cdot 10^{-11}}{2\pi \cdot 1 \cdot 8{,}8542 \cdot 10^{-12}} = -1{,}6776 \ N/C$

Consideremos dos cortezas cilíndricas concéntricas infinitamente largas. La corteza interior tiene un radio R_1 y posee una densidad de carga superficial uniforme σ_1, mientras que la exterior tiene un radio R_2 y una densidad de carga superficial uniforme σ_2. Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en las regiones $r<R_1$, $R_1<r<R_2$ y $r>R_2$.

$R_1 \quad \sigma_1 = \dfrac{\partial Q_1}{\partial S_1}$

$R_2 \quad \sigma_2 = \dfrac{\partial Q_2}{\partial S_2}$

$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$r < R_1$

$$\phi = \int \vec{E}\, d\vec{S} = E \int dS \cos 0 = E\, 2\pi r h$$

$$\sigma_1 = \frac{\partial Q_1}{\partial S} \rightarrow \partial Q_1 = \sigma_1\, \partial S \longrightarrow Q_{enc_1} = \sigma \int \partial S = \sigma_1 2\pi R_1 h$$

Consideremos dos cortezas cilíndricas concéntricas infinitamente largas. La corteza interior tiene un radio R_1 y posee una densidad de carga superficial uniforme σ_1, mientras que la exterior tiene un radio R_2 y una densidad de carga superficial uniforme σ_2. Utilizar la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en las regiones $r<R_1$, $R_1<r<R_2$ y $r>R_2$.

$R_1 \quad \sigma_1$

$R_2 \quad \sigma_2$

$$\left.\begin{array}{l} \phi = \int E\,dS = E\,3\pi r^2 \\ \phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \end{array}\right\} \quad E = \frac{Q}{3\pi r^2 \varepsilon_0}$$

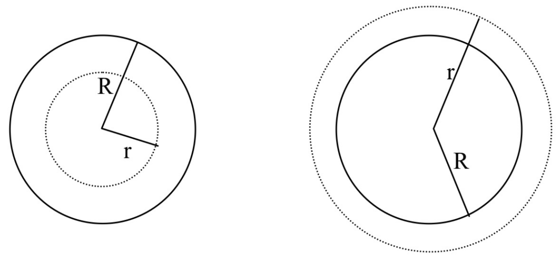
Una sola carga puntual q = +2 μC está en el origen. Una superficie esférica de 3,0m de radio tiene su centro en el eje x en el punto x = 5 m. ¿Cuál es el flujo neto del campo eléctrico debido a la carga puntual que atraviesa la superficie esférica?

$q = 2 \cdot 10^{-6} C$

$r = 3m \quad (5,0)$

Una sola carga puntual q = +2 μC está en el origen. Una superficie esférica de 3,0m de radio tiene su centro en el eje x en el punto x = 5 m. ¿Cuál es el flujo neto del campo eléctrico debido a la carga puntual que atraviesa la superficie esférica?

Considere un cascarón esférico delgado de radio 14 cm con una carga total de 32 micro culombios distribuida uniformemente en su superficie. Encuentre el campo eléctrico para las siguientes distancias desde el centro de la distribución de carga: a) r=10cm y b) r=20cm



$R = 0{,}14\,m$

$\sigma = 3{,}2 \cdot 10^{-5}\,C$

a) $r = 0{,}1\,m$

$R > r$

$Q_{enc} = 0 \rightarrow \Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \int E\,dS = E\,4\pi r^2 = 0$

b) $r = 0{,}2\,m$

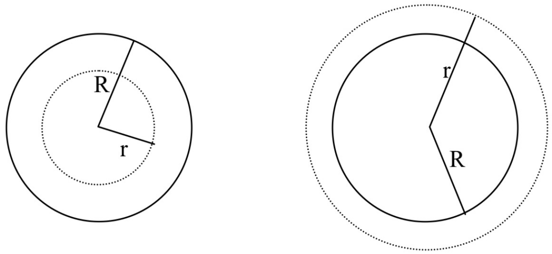
$r > R$

$Q_{enc} = 3{,}2 \cdot 10^{-5} \longrightarrow \Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \int E\,dS = E\,4\pi r^2 = 0$

