Examen Abel enero 2023-2024

1. a) Teorema del Valor medio

Dado f(x) que cumple:

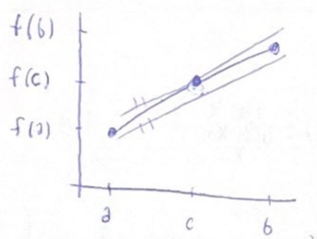
- f(x) continuo en [a,b]

- Derivable en (a,b)

Existe un punto c ∈ (a,b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Siendo f'(c) la pendiente de la recta que pasa por (a,f(a)), (b,f(b)) y el punto (c, f(c)) paralelo a la tangente



b) Sea $f(x) = x^{2/3}$ en [-8, 27]. Demuestra por que no se cumple el teorema del Valor Medio

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

La función es continua en [-8,27] pero no es derivable en x=0 por lo que no cumple los requisitos del Teorema del Valor Medio

2. $\int \frac{1}{x^3-x^2+9x-9}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$

$= \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+9}\,dx$

$A(x^2+9) + (Bx+C)(x-1) = 1$

$x=1$; $10A = 1$; $A = 1/10$

$x=0$; $9A - C = 1$; $C = 9A - 1 = -1/10$

$x=2$; $13A + 2B + C = 1$; $13/10 + 2B - 1/10 = 1$; $B = -1/10$

$= \frac{1}{10}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{10}\int \frac{x}{x^2+9} - \frac{1}{10}\int \frac{dx}{x^2+9}$

$= \frac{1}{10}\ln|x-1| - \frac{1}{20}\ln|x^2+9| - \frac{1}{30}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)$ $\quad -\frac{1}{10}\,\text{arctg}\,(x+9)$

3. $F(x) = \int_0^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\,dt$ definida en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

a) Determina los puntos críticos $F(x)$

Debido al Teorema Fundamental del Cálculo $F'(x) = \frac{\text{sen}\, x}{x}$

Por lo que los puntos críticos serán:

$\text{sen}\, x = 0$

Que se cumple solo en $x = n\pi$, en este caso $x = \pi$

b) Naturaleza de los puntos críticos

Calculamos $F''(x)$ para saber si es un máximo o un mínimo:

$F''(x) = \frac{x\cos x - \text{sen}\, x}{x^2}$

$F''(\pi) = \frac{-\pi - 0}{\pi^2} < 0$ por lo que es un máximo

Habrá un máximo en $x = \pi$

4. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy} & \text{si } x,y \neq 0,0 \\ x+y & \text{si } x,y = 0,0 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad en $(0,0)$

$f(0,0) = x+y = 0$

$$\lim_{x,y \to 0,0} \frac{x^2+y^2}{xy} = \text{Pasamos a coordenadas polares } \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\mathrm{sen}^2\theta}{r^2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta}{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

Como el límite depende del ángulo θ no existe

$f(x,y)$ no e continua en $(0,0)$

b) Derivadas parciales en $(0,0)$

$$\frac{d}{dx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{x_0+h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{0+h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h+0}{h} = 1$$

$$\frac{d}{dy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0) - f(x_0, y_0+h)}{y_0+h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0) - f(0,h)}{0+h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0+h}{h} = 1$$

Existen derivadas parciales ya que $\frac{d}{dx} = \frac{d}{dy}$

c) Diferenciabilidad en $(0,0)$

Para que $f(0,0)$ sea diferenciable:

- Debe de ser continua
- Deben de existir derivadas parciales
- $$\lim_{x,y\to 0,0} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

Al no ser continua no puede ser diferenciable

5. $\iint_D x^2+4y^2 \, dA$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, \; x \geq y^2\}$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = y^2 \; ; \; y = \sqrt{x} \end{array}\right\} \; x^2 = \sqrt{x} \; ; \; x = x^4 \; ; \; x^4 - x = x(x^3-1) = 0 \; \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$

$0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 + 4y^2 \, dy\,dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{4y^3}{3}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 -x^4 - \frac{4}{3}x^6 + \sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} \, dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{21}x^7 + \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + \frac{8}{15}\sqrt{x^5}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{5} - \frac{4}{21} + \frac{2}{7} + \frac{8}{15} = \frac{-21-20+30+56}{105} = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$$