CÁLCULO (GRADO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA)
Séptima sesión de prácticas

1. Calcular el área delimitada por las gráficas de las siguientes funciones:

$$(a) \qquad f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = x^2.$$
$$(b) \qquad f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \cos(x), \quad \frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}.$$
$$(c) \qquad f(x) = xe^x, \quad f(x) = 0$$

2. Calcular numéricamente la siguiente integral, utilizando el método de Simpson con 5 divisiones:

$$\int_0^{1/2} \sin(e^{\frac{x}{2}})dx.$$

3. Demostrar la siguiente fórmula:

$$\int_0^{\infty} \frac{2dx}{(x+2)\sqrt{1+x}} = \pi.$$

4. Determinar el área encerrada entre la recta $x+y=1$, la parábola $y=x^2-5$ y las rectas $x=-4$ y $x=4$.

5. Una conexión a Internet tiene un ancho de banda $I(t)$ que depende del tiempo según la expresión

$$I(t) = \frac{k_0}{6}[(t-3)(t-4)(11t-10) + (t-1)(t-2)(33-8t)],$$

Siendo k_0 una constante.

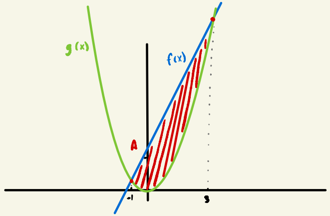
(a) ¿ Cuál será la cantidad de datos descargados (en kb) en el intervalo de tiempo comprendido entre $t=1$ y $t=4$ segundos?

(b) Se desea descargar un archivo de 1GB conectando un ordenador a dicha conexión. Si queremos que la descarga se produzca sin interrupciones ¿en qué instante t_0 del intervalo comprendido entre $t=1$ y $t=4$ segundos debemos conectar el ordenador para que el tiempo de descarga sea mínimo? Nota: se puede dejar el valor de t_0 indicado si no se sabe o no se puede obtener analíticamente.

1. Calcular el área delimitada por las gráficas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = x^2.$

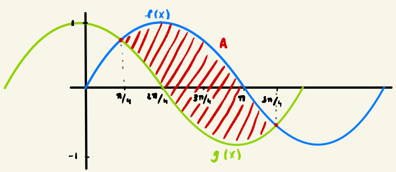
$f(x) = g(x) \rightarrow 2x + 3 = x^2 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -1$



$A = \int_{-1}^{3} \underline{2x+3} - \underline{x^2}\, dx = \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}\, u^2$

(b) $f(x) = \sin(x), \quad g(x) = \cos(x), \quad \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}.$

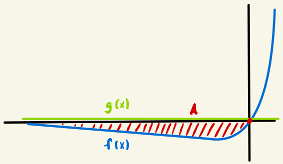
$f(x) = g(x) \rightarrow \text{sen}(x) = \cos(x) \rightarrow \text{sen}\, x - \cos x = 0 \rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}$



$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \underline{\text{sen}(x)} - \underline{\cos(x)}\, dx = \left[-\cos x - \text{sen}\, x \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2{,}8284\, u^2$

(c) $f(x) = xe^x, \quad g(x) = 0$

$f(x) = g(x) \rightarrow xe^x = 0 \rightarrow x = 0$



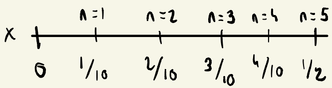
$A = \int_{-\infty}^{0} \underline{0} - \underline{xe^x}\, dx = \left[e^x - xe^x \right]_{-\infty}^{0} = 1\, u^2$

2. Calcular numéricamente la siguiente integral, utilizando el método de Simpson con 5 divisiones:

$$\int_0^{1/2} \sin(e^{\frac{x}{2}})dx.$$

$I = [0, 1/2] \rightarrow n = 5$

$\Delta x = \dfrac{1/2 - 0}{5} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$ = longitud de las intervalas



$$\frac{1}{3}\int_0^{1/2} \text{sen}\,(e^{x/2})\,dx \approx \frac{1}{3}\left(\Delta x\, f(x_1^*) + \Delta x\, f(x_2^*) + \Delta x\, f(x_3^*) + \Delta x\, f(x_4^*) + \Delta x\, f(x_5^*)\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}\left(\Delta x\, f(0{,}1) + \Delta x\, f(0{,}2) + \Delta x\, f(0{,}3) + \Delta x\, f(0{,}4) + \Delta x\, f(0{,}5)\right) = \frac{\Delta x}{3}\left(f(0{,}1) + f(0{,}2) + f(0{,}3) + f(0{,}4) + f(0{,}5)\right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{30}\left(\text{sen}\,(e^{0{,}1/2}) + \text{sen}\,(e^{0{,}2/2}) + \text{sen}\,(e^{0{,}3/2}) + \text{sen}\,(e^{0{,}4/2}) + \text{sen}\,(e^{0{,}5/2})\right) = 0{,}1526$$

