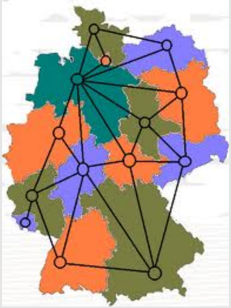
MATEMÁTICA DISCRETA

Coloración de vértices

Coloración de vértices

Supongamos que tenemos el siguiente mapa de países.



El problema de colorear las regiones de modo que dos países de frontera común tenga colores diferentes se puede trasladar a un problema de coloración de los vértices de un grafo de modo que vértices adyacentes tengan diferente color.

Definición

Una **vértice-coloración** de un grafo $G = (V, E)$ es una función $f : V \to \mathbb{N}$ con la propiedad de que $f(u) \neq f(v)$ siempre que $\{u, v\} \in E$. Sea $\mathcal{F}(G)$ el conjunto de vértice-coloraciones de G. El **número cromático** de G se define como

$$\chi(G) = \min_{f \in \mathcal{F}(G)} |Im(f)|,$$

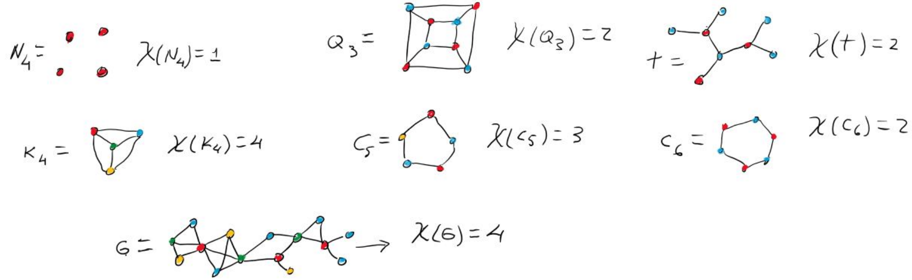
donde $Im(f)$ denota el conjunto imagen de f.

Ejemplo: Número cromático de algunas familias de grafos.

- Para todo grafo nulo, $\chi(G) = ?$
- Para todo grafo bipartito, no nulo, $\chi(G) = ?$
- Para todo n, $\chi(K_n) = ?$
- Para ciclos de orden par, $\chi(C_{2k}) = ?$ y para ciclos de orden impar, $\chi(C_{2k+1}) = ?$

Ejemplo: Número cromático de algunas familias de grafos.

- Para todo grafo nulo $\chi(G) = 1$
- Para todo grafo bipartito, no nulo, $\chi(G) = 2$.
- Para todo n, $\chi(K_n) = n$.
- Para ciclos de orden par $\chi(C_{2k}) = 2$ (son grafos bipartitos) y para ciclos de orden impar $\chi(C_{2k+1}) = 3$.



Definición

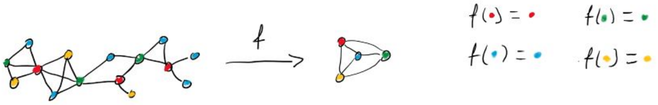
Sean G y H dos grafos. Una aplicación $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ es un **homomorfismo** si $f(x)$ y $f(y)$ son adyacentes en H siempre que x e y sean adyacentes en G.

Ejemplo

Si $G = (V_1 \cup V_2, E)$ es un grafo bipartito, entonces la aplicación $f : V_1 \cup V_2 \longrightarrow V(K_2)$ que envía a todos los vértices pertenecientes a V_i al vértice i es un homomorfismo de G en K_2.

Teorema

El número cromático de un grafo G es el menor entero r tal que existe un homomorfismo de G en K_r.



Ejercicio

Probar que la medida de todo grafo G es mayor o igual que $\frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2}$.

Solución

Por cada par de colores que componen una vértice-coloración de cardinal mínimo existe al menos una arista del grafo, por lo tanto,

$$m \geq \binom{\chi(G)}{2} = \frac{\chi(G)(\chi(G)-1)}{2}$$

Teorema

Para todo par de grafos G_1 y G_2,

$$\chi(G_1+G_2)=\chi(G_1)+\chi(G_2).$$

$K_3 + P_3 =$

$\chi(K_3+P_3) = \chi(K_3) + \chi(P_3) = 3+2$

Teorema de los 4 colores

Para todo grafo planar G se cumple $\chi(G) \leq 4$.

