MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2019-20. Semestre de tardor

Pràctica 4: Derivació, integració i càlcul de zeros

1 La primera derivada d'una funció $f(x)$ en un punt x_0 es pot aproximar, si h és prou petit, per les expressions següents:

$$F_1(x_0,h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{i} \quad F_2(x_0,h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

Programeu les funcions `double der(double x0, double h);` i `double derCen(double x0, double h);` que, donats x_0 i h retornen $F_1(x_0,h)$ i $F_2(x_0,h)$, respectivament.

Programeu una funció `main` que llegeixi x_0 i un pas h, avaluï $F_1(x_0,h)$ i $F_2(x_0,h)$ per a valors decreixents del pas i escrigui en un fitxer, per a cada pas, el seu valor i l'error en les aproximacions (en punt flotant amb notació exponencial i controlant el nombre de dígits de la mantissa).

Feu una gràfica dels errors en funció del pas. Comenteu els resultats.

Podeu aplicar-lo a les funcions $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$, $f_2(x) = e^{2x}\sin(3x)$.

2 Donada una funció $f(x)$ definida en un interval fitat $[a,b]$, volem calcular

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dos fórmules per a calcular una aproximació de $I(f)$ són la fórmula dels trapezis $T(h)$ i la fórmula de Simpson composta $S(h)$.

Programeu les funcions

a) `double trapezis (double a, double b, int n);`
que retorna el valor de la fórmula dels trapezis a l'interval $[\mathtt{a},\mathtt{b}]$ prenent n subintervals de la mateixa longitud.
Prenent $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_i = a+ih$, $i = 0,\ldots,n$, tenim

$$T(h) = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

b) `double Simpson (double a, double b, int n);`
que retorna el valor de la fórmula de Simpson composta a l'interval $[\mathtt{a},\mathtt{b}]$ aplicada a n subintervals de la mateixa longitud.
Prenent $h = \dfrac{b-a}{2n}$, $x_k = a+kh$, $k = 0,\ldots,2n$, tenim

$$S(h) = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})\right]$$

Programeu una funció `main` per comprovar-les.

Podeu usar-les per a calcular

a) $\int_0^2 f_1(x)\,dx$ amb un error menor de 10^{-5}. Quants intervals són necessaris per a tenir aquesta precisió?

b) $\int_0^2 f_2(x)\,dx$ amb un error menor de 10^{-4}. Quants intervals són necessaris per a tenir aquesta precisió?

Fiteu l'error en l'aproximació i comproveu-lo numèricament.

3 Apliqueu l'extrapolació de Richardson a alguns dels exemples dels exercicis anteriors. Feu una taula d'aproximacions i pareu quan dues aproximacions siguin prou properes. Podeu fer els càlculs a mà o programar una funció.

4 Els mètodes numèrics per buscar solucions d'una equació $f(x) = 0$ generen successions $(x_n)_{n\geq 0}$, que s'espera que convergeixin a un valor α tal que $f(\alpha) = 0$.

Pendrem com a solució del problema un x_k que verifiqui $|f(x_k)| < \varepsilon_1$ o bé $|x_{k-1} - x_k| < \varepsilon_2$, on els valors de les toleràncies caldrà que estiguin fixats d'entrada.

Si la funció f és derivable es pot usar el **mètode de Newton** (o de Newton-Raphson):

> Donada una aproximació inicial x_0, es genera la successió

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \;\; n = 0, 1, \ldots$$

Escriviu una funció

```
int newton(double x0, int it_max, double *sol, double tol)
```

que calcula un zero de la funció f mitjançant aquest mètode, partint del valor `x0`, on `tol` és la tolerància demanada, `it_max` és el màxim nombre d'iteracions permès i `sol` contindrà el valor de l'arrel trobada, si el mètode ha convergit. Retorna:

0 si hi ha hagut convergència; posa abans a la variable `sol` el valor de l'arrel trobada,

1 si s'ha arribat al nombre màxim d'iteracions `it_max` sense tenir la tolerància demanada,

2 si el valor de la derivada és 0.

Programeu una funció `main` per comprovar la funció anterior.

Trobeu els zeros de les funcions $f_3(x) = \log x - x^2 + 4x - 4$, $f_4(x) = x^3 - e^x + 3$.

Per a cada exemple, caldrà programar una funció `double f(double);` que retorna el valor de la funció f en un punt. I en el cas del mètode de Newton una altra `double df(double x)`, que calculi el valor de f' en el punt x.