Matemática Discreta - Grado en Ing. Informática
Relación de Ejercicios 2 (Teoría de Números)

1. Demuestra que todo número primo de la forma $3k + 1$ es de la forma $6t + 1$.

2. Demuestra que todo número primo mayor o igual a 5 es de la forma $6k + 1$ ó $6k - 1$.

3. Demuestra que 3, 5, 7 son los únicos primos triples. (Los únicos tales que p, $p + 2$ y $p + 4$ son todos primos).

4. Demuestra que existen infinitos números primos.

5. Encuentra una solución particular de la ecuación diofántica $2378x + 1769y = 2059$.

6. Resuelve, en caso de ser posible, las siguientes ecuaciones diofánticas:
   (a) $83x + 50y = 5$.
   (b) $176x - 583y = 44$.
   (c) $38x + 34y = 6$.
   (d) $285x + 455y = 6$.

7. En Correos solo tienen sellos de 14 y 21 céntimos. ¿De cuántas formas se puede franquear un paquete por importe de $7,77$ euros?

1. Demuestra que todo número primo de la forma $3k+1$ es de la forma $6t+1$.

Supongamos que hay un número primo p tal que $p = 3t+1$ pero no de forma $6t+1$, entonces podrá ser de la forma:

$p = 6t$ divisible entre 2
$p = 6t+2$ divisible entre 2
$p = 6t+3$ divisible entre 3
$p = 6t+4$ divisible entre 2
$p = 6t+5$ no es divisible entre 3 ni dos pero no cumple la forma $3K+1$

Dado a que ninguno del resto de casos cumple la suposición, $3K+1$ debe de ser de la forma $6t+1$

Congruencia modular:
Todo número primo $p = 3K+1$ se puede expresar $p \equiv 1 \pmod 3$
$p = 6t+1$ puede ser:

$p = 0 \pmod 6$ par
$p = 1 \pmod 6$ ✓
$p = 2 \pmod 6$ par
$p = 3 \pmod 6$ divisible a 3
$p = 4 \pmod 6$ par
$p \equiv 5 \pmod 6$ también es $p \equiv 2 \pmod 3$

Solo cumple para $p = 1$, es decir $p = 3K+1 = 6t+1$

Sea primo $p = 3K+1$
Si K es impar, entonces $K = 2t+1$, lo que implica
$p = 3k+1 = 3(2t+1)+1 = 6t+4$, contradicción pq p es primo
Por lo que $K = 2t$
$p = 3k+1 = 6t+1$

2. Demuestra que todo número primo mayor o igual a 5 es de la forma $6k + 1$ ó $6k - 1$.

Si un número primo no fuese de forma $6K \pm 1$ debería ser de forma $6K \pm 2$, $6K \pm 3$, $6K \pm 4$, $6K \pm 5$, $6K \pm 6$ donde verificamos que para cualquier número entero:

$6K$ es divisible entre 6
$6K + 2$ es divisible entre 2
$6K + 3$ es divisible entre 3
$6K + 4$ es divisible entre 2

Demostrando que la suposición es cierta

3. Demuestra que 3, 5, 7 son los únicos primos triples. (Los únicos tales que p, $p+2$ y $p+4$ son todos primos).

Supongamos que existen 3 primos de la forma p, $p+2$, $p+4$ diferentes a 3, 5 y 7

Como p es primo, p es de la forma $p = 3K+1$ ó $3K+2$

Si $p = 3K+1$ entonces, $p+2 = 3K+3$. No, divisible entre 3

Si $p = 3K+2$ entonces, $p+4 = 3K+6$. No, divisible entre 3

Por tanto los únicos primos de la forma p, $p+2$ y $p+4$ son 3, 5 y 7

4. Demuestra que existen infinitos números primos.

Supongamos que hay un número finito de primos $p_1, p_2, \dots, p_n$ $(p_1 > p_n)$

$N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$

$N > p_n$, lo que implica que N no es primo

Observa que N no es divisible por ningún p_i $(i \in \{1, \dots, n\})$ lo cual es una contradicción

Por lo que existen infinitos primos

5. Encuentra una solución particular de la ecuación diofántica $2378x + 1769y = 2059$.

Una ecuación diofántica admite solución si y solo si $mcd(2378, 1769) \mid 2059$

$mcd(2378, 1769)$:

