Estructuras de Datos

Grafos: búsqueda de caminos.
Caminos mínimos entre pares de nodos

Contenidos

- ¿Están dos vértices conectados?: Algoritmo de Warshall.
- Todos los caminos mínimos desde un vértice origen al resto: Algoritmo de Dijkstra.

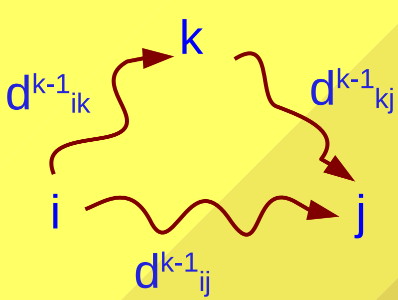
- El camino mínimo entre dos vértices: Algoritmo A*.
- **Todos los caminos mínimos entre todos los pares de vértices: Algoritmo de Floyd.**

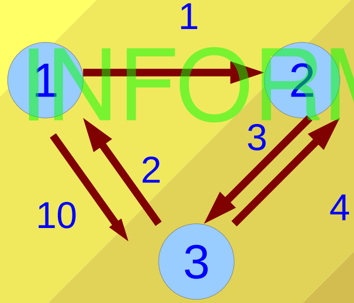
Buscando caminos mínimos

- Caminos mínimos entre todos los pares: Algoritmo de Floyd.

Claves:

- Camino mímino para cualquier par de vértices.
- Generar **$W=D^0 \rightarrow D^1 \rightarrow \ldots D^n$= D matriz distancia/pesos mínimas y matriz de Intermedios I.**
- **d^k_{ij}**=long. Camino más corto entre **i,j** con vértices intermedios sólo en el conjunto **$\{v_1,v_2,\ldots,v_k\}$**
- **D^k** se calcula a partir de **D^{k-1}** aplicando la regla: $d^k_{ij} \leftarrow \min\{d^{k-1}_{ij},\ d^{k-1}_{ik}+d^{k-1}_{1k}\}$
- **I** es la matriz de intermedios. Si en una iteración el vértice k reduce la distancia u,v entonces $I^k[u,v]=k$.





$$W=\begin{bmatrix} \infty & 1 & 10 \\ \infty & \infty & 3 \\ 2 & 4 & \infty \end{bmatrix}$$

$$\underset{D^0}{\begin{bmatrix} \infty & 1 & 10 \\ \infty & \infty & 3 \\ 2 & 4 & \infty \end{bmatrix}} \underset{I^0}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{D^1}{\begin{bmatrix} \infty & 1 & 10 \\ \infty & \infty & 3 \\ 2 & \mathbf{3} & \mathbf{12} \end{bmatrix}} \quad \underset{I^1}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}}$$

$$\underset{D^2}{\begin{bmatrix} \infty & 1 & \mathbf{4} \\ \infty & \infty & 3 \\ 2 & 3 & \mathbf{6} \end{bmatrix}} \underset{I^2}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{2} \end{bmatrix}} \quad \underset{D^3}{\begin{bmatrix} \mathbf{6} & 1 & 4 \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}} \quad \underset{I^3}{\begin{bmatrix} \mathbf{3} & 0 & 2 \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}$$

Buscando caminos mínimos

- Algoritmo de Floyd.

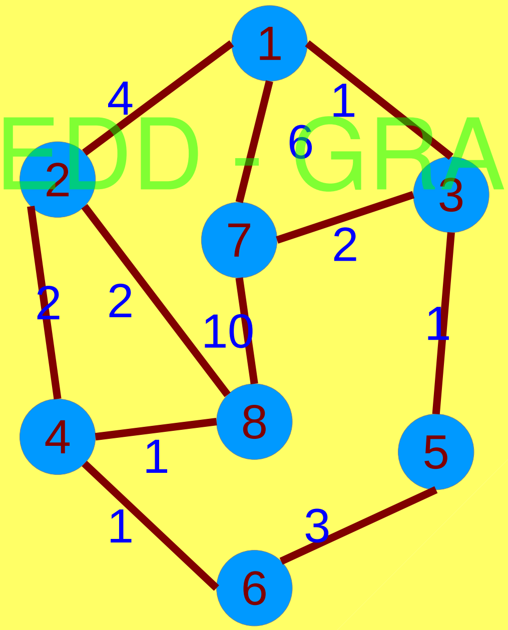
```
Floyd(IN: W[N,N]; OUT: D[N,N],I[N,N])//O(N³)
Begin
D ← W
I ← 0
For k ← 0 To N-1 Inc 1 Do //Introduce nuevo intermedio.

  For i ← 0 To N-1 Inc 1 Do //Actualizar D,I con nuevo
                            //con nuevo intermedio.
    For j ← 0 To N-1 Inc 1 Do
      If D[i,k]+D[k,j]<D[i,j] Then
        D[i,j] ← D[i,k]+D[k,j]
        I[i,j] ← K
      End-If
    End-For
  End-For

End-For
End.
```

