CÁLCULO

Cálculo integral en varias variables

Cálculo integral en varias variables

Cálculo integral en varias variables

- Área de una región plana: una nueva perspectiva.

Cálculo integral en varias variables

- Área de una región plana: una nueva perspectiva.
- Integrales dobles.

Cálculo integral en varias variables

- Área de una región plana: una nueva perspectiva.
- Integrales dobles.
  - Volumen de una región sólida.

Área de una región plana: una nueva perspectiva

Área de una región plana: una nueva perspectiva

Sea R la región del plano acotada por las relaciones $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Entonces el área $A(R)$ de esta región es

$$A(R) = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\, dx.$$

Área de una región plana: una nueva perspectiva

Sea R la región del plano acotada por las relaciones $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Entonces el área $A(R)$ de esta región es

$$A(R) = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\, dx.$$

Por los Teoremas Fundamentales del Cálculo se obtiene que:

$$g_2(x) - g_1(x) = y\Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy.$$

Área de una región plana: una nueva perspectiva

Sea R la región del plano acotada por las relaciones $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$. Entonces el área $A(R)$ de esta región es

$$A(R) = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\, dx.$$

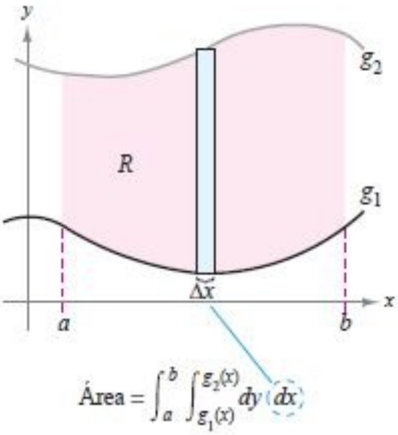
Por los Teoremas Fundamentales del Cálculo se obtiene que:

$$g_2(x) - g_1(x) = y\Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy.$$

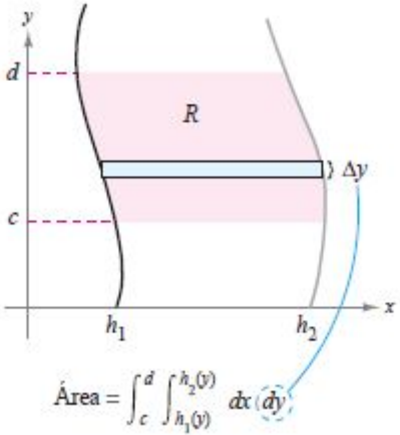
Por tanto, se deduce que:

$$A(R) = \int_a^b (g_2(x) - g_1(x))\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dydx.$$

$$A(R)=\int_a^b (g_2(x)-g_1(x))\,dx=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dydx.$$



$$A(R) = \int_c^d (h_2(y) - h_1(y))\, dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dxdy.$$



Área de una región plana

1) Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces

$$A(R) = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dydx.$$

2) Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces

$$A(R) = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dxdy.$$

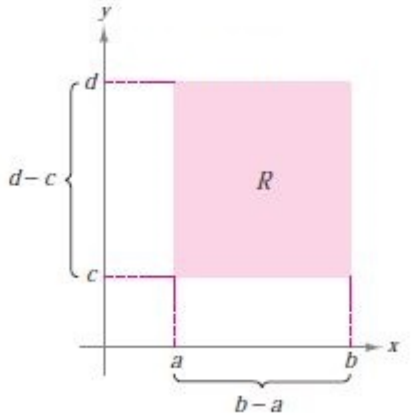
Ejemplo: Calcula el área del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

Ejemplo: Calcula el área del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

Solución:

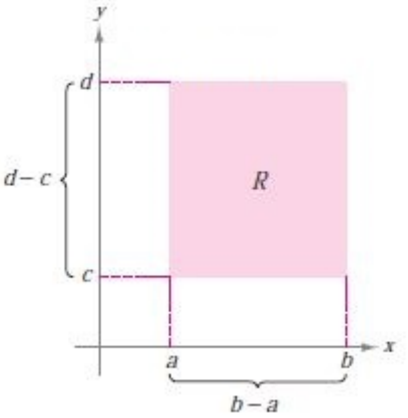
Ejemplo: Calcula el área del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

Solución:



Ejemplo: Calcula el área del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$.

