MATEMÁTICA DISCRETA

Variaciones, Permutaciones y Combinaciones (Parte I)

Problema: Dado un conjunto con n objetos, ¿cuántas colecciones de k objetos se pueden formar eligiéndolos entre los n objetos del conjunto?

La respuesta depende de dos factores:

- Si importa o no el *orden* en que se coleccionan los k objetos.
- Si hay o no elementos repetidos en la colección de los k objetos.

Las posibles respuestas dan lugar a cuatro tipos de colecciones:

- *Variaciones* y *variaciones con repetición*.
- *Combinaciones* y *combinaciones con repetición*.

Definición

Sea X un conjunto formado por n objetos distintos y $r \leq n$ un número natural. Una r-permutación (o *variación de n elementos tomados de r en r*) de X es una lista ordenada de r objetos distintos elegidos entre los n objetos de X.

Observación: Dos r-permutaciones son distintas si difieren en alguno de sus elementos o bien, si teniendo los mismos elementos, difieren en el orden en que están colocados.

Ejemplo: Si $X = \{a, b, c, d\}$, entonces

- Ejemplos de 1-permutación son: a, b, c, d.
- Ejemplos de 2-permutación son: ab, bc, cd, dc.
- Ejemplos de 3-permutación son: abc, bca, bcd, dab.
- Ejemplos de 4-permutación son: $abcd$, $bcad$, $cbad$, $dcba$.

Ejemplo

Determina el número de 3-permutaciones del conjunto $X = \{a,b,c,d,e,f\}$.

- $n = |X| = 6$ y $r = 3$.
- Hay 6 formas diferentes de elegir el primer elemento de la muestra y, una vez elegido éste, hay 5 posibilidades para el segundo y, una vez elegidos los dos primeros elementos, hay 4 posibilidades para el tercero.
- El resultado es $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Teorema

Sea X un conjunto de cardinalidad n. El número de variaciones de n elementos tomados de r en r (número de r-permutaciones) del conjunto X es

$$V(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Notación factorial: $0! = 1$ y $n! = n\cdot(n-1)!$.

Ejemplo

En un concurso participan 15 personas y se asignan tres premios.

(a) ¿cuántas formas existen de escoger el primer, segundo y tercer premio si ninguna persona recibe más de un premio y ningún premio queda desierto?

(b) ¿cuántas formas existen de escoger el primer, segundo y tercer premio si ninguna persona recibe más de un premio y como máximo uno de los tres premios puede quedar desierto?

Solución:

(a) $V(15,3) = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2730$ formas.

(b) (Idea 1) Consideremos que *desierto* es uno de los participantes. Entonces serían $V(16,3) = 16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$ formas.

(b) (Idea 2) Si no hay un premio desierto $\rightarrow V(15,3)$ formas. Si hay un premio desierto $\rightarrow 3V(15,2)$ formas. Por el Principio de Adición: $V(15,3) + 3V(15,2) = 15 \cdot 14 \cdot 13 + 3 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$ formas.

Definición

Sea X un conjunto formado por n objetos distintos.

- Una *Permutación* es una n-permutación de X, es decir, es una lista ordenada de los n objetos distintos de X.
- *Una Permutación circular* es una permutación en la que importa la posición relativa de unos objetos con respecto a otros (se usa cuando los n objetos se han de ordenar en círculo, y se considera que dos permutaciones circulares son iguales cuando una puede obtenerse a partir de otra mediante una rotación).

Teorema

Sea X un conjunto formado por n objetos distintos.

- El número de permutaciones de X es $P_n = V(n,n) = n!$.
- El número de permutaciones circulares de X es $PC_n = (n-1)!$.

Ejemplo

En la sala de un cine solo hay seis lugares libres en la fila 3 y tres en la fila 10. Un grupo de 9 amigos llegan a la sala.

(a) ¿De cuántas formas se pueden sentar los amigos?

(b) Marc se quiere sentar en la fila 3. ¿De cuántas formas se pueden sentar ahora los nueve amigos?

Solución

(a) Se pueden sentar de $P_9 = 9! = 362880$ formas diferentes.

(b) Si fijamos una de las butacas de la fila 3 para Marc, entonces el resto de amigos se pueden sentar de $8!$ formas. Como Marc se puede sentar en seis butacas diferentes, el número total de formas de sentarse los amigos en las butacas es de $6 \cdot 8! = 120960$.

Ejemplo

¿Cuántas permutaciones del conjunto formado las letras A, B, C, D, E, F, G, H contienen exactamente la cadena ABC?

Solución:

Consideremos el bloque ABC como un objeto y las restantes letras como los otros 5 objetos. Entonces hay $6! = 720$ permutaciones que contienen exactamente la cadena ABC.

Ejemplo

¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar 10 personas en una mesa redonda de sillas indistinguibles?

Solución:

Se pueden sentar de $P_9 = 9!$ formas diferentes.

Definición

Sea X un conjunto formado por n objetos distintos. Una r-permutación con repetición (o *variación con repetición de n elementos tomados de r en r*) de X es una lista ordenada de r objetos no necesariamente distintos elegidos entre los n objetos de X.

Teorema

Sea X un conjunto de cardinalidad n. El número de variaciones con repetición de n elementos tomados de r en r (número de r-permutaciones con repetición) del conjunto X es

$$VR(n,r) = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{r} = n^r.$$

Ejemplo

El código ISBN (International standard book number) identifica unívocamente cada libro editado. Consta de nueve dígitos ordenados (hay un décimo dígito que no consideraremos porque se calcula en función de los nueve primeros), cada uno de los cuales pertenece al alfabeto $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

(a) ¿Cuántos libros distintos permite identificar el código ISBN?

(b) Los dos primeros dígitos del código identifican el idioma o grupo de idiomas en que está escrito el libro (por ejemplo, 84 corresponde al grupo de lenguas habladas en España). ¿Cuántos libros distintos escritos en alguna de las lenguas del estado español se pueden codificar?

(c) ¿Cuántos de los libros del apartado anterior tienen los cuatro dígitos en posiciones $3, 4, 5, 6$ todos distintos?

Solución:

(a) $VR(10,9) = 10^9$.

(b) Fijamos los dos primeros dígitos a "84". Entonces nos quedan siete posiciones libres. Por lo tanto, tenemos $VR(10,7) = 10^7$ posibilidades.

(c) Fijamos los dos primeros dígitos a "84". Para los siguientes cuatro dígitos, tenemos diez posibilidades para el primero, nueve para el segundo, ocho para el tercero y siete para el cuarto. Por lo que respecta a los tres dígitos restantes, no hay ninguna restricción. Aplicando el Principio de Multiplicación, tenemos un total de $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 10^3 = 5040000$ códigos.