Álgebra Lineal

Índice

1 Sistemas Lineales y Matrices

1.1 Introducción a los sistemas lineales

Se define como una **ecuación lineal** en las n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ como aquella que puede expresarse en la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Un **sistema de ecuaciones lineales** es una colección de una o más ecuaciones lineales en el mismo conjunto de incógnitas

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}X_1 & + & a_{12}X_2 & + & \cdots & + & a_{1n}X_n & = & b_1 \\
a_{21}X_1 & + & a_{22}X_2 & + & \cdots & + & a_{2n}X_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}X_1 & + & a_{m2}X_2 & + & \cdots & + & a_{mn}X_n & = & b_m
\end{array}$$

Un sistema lineal recibe el nombre de **sistema homogéneo** si todos sus términos independientes son nulos.

La **Solución** del sistema es una lista ordenada $s_1, s_2, \dots, s_n$ de números reales que convierten cada ecuación en una afirmación verdadera al sustituir s_i por su correspondiente X_i.

El conjunto de todos los $s_1, s_2, \dots, s_n$ se llama las **n-uplas de números reales**. Y el número de n-uplas se denota como $\mathbb{R}^n$

1. Son $n = 2$ los **pares de números reales**, denotado por $\mathbb{R}^2$. Serían la representación analítica del plano.
2. Son $n = 3$ las **ternas de números reales**, denotadas por $\mathbb{R}^3$. Serían la representación analítica del espacio tridimensional.
3. Son $n = 4$ las **cuaternas de números reales**, denotado por $\mathbb{R}^4$. No podemos compararlas con nuestra realidad geométrica, por lo no son tan intuitivas como los pares o las ternas.

El conjunto de las posibles soluciones se llama **conjunto solución** del sistema lineal. Si el sistema tiene n incógnitas, el conjunto solución será un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. En función de el número de soluciones, los sistemas se clasifican como:

1. **Sistema Incompatible**: No tiene solución.
2. **Sistema Compatible**: Tiene solución.

   (a) **Sistema compatible determinado**: Tiene una única solución

   (b) **Sistema compatible indeterminado**: Tiene más de una solución

   (c) **Sistema compatible indeterminado**: Tiene más de una solución

Un **Sistema homogéneo** es siempre compatible, pues tiene como mínimo una solución, la **solución trivial**, donde cada incógnita vale 0.
Un sistema formado por **una única ecuación** es también, **siempre compatible**.

Podemos contener la información de un sistema *(los coeficientes y términos independientes)* en una disposición rectangular llamada **matriz**.

Por ejemplo dado el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} X_1 & - & 2X_2 & + & X_3 & = & 0 \\ & & 2X_2 & - & 8X_3 & = & 8 \\ -4X_1 & + & 5X_2 & + & 9X_3 & = & -9 \end{array}$$

La **matriz aumentada** sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

Las **filas** son las **distintas ecuaciones del sistema**. Y cada **columna** recoge los **coeficientes de las incógnitas**, siendo la **última columna** los **términos independientes**.

Se trata solo de una forma de notar el sistema de ecuaciones mas eficiente, pero en realidad **seguimos trabajando con ecuaciones**, y la forma de pensar es la misma.

1.2 Método de Gauss y sus utilidades

Antes de exponer el **procedimiento sitemático** para resolver **sistemas lineales**, necesitamos saber que dos sistemas son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones. En el método que vamos a usar, la estrategia es primero remplazar nuestro sistema a resolver por uno **equivalente** pero más fácil.
Para esto utilizaremos el: ***Método de Gauss***.

1. Intecambiar entre sí dos ecuaciones
2. Multiplicar una ecuación por una constante no nula
3. Sumarle a una ecuación un múltiplo no nulo de otra

Estas operaciones aplicadas sobre las filas de una matriz se llaman **operaciones elementales por filas** y son:

1. Intercambiar entre sí dos filas.
   Notado como: $F_i \longleftrightarrow F_j$
2. Multiplicar una fila pro una constante no nula.
   Notado como: $F_i \to aF_i$
3. Sumarle a una fila un múltiplo no nulo de otra.
   Notado como: $F_i \to F_i + aF_j$

Dos matrices son **equivalentes por filas** si una es el resultado de realizarle estas operaciones elementales por filas a la otra.

Esto nos interesa porque *dos sistemas lineales son **equivalentes** si son **equivalentes por filas**.*

Definimos una **fila nula** si todas las entradas *son igual a cero* y como **fila no nula** a una fila que tiene, al menos, *una entrada no nula.*

Nuestro objetivo con el *método de Gauss* es pasar una matriz cualquiera a una en **forma escalonada**, que tiene las siguiente propiedades:

1. Todas las filas no nulas se encuentran por encima de las filas nulas
2. Dadas dos filas consecutivas no nulas, el primer término no nulo de la fila superior está situado más a la izquierda que el primer término no nulo de la fila inferior

Son ejemplos de matrizes escalonadas:

$$\begin{pmatrix} \underline{4} & 1 \\ 0 & \underline{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{3} & -1 & 1 \\ 0 & \underline{2} & 2 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \underline{-1} & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

En una matriz escalonada, los elementos que encabezan las filas no nulas *(los marcados en rojo)* se llaman **pivotes**, **entradas principales de la matriz** o **entradas líderes**. Las incógnitas a las que multiplican se llaman **incógnitas principales** y las demás se llaman **incógnitas no principales**.