$2378 = 1(1769) + 609 \qquad 0 < 609 < 1769$

$1769 = 2(609) + 551 \qquad 0 < 551 < 609$

$609 = 1(551) + 58 \qquad 0 < 58 < 551$

$551 = 9(58) + 29 \qquad 0 < 29 < 58$

$58 = 2(29) + 0$

$mcd(2378, 1769) = 29$

Como 29 divide a 2059 se cumple que $mcd(2378, 1769) \mid 2059$

$$
\begin{aligned}
551 = 9(58) + 29 \ ; \quad 29 &= 551 - 9(58) \\
&= 551 - 9(609 - 1(551)) \\
&= 10(551) - 9(609) \\
&= 10(1769 - 2(609)) - 9(609) \\
&= \underbrace{10}_{x_0}(1769) - \underbrace{29}_{y_0}(609)
\end{aligned}
$$

$10(2378) - 29(1769) = -27521 \ ; \quad 2059/-27521$

$x = -\frac{2059}{27521} x_0 = -\frac{2059}{27521}(10) = -\frac{20590}{27521}$

$y = -\frac{2059}{27521} y_0 = -\frac{2059}{27521}(-29) = \frac{2059}{949}$

$2378\left(\frac{-20590}{27521}\right) + 1769\left(\frac{2059}{949}\right) = 2059$

6. Resuelve, en caso de ser posible, las siguientes ecuaciones diofánticas:

(a) $83x + 50y = 5$.

(b) $176x - 583y = 44$.

(c) $38x + 34y = 6$.

(d) $285x + 455y = 6$.

a) $mcd(83,50) =$

$83 = 1(50) + 33 \qquad 0 < 33 < 50$

$50 = 1(33) + 17 \qquad 0 < 17 < 33$

$33 = 1(17) + 16 \qquad 0 < 16 < 17$

$17 = 1(16) + 1 \qquad 0 < 1 < 16$

$16 = 16(1) + 0$

$mcd(83,50) = 1$

Como $1|5$ si tiene soluciones

$1 = 17 - 1(16)$

$= 17 - 1(33 - 17)$

$= 2(17) - 1(33)$

$= 2(50 - 33) - 1(33)$

$= 2(50) - 3(33)$

$= 2(50) - 3(83 - 1(50))$

$= \underbrace{-3}_{x_0}(83) + \underbrace{5}_{y_0}(50)$

$-3(83) + 5(50) = 1$; $5/1 = 5$

$x = 5x_0 + \frac{bk}{mcd(83,50)} = 5(-3) + 50k = -15 + 50k$

$y = 5y_0 - \frac{ak}{mcd(83,50)} = 5(5) - 83k = 25 - 83k$

b) $176x - 583y = 44$

$mcd(176, 583) =$
$583 = 3(176) + 55$
$176 = 3(55) + 11$
$55 = 5(11) + 0$
$mcd(176, 583) = 11$

$11 \mid 44$ si tiene soluciones

$11 = 176 - 3(55)$
$= 176 - 3(583 - 3(176))$
$= -8(176) - 3(583)$

$-8(176) - 3(-583) = 341$; $44/341$

$x = \frac{44}{341}(-8) + 53K = -\frac{352}{341} + 53K$
$y = \frac{44}{341}(-3) + 16K = -\frac{132}{341} + 16K$

c) $38x + 34y = 6$

$mcd(38, 34) =$
$38 = 1(34) + 4$
$34 = 8(4) + 2$
$4 = 2(2) + 0$
$mcd(38, 34) = 2$

$2 \mid 6$ tiene solución

$2 = 34 - 8(4)$
$= 34 - 8(38 - 34)$
$= 9(34) - 8(38)$

$9(38) - 8(34) = 70$; $6/70$

$x = \frac{6}{70}(9) + 17K = \frac{27}{35} + 17K$
$y = \frac{6}{70}(-8) + 19K = -\frac{24}{35} + 19K$

d) $285x + 455y = 6$

$\text{mcd}(285, 455) =$

$455 = 1(285) + 170$

$285 = 1(170) + 115$

$170 = 1(115) + 55$

$115 = 2(55) + 5$

$55 = 11(5)$

$\text{mcd}(285, 455) = 5$

$5 | 6$ no se cumple, no tiene solución

7. En Correos solo tienen sellos de 14 y 21 céntimos. ¿De cuántas formas se puede franquear un paquete por importe de 7,77 euros?

$14x + 21y = 777$

$\text{mcd}(14, 21) =$

$21 = 1(14) + 7$

$14 = 2(7) + 0$

$\text{mcd}(14, 21) = 7$

$7 \mid 777$ tiene solución

$7 = 1(21) - 1(14)$

$-1(14) + 1(21) = 7$; $777/7 = 111$

$$\left.\begin{array}{lll} x = -111 + 3k & 3k \leq 111 & = k \leq 37 \\ y = 111 - 2k & 2k \leq 111 & = k \leq 55{,}5 \approx 55 \end{array}\right\} \quad 37 \leq k \leq 55$$

(55 - 37 = 18. (Entre 0 y 18 hay 19 enteros) 19 soluciones