Линейная алгебра и геометрия

Лектор: Адамович Ольга Маратовна

31 мая 2021 г.

Оглавление

Глава 4

Системы линейных алгебраических уравнений

4.1 Исследование СЛАУ с помощью понятия ранга матрицы

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Данную систему уравнений можно записать в виде $AX = B$, где A – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, B – столбец свободных членов, X – столбец неизвестных, $A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ X \in \mathbf{R}^n,\ B \in \mathbf{R}^n$.

Расширенную матрицу $(A|B)$ с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду:

$$(A|B) \xrightarrow{\text{элем. пр}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & \ldots & a'_{1j_1} & \ldots & \ldots & \ldots & b'_1 \\ 0 & \ldots & 0 & a'_{2j_2} & \ldots & \ldots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a'_{rj_r} & \ldots & b'_r \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & b'_{r+1} \end{array}\right),$$

где $\operatorname{rk} A = r$, $a'_{1j_1}, \ldots, a'_{rj_r}$– ведущие элементы $\Rightarrow \operatorname{rk} A = r$;

$\operatorname{rk}(A|B) = r$, если $b'_{r+1} = 0$, и $\operatorname{rk}(A|B) = r + 1$, если $b'_{r+1} \neq 0$.

Очевидно, что $\operatorname{rk} A \leq \operatorname{rk}(A|B) \leq n$.

Теперь СЛАУ можно классифицировать, используя понятие ранга матрицы:

1) $\operatorname{rk} A < \operatorname{rk}(A|B) \Rightarrow$ несовместная СЛАУ;

2) $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|B) = n \Rightarrow \exists!$ решение – определенная СЛАУ;

3) $\operatorname{rk} A < \operatorname{rk}(A|B) < n \Rightarrow$ неопределенная СЛАУ.

Теорема 1 (Теорема Кронекера-Капелли – критерий совместности СЛАУ)**.**
СЛАУ $AX = B$ является совместной $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|B)$.

Теорема 2 (Критерий определенности СЛАУ).
СЛАУ $AX = B$ является определенной $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|B) = n$.

Следствие.
Квадратная система линейных алгебраических уравнений $AX = B$ $(A \in \mathbf{R}^{n\times n})$ является определенной $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Теорема 3.
СЛАУ $AX = B$ является неопределенной $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|B) < n$.

Следствие.

Квадратная СЛАУ $AX = B,$ $(A \in \mathbf{R}^{n\times n})$ является неопреденной $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|B), \\ \det A = 0. \end{cases}$

4.2 Однородные СЛАУ

$AX = \overline{0}$, где $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbf{R}^n$, $\overline{0} \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$.

Теорема 1.
ОСЛАУ всегда совместна.

Доказательство.
Рассмотрим два способа доказательства:

1) $\overline{0} \in \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ – решение ОСЛАУ (оно называется тривиальным);

2) $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A\,|\,\overline{0}) = \operatorname{rk}(A|B) \overset{T1}{\Longrightarrow}$ ОСЛАУ совместна.

Замечание.
ОСЛАУ является определенной $\Leftrightarrow$ ОСЛАУ имеет только тривиальное решение.
ОСЛАУ является неопределенной $\Leftrightarrow$ ОСЛАУ имеет нетривиальное решение.

Теорема 2.
ОСЛАУ имеет только тривиальное решение $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rk} A = n$.

Следствие.
Квадратная ОСЛАУ имеет только тривиальное решение $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Теорема 3.
ОСЛАУ имеет нетривиальное решение $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rk} A < n$.

Следствие 1.
Квадратная ОСЛАУ имеет нетривиальное решение $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$.

Следствие 2.
В ОСЛАУ $m < n \Rightarrow$ ОСЛАУ имеет нетривиальное решение.

Доказательство.
$\operatorname{rk} A \leq m < n \Rightarrow \exists$ нетривиальное решение.

Теорема 4.
Множество всех решений ОСЛАУ является линейным пространством.

Доказательство.
Обозначим L_0 – множество решений $AX = \overline{0}$, $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $L_0 \subset \mathbf{R}^n$.

Докажем, что L_0 – линейное подпространство в $\mathbf{R}^n$:

1) Пусть $X^1, X^2 \in L_0$, т. е. $AX^1 = \overline{0}$, $AX^2 = \overline{0} \Rightarrow A(X^1 + X^2) = AX^1 + AX^2 = \overline{0} + \overline{0} = = \overline{0} \Rightarrow X^1 + X^2 \in L_0$;

2) $X \in L_0$, т. е. $AX = \overline{0}, \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha \cdot \overline{0} = \overline{0} \Rightarrow \alpha X \in L_0$.

1), 2) $\Rightarrow L_0$ – линейное подпространство в $\mathbf{R}^n \Rightarrow L_0$– линейное пространство.

Замечание.
$L_0 \subset \mathbf{R}^n \Rightarrow \dim L_0 \leq n$.

4.2.1 Фундаментальная система решений ОСЛАУ

Определение.
Произвольный базис пространства решений ОСЛАУ называется ***фундаментальной системой решений*** (ФСР).

Построение нормальной ФСР(естественного базиса L_0)
Пусть $AX = \overline{0}$, $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbf{R}^n$, $\overline{0} \in \mathbf{R}^m$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & a'_{1r+1} & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & a'_{2r+1} & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & a'_{3r+1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & a'_{rr+1} & \dots \end{pmatrix},\ \operatorname{rk} A = r,$$

$$x_1, \dots, x_r \text{ – главные (базисные) неизвестные (} r \text{ штук)},$$
$$x_{r+1}, \dots, x_n \text{ – свободные неизвестные (} n-r \text{ штук)},$$

$$L_0 = \{X_{\text{оо}}\},\ \text{где } X_{\text{оо}} = \begin{pmatrix} -a'_{1r+1}c_1 & -a'_{1r+2}c_2 & \dots & \dots & \dots & -a'_{1n}c_{n-r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ -a'_{rr+1}c_1 & -a'_{1r+2}c_2 & \dots & \dots & \dots & -a'_{rn}c_{n-r} \\ & & c_1 & & & \\ & & c_2 & & & \\ & & \vdots & & & \\ & & c_{n-r} & & & \end{pmatrix} \text{ – общее решение ОСЛАУ, } c_1, c_2, \dots, c_{n-r} \in \mathbf{R}.$$

Выберем естественный базис L_0 – нормальную ФСР.

$$0)\ \Gamma^1 = \begin{pmatrix} -a'_{1r+1} \\ -a'_{2r+1} \\ \vdots \\ -a'_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \Gamma^2 = \begin{pmatrix} -a'_{1r+2} \\ -a'_{2r+2} \\ \vdots \\ -a'_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\dots,\ \Gamma^{n-r} = \begin{pmatrix} -a'_{1n} \\ -a'_{2n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in L_0;$$

(Решение Γ^i получается при выборе значений свободных неизвестных: $x_{r+i} = 1,\ x_{r+j} = 0$ при $j \neq i,\ j = \overline{1, n-r}$.)

1) $\Gamma^1, \Gamma^2, \dots, \Gamma^{n-r}$ – линейно независимая система, т. к. $\operatorname{rk} C = n - r$,

$$\text{где } C = (\Gamma^1, \Gamma^2, \dots, \Gamma^{n-r}) = \begin{pmatrix} -a_{1r+1} & \dots & \dots & \dots & -a_{1n} \\ -a_{2r+1} & \dots & \dots & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{rr+1} & \dots & \dots & \dots & -a_{rn} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

поскольку минор, образуемый всеми столбцами матрицы C и строками $C_{r+1}, C_{r+2}, \dots, C_n$, равен 1.

2) $\Gamma^1, \dots, \Gamma^{n-r}$ – полная система, т. к.

$$X_{\text{оо}} = c_1\Gamma^1 + c_2\Gamma^2 + \dots + c_{n-r}\Gamma^{n-r}.$$

$$\begin{cases} 0), \\ 1), \\ 2) \end{cases} \Rightarrow \langle \Gamma^1, \dots, \Gamma^{n-r} \rangle \text{ – базис } L_0 - \text{ ФСР.}$$

Следствие 3.
$\dim L_0 = n - \operatorname{rk} A$.

Следствие 4.
Любая система линейно независимых решений ОСЛАУ, количество которых равно $n - \operatorname{rk} A$, является ФСР.

Пример.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Составим матрицу A из коэффициентов, стоящих перед неизвестными

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведем её к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \dots \to \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Вернемся к системе уравнений (x_1, x_3, x_5 – главные неизвестные, x_2, x_4 – свободные неизвестные):

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2, \\ x_3 = x_4, \\ x_5 = 0. \end{cases}$$

Найдем размерность пространства решений L_0:

$$\dim L_0 = n - \operatorname{rk} A = 5 - 3 = 2.$$

$$\text{ФСР} = \langle \Gamma^1, \Gamma^2 \rangle,\ \Gamma^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_{oo} = c_1\Gamma^1 + c_2\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.3 Структура общего решения неоднородной СЛАУ

Теорема 1.
Пусть $A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ X \in \mathbf{R}^n,\ \overline{0} \in \mathbf{R}^m,\ B \in \mathbf{R}^m \setminus \{\overline{0}\}$,
$AX = B\,(*)$ – НСЛАУ, $AX = \overline{0}\ (**)$ – соответствующая ОСЛАУ,
$X_{\text{он}}$ – общее решение НСЛАУ $(*)$, $X_{\text{чн}}$ – частное решение НСЛАУ $(*)$,
$X_{\text{оо}}$ – общее решение ОСЛАУ $(**)$, $L = \{X_{\text{он}}\}$ – множество решение НСЛАУ $(*)$,
$L_0 = \{X_{\text{оо}}\}$ – пространство решений ОСЛАУ $(**)$.
Тогда

$$X_{\text{он}} = X_{\text{чн}} + X_{\text{оо}},$$
$$L = \{X_{\text{чн}}\} + L_0 \text{ – линейное многообразие.}$$

Доказательство.

1) $X_{\text{чн}} + X_{\text{оо}}$ – решение $(*)$, т. к.
$A(X_{\text{чн}} + X_{\text{оо}}) = AX_{\text{чн}} + AX_{\text{оо}} = B + \overline{0} = B.$

2) $X_{\text{он}} - X_{\text{чн}}$ – решение $(**)$, т. к.
$A(X_{\text{он}} - X_{\text{чн}}) = AX_{\text{он}} - AX_{\text{чн}} = B - B = \overline{0}.$

1), 2) $\Rightarrow X_{\text{он}} = X_{\text{чн}} + X_{\text{оо}},\ L = \{X_{\text{чн}}\} + L_0.$

Пример.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$D = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(A|B) = 2,$ x_1, x_2 – главные неизвестные,
x_3 – свободная неизвестная.

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -2t. \\ x_3 = t \end{cases},\ t \in \mathbf{R}. \quad (***)$$

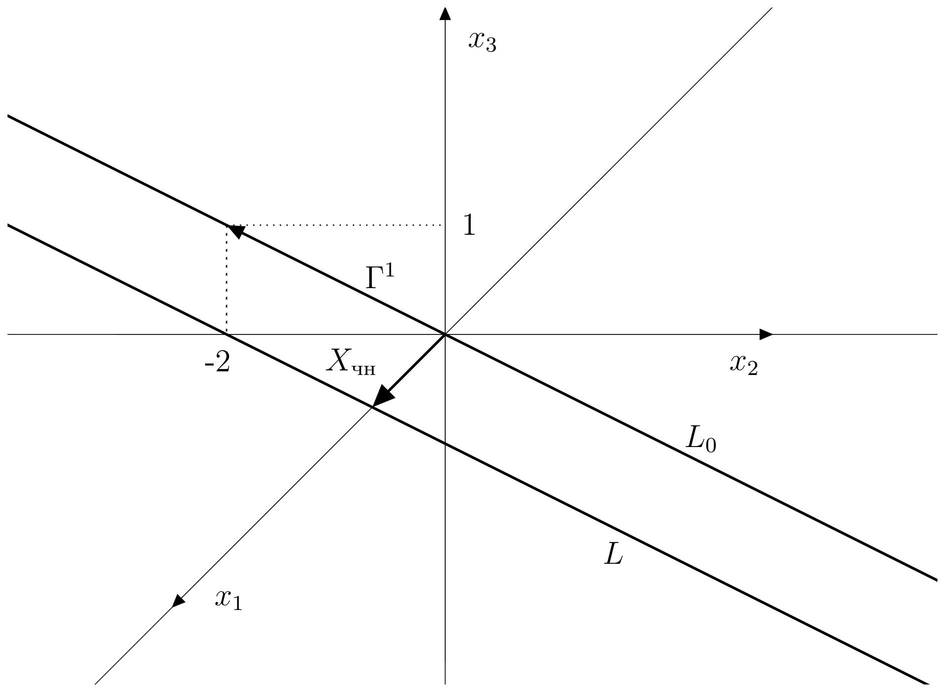
$$X_{\text{он}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = X_{\text{чн}} + X_{\text{оо}} = X_{\text{чн}} + t\Gamma^1.$$

Матрица A соответствующей однородной системы приводится к виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rk} A = 2$,

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -2x_3, \end{cases} \quad \langle \Gamma^1 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \text{ – ФСР.}$$

$(***)$ – параметрические уравнения прямой L, параллельной прямой с направляющим вектором Γ^1.

$$L_0 : \begin{cases} x = 0, \\ y = -2t, \\ z = t, \end{cases} \text{, сдвинутой на вектор } \overline{X_{\text{чн}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Глава 5

Отображения множеств. Линейные отображения

5.1 Сюръективные, инъективные и биективные отображения

Определение.
Отображением f множества M в множество S называется сопоставление каждому $x \in M$ некоторого однозначно определенного $y \in S$.

$f : M \to S$, если $\forall x \in M \longmapsto f(x) \in S$.

Если $y = f(x)$, то $y \in S$ называется ***образом*** $x \in M$, а $x \in M$ – ***прообразом*** $y \in S$.

Определение.
Два отображения $f : M \to S,\ g : M \to S$ называется ***равными***, если $f(x) = g(x)\ \forall x \in M$.

Определение.
$f : M \to S$ сюръективное отображение (***сюръекция***), если $\forall y \in S\ \exists x \in M : f(x) = y$.
$f : M \to S$ инъективное отображение (***инъекция***),
если из $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\ \forall x_1, x_2 \in M$.

$f : M \to S$ биективное отображение (***биекция***) $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ сюръективно,} \\ f \text{ инъективно.} \end{cases}$

Примеры.

1. $f : \mathbf{R}^{n\times n} \to \mathbf{R},\ n \geq 2.$

   $f(x) = \det X$ – сюръекция, т. к. $\forall \alpha \in \mathbf{R}\ \exists X \in \mathbf{R}^{n\times n} : f(X) = \alpha$, например,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \alpha \end{pmatrix},\ \det X = \alpha.$$

   Но при этом $f(x)$ не является инъективным отображением:

$$\text{если } X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \alpha \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то $\det X_1 = \det X_2$, однако $X_1 \neq X_2$, если $\alpha \neq 1$;

2. $g : \mathbf{N} \to \mathbf{Q},\ \forall n \in \mathbf{N}\ g(n) = \frac{n}{n+1} \in \mathbf{Q}$.

   g – не сюръекция, т. к. например, $\dfrac{3}{2} \in \mathbf{Q}$ не имеет прообраза,

   но при этом g – инъективно:

   если $g(n) = g(m)$, т. е. $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{m}{m+1}$, то $nm + n = mn + m \Rightarrow n = m$.

5.2 Композиция (суперпозиция, произведение) отображений множеств

Определение.
Пусть заданы отображения $f : M \to S$ и $g : S \to U$, тогда ***композицией*** (суперпозицией, произведением) этих отображений называется отображение $(g \circ f) : M \to U$ такое, что $\forall x \in M\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in U$.

Замечание.
Операция композиции не является коммутативной.

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Пример. Пусть заданы два отображения $f,\ g$ множества M в себя. Покажем, что их композиция не является коммутативной.

Пусть $M = \{0, 1\},\ f : M \to M : \begin{cases} f(0) = 0, \\ f(1) = 0, \end{cases}\ g : M \to M : \begin{cases} g(0) = 1, \\ g(1) = 0. \end{cases}$

Тогда

$$\begin{cases} (g \circ f)(0) = g(f(0)) = 1, \\ (f \circ g)(0) = f(g(0)) = 0 \end{cases} \Rightarrow g \circ f \neq f \circ g.$$

Утверждение 1.
Композиция отображений ассоциативна.

Если $f : M \to S,\ g : S \to U,\ h : U \to W$, то $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g \circ f"] & W \\ S \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "h \circ g"] & U \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Доказательство.
$\forall x \in M\ (h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) =$
$= ((h \circ g) \circ f)(x) \Rightarrow h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$

Определение.
Отображение $e_M : M \to M$ называется ***тождественным*** на M, если $e_M(x) = x\ \ \forall x \in M$.

Утверждение 2.
Пусть задано некоторое отображение $f : M \to S$.

Тогда

$$\begin{cases} f \circ e_M = f, \\ e_S \circ f = f. \end{cases}$$

Доказательство.
$\forall x \in M\ (f \circ e_M)(x) = f(e_M(x)) = f(x) \Rightarrow f \circ e_M = f.$
$\forall x \in M\ (e_S \circ f)(x) = e_S(f(x)) = f(x) \Rightarrow e_S \circ f = f.$

5.3 Обратное отображение

Определение.
Пусть $f : M \to S,\ g : S \to M$.

Отображение g называется ***обратным отображением*** для f, если $\begin{cases} g \circ f = e_M, \\ f \circ g = e_S. \end{cases}$

Пример.

$$\begin{array}{ll} f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, & f(x) = x^2, \\ g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+, & g(x) = \sqrt{x} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2} = |x| = x & \forall x \in \mathbf{R}_+ \Rightarrow g \circ f = e_{\mathbf{R}_+} \\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^2 = x & \forall x \in \mathbf{R}_+ \Rightarrow f \circ g = e_{\mathbf{R}_+} \end{cases}$$

Утверждение 1.
Если существует обратное отображение, то оно единственно.

Пусть $f : M \to S,\ \exists\ g_1, g_2 : S \to M$:

$$\begin{cases} g_1 \circ f = e_M, \\ f \circ g_1 = e_S \end{cases} \text{ и } \begin{cases} g_2 \circ f = e_M, \\ f \circ g_2 = e_S \end{cases} \Rightarrow g_1 = g_2.$$

Доказательство.
$\forall y \in S\ g_1(y) = (g_1 \circ e_S)(y) = (g_1 \circ (f \circ g_2))(y) = ((g_1 \circ f) \circ g_2)(y) = (e_M \circ g_2)(y) = g_2(y) \Rightarrow g_1 = g_2.$

Отображение, обратное к отображению f, обозначается f^{-1}.

Теорема 1 (Критерий существования обратного отображения)**.**
Если задано отображение $f : M \to S$, то обратное для него f^{-1} существует $\Leftrightarrow$ f – биекция.

Доказательство.
Достаточность ($\Leftarrow$).

Пусть f – биективно $\Rightarrow \forall y \in S\ \exists! x \in M : f(x) = y$.

Положим $f^{-1}(y) = x : f(x) = y$, тогда:

$$\forall x \in M\ (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \Rightarrow (f^{-1} \circ f) = e_M$$
$$\forall y \in S\ (f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y \Rightarrow (f \circ f^{-1}) = e_S.$$

Необходимость ($\Rightarrow$).

Пусть $\exists f^{-1} : S \longrightarrow M : \begin{cases} f^{-1} \circ f = e_M, \\ f \circ f^{-1} = e_S. \end{cases}$

1) Пусть $f^{-1} \circ f = e_M$ и $f(x_1) = f(x_2) \in S$, тогда
$f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ – инъекция;

2) Пусть $f \circ f^{-1} = e_S$, тогда $\forall y \in S\ \exists\ x = f^{-1}(y) : f(x) = y$, т. к.
$f(f^{-1}(y)) = (f \circ f^{-1})(y) = e_s(y) = y \Rightarrow f$ – сюръекция.

1), 2) $\Rightarrow f$ – биекция.

5.4 Линейное отображение

Определение.
Пусть V, W – линейные пространства. Отображение $\varphi : V \to W$ называется ***линейным отображением*** , если:

$$\begin{cases} \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)\ \ \forall v_1, v_2 \in V, \\ \varphi(\lambda v_1) = \lambda\varphi(v_1)\ \ \forall v_1 \in V,\ \forall \lambda \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (\varphi \text{ – гомоморфизм линейных пространств}).$$

Примеры.

1. $\varphi : \mathrm{C}[0, 1] \to \mathbf{R}$.

   $\varphi : f(t) \in \mathrm{C}[0, 1] \longmapsto \int\limits_0^1 f(t)dt \in \mathbf{R},\ \varphi$ – линейное отображение.

   (Линейное отображение линейного пространства над полем $\mathbf{R}$ в поле $\mathbf{R}$ называется ***линейным функционалом***);

2. $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

   $A \in \mathbf{R}^{m\times n},\ X \in \mathbf{R}^n,\ \varphi(X) = AX \in \mathbf{R}^m$, φ – линейное отображение.

Будем обозначать множество линейных отображений V в W $L(V, W)$.

Утверждение 1.
Пусть $\varphi \in L(V, W)$ – линейное отображение, $\overline{0} \in V$. Тогда $\varphi(\overline{0}) = \overline{\overline{0}} \in W$.

Доказательство.
$\varphi(\overline{0}) = \varphi(\overline{0} + \overline{0}) = \varphi(\overline{0}) + \varphi(\overline{0}) \in W$.
$\exists(-\varphi(\overline{0})) \in W \Rightarrow (-\varphi(\overline{0})) + \varphi(\overline{0}) = (\varphi(\overline{0}) + (-\varphi(\overline{0}))) + \varphi(\overline{0}) \Rightarrow \overline{\overline{0}} = \overline{\overline{0}} + \varphi(\overline{0}) \Rightarrow \varphi(\overline{0}) = \overline{\overline{0}}$.