$\sigma = \frac{dQ}{dS} \rightarrow Q_{enc} = \int \sigma\,dS = \sigma\,4\pi R^2$

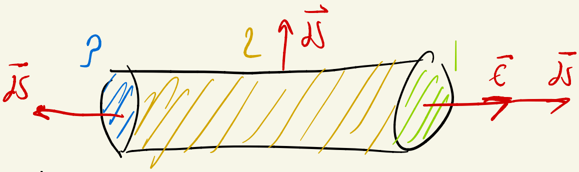
$E\,4\pi r^2 = \frac{\sigma\,4\pi R^2}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$

Considere un cascarón esférico delgado de radio 14 cm con una carga total de 32 micro culombios distribuida uniformemente en su superficie. Encuentre el campo eléctrico para las siguientes distancias desde el centro de la distribución de carga: a) r=10cm y b) r=20cm



El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada de forma cilíndrica es de $8.60 \cdot 10^4$ Nm^2/C. ¿Cuál es la carga neta dentro del cilindro?

$\phi = 8{,}6 \cdot 10^4 \; Nm^2/C$

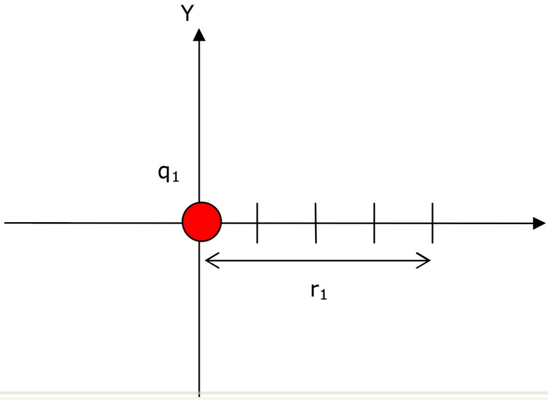


$$\phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow Q_{enc} = \phi \, \varepsilon_0 = 8{,}6 \cdot 10^4 \; \varepsilon_0 \; N/C$$

El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada de forma cilíndrica es de $8.60 \cdot 10^4$ Nm^2/C. ¿Cuál es la carga neta dentro del cilindro?

Una carga positiva de valor $2\mu C$ está en el origen.

a) ¿Cuál es el potencial eléctrico V en un punto a 4m del origen respecto al valor V=0 en el infinito?



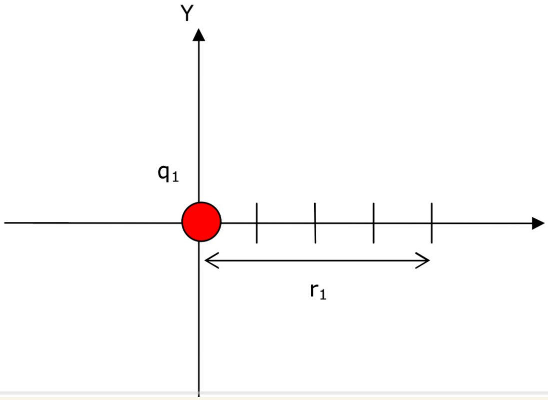
$q = 2 \cdot 10^{-6}$ C

$r = 4$m

$$V = \frac{Kq}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2\cdot 10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0 4}$$

Una carga positiva de valor $2\mu C$ está en el origen.

a) ¿Cuál es el potencial eléctrico V en un punto a 4m del origen respecto al valor V=0 en el infinito?



