EXERCICI PRÀCTIC 2

Introducció al problema

A la pràctica anterior vam treballar amb equacions diferencials resolent problemes de valors a la frontera. En aquesta ocasió, el nostre objectiu serà resoldre uns tipus diferent de problemes, coneguts com a problemes de condicions inicials. En aquests tipus de problemes, el nostre objectiu es trobar la funció $y(x)$ que compleix:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y) \\ y(a) = c, \end{cases} \tag{1}$$

en un interval $[a, b]$.

Com a la pràctica anterior, en la gran majoria de problemes de condicions inicials, trobar la sol·lució exacta és un problema extremadament difícil. Per aquesta raó, diferents mètodes numèrics han estat desenvolupats per aproximar la funció $y(x)$. Tanmateix, nosaltres treballarem només amb tres d'ells, el mètode de Euler amb (i sense) extrapolació de Richardson, el mètode de dos passos de tipus Adams (Adams-Bashfort) i el mètode de Runge-Kutta amb (i sense) extrapolació de Richardson.

Mètode de Euler

El primer mètode del que parlarem serà el mètode de Euler sense extrapolació de Richardson. Aquest mètode divideix l'interval $[a, b]$ en n subintervals de mida $h = \frac{b-a}{n}$ de la forma $[x_i, x_{i+1}]$ amb $x_i = a + ih$ per a $0 \leq i \leq n$, de manera que obtenim punts equidistants $x_0, \ldots, x_n$ amb $y(x_0) = y(a) = c$. El nostre objectiu, similarment al que vam fer a la pràctica anterior, serà aproximar la funció $y(x)$ en aquests punts (excepte en x_0, on la funció ja és coneguda). Per fer açò, el primer que farem serà aproximar la derivada de la funció y, aquest cop amb la fòrmula

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_i + h) - y(x_i)}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \tag{2}$$

obtenint, al substituir en la equació (1), les següents aproximacions:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx f(x, y) \\ y(a) = c, \end{cases} \tag{3}$$

Donat que coneixem $y_0 = c$, podem definir la fòrmula recursiva $y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1})$ per a tota i tal que $1 \leq i \leq n$.

Mètode de extrapolació de Richardson.

En molts mètodes numèrics (no només al mètode de Euler) depenents d'un valor h on l'aproximació és millor quan més petit sigui aquest h ens interessaria conèixer el valor d'aquesta aproximació quan $h \to 0$. El mètode d'extrapolació de Richardson, afortunadament, ens permet obtenir aproximacions amb errors de truncament negligibles per a un mètode depenent d'h sota certes hipòtesis bastant generals. Per a explicitar el mètode de Richardson, primer enunciarem el teorema que fa possible definir aquest algorisme.

Teorema 1 *Suposem que existeix un mètode F depenent de h que aproxima un valor a_0 tal que $F(h) = a_0 + a_1^{p_1} + a_2^{p_2} + a_3^{p_3} + \ldots$ on $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$.*

Si definim $F_1(h) = F(h)$ i $F_{k+1}(h) = F_k(h) + \frac{F_k(h) - F_k(qh)}{q^{p^k}-1}$, on $q > 1$ escollit arbitràriament, llavors $F_n(h)$ te una expansió de la forma

$$F_n(h) = a_0 + a_n^{(n)} h^{p_n} + a_{n+1}^{(n)} h^{p_{n+1}} + \dots$$

Amb aquest teorema, podem veure que un mètode $F(h)$ amb error de truncament depenent de h disminueix el seu error de truncament, en només n iteracions, a $O(h^{p_n})$, utilitzant les formules recursives del teorema.

És fàcil veure que el valor de $F_{k+1}(h)$ està determinat per els $k+1$ valors $F_1(h), .., F_1(q^k h)$. Llavors, agafant h_0 un valor inicial de h (en el cas del mètode de Euler agafarem $h = \frac{b-a}{n}$) i una q qualsevol major a 1, obtindrem el següent algorisme:

Algorisme 1 *Per a $m = 0, 1, 2, ...,$ definint $A_{m,0} = F(q^{-m} h_0)$ i calculant per a $k = 1, 2, \dots, m$:*

$$A_{m,k} = A_{m,k-1} + \frac{A_{m,k-1} - A_{m-1,k-1}}{q^{p_k} - 1} \tag{4}$$

Tindrem que el valor $A_{m,k+1}$ serà acceptat com a estimació de a_0 quan $|A_{m,k} - A_{m-1,k}| < \epsilon$ on ϵ serà la tolerància relativa acceptada. En cas que no s'arribi a aquesta tolerància, farem més gran el valor de m (fins a un valor màxim arbitrari, usualment gran). Si encara així no s'arriba, acceptarem com a aproximació el valor $A_{m,m}$.

