Autoencoder Variacional:

$\mathcal{X} \in \mathbb{R}^m, \; x \in \mathcal{X} \qquad m > n$

$\mathcal{Z} \in \mathbb{R}^n, \; z \in \mathcal{Z}$

Modelar la distribución de probabilidad $p(x)$ de los datos de entrada $\mathcal{X}$ se introduce la variable latente z y se define el modelo generativo

$$p(x, z):$$

$$p(x, z) = p(z)\, p(x|z)$$

Optimización:

$$q_\theta(z|x) = p(z|x)$$

$$D_{KL}(q_\theta(z|x) \,\|\, p(z|x)) = \mathbb{E}_p\{ I(q_\theta(z|x)) - I(p(z|x))$$

$$= \mathbb{E}_p\left\{ \log\left(\frac{1}{q_\theta(z|x)}\right) - \log\left(\frac{1}{p(z|x)}\right)\right\}$$

$$= \mathbb{E}_p\left\{ \cancelto{0}{\log(1)} - \log q_\theta(z|x) - \cancelto{0}{\log(1)} + \log p(z|x)\right\}$$

$$= \mathbb{E}_p\{ \log p(z|x) - \log q_\theta(z|x)\}$$

$$= \mathbb{E}_p\left\{ \log \frac{p(z|x)}{q_\theta(z|x)}\right\}$$

$$\hat{\theta} = \min_{\Phi} D_{KL}(q_\theta(z|x) \,\|\, p(z|x))$$

Abrir la DKL en terminos de esperanza.

Tengo:

$$DKL \overset{*}{=} \mathbb{E}_p\left\{ \log\left(\frac{P(z|x)}{q_\theta(z|x)}\right)\right\}$$

Logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre logaritmos

$$DKL \overset{*}{=} \mathbb{E}_p\left\{ \log P(z|x) - \log q_\theta(z|x)\right\}$$

Reparto el valor esperado:

$$DKL = \mathbb{E}_p\left\{\log P(z|x)\right\} - \mathbb{E}_p\left\{\log q_\theta(z|x)\right\}$$

Aplico el T. Bayes a $P(z|x)$

$$DKL = \mathbb{E}_p\left\{\log q_\theta(z|x)\right\} - \mathbb{E}_p\left\{\log P(z|x)\,P(z)\,P(x)\right\}$$

Reparto el log:

$$DKL = \mathbb{E}_p\left\{\log q_\theta(z|x)\right\} - \mathbb{E}_p\left\{\log P(z|x)\,P(z) - \mathbb{E}_p\left\{\log P(x)\right\}\right.$$

Se reparte el signo −

$$DKL = \mathbb{E}_p\left\{\log q_\theta(z|x)\right\} - \mathbb{E}_p\left\{\log P(z|x)\,P(z)\right. +$$

$$\mathbb{E}_p\{\log p(x)\}$$

Ahora se expande $\mathbb{E}_p\{\log p(x)\}$

$$DKL = \mathbb{E}_p\{\log q_{\theta}(z|x) - \mathbb{E}_p\{\log p(z|x)p(z) +$$

$$\int q(z|x)\log p(x)\,dz$$

$p(x)$ no esta en términos de z, entonces sale de la integral:

$$DKL = \mathbb{E}_p\{\log q_{\theta}(z|x) - \mathbb{E}_p\{\log p(z|x)p(z) +$$

$$\log p(x)\int q(z|x)\,dz$$

La integral de una funcion de densidad es igual a 1.

$$DKL = \mathbb{E}_p\{\log q_{\theta}(z|x) - \mathbb{E}_p\{\log p(z|x)p(z) +$$

$$\log p(x) \cdot 1.$$

$$DKL = \mathbb{E}_p\{\log q_{\theta}(z|x) - \mathbb{E}_p\{\log p(z|x)p(z) +$$

$$\log p(x)$$

Se puede estimar la evidencia como:

$$\log p(x) \geq \mathbb{E}_p \{ \log p(z|x) p(z) - \mathbb{E}_p \{ \log q_\theta (z|x)$$

El límite inferior de evidencia ElBO me dice que maximizando

$$\mathbb{E}_p \{ \log p(z|x) p(z) - \mathbb{E}_p \{ \log q_\theta (z|x)$$

Puedo aproximar a $P(x)$, sino también minizando la DKL.

$$\text{ElBO} : \mathbb{E}_p \{ \log p(z|x) Pz) - \mathbb{E}_p \{ \log q_\theta (z|x)$$

se reparte el log:

$$\text{ElBO} : \mathbb{E}_p \{ \log P(z|x) + \log P(z) - \mathbb{E}_p \{ \log q_\theta (z|x)$$

se reparte el Valor Esperado.

$$\text{ElBO} : \mathbb{E}_p \{ \log P(z|x) + \mathbb{E}_p \{ \log P(z) \} - \mathbb{E}_p \{ \log q_\theta (z|x) \}$$

Se reordena la Ecuación

$$ELBO = \mathbb{E}_p\left\{\log p(z|x) - \mathbb{E}_p\left\{\log q_\theta(z|x)\right\} + \mathbb{E}_p\left\{\log p(z)\right\}\right.$$

Se factoriza el signo negativo y se reagrupan los dos terminos.

$$ELBO = \mathbb{E}_p\left\{\log p(z|x)\right\} - \mathbb{E}_p\left\{\log q_\theta(z|x)\right\} - \mathbb{E}_p\left\{\log p(z)\right\}$$

$$ELBO = \underbrace{\mathbb{E}_p\left\{\log p(z|x)\right\}}_{\text{Entropia Cruzada negativa}} - \underbrace{\mathbb{E}_p\left\{\log\left(\frac{q_\theta(z|x)}{p(z)}\right)\right\}}_{DKL.}$$

Modelo de inferencia: la distribución posterior $p(z|x)$, se introduce una aproximación encoder;

$$q(z|x) =$$

$$q(z|x) = N(z; \underbrace{\mu(x)}_{\text{Media}}, \underbrace{\sigma^2(x)}_{\text{Varianza}})$$