Autoencoder Variacional:

$X \in \mathbb{R}^m$, $x \in X$ $\quad m > n$
$Z \in \mathbb{R}^n$, $z \in Z$

Encoder: Transformar los datos de entrada X en una distribución latente $q_\theta(z|x)$

Espacio latente: Las muestras Z son tomadas de la distribución predicha por el encoder:

Decoder: Las muestras del espacio latente Z y genera una construcción $\hat{x}$ de los datos de entrada originales

Asumimos que el prior $p(z)$:

Asume una distribucion normal estandar

$$p(z) \sim \mathcal{N}(z; 0, I)$$

Posterior $q_\theta(z|x)$ = distribución normal con media μ y desviacion estandar σ

$$q_\theta(z|x) - \mathcal{N}(z; \mu(x), \sigma^2(x) I)$$

Gaussiana Multivariada Isotropica.

Pérdida de reconstrucción

Mide la discrepancia entre la entrada X y la sálida reconstruida $\tilde{x}$

Entropia crutada:

$$\mathcal{L}_{recon} - \mathbb{E}_{q_\theta}(z|x)\{\log p_\theta(x|z)\}$$

Error cuadrático medio (MSE):

$$\mathcal{L}_{recon} - \mathbb{E}_{q_\theta}(z|x)\left[\frac{1}{2\sigma_x^2}\|x-\hat{x}\|^2\right]$$

DKL =

La DKL entre dos distribuciones gaussianas $q_\theta(z|x)$ y $P(z)$ se puede calcular:

$$\mathcal{L}_{KL} - D_{KL}(q_\theta(z|x) \| P(z)) =$$

$$\alpha * -\frac{1}{2}\sum_{i=1}(\log(\sigma_i^2) - \mu_i^2 - \sigma_i^2 + 1)$$

Pérdida Total :

La suma Total del VAE es la suma de la perdida y la DKL

$$\mathcal{L}_{VAE} - \mathcal{L}_{recon} + \mathcal{L}_{DKL}$$

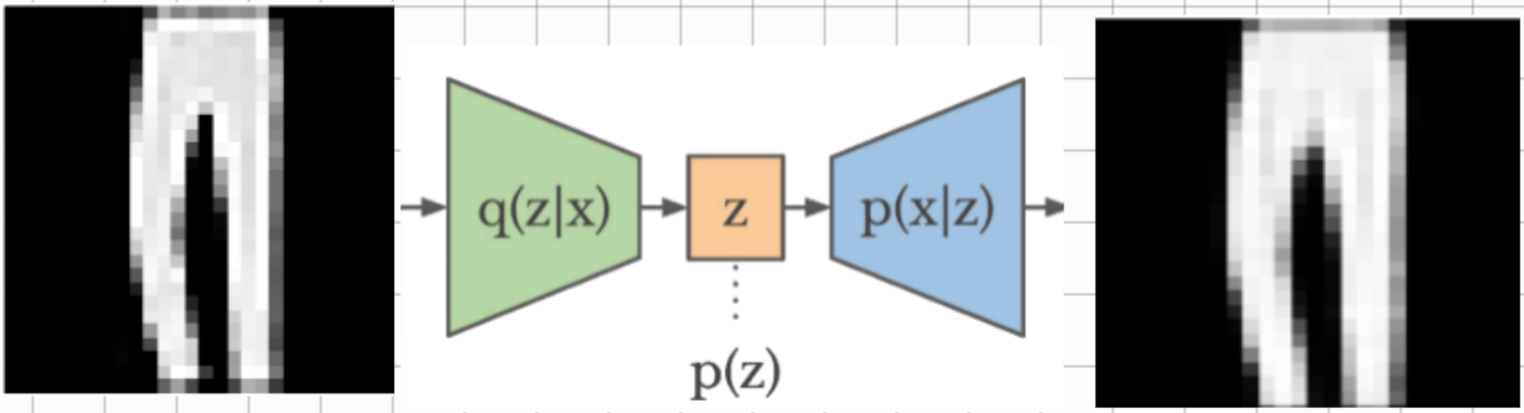
1. Perdida de reconstrucción Entropia cruzada

$$\mathcal{L}_{recon} - -\mathbb{E}_{q_\theta(z|x)}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \log \hat{x}_i + (1 - x_i)\log(1 - \hat{x}_i)\right] +$$

Divergencia KL entre $q_\theta(z|x)$ y $p(z)$:

$$\mathcal{L}_{KL} - -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\left(\log(\sigma_i^2) - u_i^2 - \sigma_i^2 + 1\right)$$

KL para dos gaussianas $\longrightarrow$ La matriz completa multivariada



Tengo :

$$D_{KL} = \mathbb{E}_p \left\{ \log \left(\frac{p(z|x)}{q_\theta(z|x)} \right) \right\}$$

$$D_{KL} = \mathbb{E}_p \left\{ \log(p(z|x)) - \log(q_\theta(z|x)) \right\}$$

Definimos :

$$p(z|x) \sim \mathcal{N}(z ; \mu(x), \Sigma(x))$$

$$q_\theta(z|x) \sim \mathcal{N}(z ; \mu(x), \Sigma(x))$$

Entonces :

$$\mu : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} \qquad \Sigma : \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Vector Matriz

NOTA: Fue adecuado asumir independencia?