Mètode de Euler amb extrapolació de Richardson.

El primer que farem serà enunciar un teorema:

Teorema 2 *Denotem $y(x,h)$ al resultat d'usar el mètode de Euler a la equació diferencial (1) al punt x amb mida entre punts equidistants igual a h. Llavors existeix una expansió de $y(x,h)$ de la forma:*

$$y(x,h) = y(x) + c_1(x)h + c_2(x)h^2 + c_3(x)h^3 + \dots + c_p(x)h^p + O(h^{p+1}). \tag{5}$$

D'aquesta manera, podrem aplicar el mètode d'extrapolació de Richardson amb $p_k = k$. Es pot demostrar que si l'error de truncament del mètode de Euler te magnitud més petita que ϵ llavors la extrapolació de Richardson te un error resultant amb magnitud més petita que 8.26ϵ.

Imaginem ara que volem aplicar el mètode d'extrapolació de Richardson junt amb el nostre mètode de Euler amb m fixada. Per fer-ho, realitzarem els següents passos.

a) Setejarem $q = 2$.

b) Setejarem la nostra h_0 com a la h computada al mètode de Euler. A més, setejarem h_i com a $q^{-i} h_0$ per a tota $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq m$.

c) Imaginem ara que volem aproximar el valor de la funció y per al valor x_j (per a tot $1 \leq j \leq n$). Llavors computarem per a tota $0 \leq i \leq m$ el mètode de Euler amb $h = h_i$ fins arribar a la aproximació de la x que compleix que $x = x_j - h_i$. La següent aproximació coincidirà amb $A_{i,0}$, i ja podrem aplicar el mètode de Richardson esmentat a l'algorisme (1).

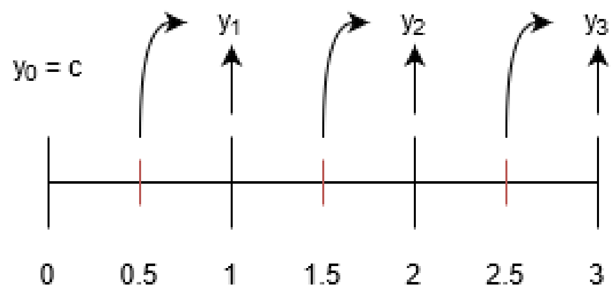

Figura 1: Mètode de Euler amb extrapolació de Richardson amb paràmetres $a = 0$, $b = 3$, $n = 3$ (i per tant $h = 1$) i $m = 1$. Quan volem aproximar aproximar el valor de la funció per a $x_i = i$, per exemple, per a $x_2 = 2$, el que fem és computar el mètode de Euler fins a $x = 1$ per a $h_0 = h = 1$ (ja que $x_2 = 2$ i per tant la x que compleix $x_2 - h_0 = 2 - 1 = 1$ és $x = 1$) i fins a $x = 1.5$ per a $h_1 = \frac{1}{2}h_0 = 0.5$ (per el mateix argument, $x = 1.5 = x_2 - h_1 = 2 - 0.5 = 1.5$). Setejant $A_{0,0}$ com al següent pas del mètode de Euler per $h_0 = 1$ i $A_{1,0}$ com al següent pas del mètode de Euler per $h_1 = 0.5$ podem aplicar l'algorisme de Richardson de l'apartat anterior.

Mètode de dos passos de Adams-Bashfort.

Aquest mètode és una modificació del mètode d'Euler per tenir en compte en lloc d'un únic punt al realitzar la aproximació, dos punts previs. En general, aquests mètodes poden ser generalitzats a mètodes d'n passos (punts previs coneguts), encara que aquesta abstracció queda fora dels objectius d'aquesta pràctica. Sense entrar en detalls, la formula d'aquest mètode, sota les mateixes condicions i procediments emprats a Euler, és:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)). \tag{6}$$

L'únic punt que no podrem calcular amb aquest mètode serà y_1, que calcularem fent servir el mètode de Euler comú. Per a més referències sobre els mètodes de n passos, en general, consultar [1].

Mètode de Runge-Kutta.

El mètode de Runge-Kutta és un mètode específic dins d'una familia de mètodes que tracta d'aproximar el valor de la solució a $x_n + h$ a partir de la solució (o aproximació) de la funció a x_n combinant els valors de diversos punts estratègics $f(x, y)$ a l'interval $(x_n, x_n + h)$ tractant d'aconseguir una bona precisió en l'increment $y_{n+1} - y_n$ (on y_i és una aproximació de la funció y al punt x_i).

Aquest mètode és caracteritza per les següents equacions:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_n, y_n) \\
k_2 &= h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\
k_4 &= h \cdot f(x_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned} \tag{7}$$

Es pot mostrar a més que aquestes aproximacions tenen una expansió de la forma

$$y(x,h) = y(x) + c_4(x)h^4 + c_5(x)h^5 + \dots \tag{8}$$

de manera que és una fórmula candidata per ser utilitzada amb extrapolació de Richardson.

