Matemáticas II
Grado en Ingeniería Electrónica
Universidad de Córdoba
Curso 2022-2023

Relación de problemas Tema 1

Matrices

1. Se consideran las siguientes matrices A, B y C. Calcule $3A$, $3A+2C$, AC, CA y AB:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&-1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1\\-2&-3\\0&4\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&1&4\\3&0&-1\\4&-1&5\end{pmatrix}$$

2. Calcule todos los productos posibles entre dos cualesquiera de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&5&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}7&0\\-1&1\\0&1\\3&4\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&7&1&5\\6&3&0&0\\-2&-5&1&0\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&5&2\\2&3&-3\end{pmatrix}$$

3. Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\2&1&-3\\4&-3&-1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&4&1&0\\2&1&1&1\\1&-2&1&2\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&1&-1&-2\\3&-2&-1&-1\\2&-5&-1&0\end{pmatrix}$$

Compruebe que $AB=AC$. (Por tanto $AB=AC$ no implica $B=C$ necesariamente)

4. Halle la matriz inversa de $\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$ y compruebe el resultado.

5. Calcule las inversas de las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}-3&2&1\\0&1&-1\\-2&-2&2\end{pmatrix}$$

6. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}$ halle $3AA^t-2I$ siendo I la matriz identidad.

7. Calcule los siguientes determinantes:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}\qquad |B|=\begin{vmatrix}7&4\\3&0\end{vmatrix}\qquad |C|=\begin{vmatrix}5&1\\-1&7\end{vmatrix}\qquad |D|=\begin{vmatrix}2&6\\-1&-3\end{vmatrix}\qquad |E|=\begin{vmatrix}3&4\\2&5\end{vmatrix}$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad |G| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad |H| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad |I| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

8. Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. Demuestre que si $AB = A$ y $BA = B$, entonces la matriz A cumple $A^2 = A$

9. Halle las matrices A cuadradas de orden 2×2 que cumplen $A^2 = 0$.

10. Demuestre que si A es una matriz cuadrada, $A + A^t$ y AA^t son siempre matrices simétricas.

11. Deuestre que si A y B son dos matrices simétricas, $A + B$ y $A - B$ también lo son.

12. Halle todas las matrices cuadradas de orden 3 que conmutan con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Calcule los valores del parámetro t para los que el rango de la siguiente matriz A es 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$$

14. Calcule el rango de M según los valores de t

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

15. Halle la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Calcule los siguientes determinantes o demuestre las igualdades según el caso:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} m & m & m & m \\ m & c & c & c \\ m & c & b & b \\ m & c & c & a \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0$

17. ¿Para qué valores del parámetro λ tienen inversa las siguientes matrices?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \lambda \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

18. Encuentre una matriz X que sea solución de la ecuación matricial $B(2A + I) = AXA + B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Se consideran las siguientes matrices A, B y C. Calcule $3A$, $3A + 2C$, AC, CA y AB:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3A = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 6 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3A + 2C = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 \\ 6 & -3 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 6 & 0 & -2 \\ 8 & -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 17 \\ 12 & -3 & 4 \\ 14 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+12 & 1-3 & 4+15 \\ 4-3+8 & 2-2 & 8+1+10 \\ 4+6+4 & 2-1 & 8-2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 & 19 \\ 9 & 0 & 19 \\ 14 & 1 & 11 \end{pmatrix}$$

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2+8 & -1+8 & 6+2+4 \\ 3-2 & -2 & 9-1 \\ 4-2+10 & 1+10 & 12-2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 12 \\ 1 & -2 & 8 \\ 12 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+12 \\ 2+2 & 2+3+8 \\ 2-4 & 2-6+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 4 & 13 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Calcule todos los productos posibles entre dos cualesquiera de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$AB = 2\times 3 \times 4\times 2 =$ No se puede