Si una matriz en *forma escalonada* cumple también estas condiciones, se dice que está en **forma escalonada reducida**:

1. Cada entrada principal es 1
2. Cada entrada principal es el único elemento no nulo en su columna

Son ejemplos de matrices en forma escalonada reducida:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 \\ 0 & \underline{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \underline{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema: Una matriz es *equivalente por filas* a *una y sólo una* matriz en forma escalonada reducida.

Con *Gauss* la estrategia para simplificar el sistema será usar el término X_1 en la primera ecuación de un sistema para eliminar los términos X_1 en las otras ecuaciones. Entonces usamos el término X_2 de la segunda ecuación para eliminar los términos en X_2 de las otras ecuaciones. *Y así sucesivamente.*

A continuación, veremos un ejemplo de como usar este algoritmo para pasar una matriz a su forma reducida y, seguidamente, a su forma escalonada reducida.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

- Paso 1: Queremos la posición pivote en la parte más alta así que intercambiamos filas: $F_1 \longleftrightarrow F_3$

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

- Paso 2: Usamos el 3 de la esquina superior izquierda para hacer ceros debajo $F_2 \to F_2 - F_1$

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

- Paso 3: Utilizamos el primer elemento no nulo de la segunda fila para hacer ceros debajo, pero primero, hacemos una *operación opcional* para simplificar los cálculos posteriores $F_2 \to \frac{1}{2}F_2$

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

- Paso 4: Ahora si, hacemos ceros debajo de la segunda fila $F_3 \to F_3 - 3F_2$

$$\begin{pmatrix} \underline{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & \underline{1} & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & 4 \end{pmatrix}$$

Ya hemos conseguido dejar la matriz inicial en forma escalonada. Pero hay entradas principales distintas de 1 *(El pivote de la primera columna)*. Y también hay entradas no nulas por encima de las demás entradas principales.

- Paso 5: Operamos para conseguir un 1 principal en la primera fila $F_1 \to \frac{1}{3}F_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Paso 6: Hacemos ceros por encima de las entradas principales usando los pivotes para hacer cero las entradas superiores de su columna en otras filas. Para eso buscamos el pivote más a la derecha y operamos. $F_1 \to F_1 - 2F_3$ y $F_2 \to F_2 - F_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Paso 7: Ahora cogemos el segundo pivote más a la derecha y hacemos ceros encima $F_1 \to F_1 + 3F_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz ya está en forma escalonada reducida. Diremos que es la forma canónica por filas de las matriz de partida A.

El pasar una matriz a forma reducida canónica también nos ayuda también a saber si un sistema es compatible o incompatible

- Al pasar la matriz de un sistema incompatible a forma reducida nos encontraremos algo similar a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- La última ecuación es $0 = 3$, que es una clara incoherencia. El sistema, por tanto, es *incompatible.* Podríamos decir entonces que: *Un sistema es incompatible si su matriz tiene la última columna como columna pivote.*

Tras pasar un sistema a su forma canónica reducida, **podemos saber a simple vista si un sistema es compatible *determinado* o *indeterminado*.**

Si el número de incógnitas principales *coincide* con el número de incógnitas entonces el sistema es **compatible determinado**. Y si el número de incógnitas principales es *menor* el sistema es **indeterminado**.

Es decir, una vez tengamos el sistema en su forma canónica y descartado de que el sistema sea incompatible, si el *número de filas (no nulas)* es **igual** al número de *incógnitas*, el sistema será **compatible determinado**. Y si hay *menos incógnitas principales* el sistema será **compatible indeterminado**.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X & X & X & \vdots & X \\ 0 & X & X & \vdots & X \\ 0 & 0 & X & \vdots & X \end{pmatrix}}_{\text{Compatible Determinado}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} X & X & X & \vdots & X \\ 0 & X & X & \vdots & X \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Compatible Indeterminado}}$$

Podemos observar que el primer ejemplo, tiene 3 incógnitas principales y 3 incógnitas, por tanto, es un S.C.D.

El segundo ejemplo tiene 2 incógnitas principales y 3 incógnitas, por tanto, es un S.C.I.

2 Matrices y ecuaciones vectoriales

Una matriz pueden utilizarse, y se utilizan utilizarse fuera de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Pueden considerarse por tanto objetos de derecho propio, y tienen sus propiedades que ahora desarrollaremos.

Una **matriz real** es una disposición rectangular de números reales que forman filas y columnas. Cada número que aparece en dicha disposición es una **entrada de matriz**.

Las matrices tienen tamaños diferentes. El **tamaño** de una matriz se describe especificando el **número de columnas y filas**. Una matriz recibe el nombre de *matriz columna* si sólo tiene una columna y *matriz fila* si solo tiene una fila.

Aquí unos ejemplos de matrices:

$$\begin{pmatrix} 0 & -7 & 3 \\ 8 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -7 & \pi \\ \frac{8}{3} & 2 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Para denotar matrices se usan letras mayúsculas y letras minúsculas para denotar las entradas, tal que así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

Naturalmente la letra mayúscula que se use para denotar la matriz, se usará en minúscula para las entradas de dicha matriz.

Una matriz A con n *filas* y n *columnas* se denomina **matriz cuadrada** y se dice de sus elementos $a_{11}, a_{22}, \cdots$ que están en la **diagonal principal**.

Una matriz cuadrada es **triangular superior** si todos los elementos por debajo de la *diagonal principal* son nulos. Y toda matriz cuadrada es **triangular inferior**, si todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos.

Por último, una matriz cuadrada es una **matriz diagonal** si tanto por encima como por debajo de su *diagonal principal* todas las entradas son nulas, es decir solo hay entradas no nulas en las entradas de la *diagonal principal*.

Con estas definiciones podemos darnos cuenta que *una matriz cuadrada en forma escalonada* es **triangular superior**.

