SF1545, Numeriska Metoder för I2
Lab3 – Projektet

Ni skall välja **en** av de fyra uppgifterna nedan. Det finns 20 exemplar av vardera. Om alla 20 redan är tagna måste du välja en annan uppgift. Vid den muntliga redovsiningen (som tar en timme) är det tänkt att ni är fyra grupper som presenterar under samma pass, en grupp från vardera uppgiften.

Utförande

1. Först skall ni göra en plan över vilka metoder ni planerar att använda för att lösa uppgiften. Till exempel hur ni delar upp uppgiften i mindre delar, vilka numeriska metoder ni använder och vilka data som behöver föras över från en del till nästa.

2. De numeriska metoder ni sedan använder skall programmeras av er själva. Exempel: Om ni behöver beräkna en integral så får ni inte använda Matlabs `integral` eller `trapz` utan måste själva implementera en metod, tex trapetsregeln. Ni får dock använda "vanliga" standard-funktioner som tex `cos`, `exp` och `abs`

3. Om projektet skall räknas som "avancerat" och därmed betygshöjande skall ni **dessutom göra en ny version av programmet** där ni tvärtom använder Matlabs färdiga rutiner för våra numeriska metoder som till exempel `integral` och `ode45`.

Redovisning

För att bli godkänd på projektet skall det redovisas i tre steg:

1. Ni skall lämna in en projekt-plan. *(i slutet av november)*
2. Ni skall boka och hålla en muntlig presentation av ert projekt. *(i december)*
3. Ni skall skriva och lämna in en rapport om ert projekt. *(i december eller tidigt i januari)*

För exakta datum: se kursplanen.

Hjälp och stöd?

1. Använd hjälpen som finns under de schemalagda terminalövningarna. Kö-listan ligger i Stay-a-while. Vår kö är vår kurskod, SF1545.

2. Utnyttja "Allmänhandledningen". Varje vardag 11-13 och 17-20 på plan 4 i E-huset. Även den använder kö-systemet Stay-a-while.

3. Prata med varandra! Diskutera ideer, metoder, angreppssätt och felsökning, men **aldrig, aldrig** skicka eller skriva kod åt varandra!!!

Varning för skrivfel i projekten. Texten i projekten är nyskriven. Fråga om något verkar omöjligt!!!

Projekt A: Majs, katter och råttor

På en isolerad ö börjar några frön gro. Från början finns där 80 plantor men snart ökar de i antal enligt

$$dP/dt = \alpha_1 P - \alpha_2 P^2$$

Tidsenheten är år, $P(t)$ antalet plantor vid tiden t och konstanterna $\alpha_1 = 15$ och $\alpha_2 = 1.4 \cdot 10^{-5}$. Om ön förblir isolerad kommer antalet plantor att nå ett maxvärde, vilket då?

Men dagen då plantorna uppnår 89% av maxvärdet kommer två råttor till ön. Skatta med Runge-Kuttas metod och steglängden 1 dag (dvs 1/365) vilken dag det är. Undersök om Runge-Kuttas metod med steglängden 1 vecka kombinerat med lämplig interpolation kommer fram till samma dag.

Råttorna trivs på ön och äter upp en hel del av plantorna. Blir de för många blir det ont om plantor. Samverkan mellan råttor och plantor kan beskrivas av

$$\begin{aligned} dP/dt &= \alpha_1 P - \alpha_2 P^2 - \alpha_3 PR \\ dR/dt &= -\beta_1 R^{1.4} + \beta_2 P^{0.6} R^{0.8} \end{aligned}$$

där $\alpha_3 = 0.012$, $\beta_1 = 1.9$, $\beta_2 = 0.084$ Om ön nu förblir isolerad kommer antalet plantor och råttor att nå konstanta jämnviktsvärden, vilka då?

Men, precis 1.25 år efter det att plantorna grott kom det iland 2 katter. Katterna äter råttorna men inte av plantorna, så plantornas tillväxtekvation påverkas inte men väl råttornas (och förstås katternas):

$$\begin{aligned} dR/dt &= -\beta_1 R^{1.4} + \beta_2 P^{0.6} R^{0.8} - \beta_3 RK \\ dK/dt &= -\gamma_1 K + \gamma_2 RK^{0.5} \end{aligned}$$

där $\beta_3 = 1.45$, $\gamma_1 = 1.95$, $\gamma_2 = 0.020$ Beräkna antalet plantor, råttor och katter vid de olika tillfällena samt när det gått fyra år. Hur mycket skiljer det från slutvärdena för respektive system?

Första dagen på det femte året kommer det folk dit och beslutar sig för att bekämpa råttorna med gift. 65% av råttorna dör, men även 10% av katterna. Hur många plantor, råttor och katter har man då efter 4.5 år, dvs mitt i sommaren det femte året? Och vid slutet av året? Lönade sig besprutningen?