$$AC = 2\times 3 \times 3\times 4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+12-6 & 7+6-15 & 1+3 & 5 \\ -4+30-2 & -14+15-5 & -2+1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & -2 & 4 & 5 \\ 24 & -4 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$AD = 2\times 3 \times 3\times 3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 & -1+10+9 & 1+4-9 \\ -2+2 & 2+25+3 & -2+10-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 18 & -4 \\ 0 & 30 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Compruebe que $AB = AC$. (Por tanto $AB = AC$ no implica $B = C$ necesariamente)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6+2 & 4-3-4 & 1-3+2 & -3+4 \\ 2+2-3 & 8+1+6 & 2+1-3 & 1-6 \\ 4-6-1 & 16-3+2 & 4-3-1 & -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 15 & 0 & -5 \\ -3 & 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-9+4 = -3 \end{pmatrix}$$

distintas

$AB \neq AC$

4. Halle la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y compruebe el resultado.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_1 = F_1 - 2F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_2 = F_2 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \overset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\frac{(Adj(A))^{t}}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{t}}{2-3} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Calcule las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 = \frac{F_2+F_1}{3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 = F_2 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 = F_3 - F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_1 = F_2 - F_3 \\ F_2 = F_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 = \frac{F_3+2F_2}{2}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 = F_1 + 3F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & -3 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \end{array}\right) \underset{F_1 = \frac{F_1 - 2F_2}{3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1/3 & -5/3 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_1 \leftrightarrow F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -5/3 & -1/2 \end{array}\right)$$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ halle $3AA^t - 2I$ siendo I la matriz identidad.

$$3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27+3 & 45+6 \\ 45+6 & 75+12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 51 \\ 51 & 85 \end{pmatrix}$$

7. Calcule los siguientes determinantes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \quad |C| = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} \quad |D| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \quad |E| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|F| = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad |G| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad |H| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad |I| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -5 & 8 \end{vmatrix}$$

$|A| = 1 + 4 = 5$

$|B| = -12$

$|C| = 35 + 1 = 36$

$|D| = -6 + 6 = 0$

$|E| = 15 - 8 = 7$

$|F| = -2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -2(24-1) - 6(7-20) = -46 + 78 = 32$

$|G| = -5 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5(9+4) - 3(2+3) = -65 - 15 = -80$

$|H| = -2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2(-1+2) = -2$

$|I| = 5 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5(4+4) + 8(1-6) = 40 - 40 = 0$

8. Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden. Demuestre que si $AB = A$ y $BA = B$, entonces la matriz A cumple $A^2 = A$

$ABA = AA = A^2 = A$

$\underbrace{AB}_{} = A^2$

$A = A^2$

9. Halle las matrices A cuadradas de orden 2×2 que cumplen $A^2 = 0$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

$$a = a^2 + bc$$

$$\left.\begin{array}{l} b = ab + bd \;;\; 1 = a + d \\ c = ac + cd \;;\; 1 = a + d \end{array}\right\} b = c$$

$$d = d^2 + bc$$

$$\begin{vmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{vmatrix} = (a^2+bc)(bc+d^2) - (ac+cd)(ab+bd)$$

$$= \cancel{a^2bc} + a^2d^2 + b^2c^2 + \cancel{bcd^2} - \cancel{a^2bc} - acbd - acbd - \cancel{bcd^2} = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd = a^2d^2 + b^4 - 2ab^2d$$

$$\begin{cases} b = c \\ a^2d^2 + b^4 - 2ab^2d = 0 \end{cases}$$

10. Demuestre que si A es una matriz cuadrada, $A + A^t$ y AA^t son siempre matrices simétricas.

$$A + A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

11. Deuestre que si A y B son dos matrices simétricas, $A+B$ y $A-B$ también lo son.

$$A+B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ b-d & a-c \end{pmatrix}$$

12. Halle todas las matrices cuadradas de orden 3 que conmutan con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Calcule los valores del parámetro t para los que el rango de la siguiente matriz A es 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & t \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2t - 6 - 2t + 6 + 6 - 6 = 0$

Para $t \in \mathbb{R}$ $rg(A) = 2$

14. Calcule el rango de M según los valores de t

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & t \\ 4 & 6 & 8 \\ 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -9 \begin{vmatrix} 2 & t \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -9(16-4t) \quad \begin{cases} t \neq 4 & rg(A) = 3 \\ t = 4 & rg(A) = 2 \end{cases}$$