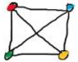
Algunos datos

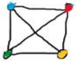
- 1852: Francis Guthrie planteó el problema.
- 1878: Arthur Cayley publicó el enunciado de la conjetura.
- 1879: Sir Alfred Bray Kempe publicó su demostración.
- 1890: Percy Heawood descubrió un error insalvable en la prueba dada por Kempe.
- 1976: Ken Appel y Wolfgang Haken demostraron el teorema con ayuda de un ordenador: 50 días de cálculo, diferenciando más de 1900 configuraciones distintas.
- 1996: Robertson, Sanders, Seymour y Thomas obtuvieron una demostración más corta.

Polinomio cromático

Ejercicio

Determina de cuántas formas diferentes se puede colorear K_4 con 4 colores de modo que vértices adyacentes tengan colores diferentes. ¿Y con x colores?

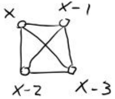




4 colores $\longrightarrow 4!$

6 colores $\longrightarrow \binom{6}{4}4! = V(6,4) = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3$

x colores $\longrightarrow \binom{x}{4}4! = V(x,4) = x(x-1)(x-2)(x-3)$



Definición

Dado un grafo G, denotaremos por $P_G(x)$ el número de vértice-coloraciones de G que usan a lo sumo x colores. A $P_G(x)$ se le conoce con el nombre de polinomio cromático de G.

Proposición

Para todo grafo G de orden n se cumple que $P_G(x)$ es un polinomio de grado n.

Observación

Para todo grafo G se cumple que $\chi(G) = \text{mín}\{x \in \mathbb{N} : \ P_G(x) \neq 0\}$.

Ejercicio

Determina el polinomio cromático de K_n.

Solución

Para todo grafo completo de orden n se cumple,

$$P_{K_n}(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

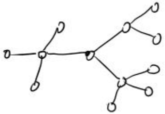
Ejercicio

Determina el polinomio cromático de todo árbol de orden n.

Solución

El polinomio cromático de todo árbol T de orden n es

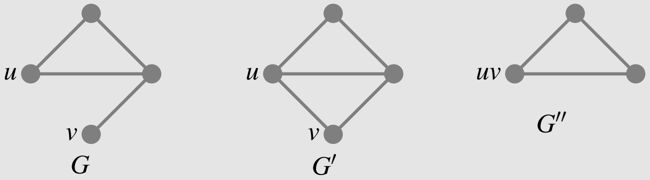
$$P_T(x) = x(x-1)^{n-1}.$$

$T =$  $\rightarrow$ $n=12$, $P_T(x) = x(x-1)^{11}$

Notación

Sea $G \ncong K_n$. Sean u y v dos vértices no adyacentes de G. Sea G' el grafo obtenido añadiendo a G la arista $\{u,v\}$, y sea G'' el grafo simple obtenido identificando los vértices u y v.

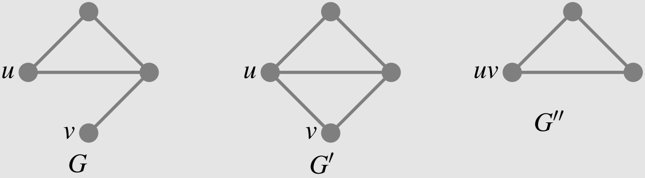
Ejemplo



Proposición

Para todo grafo $G \ncong K_n$ se cumple $P_G(x) = P_{G'}(x) + P_{G''}(x)$.

