

# Число с плавающей запятой

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

**Число с плавающей запятой** (или **число с плавающей точкой**) — экспоненциальная форма представления вещественных (действительных) чисел, в которой число хранится в виде мантиссы и порядка (показателя степени). При этом число с плавающей запятой имеет фиксированную относительную точность и изменяющуюся абсолютную. Используемое наиболее часто представление утверждено в стандарте IEEE 754. Реализация математических операций с числами с плавающей запятой в вычислительных системах может быть как аппаратная, так и программная.

<b>Содержание</b>
<b>«Плавающая запятая» и «плавающая точка»</b>
<b>Происхождение названия</b>
<b>Структура числа</b>
Нормальная и нормализованная формы
<b>Способы записи</b>
<b>Краткий обзор</b>
Диапазон чисел, представимых в формате с плавающей запятой
Машинный эпсилон
<b>См. также</b>
<b>Примечания</b>
<b>Литература</b>
<b>Ссылки</b>

## «Плавающая запятая» и «плавающая точка»

Так как в некоторых, преимущественно англоязычных и англофицированных странах при записи чисел целая часть отделяется от дробной точкой, то в терминологии этих стран фигурирует название «плавающая точка» (англ. *floating point*). Так как в России целая часть числа от дробной традиционно отделяется запятой, то для обозначения того же понятия исторически используется термин «плавающая запятая», однако в настоящее время в русскоязычной литературе и технической документации можно встретить оба варианта.

## Происхождение названия

Название «плавающая запятая» происходит от того, что запятая в позиционном представлении числа (десятичная запятая, или, для компьютеров, двоичная запятая — далее по тексту просто запятая) может быть помещена где угодно относительно цифр в строке. Это положение запятой

указывается отдельно во внутреннем представлении. Таким образом, представление числа в форме с плавающей запятой может рассматриваться как компьютерная реализация экспоненциальной записи чисел.

Преимущество использования представления чисел в формате с плавающей запятой над представлением в формате с фиксированной запятой (и целыми числами) состоит в том, что можно использовать существенно больший диапазон значений при неизменной относительной точности. Например, в форме с фиксированной запятой число, занимающее 6 разрядов в целой части и 2 разряда после запятой, может быть представлено в виде 123 456,78. В свою очередь, в формате с плавающей запятой в тех же 8 разрядах можно записать числа 1,2345678; 1 234 567,8; 0,000012345678; 12 345 678 000 000 000 и так далее, но для этого необходимо иметь дополнительное двухразрядное поле для записи показателей степени основания 10 от 0 до 16, при этом общее число разрядов составит  $8+2=10$ .

Скорость выполнения компьютером операций с числами, представленными в форме с плавающей запятой, измеряется во FLOPS (от англ. floating-point operations per second — «[количество] операций с плавающей запятой в секунду»), и является одной из основных единиц измерения быстродействия вычислительных систем.

## Структура числа

---

Число с плавающей запятой состоит из следующих частей:

- знак мантиссы (указывает на отрицательность или положительность числа),
- мантисса (выражает значение числа без учёта порядка),
- знак порядка,
- порядок (выражает степень основания числа, на которое умножается мантисса).

## Нормальная и нормализованная формы

*Нормальной формой* числа с плавающей запятой называется такая форма, в которой мантисса (без учёта знака) находится на полуинтервале  $[0, 1)$ , то есть  $0 \leq a < 1$ .

Такая форма записи имеет недостаток: некоторые числа записываются неоднозначно (например, 0,0001 можно записать как  $0,000001 \cdot 10^2$ ,  $0,00001 \cdot 10^1$ ,  $0,0001 \cdot 10^0$ ,  $0,001 \cdot 10^{-1}$ ,  $0,01 \cdot 10^{-2}$  и так далее), поэтому распространена (особенно в информатике) также другая форма записи — *нормализованная*, в которой мантисса десятичного числа принимает значения от 1 (включительно) до 10 (исключительно), то есть  $1 \leq a < 10$  (аналогично, мантисса двоичного числа принимает значения от 1 до 2). В такой форме любое число (кроме 0) записывается единственным образом. Недостаток заключается в том, что в таком виде невозможно представить 0, поэтому представление чисел в информатике предусматривает специальный признак (бит) для числа 0.