Solución:



$$A(R) = \int_a^b \int_c^d dydx = \int_a^b y\Big|_c^d dx$$

$$= \int_a^b (d-c)dx = (d-c)x\Big|_a^b$$

$$= (d-c)(b-a).$$

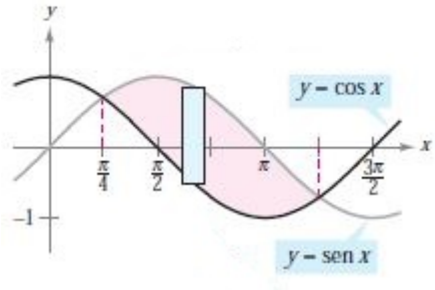
Ejemplo: Calcula el área de la región acotada por las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ entre $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

Ejemplo: Calcula el área de la región acotada por las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ entre $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

Solución:

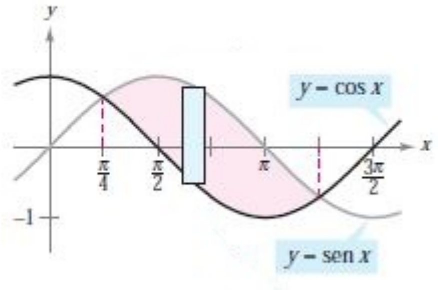
Ejemplo: Calcula el área de la región acotada por las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ entre $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

Solución:



Ejemplo: Calcula el área de la región acotada por las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$ entre $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

Solución:



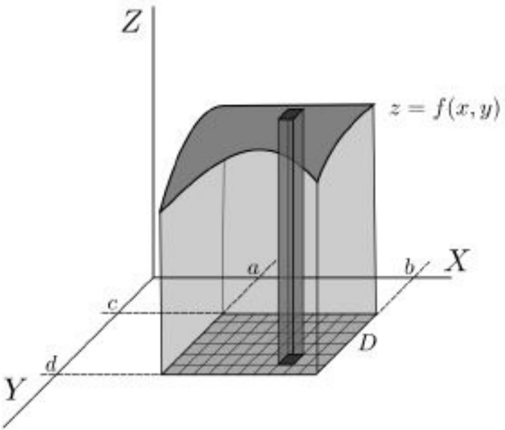
$$A(R) = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{\cos x}^{\sin x} dydx$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} y\Big|_{\cos x}^{\sin x} dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)dx$$

$$= (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4}$$

$$= 2\sqrt{2}.$$



Sea f una función continua, positiva y definida en una región R del plano XY. ¿Cómo obtener el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie dada por $z = f(x, y)$ y el plano XY?

Definición (Integral doble)

Si f está definida en una región cerrada y acotada $R \subset \mathbb{R}^2$, entonces la **integral doble de** f **sobre** R está dada por:

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

siempre que el límite exista. Si existe el límite, entonces f es integrable sobre R.

Definición (Integral doble)

Si f está definida en una región cerrada y acotada $R \subset \mathbb{R}^2$, entonces la **integral doble de** f **sobre** R está dada por:

$$\iint_R f(x, y)dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

siempre que el límite exista. Si existe el límite, entonces f es integrable sobre R.

Volumen de una región sólida

Si f es integrable sobre una región plana R y $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$, entonces el volumen de la región sólida que se encuentra sobre R· y bajo la gráfica de f se define como

$$V = \iint_R f(x, y)dA.$$

Propiedades de las integrales dobles

Sean f y g funciones continuas en una región cerrada y acotada R del plano, y sea c una constante.

1. $\displaystyle\iint_R c \cdot f(x, y)dA = c \iint_R f(x, y)dA.$
2. $\displaystyle\iint_R (f(x, y) \pm g(x, y))dA = \iint_R f(x, y)dA \pm \iint_R g(x, y)dA.$
3. $\displaystyle\iint_R f(x, y)dA \geq 0, \qquad \text{si } f(x, y) \geq 0.$
4. $\displaystyle\iint_R f(x, y)dA \geq \iint_R g(x, y)dA, \qquad \text{si } f(x, y) \geq g(x, y).$
5. $\displaystyle\iint_R f(x, y)dA = \iint_{R_1} f(x, y)dA + \iint_{R_2} f(x, y)dA,$ donde $R = R_1 \cup R_2$ y $R_1 \cap R_2 = \emptyset$.

Teorema de Fubini

Sea f unas función continua en una región plana R.

1) Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx.$$

2) Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy.$$

Ejemplo: Determina el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie $z = x^2 y^5$ y el dominio rectangular $R = [1, 2] \times [0, 1]$.

Ejemplo: Determina el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie $z = x^2y^5$ y el dominio rectangular $R = [1, 2] \times [0, 1]$.

Solución:

Ejemplo: Determina el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie $z = x^2y^5$ y el dominio rectangular $R = [1, 2] \times [0, 1]$.

Solución:

$$V = \iint_R x^2y^5 dA$$

Ejemplo: Determina el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie $z = x^2y^5$ y el dominio rectangular $R = [1,2] \times [0,1]$.

Solución:

$$V = \iint_R x^2y^5 dA = \int_1^2 \int_0^1 x^2y^5 dydx$$

Ejemplo: Determina el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie $z = x^2y^5$ y el dominio rectangular $R = [1,2] \times [0,1]$.

Solución:

$$V = \iint_R x^2y^5 dA = \int_1^2 \int_0^1 x^2y^5 dydx = \int_1^2 \left(\frac{x^2y^6}{6}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx$$

Ejemplo: Determina el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie $z = x^2y^5$ y el dominio rectangular $R = [1,2] \times [0,1]$.