Утверждение 2.
Пусть $\varphi \in L(V, W)$. Тогда если $v_1, v_2 \ldots, v_k$ – линейно зависимая система в V, то $\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_k)$ – линейно зависимая система в W.

Доказательство.
$v_1, v_2, \ldots, v_k$ – линейно зависимая система в $W \Rightarrow$

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbf{R} \text{ такие, что } \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_k^2 \neq 0, \\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = \overline{0}. \end{cases}$$

Тогда $\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1\varphi(v_1) + \alpha_2\varphi(v_2) + \cdots + \alpha_k\varphi(v_k) = \varphi(\overline{0}) = \overline{\overline{0}}$.

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_k^2 \neq 0, \\ \alpha_1\varphi(v_1) + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k\varphi(v_k) = \overline{\overline{0}} \end{cases} \Rightarrow \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k) \text{ – линейно зависимая система в } W.$$

5.5 Изоморфизм линейных пространств

Определение.
Биективное линейное отображение называется ***изоморфизмом*** линейных пространств.

$$\text{Линейные пространства изоморфны } V \simeq W$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists \varphi : V \to W : \begin{cases} \varphi - \text{линейное отображение}, \\ \varphi - \text{биекция}. \end{cases}$$

Пример. Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, тогда $V \simeq \mathbf{R}^n$.
Пусть e – базис $V \Rightarrow \forall v \in V \;\; v = eX_e, X_e \in \mathbf{R}^n$.
Рассмотрим $\Phi_e : V \to \mathbf{R}^n$: $\Phi_e(v) = X_e$.

$$\begin{cases} \Phi_e(v_1 + v_2) = \Phi_e(v_1) + \Phi_e(v_2), \\ \Phi_e(\lambda v) = \lambda \Phi_e(v) \end{cases} \Rightarrow \Phi_e \;\text{ – линейное отображение.}$$

$$\begin{cases} \Phi_e \text{ сюръективно, т. к. } \forall X \in \mathbf{R} \; \exists v = eX \in V : \Phi_e(v) = X, \\ \Phi_e \text{ инъективно, т. к. } \forall v_1 = eX_e^1,\; v_2 = eX_e^2, \text{ если } \Phi_e(v_1) = \Phi_e(v_2), \text{ т. е. } X_e^1 = X_e^2 \Rightarrow v_1 = v_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \Phi_e$ – биективное отображение.
Следовательно, Φ_e – изоморфизм, $V \simeq \mathbf{R}^n$.

Утверждение 1.
Если $\varphi \in L(V, W)$ – изоморфизм линейных пространств, то $\exists \varphi^{-1} \in L(W, V)$ – изоморфизм линейных пространств.

Доказательство.
φ – биекция $\Rightarrow \exists \varphi^{-1} : W \to V$ – биекция.

1. $\forall w_1, w_2 \in W$

   $\varphi^{-1}(w_1 + w_2) = \varphi^{-1}((\varphi \circ \varphi^{-1})(w_1) + (\varphi \circ \varphi^{-1})(w_2)) = \varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2))) =$
   $= (\varphi^{-1} \circ \varphi)(\varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)) = \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)$;

2. $\forall w \in W, \; \forall \alpha \in \mathbf{R}$

   $$\varphi^{-1}(\lambda w) = \varphi^{-1}(\lambda(\varphi \circ \varphi^{-1})(w)) = \varphi^{-1}(\lambda(\varphi(\varphi^{-1}(w)))) = \varphi^{-1}(\varphi(\lambda(\varphi^{-1}(w)))) = \\ = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(\lambda \varphi^{-1}(w)) = \lambda \varphi^{-1}(w).$$

   1), 2) $\Rightarrow \varphi^{-1} \in L(W, V)$.

   Следовательно, φ^{-1} – биективное линейное отображение, т. е. изоморфизм линейных пространств.

Утверждение 2.
Пусть V, W – линейные пространства, $\dim V, \; \dim W < \infty$.
Тогда если $\varphi \in L(V, W)$ – изоморфим, то φ отображает базис V в базис W.

Доказательство.
Пусть $\langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$ – базис V. Докажем, что $\langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$ – базис W.

0) $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \in W$;

1) Пусть $\alpha_1\varphi(e_1)+\dots+\alpha_n\varphi(e_n)=\overline{\overline{0}}\in W$.

   φ – линейное отображение $\Rightarrow \varphi(\alpha_1 e_1+\dots+\alpha_n e_n)=\varphi(\overline{0}),\ \overline{0}\in V$,

   φ – инъективное отображение $\Rightarrow \alpha_1 e_1+\dots+\alpha_n e_n=\overline{0}$,

   $e_1,e_2,\dots,e_n$ – линейно независимая система $\Rightarrow \alpha_1=\dots=\alpha_n=0 \Rightarrow$

   $\Rightarrow \varphi(e_1),\varphi(e_2),\dots,\varphi(e_n)$ – линейно независимая система в W;

2) $\forall w\in W\ \exists v\in V: w=\varphi(v)$, т. к. φ – сюръективное отображение.

$$
\begin{aligned}
&e_1,e_2,\dots,e_n \text{ – полная система в } V \Rightarrow v=e_1x_1+e_2x_2+\dots+e_nx_n \Rightarrow\\
&\Rightarrow w=\varphi(v)=\varphi(e_1x_1+e_2x_2+\dots+e_nx_n)=\varphi(e_1)x_1+\varphi(e_2)x_2+\dots+\varphi(e_n)x_n \Rightarrow\\
&\Rightarrow \varphi(e_1),\varphi(e_2)\dots,\varphi(e_n) \text{ – полная система в } W.
\end{aligned}
$$

$$
\left\{\begin{array}{l} 0),\\ 1),\\ 2)\end{array}\right. \Rightarrow \langle\varphi(e_1),\varphi(e_2),\dots,\varphi(e_n)\rangle \text{ – базис } W.
$$

Следствие (Критерий изоморфности конечномерных линейных пространств)**.**
Пусть $V,\ W$ – конечномерные линейные пространства. Тогда $V\simeq W \Leftrightarrow \dim V=\dim W$.

Доказательство.
Необходимость($\Rightarrow$).

$V\simeq W \Rightarrow \exists\varphi\in L(V,W)$ – изоморфизм, переводящий базис V в базис $W \Rightarrow$
$\Rightarrow \dim V=\dim W$.

Достаточность($\Leftarrow$).

$\dim V=\dim W=n<\infty \Rightarrow \exists\Phi_e^V: V\to\mathbf{R}^n,\ \exists\Phi_f^W: W\to\mathbf{R}^n$ – изоморфизмы.
Значит, $(\Phi_f^W)^{-1}\circ\Phi_e^V: V\to W$ – изоморфизм $\Rightarrow V\simeq W$.

Глава 6

Линейные операторы

6.1 Определения и примеры

Определение.
Линейное отображение линейного пространства в себя называется ***линейным оператором***.

Множество всех линейных операторов пространства V обозначается $L(V,V)$.

Пусть V – линейное пространство. Тогда $A \in L(V,V)$ – линейный оператор, если выполнено:

$$\begin{cases} 0)\ A: V \to V\ (Av \in V\ \ \forall v \in V); \\ 1)\ A(v_1+v_2) = Av_1 + Av_2\ \ \forall v_1, v_2 \in V; \\ 2)\ A(\lambda v) = \lambda Av\ \ \forall v \in V,\ \forall \lambda \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Примеры.

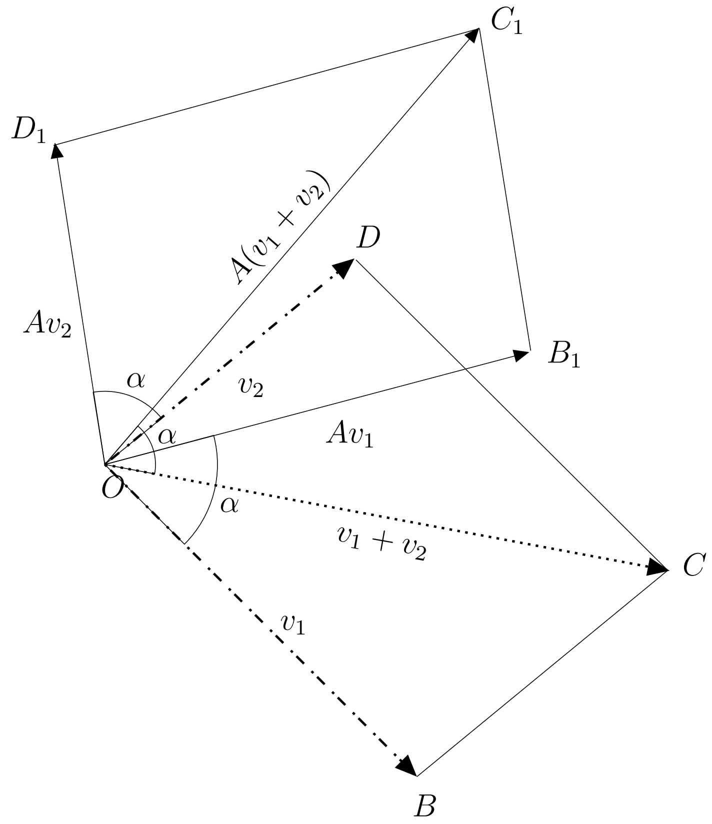
1. $V^3,\ A: V^3 \to V^3,\ \forall v \in V^3\ Av = \alpha v$, где $\alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \neq 0$ – гомотетия (преобразование подобия).

   0) $A\overline{v} = \alpha\overline{v} \in V^3\ \ \forall \overline{v} \in V^3 \Rightarrow A: V^3 \to V^3$;
   1) $A(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) = \alpha(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) = \alpha\overline{v}_1 + \alpha\overline{v}_2 = A\overline{v}_1 + A\overline{v}_2\ \ \forall \overline{v_1}, \overline{v}_2 \in V^3$;
   2) $A(\lambda\overline{v}) = \alpha(\lambda\overline{v}) = (\alpha\lambda)\overline{v} = \lambda A\overline{v}\ \ \forall \overline{v} \in V^3,\ \forall \lambda \in \mathbf{R}$.

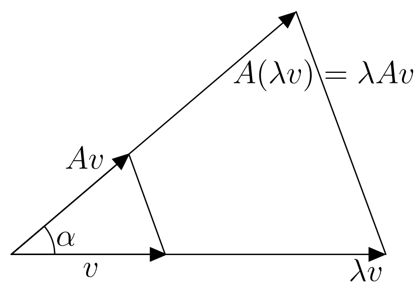
   $\begin{cases} 0), \\ 1), \\ 2) \end{cases} \Rightarrow A$ – линейный оператор, $A \in L(V^3, V^3)$;

2. $V^2,\ A$ – поворот вокруг точки O на угол $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ против часовой стрелки.

   0) $A: V^2 \to V^2$;
   1) $A(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) = A\overline{v}_1 + A\overline{v}_2\ \ \forall \overline{v}_1, \overline{v}_2 \in V^2$.
      При повороте параллелограмм $OBCD$ отображается в параллелограмм $OB_1C_1D_1 \Rightarrow$ диагональ OC переходит в диагональ OC_1.



2) $A(\lambda\overline{v}) = \lambda A\overline{v}\ \ \forall\overline{v}\in V^2, \forall\lambda\in\mathbf{R}$.
Рисунок иллюстрирует случай $\lambda > 0$. Случаи $\lambda < 0$ и $\lambda = 0$ предлагаются для самостоятельного рассмотрения.



$$\left\{\begin{array}{l} 0), \\ 1), \\ 2) \end{array}\right. \Rightarrow A \text{ – линейный оператор, } A\in L(V^2,V^2);$$

3. $P_n,\ Dp(t) = \dfrac{d}{dt}\,p(t) = p'(t)$ – оператор дифференцирования в P_n.

0) $Dp(t)\in P_{n-1}\subset P_n\ \ \forall p(t)\in P_n \Rightarrow D: P_n\to P_n$;

1) $D(p_1+p_2) = (p_1+p_2)' = p_1'+p_2' = Dp_1 + Dp_2\ \ \forall p_1,p_2\in P_n$;

2) $D(\lambda p) = (\lambda p)' = \lambda p' = \lambda Dp\ \ \forall p\in P_n, \forall\lambda\in\mathbf{R}$.

$$\left\{\begin{array}{l} 0), \\ 1), \\ 2) \end{array}\right. \Rightarrow D \text{ – линейный оператор, } A\in L(P_n,P_n);$$

4. $\mathbf{R}^n,\ B \in \mathbf{R}^{n\times n},\ X \in \mathbf{R}^n\ A(X) = BX$ – оператор левого умножения на матрицу.

   0) $A(X) = BX \in \mathbf{R}^n\ \ \forall X \in \mathbf{R}^n \Rightarrow A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$;

   1) $A(X^1 + X^2) = B(X^1 + X^2) = BX^1 + BX^2 = A(X^1) + A(X^2)\ \ \forall X^1, X^2 \in \mathbf{R}^n$;

   2) $A(\lambda X) = B(\lambda X) = \lambda(BX) = \lambda A(X)\ \ \forall X \in \mathbf{R}^n, \forall \lambda \in \mathbf{R}$.

   $\left\{\begin{array}{l} 0), \\ 1), \\ 2) \end{array}\right. \Rightarrow A$ – линейный оператор, $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$;

5. $P_n,\ p(t) \in P_n,\ Ap(t) = tp(t)$.

   A не является линейным оператором, т. к. $tp(t) \notin P_n$, если $\deg p(t) = n$.

6.2 Матрица линейного оператора в данном базисе

Рассмотрим конечномерное линейное пространство $V,\ \dim V = n < \infty,\ A \in L(V, V)$. Пусть e – некоторый базис $V \Rightarrow \forall v \in V : v = eX_e,\ X_e \in \mathbf{R}^n$.

Тогда

$$Av = A(eX_e) = A(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1Ae_1 + \cdots + x_nAe_n =$$
$$= x_1eA^1 + \cdots + x_neA^n = e(x_1A^1 + \cdots + x_nA^n) = e(A^1A^2 \dots A^n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = eA_eX_e.$$

Определение.
Матрица $A_e = (A^1A^2 \dots A^n)$, где A^j —- столбец координат Ae_j – образа базисного вектора e_j в базисе e, называется ***матрицей линейного оператора*** $A \in L(V, V)$ ***в базисе*** e.

Если X_e – столбец координат вектора v в базисе e, то A_eX_e - столбец координат Av – образа вектора v в этом базисе.

Примеры.

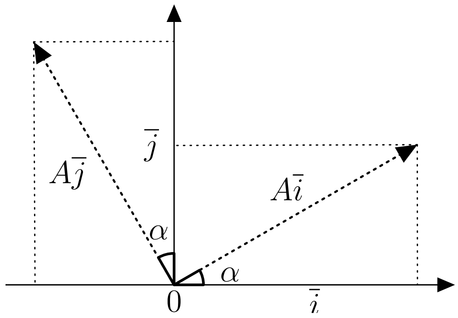
1. $A \in L(V^3, V^3) : Av = \alpha v,\ \alpha \neq 0,\ \alpha \in \mathbf{R};\ e = \langle \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} \rangle$ – естественный базис V^3.

   Подействуем оператором на базисные векторы:

$$A\bar{i} = \alpha\bar{i} = e\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A\bar{j} = \alpha\bar{j} = e\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix},\ A\bar{k} = \alpha\bar{k} = e\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

$$A_e = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ – скалярная матрица;}$$

2. $A \in L(V^2, V^2), A$ – поворот на $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ против часовой стрелки, $e = \langle \bar{i}, \bar{j} \rangle$ – базис V^2.



$$A\bar{i} = \cos(\alpha)\bar{i} + \sin(\alpha)\bar{j} = e\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix},\ A\bar{j} = -\sin(\alpha)\bar{i} + \cos(\alpha)\bar{j} = e\begin{pmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

$A_e = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ – матрица поворота на угол α против часовой стрелки;

3. $D \in L(P_n, P_n),\ \dim P_n = n+1,\ Dp(t) = p'(t)$,
$e = \langle t^n, t^{n-1}, \ldots, 1\rangle$ – естественный базис P_n.

$$Dt^n = nt^{n-1} = e\begin{pmatrix}0\\ n\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, Dt^{n-1} = (n-1)t^{n-2} = e\begin{pmatrix}0\\ 0\\ n-1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \ldots, D(1) = 0 = e\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

$$D_e = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ n & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ 0 & n-1 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix};$$

4. $A \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n),\ B \in \mathbf{R}^{n\times n},\ X \in \mathbf{R}^n,\ A(X) = BX$,
$e = \langle E^1, E^2, \ldots, E^n\rangle$ – естественный базис $\mathbf{R}^n$.

$$A(E^1) = BE^1 = \begin{pmatrix}b_{11} & \ldots & b_{1n}\\ b_{21} & \ldots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n1} & \ldots & b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_{11}\\ b_{21}\\ \vdots\\ b_{n1}\end{pmatrix} = B^1 = eB^1.$$

Аналогично действуя на остальные базисные векторы, получаем $A(E^j) = eB^j$, $j = \overline{2, n}$.

$$A_e = \begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn}\end{pmatrix} = B,$$

т. е. матрица оператора левого умножения на матрицу B в пространстве $\mathbf{R}^n$ в естественном базисе $A_e = B$.

Утверждение 1.
Пусть $A \in L(V, V)$, $\dim V = n < \infty$, e – базис V, $v = eX_e$.

Тогда, если $Av = eBX_e$, где $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$, то $A_e = B$.

Доказательство.

$$e_j = e \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = eE^j.$$

$Ae_j = eBE^j = eB^j \Rightarrow A_e = (B^1 B^2 \dots B^j \dots B^n)$.

Теорема 1.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, e – базис V.

$\Psi_e : L(V, V) \to \mathbf{R}^{n\times n}$, $\Psi_e(A) = A_e \quad \forall A \in L(V, V)$.

Тогда Ψ_e – биекция.

Доказательство.

1. Инъективность.

   Пусть $A_1, A_2 \in L(V, V)$ и $\Psi_e(A_1) = \Psi_e(A_2) = B \Rightarrow$

   $\Rightarrow \forall v = eX_e \in V \quad \begin{cases} A_1 v = eBX_e, \\ A_2 v = eBX_e \end{cases} \Rightarrow A_1 = A_2 \Rightarrow \Psi_e$ инъективно;

2. Сюръективность.

   $\forall B \in \mathbf{R}^{n\times n}\ \exists A \in L(V, V) : \Psi_e(A) = A_e = B$, а именно рассмотрим отображение A:
   $\forall v = eX_e \in V \quad Av = eBX_e$.

   0) $Av = eBX_e \in V \quad \forall v \in V \Rightarrow A : V \to V$;
   1) $A(v_1 + v_2) = eB(X_e^1 + X_e^2) = eBX_e^1 + eBX_e^2 = Av_1 + Av_2 \quad \forall v_1, v_2 \in V$;
   2) $A(\lambda v) = eB(\lambda X_e) = \lambda eBX_e = \lambda Av \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbf{R}$.

   $\begin{cases} 0), \\ 1), \\ 2) \end{cases} \Rightarrow A \in L(V, V)$.

   Из утв. 1 $\Rightarrow B = A_e = \Psi_e(A)$.

Из пунктов 1 и 2 следует, что Ψ_e – биекция.

6.3 Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Утверждение 1.
Пусть V – конечномерное линейное пространство, e, f – два его базиса, $T_{e\to f}$ – матрица перехода от базиса e к базису f, $A \in L(V, V)$, A_e и A_f – матрицы линейного оператора A в базисах e и f соответственно.

Тогда
$$A_f = T_{e\to f}^{-1} A_e T_{e\to f},$$
$$A_e = T_{e\to f} A_f T_{e\to f}^{-1}.$$

Доказательство.
$f = e\,T_{e\to f},\; e = f\,T_{f\to e} = f\,T^{-1}_{e\to f}$.

$\forall v \in V\;\; v = eX_e = fX_f,\; X_e = T_{e\to f}X_f,\; X_f = T_{f\to e}X_e = T^{-1}_{e\to f}X_e$.

$$Av = A(eX_e) = eA_eX_e = (f\,T^{-1}_{e\to f})A_e(T_{e\to f}\,X_f) =$$
$$= f(T^{-1}_{e\to f}\,A_e\,T_{e\to f})X_f = fA_fX_f = A(fX_f) = Av.$$

Следовательно, $A_f = T^{-1}_{e\to f}\,A_e\,T_{e\to f}$.

Тогда $A_e = T^{-1}_{f\to e}\,A_f\,T_{f\to e} = T_{e\to f}\,A_f\,T^{-1}_{e\to f}$.

6.4 Подобные матрицы

Определение.
Матрица B подобна A ($B \sim A$), если $B = C^{-1}AC$, где $B,\; A,\; C \in \mathbf{R}^{n\times n},\; \det C \neq 0$.

Утверждение 1.
$B \sim A \Leftrightarrow A,\; B$ – матрицы некоторого оператора в различных базисах конечномерного пространства V.

Доказательство.
Достаточность($\Leftarrow$).

Очевидно из закона преобразования матрицы оператора при переходе к новому базису.

Необходимость($\Rightarrow$).

Пусть $B = C^{-1}AC$, где $\det C \neq 0$,
e – базис V, $\forall v = eX_e$ положим $Gv = eAX_e \Rightarrow G \in L(V,V),\; G_e = A$;

Пусть $f = eC$, f – базис V, $C = T_{e\to f} \Rightarrow G_f = T^{-1}_{e\to f}G_eT_{e\to f} = C^{-1}AC = B$.

6.4.1 Свойства подобных матриц

Утверждение 2.
Отношение $A \sim B$ является отношением эквивалентности, т. е.

1) $A \sim A$ (рефлексивность);

2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (симметричность);

3) $A \sim B,\; B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (транзитивность).

Утверждение 3.
Отношение эквивалентности разбивает $\mathbf{R}^{n\times n}$ на непересекающиеся классы подобных матриц.

Утверждения 2 и 3 предлагается доказать самостоятельно.

