Demostrar : $\mathbb{K}C = \mathbb{H}\,\mathbb{K}\,\mathbb{H}$; $\mathbb{H} = \mathbb{I} - \frac{11^T}{N}$

Donde :

$\mathbb{K}$ es la matriz kernel

$\mathbb{H}$ es una matriz centrada que se usa para centrar los datos en torno al origen.

$\mathbb{I}$ es la matriz identidad de tamaño $N \times N$

1 es un vector de columna de tamaño N, lleno de unos

N Es el número de observaciones o datos

Entonces :

$$KC = \left(I - \frac{1}{N} 11^T \right) K \left(I - \frac{1}{N} 11^T \right)$$

Se expande como :

$$KC = K - K\frac{11^T}{N} - \frac{11^T}{N}K + \frac{11^T K 11^T}{N^2}$$

Se expresa el valor del kernel centrado entre dos observaciones x_n y x_m:

$$k_c(x_n, x_m) = k(x_n, x_m) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} k(x_n, x_m) - \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} k(x_n, x_m) + \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} k(x_n, x_m)$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} k_c(x_1, x_1) & \cdots & k_c(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \\ k_c(x_N, x_1) & \cdots & k_c(x_N, x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(x_1, x_1) & \cdots & k(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \\ k(x_N, x_1) & \cdots & k(x_N, x_N) \end{bmatrix}$$

$$- \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{N} k(x_1, x_n) & \cdots & \sum_{n=1}^{N} k(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \\ \sum_{n=1}^{N} k(x_N, x_n) & \cdots & \sum_{n=1}^{N} k(x_N, x_n) \end{bmatrix} - \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{N} k(x_m, x_1) & \cdots & \sum_{m=1}^{N} (x_m, x_n) \\ \vdots & \ddots & \\ \sum_{m=1}^{N} k(x_m, x_1) & \cdots & \sum_{m=1}^{N} k(x_m, x_n) \end{bmatrix}$$

Por desigualdad de Cauchy - Schawarz:

La desigualdad de Cauchy - Schwarz establece que, para cualquier par de vectores x y y en un espacio de producto interno:

$$\left|\mathbb{E}\{\bar{\mathbb{K}}_x \bar{\mathbb{K}}\}\right| \leq \sqrt{\mathbb{E}\{\bar{\mathbb{K}}_x^2\}\,\mathbb{E}\{\bar{\mathbb{K}}_y^2\}}$$

Estimación de probabilidad

$$\hat{P}(\mathbb{K}_x, \mathbb{K}_y) \in [0, 1];$$

Luego se introduce la norma de Frobenius $\|\mathbb{K}\|_F$, que, es una medida de magnitud de la matriz $\mathbb{K}$

$$\|\mathbb{K}\|_F^2 = tr(\mathbb{K}^*\mathbb{K}) = tr(\mathbb{K}\mathbb{K}^*)$$

De acuerdo a la propiedad de simetría en las matrices cuadradas.