15. Halle la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{(Adj(A))^{t}}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ -i & 1-i^2 & -i^2 \\ i & -i^2 & 1-i^2 \end{pmatrix}^{t}}{1-i^2-i^2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -i & i \\ -i & 1-i^2 & -i^2 \\ i & -i^2 & 1-i^2 \end{pmatrix}}{1-2i^2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-2i^2} & \frac{-i}{1-2i^2} & \frac{i}{1-2i^2} \\ \frac{-i}{1-2i^2} & \frac{1-i^2}{1-2i^2} & \frac{-i^2}{1-2i^2} \\ \frac{i}{1-2i^2} & \frac{-i^2}{1-2i^2} & \frac{1-i^2}{1-2i^2} \end{pmatrix}$$

16. Calcule los siguientes determinantes o demuestre las igualdades según el caso:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} m & m & m & m \\ m & c & c & c \\ m & c & b & b \\ m & c & c & a \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6(6-4) = 12$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & x \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

$= x \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & x \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix}} - \cancel{\begin{vmatrix} -1 & x \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} - \cancel{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix}} - x \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} + \cancel{\begin{vmatrix} -1 & x \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} + x \begin{vmatrix} -1 & x \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \cancel{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}$

$= x(x^2+1) + x + 1 + 1 + x + x^2 + 1 + x(x-1) + x(1+x) = x^3 + x + 2x + 3 + x^2 + x^2 - \cancel{x} + \cancel{x} + x^2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$

c) $\begin{vmatrix} m & m & m & m \\ m & c & c & c \\ m & c & b & b \\ m & c & c & a \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} c & c & c \\ c & b & b \\ c & c & a \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} m & c & c \\ m & b & b \\ m & c & a \end{vmatrix} + m\begin{vmatrix} m & c & c \\ m & c & b \\ m & c & a \end{vmatrix} - m\begin{vmatrix} m & c & c \\ m & c & b \\ m & c & c \end{vmatrix}$

$= mc\begin{vmatrix} b & b \\ c & a \end{vmatrix} - mc\begin{vmatrix} c & b \\ c & a \end{vmatrix} + mc\begin{vmatrix} c & b \\ c & c \end{vmatrix} - m^2\begin{vmatrix} b & b \\ c & a \end{vmatrix} + \cancel{mc\begin{vmatrix} m & b \\ m & a \end{vmatrix}} - \cancel{mc\begin{vmatrix} m & b \\ m & c \end{vmatrix}} + m^2\begin{vmatrix} c & b \\ c & a \end{vmatrix} - \cancel{mc\begin{vmatrix} m & b \\ m & a \end{vmatrix}} + mc\begin{vmatrix} m & c \\ m & c \end{vmatrix} - m^2\begin{vmatrix} c & b \\ c & c \end{vmatrix} + \cancel{mc\begin{vmatrix} m & b \\ m & c \end{vmatrix}} - mc\begin{vmatrix} m & c \\ m & c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b & b \\ c & a \end{vmatrix}(mc - m^2) + \begin{vmatrix} c & b \\ c & a \end{vmatrix}(m^2 - mc) + \begin{vmatrix} c & b \\ c & c \end{vmatrix}(mc - m^2) - \cancel{\begin{vmatrix} m & c \\ m & c \end{vmatrix} mc}$

$= (ab - bc)(mc - m^2) + (ac - bc)(m^2 - mc) + (c^2 - bc)(mc - m^2)$

$= abcm - abm^2 - \cancel{bc^2m} + \cancel{bcm^2} + acm^2 - ac^2m - \cancel{bcm^2} + \cancel{bc^2m} + c^3m - c^2m^2 - bc^2m - bcm^2$

$= abcm - abm^2 + acm^2 - ac^2m - bcm^2 - bc^2m - c^2m^2 + c^3m$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

$= \cancel{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} - \cancel{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} + \cancel{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} - \cancel{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} + \cancel{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} - \cancel{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} + \cancel{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} - \cancel{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} + \cancel{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} - \cancel{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} + \cancel{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} - \cancel{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = 0$

