Demostrar que :

$$p(t) = \mathcal{N}(t \mid 0, K + \sigma_\epsilon^2 I_N)$$

Vamos a entender el proceso Gaussiano es una colección de variables aleatorias de tal manera que cualquier subconjunto finito de estas variables sigue una distribución gaussiana.

Entonces :

Queremos demostrar que el vector $t$ sigue una distribución normal multivariada con media cero y una covarianza dada por $K + \sigma_\epsilon^2 I_N$

* $K$ es la matríz de covarianza entre Las variables aleatorias.

* $\sigma_\epsilon^2$ Varianza del ruido blanco gaussiano agregado.

* $I_N$ es la matríz de tamaño $N \times N$ Es independiente para cada observación

Así :

$$P(t) = \mathcal{N}(t \mid \mu, \Sigma)$$

Es la forma general de una distribución normal multivariada para un vector aleatorio $t$ de $N$ dimensiones.

donde:

* $\mu$ es el vector de medias.

* $\Sigma$ es la matriz de covarianza

$\mu = 0$, debemos probar que la matriz de covarianza es $K + \sigma_\epsilon^2 I_N$

se incluye el termino de ruido aditivo

$$t = f + \epsilon$$

* $f$ es el valor real generado por el proceso gaussiano con covarianza $K$

* $\epsilon$ es el ruido gaussiano independiente con covarianza $\sigma_\epsilon^2$, es decir $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2 I_N)$

Dado que $t = f + \epsilon$ podemos calcular la covarianza de $t$. La covarianza de

$f$ es $K$, y la covarianza del ruido $\epsilon$ es $\sigma_\epsilon^2 I_N$ porque el ruido es i.i.d.

$$\mathrm{cov}(t) = \mathrm{cov}(f) + \mathrm{cov}(\epsilon) = K + \sigma_\epsilon^2 I_N$$

El vector $t$, es una combinación de un proceso gaussiano $f$ y ruido gaussiano $\epsilon$, sigue una distribución normal multivariada con media cero y matriz de covarianza $K + \sigma_\epsilon^2 I_N$.

Entonces:

$$P(t) = \mathcal{N}(t \mid 0, K + \sigma_\epsilon^2 I_N)$$