Mètode de Runge-Kutta amb extrapolació de Richardson

Procedim de la mateixa manera que vam procedir per al mètode de Euler, tanmateix, aquí l'ordre de l'error de truncament és $\mathcal{O}(h^4)$, i per tant s'ha de tenir més cura a l'hora de fer els quocients ($p_k = 3 + k$).

Enunciat de l'exercici

Durant tot l'enunciat tractarem de resoldre el problema de valors inicials:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y^2}{sin^2(x)} \\ y(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \end{cases} \tag{9}$$

a l'interval $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. La solució a aquest problema és $y = tan(x)$, i ho utilitzarem per comparar la eficàcia de cadascun dels mètodes. Durant tota la pràctica, treballarem amb $n = 10$.

Aquesta pràctica ha de ser desenvolupada en el llenguatge `C`. No es pot utilitzar **CAP** llibreria als programes entregats per a cap apartat excepte l'últim, on només es podran utilitzar llibreries de graficació. Qualsevol ús dubtós de funcionalitats del llenguatge que permetin, en un sentit ampli, programar la pràctica sense entendre el funcionament dels mètodes numèrics utilitzats a la pràctica implicarà un `NO APTE` directe (i per tant en cas de dubte millor utilitzar el mínim número de llibreries possibles).

a) Desenvolupa un programa `euler_method` que resolgui mitjançant el mètode d'Euler el problema donat. Aquest programa retorna un fitxer anomenat `euler.out` amb la solució en el següent format:

```
y_1
y_2
.
.
.
y_n
```

Nota: Un format erroni implicarà el `NO APTE` directe de la pràctica.

b) Desenvolupa un programa `euler_method_with_richardson` que resolgui el problema donat mitjançant el mètode de Euler amb extrapolació de Richardson amb exactament `m = 2` passos (sense utilitzar cap tolerància). Aquest programa retorna un fitxer anomenat `euler_richardson.out` amb el mateix format que a l'apartat (a).

c) Desenvolupa un programa `adams_bashfort` que resolgui el problema mitjançant el mètode de 2 passos d'Adams-Bashfort. Aquest programa retorna un fitxer anomenat `adams2.out` amb el mateix format que a l'apartat (a).

d) Desenvolupa un programa `runge_kutta` que resolgui el problema mitjançant el mètode de Runge-Kutta. Aquest programa retorna un fitxer anomenat `runge.out` amb el mateix format que a l'apartat (a).

e) Desenvolupa un programa `runge_kutta_method_with_richardson` que resolgui el problema donat mitjançant el mètode de Runge-Kutta amb extrapolació de Richardson amb exactament `m = 2` passos (sense utilitzar cap tolerància). Aquest programa retorna un fitxer anomenat `runge_richardson.out` amb el mateix format que a l'apartat (a).

f) Desenvolupa un programa que donat els fitxers de sortida de tots els mètodes anteriors generi un gràfic amb la solució real pintada de forma contínua i de color vermell i les altres solucions pintades amb punts (no gràfica contínua) de colors diferents segons la solució i no vermells. A més indica de quin color és cada aproximació. Adjunta el gràfic resultant a la memòria. Quin és el millor mètode? I el pitjor? Per què? Raona la resposta.

g) (Opcional) Investiga sobre els mètodes de Adams-Bashfort amb més de 2 passos. Desenvolupa el mètode de Adams-Bashfort per a tres, quatre i cinc passos en programes `adams_bashfort_3`, `adams_bashfort_4` i `adams_bashfort_5`, respectivament.

Criteris de correcció i entrega

Per a l'entrega és indispensable seguir les instruccions de l'enunciat i entregar una memòria on s'expliqui com executar els programes realitzats (i en cas necessari, com compilar els programes), que també s'han de incloure. A més a més, també cal afegir a aquesta memòria les respostes a les preguntes de l'enunciat. Finalment, és necessari incloure els arxius de resultats `.out` demanats.

La pràctica no tindrà una nota numèrica, només tindrà una qualificació d'**APTE** o de **NO APTE**. Obtenir un **APTE** serà condició indispensable per aprovar l'assignatura.

Hi hauran una única data d'entrega.

Si l'entrega es fa en parelles la resolució de l'exercici opcional (apartat g) és obligatòria.

Referències

[1] *478/578 Numerical Methods for Differential Equations/Computational Mathematics II: Chapter 2.* urlhttp://www.math.iit.edu/fass/478578_Chapter_2.pdf. 2007.

[2] G. Dahlquist i Å. Björck. *Numerical Methods.* Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2003. ISBN: 9780486428079.