Ejemplo de aplicación del algoritmo

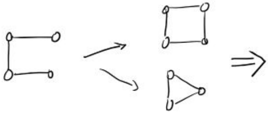


En este caso tenemos $P_G(x) = P_{G'}(x) + P_{G''}(x)$, además, $P_{G'}(x) = P_{K_4}(x) + P_{K_3}(x)$. Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
P_G(x) &= P_{G'}(x) + P_{G''}(x) \\
&= (P_{K_4}(x) + P_{K_3}(x)) + P_{K_3}(x) \\
&= x(x-1)(x-2)(x-3) + 2x(x-1)(x-2) \\
&= x(x-1)^2(x-2).
\end{aligned}
$$

Ejercicio

Determina de cuántas formas diferentes se puede colorear los vértices del ciclo C_4, con 5 colores como máximo, de modo que vértices adyacentes tengan colores diferentes.



$$P_{P_4}(x) = P_{C_4}(x) + P_{K_3}(x)$$

$$P_{C_4}(x) = P_{P_4}(x) - P_{K_3}(x) = x(x-1)^3 - x(x-1)(x-2)$$

$$= x(x-1)[(x-1)^2 - (x-2)]$$

$$= x(x-1)(x^2 - 3x + 3)$$

$$P_{C_4}(5) = 5 \cdot 4 \cdot (25 - 15 + 3)$$

$$= 260$$

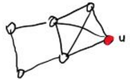
Proposición

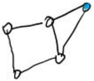
El polinomio cromático de todo ciclo de orden n es

$$P_{C_n}(x) = (x-1)^n + (-1)^n(x-1).$$

Definición

Definimos la vecindad de un vértice u de un grafo $G = (V, E)$ como $N(u) = \{v \in V : v \sim u\}$. Es decir, el grado de u es $\delta(u) = |N(u)|$.

$G =$ 

$G - \{u\} =$ 

$$P_{G-\{u\}}(x) = \underline{(x-2)}\, P_{C_4}(x)$$

$$P_G(x) = (\underline{x-3})\, P_{G-\{u\}}(x)$$
$$= x(x-1)(x-2)(x-3)(x^2-3x+3)$$

Proposición

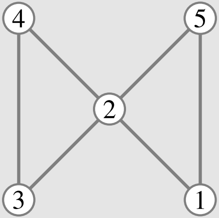
Si el subgrafo inducido por $N(u)$ es completo, entonces el polinomio cromático de G se calcula como

$$P_G(x) = (x - \delta(u)) \cdot P_{G-\{u\}}(x),$$

donde $G - \{u\}$ es el subgrafo de G que se obtiene eliminando el vértice u.

Ejercicio

Calcula el polinomio cromático del grafo G de la figura.



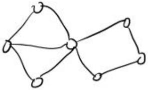
Solución

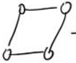
Partimos del grafo completo de vértices $\{1,2,5\}$, cuyo polinomio cromático ya conocemos: $P_{K_3}(x) = x(x-1)(x-2)$, luego consideramos el grafo G_1 que se obtiene al agregar el vértice 3. En este caso

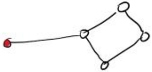
$$P_{G_1}(x) = P_{K_3}(x)(x-1) = x(x-1)^2(x-2).$$

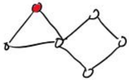
Y G se obtiene agregando el vértice 4: $P_G(x) = P_{G_1}(x)(x-2)$.

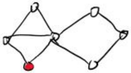
Ejemplo

$G=$  $P_G(x)=?$

 $\longrightarrow x(x-1)(x^2-3x+3)$

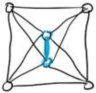
$G_1=$  $\longrightarrow (x-1)\,P_{C_4}(x) = x(x-1)^2(x^2-3x+3)$

$G_2=$  $\longrightarrow (x-2)\,P_{G_1}(x) = x(x-1)^2(x-2)(x^2-3x+3)$

$G_3=$  $\longrightarrow (x-2)\,P_{G_2}(x) = x(x-1)^2(x-2)^2(x^2-3x+3)$

Ejercicio

Determina el polinomio cromático de un grafo $G = K_2 + C_4$.

$G = K_2 + C_4 =$  $\longrightarrow x(x-1)P_{C_4}(x-2)$, $P_{C_4}(x) = x(x-1)(x^2-3x+3)$

$$P_G(x) = x(x-1)\left[(x-2)(x-3)\left((x-2)^2-3(x-2)+3\right)\right] = x(x-1)\left((x-2)(x-3)(x^2-7x+13)\right)$$

Proposición

Para todo entero positivo r y todo grafo G,

$$P_{K_r+G}(x) = P_{K_r}(x)P_G(x-r).$$