6.5 Алгебра линейных операторов

Определение.
Определим в $L(V,V)$ операции сложения, умножения на число, умножения,
положив $\forall v \in V$

1. $(A_1 + A_2)v = A_1 v + A_2 v \ \ \forall A_1, A_2 \in L(V,V)$;
2. $(\lambda A)v = \lambda(Av) \ \ \forall \lambda \in \mathbf{R}, \ \forall A \in L(V,V)$;
3. $(A_1 A_2)v = A_1(A_2 v) \ \ \forall A_1, A_2 \in L(V,V)$.

Теорема 1.
Операции в $L(V,V)$ определены корректно. Если $A_1, A_2 \in L(V,V)$, то

1. $A_1 + A_2 \in L(V,V)$;
2. $\lambda A_1 \in L(V,V), \ \forall \lambda \in \mathbf{R}$;
3. $A_1 A_2 \in L(V,V)$.

Доказательство.
Докажем пункт 1.

0) $(A_1 + A_2)v \in V \ \ \forall v \in V$;

1) $(A_1 + A_2)(v_1 + v_2) = A_1(v_1 + v_2) + A_2(v_1 + v_2) = A_1 v_1 + A_1 v_2 + A_2 v_1 + A_2 v_2 =$
$= (A_1 + A_2)v_1 + (A_1 + A_2)v_2 \ \ \forall v_1, v_2 \in V$;

2) $(A_1 + A_2)(\alpha v) = A_1(\alpha v) + A_2(\alpha v) = \alpha A_1 v + \alpha A_2 v = \alpha(A_1 + A_2)v \ \forall \alpha \in \mathbf{R}, \ \forall v \in V$.

$$\begin{cases} 0), \\ 1), \\ 2) \end{cases} \Rightarrow A_1 + A_2 \in L(V,V).$$

Аналогично доказываются пункты 2 и 3.

Теорема 2.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, e – базис V,
$\Psi_e : L(V,V) \to \mathbf{R}^{n\times n}, \ \forall A \in L(V,V) \ \ \Psi_e(A) = A_e$.
Тогда

1. $\Psi_e(A_1 + A_2) = \Psi_e(A_1) + \Psi_e(A_2) \Leftrightarrow (A_1 + A_2)_e = A_{1_e} + A_{2_e} \ \ \forall A_1, A_2 \in L(V,V)$;
2. $\Psi_e(\lambda A) = \lambda \Psi_e(A) \Leftrightarrow (\lambda A)_e = \lambda A_e \ \ \forall A \in L(V,V), \forall \lambda \in \mathbf{R}$;
3. $\Psi_e(A_2 A_1) = \Psi_e(A_2)\Psi_e(A_1) \Leftrightarrow (A_2 A_1)_e = A_{2_e} A_{1_e} \ \ \forall A_1, A_2 \in L(V,V)$.

Доказательство.
Докажем пункт 1.
Пусть $v = eX_e$.

$$\begin{cases} (A_1 + A_2)v = e(A_1 + A_2)_e X_e, \\ A_1 v + A_2 v = eA_{1e}X_e + eA_{2e}X_e = e(A_{1e} + A_{2e})X_e \end{cases} \Rightarrow (A_1 + A_2)_e = A_{1e} + A_{2e} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Psi_e(A_1 + A_2) = \Psi_e(A_1) + \Psi_e(A_2).$$

Пункты 2 и 3 доказываются аналогично.

Теорема 3.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, e – базис V.
Тогда $\Psi_e : L(V,V) \to \mathbf{R}^{n\times n}$ – изоморфизм алгебр.

$$L(V,V) \simeq \mathbf{R}^{n\times n}.$$

Доказательство.
Из теоремы 1 пункта 6.2 следует, что Ψ_e – биекция.
Из теоремы 2 настоящего пункта следует, что Ψ_e – гомоморфизм алгебр.
Значит, Ψ_e – изоморфизм.

Таким образом, $L(V, V)$ – ***алгебра линейных операторов***, действующих в пространстве V, изоморфна алгебре матриц $\mathbf{R}^{n\times n}$ – ассоциативной алгебре с единицей $(\Psi_e(e_V) = E)$.

Следствие 1.
Все алгебраические свойства, имеющиеся в $\mathbf{R}^{n\times n}$, верны и для $L(V, V)$, где V – конечномерное пространство, $\dim V = n$.

Следствие 2.
Пусть $\exists\, A^{-1}$ – обратный линейный оператор для $A \in L(V, V)$, где V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, e – базис V.
Тогда $(A^{-1})_e = (A_e)^{-1}$.

Доказательство.
$$\begin{cases} A^{-1}A = e_V = \varepsilon, \\ AA^{-1} = e_V = \varepsilon; \end{cases} \begin{cases} \Psi_e(A^{-1})\ \Psi_e(A) = E, \\ \Psi_e(A)\ \Psi_e(A^{-1}) = E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A^{-1})_e A_e = E \\ A_e (A^{-1})_e = E \end{cases} \Rightarrow (A^{-1})_e = A_e^{-1}.$$

Следствие 3 (Критерий существования обратного оператора для линейного оператора, действующего в конечномерном пространстве)**.**
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, e – базис V, $A \in L(V, V)$.
Тогда
$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A_e \neq 0.$$

Доказательство.
$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \exists A_e^{-1} \Leftrightarrow \det A_e \neq 0$.

6.6 Образ линейного отображения

Определение.
Пусть V, W – линейные пространства, $\varphi \in L(V, W)$ – линейное отображение.
Образом линейного отображения $\varphi \in L(V, W)$ называется подмножество
$$\operatorname{Im}\varphi = \{w \in W : \exists v \in V : w = \varphi(v)\} \subset W.$$

Примеры.

1. $D : \mathbf{R}[t] \to \mathbf{R}[t]$.
$Dp(t) = \dfrac{d}{dt}\, p(t)$,
$\operatorname{Im} D = \mathbf{R}[t]$;

2. $D : P_n \to P_n$.
$Dp(t) = \dfrac{d}{dt}\, p(t)$,
$\operatorname{Im} D = P_{n-1}$;

3. A – оператор проектирования на плоскость $P : 2x - y - z = 0$.
$$\operatorname{Im} A = \{\overline{v} \in V : \overline{v} \perp \overline{n_p}\} = \{\overline{v} = e \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : (v, n) = 0\} = \{\overline{v} = e \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y - z = 0\}.$$

Утверждение 1.
Линейное отображение $\varphi \in L(V, W)$ сюръективно $\Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi = W$.

Утверждение 2.
Пусть $\varphi \in L(V, W)$ – линейное отображение. Тогда его образ $\operatorname{Im}\varphi$ является линейным подпространством пространства W.

Доказательство.

0) $\operatorname{Im}\varphi \neq \varnothing$ по смыслу определения линейного отображения;

1) $w_1, w_2 \in \operatorname{Im}\varphi$, т. е. $\exists\, v_1, v_2 : w_1 = \varphi(v_1), w_2 = \varphi(v_2) \Rightarrow$
$\Rightarrow w_1 + w_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \varphi(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \operatorname{Im}\varphi$;

2) $w \in \operatorname{Im}\varphi$, т. е. $\exists\, v : w = \varphi(v) \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbf{R}\ \alpha w = \alpha\varphi(v) = \varphi(\alpha v) \Rightarrow \alpha w \in \operatorname{Im}\varphi$.

$$\left\{\begin{array}{l} 0), \\ 1), \\ 2) \end{array}\right. \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \text{ – линейное подпространство } W.$$

Утверждение 3.
Пусть $\varphi \in L(V, W)$ – линейное отображение, $\dim V = n < \infty$, $e = \langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ – базис V.

Тогда
$$\operatorname{Im}\varphi = L[\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)].$$

Доказательство.

1. Если $w \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow \exists\, v \in V : w = \varphi(v)$.
$v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \Rightarrow w = \varphi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) =$
$= x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n) \in L[\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)] \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi \subset L[\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)]$;

2. Если $w \in L[\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)] \Rightarrow w = x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n) =$
$= \varphi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = \varphi(v) \Rightarrow w \in \operatorname{Im}\varphi \Rightarrow L[\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)] \subset \operatorname{Im}\varphi$;

Утверждение 4.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, e – базис, $A \in L(V, V)$ – линейный оператор.

Тогда
$$\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rk} A_e.$$

Доказательство.

$$\dim \operatorname{Im} A = \dim L[Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n] = \operatorname{rk}\{Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n\} =$$
$$= \operatorname{rk}\{eA^1, eA^2, \ldots, eA^n\} = \operatorname{rk}\{A^1, A^2, \ldots, A^n\} = \operatorname{rk} A_e.$$

Следствие 1.
Ранг матрицы линейного оператора в конечномерном пространстве $\operatorname{rk} A_e$ не зависит от выбора базиса, т. е. является инвариантом оператора.

Определение.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, $A \in L(V, V)$.

Рангом линейного оператора называется размерность его образа, т. е. $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rk} A_e$ для любого базиса e пространства V.

6.7 Ядро линейного отображения

Определение.
Пусть V, W – линейные пространства, $\varphi \in L(V,W)$ – линейное отображение. ***Ядром линейного отображения*** $\varphi : V \to W$ называется подмножество

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V : \varphi(v) = \overline{\overline{0}} \in W\} \subset V.$$

Примеры.

1. $D : \mathbf{R}[t] \to \mathbf{R}[t]$.

$Dp(t) = \dfrac{d}{dt}\, p(t)$,

$\operatorname{Ker} D = P_0$;

2. $D : P_n \to P_n$.

$Dp(t) = \dfrac{d}{dt}\, p(t)$,

$\operatorname{Ker} D = P_0$;

3. A – оператор проектирования на плоскость $P : 2x - y - z = 0$.

$\operatorname{Ker} A = \{\overline{v} \in V : \overline{v} \parallel \overline{n_p}\} = \{\overline{v} = e\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbf{R}\}$.

Утверждение 1.
Пусть $\varphi \in L(V,W)$ – линейное отображение. Тогда его ядро $\operatorname{Ker}\varphi$ является линейным подпространством пространства V.

Доказательство.

0) $\operatorname{Ker}\varphi \neq \varnothing$, т. к. $\varphi(\overline{0}) = \overline{\overline{0}} \Rightarrow \overline{0} \in \operatorname{Ker}\varphi$;

1) $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$, т. е. $\varphi(v_1) = \overline{\overline{0}}, \varphi(v_2) = \overline{\overline{0}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \overline{\overline{0}} + \overline{\overline{0}} = \overline{\overline{0}} \Rightarrow v_1 + v_2 \in \operatorname{Ker}\varphi;$$

2) $v \in \operatorname{Ker}\varphi$, т. е. $\varphi(v) = \overline{\overline{0}} \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbf{R}\ \varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v) = \alpha\overline{\overline{0}} = \overline{\overline{0}} \Rightarrow \alpha v \in \operatorname{Ker}\varphi$.

$$\left\{\begin{array}{l} 0), \\ 1), \\ 2) \end{array}\right. \Rightarrow \operatorname{Ker}\varphi \text{ – линейное подпространство } V.$$

Определение.
Пусть $\varphi \in L(V,W)$ – линейное отображение, $w \in W$.

Полным прообразом w называется множество $\varphi^{-1}(w) = \{v \in V : \varphi(v) = w\}$.

Замечание.
Обозначение $\varphi^{-1}(w)$, используемое для обозначения полного прообраза, не предполагает существование обратного для φ отображения φ^{-1}.

Утверждение 2.
Пусть $\varphi \in L(V,W)$ – линейное отображение, $w \in \operatorname{Im}\varphi$, $\widetilde{v} \in V : \varphi(\widetilde{v}) = w$.

Тогда

$$\varphi^{-1}(w) = \{\widetilde{v}\} + \operatorname{Ker}\varphi \text{ – линейное многообразие.}$$

Доказательство.

1. Пусть $v \in \{\widetilde{v}\} + \operatorname{Ker}\varphi$, $v = \widetilde{v} + v_1$, где $\varphi(v_1) = \overline{\overline{0}}$.

Тогда $\varphi(v) = \varphi(\widetilde{v} + v_1) = \varphi(\widetilde{v}) + \varphi(v_1) = w + \overline{\overline{0}} = w \Rightarrow$

$$\Rightarrow v \in \varphi^{-1}(w) \Rightarrow \{\widetilde{v}\} + \operatorname{Ker}\varphi \subset \varphi^{-1}(w).$$

2. Пусть $v \in \varphi^{-1}(w)$, т. е. $\varphi(v) = w = \varphi(\widetilde{v}) \Rightarrow \varphi(v) - \varphi(\widetilde{v}) = \overline{\overline{0}} \Rightarrow$
$$\Rightarrow \varphi(v - \widetilde{v}) = \overline{\overline{0}} \Rightarrow v - \widetilde{v} \in \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow v \in \{\widetilde{v}\} + \operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow \varphi^{-1}(w) \subset \{\widetilde{v}\} + \operatorname{Ker}\varphi.$$

Пример. $\varphi \in L(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbf{R}^n$, $\varphi(X) = AX \in \mathbf{R}^m$.
$$B \in \mathbf{R}^m \quad \varphi^{-1}(B) = \{X \in \mathbf{R}^n : AX = B\} = \{X_{\text{чн}}\} + \{X_{\text{оо}}\} = \{X_{\text{чн}}\} + \operatorname{Ker}\varphi.$$

Утверждение 3.
Пусть $\varphi \in L(V, W)$ – линейное отображение.
$$\varphi \text{ инъективно} \Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{\overline{0}\} \text{ – тривиально.}$$

Доказательство.
φ – инъективно $\Leftrightarrow$ $\forall w \in \operatorname{Im}\varphi$ полный прообраз $\varphi^{-1}(w)$ состоит из одного элемента $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{\overline{0}\}$.

Утверждение 4.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, e – базис V, $A \in L(V, V)$.
Тогда $\operatorname{Ker} A = \{eX_{\text{оо}}\}$, где $X_{\text{оо}}$ – общее решение $A_e X_e = \overline{0}$.

Доказательство.
$\operatorname{Ker} A = \{v \in V : Av = \overline{0}\} = \{v = eX_e : A_e\, X_e = \overline{0}\} = \{eX_{\text{оо}}\}$.

Следствие 1.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, e – базис V, $A \in L(V, V)$.
Тогда $\dim \operatorname{Ker} A = \dim V - \operatorname{rk} A_e = n - \operatorname{rk} A_e$.

Следствие 2.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, $A \in L(V, V)$.
Тогда $\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim V$.

Определение.
Дефектом линейного оператора $\operatorname{def} A$ называется $\dim \operatorname{Ker} A$ – размерность его ядра.

Следствие 3.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, $A \in L(V, V)$.
Тогда $\operatorname{def} A + \operatorname{rk} A = \dim V$.

6.8 Критерий существования обратного линейного оператора в конечномерном пространстве

Утверждение 1.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, $A \in L(V, V)$.
Тогда A сюръективен $\Leftrightarrow$ A инъективен $\Leftrightarrow$ A биективен.

Доказательство.
A сюръективен $\Leftrightarrow \operatorname{Im} A = V \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = n \Leftrightarrow \operatorname{def} A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{\overline{0}\} \Leftrightarrow$ A инъективен. Следовательно, A биективен $\Leftrightarrow$ A сюръективен $\Leftrightarrow$ A инъективен.

Утверждение 2 (Критерий существования обратного оператора в конечномерном пространстве)**.**
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, e – базис V, $A \in L(V, V)$, тогда
$$\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow \operatorname{Im} A = V \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = \dim V = n \Leftrightarrow \operatorname{def} A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{\overline{0}\} \Leftrightarrow \det A_e \neq 0.$$

Доказательство.
$\exists\, A^{-1} \Leftrightarrow A$ – биекция $\Leftrightarrow A$ – сюръекция $\Leftrightarrow \operatorname{Im} A = V \Leftrightarrow \operatorname{rk} A = \dim V = n \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \operatorname{def} A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \{\overline{0}\} \Leftrightarrow \det A_e \neq 0$.

Глава 7

Собственные векторы линейного оператора

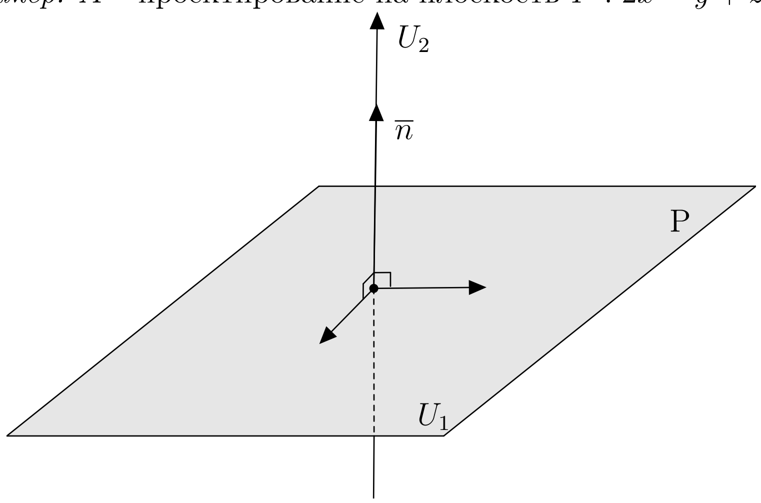
7.1 Инвариантные подпространства и собственные векторы линейного оператора

Определение.
Пусть V – линейное пространство, $A \in L(V, V)$.

Линейное подпространство $U \subset V$ называется ***инвариантным подпространством*** оператора A, если $\forall u \in U \ \ Au \in U$.

Замечание.
Если $U \subset V$ – инвариантное подпространство $A \in L(V, V)$, то можно рассматривать ограничение $A|_U \in L(U, U)$.

Пример. A – проектирование на плоскость $P : 2x - y + z = 0$ в V^3.



$U_1 = \{v \in V : v \parallel P \Leftrightarrow (\overline{v}, \overline{n}) = 0\}$,
$U_2 = \{v \in V : v = \alpha\overline{n}, \alpha \in \mathbf{R}\}$.

Заметим, что $U_1 = \operatorname{Im} A$, $U_2 = \operatorname{Ker} A$ – инвариантные подпространства V^3, $A|_{U_1}$ – тождественный оператор, $A|_{U_2}$ – нулевой оператор.

Утверждение 1.
Если $A \in L(V, V)$, то $\operatorname{Im} A$ и $\operatorname{Ker} A$ – инвариантные подпространства линейного оператора.

Доказательство.

1. $u \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow Au = \overline{0} \in \operatorname{Ker} A \Rightarrow \operatorname{Ker} A$ – инвариантное подпространство V;

2. $u \in \operatorname{Im} A \Rightarrow Au \in \operatorname{Im} A \Rightarrow \operatorname{Im} A$ – инвариантное подпространство V.

Определение.
Пусть V – линейное пространство, $A \in L(V, V)$.

Ненулевой вектор $v \in V \setminus \{\overline{0}\}$ называется ***собственным вектором*** оператора A с собственным значением $\lambda \in \mathbf{R}$, если $A\overline{v} = \lambda\overline{v}$.

$v \in V$ – собственный вектор оператора A с собственным значением $\lambda \Leftrightarrow \begin{cases} v \neq \overline{0}, \\ Av = \lambda v. \end{cases}$

Замечание.
С геометрической точки зрения собственный вектор – нетривиальный вектор, образ которого коллинеарен ему.

Обозначим $\overline{v}_{\lambda=\lambda_0}$ – общий вид собственных векторов с собственным значением λ_0.

Примеры.

1. $V^2,\ A \in L(V^2, V^2)$, $A\overline{v} = 2\overline{v}$.

   Здесь любой вектор, кроме нулевого, является собственным вектором с собственным значением $\lambda = 2$.

   $v_{\lambda=2} = c_1\overline{i} + c_2\overline{j},\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0.$

2. $V^2,\ A \in L(V^2, V^2)$ – поворот на угол $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ против часовой стрелки.

   Здесь не существует собственных векторов, поскольку никакой ненулевой вектор не отображается в коллинеарный ему вектор.

Замечание.
Если v – собственный вектор A с собственным значением $\lambda \Rightarrow \forall\alpha \neq 0\ \alpha v$ – собственный вектор с собственным значением λ.

Утверждение 2.
$A \in L(V, V),\ v$ – собственный вектор оператора A с собственным значением $\lambda \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow L[v]$ – одномерное инвариатное подпространство.

Доказательство.
Необходимость($\Rightarrow$).

Пусть $\overline{v} \neq \overline{0}, \langle v \rangle$ – базис $L[v],\ \dim L[v] = 1$.

Пусть $u \in L[v] \Leftrightarrow u = \alpha v \Rightarrow Au = A(\alpha v) = \alpha A v = \alpha\lambda v \in L[v]$.

Достаточность($\Leftarrow$).

Пусть $L[v]$ – одномерное инвариантное подпространство $\Rightarrow \langle v \rangle$ – базис $L[v] \Rightarrow v \neq \overline{0}$.

$Av \in L[v] \Rightarrow Av = \lambda v,\ \lambda \in \mathbf{R} \Rightarrow v$ – собственный вектор с собственным значением λ.

7.1.1 Геометрический способ нахождения собственных векторов

Геометрически собственные векторы v линейного оператора можно найти как направляющие векторы прямых $L[v]$, проходящих через ноль и отображающихся в себя под действием оператора.

Пример. $A \in L(V^3, V^3), e = \langle i, j, k \rangle$.

A – проектирование на плоскость $P : 2x - y + z = 0$.

Какие прямые, проходящие через ноль, отображаются в себя при проектировании на плоскость P?

1. $L_1 \perp P$, т.е $L_1 \parallel \overline{n},\ L_1 = L[\overline{n}],\ \overline{n} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ – вектор нормали к плоскости P.

$$\overline{v}_{\lambda=0} = ce\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = c(2i - j + k),\ c \neq 0;$$

2. L_2 – любая прямая, лежащая на P, $L_2 = L[\overline{v}]$, где $\overline{v} \neq \overline{0} : (\overline{v}, \overline{n}) = 0$.

$$\overline{v}_{\lambda=1} = c_1e\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2e\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ c_1^2 + c_2^2 \neq 0\ .$$

7.1.2 Алгебраический способ нахождения собственных векторов линейного оператора, действующего в конечномерном пространстве

Теорема 1.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty,\ e$ – базис, $A \in L(V, V)$.

