MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2019-20. Semestre de tardor

Pràctica 1: Estudi d'errors

1 Busquem una aproximació de 2π. Per això, usem que la suma dels costats dels polígons regulars circumscrits al voltant de la circumferència unitat i dels inscrits es poden usar per calcular fites superiors i inferiors, respectivament, per a la longitud 2π de la circumferència unitat.

a) Doblant el nombre k de vertèxs, s'obté la recurrència següent per a la longitud s_k del costat del polígon regular inscrit:

$$s_4 = \sqrt{2}, \qquad s_{2k} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_k^2}}\ .$$

b) La longitud c_k del costat del polígon regular circumscrit es pot obtenir a partir de s_k mitjançant:

$$c_k = \frac{2s_k}{\sqrt{4 - s_k^2}}\ .$$

c) Demostreu aquestes recurrències.

Les dues successions $\{ks_k\}$ i $\{kc_k\}$ convergeixen monòtonament cap a 2π: $ks_k \uparrow 2\pi, kc_k \downarrow 2\pi$. Volem veure com es comporten numèricament.

d) Feu un programa que, per a cadascun del algorismes, escrigui una taula amb el nombre de vèrtexs, el valor de l'aproximació i l'error relatiu.

Treballeu primer amb precisió simple. Després amb precisió doble.

Dibuixeu la gràfica dels errors en funció del nombre de vèrtexs, mitjançant el programa `gnuplot`, usant una escala logarítmica.

Comenteu els resultats.

e) Busqueu, per a s_k, una fórmula millor des del punt de vista numèric. Comproveu que és millor.

2 Es defineix

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{2x+7}\, dx\,, \quad \forall n \geq 0\,.$$

a) Demostreu que els elements de $(I_n)_{n\geq 0}$ verifiquen la recurrència $I_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - 7I_{n-1}\right)$, $\forall n \geq 1$, i també les desigualtats $\frac{1}{9n+9} \leq I_n \leq \frac{1}{7n+7}$, $\forall n \geq 0$ (per tant, $I_n \geq 0$, $\forall n \geq 0$, i $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$).

b) Sigui $\overline{I_0}$ el valor que s'obté calculant directament la integral en el cas $n = 0$ i arrodonint el resultat final a 6 decimals. Siguin $\overline{I_n}$ ($n \geq 1$) els valors calculats usant la recurrència de l'apartat anterior amb la condició inicial $\overline{I_0}$ (sense tenir en compte els errors deguts a les operacions de la recurrència). Per a qualsevol $n > 0$, expressa l'error $e_n \equiv \overline{I_n} - I_n$ en funció de e_0 i de n. Deduïu si la recurrència és numèricament estable o inestable.

Quin és el mínim valor de n per al qual $\overline{I_n}$ seria negatiu? Deduïu-ho de l'expressió de l'error i comproveu-ho numèricament.

3 Volem aproximar diferents valors de e^x utilitzant polinomis de Taylor de diferents graus de la funció en el punt x_0.

a) Doneu expressions per als errors $f(x) - p_n(x)$ si agafem $x_0 = 0$. Fiteu-les.

Per a quins valors de n pot assegurar-se que el polinomi de Taylor donarà el valor de la funció amb 8 xifres decimals correctes, per a tot $x \in [-1, 1]$?

b) Volem aproximar (amb tolerància 10^{-8}) el valor de la funció en un punt proper a x_0 usant un polinomi de Taylor de grau adient.

Feu-ho per a diferents valors de x_0.