$p(x_a|x_b) = ?$ ENCONTREMOS $\mu_{a|b}$ y $\Sigma_{a|b}$ COMPLETANDO CUADRADOS

$$P(x_b|x_a) = \mathcal{N}(x_b|\mu_{b|a}, \Sigma_{b|a})$$

Supongamos: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix}$ ; $\mu = \begin{bmatrix} \mu_a \\ \mu_b \end{bmatrix}$ ; $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{bmatrix}$

$$\mathcal{N}(x|\mu, \Sigma)$$

Con $\Sigma_{ab} = \Sigma_{ba}^T$

A partir de la matriz de Precisión:

$$\Lambda = \Sigma^{-1} ; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{aa} & \Lambda_{ab} \\ \Lambda_{ba} & \Lambda_{bb} \end{bmatrix}$$

Para $p(x_b|x_a)$; con $p(x) = p(x_a, x_b)$

$$-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu) = \frac{1}{2}\left([x_a, x_b] - [\mu_a, \mu_b]\right)^T \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{bmatrix}^{-1}}_{\Lambda} \left([x_a, x_b] - [\mu_a, \mu_b]\right)$$

$$-\frac{1}{2}(x^T - \mu^T)\Sigma^{-1}(x-\mu) = \frac{1}{2}\left[[x_a - \mu_a, x_b - \mu_b]^T \begin{bmatrix} \Lambda_{aa} & \Lambda_{ab} \\ \Lambda_{ba} & \Lambda_{bb} \end{bmatrix} [x_a - \mu_a, x_b - \mu_b]\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[x^T\Sigma^{-1}x - x^T\Sigma^{-1}\mu - \mu^T\Sigma^{-1}x + \mu^T\Sigma^{-1}\mu\right] =$$

$$-\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x + \frac{2}{2}x^T\Sigma^{-1}\mu - \frac{1}{2}\mu^T\Sigma^{-1}\mu$$

$x^T\Sigma^{-1}\mu = \mu^T\Sigma^{-1}x = \langle \mu, x\rangle_{\Sigma^{-1}}$, con $\Sigma > 0 \longrightarrow$ Definida positiva

Por lo tanto:

$$-\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x + x^T\Sigma^{-1}u \underbrace{-\frac{1}{2}u^T\Sigma^{-1}u}_{\text{costante en } X} =$$

$$-\frac{1}{2}\left[[x_a-u_a, x_b-u_b]^T \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & \Delta_{ab} \\ \Delta_{ba} & \Delta_{bb} \end{bmatrix} [x_a-u_a, x_b-u_b]\right]$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2}x^T\Sigma^{-1}x}_{\text{Cuadrático en } X} + \underbrace{x^T\Sigma^{-1}u}_{\text{lineal en } X} + cte = -\frac{1}{2}\left[(x_a-u_a)^T\Delta_{aa} + (x_b-u_b)^T\Delta_{ba}, (x_a-u_a)^T\Delta_{ab} + (x_b-u_b)^T\Delta_{bb}\right][x_a-u_a, x_b-u_b]\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[(x_a-u_a)^T\Delta_{aa}(x_a-u_a) + (x_b-u_b)^T\Delta_{ba}(x_a-u_a) + (x_a-u_a)^T\Delta_{ab}(x_b-u_b) + (x_b-u_b)^T\Delta_{bb}(x_b-u_b)\Big]$$

$P(x_b|x_a)$ : ? Encontraremos $u_{b|a}$ y $\Sigma_{b|a}$ completando cuadrados:

$$P(x) = P([x_a, x_b]) ;$$

$$p(x_b|x_a) = \mathcal{N}(x_b | u_{b|a}, \Sigma_{b|a})$$

Reescribiendo :

$$-\frac{1}{2}(x-u)^T\Sigma^{-1}(x-u) = -\frac{1}{2}x_a^T\Delta_{aa}x_a + \cancel{\frac{1}{2}}u_a^T\Delta_{aa}x_a \ldots$$

$$\underbrace{+\cancel{\frac{1}{2}}x_a^T\Delta_{aa}u_a - \frac{1}{2}u_a^T\Delta_{aa}u_a}$$

$$-\frac{1}{2}x_a^T\Delta_{aa}x_a + x_a^T\Delta_{aa}u_a - \frac{1}{2}u_a^T\Delta_{aa}u_a -$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}x_b^T\Delta_{ba}x_a}_{\text{Lineal}} + \frac{1}{2}u_b^T\Delta_{ba}x_a + \frac{1}{2}\underbrace{x_b^T\Delta_{ba}u_a}_{\text{lineal}} -$$

$$\frac{1}{2}\mu_b^T \Lambda_{ba} \mu_a$$

$$\underbrace{-\frac{1}{2} x_a^T \Lambda_{ab} x_b}_{\text{lineal}} + \frac{1}{2} x_a^T \Lambda_{ab} \mu_b + \underbrace{\frac{1}{2} \mu_a^T \Lambda_{ab} x_b}_{\text{lineal}}$$