Buscando caminos mínimos

- Algoritmo de Floyd: ejemplo de obtención del camino.



Distancias

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	1	6	2	5	3	6
2	4	4	5	2	6	3	7	2
3	1	5	2	5	1	4	2	6
4	6	2	5	2	4	1	7	1
5	2	6	1	4	2	3	3	5
6	5	3	4	1	3	2	6	2
7	3	7	2	7	3	6	4	8
8	6	2	6	1	5	2	8	2

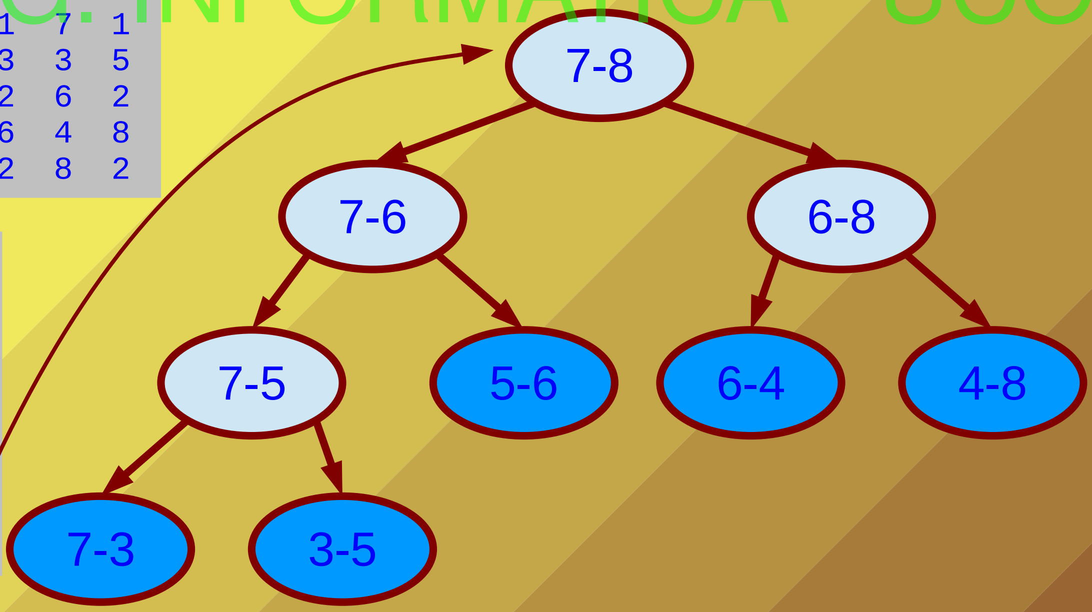
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	-	-	2	3	5	3	2
2	-	4	1	-	3	4	3	-
3	-	1	1	6	-	5	-	6
4	2	-	6	6	6	-	6	-
5	3	3	-	6	3	-	3	6
6	5	4	5	-	-	4	5	4
7	3	3	-	6	3	5	3	6
8	2	-	6	-	6	4	6	4

Intermedios

Para ir de 7 a 8, tengo que pasar por 6. Ahora tengo dos subproblemas:

- Llegar de 7 a 6
- Llegar de 6 a 8.

(recursivo).



Búsqueda de caminos

- Algoritmo de Floyd: ejemplo.