Un campo eléctrico uniforme de valor 2kN/C está en la dirección x. Se deja en libertad una carga puntual Q = 3μC inicialmente en reposo en el origen.

a) ¿Cuál es la diferencia de potencial V (4 m) – V(0)?

b) ¿Cuál es la variación de energía potencial de la carga desde x = 0 m hasta x = 4 m?

c) ¿Cuál es la energía cinética de la carga cuando está en x = 4 m?

Calcular el potencial V(x) si se toma como

d) Cero para x = 0 m   e)4kV para x = 0   f) cero para x =1 m

$\vec{E} = 2000\ N/C\ \hat{i}$

$Q = 3 \cdot 10^{-6}\ C$

a) $\Delta V_{4-0} = V_4 - V_0 = -\int_{r_1}^{r_2} E\, dl = -E \int_{r_1}^{r_2} dl = -E(r_2 - r_1) = -E r_2$

$= -2000 \cdot 4 = 8000\ N/C$

b) $\Delta U = U_B - U_A = -Q \int E\, dl = -QE \int dl = -QE r_2 =$

$= -3 \cdot 10^{-6} \cdot 2000 \cdot 4 \simeq -2{,}4 \cdot 10^{-2}\ J$

c) $E_{m_0} = E_{m_1}$

$E_{c_0} + E_{p_0} = E_{c_1} + E_{p_1} \rightarrow E_{c_1} = \cancel{E_{c_0}} + \overset{0}{\cancel{E_{p_0}}} - E_{p_1}$

$E_{c_0} = -E_{p_1} = 2{,}4 \cdot 10^{-2}\ J$

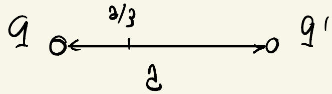
Un campo eléctrico uniforme de valor 2kN/C está en la dirección x. Se deja en libertad una carga puntual Q = 3μC inicialmente en reposo en el origen.

a) **¿Cuál es la diferencia de potencial V (4 m) – V(0)?**
b) **¿Cuál es la variación de energía potencial de la carga desde x = 0 m hasta x = 4 m?**
c) **¿Cuál es la energía cinética de la carga cuando está en x = 4 m?**

Calcular el potencial V(x) si se toma como

d) **Cero para x = 0 m** e) **4kV para x = 0** f) **cero para x =1 m**

Dos cargas puntuales q y q' están separadas por una distancia "a". En un punto a la distancia a/3 de q y a lo largo de la línea que une las dos cargas, el potencial es cero. Determinar la relación q/q'.



$V = 0 \; (x = a/3)$

$$V_{a/3} = V_q + V_{q'} = k\frac{q}{a/3} - k\frac{q'}{2a/3} = 0$$

$$k\frac{q}{a/3} = k\frac{q'}{2a/3} \rightarrow 2q = q'$$

Dos cargas puntuales q y q’ están separadas por una distancia “a”. En un punto a la distancia a/3 de q y a lo largo de la línea que une las dos cargas, el potencial es cero. Determinar la relación q/q’.

Una carga de $+3.00\mu C$ **está en el origen y otra de** $-3.00\mu C$ **está en el eje** x **en** $x = 6.00m$**.**

a) Hallar el potencial en el eje x **en el punto** $x = 3.00m$**.**

b) Hallar el campo eléctrico en el eje x **en el punto** $x = 3.00m$**.**

$3 \cdot 10^{-6} C \quad (0,0)$

$-3 \cdot 10^{-6} C \quad (6,0)$

a) $$V_3 = V_0 + V_6 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_0}{r_0^2} u_r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_6}{r_6^2} u_r$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q_0}{r_0} - \frac{q_6}{r_6} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 0 = 0V$$

b) $E_3 =$

Una carga de $+3.00\mu C$ está en el origen y otra de $-3.00\mu C$ está en el eje x en $x = 6.00m$.

a) Hallar el potencial en el eje x en el punto $x = 3.00m$.

b) Hallar el campo eléctrico en el eje x en el punto $x = 3.00m$.