Старший разряд (целая часть числа) мантиссы двоичного числа (кроме 0) в нормализованном виде равен 1 (так называемая *неявная единица*), поэтому при записи мантиссы числа в ЭВМ старший разряд можно не записывать, что и используется в стандарте IEEE 754. В позиционных системах счисления с основанием большим, чем 2 (в троичной, четверичной и др.), этого свойства нет.

## Способы записи

---

При ограниченных возможностях оформления (например, отображение числа на семисегментном индикаторе), а также при необходимости обеспечить быстрый и удобный ввод чисел, вместо записи вида  $m \cdot b^e$  ( $m$  — мантисса;  $b$  — основание, чаще всего 10;  $e$  — экспонента), записывают лишь мантиссу и показатель степени, разделяя их буквой «Е» (от англ. *exponent*). Основание при этом неявно полагают равным 10. Например, число  $1,528535047 \cdot 10^{-25}$  в этом случае записывается как 1.528535047E-25.

## Краткий обзор

---

Существует несколько способов того, как строки из цифр могут представлять числа:

- Наиболее распространённый путь представления значения числа из строки с цифрами — в виде целого числа — запятая (radix point) по умолчанию находится в конце строки.
- В общем математическом представлении строка из цифр может быть сколь угодно длинной, а положение запятой обозначается путём явной записи символа запятой (или точки) в нужном месте.
- В системах с представлением чисел в формате с фиксированной запятой существует определённое условие относительно положения запятой. Например, в строке из 8 цифр условие может предписывать положение запятой в середине записи (между 4-й и 5-й цифрой). Таким образом, строка «00012345» обозначает число 1,2345 (нули слева всегда можно отбросить).
- В экспоненциальной записи используют стандартный (*нормализованный*) вид представления чисел. Число считается записанным в стандартном (нормализованном) виде, если оно записано в виде  $aq^n$ , где  $a$ , называемое мантиссой, такое, что  $1 \leq a < q$ ,  $n$  — целое, называется показатель степени и  $q$  — целое, основание системы счисления (на письме это обычно 10). То есть в мантиссе запятая помещается сразу после первой значащей (не равной нулю) цифры, считая слева направо, а дальнейшая запись даёт информацию о действительном значении числа. Например, период обращения (на орбите) спутника Юпитера Ио, который равен 152 853,5047 с, в стандартном виде можно записать как  $1,528535047 \cdot 10^5$  с. Побочным эффектом ограничения на значения мантиссы является то, что в такой записи невозможно изобразить число 0.
- Запись в форме с плавающей запятой похожа на запись чисел в стандартном виде, но мантисса и экспонента записываются отдельно. Мантисса записывается в *нормализованном* формате — с фиксированной запятой, подразумеваемой после первой значащей цифры. Возвращаясь к примеру с Ио, запись в форме с плавающей запятой будет иметь мантиссу 1,528535047 и показатель 5. Это означает, что имеется в виду число в  $10^5$  раз больше числа 1,528535047, то есть для получения подразумеваемого числа запятая сдвигается на 5 разрядов вправо. Однако, запись в форме с плавающей запятой используется в основном в электронном представлении чисел, при котором используется основание системы счисления 2, а не 10. Кроме того, в двоичной записи мантисса обычно денормализована, то есть запятая подразумевается до первой цифры, а не после, и целой части вообще не имеется в виду — так появляется возможность и значение 0 сохранить естественным образом. Таким образом, десятичная 9 в двоичном представлении с плавающей запятой будет записана как мантисса +1001000...0 и показатель +0...0100. Отсюда, например, беды с двоичным представлением чисел типа одной десятой (0,1), для которой двоичное представление мантиссы оказывается периодической двоичной дробью — по аналогии с  $1/3$ , которую нельзя конечным количеством цифр записать в десятичной системе счисления.

Запись числа в форме с плавающей запятой позволяет производить вычисления над широким диапазоном величин, сочетая фиксированное количество разрядов и точность. Например, в десятичной системе представления чисел с плавающей запятой (3 разряда) операцию умножения, которую мы бы записали как

$$0,12 \times 0,12 = 0,0144$$

в нормальной форме представляется в виде

$$(1,20 \cdot 10^{-1}) \times (1,20 \cdot 10^{-1}) = (1,44 \cdot 10^{-2}).$$

В формате с фиксированной запятой мы бы получили вынужденное округление

$$0,120 \times 0,120 = 0,014.$$

Мы потеряли крайний правый разряд числа, так как данный формат не позволяет запятой «плавать» по записи числа.