Como ya hemos dicho las matrices se utilizan para más cosas que para abreviar al trabajar con sistemas lineales. Para poder usarlas en otras aplicaciones desarrollaremos una *aritmétrica de matrices*, para multiplicarlas y sumarlas.

2.1 Aritmétrica de matrices

2.1.1. Suma de matrices

Si A y B son *dos matrices del mismo tamaño*, entonces la suma $A + B$ es el resultado de sumar las entradas correspondientes de cada matriz, es decir, $a_{11} + b_{11}, a_{12} + b_{12}$

Solo se pueden sumar *matrices del mismo tamaño.* Aquí un ejemplo de suma de matrices:

$$\text{A=}\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 6 & -7 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\text{B=}\begin{pmatrix}3 & 8 & 3\\ -2 & 8 & 5\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}\ \text{A+B=}\begin{pmatrix}4 & 12 & 1\\ 4 & 1 & 8\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

2.1.2. Producto por un escalar

Si A es una matriz cualquiera y c un escalar cualquiera, entonces cA se obtiene *multiplicando cada entrada* de A por c. Aquí algunos ejemplos:

$$\text{A=}\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 6 & -7 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix},\text{2A=}\begin{pmatrix}2 & 8 & -4\\ 12 & -14 & 6\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}\ \text{(-1)A=}\begin{pmatrix}-1 & -4 & 2\\ -6 & 7 & -3\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

Una matriz *cuyas entradas son todas ceros*, recibe el nombre de **matriz cero** o *matriz nula* y se denota por 0

2.1.3. Propiedades de la suma y producto por un escalar

Sean A, B y C matrices del mismo tamaño, y sean r y s escalares. Entonces:

1. $A + B = B + A$ *(Propiedad conmutativa)*
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$ *(Propiedad asociativa)*
3. $A + 0 = A$ *(La matriz nula es el elemento neutro para la suma de matrices)*
4. $A + (-A) = 0$ *(La matriz -A es la matriz opuesta de A)*
5. $r(A + B) = rA + rB$
6. $(r + s)A = rA + sA$
7. $r(sA) = (rs)A$
8. $1A = A$

2.1.4. Producto de matrices

Si A es una matriz $m \times r$ y B es una matriz $r \times n$, entonces el producto es *la matriz* $m \times n$ *cuyos elementos se determinan con sigue:* El elemento de la fila i y columna j de AB, es la suma de los productos de los elementos de la fila i en la matriz A con los elementos de la columna j en la matriz B.

Para poder multiplicar dos matrices, es necesario que el número de columnas *de la matriz A sea igual al número de* filas *de la matriz B*

Aquí un ejemplo:

$$\text{A=}\begin{pmatrix} \underline{5} & \underline{3} & \underline{-4} & \underline{-2} \\ 8 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{\underline{2\times4}}, \text{B=}\begin{pmatrix} \underline{1} & 4 & 0 \\ \underline{-5} & 3 & 7 \\ \underline{0} & -9 & 5 \\ \underline{5} & 1 & 4 \end{pmatrix}_{\underline{4\times3}}, \text{A} \cdot \text{B = C}$$

$$c_{11} = a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21} + a_{13} \times b_{31} + a_{14} \times b_{41}$$

$$c_{11} = 5 - 15 + 0 - 10 = -20$$

De acuerdo con esta definición podemos identificar *las j-ésima columna de la matriz producto, AB,* como producto de la matriz A con la j-ésima columna de la matriz B. También podemos identificar *la i-ésima fila de la matriz producto, AB,* como producto la i-ésima fila del primer factor A por la matriz B

2.1.5. Propiedades de la multiplicación de matrices

Sea A una matriz $m \times n$ y suponiendo que B y C tienen los tamaños adecuados para que las sumas y productos indicados estén definidos: Entonces se tiene:

1. $A(BC) = (AB)C$ *(Propiedad asociativa de la multiplicación)*
2. $A(B + C) = AB + AC$ *(Propiedad distributiva a izquierda de la multiplicación respecto de la suma)*
3. $(B + C)A = BA + CA$ *(Propiedad distributiva a derecha de la multiplicación respecto de la suma)*
4. $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ *para cualquier escalar* r
5. $ImA = AIn = A$

2.1.6. Aplicación del producto de matrices a sistemas lineales

Considérese cualquier sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}X_1 & + & a_{12}X_2 & + & \cdots & + & a_{1n}X_n & = & b_1 \\
a_{21}X_1 & + & a_{22}X_2 & + & \cdots & + & a_{2n}X_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}X_1 & + & a_{m2}X_2 & + & \cdots & + & a_{mn}X_n & = & b_m
\end{array}
$$

Puesto que dos matrices son iguales si sus elementos correspondientes son iguales, es posible reemplazar las m ecuaciones de este sistema por la **ecuación matricial única**

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}X_1+ & a_{12}X_2+ & \dots & +\, a_{1n}X_n = & b_1 \\
a_{21}X_1+ & a_{22}X_2+ & \dots & +\, a_{2n}X_n = & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{21}X_1+ & a_{22}X_2+ & \dots & +\, a_{2n}X_n = & b_2
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m
\end{pmatrix}
$$

La matriz $m \times 1$ del primer miembro de esta ecuación se puede escribir como un producto para dar la **ecuación matricial del sistema** $(AX = b)$:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m
\end{pmatrix}
$$

A continuación una lista de las diferencias más importantes entre el producto de matrices y el producto de números reales:

A tomar en cuenta:

1. Por lo general, $AB \neq BA$
2. La propiedad simplificativa o cancelativa no se verifica para matrices. Es decir, $AB = AC$ no implica que $B = C$.
3. Si un producto AB es la *matriz nula*, no podemos concluir en general que $A = 0$ ó $B = 0$

2.1.7. Potencias de una matriz

Si A es una matriz $n \times n$ y k, cualquier número natural, escribimos A^k para el producto de k copias de A. Esto incluye al caso $A^0 = 1$

2.1.8. Transpuesta de una matriz

Dada una matriz A en forma $m \times n$, definimos su *transpuesta denotada como* A', como la matriz en forma $n \times m$ cuyas filas están formadas por las correspondientes columnas de A.