Тогда v – собственный вектора A с собственным значением $\lambda \Leftrightarrow v = eX$, где X – нетривиальное решение ОСЛАУ $(A_e - \lambda E)X = \overline{0}$, а λ – корень характеристического уравнения $\det(A_e - \lambda E) = 0$.

Доказательство.
v – собственный вектор A с собственным значением λ, т. е.

$$\begin{cases} v \neq \overline{0}, \\ Av = \lambda v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \neq \overline{0}, \\ Av = \lambda \varepsilon v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \neq \overline{0}, \\ (A - \lambda\varepsilon)v = \overline{0} \end{cases} \Leftrightarrow v = eX : \begin{cases} X \neq \overline{0} \in \mathbf{R}^n, \\ (A_e - \lambda E)X = \overline{0}, \end{cases}$$

X – нетривиальное решение ОСЛАУ $(A_e - \lambda E)X = \overline{0}$.

Нетривиальное решение ОСЛАУ существует $\Leftrightarrow \det(A_e - \lambda E) = 0$, т. е.
собственное значение λ – корень характеристического уравнения.

Следовательно, если V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty,\ A \in L(V, V)$, для того, чтобы найти все собственные векторы оператора A, нужно:

1) выбрать базис e в пространстве V и найти матрицу оператора A_e в базисе e;

2) составить характеристическое уравнение $\det(A_e - \lambda E) = 0$ и найти все его действительные корни;

3) для каждого $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ – корня характеристического уравнения, найти ФСР и общее решение X_{oo} ОСЛАУ $(A_e - \lambda_0 E)X = \overline{0}$, все собственные векторы оператора A с собственным значением λ_0 записать в виде $v_{\lambda=\lambda_0} = eX_{oo}$, исключив из X_{oo} тривиальное решение.

Пример.

1) Пусть дана матрица A_e – матрица оператора в некотором базисе e.

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$$

2) $\det(A_e - \lambda E) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1 \text{ (кратность корня } s_{\lambda=1} = 1), \\ \lambda = 3 \text{ (кратность корня } s_{\lambda=3} = 1); \end{array} \right.$$

3) $\lambda = 1$,

$$v_{\lambda=3} = eX : \left\{ \begin{array}{l} X \neq \overline{0}, \\ (A_e - E)X = \overline{0}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X \neq \overline{0}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = \overline{0} \end{array} \right. \Rightarrow x_1 = 2x_2.$$

$$\text{ФСР} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,\ X_{\text{оо}} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_{\lambda=1} = ec_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_1 \neq 0;$$

$\lambda = 3$,

$$v_{\lambda=3} = eX : \left\{ \begin{array}{l} X \neq \overline{0}, \\ (A_e - 3E)X = \overline{0}; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X \neq \overline{0}, \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X = \overline{0} \end{array} \right. \Rightarrow x_1 = 0.$$

$$\text{ФСР} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,\ X_{\text{оо}} = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_{\lambda=3} = ec_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_2 \neq 0.$$

Собственные векторы оператора A:

$$v_{\lambda=1} = ec_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_1 \in \mathbf{R} \setminus \{\overline{0}\};\ v_{\lambda=3} = ec_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ c_2 \in \mathbf{R} \setminus \{\overline{0}\}.$$

7.2 Характеристический многочлен линейного оператора, действующего в конечномерном линейном пространстве

Определение.
Если $A \in L(V, V)$, $\dim V < \infty$, то $\det(A_e - \lambda E)$ – ***характеристический многочлен матрицы оператора*** A ***в базисе*** e.

Утверждение 1.
Если $A \in L(V, V)$, $\dim V < \infty$, то $\det(A_e - \lambda E)$ не зависит от выбора базиса,
т. е. если e, f – базисы пространства V, то $\det(A_e - \lambda E) = \det(A_f - \lambda E)$.

Доказательство.
$A_f = T_{e\to f}^{-1}\, A_e\, T_{e\to f}$, тогда

$$\det(A_f - \lambda E) = \det\big(T_{e\to f}^{-1}\, A_e\, T_{e\to f} - \lambda T_{e\to f}^{-1}\, E\, T_{e\to f}\big) =$$
$$= \det\big(T_{e\to f}^{-1}\, (A_e - \lambda E)\, T_{e\to f}\big) = \det\big(T_{e\to f}^{-1}\big)\, \det(A_e - \lambda E)\, \det(T_{e\to f}) =$$
$$= (\det(T_{e\to f}))^{-1}\, \det(A_e - \lambda E)\, \det(T_{e\to f}) = \det(A_e - \lambda E).$$

Определение.
Характеристическим многочленом $f_A(\lambda)$ оператора $A \in L(V, V)$ ($\dim V < \infty$) называется характеристический многочлен его матрицы в любом базисе пространства V.

$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda\varepsilon) = \det(A_e - \lambda E)\ \ \forall e$ – базиса V.

Замечание.
Собственные значения $A \in L(V, V)$ – действительные корни $f_A(\lambda)$.

Утверждение 2.
Пусть $A \in L(V, V),\ \dim V = n < \infty,\ e$ – некоторый базис V, тогда
$\deg f_A(\lambda) = \deg \det(A_e - \lambda E) = n,$
$f_A(\lambda) = \det(A_e - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1} H_1 + \dots + H_n$, где $H_1 = \operatorname{tr} A_e,\ H_n = \det A_e$.

Доказательство.
Пусть

$$A_e = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow f_A(\lambda) = \det(A_e - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22} - \lambda & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \lambda^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn}) + \dots + H_n.$$

$\deg f_A(\lambda) = n,\ H_1 = trA_e.$
Подставим $\lambda = 0$ в $f_A(\lambda) \Rightarrow f_A(0) = H_n = \det(A_e - 0E) = \det A_e$.

Следствие.
trA_e, $\det A_e$ не зависят от выбора базиса.

Определение.
След оператора $A \in L(V, V)$ $(\dim V < \infty)$ – след его матрицы в любом базисе V.

$$trA = trA_e \quad \forall e \text{ – базиса } V.$$

Определение.
Определитель оператора $A \in L(V, V)$ $(\dim V < \infty)$ – определитель его матрицы в любом базисе V.

$$\det A = \det A_e \quad \forall e \text{ – базиса } V.$$

7.3 Одномерные и двумерные инвариантные подпространства линейного оператора, действующего в конечномерном пространстве

Лемма 1.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty,\ e$ – базис $V,\ A \in L(V, V)$,
$\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$ – корень характеристического многочлена $f_A(\lambda) = \det(A_e - \lambda E)$, причем $\beta \neq 0$.
Тогда $\exists u, v \in V$, не равные нулю одновременно, такие, что

1) $\begin{cases} Au = \alpha u - \beta v, \\ Av = \beta u + \alpha v; \end{cases}$

2) $L[u, v]$ – инвариантное относительно A подпространство;

3) $\dim L[u, v] = 2$.

Доказательство.
Рассмотрим ОСЛАУ $(A_e - \lambda E)Z = \overline{0}$ $(*)$ над полем $\mathbf{C}$.
$\det(A_e - \lambda E) = 0 \Rightarrow \exists$ решение $(*)$ $Z = X + iY \neq \overline{0} + i\overline{0}$, где $X, Y \in \mathbf{R}^n$.

$$A_eZ = \lambda Z \Leftrightarrow A_e(X + iY) = (\alpha + i\beta)(X + iY) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A_eX + iA_eY = \alpha X - \beta Y + i(\beta X + \alpha Y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_eX = \alpha X - \beta Y, \\ A_eY = \beta X + \alpha Y. \end{cases}$$

Пусть $u = eX,\ v = eY$, тогда u, v не равны $\overline{0}$ одновременно и

1) $\begin{cases} Au = \alpha u - \beta v, \\ Av = \beta u + \alpha v; \end{cases}$

2) $\forall w \in L[u, v]\ w = c_1u + c_2v.$

   $Aw = c_1Au + c_2Av \in L[u, v] \Rightarrow L[u, v]$ – инвариантное относительно A пространство;

3) $\dim L[u, v] = 2$, поскольку если $\dim L[u, v] = 1$, то $L[u, v] = L[w]$ – одномерное инвариантное подпространство $\Rightarrow w$ – собственный вектор $\Rightarrow \exists \lambda_0 \in \mathbf{R} : Aw = \lambda_0 w$, что приводит к противоречию, т. к. корни $\det\big(A|_{L[u,v]} - \lambda E\big)$ комплексные с нетривиальной мнимой частью $\beta \neq 0$.

Теорема 1.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V < \infty,\ A \in L(V, V)$.

Тогда существует одномерное или двумерное инвариантное относительно A подпространство.

Доказательство.
Рассмотрим характеристическое уравнение $f_A(\lambda) = \det(A_e - \lambda E) = 0$.

Если его корень $\lambda \in \mathbf{R}$, то $\exists v \in V \setminus \{\overline{0}\} : Av = \lambda v \Rightarrow L[v]$ – одномерное инвариантное подпространство.

Если его корень $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbf{C} : \beta \neq 0$, то по лемме 1 $\exists L[u, v]$ – двумерное инвариантное подпространство, описанное в лемме.

Глава 8

Линейный оператор простого типа

8.1 Собственный базис линейного оператора

Определение.
Пусть $A \in L(V, V)$, $\dim V = n < \infty$. Базис пространства V, состоящий из собственный векторов оператора, называется ***собственным базисом*** оператора A.

Примеры.

1. V^2, $Av = 2v$.

   В этом случае любой базис пространства является собственным базисом оператора A;

2. V^2, A – поворот на угол $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ против часовой стрелки.

   Здесь не существует собственного базиса, т. к. нет собственных векторов.

Определение.
Оператор $A \in L(V, V)$ называется ***оператором простого типа***, если существует собственный базис этого оператора.

Пример. $A \in L(V^3, V^3)$ – проектирование на плоскость $P : 2x - y + z = 0$
Рассмотрим базис $f = \langle \overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3} \rangle$ – тройку некомпланарных векторов, в которой $\overline{f_1}$ – перпендикуляр к P, $\overline{f_2}, \overline{f_3} \perp \overline{f_1}$ и $\overline{f_1} \nparallel \overline{f_3}$.
Тогда

$$\begin{array}{l} A\overline{f_1} = \overline{0}, \\ A\overline{f_2} = \overline{f_2}, \\ A\overline{f_3} = \overline{f_3} \end{array} \Rightarrow A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

f – собственный базис $A \Rightarrow A$ – оператор простого типа.

Теорема 1.
Пусть $A \in L(V, V)$, $\dim V = n < \infty$, e – базис V.
Тогда e – собственный базис оператора A $(Ae_i = \lambda_i e_i) \Leftrightarrow A_e = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$,
$\lambda_i \in \mathbf{R}$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство.
$e = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$ – собственный базис $\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e_i \neq \overline{0}, \\ Ae_i = \lambda_i e_i, \end{array} \right. \quad \forall i = \overline{1, n} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_i \neq \overline{0}, \\ Ae_i = e\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Определение.
Матрица $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ называется ***диагонализуемой***, если она подобна диагональной матрице.

Следствие.
$A \in L(V,V)$ – оператор простого типа $\Leftrightarrow$ его матрица в любом базисе диагонализуема.

8.2 Собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям

Теорема 1.
Собственные векторы линейного оператора $A \in L(V,V)$, отвечающие различным собственным значениям, т. е.

$$v_1, v_2, \dots, v_m \in V : \begin{cases} v_i \neq \overline{0}, \\ Av_i = \lambda_i v_i, \end{cases} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j,\ i,j = \overline{1,m}, \text{ линейно независимы.}$$

Доказательство.
Используем математическую индукцию по количеству векторов m.

1. $m = 1 : \begin{cases} v_1 \neq \overline{0}, \\ Av_1 = \lambda_1 v_1 \end{cases} \Rightarrow v_1$ – линейно независим, т. к. $v_1 \neq \overline{0}$.

2. Пусть утверждение теоремы верно для $m-1$, докажем, что оно верно и для m.
   Для
   $$v_1, v_2, \dots, v_m : \begin{cases} v_i \neq \overline{0}, \\ Av_i = \lambda_i v_i, \end{cases} \quad \lambda_i \neq \lambda_j, \quad \text{при } i \neq j,\ i,j = \overline{1,m},$$
   рассмотрим линейную комбинацию векторов $v_1, v_2, \dots, v_m$, равную нулю
   $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m = \overline{0}. \tag{1}$$
   Тогда
   $$A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m) = A \cdot \overline{0} \Rightarrow \alpha_1\lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_m \lambda_m v_m = \overline{0}. \tag{2}$$
   Умножим (1) на λ_m и вычтем из (2)
   $$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m)v_2 + \dots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_{m-1} = \overline{0}.$$
   Из предположения индукции следует, что $v_1, \dots, v_{m-1}$ – линейно независимы, значит,
   $$\begin{cases} \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = 0, \\ \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m) = 0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m) = 0, \end{cases} \quad \lambda_m \neq \lambda_i,\ i = \overline{1, m-1} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m-1} = 0.$$
   Тогда (1) $\Rightarrow \alpha_m v_m = \overline{0}$, но $v_m \neq \overline{0} \Rightarrow \alpha_m = 0 \Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_m$ – линейно независимы.

Теорема 2 (Достаточное условие того, что $A \in L(V,V)$ – оператор простого типа)**.**
Пусть $A \in L(V,V)$, $\dim V = n < \infty$.

Тогда, если все корни характеристического многочлена $f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ действительны и различны между собой, то A – оператор простого типа, т. е.

$$\text{если} \left\{ \begin{array}{l} 1) \text{ все корни } f_A(\lambda)\ \lambda_i \in \mathbf{R}\ \forall i = \overline{1,n}, \\ 2) \text{ алгебраическая кратность } s_{\lambda_i} = 1 \quad \forall i = \overline{1,n} \end{array} \right. \Rightarrow A \text{ – оператор простого типа.}$$

Доказательство.
Пусть $\dim V = n \Rightarrow \deg f_A(\lambda) = n$, и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – корни $f_A(\lambda)$,

$\lambda_i \in \mathbf{R},\ \lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j,\ i,j = \overline{1,n}$.

Для любого корня λ_i существует собственный вектор $e_i \in V$ с собственным значением $\lambda_i,\ i = \overline{1,n}$.

Докажем, что $\langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$ – базис V:

0) $e_1, \ldots, e_n \in V$;

1) $e_1, \ldots, e_n$ – линейно независимы согласно теореме 1;

2) $\dim V = n$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0), \\ 1), \\ 2) \end{array} \right. \Rightarrow \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle \text{ – собственный базис} \Rightarrow A \text{ – оператор простого типа.}$$

Замечание.
Условие 2) теоремы 2 не является необходимым. Например, для оператора $A \in L(V^3, V^3)$ – проектирования на плоскость P, 1 – корень характеристического уравнения алгебраической кратности 2, но A – оператор простого типа.

8.3 Критерий того, что линейный оператор является оператором простого типа

Лемма 1.
Пусть U – инвариантное подпространство $A \in L(V,V)$ $(\dim V < \infty)$,

$A|_U \in L(U,U)$ – ограничение A на U.

Пусть $e' = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ – базис U, $e = \langle e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$ – базис V.

Тогда $A_e = \left(\begin{array}{c|c} (A|_U)_{e'} & B \\ \hline O & C \end{array} \right)$.

Доказательство.
$e_i \in U \Rightarrow Ae_i \in U,\ i = \overline{1,k}$.

$$\begin{array}{l} Ae_1 = a_{11}e_1 + \cdots + a_{k1}e_k \in L[e_1, \ldots, e_k], \\ Ae_2 = a_{12}e_1 + \cdots + a_{k2}e_k \in L[e_1, \ldots, e_k], \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ Ae_k = a_{1k}e_1 + \cdots + a_{kk}e_k \in L[e_1, \ldots, e_k], \end{array} \qquad Ae_i = e \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ki} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, i = \overline{1,k}.$$

Лемма 2.
Пусть U – инвариантное подпространство $A \in L(V,V)$ $(\dim V < \infty) \Rightarrow f_A(\lambda) \vdots f_{A|_U}(\lambda)$.

Доказательство.
$e' = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ – базис U,
$e = \langle e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$ – базис V.

$$f_A(\lambda) = \det(A_e - \lambda E) = \left| \begin{array}{c|c} (A|_U)_{e'} - \lambda E & B \\ \hline O & C - \lambda E \end{array} \right| = \det((A|_U)_{e'} - \lambda E)\ \det(C - \lambda E) =$$
$$= f_{A|_U}(\lambda)\ \det(C - \lambda E) \Rightarrow f_A(\lambda) \vdots f_{A|_U}(\lambda).$$

Определение.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, $A \in L(V,V)$, λ_0 – корень характеристического многочлена $f_A(\lambda)$.

Тогда $V_{\lambda_0} = V_{\lambda=\lambda_0} = \{v \in V : Av = \lambda_0 v\} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 \varepsilon)$ – ***собственное подпространство***, отвечающее собственному значению λ_0.

Замечание.
$V_{\lambda=\lambda_0} = \{v_{\lambda=\lambda_0}\} \cup \{\overline{0}\}$ – линейное подпространство V, инвариантное относительно оператора A.

Определение.
Пусть V – линейное пространство, $\dim V = n < \infty$, e – базис V, $A \in L(V,V)$. ***Геометрической кратностью*** k_{λ_0} корня $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ характеристического многочлена $f_A(\lambda)$ называется размерность собственного подпространства, соответствующего этому корню.

$$k_{\lambda_0} = \dim V_{\lambda_0} = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_0 \varepsilon) = def(A - \lambda_0 \varepsilon) = n - \operatorname{rk}(A_e - \lambda_0 E).$$

Лемма 3.
Геометрическая кратность любого корня $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ характеристического многочлена $f_A(\lambda)$ не превосходит его алгебраическую кратность $(k_{\lambda_0} \le s_{\lambda_0})$.

Доказательство.
V_{λ_0} – инвариантное подпространство пространства V, $\dim V_{\lambda_0} = k_{\lambda_0}$.

В пространстве V_{λ_0} произвольный базис e' состоит из собственных векторов оператора $A \Rightarrow$ является собственным базисом оператора $A|_{V_{\lambda_0}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (A|_{V_{\lambda_0}})_{e'} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \ldots & \ldots & \lambda_0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{k_{\lambda_0} \times k_{\lambda_0}} \text{ – скалярная матрица} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_{A|_{V_{\lambda_0}}}(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{k_{\lambda_0}}.$$

s_{λ_0} – алгебраическая кратность корня λ_0 в $f_A(\lambda) \Leftrightarrow f_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{s_{\lambda_0}} g(\lambda)$, где $g(\lambda_0) \ne 0$.

Согласно лемме 2 $f_A(\lambda) \vdots f_{A|_{V_{\lambda_0}}}(\lambda) \Rightarrow k_{\lambda_0} \le s_{\lambda_0}$.

Следствие.

Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – различные между собой действительные корни $f_A(\lambda)$,

$$\text{то } \sum_{i=1}^{m} \dim V_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{m} k_{\lambda_i} \le \sum_{i=1}^{m} s_{\lambda_i} \le deg f_A(\lambda) = n = \dim V.$$

Теорема 1 (Критерий того, что A – оператор простого типа)**.**
Пусть $A \in L(V,V),\ \dim V = n < \infty$, тогда

$$A \text{ – оператор простого типа} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \text{ все корни характеристического многочлена } f_A(\lambda) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{действительны;} \\ 2) \ \forall\lambda_i \text{ – корня } f_A(\lambda) \text{ геометрическая кратность} \\ \qquad\qquad \text{равна алгебраической кратности } k_{\lambda_i} = s_{\lambda_i}. \end{cases}$$

Доказательство.
Необходимость($\Rightarrow$).

Пусть A – оператор простого типа $\Rightarrow \exists e$ – его собственный базис A:

$$A_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_m & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}, \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j,\ i,j = \overline{1,m}.$$

$$f_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1}(\lambda_2 - \lambda)^{k_2} \dots (\lambda_m - \lambda)^{k_m}, n = \sum_{i=1}^{m} k_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_{\lambda_i} = k_i = s_{\lambda_i}, \text{ при этом все корни } f_A(\lambda) \text{ действительны.}$$

Достаточность($\Leftarrow$).

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ – все корни $f_A(\lambda),\ \lambda_i \in \mathbf{R},\ \lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j,\ k_{\lambda_i} = k_i = s_{\lambda_i},\ \forall i = \overline{1,m}$.
Тогда для любого λ_i найдем в V_{λ_i} базис $\langle e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik_i}\rangle$ и составим
$e = \langle e_{11}, \dots, e_{1k_1}, e_{21}, \dots, e_{2k_2}, \dots, e_{m1}, \dots, e_{mk_m}\rangle$ – базис V.

Докажем, что это действительно базис V:

0) $e_{11}, \dots, e_{1k_1}, \dots, e_{m1}, \dots, e_{mk_m} \in V$;

1) Пусть $\alpha_{11}e_{11} + \dots + \alpha_{1k_1}e_{1k_1} + \alpha_{21}e_{21} + \dots + \alpha_{2k_2}e_{2k_2} + \dots + \alpha_{m1}e_{m1} + \dots + \alpha_{mk_m}e_{mk_m} = \overline{0}\,(*)$
Рассмотрим $v_{\lambda_i} = \alpha_{i1}e_{i1} + \dots + \alpha_{ik_i}e_{ik_i} \in V_{\lambda_i},\ i = \overline{1,m}$.
$(*)$ означает, что нетривиальная линейная комбинация векторов $v_{\lambda_i},\ i = \overline{1,m}$ равна $\overline{0}$:

$$v_{\lambda_1} + v_{\lambda_2} + \dots + v_{\lambda_m} = \overline{0}.$$

Если $v_{\lambda_i} \neq \overline{0}$, то v_{λ_i} – собственный вектор с собственным значением λ_i, а собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы $\Rightarrow$
$\Rightarrow v_{\lambda_i} = \overline{0} \quad \forall i = \overline{1,m}$, т. е.