Solución:

$$V = \iint_R x^2y^5 dA = \int_1^2 \int_0^1 x^2y^5 dydx = \int_1^2 \left(\frac{x^2y^6}{6} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2}{6} dx$$

Ejemplo: Determina el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie $z = x^2y^5$ y el dominio rectangular $R = [1,2] \times [0,1]$.

Solución:

$$V = \iint_R x^2y^5 dA = \int_1^2 \int_0^1 x^2y^5 dydx = \int_1^2 \left(\frac{x^2y^6}{6} \right) \Big|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2}{6} dx = \frac{x^3}{18} \Big|_1^2$$

Ejemplo: Determina el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie $z = x^2y^5$ y el dominio rectangular $R = [1,2] \times [0,1]$.

Solución:

$$V = \iint_R x^2y^5 dA = \int_1^2 \int_0^1 x^2y^5 dydx = \int_1^2 \left(\frac{x^2y^6}{6}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{x^2}{6} dx = \frac{x^3}{18}\Big|_1^2 = \frac{7}{18}.$$

Ejemplo: Sea D la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcula el área de la región D y la integral doble $\iint_D xy dA$.

Ejemplo: Sea D la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcula el área de la región D y la integral doble $\iint_D xy dA$.

Solución:

Ejemplo: Sea D la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcula el área de la región D y la integral doble $\iint_D xydA$.

Solución:

Se calculan los puntos de corte: $x^3 = \sqrt{x} \Longleftrightarrow x \in \{0, 1\}$.

Ejemplo: Sea D la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcula el área de la región D y la integral doble $\iint_D xydA$.

Solución:

Se calculan los puntos de corte: $x^3 = \sqrt{x} \iff x \in \{0, 1\}$.

Entonces, el área de D sería:

$$A(D) = \iint_D dA$$

Ejemplo: Sea D la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcula el área de la región D y la integral doble $\iint_D xy dA$.

Solución:

Se calculan los puntos de corte: $x^3 = \sqrt{x} \iff x \in \{0, 1\}$.

Entonces, el área de D sería:

$$A(D) = \iint_D dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dydx$$

Ejemplo: Sea D la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcula el área de la región D y la integral doble $\iint_D xydA$.

Solución:

Se calculan los puntos de corte: $x^3 = \sqrt{x} \iff x \in \{0, 1\}$.

Entonces, el área de D sería:

$$A(D) = \iint_D dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx$$

Ejemplo: Sea D la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcula el área de la región D y la integral doble $\iint_D xy dA$.

Solución:

Se calculan los puntos de corte: $x^3 = \sqrt{x} \iff x \in \{0, 1\}$.

Entonces, el área de D sería:

$$A(D) = \iint_D dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{5}{12}.$$

Ejemplo: Sea D la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcula el área de la región D y la integral doble $\displaystyle\iint_D xydA$.

Solución:

Se calculan los puntos de corte: $x^3 = \sqrt{x} \iff x \in \{0, 1\}$.

Entonces, el área de D sería:

$$A(D) = \iint_D dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{5}{12}.$$

Por otra parte,

$$\iint_D xydA$$

Ejemplo: Sea D la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcula el área de la región D y la integral doble $\iint_D xy dA$.

Solución:

Se calculan los puntos de corte: $x^3 = \sqrt{x} \iff x \in \{0, 1\}$.

Entonces, el área de D sería:

$$A(D) = \iint_D dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{5}{12}.$$

Por otra parte,

$$\iint_D xydA = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} xydydx$$

Ejemplo: Sea D la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcula el área de la región D y la integral doble $\iint_D xy dA$.

Solución:

Se calculan los puntos de corte: $x^3 = \sqrt{x} \iff x \in \{0, 1\}$.

Entonces, el área de D sería:

$$A(D) = \iint_D dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{5}{12}.$$

Por otra parte,

$$\iint_D xydA = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} xydydx = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} \right) \Big|_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} dx$$

Ejemplo: Sea D la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcula el área de la región D y la integral doble $\iint_D xydA$.

Solución:

Se calculan los puntos de corte: $x^3 = \sqrt{x} \iff x \in \{0, 1\}$.

Entonces, el área de D sería:

$$A(D) = \iint_D dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{5}{12}.$$

Por otra parte,

$$\iint_D xydA = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} xydydx = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2 - x^7}{2} dx$$

Ejemplo: Sea D la región limitada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt{x}$. Calcula el área de la región D y la integral doble $\displaystyle\iint_D xy dA$.

Solución:

Se calculan los puntos de corte: $x^3 = \sqrt{x} \iff x \in \{0, 1\}$.

Entonces, el área de D sería:

$$A(D) = \iint_D dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx = \frac{5}{12}.$$

Por otra parte,

$$\iint_D xydA = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} xydydx = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2 - x^7}{2} dx = \frac{5}{48}.$$