Asumimos independencia entre las variables aleatorias Z, por ende podemos reescribir las distribuciones como:

$$P(\mathbf{z}|\mathbf{x}) \sim \prod_{i=1}^{N} \mathcal{N}(z_i ; \mu_i(\mathbf{x}), \sigma_i(\mathbf{x}))$$

$$q_\theta(\mathbf{z}|\mathbf{x}) \sim \prod_{i=1}^{N} \mathcal{N}(z_i ; \beta_i(\mathbf{x}), \varepsilon_i(\mathbf{x}))$$

Entonces:

$$DKL = \mathbb{E}_p \left\{ \log(p(\mathbf{z}|\mathbf{x})) - \log(q_\theta(\mathbf{z}|\mathbf{x})) \right\}$$

$$DKL = \mathbb{E}_p \left\{ \log\left(\prod_{i=1}^{N} \mathcal{N}(z_i ; \mu_i(\mathbf{x}), \sigma_i(\mathbf{x}))\right)\right\} - \log\left(\prod_{i=1}^{N} \mathcal{N}(z_i ; \beta_i(\mathbf{x}), g_i(\mathbf{x}))\right)\Bigg\}$$

Por propiedad, el log de una productoria es igual a la suma de los logaritmos.

$$DKL = \mathbb{E}_p \left\{ \sum_{i=1}^{N} \log \mathcal{N}(z_i ; \mu_i(\mathbf{x}), \sigma_i(\mathbf{x}))\right\} - \mathbb{E}_p \left\{ \sum_{i=1}^{N} \log \mathcal{N}(z_i ; \beta_i(\mathbf{x}), \beta_i(\mathbf{x}))\right\}$$

Ahora reemplazamos la distribución gaussiana:

$$D_{KL} = \mathbb{E}_p\left\{ \sum_{i=1}^{N} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(- \frac{(z_i - \mu_i(x))^2}{2\sigma_i^2(x)} \right) \right) \right\} -$$

$$\mathbb{E}_p\left\{ \sum_{i=1}^{N} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi_i^2}} \exp\left(- \frac{(z_i - \beta_i(x))^2}{2\,\xi_i^2(x)} \right) \right) \right\}$$

Por propiedad:

$$D_{KL} = \mathbb{E}_p\left\{ \sum_{i=1}^{N} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \right) + \cancel{\log \exp}\left(- \frac{(z_i - \mu_i(x))^2}{2\sigma_i^2(x)} \right) \right.$$

$$\left. - \sum^{N} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi_i^2}} \right) - \cancel{\log \exp}\left(- \frac{(z_i - \beta_i(x))^2}{2\,\xi_i^2(x)} \right) \right\}$$

$$D_{KL} = \mathbb{E}_p\left\{ \sum_{i=1}^{N} \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \right) - \left(\frac{(z_i - \mu_i(x))^2}{2\sigma_i^2(x)} \right) \right.$$

$$\left. - \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi_i^2}} \right) + \left(\frac{(z_i - \beta_i(x))^2}{2\,\xi_i^2(x)} \right) \right\}$$

$$D_{KL} = \mathbb{E}_p\left\{ \sum_{i=1}^{N} \log\left(\frac{\sqrt{2\pi\xi_i^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \right) - \left(\frac{(z_i - \mu_i(x))^2}{2\sigma_i^2(x)} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{(z_i - \beta_i(x))^2}{2\,\xi_i^2(x)} \right\}$$

$$D_{KL} = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}_p\left\{ \sum_{i=1}^{N} \log\left(\frac{\cancel{2\pi}\varsigma_i^2}{\cancel{2\pi}\sigma_i^2} \right) - \left(\frac{(z_i - \mu_i(x))^2}{\sigma_i^2(x)} \right) + \frac{(z_i - \beta_i(x))^2}{\varsigma_i^2(x)} \right\}$$

$$D_{KL} = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}_p\left\{ \sum_{i=1}^{N} \log\left(\frac{\varsigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) - \left(\frac{(z_i - \mu_i(x))^2}{\sigma_i^2(x)} \right) + \frac{(z_i - \beta_i(x))^2}{\varsigma_i^2(x)} \right\}$$

$$D_{KL} = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}_p\left\{ \sum_{i=1}^{N} \log\left(\frac{\varsigma_i^2}{\sigma_i^2} \right) + \frac{(z_i - \beta_i(x))^2}{\varsigma_i^2(x)} - \frac{z_i - \mu_i(x)^2}{\sigma_i^2(x)} \right\}$$

$$D_{KL} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \log \mathbb{E}_p\left\{ \left(\frac{\varsigma_i^2(x)}{\sigma_i^2(x)} \right) \right\} + \mathbb{E}_p\left\{ \frac{(z_i - \beta_i(x))^2}{\varsigma_i^2(x)} \right\} - \mathbb{E}_p\left\{ \frac{(z_i - \mu_i(x))^2}{\sigma_i^2(x)} \right\}$$

Ahora :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \log \left(\frac{q_i^2(x)}{\sigma_i^2(x)} \right) + \frac{\mathbb{E}_p\{(z_i - \beta_i(x))^2\}}{q_i^2(x)} - \frac{\mathbb{E}_p\{(z_i - \mu_i(x))^2\}}{\sigma_i(x)^2}$$

Entonces este término será igual a lo siguiente :

$$\frac{\mathbb{E}_p\{(z_i - \beta_i(x))^2\}}{q_i^2(x)} = \frac{\sigma_i(x)^2}{q_i(x)^2} + \frac{(\mu_i(x) - \beta_i(x))^2}{q_i^2(x)}$$

y para :

$$\frac{\mathbb{E}_p\{(z_i - \mu_i(x))^2\}}{\sigma_i^2(x)} = \frac{\sigma_i^2(x)}{\sigma_i^2(x)} = 1$$

$$D_{KL} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \left\{ \log \left(\frac{q_i^2(x)}{\sigma_i^2(x)} \right) + \frac{\sigma_i(x)^2}{q_i(x)^2} + \frac{(\mu_i(x) - \beta_i(x))^2}{q_i(x)^2} - 1 \right\}$$