$\alpha_{i1}e_{i1} + \dots + \alpha_{ik_i}e_{ik_i} = \overline{0}$, но $e_{i1}, \dots, e_{ik_i}$ – линейно независимы, т. к. это базис $V_{\lambda_i}, \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha_{i1} = \dots = \alpha_{ik_i} = 0 \quad \forall i = \overline{1,m} \Rightarrow e$ – линейно независимая система векторов;

2) $k_1 + \dots + k_m = k_{\lambda_1} + \dots + k_{\lambda_m} = s_{\lambda_1} + \dots + s_{\lambda_m} = deg\, f_A(\lambda) = n = \dim V$.

$$\left\{\begin{array}{l} 0), \\ 1), \\ 2) \end{array}\right. \Rightarrow e \text{ – базис, состоящий из собственный векторов,} \Rightarrow A \text{ – оператор простого типа.}$$

Пример. $A \in L(V^3, V^3)$ – оператор проектирования на плоскость $P : 2x - y + z = 0$.

1) $f_A(\lambda) = \det(A_f - \lambda E) = -\lambda(1-\lambda)^2$ имеет только действительные корни:
   $\lambda = 0$ алгебраической кратности $s_{\lambda=0} = 1$,
   $\lambda = 1$ алгебраической кратности $s_{\lambda=1} = 2$.
2) $\dim V_{\lambda=0} = 1 = k_{\lambda=0} = s_{\lambda=0}$,
   $\dim V_{\lambda=1} = 2 = k_{\lambda=1} = s_{\lambda=1}$.

$$\left.\begin{array}{l} 1) \\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow A \text{ – оператор простого типа.}$$

Следствие 1.
Если среди корней $f_A(\lambda)$ есть комплексные корни, то A не является оператором простого типа и его матрица не является диагонализуемой.

Пример.
$A_e = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4$ – не имеет действительных корней $\Rightarrow$
$\Rightarrow A$ не является оператором простого типа, а значит, A_e не является диагонализуемой.

Следствие 2.
Если среди корней $f_A(\lambda)$ есть корень $\lambda_0 \in \mathbf{R} : k_{\lambda_0} < s_{\lambda_0}$, то A не является оператором простого типа и его матрица не является диагонализуемой.

Пример.
$A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $f_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$ имеет единственный корень $\lambda = 2$ алгебраической кратности $s_{\lambda=2} = 2$.

$k_{\lambda=2} = \dim V_{\lambda=2} = n - \operatorname{rk}(A_e - 2E)$.

$$A_e - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \operatorname{rk}(A_e - 2E) = 1 \Rightarrow \dim V_{\lambda=2} = 2 - 1 = 1 = k_{\lambda=2} < s_{\lambda=2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A$ не является оператором простого типа, а значит, A_e не является диагонализуемой.

(Здесь $v_{\lambda=2} = ce\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c \neq 0$, и просто не существует двух линейно независимых собственных векторов.)

Глава 9

Билинейные и квадратичные формы

9.1 Билинейные формы

Рассмотрим функционал B, отображающий декартово произведение линейного пространства V на самого себя в множество действительных чисел.

$$B : V \times V \to \mathbf{R},$$
$$\forall (u, v) \in V \times V \longmapsto B(u, v) \in \mathbf{R}.$$

Определение.
$B(u, v)$ – билинейный функционал, если он линеен по каждому аргументу:

1. $B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v) \quad \forall u_1, u_2, v \in V;$
2. $B(\lambda u, v) = \lambda B(u, v) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \forall u, v \in V;$
3. $B(u, v_1 + v_2) = B(u, v_1) + B(u, v_2) \quad \forall u, v_1, v_2 \in V;$
4. $B(u, \lambda v) = \lambda B(u, v) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \forall u, v \in V.$

Примеры.

1. $V = V^3$.
   $B(\overline{u}, \overline{v}) = (\overline{u}, \overline{v}) = |\overline{u}||\overline{v}| \cos\left(\widehat{\overline{u}, \overline{v}}\right) \in \mathbf{R};$
2. $\mathrm{C}[0, 1]$.
   $f(t),\ g(t) \in \mathrm{C}[0, 1],\ B(f(t), g(t)) = \int\limits_0^1 f(t) g(t)\, dt \in \mathbf{R}.$

Определение.
Пусть $\dim V = n < \infty,\ e$ – базис V, $u = eX = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$,
$v = eY = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n$.

Билинейной формой называется координатная запись билинейного функционала:

$$B(u, v) = B(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n) =$$
$$= x_1 y_1 B(e_1, e_1) + x_1 y_2 B(e_1, e_2) + \cdots + x_n y_n B(e_n, e_n) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} B(e_i, e_j) x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j, \text{ где } B(e_i, e_j) = b_{ij} \in \mathbf{R}.$$

Билинейной формой часто называют и сам билинейный функционал.

9.1.1 Матрица билинейной формы в данном базисе

Определение.
Если $B(u,v)$ – билинейная форма пространства V, $\dim V = n < \infty$, e – базис V, то матрицей $B(u,v)$ в базисе e называется матрица

$$B_e = (b_{ij}) = (B(e_i, e_j)) \in \mathbf{R}^{n\times n}.$$

Если $u = eX = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i,\ v = eY = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$, то

$$B(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j \text{ – общий вид билинейной формы,}$$

$$B(u,v) = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & \ldots & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T B_e Y \text{ – векторно-матричная запись билинейной формы.}$$

Утверждение 1.
Пусть $\dim V = n < \infty,\ e$ – базис V, тогда
$\Omega_e : B(u,v) \mapsto B_e \in \mathbf{R}^{n\times n}$ – биекция.

Доказательство.

1) Ω_e инъективно, т. к. если

$$\begin{matrix} \Omega_e : B_1(u,v) \mapsto B_e, \\ \Omega_e : B_2(u,v) \mapsto B_e, \end{matrix} \quad u = eX,\ v = eY, \text{ то}$$

$B_1(u,v) = X^T B_e Y = B_2(u,v) \quad \forall (u,v) \in V \times V \Rightarrow \Omega_e$ инъективно;

2) Ω_e сюръективно, т. е. $\forall C \in \mathbf{R}^{n\times n}\ \exists$ билинейная форма $B(u,v) : B_e = C$.

Пусть $u = eX, v = eY$.

Рассмотрим $B(u,v) = X^T C\,Y$. Докажем, что это билинейная форма:

1. $B(u_1 + u_2, v) = (X^1 + X^2)^T C\,Y = (X^1)^T C\,Y + (X^2)^T C\,Y = B(u_1,v) + B(u_2,v)$;
2. $B(\lambda u, v) = (\lambda X)^T C\,Y = \lambda X^T C\,Y = \lambda B(u,v)$;
3. $B(u, v_1 + v_2) = X^T C\,(Y^1 + Y^2) = X^T C\,Y^1 + X^T C\,Y^2 = B(u,v_1) + B(u,v_2)$;
4. $B(u, \lambda v) = X^T C\,\lambda Y = \lambda X^T C\,Y = \lambda B(u,v)$.

Пусть $B_e = (b_{ij})$, тогда

$$b_{ij} = B(e_i, e_j) = \begin{pmatrix} 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = c_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_e = C.$$

9.1.2 Преобразование матрицы билинейной формы при переходе к новому базису

Утверждение 2.
Пусть e, f – базисы V, $T_{e\to f}$ – матрица перехода от базиса e к базису f.
Тогда

$$B_f = T_{e\to f}^T\, B_e\, T_{e\to f}.$$

Доказательство.
$u = eX_e = fX_f$, $v = eY_e = fY_f$.

$$B(u,v) \mapsto B_e, \qquad B(u,v) = X_e^T B_e Y_e,$$
$$B(u,v) \mapsto B_f, \qquad B(u,v) = X_f^T B_f Y_f;$$

$$\begin{cases} X_e = T_{e\to f} X_f, \\ Y_e = T_{e\to f} Y_f, \end{cases} \; B(u,v) = X_e^T B_e Y_e = (T_{e\to f}X_f)^T B_e\, T_{e\to f} Y_f = X_f^T \left(T_{e\to f}^T\, B_e\, T_{e\to f}\right) Y_f \Rightarrow$$
$$\Rightarrow B_f = T_{e\to f}^T B_e T_{e\to f}.$$

Следствие 1.
Ранг матрицы билинейной формы не зависит от базиса, т. е. $\operatorname{rk} B_e = \operatorname{rk} B_f \quad \forall e, f$ – базисов V.

Доказательство.
$\det T_{e\to f} = \det T_{e\to f}^T \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rk} B_f = \operatorname{rk}\,(T_{e\to f}^T B_e T_{e\to f}) = \operatorname{rk} B_e$.

Определение.
Рангом билинейной формы называется ранг её матрицы в любом базисе.
$\operatorname{rk} B(u,v) = \operatorname{rk} B_e \quad \forall e$ – базиса $V \Rightarrow \operatorname{rk} B(u,v)$ – инвариант билинейной формы.

9.1.3 Симметрические билинейные формы

Определение.
Билинейная форма $B(u,v)$ называется ***симметрической***, если

$$B(u,v) = B(v,u) \quad \forall u, v \in V.$$

Утверждение 3.
Если e – произвольный базис конечномерного пространства, то в этом пространстве билинейная форма $B(u,v)$ является симметрической $\Leftrightarrow B_e$ – симметрическая матрица.

Доказательство.
Необходимость($\Rightarrow$).
$B_e = (b_{ij})$, $b_{ij} = B(e_i, e_j)$,
$B(u,v)$ – симметрическая $\Rightarrow b_{ij} = B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i) = b_{ji} \Rightarrow B_e = B_e^T$.
Достаточность($\Leftarrow$).
Пусть $B_e = B_e^T \Rightarrow B(u,v) = X^T B_e Y = (X^T B_e Y)^T = Y^T (X^T B_e)^T = Y^T B_e^T X =$
$= Y^T B_e X = B(v,u)$.

Пример. $B(u,v) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$.

$$B_e = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B(u,v) \text{ не является симметрической.}$$

9.2 Квадратичные формы

Определение.
Пусть $B(u,v)$ – некоторая симметрическая билинейная форма.

Тогда ***квадратичной формой***, ассоциированной с билинейной формой $B(u,v)$, называется $Q(u) = B(u,u),\ u \in V$.

Пример. $B(u,v) = X^T \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} Y = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + x_2y_2$ – симметрическая билинейная форма.

$Q(u) = X^T \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} X = 2x_1^2 - 3x_1x_2 - 3x_2x_1 + x_2^2 = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$ – ассоциированная с ней квадратичная форма.

Определение.
Симметрическая билинейная форма $B(u,v) : Q(u) = B(u,u)$, называется ***полярной*** билинейной формой к квадратичной форме $Q(u)$.

Утверждение 1.
Полярная симметрическая билинейная форма однозначно восстанавливается по своей квадратичной форме.

Доказательство.
$B(u,v)$ восстановим по $Q(u)$:

$Q(u+v) = B(u+v, u+v) = B(u,u) + B(u,v) + B(v,u) + B(v,v) = Q(u) + 2B(u,v) + Q(v)$.

$$B(u,v) = \frac{1}{2}(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)).$$

Определение.
Матрицей квадратичной формы в базисе e называется матрица полярной к ней симметрической билинейной формы.

$Q(u) = X^T B_e X$, B_e – матрица полярной симметрической билинейной формы.

$B_e = (b_{ij}) = (B(e_i, e_j)),\ b_{ij} = b_{ji}$,

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} b_{ij}x_ix_j \text{ – общий вид квадратичной формы.}$$

Пример. $Q(u) = 4x_1^2 - 5x_2^2 + 7x_3^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + 3x_2x_3$ – квадратичная форма.

$$B_e = \begin{pmatrix} 4 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -5 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 7 \end{pmatrix} \text{ – матрица квадратичной формы и полярной к ней симметрической билинейной формы}$$

$$B(u,v) = X^T B_e Y = 4x_1y_1 - x_1y_2 + \frac{1}{2}x_1y_3 - x_2y_1 - 5x_2y_2 + \frac{3}{2}x_2y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1 + \frac{3}{2}x_3y_2 + 7x_3y_3.$$

Определение.
Рангом квадратичной формы называется ранг её матрицы в любом базисе.

$$\operatorname{rk} Q(u) = \operatorname{rk} B_e\ \ \forall e \text{ – базиса } V \Rightarrow \operatorname{rk} Q(u) \text{ – инвариант квадратичной формы.}$$

9.2.1 Канонический вид квадратичной формы

Определение.
Квадратичная форма $Q(u)$ имеет ***канонический вид***, если $Q(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$.

Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называется ***каноническим базисом*** квадратичной формы.

В каноническом базисе e матрица квадратичной формы $B_e = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Определение.
Квадратичная форма $Q(u)$ имеет ***нормальный вид***, если

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2,\ \alpha_i = \left[\begin{array}{r} 1, \\ -1, \\ 0. \end{array}\right.$$

9.2.2 Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа

Пример. Пусть в базисе e квадратичная форма $Q(u) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

Перейдем к базису f, сделав замену

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3, \end{cases} \quad X_e = T_{e\to f}Y, \quad T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \det T_{e\to f} \neq 0.$$

В базисе f квадратичная форма

$Q(u) = 2(y_1^2 - y_2^2) + 2(y_1 - y_2)y_3 = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 2y_1y_3 - 2y_2y_3 =$

$$= 2(y_1^2 + y_1y_3) - 2y_2^2 - 2y_2y_3 = 2(y_1^2 + 2y_1\frac{y_3}{2} + \frac{y_3^2}{4}) - \frac{y_3^2}{2} - 2y_2^2 - 2y_2y_3 =$$

$$= 2(y_1 + \frac{y_3}{2})^2 - 2(y_2^2 + 2y_2\frac{y_3}{2}) + \frac{y_3^2}{2} = 2(y_1 - \frac{y_3}{2})^2 - 2(y_2 + \frac{y_3}{2})^2.$$

Перейдем к базису g, сделав замену

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{y_3}{2}, \\ z_2 = y_2 - \frac{y_3}{2}, \\ z_3 = y_3, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = z_1 - \frac{z_3}{2}, \\ y_2 = z_2 - \frac{z_3}{2}, \\ y_3 = z_3, \end{cases} \quad T_{f\to g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \det T_{f\to g} \neq 0,$$

$$T_{e\to g} = T_{e\to f}T_{f\to g} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В базисе g квадратичная форма имеет канонический вид: $Q(u) = 2z_1^2 - 2z_2^2$,

то есть $g = \langle g_1, g_2, g_3\rangle$, где $\begin{cases} g_1 = e_1 + e_2, \\ g_2 = e_1 - e_2, \\ g_3 = -e_1 + e_3, \end{cases}$ – канонический базис $Q(u)$.

Теорема 1.
Пусть $\dim V = n < \infty$, тогда для любой квадратичной формы в пространстве V существует канонический базис.

Доказательство.
$Q(u) = q(x_1, x_2, \ldots, x_m),\ m \leq n,\ m$ – число переменных, входящих в запись формы с ненулевыми коэффициентами.

Докажем теорему индукцией по m, используя метод Лагранжа (метод выделения полных квадратов):

1. $m = 1$:

   $Q(u) = b_{11}x_1^2$ – канонический вид;

2. Пусть существует канонический базис для любой квадратичной формы от $m-1$ переменной. Докажем его существование для формы от m переменных.

   Пусть $Q(u) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_{ii}x_i^2 + 2\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} b_{ij}x_ix_j$ в базисе e.

   Рассмотрим два случая (a) и (b):

   (a) $\exists i : b_{ii} \neq 0$.
   Пусть $b_{11} \neq 0$, тогда

$$Q(u) = (b_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{m} b_{1j}x_ix_j) + \sum_{i=2}^{m} b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{m} b_{ij}x_ix_j =$$

$$= b_{11}(x_1^2 + 2x_1\sum_{j=2}^{m}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j + (\sum_{j=2}^{m}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2) - b_{11}(\sum_{j=2}^{m}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2 + \sum_{i=2}^{m} b_{ii}x_i^2 + 2\sum_{\substack{i,j=2\\ i<j}}^{m} b_{ij}x_ix_j =$$

$$= b_{11}(x_1 + \sum_{j=2}^{m}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j)^2 + q(x_2, x_3, \ldots, x_m).$$

   Перейдем к базису f, сделав замену:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum\limits_{j=2}^{m}\frac{b_{1j}}{b_{11}}x_j, \\ y_2 = x_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_m = x_m, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_n = x_n; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = y_1 - \sum\limits_{j=2}^{m}\frac{b_{1j}}{b_{11}}y_j, \\ x_2 = y_2, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_m = y_m \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x_n = y_n. \end{cases}$$

$$T_{e\to f} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{b_{12}}{b_{11}} & -\frac{b_{13}}{b_{11}} & \ldots & -\frac{b_{1m}}{b_{11}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \det T_{e\to f} = 1 \neq 0.$$

   $f = \langle f_1, f_2, \ldots, f_n\rangle$ – базис, в котором форма имеет вид

$$Q(u) = b_{11}y_1^2 + \tilde{q}(y_2, y_3, \ldots, y_m).$$

   По предположению индукции в пространстве $L[f_2, \ldots, f_n]$ можно выбрать канонический базис $\langle p_2, \ldots, p_n\rangle$ квадратичной формы $\tilde{q}(y_2, \ldots, y_m)$, тогда $\langle f_1, p_2, \ldots, p_n\rangle$ будет каноническим базисом формы $Q(u)$, поскольку $f_1 \notin L[p_2, \ldots, p_n] =$ $= L[f_2, \ldots, f_n]$.

(b) Пусть $b_{ii} = 0, \ \ \forall i = \overline{1,m}, \Rightarrow \exists b_{ij} \neq 0$ при $i \neq j$.
Пусть $b_{12} \neq 0$, тогда:
$Q(u) = 2\sum\limits_{i,j=1}^{m} b_{ij}x_ix_j = 2b_{12}x_1x_2 + 2\sum\limits_{j=3}^{m} b_{1j}x_1x_j + 2\sum\limits_{j=3}^{m} b_{2j}x_2x_j + 2\sum\limits_{i,j=3}^{m} b_{ij}x_ix_j.$
Перейдем к новому базису g, сделав замену:

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2, \\ x_2 = z_1 - z_2, \\ \vdots \ \vdots \ \vdots \\ x_m = z_m, \\ \vdots \ \vdots \ \vdots \\ x_n = z_n, \end{cases} \quad T_{e\to g} = \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{array}\right), \ \det T_{e\to g} = -2 \neq 0.$$

g – базис, в котором форма имеет вид $Q(u) = 2b_{12}(z_1^2 - z_2^2) + 2\sum\limits_{j=3}^{m} b_{1j}(z_1+z_2)z_i +$
$+ 2\sum\limits_{j=3}^{m} b_{2j}(z_1 - z_2)z_j + 2\sum\limits_{i,j=3}^{m} b_{ij}z_iz_j \Rightarrow$ случай (b) сводится к случаю (a).

Следствие.
Для любой квадратичной формы существует базис, в котором форма имеет нормальный вид.

Доказательство.
Пусть f – некоторый канонический базис, тогда в базисе f форма имеет вид
$Q(u) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i^2, \ \lambda_i \neq 0, \ i = \overline{1,m}$. Перейдем к базису g, сделав замену

$$\begin{cases} y_i = \sqrt{|\lambda_i|}x_i, & i = \overline{1,m}, \\ y_i = x_i, & i = \overline{m+1,n}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_i = \dfrac{y_i}{\sqrt{|\lambda_i|}}, & i = \overline{1,m}, \\ x_i = y_i, & i = \overline{m+1,n}. \end{cases}$$

$$T_{f\to g} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_2|}} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{|\lambda_m|}} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}, \ \det T_{f\to g} = \frac{1}{\sqrt{|\lambda_1 \dots \lambda_m|}} \neq 0.$$

В базисе g $Q(u)$ имеет нормальный вид: $Q(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^2, \ \alpha_i = \left[\begin{array}{r} 1, \\ -1, \\ 0. \end{array}\right.$

9.2.3 Закон инерции квадратичной формы

Теорема 2 (Закон инерции квадратичной формы)**.**
Число положительных и отрицательных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора канонического базиса.

Доказательство.
Пусть e, f – канонические базисы квадратичной формы $Q(u)$, можно считать, что $Q(u)$ имеет в базисах e и f нормальный вид:

$Q(u) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2$ в базисе e,

$Q(u) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2$ в базисе f.

Пусть $k > p$. Рассмотрим систему $e_1, \dots, e_k, f_{p+1}, \dots, f_n$.

Количество векторов в этой системе $k + (n - p) = n + (k - p) > n = \dim V \Rightarrow$ система линейно зависима, то есть существуют $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_{p+1}, \dots, \beta_n \in \mathbf{R}$ такие, что

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2 + \beta_{p+1}^2 + \dots + \beta_n^2 \neq 0, \\ \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k + \beta_{p+1} f_{p+1} + \dots + \beta_n f_n = \overline{0}. \end{cases}$$

Рассмотрим вектор $v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = -\beta_{p+1} f_{p+1} - \dots - \beta_n f_n$.
Если $v = \overline{0}$, то мы приходим к противоречию, т. к.
из линейной независимости $e_1, \dots, e_k \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$,
а из линейной независимости $f_{p+1}, \dots, f_n \Rightarrow \beta_{p+1} = \dots = \beta_n = 0$.
Значит, $v \neq \overline{0}$, т. е.

$$v = e \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\beta_{p+1} \\ \vdots \\ -\beta_n \end{pmatrix} \neq \overline{0}.$$

Тогда

в базисе e $Q(v) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots \alpha_k^2 > 0$,
в базисе f $Q(v) = -\beta_{p+1}^2 - \beta_{p+2}^2 - \dots - \beta_{p+q}^2 \leq 0$
– мы получили противоречие.

Аналогично мы придем к противоречию, если предположим, что $k < p$. Значит, $k = p$.

