MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2019-20. Semestre de tardor

Pràctica 3: Interpolació polinomial

Interpolació de Lagrange

Donats $n+1$ punts del pla (x_i, f_i) , $i = 0,1,2,\ldots n$ amb totes les abscisses x_i diferents entre si, volem determinar un polinomi $p(x)$ de grau menor o igual a n tal que

$$p(x_i) = f_i \ , \quad i = 0,1,2,\ldots,n \ .$$

1 Resolució del sistema lineal

Si escrivim el polinomi p com a $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, llavors, imposant les condicions d'interpolació, el problema es pot plantejar com resoldre el sistema $Ma = f$, on

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Es pot demostrar que aquest sistema té solució única.

Escriviu una funció de prototipus `double horner(int n, double *a, double z)` que avalua el polinomi interpolador en el punt `z`, usant la regla de Horner.

Feu una funció `main` que llegeixi n, el grau del polinomi interpolador de Lagrange, i els valors (x_i, f_i) , $i = 0,1,\ldots n$, i usant les funcions de la pràctica 2, calculi els coeficients del polinomi. Useu després la funció `horner` per comprovar que el polinomi obtingut és realment el polinomi interpolador.

2 Mètode de les diferències dividides de Newton

Es millor resoldre el problema usant el mètode de les diferències dividides de Newton. En aquest cas escrivim el polinomi p com a

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}),$$

i calculem les diferències dividides, definides de forma recurrent per:

$$\begin{aligned} f[x_i] &= f_i \\ f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}, x_{i+j+1}] &= \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j+1}] - f[x_i, \ldots, x_{i+j}]}{x_{i+j+1} - x_i} \end{aligned}$$

Els coeficients buscats són

$$b_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k], \quad k = 0,1,\ldots,n.$$

a) Escriviu una funció de prototipus

```
void dif_div(int n, double *x, double *f);
```

que, donats els vectors `x` i `f`, que contenen $\{x_0, \ldots, x_n\}$ i $\{f_0, \ldots, f_n\}$, respectivament, omple el vector `f` amb les diferències dividides

$$f[x_0], f[x_0,x_1], \ldots, f[x_0, \ldots, x_n],$$

en aquest ordre. Guardeu-la en un fitxer de nom `difDiv.c`.

b) Escriviu una funció de prototipus

```
double hornerNew(int n, double *b, double *x, double z)
```

que, donats els vectors `x` i `b`, que contenen $\{x_0, \ldots, x_n\}$ i $\{f[x_0], f[x_0,x_1], \ldots, f[x_0, \ldots, x_n]\}$, respectivament, avalua el polinomi interpolador en el punt `z`, usant la regla de Horner.

Guardeu-la en un fitxer de nom `horNew.c`.

c) Escriviu una funció `main` anàloga a la de l'exercici anterior.

3 Aplicacions

- Volem aproximar diferents valors de e^x utilitzant polinomis.

  Compareu el polinomi de Taylor de la funció en el punt $x_0 = 0$ (programat a la pràctica 1) amb el de Lagrange per a diferents abscisses en l'interval $[-1, 1]$. Proveu-lo per a diferents valors del grau n.

- Estudieu el fenomen de Runge: trobeu el polinomi interpolador de grau $\leq n$ de la funció

  $$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

  en $n+1$ punts equiespaiats a $[-1, 1]$.

  Feu-lo per a diferents valors de n i calculeu l'error en els punts 0.6 i 0.8.