MATEMÁTICA DISCRETA

Introducción a la Lógica Matemática (Parte III)

Introducción a la Lógica Matemática (Parte III)

- Predicados y cuantificadores.

- Una proposición es una afirmación que es verdadera o falsa, pero no ambas.
- La lógica referente a proposiciones es incapaz de describir la mayoría de las afirmaciones en matemáticas e informática.
- $P(n)$: "n es un entero impar". $\rightarrow$ No es una proposición.
- Existen muchas afirmaciones que incluyen variables, por lo que debe de ampliarse el sistema de lógica para incluirlas.

Definición

Sea $P(x)$ una oración que incluye la variable x y sea D un conjunto. P se llama función proposicional o predicado (respecto a D) si para cada $x \in D$, se cumple que $P(x)$ es una proposición. Al conjunto D le llamaremos "dominio de discurso"(también llamado dominio de referencia) de P.

Ejemplo: Sea $P(n)$ la afirmación "n es un entero impar" y sea $D = \mathbb{Z}^+$.

- P es una función proposicional con dominio de discurso D.
- Para cada $n \in D$, se tiene que $P(n)$ es una proposición.
  - Si $n = 2k + 1$, entonces $P(n)$ es verdadera.
  - Si $n = 2k$, entonces $P(n)$ es falsa.

- En general, existen funciones proposicionales que incluyen más de una variable.
- Sea $Q(x, y)$ la afirmación "$x = y + 3$" y sea $D = \mathbb{R}$.
  - $Q(1, 2)$ es una proposición falsa.
  - $Q(3, 0)$ es una proposición verdadera.
- Sea $R(x, y, z)$ la afirmación "$x + y = z$" y sea $D = \mathbb{R}$.
  - $R(1, 2, 3)$ es una proposición verdadera.
  - $R(0, 0, 1)$ es una proposición falsa.

Definición

Sea P una función proposicional con dominio de discurso D. Llamaremos *afirmación cuantificada universalmente* o *cuantificación universal* de P, a la proposición:

$$\textit{para todo } x,\ P(x)$$

- La cuantificación universal de $P(x)$ se denota como "$\forall x\, P(x)$". El símbolo $\forall$ se llama cuantificador universal.
- La proposición $\forall x\, P(x)$ es verdadera si $P(x)$ es verdadera para todo $x \in D$.
- La proposición $\forall x\, P(x)$ es falsa si $P(x)$ es falsa para al menos un valor $x \in D$.

Ejemplos

- La proposición $\forall x\,(x^2 \geq 0)$, con el conjunto de números reales como dominio de discurso, es verdadera.
- La proposición $\forall x\,(x < 2)$, con el conjunto de números reales como dominio de discurso, es falsa.
- ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición $\forall x\, P(x)$, donde $P(x)$ es la función proposicional "$x^2 < 10$" y el dominio de discurso consiste en los enteros positivos menores o iguales que cuatro?

  R/ El dominio de discurso es $D = \{1, 2, 3, 4\}$. Observa que

  $$\forall x\, P(x) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4).$$

  Como la proposición $P(4)$ es falsa, entonces $\forall x\, P(x)$ es falsa.

Definición

Sea P una función proposicional con dominio de discurso D. Llamaremos *afirmación cuantificada existencialmente* o *cuantificación existencial* de P, a la proposición:

$$\textit{existe } x,\ P(x)$$

- La cuantificación existencial de $P(x)$ se denota como "$\exists x\, P(x)$". El símbolo $\exists$ se llama cuantificador existencial.
- La proposición $\exists x\, P(x)$ es verdadera si $P(x)$ es verdadera para al menos un valor $x \in D$.
- La proposición $\exists x\, P(x)$ es falsa si $P(x)$ es falsa para todos los valores $x \in D$.

Ejemplos

- La proposición $\exists x\,(x > 3)$, con el conjunto de números reales como dominio de discurso, <u>es verdadera</u>.
- La proposición $\exists x\,(x = x + 1)$, con el conjunto de números reales como dominio de discurso, <u>es falsa</u>.
- ¿Cuál es el valor de verdad de la proposición $\exists x\, P(x)$, donde $P(x)$ es la función proposicional "$x^2 > 10$" y el dominio de discurso consiste en los enteros positivos menores o iguales que cuatro?

  R/ El dominio de discurso es $D = \{1, 2, 3, 4\}$. Observa que

  $$\exists x\, P(x) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4).$$

  Como la proposición $P(4)$ es verdadera, entonces $\exists x\, P(x)$ es verdadera.

Leyes generalizadas de De Morgan para Lógica

Si P es una función proposicional, entonces

(a) $\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, \neg P(x)$.

(b) $\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x\, \neg P(x)$.

Proof (a). Primeramente supongamos que $\neg(\forall x\, P(x))$ es verdadera. Entonces la proposición $\forall x\, P(x)$ es falsa, lo que implica que existe un elemento x' en el dominio de discurso tal que $P(x')$ es falsa. Por tanto, $\neg P(x')$ es verdadera, lo cual conduce a que la proposición $\exists x\, \neg P(x)$ sea verdadera. De manera similar, se demuestra que si la proposición $\neg(\forall x\, P(x))$ es falsa, entonces la proposición $\exists x\, \neg P(x)$ es falsa. Por tanto, $\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, \neg P(x)$. ■

Proof (b). Ejercicio para la clase práctica.

Ejercicio

Niegue cada una de las siguientes proposiciones:

(a) $\forall x\,(x^2 > x)$ (b) $\exists x\,(x^2 = 2)$.

Solución:

(a) $\neg(\forall x\,(x^2 > x)) \equiv \exists x\,\neg(x^2 > x) \equiv \exists x\,(x^2 \leq x)$

(b) $\neg(\exists x\,(x^2 = 2)) \equiv \forall x\,\neg(x^2 = 2) \equiv \forall x\,(x^2 \neq 2)$.

Paso del lenguaje natural al lenguaje formal (formalización)

Ejemplo

Formalice la siguiente frase utilizando predicados y cuantificadores:

"Todo estudiante de esta clase ha estudiado Cálculo."

- Se puede reescribir como: "Para todo estudiante x de esta clase, x ha estudiado Cálculo."
- Función proposicional $C(x)$: "x ha estudiado Cálculo".
- Dominio de discurso: el conjunto de estudiantes de la clase.
- Formalización: $\forall x\, C(x)$

Paso del lenguaje natural al lenguaje formal (formalización)

Ejemplo

Formalice la siguiente frase utilizando predicados y cuantificadores, asumiendo que el dominio de discurso es el conjunto de todas las personas.

"Todo estudiante de esta clase ha estudiado Cálculo."

- Se puede reescribir como: "Para toda persona x, si la persona x es un estudiante de esta clase, entonces x ha estudiado Cálculo."
- Función proposicional $S(x)$: "x es un estudiante de esta clase".
- Función proposicional $C(x)$: "x ha estudiado Cálculo".
- Formalización: $\forall x\,(S(x) \to C(x))$