Тогда

$$\begin{cases} \operatorname{rk} B_e = \operatorname{rk} Q(u) = k + l = r \\ p + q = \operatorname{rk} B_f = \operatorname{rk} Q(u) = r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = r - k \\ q = r - p \end{cases} \xRightarrow{k=p} l = q.$$

Определение.
Число положительных (отрицательных) коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы называется ее ***положительным (отрицательным) индексом инерции*** и обозначается i_+ (i_-).

$$i_+,\ i_- \text{ – инварианты квадратичной формы;}$$

$$i_+ + i_- = \operatorname{rk} Q(u);$$

$$(i_+,\ i_-) \text{ – сигнатура квадратичной формы.}$$

9.2.4 Знакоопределенные (знакопостоянные) квадратичные формы

Определение.
Квадратичная форма называется ***положительно определенной***, если

$$Q(u) > 0 \quad \forall u \in V \setminus \{\overline{0}\},$$

и ***отрицательно определенной***, если

$$Q(u) < 0 \quad \forall u \in V \setminus \{\overline{0}\}.$$

Симметрическая билинейная форма, полярная к положительно (отрицательно) определенной квадратичной форме, называется также положительно (отрицательно) определенной.

Теорема 3 (Критерий положительной определенности квадратичной формы).
$Q(u)$ является положительно определенной $\Leftrightarrow i_+ = n = \dim V \Leftrightarrow (i_+, i_-) = (n, 0)$.

Доказательство.
Необходимость($\Rightarrow$).

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2,\ \lambda_i = B(e_i, e_i) = Q(e_i) > 0\ \ \forall i = \overline{1, n} \Rightarrow i_+ = n.$$

Достаточность($\Leftarrow$).

$$\exists f \text{ – базис: } Q(u) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 > 0\ \ \forall u = fY \neq \overline{0}.$$

Теорема 4 (Критерий отрицательной определенности квадратичной формы).
$Q(u)$ является отрицательно определенной $\Leftrightarrow i_- = n = \dim V \Leftrightarrow (i_+, i_-) = (0, n)$.

Доказательство.
Квадратичная форма $Q(u)$ является отрицательно определенной формой $\Leftrightarrow -Q(u)$ – положительно определенная форма.

Определение.
Если $\begin{cases} \exists v_1 \in V \setminus \{\overline{0}\} : Q(v_1) > 0, \\ \exists v_2 \in V \setminus \{\overline{0}\} : Q(v_2) < 0, \end{cases}$ то $Q(u)$ называется ***знакопеременной*** квадратичной формой.

Лемма 1.
Знак определителя матрицы квадратичной (билинейной) формы не зависит от выбора базиса пространства.

$$sgn\ \det B_e = sgn\ \det B_f \text{ для любых базисов } e \text{ и } f.$$

Доказательство.

$$B_f = T_{e\to f}^T B_e T_{e\to f},$$
$$\det B_f = \det\ T_{e\to f}^T\ \det B_e\ \det\ T_{e\to f},$$
$$\det B_f = (\det T_{e\to f})^2\ \det B_e,$$
$$(\det T_{e\to f})^2 > 0 \Rightarrow sgn \det B_f = sgn \det B_e.$$

Лемма 2.
Если квадратичная форма $Q(u)$ положительно определена, то $\det B_e > 0$ для любого базиса e пространства V.

Доказательство.
Пусть f – базис V, в котором форма $Q(u)$ имеет нормальный вид.

$Q(u) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2,\ \ i_+ = n$, т. к. $Q(u)$ положительно определена.

$B_f = E \Rightarrow \det B_f = 1 > 0,$

$sgn\ \det B_f = sgn\ \det B_e \Rightarrow \det B_e > 0.$

Замечание.
Пусть $Q(u) = q(x_1, \dots, x_n)$ – положительно определенная форма
в базисе $e = \langle e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n \rangle$,
$q_k(x_1, \dots, x_k) = q(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ – квадратичная форма в пространстве $L[e_1, \dots, e_k]$.

$q(x_1, \dots, x_n)$ – положительно определенная форма $\Rightarrow$
$\Rightarrow q_k(x_1, \dots, x_k)$ – положительно определена в $L[e_1, \dots, e_k]$.

Теорема 5 (Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы)**.**
Пусть $Q(u)$ – квадратичная форма в пространстве V с базисом e,

$$B_e = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \text{ – матрица квадратичной формы в базисе } e.$$

$Q(u)$ является положительно определенной $\Leftrightarrow \Delta_k > 0 \quad \forall k = \overline{1, n}$,

$$\text{где } \Delta_k = \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix}, \text{ (все угловые миноры матрицы формы положительны).}$$

Доказательство.
Необходимость ($\Rightarrow$).

$Q(u) = q(x_1, \dots, x_n)$ – положительно определена, следовательно, $\forall k = \overline{1, n}$ $q_k(x_1, \dots, x_k)$ положительно определена и в базисе $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ пространства $L[e_1, \dots, e_k]$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{Лемма 2}} \Delta_k > 0 \quad \forall k = \overline{1, n}.$$

Достаточность($\Leftarrow$).

Докажем индукцией по $n = \dim V$:

1. $n = 1:$

   $Q(u) = b_{11}x_1^2, \quad \Delta_1 = b_{11} > 0 \Rightarrow Q(u)$ – положительно определена.

2. Пусть утверждение теоремы верно для $n - 1$. Докажем для n:

   $Q(u) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + 2\sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} b_{ij}x_ix_j = \sum\limits_{i=1}^{n-1} b_{ii}x_i^2 + 2\sum\limits_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n-1} b_{ij}x_ix_j + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_{in}x_ix_n + b_{nn}x_n^2 =$

   $= q_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} b_{in}x_ix_n + b_{nn}x_n^2.$

   Если $e = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ – базис V, то

   $q_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ – квадратичная форма в $L[e_1, \dots, e_{n-1}] \subset V$.

   По предположению индукции эта форма положительно определена, значит,

   $\exists \langle e'_1, \dots, e'_{n-1} \rangle$ – базис $L[e_1, \dots, e_{n-1}]$ в котором $q_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$ имеет вид

   $$q_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2.$$

   Рассмотрим систему векторов $e' = \langle e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n \rangle$ и докажем, что это базис V:

0) $e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n \in V$;

1) $e_n \notin L[e_1, \dots, e_{n-1}] = L[e'_1, \dots, e'_{n-1}] \Rightarrow e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n$ – линейно независимы;

2) количество векторов равно $n = \dim V$.

$$\begin{cases} 0), \\ 1), \\ 2) \end{cases} \Rightarrow e' \text{ – базис } V.$$

Пусть $u = e'Y = y_1 e'_1 + y_2 e'_2 + \dots + y_{n-1} e'_{n_1} + y_n e'_n$.

Тогда $Q(u) = y_1^2 + \dots + y_{n-1}^2 + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} \widetilde{b}_{in} y_i y_n + b_{nn} y_n^2$,

$$\begin{cases} y_1 = l_1(x_1, \dots, x_{n-1}), \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_{n-1} = l_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}), \\ y_n = x_n; \end{cases}$$

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n-1} (y_i^2 + 2\widetilde{b}_{in} y_i y_n + \widetilde{b}_{in}^2 y_n^2) - \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{b}_{in}^2 y_n^2 + b_{nn} y_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (y_i + \widetilde{b}_{in} y_n)^2 + \underbrace{(b_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{b}_{in}^2)}_{d} y_n^2;$$

Перейдем к базису f, сделав замену:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \widetilde{b}_{1n} y_n, \\ z_2 = y_2 + \widetilde{b}_{2n} y_n, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ z_{n-1} = y_{n-1} + \widetilde{b}_{n-1\,n}\, y_n, \\ z_n = y_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = z_1 - \widetilde{b}_{1n} z_n, \\ y_2 = z_2 - \widetilde{b}_{2n} z_n, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y_{n-1} = z_{n-1} - \widetilde{b}_{n-1\,n}\, z_n, \\ y_n = z_n, \end{cases} \qquad Y = T_{e' \to f} Z,$$

$$T_{e' \to f} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\widetilde{b}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & -\widetilde{b}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & -\widetilde{b}_{n-1\,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det T_{e' \to f} = 1 \neq 0.$$

В базисе f:

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + d z_n^2 \quad B_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & d \end{pmatrix}, \quad \det B_f = d.$$

$sgn \det B_f = sgn \det B_e$,

$\det B_e = \Delta_n > 0 \Rightarrow \det B_f = d > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (i_+, i_-) = (n, 0) \Rightarrow Q(u)$ – положительно определена, что и требовалось доказать.

Следствие 1 (Критерий отрицательно определенной квадратичной формы)**.**
Квадратичная форма $Q(u)$ является отрицательно определенной $\Leftrightarrow (-1)^k \Delta_k > 0 \;\; \forall k = \overline{1, n}$.
(знаки угловых миноров матрицы формы чередуются, начиная с "-").

Доказательство.

$$Q(u)=\sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2+2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} b_{ij}x_ix_j, \qquad B_e=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix};$$

$$\widetilde{Q}(u)=-Q(u)=-\sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2-2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n} b_{ij}x_ix_j, \quad B_e=\begin{pmatrix} -b_{11} & \dots & -b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -b_{n1} & \dots & -b_{nn}\end{pmatrix}.$$

Как мы уже знаем, $Q(u)$ – отрицательно определенная форма $\Leftrightarrow -Q(u)$ – положительно определенная форма $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -b_{11} & \dots & -b_{1k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -b_{k1} & \dots & -b_{kk}\end{vmatrix}=(-1)^k\begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{k1} & \dots & b_{kk}\end{vmatrix}=(-1)^k\Delta_k>0\ \forall k=\overline{1,n}.$

Глава 10

Евклидовы пространства

10.1 Аксиомы евклидова скалярного произведения

Определение.
Говорят, что в линейном пространстве V задано скалярное произведение, если любым двум векторам $u, v \in V$ сопоставляется действительное число, обозначаемое через (u, v), и при этом выполняются следующие условия (аксиомы):

1. $(u, v) = (v, u) \quad \forall u, v \in V$;
2. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v) \quad \forall u_1, u_2, v \in V$;
3. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v) \quad \forall \lambda \in \mathbf{R},\ \forall u, v \in V$.

Если выполнено также условие 4:

4. $(u, u) \geq 0\ \ \forall u, v \in V$, причем $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = \overline{0}$,

   то говорят, что в линейном пространстве задано ***евклидово скалярное произведение***. Линейное пространство в этом случае называется ***евклидовым***.

Замечание.
Из определения следует, что скалярное произведение – это симметрический билинейный функционал, а евклидово скалярное произведение – симметрический билинейный положительно определенный функционал. Если в пространстве выбран базис и скалярное произведение записано через координаты векторов в этом базисе, то оно является билинейной формой.

Примеры евклидовых пространств.

1. $V^3,\ \overline{u}, \overline{v} \in V^3$.

   $(\overline{u}, \overline{v}) = |\overline{u}||\overline{v}| \cos\left(\widehat{\overline{u}, \overline{v}}\right)$ – евклидово скалярное произведение;

2. $\mathbf{R}^n,\ X, Y \in \mathbf{R}^n,\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

   $$(X, Y) = X^T Y = \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$ – симметрическая билинейная форма.

Очевидно, выполняется и условие 4 : $(X, X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0,\ (X, X) = 0 \Leftrightarrow X = \overline{0};$

Значит, $(X, Y) = X^T Y$ – евклидово скалярное произведение.

3. C$[0, 1],\ f, g \in C[0, 1]$.

   $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$ – симметрический билинейный функционал.

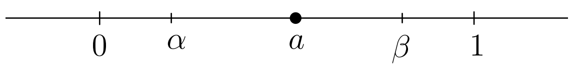
   Проверим выполнение условия 4 : очевидно, $\displaystyle\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \geq 0$

   и из $f(x) = 0\ \forall x \in [0, 1] \Rightarrow (f, f) = 0$.

   Докажем, что $(f, f) = 0 \Rightarrow f = 0\ \forall x \in [0, 1]$, от противного.

   Пусть $(f, f) = 0$, но $\exists a \in [0, 1] : f(a) \neq 0 \Rightarrow f^2(a) > 0$.

   Т. к. $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[0, 1]$, существует окрестность (α, β) точки $a : a \in (\alpha, \beta) \subset [0, 1]$ и $f^2(x) > 0\ \ \forall x \in (\alpha, \beta)$.



$$(f, f) = \int\limits_0^1 f^2(x)\,dx = \int\limits_0^\alpha f^2(x)\,dx + \int\limits_\alpha^\beta f^2(x)\,dx + \int\limits_\beta^1 f^2(x)\,dx \geq \int\limits_\alpha^\beta f^2(x)\,dx.$$

   По теореме о среднем $\exists \varepsilon \in (\alpha, \beta) : \int\limits_\alpha^\beta f^2(x)\,dx = f^2(\varepsilon)|\beta - \alpha| > 0 \Rightarrow (f, f) > 0$.

   Получили противоречие $\Rightarrow f(x) = 0\ \ \forall x \in [0, 1]$, т. е. $f = \overline{0}$.

   Таким образом, $(f, g) = \displaystyle\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$ – евклидово скалярное произведение.

4. $P_n \subset$ C$[0, 1],\ f, g \in P_n$.

   $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$ – симметрический билинейный функционал.

   Очевидно, $\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \geq 0 \quad \forall f \in P_n$, причем $(f, f) = 0$, если $f(x)$ – нулевой многочлен.

   Как мы уже знаем, $(f, f) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1] \Rightarrow$

   $\Rightarrow$ многочлен $f(x) \in P_n$ имеет бесконечно много корней $\Rightarrow f(x) = \overline{0} \in P_n$.

   Следовательно, $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$ – евклидово скалярное произведение.

10.2 Матрица Грама

Определение.
Пусть (u, v) – евклидово скалярное произведение в конечномерном пространстве V. Его

матрицей Грама в базисе $e = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$ называется матрица, состоящая из скалярных произведений базисных векторов

$$G_e = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \ldots & (e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_n, e_1) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}.$$

Замечание.
G_e – матрица симметрической билинейной положительно определенной формы.

Пусть $u = eX$, $v = eY$. Тогда скалярное произведение в матричном виде записывается

$$(u, v) = X^T G_e Y.$$

Утверждение 1.
Матрица $G \in \mathbf{R}^{n\times n}$ является матрицей Грама евклидова скалярного произведения в некотором базисе n-мерного евклидова пространства $V \Leftrightarrow$ выполняются условия:

$$\begin{cases} 1.\ G \text{ – симметрическая матрица, т. е. } G^T = G, \\ 2.\ \text{все угловые миноры матрицы } G \text{ положительны, т. е. } \Delta_k > 0 \quad \forall k = \overline{1, n}. \end{cases}$$

10.3 Следствия аксиом евклидова скалярного произведения

1. $(u, \overline{0}) = (\overline{0}, u) = 0 \quad \forall u \in V.$

Доказательство.
$(u, \overline{0}) = (\overline{0}, u) = (0 \cdot \overline{0}, u) = 0 \cdot (\overline{0}, u) = 0.$

2. $(u_1, v) = (u_2, v)\ \forall v \in V \Rightarrow u_1 = u_2.$

Доказательство.
Пусть $(u_1, v) = (u_2, v) \quad \forall v \in V \Rightarrow (u_1 - u_2, v) = 0.$

Возьмем $v = u_1 - u_2 \Rightarrow (u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0 \Leftrightarrow u_1 - u_2 = \overline{0} \Leftrightarrow u_1 = u_2.$

3. **Неравенство Коши – Буняковского**

$(u, v)^2 \leq (u, u)(v, v) \quad \forall u,\ v \in V.$

Доказательство.
Рассмотрим два случая:

1. u, v – пропорциональны, т. е. $u = \lambda v$.
   $(u, v)^2 = (\lambda v, v)^2 = (\lambda(v, v))^2 = \lambda^2(v, v)(v, v) = (\lambda v, \lambda v)(v, v) = (u, u)(v, v);$
2. u, v – непропорциональны, т. е. u, v – линейно независимы,
   значит, $\langle u, v\rangle$ – базис $L[u, v]$.
   $G_{\langle u,v\rangle} = \begin{pmatrix} (u, u) & (u, v) \\ (v, u) & (v, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u, u) & (u, v) \\ (u, v) & (v, v) \end{pmatrix}$ – матрица Грама евклидова скалярного произведения в $L[u, v] \Rightarrow$

   $\Rightarrow \det G_{\langle u,v\rangle} > 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} (u, u) & (u, v) \\ (v, u) & (v, v) \end{vmatrix} = (u, u)(v, v) - (u, v)^2 > 0 \Rightarrow (u, v)^2 < (u, u)(v, v).$

$1, 2 \Rightarrow (u, v) \leq (u, u)(v, v) \quad \forall u, v \in V.$

Следствие.
Равенство в неравенстве Коши – Буняковского достигается $\Leftrightarrow u, v$ – пропорциональны.

Примеры.

1. $\mathbf{R}^n,\ X, Y \in \mathbf{R}^n,\ G_e = E.$

   $(X,Y) = X^TY = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$ – евклидово скалярное произведение.

   Неравенство Коши – Буняковского:

   $(X,Y)^2 \le (X,X)(Y,Y)\ \ \forall X, Y \in \mathbf{R}^n \Leftrightarrow (\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i)^2 \le (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)\,(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2)\ \forall x_i, y_i \in \mathbf{R},\ i = \overline{1,n}.$

2. $\mathrm{C}[0,1],\ f, g \in \mathrm{C}[0,1].$

   $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$ – евклидово скалярное произведение.

   Неравенство Коши - Буняковского:

$$\left(\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \left(\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx\right)\left(\int\limits_0^1 g^2(x)\,dx\right)\ \ \forall f, g \in \mathrm{C}[0,1].$$

   Это неравенство еще называют неравенством Шварца.

10.4 Евклидова норма

Определение.
Пусть V линейное пространство. Функционал $V \to \mathbf{R},\ v \mapsto \|v\| \in \mathbf{R}$ называется ***нормой вектора***, если выполняются условия (аксиомы нормы):

$$1)\ \|v\| \ge 0 \quad \forall v \in V,\ \text{причем } \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \overline{0},$$

$$2)\ \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall v \in V,$$

$$3)\ \|u + v\| \le \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V\ \text{(“неравенство треугольника”).}$$

Определение.
В евклидовом линейном пространстве со скалярным произведением (u, v) ***евклидовой нормой*** называется ***длина*** вектора u, определяемая как

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)}.$$

Замечание.
Используя понятие длины вектора в евклидовом пространстве, неравенство Коши – Буняковского можно записать в виде

$$|(u,v)| \le \|u\|\|v\|.$$

Докажем, что определение евклидовой нормы корректно, проверив выполнение аксиом:

1) $\|u\| = \sqrt{(u,u)} \ge 0\ \ \forall u \in V$, причем $\|u\| = \sqrt{(u,u)} = 0 \Leftrightarrow (u,u) = 0 \Leftrightarrow u = \overline{0}$;

2) $||\lambda u|| = \sqrt{(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda^2(u,u)} = |\lambda|\sqrt{(u,u)} = |\lambda|\|u\| \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall u \in V$;

3) $||u+v|| = \sqrt{(u+v, u+v)} = \sqrt{(u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v)} =$

$$= \sqrt{(u,u) + 2(u,v) + (v,v)} \le \sqrt{(u,u) + 2|(u,v)| + (v,v)} \le \sqrt{\|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2} =$$

$$= \sqrt{(\|u\| + \|v\|)^2} = |\ \|u\| + \|v\|\ | = \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V.$$

10.5 Угол между векторами в евклидовом пространстве

Если V – евклидово пространство, то $\forall u, v \in V$

$$|(u,v)| \leq \|u\|\|v\|.$$

Пусть $u, v \neq \overline{0} \Rightarrow \|u\|\|v\| > 0 \Rightarrow \dfrac{|(u,v)|}{\|u\|\|v\|} \leq 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}\right| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \dfrac{(u,v)}{\|u\|\|v\|} \leq 1.$

Это позволяет определить угол между векторами в любом евклидовом пространстве.

Определение.
Пусть $u, v \neq \overline{0}$, тогда $\cos(\widehat{u,v}) = \dfrac{(u,v)}{\|u\|\|v\|} \Rightarrow (\widehat{u,v}) = \arccos \dfrac{(u,v)}{\|u\|\|v\|}$.

Пример. Рассмотрим пространство $P_n \subset \mathbf{R}[t]$ со скалярным произведением $\int\limits_0^1 f(t)g(t)\,dt$.

Найдем $(\widehat{1,t})$:

$$\|1\| = \sqrt{(1,1)} = 1, \text{ т. к. } (1,1) = \int\limits_0^1 1^2\,dt = t\Big|_0^1 = 1;$$

$$\|t\| = \sqrt{(t,t)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ т. к. } (t,t) = \int\limits_0^1 t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3};$$

$$(1,t) = \int\limits_0^1 1 \cdot t\,dt = \frac{t^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

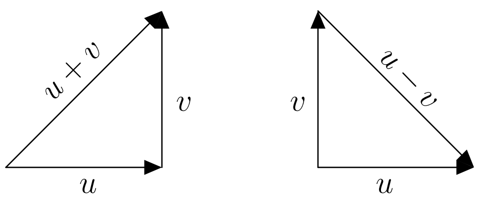
$$(\widehat{1,t}) = \arccos\frac{(1,t)}{\|1\|\|t\|} = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\widehat{1,t}) = \frac{\pi}{6}.$$

Определение.
Векторы u, v из евклидова пространства V называются ***ортогональными***, если $(u,v) = 0$.

$$(u,v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \overline{0}, \\ v = \overline{0}, \\ (\widehat{u,v}) = \frac{\pi}{2}, \text{ т. е. } u \perp v. \end{array}\right.$$

Теорема 1 (теорема Пифагора)**.**
Пусть V – евклидово пространство, $u, v \in V$. Если u, v – ортогональны, то

$$\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$



Доказательство.
Пусть $(u,v) = 0$, тогда $||u \pm v||^2 = (u \pm v, u \pm v) = (u,u) \pm 2(u,v) + (v,v) = (u,u) + (v,v) =$ $= \|u\|^2 + \|v\|^2$.