Projekt B: Hopp med liten gunga

Ett litet barn sitter och gungar på en vanlig repgunga. Repen i gungan sitter fast på en trädgren 2.7 meter ovan marken och repen är 2.4 meter långa.

Först backar barnet så långt det kan och drar sedan snabbt upp fötterna. Repet bildar då vinkeln 28 grader mot lodlinjen. Gungningen blir en dämpad svängningsrörelse som beskrivs av

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{m}\dot{\varphi} + \frac{g}{L}\sin\varphi = 0$$

där $k = 1.26$ är en friktionskonstant, barnets vikt $m = 21$ kilo och gravitationskonstanten $g = 9.81$ m/s^2.

Nar barnet gungat ett tag kommer det på att det kan hoppa av gungan framåt. Under hoppet gäller differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\kappa \cdot \dot{x} \cdot V \\ m\ddot{y} &= -mg - \kappa \cdot \dot{y} \cdot V \\ V &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{aligned}$$

där $\kappa = 0.16$. Barnet provar att hoppa av i farten ifrån olika vinklar. Hur långt är det allra längsta hoppet barnet kan göra?

Efter ett tag kommer barnet på att det kommer längre om det i starten inte bara drar upp fötterna utan hoppar uppåt/bakåt “i gungans tangent” med hastigheten 5 meter per sekund. Hur långt blir det allra längsta hoppet nu?

Projekt C: Kast med liten boll

Ninni står på Singsing-gården och kastar en liten boll. Hon kastar iväg bollen i rakt västlig riktning med en hastighet av 27 meter per sekund och från en höjd av 1.7 meter. Kastvinkeln mot lodlinjen är 32 grader.

Det blåser sydvindar, dvs från söder mot norr, där vindhastigheten beror av höjden över marken enligt $v(z)$. Om man lägger ett koordinatsystem med origo där Ninni står, x åt norr, y åt väster och z uppåt så blir differentialekvationerna för bollbanan

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -q(\dot{x} - v(z)) \\ m\ddot{y} &= -q\dot{y} \\ m\ddot{z} &= -mg - q\dot{z} \\ v(z) &= 0.8 + 0.38z \\ q &= c\sqrt{(\dot{x} - v(z))^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \end{aligned}$$

Friktionskonstanten c beror av bollens storlek och yta och har värdet $c = 0.0081$. Bollen har massan 120 gram.

Tag fram en effektiv algoritm för att bestämma bollens bana från det den kastas fram till dess att den nuddar marken. Rita banan i 3D. Markera start och landningspunkt för bollen. Var landar bollen?

I nästa kast vill Ninni att bollen ska landa rakt västerut. Hur skall hon vrida sig för att bollen skall landa rakt västerut?

När bollen träffar marken studsar den. Vid studsen bevaras hastigheten i x- och y-led medan z-komponenten minskar med 25 procent och byter tecken. Rita upp hela bollkastet med studsar. Var landar bollen efter fyra studsar?

Projekt D: Kulstötning

Ninni står vid ängen vid Uggleviks-källen och siktar på en liten pinne med en stor och tung sten. Stenen kastas från höjden 1.3 meter med en hastighet på 18 meter per sekund och väger 900 gram. Pinnen står 15 meter bort. Kastbanan beskrivs av diffekvationssystemet

$$m\ddot{x} = -k_x \cdot \dot{x} \cdot V$$
$$m\ddot{y} = -mg - k_y \cdot \dot{y} \cdot V$$
$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

där $k_x = 0.024$ och $k_y = 0.063$.

Var stenen landar beror på vilken vinkel mot lodlinjen den kastades med. Det finns två vinklar som gör att stenen träffar pinnen, en hög och en låg kastbana. Skriv ett program som med en effektiv algoritm hittar de två vinklarna, Rita sedan upp kastbanorna för de två vinklarna.

Grafer i all ära, men för hårda siffror är tabeller bättre. Gör en tabell över $y(x)$ för den höga kastbanan för varje meter på x. För x-värdena duger linjär interpolation utifrån värdena från diffekvations-lösningen, men för y-värdena behövs Hermite-interpolation.

På eftermiddagen blåste det upp. Motvind på fem meter per sekund. Beräkna den starthastighet stenen nu måste ha om man skall träffa pinnen med samma startvinkel som tidigare i det höga kastet. Motvinden gör att kastbanan nu beskrivs av diffekvationssystemet

$$m\ddot{x} = -k_x \cdot (\dot{x} - v) \cdot W$$
$$m\ddot{y} = -mg - k_y \cdot \dot{y} \cdot W$$
$$W = \sqrt{(\dot{x} - v)^2 + \dot{y}^2}$$

där v är motvinden.