0: Iniciar con los caminos directos

2: usando vértices {1, 2} 1 conecta con 4

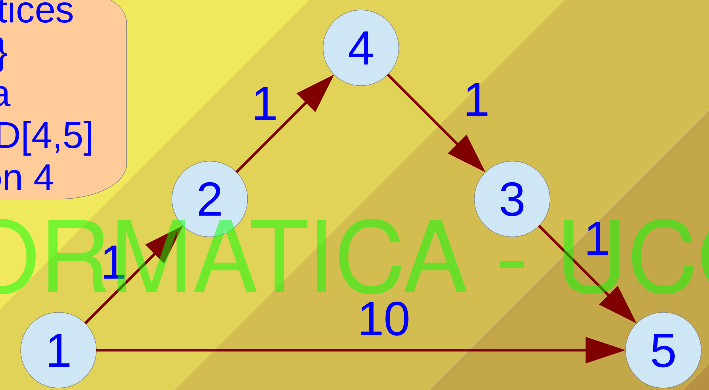
4: usando vértices {1, 2, 3, 4} 1,5 mejora D[1,5]>D[1,4]+D[4,5] 2 conecta con 4

{}	{1}	{1,2}	{1,2,3}	{1,2,3,4}	{1,2,3,4,5}
1,2:1 1,5:10 2,4:1 4,3:1 3,5:1		1,4:2	4,5:2	1,3:3 **1,5:4** 2,3:2 2,5:3	

1: usando vértices {1} no se añade más

3: usando vértices {1, 2, 3} 4 conecta con 5

5: usando vértices {1, 2, 3, 4, 5} no se añade nada



$$D^0:\begin{pmatrix}\infty & 1 & \infty & \infty & 10\\ \infty & \infty & \infty & 1 & \infty\\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1\\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty\end{pmatrix} \quad I^0:\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$D^2:\begin{pmatrix}\infty & 1 & \infty & 2 & 10\\ \infty & \infty & \infty & 1 & \infty\\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1\\ \infty & \infty & 1 & \infty & \infty\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty\end{pmatrix} \quad I^2:\begin{pmatrix}0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$D^3:\begin{pmatrix}\infty & 1 & \infty & 2 & 10\\ \infty & \infty & \infty & 1 & \infty\\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1\\ \infty & \infty & 1 & \infty & 2\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty\end{pmatrix} \quad I^3:\begin{pmatrix}0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$D^4:\begin{pmatrix}\infty & 1 & 3 & 2 & 4\\ \infty & \infty & 2 & 1 & 3\\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1\\ \infty & \infty & 1 & \infty & 2\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty\end{pmatrix} \quad I^4:\begin{pmatrix}0&0&4&2&4\\0&0&4&0&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$D:\begin{pmatrix}\infty & 1 & 3 & 2 & 4\\ \infty & \infty & 2 & 1 & 3\\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1\\ \infty & \infty & 1 & \infty & 2\\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty\end{pmatrix} \quad I:\begin{pmatrix}0&0&4&2&4\\0&0&4&0&4\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Resumen

- Resumiendo:
  - Si queremos todos los caminos mínimos entre cualquier par de vértices:
    - N veces el algoritmo Dijkstra (una vez para cada vértice como origen) $O(N^3)$.
    - Algoritmo de Floyd $O(N^3)$.
      - Obtenemos la matriz de distancias mínimas y la de nodos intermedios.

Referencias

- Lecturas recomendadas:
  - Caps. 14, 15 y 16 de “Estructuras de Datos”, A. Carmona y otros. U. de Córdoba. 1999.
  - Wikipedia:
    - Alg. Warshall: en.wikipedia.org/wiki/Floyd%E2%80%93Warshall_algorithm
    - Alg. Dijkstra: en.wikipedia.org/wiki/Dijkstra%27s_algorithm
    - Alg. A*: en.wikipedia.org/wiki/A*_search_algorithm
    - Alg. Floyd:en.wikipedia.org/wiki/Floyd%E2%80%93Warshall_algorithm

Estructuras de Datos

Grafos: búsqueda de caminos.

Caminos mínimos entre pares de nodos