В любом евклидовом пространстве можно определить проекцию вектора v на вектор $u \neq \overline{0}$.

Определение.
Пусть V – евклидово пространство, $u, v \in V$, причем $u, v \neq \overline{0}$, тогда ***проекцией вектора*** v ***на вектор*** u называется число

$$pr_u v = \|v\| \cos(\widehat{u, v}) = \frac{(u, v)}{\|u\| \, \|v\|} \|v\| = \frac{(u, v)}{\|u\|}.$$

Если $u \neq \overline{0},\ v = \overline{0},\ pr_u v = \dfrac{(u, v)}{\|u\|} = 0.$

10.6 Ортогональные системы векторов

Определение.
Система векторов евклидова пространства $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ называется ***ортогональной***, если её векторы попарно ортогональны, т. е. $(v_i, v_j) = 0$ при $i \neq j,\ i, j = \overline{1, k}$.

Утверждение 1.
Ортогональная система ненулевых векторов в евклидовом пространстве является линейно независимой.

Доказательство.
Пусть $\begin{cases} v_i \neq \overline{0},\ i = \overline{1, k}, \\ (v_i, v_j) = 0 \text{ при } i \neq j,\ i, j = \overline{1, k}, \\ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k = \overline{0} \quad (*). \end{cases}$

Умножим $(*)$ скалярно на вектор $v_i,\ i = \overline{1, k}$.

$$\alpha_1(v_1, v_i) + \cdots + \alpha_i(v_i, v_i) + \cdots + \alpha_k(v_k, v_i) = (\overline{0}, v_i)\ \forall i = \overline{1, k} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_i(v_i, v_i) = 0\ \ \forall i = \overline{1, k}.$$

$v_i \neq \overline{0} \Rightarrow (v_i, v_i) \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0\ \ \forall i = \overline{1, k} \Rightarrow$ система $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейно независима.

Следствие.
Ортогональная система ненулевых векторов в евклидовом пространстве, количество которых равно его размерности, является базисом этого пространства.

Такой базис называется ***ортогональным***.

Замечание.
$e = \langle e_1, e_2 \ldots, e_n \rangle$ – ортогональный базис евклидова пространства V тогда, и только тогда, когда

$$\begin{cases} n = \dim V, \\ e_i \neq \overline{0} \quad \forall i = \overline{1, n}, \\ (e_i, e_j) = 0 \text{ при } i \neq j,\ i, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Утверждение 2.
Базис $e = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$ евклидова пространства V является ортогональным $\Leftrightarrow G_e$ – диагональная матрица.

$$e \text{ – ортогональный базис} \Leftrightarrow G_e = diag((e_1, e_1), \ldots, (e_n, e_n)).$$

Доказательство.
$\dim V = n$. Т. к. e – базис $V,\ e_i \neq \overline{0}\ \ \forall i = \overline{1, n}$.

$$G_e = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \ldots & (e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (e_1, e_n) & \ldots & (e_n, e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & (e_n, e_n) \end{pmatrix} \Leftrightarrow e \text{ – ортогональный базис.}$$

Определение.
Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ в евклидовом пространстве V называется ***ортонормированной***, если она ортогональна и длина любого её вектора равна 1, т. е.

$$\forall i, j = \overline{1,k} \quad \begin{cases} (v_i, v_j) = 0, & i \neq j, \\ ||v_i|| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (v_i, v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Утверждение 3.
Ортонормированная система векторов в евклидовом пространстве, количество векторов в которой равно размерности пространства, является базисом этого пространства.

Такой базис называется ***ортонормированным***.

Доказательство.
Вытекает из следствия и того факта, что вектор, имеющий длину 1, является ненулевым.

Утверждение 4.
Базис e евклидова пространства V является ортонормированным $\Leftrightarrow G_e = E$.

Пример. V^3, $e = \langle \overline{i}, \overline{j}, \overline{k} \rangle$ – ортонормированный базис V^3.

Пусть $\begin{aligned} \overline{u} = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} + x_3\overline{k}, \\ \overline{v} = y_1\overline{i} + y_2\overline{j} + y_3\overline{k}. \end{aligned}$

$$(\overline{u}, \overline{v}) = \big(x_1, x_2, x_3\big)\, G_e \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \big(x_1, x_2, x_3\big) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

$$\|\overline{u}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{(u, u)},$$

$$x_1 = pr_{\overline{i}}\,\overline{u} = (\overline{u}, \overline{i}), \ x_2 = pr_{\overline{j}}\,\overline{u} = (\overline{u}, \overline{j}), \ x_3 = pr_{\overline{k}}\,\overline{u} = (\overline{u}, \overline{k}).$$

Утверждение 5.
Пусть V – n-мерное евклидово пространство, e – его ортонормированный базис,

$$u = eX = e \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ v = eY = e \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$G_e = E; \ (u, v) = X^T G_e Y = X^T Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i;$$

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2};$$

$$\text{если } u, v \neq \overline{0}, \text{ то } \cos(\widehat{u, v}) = \frac{(u, v)}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2}};$$

$$x_i = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (u, e_i) = \|u\| \cos(\widehat{u, e_i}) = \frac{(u, e_i)}{\|e_i\|} = pr_{e_i} u, \ \forall i = \overline{1, n}.$$

10.6.1 Процесс ортогонализации Грама – Шмидта

Процессом ортогонализации Грама – Шмидта называется способ построения по системе линейно независимых векторов евклидова пространства ортогональной системы его ненулевых векторов, описанный в теореме 1.

Теорема 1.
Пусть V – евклидово пространство, $f_1, f_2, \dots, f_n$ – линейно независимая система векторов V, тогда $\forall k = \overline{1,n}$ $\exists h_k \in V$:

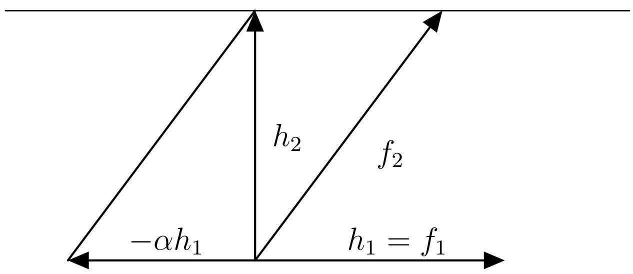
$$\begin{cases} 1)\, h_k \in \{f_k\} + L[h_1, h_2, \dots, h_{k-1}] \subset L[f_1, f_2, \dots, f_k], \\ 2)\, h_k \neq \overline{0}, \\ 3)\, (h_k, h_i) = 0,\ i = \overline{1, k-1}, \end{cases}$$

а именно $h_k = f_k - \dfrac{(f_k, h_1)}{(h_1, h_1)} h_1 - \dfrac{(f_k, h_2)}{(h_2, h_2)} h_2 - \dots - \dfrac{(f_k, h_{k-1})}{(h_{k-1}, h_{k-1})} h_{k-1}$.

Доказательство.
Докажем индукцией по m – числу векторов в линейно независимой системе $f_1, f_2, \dots, f_m$.

1. $m = 2$.

   Пусть $h_1 = f_1$,
   $h_2 = f_2 - \alpha h_1 = f_2 - \alpha f_1,\ \alpha \in \mathbf{R}$.



   Тогда

   1) $h_2 \in \{f_2\} + L[f_1] \subset L[f_1, f_2]$;
   2) $h_2 \neq \overline{0}$, иначе $f_2 = \alpha f_1$, что противоречит линейной независимости f_1 и f_2;
   3) $(h_2, h_1) = 0 \Leftrightarrow (f_2 - \alpha h_1, h_1) = 0 \Leftrightarrow (f_2, h_1) - \alpha (h_1, h_1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{(f_2, h_1)}{(h_1, h_1)}$.

   Значит, $h_2 = f_2 - \dfrac{(f_2, h_1)}{(h_1, h_1)} h_1$.

2. Пусть $\forall k = \overline{1,m}$ $(m < n)$ построены $h_k \in V$:

$$1)\, h_k \in \{f_k\} + L[h_1, h_2, \dots, h_{k-1}] \subset L[f_1, f_2, \dots, f_k],$$
$$2)\, h_k \neq \overline{0},$$
$$3)\, (h_k, h_i) = 0,\ i = \overline{1, k-1}.$$

   Докажем, что можно построить $h_{m+1} \in V$:

$$1)\, h_{m+1} \in \{f_{m+1}\} + L[h_1, h_2, \dots, h_m] \subset L[f_1, f_2, \dots, f_{m+1}],$$
$$2)\, h_{m+1} \neq \overline{0},$$
$$3)\, (h_{m+1}, h_k) = 0,\ k = \overline{1, m}.$$

   Положим $h_{m+1} = f_{m+1} - \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2 - \dots - \alpha_m h_m,\ \alpha_i \in \mathbf{R},\ i = \overline{1,m}$.

   Тогда

1) $h_{m+1} \in \{f_{m+1}\} + L[h_1, h_2, \dots, h_m] \subset L[f_1, f_2, \dots, f_{m+1}]$;

2) $h_{m+1} \neq \bar{0}$, иначе $f_{m+1} = \alpha_1 h_1 + \dots + \alpha_m h_m \in L[f_1, \dots, f_m]$, что противоречит линейной независимости $f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}$;

3) $(h_{m+1}, h_k) = 0 \ \ \forall k = \overline{1,m} \Leftrightarrow (f_{m+1} - \alpha_1 h_1 - \dots - \alpha_m h_m, h_k) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (f_{m+1}, h_k) - \alpha_k (h_k, h_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha_k = \frac{(f_{m+1}, h_k)}{(h_k, h_k)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_{m+1} = f_{m+1} - \frac{(f_{m+1}, h_1)}{(h_1, h_1)} h_1 - \dots - \frac{(f_{m+1}, h_m)}{(h_m, h_m)} h_m.$$

Следовательно, $\forall k = \overline{1,n} \quad \exists h_k = f_k - \dfrac{(f_k, h_1)}{(h_1, h_1)} h_1 - \dfrac{(f_k, h_2)}{(h_2, h_2)} h_2 - \dots - \dfrac{(f_k, h_{k-1})}{(h_{k-1}, h_{k-1})} h_{k-1}:$ выполняются условия 1), 2), 3) теоремы.

Следствие 1.
Если $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ – базис евклидова пространства V, $h_1, h_2, \dots, h_n$ – ортогональная система ненулевых векторов, полученная из $f_1, f_2, \dots, f_n$ с помощью процесса ортогонализации Грама - Шмидта, $g_k = \dfrac{h_k}{\|h_k\|}$, $k = \overline{1,n}$, то $\langle h_1, h_2, \dots, h_n \rangle$ – ортогональный базис V, а $\langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ – ортонормированный базис V.

Замечание.
Если $f_1, f_2, \dots, f_m$ – ортогональная подсистема линейно независимой системы $f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n$, то в процессе ортогонализации Грама – Шмидта

$$h_k = f_k \text{ при } k = \overline{1,m}.$$

Следствие 2.
Любую ортогональную систему ненулевых векторов конечномерного евклидова пространства можно дополнить до его ортогонального базиса.

Доказательство.
Пусть $f_1, f_2 \dots, f_m$ – ортогональная система ненулевых векторов евклидова пространства V, $\dim V = n$. Следовательно, $f_1, f_2 \dots, f_m$ – линейно независимая система $\Rightarrow$

$$\exists f_{m+1}, \dots, f_n : \langle f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n \rangle \text{ – базис } V.$$

Применяя к этому базису процесс ортогонализации Грама – Шмидта, получим

$$\langle f_1, \dots, f_m, h_{m+1}, \dots, h_n \rangle \text{ – ортогональный базис.}$$

Следствие 3.
Любую ортонормированную систему векторов конечногомерного евклидова пространства можно дополнить до ортонормированного базиса этого пространства.

Доказательство.
Пусть $f_1, \dots, f_m$ – ортонормированная система евклидова пространства V, $\dim V = n \Rightarrow$ $f_1, f_2, \dots, f_m$ – линейно независимая система в V.

Дополним ее до базиса $\langle f_1, \dots, f_m, f_{m+1}, \dots, f_n \rangle$ пространства V.

В результате процесса ортогонализации Грама – Шмидта, получим

$$\langle f_1, \dots, f_m, h_{m+1}, \dots, h_n \rangle \text{ – ортогональный базис } V.$$

Нормируя его векторы, получим

$$\langle f_1, \dots, f_m, g_{m+1}, \dots, g_n \rangle \text{ – ортонормированный базис } V.$$

10.7 Ортогональное дополнение

Определение.
Пусть V – евклидово пространство, U – его подпространство.
Ортогональным дополнением к U называется множество векторов

$$U^\perp = \{v \in V : (u, v) = 0 \ \forall u \in U\}.$$

Пример. $V = V^3$, $\overline{u} \in V^3$, $\overline{u} \neq \overline{0}$.
Если $U = L[\overline{u}]$ – множество векторов, коллинеарных $\overline{u}$,
то $U^\perp$ – множество векторов, компланарных плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{u}$.

Утверждение 1.
Пусть V – евклидово пространство, U – его подпространство,
$\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ – ортонормированный базис U,
$e = \langle e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$ – ортонормированный базис V.
Тогда

$$U^\perp = L[e_{k+1}, \ldots, e_n].$$

Доказательство.

1. Докажем, что $L[e_{k+1}, \ldots, e_n] \subset U^\perp$.

   Пусть $v \in L[e_{k+1}, \ldots, e_n]$, т. е. $v = \sum\limits_{j=k+1}^{n} \beta_j e_j$, $u \in U$, т. е. $u = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$.

   $\forall u \in U \quad (u, v) = (\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i, \sum\limits_{j=k+1}^{n} \beta_j e_j) = \sum\limits_{j=k+1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_j (e_i, e_j) = 0 \Rightarrow v \in U^\perp$;

2. Докажем, что $U^\perp \subset L[e_{k+1}, \ldots, e_n]$.

   Пусть $v \in U^\perp, v = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j e_j$.

   В ортонормированном базисе e $\forall j = \overline{1, n}$ $\beta_j = (v, e_j)$.

   $$\text{При } j = \overline{1, k} \quad (v, e_j) = 0, \text{ т. к. } e_j \in U \Rightarrow \beta_j = 0 \text{ при } j = \overline{1, k} \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow v = \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j e_j \Rightarrow v \in L[e_{k+1}, \ldots, e_n].$$

Следствие.

1) $U^\perp$ – линейное подпространство V;

2) $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$.

Доказательство.

1) $U^\perp = L[e_{k+1}, \ldots, e_n]$ – линейное подпространство V;

2) $\langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$ – базис $U^\perp$, т. к. $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ линейно независимая система (часть базиса e) $\Rightarrow \dim U^\perp = n - k = \dim V - \dim U$.

Утверждение 2.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство, U – его подпространство, $U^\perp$ – ортогональное дополнение к U,
$e = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ – ортонормированный базис U,
$e' = \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$ – ортонормированный базис $U^\perp$.
Тогда $\langle e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$ – ортонормированный базис V.

Доказательство.

1. $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V = n$;

2. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ при $i, j = \overline{1, n}$, т. к. при $i, j = \overline{1, k}$ e_i, e_j – векторы ортонормированного базиса e, при $i, j = \overline{k+1, n}$ e_i, e_j – векторы ортонормированного базиса e', а при $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{k+1, n}$ $e_i \in U$, $e_j \in U^{\perp} \Rightarrow (e_i, e_j) = 0$.

$\left\{ \begin{array}{l} 1) \\ 2) \end{array} \right. \Rightarrow \langle e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$ – ортонормированный базис V.

10.8 Ортогональные матрицы

Определение.
Матрица $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ называется ***ортогональной***, если $A^T A = E$.

Множество ортогональных матриц размера $n \times n$ обозначается O_n.

$$A \in O_n \Leftrightarrow A^T A = E.$$

Утверждение 1.
Пусть V – евклидово пространство, $\dim V = n < \infty$, e – ортонормированный базис V, f – базис V.

Тогда f – ортонормированный базис $\Leftrightarrow T_{e \to f} \in O_n$.

Доказательство.
$G_f = T_{e \to f}^T \, G_e \, T_{e \to f}$.

f – ортонормированный базис $\Leftrightarrow G_f = T_{e \to f}^T \, E \, T_{e \to f} = T_{e \to f}^T \, T_{e \to f} = E \Leftrightarrow T_{e \to f} \in O_n$.

Свойства ортогональных матриц

1. $A \in O_n \Leftrightarrow$ столбцы A образуют ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n \times 1}$ со скалярным произведением $(X, Y) = X^T Y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

   Доказательство.
   $A \in O_n \Leftrightarrow A^T A = E \Leftrightarrow (A^i, A^j) = (A^i)^T A^j = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$.

2. $A \in O_n \Rightarrow \det A = \pm 1$.

   Доказательство.
   $A \in O_n \Leftrightarrow A^T A = E \Rightarrow \det A^T \det A = \det E \Rightarrow (\det A)^2 = 1$.

3. $A \in O_n \Leftrightarrow \exists A^{-1} = A^T$.

   Доказательство.
   $(\Rightarrow)$ $A \in O_n \Rightarrow \det A = \pm 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \in \mathbf{R}^{n \times n}$.

   $$A \in O_n \Leftrightarrow A^T A = E. \quad (*)$$

   Умножим $(*)$ на A^{-1} справа, получим $A^T (A A^{-1}) = E A^{-1}$, т. е.

   $$A^T = A^{-1}. \quad (**)$$

   $(\Leftarrow)$ Умножим $(**)$ на A справа, получим $A^T A = E \Leftrightarrow A \in O_n$.

4. $A \in O_n \Leftrightarrow \exists A^{-1} \in O_n$.

   Доказательство.
   $A \in O_n \Leftrightarrow \exists A^{-1} = A^T \Leftrightarrow (A^{-1})^T = A \Leftrightarrow (A^{-1})^T = (A^{-1})^{-1} \Leftrightarrow \exists A^{-1} \in O_n$.

5. $A \in O_n \Leftrightarrow A^T A = E$.

   Доказательство.

$$A \in O_n \Leftrightarrow A^T = A^{-1}. \quad (*)$$

   ($\Rightarrow$) Умножим $(*)$ на A слева, получим $AA^T = E$ $(**)$.

   ($\Leftarrow$) Из $(**)$ $\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$, умножим $(**)$ на A^{-1} слева, получим

$$A^T = A^{-1} \Rightarrow A \in O_n.$$

6. $A \in O_n \Leftrightarrow$ строки матрицы A образуют ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{1\times n}$ со скалярным произведением $(X, Y) = XY^T = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

   Доказательство.
   $A \in O_n \Leftrightarrow AA^T = E \Leftrightarrow (A_i, A_j) = A_i A_j^T = \delta_{ij},\ i, j = \overline{1, n}$.

10.8.1 Ортогональные матрицы малых порядков

1. $n = 1$.

   $A \in O_1 \Rightarrow A = (\pm 1)$;

2. $n = 2$.

   $A \in O_2$.

   Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда $A^T A = E \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1, \\ b^2 + d^2 = 1, \\ ab + cd = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = \cos\alpha, \\ c = \sin\alpha, \end{cases} \\ \begin{cases} b = \cos\beta, \\ d = \sin\beta, \end{cases} \\ \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = 0. \ (*) \end{cases}$$

   $(*) \Leftrightarrow \cos(\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow \beta - \alpha = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\alpha & \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, & \det A = 1; \\ A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, & \det A = -1. \end{array} \right.$$

Глава 11

Линейные операторы в евклидовом пространстве

11.1 Ортогональный оператор в евклидовом пространстве.

Определение.
Пусть V – евклидово пространство, $A \in L(V, V)$.

A называется ***ортогональным оператором*** в V, если A сохраняет скалярное произведение:

$$(Au, Av) = (u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

Множество всех ортогональных операторов, действующих в V, обозначается $O(V)$.

$$O(V) = \{A \in L(V, V) : (Au, Av) = (u, v) \ \ \forall u, v \in V\}.$$

Утверждение 1.
$A \in O(V) \Rightarrow \begin{cases} \|Au\| = \|u\| \quad \forall u \in V, \\ (\widehat{Au, Av}) = (\widehat{u, v}), \ \ \forall u, v \in V \setminus \{\overline{0}\}. \end{cases}$

Доказательство.

$$\|Au\| = \sqrt{(Au, Au)} = \sqrt{(u, u)} = \|u\|,$$

$$u, v \neq 0 \Rightarrow (\widehat{u, v}) = \arccos \frac{(u, v)}{\|u\| \ \|v\|} = \arccos \frac{(Au, Av)}{\|Au\| \ \|Av\|} = (\widehat{Au, Av}).$$

Пример. V^3, $A(\overline{v}) = 2\overline{v}$.

Очевидно, что A сохраняет угол, но не сохраняет длину $\Rightarrow A \notin O(V^3)$.

Утверждение 2.
Пусть V – евклидово пространство, $A \in L(V, V) : \|Au\| = \|u\| \ \forall u \in V$.

Тогда $A \in O(V)$.

Доказательство.
Из утверждения 1 пункта 9.2 главы 9

$$(Au, Av) = \frac{1}{2}\left((Au + Av, Au + Av) - (Au, Au) - (Av, Av)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(((A(u + v), A(u + v)) - (Au, Au) - (Av, Av))\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(\|A(u + v)\|^2 - \|Au\|^2 - \|Av\|^2) = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) =$$
$$= \frac{1}{2}((u + v, u + v) - (u, u) - (v, v)) = (u, v) \ \ \forall u, v \in V.$$

Утверждение 3 (Критерий ортогональности оператора)**.**
Пусть V – евклидово пространство, $A \in L(V,V)$, тогда

$$A \in O(V) \Leftrightarrow \|Au\| = \|u\| \quad \forall u \in V.$$

Доказательство.
Необходимость ($\Rightarrow$): см. утверждение 1.
Достаточность ($\Leftarrow$): см. утверждение 2.

Примеры.