2.1.9. Propiedades de la transposición de matrices

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(rA)^t = rA^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

Las siguientes matrices guardan una estrecha relación con su transpuesta:

1. Una matriz cuadrada es **simétrica** si $A^t = A$
2. Una matriz cuadrada es **antisimétrica** si $A^t = -A$

2.1.10. Inversa de una matriz

En esta sección consideraremos solo las matrices cuadradas.

Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ decimos que es invertible cuando existe una matriz A^{-1} tal que $A \times A^{-1}$ es igual a la matriz identidad de orden n:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & {}^1\!/_3 \\ {}^1\!/_2 & 0 \end{pmatrix}, A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso decimos que la matriz A en $\mathbb{R}^2$ es invertible porque existe una matriz A^{-1} tal que el producto de ambas es la matriz identidad de $\mathbb{R}^2$

Esto tiene interés porque si la matriz de un sistema de ecuaciones es *invertibe* su solución *se simplifica notablemente* según el siguiente teorema:

Si A es una matriz invertible $n \times n$ entonces para cada **b** en $\mathbb{R}^2$, la ecuación **Ax = b** tiene la solución única $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

2.1.11. Propiedades de las matrices invertibles

1. Si A es invertible, entonces A^{-1} es también invertible

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2. Si A y B son matrices invertibles $n \times n$, entonces así lo es AB y su inversa es

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3. El producto de un escalar no nulo por una matriz invertible es otra matriz invertible con inversa

$$(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$$

4. Si A es invertible, su transpuesta también lo es con inversa

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

5. $A^r A^s = A^{r+s}$ *para cualesquiera enteros* r, s

6. $(A^r)^s = A^{rs}$

2.1.12. Algoritmo para encontrar $\mathbf{A^{-1}}$ con operaciones elementales por filas

Siendo A una matriz $n \times n$, construimos una nueva matriz $(A|I_n)$ de tamaño $n \times 2n$, donde añadimos a la derecha de A la *matriz identidad* de orden n separadas por una linea discontinua.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, (A|I_n) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se calcula la forma canónica por filas de de $(A|I_n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0.2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -0.2 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.2 & -0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

Si a la izquierda de la línea discontinua en la forma canónica por filas nos aparece I_n *(la matriz identidad que antes estaba a la derecha de la línea discontinua)* podemos asegurar que A es inversible y A^{-1} es lo que aparece a la derecha de la línea discontinua. Si no aparece I_n, A no es inversible.

2.1.13. Determinantes

El determinante de una matriz es un *valor escalar* calculado a partir de los elementos de una *matriz cuadrada*, resultante de restar el producto de los elementos de las diagonales principales al de las diagonales secundarias. El determinante de una matriz **A** se representa como $\det(A)$,

o como:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Tiene las siguiente propiedades:

1. El determinante de una matriz es un *invariante algebraico*, es decir, teniendo una matriz **A**, todas sus distintas representaciones equivalentes tendrán el mismo determinante.
2. El determinante de una matriz coincide con el determinante de su transpuesta

$$\det(A^t) = \det(A)$$

3. Una matriz **A** con coeficientes reales es invertible si y sólo si el determinante de **A** es *distinto de cero*.

[1] Un pequeño truco para saber cuando sumar o restar los adjuntos; si la suma de las posiciónes del valor por el que multiplicamos el adjunto es impar, el determinate se resta. Por ejemplo, en la página siguiente hemos restado el determinante asociado a a_{12} y $1 + 2 = 3$

2.1.14. Cálculo del determinante

Podemos calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada **A** con el **Teorema de Laplace**. Que nos permite simplificar el cálculo del determinante de una matriz, descomponiendolo en la suma de determinantes menores.

Laplace define el determinante de una matriz cuadrada de orden n, como la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus adjuntos.

Aquí un ejemplo[1] con una matriz 3×3

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(M) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Desarollando los determinantes de 2×2 tenemos:

$$\det(M) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Aquí visualmente, algunos de los adjuntos de la primera fila usados:

1. a_{11} y su determinante adjunto

$$\begin{pmatrix} \underline{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \underline{a_{22}} & \underline{a_{23}} \\ a_{31} & \underline{a_{32}} & \underline{a_{33}} \end{pmatrix}$$

2. a_{12} y su determinante adjunto

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \underline{a_{12}} & a_{13} \\ \underline{a_{21}} & a_{22} & \underline{a_{23}} \\ \underline{a_{31}} & a_{32} & \underline{a_{33}} \end{pmatrix}$$

2.1.14.1. Regla de Sarrus

Para el calculo de una matriz 3×3 podemos utilizar la siguiente regla, a la que conocemos como *Regla de Sarrus*, para calcular el determinante de la matriz de una forma sencilla.

$$
\begin{array}{ccc|cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}
$$

Teniendo una matriz de 3×3, en la figura, el determinante de las tres primeras columnas es la suma de los productos de las diagonales descendentes menos la suma de los productos de las diagonales ascendentes

Con esto tenemos que:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Aquí un ejemplo con numeros reales:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0$$

2.2 Ecuaciones vectoriales

Si n es un entero positivo, $\mathbb{R}^n$ denota la colección de todas las listas ordenadas de números reales, escritas como matrices columna $n \times 1$, como, por ejemplo

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

El vector cuyas entradas *son todas igual a cero* recibe el nombre de **vector cero** o **vector nulo** y se denota por **0** *(el contexto dejará claro el número de entradas en el vector 0).* La igualdad de vectores en $\mathbb{R}^n$ y las operaciones de suma y multiplicación de vectores por escalares están definidas entrada a entrada, al igual que sucede para matrices.