## Диапазон чисел, представимых в формате с плавающей запятой

Диапазон чисел, которые можно записать данным способом, зависит от количества бит, отведённых для представления мантиссы и показателя. На обычной 32-битной вычислительной машине, использующей двойную точность (64 бита), мантисса составляет 1 бит знак + 52 бита, показатель — 1 бит знак + 10 бит. Таким образом получаем диапазон точности примерно от  $4,94 \cdot 10^{-324}$  до  $1,79 \cdot 10^{308}$  (от  $2^{-52} \times 2^{-1022}$  до  $\sim 1 \times 2^{1024}$ ). В стандарте IEEE 754 несколько значений данного типа зарезервировано для обеспечения возможности представления специальных значений. К ним относятся значения NaN (Not a Number, «не число») и +/-INF (Infinity, бесконечность), получающихся в результате операций деления на ноль или при превышении числового диапазона. Также сюда попадают денормализованные числа, у которых мантисса меньше единицы. В специализированных устройствах (например, GPU) поддержка специальных чисел часто отсутствует. Существуют программные пакеты, в которых объём памяти, выделенный под мантиссу и показатель, задаётся программно и ограничивается лишь объёмом доступной памяти ЭВМ (см. Арифметика произвольной точности).

Точность	Одинарная	Двойная	Расширенная
Размер (байты)	4	8	10
Число десятичных знаков	~7.2	~15.9	~19.2
Наименьшее значение (>0), denorm	$1,4 \cdot 10^{-45}$	$5,0 \cdot 10^{-324}$	$1,9 \cdot 10^{-4951}$
Наименьшее значение (>0), normal	$1,2 \cdot 10^{-38}$	$2,3 \cdot 10^{-308}$	$3,4 \cdot 10^{-4932}$
Наибольшее значение	$3,4 \times 10^{+38}$	$1,7 \times 10^{+308}$	$1,1 \times 10^{+4932}$
Поля	S-E-F	S-E-F	S-E-I-F
Размеры полей	1-8-23	1-11-52	1-15-1-63

- S — знак, E — показатель степени, I — целая часть, F — дробная часть
- Так же, как и для целых, знаковый бит — старший.

## Машинный эпсилон

В отличие от чисел с фиксированной запятой, сетка чисел, которая способна отобразить арифметика с плавающей запятой, неравномерна: она более густая для чисел с малыми порядками и более редкая — для чисел с большими порядками. Но относительная погрешность записи чисел одинакова и для малых чисел, и для больших. Машинным эpsilon называется наименьшее положительное число  $\epsilon$  такое, что  $1 \oplus \epsilon \neq 1$  (знаком  $\oplus$  обозначено машинное сложение). Грубо говоря, числа  $a$  и  $b$ , соотносящиеся так, что  $1 < \frac{a}{b} < 1 + \epsilon$ , машина не различает.

Для одинарной точности  $\epsilon = 2^{-24} \approx 5,96 \cdot 10^{-8}$ , то есть, приблизительно 7 значащих цифр. Для двойной точности:  $\epsilon = 2^{-53} \approx 1,11 \cdot 10^{-16}$ , 15 значащих цифр<sup>[1]</sup>.

## См. также

---

- Вычислительная устойчивость
- Фиксированная запятая
- Число половинной точности
- Число одинарной точности
- Число двойной точности
- Число четверной точности
- Десятичный разделитель

## Примечания

---

1. *E. Cheney, David Kincaid. Numerical Mathematics and Computing.* — Cengage Learning, 2012. — 43— р. — ISBN 1-133-71235-5.

## Литература

---

- *Криницкий Н. А., Миронов Г. А., Фролов Г. Д.* Программирование. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. — 384 с.
- *Генри С. Уоррен, мл.* Глава 15. Числа с плавающей точкой // Алгоритмические трюки для программистов = Hacker's Delight. — М.: Вильямс, 2007. — С. 288. — ISBN 0-201-91465-4.

## Ссылки

---

- Что нужно знать про арифметику с плавающей запятой (<https://habrahabr.ru/post/112953/>)

---

Источник — [https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Число\\_с\\_плавающей\\_запятой&oldid=111725832](https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Число_с_плавающей_запятой&oldid=111725832)

---

Эта страница в последний раз была отредактирована 14 января 2021 в 15:31.

Текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike; в отдельных случаях могут действовать дополнительные условия.

Wikipedia® — зарегистрированный товарный знак некоммерческой организации Wikimedia Foundation, Inc.