1. V^3, A – оператор проектирования на плоскость.

   A не сохраняет длину $\Rightarrow A \notin O(V^3)$;

2. V^3, A – отражение относительно плоскости.

   A сохраняет длину $\Rightarrow A \in O(V^3)$;

3. P_n, $(f,g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\,dt$, $Ap(t) = \dfrac{d}{dt}p(t) = p'(t)$.

   Пусть $p(t) = 1 \Rightarrow Ap(t) = 1' = 0$.

   $\|p(t)\| \neq 0, \|Ap(t)\| = 0 \Rightarrow A \notin O(P_n)$.

Утверждение 4.
Пусть V – евклидово пространство, $A \in O(V)$. Тогда $\operatorname{Ker} A = \{\overline{0}\}$.

Доказательство.
$v \in \operatorname{Ker} A \Leftrightarrow Av = \overline{0} \Rightarrow \|Av\| = 0 \Rightarrow \|v\| = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} A = \{\overline{0}\}$.

Утверждение 5.
Пусть V – евклидово пространство, $A \in O(V)$ – обратимый оператор. Тогда $A^{-1} \in O(V)$.

Доказательство.
$(A^{-1}u, A^{-1}v) = (A(A^{-1}u), A(A^{-1}v)) = (u,v) \Rightarrow A^{-1} \in O(V)$.

Утверждение 6.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство, $A \in O(V)$. Тогда $\exists A^{-1} \in O(V)$.

Доказательство.
Из утверждения 4 $\Rightarrow \exists A^{-1} \in L(V,V)$, а из утверждения 5 $\Rightarrow A^{-1} \in O(V)$.

Утверждение 7.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство, $A \in L(V,V)$, $e = \langle e_1, e_2, \ldots, e_n \rangle$ – ортонормированный базис V.

Рассмотрим систему векторов $e' = \{Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n\}$.

Тогда $A \in O(V) \Leftrightarrow e'$ – ортонормированный базис V.

Доказательство.
Необходимость ($\Rightarrow$).

Пусть $A \in O(V)$. Тогда $(Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij} \Rightarrow e'$ – ортонормированный базис V.

Достаточность ($\Leftarrow$).

Пусть $e' = \langle Ae_1, \ldots, Ae_n \rangle$ – ортонормированный базис V, тогда

$$u = eX = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad Au = \sum_{i=1}^{n} x_i Ae_i = e'X,$$
$$v = eY = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i, \quad Av = \sum_{i=1}^{n} y_i Ae_i = e'Y.$$
$$(Au, Av) = X^T G_{e'} Y = X^T Y = X^T G_e Y = (u, v) \Rightarrow A \in O(V).$$

Замечание.
Пусть V – линейное пространство, $A \in L(V, V)$,
$e = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle, \; e' = \langle Ae_1, \dots, Ae_n \rangle$ – базисы V.
Тогда $A_e = T_{e \to e'}$, поскольку $e' = eA_e$.

Утверждение 8.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство, $A \in L(V, V), \; e = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ – ортонормированный базис V.
Тогда $A \in O(V) \Leftrightarrow A_e \in O_n$.

Доказательство.
Рассмотрим $e' = \{Ae_1, \dots, Ae_n\}$.
$A \in O(V) \Leftrightarrow e'$ – ортонормированный базис. $\Leftrightarrow T_{e \to e'} = A_e \in O_n$.

11.2 Соответствие между линейными операторами и билинейными формами в конечномерном евклидовом пространстве

Пусть V – евклидово пространство, на котором определено скалярное произведение (u, v), и пусть $A \in L(V, V)$.

Рассмотрим билинейную форму $B_A(u, v) = (u, Av)$.

Утверждение 1.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство, e – ортонормированный базис V, $A \in L(V, V), \; B_A(u, v) = (u, Av)$.
Тогда в базисе e матрица формы $B_{A_e} = A_e$.

Доказательство.
$B_{A_e} = (B_A(e_i, e_j)) = ((e_i, Ae_j)) = (a_{ij}) = A_e$.

Утверждение 2.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство. Тогда для любой билинейной формы $B(u, v)$ в V существует единственный линейный оператор $A \in L(V, V) : B(u.v) = B_A(u, Av)$.

Доказательство.
Существование.
Выберем в V ортонормированный базис e и оператор $A \in L(V, V) : A_e = B_e$. Тогда если $u = eX, \; v = eY$, то $B(u, v) = X^T B_e Y = X^T (A_e Y) = X^T G_e (A_e Y) = (u, Av) = B_A(u, v)$.
Единственность.
Пусть $A_1, A_2 \in L(V, V) : B(u, v) = (u, A_1 v) = (u, A_2 v) \forall u, v \in Y \Rightarrow A_1 v = A_2 v \forall v \in V$ (см. следствие 2 пункта 10.3 главы 10) $\Rightarrow A_1 = A_2$.

Замечание.
Утверждение 2 означает, что существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами и билинейными формами в конечномерном евклидовом пространстве.

11.3 Сопряженный оператор в конечномерном евклидовом пространстве

Определение.
Пусть V – евклидово пространство, $A \in L(V,V)$.

Сопряженным к линейному оператору A называется такой линейный оператор A^*, что

$$(Au, v) = (u, A^*v).$$

Утверждение 1.
Для любого линейного оператора в конечномерном евклидовом пространстве существует единственный сопряженный линейный оператор.

Доказательство.
Пусть $A \in L(V,V)$, V – конечномерное евклидово пространство.

Рассмотрим для формы $B_A(u,v)$ "транспонированную" билинейную форму $B_A^T(u,v) = B_A(v,u)$.

Существует единственный $A^* \in L(V,V) : B_A^T(u,v) = B_{A^*}(u,v) = (u, A^*v)$.

С другой стороны, $B_A^T(u,v) = B_A(v,u) = (v, Au)$.

Следовательно, $(Au, v) = (u, A^*v)$, т. е. A^* – сопряженный к A оператор.

Утверждение 2.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство, e – базис V. Тогда $(B_A^T)_e = B_{A_e}^T$.

Доказательство.
$(B_A^T)_e = (B_A^T(e_i, e_j)) = (B_A(e_j, e_i)) = B_{A_e}^T$.

Утверждение 3.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство, $A \in L(V,V)$, e – ортонормированный базис V.

Тогда $A_e^* = A_e^T$.

Доказательство.
e – ортонормированный базис $\Rightarrow A_e^* = (B_{A^*})_e = (B_A^T)_e = B_{A_e}^T = A_e^T$.

Примеры.

1. V – евклидово пространство, $\dim V < \infty$,

   $A \in L(V,V) : Av = \alpha v,\ \alpha \in \mathbf{R},\ \alpha \neq 0.$

   $$(Au, v) = (\alpha u, v) = \alpha(u,v) = (u, \alpha v) = (u, Av) \Rightarrow A^* = A \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow A \text{ – самосопряженный оператор;}$$

2. V^3, $A \in L(V,V)$, $\overline{0} \neq \overline{a} \in V^3$, $A\overline{v} = [\overline{v}, \overline{a}]$.
   $$(A\overline{u}, \overline{v}) = ([\overline{u}, \overline{a}], \overline{v}) = \overline{u}\,\overline{a}\,\overline{v} = \overline{a}\,\overline{v}\,\overline{u} = ([\overline{a}, \overline{v}], \overline{u}) = (\overline{u}, -[\overline{v}, \overline{a}]) =$$
   $$= (\overline{u}, [\overline{v}, -\overline{a}]) = (\overline{u}, -A\overline{v}) \Rightarrow A^* = -A.$$

Утверждение 4.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство.

Если $A \in O(V)$ – ортогональный оператор, то $A^* = A^{-1}$.

Доказательство.
$\dim V < \infty$, $A \in O(V) \Rightarrow \exists A^{-1} \in O(V)$.

$(Au, v) = (Au, AA^{-1}v) = (u, A^{-1}v) \Rightarrow A^* = A^{-1}$.

Пример.

$V^2 : A \in O(V^2)$ – поворот на α против часовой стрелки, тогда $A^* = A^{-1} \in O(V^2)$ – поворот на α по часовой стрелке.

11.4 Самосопряженный (симметрический) оператор в конечномерном евклидовом пространстве.

Определение.
Пусть V – евклидово пространство, $A \in L(V, V)$.

Оператор A называется ***самосопряженным***, если $A^* = A$, т. е. $(Au, v) = (u, Av)$.

Утверждение 1.
Оператор $A \in L(V, V)$ в конечномерном евклидовом пространстве является самосопряженным тогда и только тогда, когда соответствующая ему билинейная форма $B_A(u, v)$ симметрическая.

Доказательство.
$A = A^* \Leftrightarrow B_A(u, v) = (u, Av) = (Au, v) = (v, Au) = B_A(v, u)$.

Замечание.
Самосопряженный оператор также называется ***симметрическим***.

Следствие.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство, e – ортонормированный базис V. Тогда A – симметрический оператор $\Leftrightarrow A_e^T = A_e$.

Доказательство.
A – симметрический оператор $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow B_A(u, v) \text{ – симметрическая форма } \Leftrightarrow A_e = B_{A_e} = B_{A_e}^T = A_e^T.$$

Теорема 1.
Собственные векторы симметрического оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Доказательство.
Пусть $A = A^*,\ u \neq \overline{0},\ Au = \alpha_1 u,\ v \neq \overline{0},\ Av = \alpha_2 v,\ \alpha_1 \neq \alpha_2$.

Тогда

$$\begin{cases} (Au, v) = \alpha_1(u, v), \\ (u, Av) = \alpha_2(u, v) \end{cases} \Rightarrow \alpha_1(u, v) = \alpha_2(u, v) \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2)(u, v) = 0 \Rightarrow \text{т.к. } \alpha_1 \neq \alpha_2, (u, v) = 0.$$

Теорема 2.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство, $A = A^* \in L(V, V)$.

Тогда все корни характеристического уравнения $f_A(\lambda) = \det(A_e - \lambda E) = 0$ действительные.

Доказательство.
Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ – комплексный корень $f_A(\lambda)$ с нетривиальной мнимой частью $\beta \neq 0$.

Тогда по лемме 1 пункта 7.3 главы 7 $\exists u, v \in V$:

$$\begin{cases} \begin{cases} Au = \alpha u - \beta v, \\ Av = \beta u + \alpha v, \end{cases} \\ (u, u) + (v, v) \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (Au, v) = \alpha(u, v) - \beta(v, v), \\ (u, Av) = \beta(u, u) + \alpha(u, v), \\ (u, u) + (v, v) \neq 0. \end{cases}$$

$$(Au, v) = (u, Av) \Rightarrow \alpha(u, v) - \beta(v, v) = \beta(u, u) + \alpha(u, v) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \beta((u, u) + (v, v)) = 0 \Rightarrow \beta = 0 \text{ – противоречие.}$$

Следовательно, все корни характеристического уравнения симметрического оператора действительные.

Теорема 3.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство, $A = A^* \in L(V, V)$, U – инвариантное относительно A подпространство.

Тогда $U^\perp$ является инвариантным относительно A подпространством.

Доказательство.
Пусть $v \in U^\perp$, т. е. $(v, u) = 0\ \forall u \in U$.

Тогда $\forall u \in U\ (Av, u) = (v, Au) = 0$, т. к. $Au \in U \Rightarrow Av \in U^\perp$.

Теорема 4.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство, $A = A^* \in L(V, V)$.

Тогда существует собственный ортонормированный базис оператора A в пространстве V.

Доказательство.
Докажем индукцией по $n = \dim V$.

1. Пусть $n = 1$.

   $V = L[v],\ v \neq \overline{0} \Rightarrow Av = \lambda v,\ \lambda \in \mathbf{R}, v$ – собственный вектор, λ – собственное значение оператора A.

   Следовательно, $g = \langle \frac{v}{\|v\|} \rangle$ – собственный ортонормированный базис V, $A_g = (\lambda)$;

2. Пусть утверждение теоремы верно для любого $m < n$.

   Рассмотрим $\det(A - \lambda\epsilon) = f_A(\lambda)$. $A = A^* \Rightarrow$ все корни $f_A(\lambda)$ действительные.

   Пусть $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ – корень $f_A(\lambda) \Rightarrow \exists v$ – собственный вектор A с собственным значением $\lambda_1 : v \neq \overline{0},\ Av = \lambda_1 v$.

   Пусть $g_1 = \frac{v}{\|v\|} \Rightarrow L[v] = L[g_1] = U$ – одномерное инвариантное относительно A подпространство V.

   $\exists U^\perp$ – инвариантное относительно A подпространство, $\dim U^\perp = n - 1$.

   По предположению индукции $\exists \langle g_2, g_3, \ldots, g_n \rangle$ – собственный ортонормированный базис оператора $A|_{U^\perp}$ в пространстве $U^\perp \Rightarrow \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \rangle$ – собственный ортонормированный базис оператора A в пространстве V.

   $A_g = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения A.

Замечание.
Симметрический оператор является оператором простого типа. Для того, чтобы найти собственный ортонормированный базис симметрического оператора, нужно сначала найти его произвольный собственный базис. Векторы этого базиса, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны друг другу, а его векторы, отвечающие одному и тому же собственному значению, нужно ортогонализовать с помощью процесса Грама – Шмидта. В результате получится собственный ортогональный базис, а после нормирования его векторов – собственный ортонормированный базис.

Следствие 1.
Пусть $A \in \mathbf{R}^{n \times n} : A^T = A$.

Тогда $\exists T \in O_n : T^T A T = T^{-1} A T = diag(\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n)$,

где λ_i – корень $\det(A - \lambda E) = 0,\ i = \overline{1, n}$.

Доказательство.
Матрицу A можно рассматривать как матрицу симметрического оператора в естественном ортонормированном базисе $e = \langle E^1, E^2, \ldots, E^n \rangle$ евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ со скалярным произведением $(X, Y) = X^T Y$.

$\exists g$ – собственный ортонормированный базис этого оператора.

$$T_{e \to g} = T \in O_n \Rightarrow T^T = T^{-1}.$$

$$A_g = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = T^{-1} A T = T^T A T.$$

11.5 Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования координат

Теорема 1.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство.

Тогда для любой квадратичной формы $Q(u)$ в пространстве V существует ортонормированный канонический базис (говорят, что $Q(u)$ приводится к главным осям). Коэффициенты $Q(u)$ определены в любом ортонормированном каноническом базисе однозначно с точностью до перестановки.

Доказательство.
Пусть $\dim V = n < \infty$.

$Q(u) = B(u, u)$, где $B(u, v)$ – симметрическая билинейная форма $\Rightarrow B(u, v) = B_A(u, v) =$ $= (u, Av)$, где $A = A^*$ – однозначно определенный по форме $B(u, v)$, а значит, и по $Q(u)$, симметрический оператор, матрица которого в любом ортонормированном базисе совпадает с матрицей формы $Q(u)$.

$\exists g$ – собственный ортонормированный базис оператора A.

$A_g = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = B_{A_g}$.

В базисе g $Q(u) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные значения оператора A.

Следствие.
Пусть $Q(u) = X^T A_e X$ – квадратичная форма, заданная в произвольном базисе e n-мерного линейного пространства V ($u = eX$, A_e – матрица $Q(u)$ в базисе e).

Тогда существует базис g пространства V, в котором

$$Q(u) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 = Y^T A_g Y \ (u = gY),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – корни $\det(A_e - \lambda E) = 0$, $A_g = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = T_{e \to g}^{-1} A_e T_{e \to g}$, матрица перехода $T_{e \to g}$ ортогональна и задает ортогональное преобразование координат

$$Y = T_{e \to g}^{-1} X = T_{e \to g}^T X.$$

Доказательство.
Введем в V скалярное произведение, положив $G_e = E$. Тогда V станет евклидовым пространством, а e – его ортонормированным базисом.

Матрица формы A_e в ортонормированном базисе e совпадает с матрицей соответствующего симметрического оператора A.

Существует собственный ортонормированный базис g оператора A, в котором его матрица, а значит, и матрица формы имеют диагональный вид. На диагонали стоят собственные значения оператора A, т. е. корни характеристического уравнения $\det(A_e - \lambda E) = 0$.

При этом матрица перехода $T_{e\to g}$ от ортонормированного базиса e к ортонормированному базису g является ортогональной. $T_{e\to g}\in O_n \Rightarrow T^{-1}_{e\to g}=T^{T}_{e\to g}$.

Следовательно, $A_g = diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n) = T^{-1}_{e\to g}\,A_e\,T_{e\to g} = T^{T}_{e\to g}\,A_e\,T_{e\to g}$,
$Q(u) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$, где $u = eY$, $Y = T^{-1}_{e\to g}X = T^{T}_{e\to g}X$ – ортогональное преобразование координат.

11.6 Приведение матрицы ортогонального оператора к квазидиагональному (блочно-диагональному) виду

Теорема 1.
Пусть V – конечномерное евклидово пространство, $A\in O(V)$, U – инвариантное относительно A подпространство.

Тогда $U^{\perp}$ – инвариантное подпространство относительно A.

Доказательство.
Пусть $v\in U^{\perp}\Leftrightarrow (u,v)=0\ \forall u\in U$,

$\dim U<\infty$, $A|_U\in O(U)\Rightarrow A|_U$ невырожденный $\Rightarrow \forall u\in U\ \exists w\in U: Aw=u\Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall u\in U (u,Av)=(Aw,Av)=(w,v)=0, \text{ т. к. } w\in U\Rightarrow Av\in U^{\perp}.$$

Утверждение 1.
Пусть V – евклидово пространство, $\dim V=1$, $A\in O(V)$.

Тогда $\exists$ ортонормированный базис e: $\left[\begin{array}{l} A_e=(1),\\ A_e=(-1).\end{array}\right.$

Доказательство.
В ортонормированном базисе e матрица ортогонального оператора $A_e\in O_1\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A_e=(1),\\ A_e=(-1).\end{array}\right.$

Утверждение 2.
Пусть V – евклидово пространство, $\dim V=2$, $A\in O(V)$.

Тогда если $\det A=1$, $\exists$ ортонормированный базис e:

$$A_e=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=\Pi(\alpha),$$

если $\det A=-1$, $\exists$ ортонормированный базис f:

$$A_f=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Доказательство.
В любом ортонормированном базисе e матрица A_e оператора $A\in O(V)$ ортогональна, $A_e\in O_2\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} A_e=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\ \det A_e=1,\\[2mm] A_e=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix},\ \det A_e=-1.\end{array}\right.$$

Матрица $A_e=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$ – симметрическая ($A_e=A_e^T$), следовательно, она является матрицей симметрического оператора A в базисе e. $\exists$ собственный ортонормированный базис f оператора A.

Найдем собственные значения оператора A.

$$\det(A_e - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -(\cos^2\alpha - \lambda^2) - \sin^2\alpha = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1, \\ \lambda = -1. \end{array}\right. \Rightarrow A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следствие.
В двумерном евклидовом пространстве ортогональный оператор является либо оператором поворота, либо оператором отражения.

Доказательство.
Матрица $A_e = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \Pi(\alpha),\ \det A_e = 1$, задает поворот против часовой стрелки на угол α, при этом сохраняется ориентация пространства.

Матрица $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\det A_e = -1$, задает отражение относительно прямой, определяемой первым базисным вектором, при этом изменяется ориентация пространства.

Теорема 2.
Пусть V – евклидово пространство, $\dim V = n < \infty,\ A \in O(V)$.

Существует ортонормированный базис e такой, что A_e имеет квазидиагональный вид, на диагонали стоят либо матрицы вида $\Pi(\alpha)$, либо -1, либо 1.

$$\begin{pmatrix} \Pi(\alpha_1) & & & & & & & & \\ & \Pi(\alpha_2) & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \Pi(\alpha_k) & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство.
Докажем индукцией по $n = \dim V$.

1. $\left[\begin{array}{l} \text{Если } n = 1, \text{ то утверждение теоремы следует из утверждения 1,} \\ \text{Если } n = 2, \text{ то утверждение теоремы следует из утверждения 2.} \end{array}\right.$

2. Пусть теорема верна для $\forall k < n$. Докажем для n.

   В пространстве V существует одномерное или двумерное инвариантное относительно A подпространство U. В нем существует ортонормированный базис e', в котором матрица $A|_U$ имеет нужный вид.

   $U^\perp$ является инвариантным относительно A подпространством, $\dim U^\perp < n \Rightarrow$ в $U^\perp$ существует ортонормированный базис e'', в котором матрица $A|_{U^\perp}$ имеет нужный вид.

   Рассмотрим ортонормированный базис e в V, который является объединением ортонормированных базисов e' в U и e'' в $U^\perp \Rightarrow A_e$ имеет нужный квазидиагональный вид.

Следствие 1.
В трехмерном евклидовом пространстве ортогональный оператор является либо оператором поворота вокруг некоторой оси, либо оператором зеркального поворота, т. е. композицией поворота вокруг оси и отражения относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота.

Доказательство.
Существует ортонормированный базис $e = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ пространства, в котором

$$\left[\begin{array}{ll} A_e = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \det A_e = 1, & (1) \\ A_e = \begin{pmatrix} \Pi(\alpha) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \det A_e = -1. & (2) \end{array}\right.$$

(Здесь учитывается, что $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Pi(0)$, а $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \Pi(\pi)$).

Матрица A_e вида (1) задает поворот на угол α против часовой стрелки вокруг оси, направляемой вектором e_3, не изменяющий ориентацию пространства.

Матрица A_e вида (2) задает зеркальный поворот относительно оси, направляемой вектором e_3, изменяющий ориентацию пространства.

Следствие 2 (Теорема Эйлера)**.**
Каково бы ни было непрерывное движение твердого тела с закрепленной точкой, оно сводится к повороту относительно некоторой оси, проходящей через эту точку на некоторый угол.

Доказательство.
Такое движение твердого тела сохраняет длины радиус-векторов, исходящих из неподвижной точки, следовательно, описывается ортогональным оператором, действующим в трехмерном евклидовом пространстве. Непрерывное движение не изменяет ориентацию пространства, следовательно, оператор не может быть зеркальным поворотом, значит, он является поворотом.

P.S. В версии от 27.05.21 могут не работать ссылки, все замеченные ошибки присылайте на почту glebgrinkevichh@yandex.ru или в вк/телеграм fuzrodahh. Спасибо!