Dos vectores son iguales si sus elementos son iguales entrada a entrada

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ \vdots \\ u_n = v_n \end{cases}$$

La suma de dos vectores es la suma de sus elementos entrada a entrada

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

Multiplicar un vector por un escalar es multiplicar las entradas del vector por el escalar

$$c \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ \vdots \\ cu_n \end{pmatrix}$$

2.2.1. Propiedades algebraicas de $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$

Para todo **u**, **v**, **w** en $\mathbb{R}^n$ y escalares c y d se tiene:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + (\text{-}\mathbf{u}) = \text{-}\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$, donde -**u** denota $(-1)\mathbf{u}$
5. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
6. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
7. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Con estas propiedades podemos escribir un sistema de ecuaciones lineales en n incógnitas como una única ecuación vectorial en $\mathbb{R}^n$. Para ello, primero escribimos nuestro sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}X_1 & + & a_{12}X_2 & + & \cdots & + & a_{1n}X_n & = & b_1 \\ a_{21}X_1 & + & a_{22}X_2 & + & \cdots & + & a_{2n}X_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}X_1 & + & a_{m2}X_2 & + & \cdots & + & a_{mn}X_n & = & b_m \end{array}$$

Estas m igualdades numéricas se pueden sustituir por una **única igualdad** vectorial entre vectores de $\mathbb{R}^m$

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Teniendo en mente la suma de vectores de $\mathbb{R}^m$, podemos sustituir el término de la izquierda por una suma de n vectores:

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 \\ a_{21}X_1 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}X_1 \\ a_{22}X_2 \\ \vdots \\ a_{m2}X_2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n}X_n \\ a_{2n}X_n \\ \vdots \\ a_{mn}X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Si recordamos la multiplicación por un escalar, podemos sacar X_i y escribir la igualdad anterior como:

$$X_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + X_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

De esta forma, estamos representando un sistema de ecuaciones lineales como una ecuación vectorial, donde los coeficientes de las incógnitas son vectores de $\mathbb{R}^m$. Si denotamos los vectores columna como $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$, la ecuación se convierte en:

$$X_1\mathbf{a}_1 + X_2\mathbf{a}_2 + \cdots + X_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

2.2.2. Combinaciones lineales

Dados vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p$ en $\mathbb{R}^n$ y escalares $c_1, c_2, \cdots, c_p$, el vector $\mathbf{y}$ definido por:

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

recibe el nombre de **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p$ con pesos $c_1, c_2, \cdots, c_p$. Si en la expresión anterior sólo aparece un sumando

$$\mathbf{y} = c\mathbf{v}$$

diremos que $\mathbf{y}$ es **múltiplo escalar de v**.

Con esta definición podemos afirmar que el producto de una matriz $m \times n$, A, por un vector $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$ es combinación lineal de las columnas de A usando como pesas las entradas del vector $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$.

Si $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p$ recibe el nombre de **subespacio generado por** $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p$ y se denota por

$$\left\langle \mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p \right\rangle$$

Una ecuacion vectorial

$$X_1\mathbf{a}_1 + X_2\mathbf{a}_2 + \cdots + X_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

tiene el mismo conjunto de soluciones que el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz aumentada es

$$\left(\ \mathbf{a}_1 \vdots \ \mathbf{a}_2 \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ \mathbf{a}_n \ \vdots \ \mathbf{b} \ \right)$$

En particular, $\mathbf{b}$ está en $\langle \mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n \rangle$ si el sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}$$

es compatible, donde $\mathbf{A}$ es la matriz de columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$.

2.2.3. Dependencia e independencia lineal

Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ se dice **linealmente independiente** si la ecuación vectorial

$$X_1\mathbf{v}_1 + X_2\mathbf{v}_2 + \cdots + X_k\mathbf{v}_k = 0$$

tiene solamente la solución trivial. En caso contrario se dice que es **linealmente dependiente**, es decir, el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente dependiente si existe escalares $c_1, c_2, \cdots, c_k$ no todos nulos, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = 0$$

En dicho caso, la ecuación

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = 0$$

recibe el nombre de **ecuación** o **relación de dependencia lineal entre los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$**.

Como consecuencia, las columnas de una matriz **A** forman un conjunto linealmente independiente si y sólo si la ecuación homogénea $\mathbf{AX} = 0$ tiene solamente la solución trivial (puesto que toda relación de dependencia lineal entre las columnas de **A** corresponde a una solución no trivial de **AX = 0**).