17. ¿Para qué valores del parámetro λ tienen inversa las siguientes matrices?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & \lambda \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\frac{(Adj(A))^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2\lambda & -2+\lambda & -\lambda^2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -\lambda & 0 & \lambda \end{pmatrix}^t}{2\lambda-\lambda^2} = \begin{pmatrix} 2\lambda/2\lambda-\lambda^2 & 1/2\lambda-\lambda^2 & -\lambda/2\lambda-\lambda^2 \\ -2+\lambda/2\lambda-\lambda^2 & 2-\lambda/2\lambda-\lambda^2 & 0 \\ -\lambda^2/2\lambda-\lambda^2 & -1/2\lambda-\lambda^2 & \lambda/2\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \to 2\lambda-\lambda^2 \neq 0 \in \mathbb{R}-\{-2,2\}$$

$$\frac{(Adj(B))^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} \lambda & 4\lambda & -2 \\ 2\lambda & -\lambda & -4 \\ 2-\lambda & 3-4\lambda & -5 \end{pmatrix}^t}{4+7\lambda} \to 4+7\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}-\{-4/7\}$$

$$\frac{(Adj(C))^t}{|C|} = \frac{(Adj(C))^t}{-\lambda^2+4\lambda-3} \to -\lambda^2+4\lambda-3 \neq 0 \in \mathbb{R}-\{1,3\}$$

18. Encuentre una matriz X que sea solución de la ecuación matricial $B(2A+I) = AXA + B$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B(2A+I) = AXA + B$$

$$B(2A+I) - B = AXA$$

$$A^{-1}(B(2A+I) - B) = A^{-1}AXA = XA$$

$$A^{-1}(B(2A+I) - B)A^{-1} = XAA^{-1} = X$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2 = F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_2 = -\frac{F_2 + F_3}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{F_3 = F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 4/3 & 5/3 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1 = -\frac{F_1 - 3F_2 - F_3}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 4/3 & 2/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 4/3 & 5/3 \end{array}\right) \underset{\sim}{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 4/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 4/3 & 5/3 \end{array}\right)$$

$$2A + I = 2\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ -8 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B(2A+I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ -8 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+8+8 & -4-3 & 2+2+6 \\ -7-4 & 4 & -2-3 \\ 8+4 & -3 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & -7 & 10 \\ -11 & 4 & -5 \\ 12 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B(2A+I) - B = \begin{pmatrix} 23 & -7 & 10 \\ -11 & 4 & -5 \\ 12 & -3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -10 & 4 & -4 \\ 12 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(B(2A+I) - B) = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 4/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 4/3 & 5/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -10 & 4 & -4 \\ 12 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22/3 + 20/3 - 12/3 & 6/3 - 8/3 + 2/3 & -8/3 + 8/3 - 4/3 \\ 88/3 - 20/3 - 24/3 & -24/3 + 8/3 + 4/3 & 32/3 - 8/3 - 8/3 \\ 44/3 - 40/3 + 60/3 & -12/3 + 16/3 - 10/3 & 16/3 - 16/3 + 20/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10/3 & 0 & -4/3 \\ 44/3 & -2 & 16/3 \\ 64/3 & -4 & 20/3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\left(B(2A+I) - B\right)A^{-1} = \begin{pmatrix} -10/3 & 0 & -4/3 \\ 44/3 & -2 & 16/3 \\ 64/3 & -4 & 20/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 4/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 4/3 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10/9 - 8/9 & 20/9 - 16/9 & 10/9 - 20/9 \\ -44/9 - 24/9 + 32/9 & -88/9 - 12/9 + 64/9 & -44/9 + 12/9 + 80/9 \\ -64/9 - 48/9 + 40/9 & -64/9 + 24/9 - 40/9 & -64/9 + 24/9 + 100/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/9 & 4/9 & -10/9 \\ -36/9 & -36/9 & 48/9 \\ -62/9 & -80/9 & 64/9 \end{pmatrix}$$