3. Demostrar la siguiente fórmula:

$$\int_0^{\infty} \frac{2dx}{(x+2)\sqrt{1+x}} = \pi.$$

$$2\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} \rightarrow u = \sqrt{x+1} \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}} \quad u^2 = x+1 \quad u^2+1 = x+2 \rightarrow 4\int \frac{dx}{2(x+2)\sqrt{x+1}}$$

$$\rightarrow 4\int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+1} \rightarrow 4\left[\operatorname{arctg} u\right]_0^{\infty} \rightarrow 4\left[\operatorname{arctg} \sqrt{x+1}\right]_0^{\infty} = 4\left(\underbrace{\operatorname{arctg} \infty}_{\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}} - \operatorname{arctg} 1\right) =$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \pi$$

4. Determinar el área encerrada entre la recta $x+y=1$, la parábola $y=x^2-5$ y las rectas $x=-4$ y $x=4$.

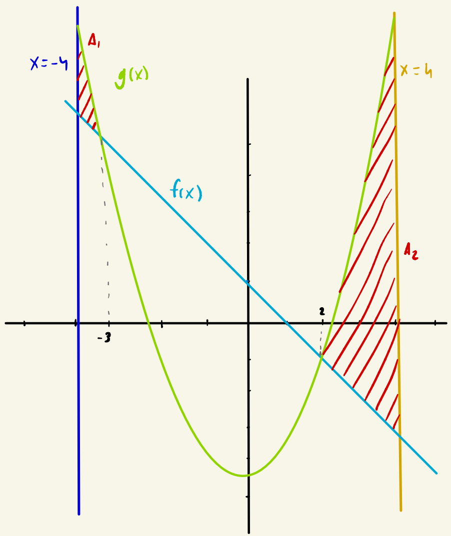
$x+y=1 \rightarrow y=f(x)=1-x$

$y=g(x)=x^2-5$

$x=-4$

$x=4$

$f(x)=g(x) \rightarrow 1-x=x^2-5 \rightarrow x^2+x-6=0 \rightarrow x_1=2 \quad x_2=-3$



$A_1=\int_{-4}^{-3} x^2-5-1+x \, dx \rightarrow \int_{-4}^{-3} x^2+x-6 \, dx \rightarrow \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-4}^{-3}=\frac{17}{6} u^2$

$A_2=\int_{2}^{4} x^2+x-6 \, dx \rightarrow \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x\right]_{2}^{4}=\frac{38}{3}$

$A_T=A_1+A_2=\frac{17}{6}+\frac{38}{3}=\frac{31}{2} u^2$

No mirar

5. Una conexión a Internet tiene un ancho de banda $I(t)$ que depende del tiempo según la expresión

$$I(t) = \frac{k_0}{6}[(t-3)(t-4)(11t-10) + (t-1)(t-2)(33-8t)],$$

Siendo k_0 una constante.

(a) ¿Cuál será la cantidad de datos descargados (en kb) en el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 1$ y $t = 4$ segundos?

$I\,(t = 4-1\ s) = I(t = 3s) = \frac{k_0}{6}\left((t-3)(t-4)(11t-10) + (t-1)(t-2)(33-8t)\right) = 3k_0$ kb

(b) Se desea descargar un archivo de 1GB conectando un ordenador a dicha conexión. Si queremos que la descarga se produzca sin interrupciones ¿en qué instante t_0 del intervalo comprendido entre $t = 1$ y $t = 4$ segundos debemos conectar el ordenador para que el tiempo de descarga sea mínimo? Nota: se puede dejar el valor de t_0 indicado si no se sabe o no se puede obtener analíticamente.

$I(t) = \frac{1}{6}\left((t-3)(t-4)(11t-10) + (t-1)(t-2)(33-8t)\right) = \frac{t^3 - 10t^2 + 29t - 18}{2}$

$I'(t) = \frac{3t^2 - 20t + 29}{2} = 0 \qquad t = \frac{10 \pm \sqrt{13}}{3} \begin{cases} t_1 = 2{,}1315 \\ \cancel{t_2 = 4{,}5351} \end{cases}$ No forma parte del intervalo

$1 \quad (+\nearrow) \quad \frac{10-\sqrt{13}}{3} \quad (-\searrow) \quad 4$

I(t) crece en (1, 2,1315) y decrece en (2,1315, 4) → 2,1315 es un máximo de I(t)

El mejor punto para la descarga será t = 2,1315 s