Vamos a enumerar ahora una serie de resultados que nos facilitarán, en ciertos casos, el estudio de la dependencia o independencia lineal de un conjunto de vectores

1. Un conjunto conteniendo solamente un vector $\{\mathbf{v}\}$ es linealmente independiente si y sólo si $\mathbf{v}$ es un vector no nulo.
2. Un conjunto con dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si, al menos, uno de ellos es combinación lineal de los restantes.
3. Como consecuencia de lo anterior, un conjunto con dos vectores es linealmente dependiente si y sólo si uno de los vectores es múltiplo escalar del otro.
4. Todo conjunto del que forme parte el vector nulo es linealmente dependiente.
5. En $\mathbb{R}^n$ todo conjunto con más de n vectores es linealmente dependiente

Con toda esta información ya podemos introducir el concepto de *rango de una matriz*

2.3 Rango de una matriz

Si tenemos una matriz $A, m \times n$. El **rango** de **A** es el *número de filas linealmente independientes* de **A**, vistas dichas filas como vectores de $\mathbb{R}^n$. Denotamos dicho rango como $r(A)$. Dicho rango se calcula fácilmente usando el siguiente método.

2.3.1. Rango de una matriz

El rango de una matriz **A** coincide con el número de filas no nulas de cualquier *matriz en forma escalonada* equivalente por filas a **A**. *Todas las matrices en forma escalonada equivalentes por filas a* ***A*** *tienen el mismo numero de pivotes, osea, filas no nulas que* ***A***.

Resulta que al estudiar el número de columnas linealmente independientes, nos damos cuenta que, el rango de una matriz **A** coincide también con el número de columnas linealmente independientes de dicha matriz.

Sabiendo esto, podemos elegir entre filas o columnas para el estudio del rango, facilitándonos el trabajo.

2.3.2. Teorema de Rouché-Frobenius

Sean $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ un sistema de ecuaciones lineales en $\mathbf{n}$ incógnitas y sea $\mathbf{A} \vdots \mathbf{b}$ la matriz aumentada del sistema. Se tiene entonces que el sistema es compatible sólo si el rango de **A** es igual al rango del sistema **A** es igual al rango la matriz aumentada del sistema $\mathbf{A} \vdots \mathbf{b}$. Sin embargo, si ambos rangos coinciden, tenemos que:

1. El sistema es compatible determinado sólo si

   $$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A} \vdots \mathbf{b}) = u$$

2. El sistema es compatible indeterminado sólo si

   $$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A} \vdots \mathbf{b}) < n$$

2.3.3. Cálculo efectivo del rango

Podemos calcular el rango de una matriz A de dos formas, pasando la matriz A a su forma escalonada y contando el número de filas no nulas. O calculando el rango a partir de sus determinantes.

El rango de una matriz es igual mayor orden posible donde haya algún determinante distinto de 0. Por ejemplo, en una matriz de 3×4, el rango sería dos; si existe un determinante de orden 2 (2×2) no nulo, y todos sus detemiantes de orden 3 son igual a 0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

En este caso tenemos una matriz de 2×3. Contando el número de filas nos damos cuenta que la matriz puede tener como máximo, rango 2 $(R(A) \leq 2)$. Sabiendo esto vamos a calcular sus determinantes de orden 2.

Todos los determinantes 2×2 son nulos. Podemos afirmar entonces, que $R(A) = 1$, pues no hay ningún determinante 2×2 distinto de 0.

$$R(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}_{2\times 2} = 4 - 4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}_{2\times 2} = -4 + 4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}_{2\times 2} = -2 + 2 = 0$$

3 Aplicaciones

3.1 Discutir un Sistema

Discutir un sisteam decir que tipo de sistema es, y si las tiene, dar sus soluciones. Para discutir un sistema primero pasaremos su matriz a la forma reducida con *Gauss*, para ver que tipo de sistema. Y finalmente, si es compatible, lo resolveremos.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ 4x + 3y - 2z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 4 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Pasamos la matriz a su forma reducida mediante *Gauss-Jordan.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 22 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Con la matriz en forma reducida, podemos concluir que el sistema es *Compatible Determinado*, y que tiene como solución $x = 1, y = 2, z = 3$

3.1.1. Sistemas con un Parámetro

Podemos toparnos con una matriz A que no solo contenga números reales, sino también parámetros, cuyo valor cambie la naturaleza del sistema. A continuación, veremos como:

$$\begin{cases} ax+y+z+t=a \\ x+ay+z+t=a \\ x+y+az+t=a \\ x+y+z+at=a \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & a & a \end{pmatrix}$$

Primero calcularemos el determinante de la matriz

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} =$$

$$= -(a^2-2a+1)+(-a^2+2a-1)-(a^2-2a+1)+a(a^3-3a+2) = a^4-6a^2+8a-3$$

$$|A| = 0 \Leftrightarrow a^4-6a^2+8a-3 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \Leftrightarrow a = -3 \implies R(A) = R(A')$$

El sistema es compatible determinado. Ya que el rango de A es igual que el de A aumentada e igual al número de variable. Según el teorema de *Rouché-Frobenius*, visto en el apartado 2.3.2, un sistema es compatible sólo si el rango de la matriz A es igual al rango de la matriz aumentada A.

3.2 Combinaciones lineales

Teniendo dos vectores; u y v. ¿Cómo podemos saber si otro vector w es combionación lineal de los dos anteriores?

Supongamos tenemos los vectores; $u = (1, -1, 3)$ y $v = (2, 4, 0)$. Y el vector $w = (3, 3, 3)$

Se trata simplemente de disponer los vectores como vectores columna de una ecuación, y ver si esta tiene solución. Si la tiene, w es combinación lineal de u v, siendo la solución, los coeficientes asociados a los vectores columna, y siendo w combinación lineal, resultante de esa operación.

$$u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Primero representamos el sistema de dos incógnitas en forma matricial y pasamos el sistema a su forma reducida

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{6}F_2]{F_1-\frac{2}{6}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora que tenemos la matriz en su forma reducida, nos damos cuenta que es un sistema compatible determinado y la solución es: $u = 1$, $v = 1$

Si comprobamos sustituyendo en la ecuación de antes:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 1+2=3 \\ -1+4=3 \\ 3+0=3 \end{cases}$$

Confirmamos que el vector w es combinación lineal de u y v ya que hay una solución que hace verdadera la ecuación resultante de combinar ambos vectores.

