Ejercicio: Probar la desigualdad de Jensen.

Existencia de la immersión media: Si $\mathcal{E}_P\{(k(x,x))^{1/2}\} < \infty$; entonces $\mu_P \in \mathcal{F}$. El operador lineal $T_P f = \mathcal{E}_P\{f(x)\}$, $\forall f \in \mathcal{F}$, es, acotado dado que:

$$|T_P f| = |\mathcal{E}_P\{f(x)\}| \underset{\text{Desigualdad de Jensen}}{\leq} \mathcal{E}_P\{|f(x)|\} = \mathcal{E}_P\{|\langle f, \mu(x)\rangle_{\mathcal{F}}|\}$$

$$\mathcal{E}_P\{|\langle f, \mu(x)\rangle_{\mathcal{F}}|\} \leq \mathcal{E}_P\{\|f\|_{\mathcal{F}} \|\mu(x)\|_{\mathcal{F}}\} = \mathcal{E}_P\{\sqrt{k(x,x)}\,\|f\|_{\mathcal{F}}\}$$

$$|T_P f| \leq \mathcal{E}_P\{\sqrt{k(x,x)}\,\|f\|_{\mathcal{F}}\}$$

Por ende existe un $\mu_P \in \mathcal{F}$ tal que $T_P f = \langle f, \mu_P\rangle_{\mathcal{F}}$ si $f(x) = \mu(x) = k(x,\cdot)$:

$$\mu_P(x) = \langle \mu_P, k(x,\cdot)\rangle_{\mathcal{F}} = \mathcal{E}_P\{k(x,x')\}$$