$$-\frac{1}{2} \mu_a^T \Lambda_{ab} \mu_b$$

$$-\frac{1}{2} x_b^T \Lambda_{bb} x_b + \cancel{\frac{1}{2}} x_b^T \Lambda_{bb} \mu_b$$

$$+ \cancel{\frac{1}{2}} \underbrace{\mu_b^T \Lambda_{bb} x_b - \frac{1}{2} \mu_b^T \Lambda_{bb} \mu_b}$$

$$\overbrace{-\frac{1}{2} x_b^T \Lambda_{bb} x_b}^{\text{Cuadrático}} + \overbrace{x_b^T \Lambda_{bb} \mu_b}^{\text{lineal}} \underbrace{-\frac{1}{2} \mu_b^T \Lambda_{bb} \mu_b}_{\text{cte}}$$

Para determinar $P(x_b | x_a)$ encontramos la dependencia de $x_b$ con $x_a$ asumiendo que $x_a$ es es constante.

* Buscamos el término cuadrático en $x_b = -\frac{1}{2} x_b^T \Lambda_{bb} x_b$

Del término cuadrático $\Sigma_{b|a} = \Lambda_{bb}^{-1}$

* Ahora buscamos los términos lineales en $x_b$:

$$\cancel{-\frac{1}{2} x_b^T \Delta_{ba} x_a} + \frac{1}{2} x_b^T \Delta_{ba} \mu_a \cancel{- \frac{1}{2} x_a^T \Delta_{ab} x_b} \ldots$$

$$\cancel{+ \frac{1}{2} \mu_a^T \Delta_{ab} x_b} + \cancel{x_b^T \Delta_{bb} \mu_b}$$

Organizamos Terminos:

$$x_b^T \Delta_{bb} \mu_b \underbrace{- \frac{1}{2} x_b^T \Delta_{ba} x_a}_{} + \overbrace{\frac{1}{2} \mu_a^T \Delta_{ab} x_b}^{} -$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} x_a^T \Delta_{ab} x_b}_{} + \overbrace{\frac{1}{2} x_b^T \Delta_{ba} \mu_a}^{}$$

Entonces:

$$x_b^T \Delta_{bb} \mu_b - x_b^T \Delta_{ba} x_a + x_b^T \Delta_{ba} \mu_a =$$

$$x_b^T \left( \Delta_{bb} \mu_b - \Delta_{ba} x_a + \Delta_{ba} \mu_a \right)$$

$$= x_b^T \left( \Delta_{bb} \mu_b + \Delta_{ba} ( \mu_a - x_a \right)$$

* Buscamos despejar el termino lineal en $x$ desde $x^T \Sigma^{-1} \mu$ :

$$\cancel{X_b^T}\,\Sigma_{b|a}^{-1}\mu_{b|a} = \cancel{X_b^T}\left(\Delta_{bb}\mu_b - \Delta_{ba}(\mu_a - X_a)\right)$$

* Sabemos que $\Sigma_{b|a}^{-1} = \Delta_{bb}$ y :

$$\Sigma_{b|a}^{-1}\mu_{b|a} = \Delta_{bb}\mu_b - \Delta_{ba}(\mu_a - X_a)$$

$$\cancel{\Sigma_{b|a}\Sigma_{b|a}^{-1}}\mu_{b|a} = \Sigma_{b|a}\left(\Delta_{bb}\mu_b - \Delta_{ba}(\mu_a - X_a)\right)$$

$$1\ \mu_{b|a} = \cancel{\Sigma_{b|a}\Sigma_{b|a}^{-1}}\mu_b - \Sigma_{b|a}\Sigma_{ba}^{-1}(\mu_a - X_a)$$

$$\boxed{\mu_{b|a} = \mu_b - \Delta_{bb}^{-1}\Delta_{ba}(\mu_a - X_a)}$$

NOTA: Dado que: $\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{bmatrix} = \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & \Delta_{ab} \\ \Delta_{ba} & \Delta_{bb} \end{bmatrix}$

Usando la identidad de la matríz inversa por partes:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -MBD^{-1} \\ -D^{-1}CM & D^{-1}+D^{-1}CMBD^{-1} \end{bmatrix}$$

Siendo $M = (A - BD^{-1}C)^{-1}$; con $M^{-1}$ el complemento de Schur.

Entonces:

$$\Sigma_{a|b} = \Sigma_{aa} - \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}\Sigma_{ba}$$

Para nuestro caso:

$$\boxed{\Sigma_{b|a} = \Sigma_{bb}^{-1} + \Sigma_{bb}^{-1}\Sigma_{ba}\left(\Sigma_{aa} - \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}\Sigma_{ba}\right) \cdots \Sigma_{ab}\Sigma_{bb}^{-1}}$$