3.3 Sistemas Generadores

Un **sistema generador** es un sistema que puede puede generar como *combinación lineal* de sus vectores todo el espacio vectorial en el que se encuentra. Por ejemplo, la matriz identidad de $\mathbb{R}^3$ puede generar $\mathbb{R}^3$ pues podemos expresar cualquier vector en $\mathbb{R}^3$ como combinacion lineal de los vectores:

$$\{(1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)\}$$

3.4 Bases

Una **base** es un sistema generador compuesto por vectores **linealmente independientes**. Por ejemplo, la matriz identidad de $\mathbb{R}^3$, seria un *sistema generador y una base* para $\mathbb{R}^3$, pero los vectores:

$$\{(1,0,0),(2,1,1),(0,1,1),(1,-1,-2)\}$$

compondrían un sistema generador pero no una base *(más de 3 vectores nunca serán linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$).*

4 Ejercicios

4.1 Ejercicios con determinantes

Ejercicio 1: Calcular los siguientes determinantes usando el desarollo por adjuntos de la columna o fila que se estime conveniente.

1.
$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

2.
$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

3.
$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 2: Calcular los siguientes determinantes usando reducción por filas a forma escalonada

1.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

3.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & -6 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 3: Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7,$

Calcular el valor de los siguientes determinantes:

1.
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$$

2.
$$\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

3.
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

4.
$$\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

5.
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

6.
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1 (Solución): Como en el ejemplo visto en 3.1.1 calcularemos el determinante [2] con el método por adjuntos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -0 + 3(-20) - (-70) + 0 = -60 + 70 = 10$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 5 & -8 & 4 \\ -2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & -8 & 4 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -0 + 0 - 0 + 2(-6) = -12$$

[2] Representamos y calculamos los determinantes que van multiplicados a cero para dejar claro el desarollo. Realmente no es necesario hacerlo.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 0 & -7 & 3 & -5 \\ 3 & -6 & 4 & -8 \\ 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & -7 & 3 & -5 \\ 7 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix} -$$

$$2 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 & -5 \\ 7 & 3 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & -5 \\ 7 & 3 & -6 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 \\ 7 & 3 & -6 & 4 \\ 5 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 0\times 9 + 0\times(-9) - 2\times(-3) + 0\times(-21) - 0\times 24 = 6$$

Ejercicio 2 (Solución): Para calcular el determinante de las matrices dadas, primero las pasaremos a su forma reducida con Gauss, como visto en 1.2. Esto simplificara el cálculo del determinante, por ejemplo, si una matriz tiene *alguna fila nula*, sabemos que su determinante es **cero**.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{c} F_2 + 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \\ F_4 - F_1 \\ F_3 + 4F_2 \\ F_4 + 4F_2 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 30 & 27 \\ 0 & 0 & 30 & 27 \end{pmatrix}$$

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 30 & 27 \\ 0 & 0 & 30 & 27 \end{pmatrix}$$

Hemos dejado la matriz sin terminar de simplficar por un motivo, si nos fijamos en la 3a y 4a fila, nos damos cuenta que podemos hacer ceros en la 4a fila. Para calcular el determinante de **esta matriz** nos hace falta llegar simplemente a este paso, pues al tener una fila nula, sabemos que el determinante es cero. *(Como comentamos al principio de la resolución)*

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 30 & 27 \\ 0 & 0 & 30 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 30 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & -5 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} F_3 - 2F_1 \\ F_4 - 3F_1 \\ F_3 + F_2 \\ F_4 - 2F_2 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igual que en el apartado anterior, tenemos almenos una fila nula. El determinante será cero.

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & -6 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Si llevamos la matriz a su forma reducida escalonada llegamos a la *matriz identidad* de 5×5 y el determinante de la matriz identidad vale siempre 1.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Ejercicio 3 (Solución): En este ejercicio nos dan el determinante de una matriz de parámetros, y otras matrices semejantes.

Aplicando algunas propieades de los determinantes, que se deducen de la forma en la que se calculan; podemos calcular los determinantes de estas matriz semejantes en base al determinante que ya conocemos.

1.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix} = 35$$

Cuando multiplicamos todos los elementos de una fila/columna de un determinante por un número, el determinante original queda multiplicado por ese número.

2.

$$\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$$

Si a una linea de la matriz le sumamos otra linea por un múltiplo, el determinante no cambia. *Hemos sumado la segunda fila a la primera.*

3.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = -7$$

Si permutamos dos lineas de una matriz, su determinante cambia de signo por cada permutación.

4.

$$\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 7$$

En este caso hicimos;

$F_1 \iff F_3, F_2 \iff F_3$

La magnitud se mantiene.

5.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d{+}a & 2e{+}b & 2f{+}c \\ g & h & i \end{vmatrix} = 14$$

La primera operacion nos múltiplica el determinante por 2, la segunda no hace nada.

$$F_2 \to F_2 \times 2, F_2 \to F_2 + F_1$$

6.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3d & 3e & 3f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 21$$

Como en el apartado 1, una fila por un número nos multipilica el determinante original por ese número.

4.2 Ecuaciones paramétricas

Ejercicio 1: Hallar las ec. param. del subespacio en $\mathbb{R}^4$: $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1{+}x_2 = x_2{+}x_3 = x_3{+}x_4 = x_1{+}x_4 = 0\}$

Ejercicio 2: Hallar las ec. paramétricas del subespacio en $\mathbb{R}^4$: $F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1{+}x_2{+}x_4 = 2x_1{-}x_2{+}x_4 = 0\}$

Ejercicio 1 (Solución) Para encontrar las ecuaciones paramétricas primero representaremos el subespacio como matriz. En este caso sería:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Seguidamente llevamos la matriz a su forma reducida:

$$\begin{array}{lcl} F_4 & \Longrightarrow & F_4 - F_1 \\ F_4 & \Longrightarrow & F_4 + F_2 \\ F_3 & \Longrightarrow & F_3 - F_3 \\ F_2 & \Longrightarrow & F_2 - F_3 \\ F_1 & \Longrightarrow & F_1 - F_2 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y con esto obtenemos un sistema de ecuaciones mas simple y comprensible que con el que empezamos:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{c} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array}$$

Ahora para obtener las ecuaciones paramétricas del sistema nos fijamos en cuales son las incógnitas principales *(Señaladas en la matriz)*, para representarlas en función de las incógnitas no-principales, que serán parámetros *Variaran libremente*. En este caso, todas las incógnitas principales se pueden respresentar en función de x_4.

$$\begin{aligned} x_1 &= -\alpha \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= -\alpha \\ x_4 &= \alpha \end{aligned}$$

Ejercicio 2 (Solución) Como en el anterior ejercicio, llevaremos la expresión a forma matricial.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pasamos la matriz a su forma reducida:

$$F_2 \implies F_2 - 2F_1, \quad F_2 \implies F_1 +^1 /_3 F_2$$

$$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & ^2/_3 & 0 \\ 0 & \underline{-3} & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} x_1 +^2 /_3 x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_4 = 0 \end{aligned}$$

Si nos fijamos en las incógnitas principales *(Señaladas en la matriz)* nos damos cuenta que tenemos que expresar x_1 y x_2 en función de x_3 y x_4:

$$\begin{aligned} x_1 &= -^2/_3 \alpha \\ x_2 &= {}^{\alpha}/_3 \\ x_3 &= \beta \\ x_4 &= \alpha \end{aligned}$$

4.3 Espacios vectoriales

Ejercicio 1: Determinar la base y dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^5$ dado por el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 & = 0 \\ 2x_3 + 3x_4 - x_5 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 10x_3 - 3x_4 + 11x_5 & = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 6x_5 & = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 2: Se consideran en $\mathbb{R}^4$ los subespacios vectoriales:

$$W_1 = <(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1)>$$

$$W_2 = <(1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 2), (3, 5, -2, 5)>$$

Calcula:

1. $dim(W_1 \cap W_2)$ 2. Ec. de $W_1 \cap W_2$
3. Ec. de $W_1 + W_2$ 4. $dim(W - 1 + W_2)$

Ejercicio 1 (Solución) Primero representaremos llevaremos el sistema matricial y a su forma reducida:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 10 & -3 & 11 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & -2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos a resolver el sistema.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \omega \\ x_5 = \theta \end{matrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Expresamos como una suma de vectores:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces como base

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Y como la base tiene 4 vectores sabemos que el subespacio tiene **dimensión 4**.

Ejercicio 2 (Solución)

1. & 2.

Las ecuaciones que representan a un subespacio pueden verse como restricciones de los valores que pueden tomar las diferentes variables.

Podemos ver entonces la intersección de dos subespacios como la intersección de las soluciones de ambos subespacios, es decir, donde se vuelven verdaderas las ecuaciones de ambos subespacios. Y podemos representar entonces la intersección de ambos como un sistema que contiene a las ecuaciones de sendos subespacios.

Vamos a representar ambos sistemas en forma matricial y llevarlos a su forma reducida.

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -2 & 5 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora sacamos las ecuaciones paramétricas de ambos subespacios:

$$W_1 = \begin{array}{ccccc} 1x & & +1z & & = 0 \\ & 1y & & +1t & = 0 \end{array}$$

$$W_2 = \begin{array}{ccccc} 1x & & +1z & & = 0 \\ & 1y & -1z & +1t & = 0 \end{array}$$

Y ahora conformamos una matriz con las ecuaciones de cada sistema

$$W_1 \cap W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sacamos las ecuaciones cartesianas y las pasamos a paramétricas

$$W_1 \cap W_2 \begin{cases} x + t = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \implies \begin{array}{r} x = -\beta \\ y = -\beta \\ z = 0 \\ t = \beta \end{array}$$

Sabemos que la interesección tiene dimensión 1, ahora conformaremos una base asignandole un valor a β

$$B(W_1 \cap W_2) = <(-1,-1,0,1)>$$

3.

Para sumar dos subespacios necesitamos hallar una base para cada combinarlas en una sola matriz. Para esto sacaremos las ecuaciones paramétricas de las cartesianas.

(Que hemos obtenido ya en el primer apartado)

$$W_1 = \begin{cases} x = -\alpha \\ y = -\beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases} \quad W_2 = \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha - \beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases}$$

Ahora le damos un valor a α y β en ambas ecuaciones paramétricas para obtener una base para cada subespacio.

$$B(W_1) = <(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)>$$
$$B(W_2) = <(-1,1,1,0),(0,-1,0,-1)>$$

Ahora construimos una matriz conformada por los vectores de las bases.

$$W_1 + W_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos ahora extraer de aquí las ecuaciones de la suma de los espacios

$$W_1 + W_2 \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

4.