jose.luis.ruiz@upc.edu

Taller 20% + max (PG, FG) 35% + FAL 45%

↳ TG 5% + TAL 5% + Questionaris G 5% + Engimath 5%

TEORIA 14/02/2022

TEMA 1: GRAFOS

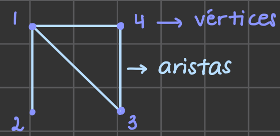
1. CONCEPTOS BÁSICOS DE GRAFOS

Un grafo és un par ordenado $G = (V, A)$ dónde V és un conjunto no vacio compuesto de vértices y A és un conjunto (posiblemente $\emptyset$) formado por un conjunto $\{u,v\}$ con $u \neq v$ $u,v \in V$ compuesto por aristas.

ej. $V = \{1,2,3,4\}$

$A = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\}\}$

↳ 12, 13, 14, 34



★ No confundir intersecciones con vértices.

* Los grafos planares són aquellos que se pueden dibujar en el plano sin que sus arestas intersequen en puntos que no són vértices, sino són grafos tóricos.

Definiciones: $G = (V, A)$

① Orden $n = |V|$ (núm. vértices)

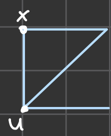
② Tamaño $m = |A|$ (núm. aristas)

③ si $\{u,v\} \in A$ decimos que u, v són adyacentes : $u \sim v$

si $a = \{u,v\} \in A$ decimos que a, u són incidentes : $a \sim u$, $a \sim v$

si $a, b \in A$ que comparten un vértice són incidentes : $a \sim b$

④ Grado de un vértice $u \in V$, $g(u) = \#\{a \in A : a \sim u\}$, $g(u) = \#\{x \in V : u \sim x\}$ ↙ cardinal (num.)



$g(u) = 3$
$g(u) = 1$

⑤ Sequencia de grados : sucesión decreciente de los grados

⑥ Grado máximo, grado mínimo $d(G) = 1$, $A(G) = 3$.

Propiedades: G grafo de orden n, tamaño m

① $0 \leq g(u) \leq n-1$, $u \in V$ ★ Para $n=1$ el grafo es tanto completo como nulo.

② $0 \leq m \leq \frac{n(n-1)}{2}$

* Aquellos grafos que no tienen aristas se denominan nulos y los que tienen todas las combinaciones posibles de arestas se denominan completos.

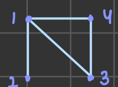
③ $\exists$ $u \neq v$ (vértices) tq $g(u) = g(v)$

Demo por RA : suponemos que todos los grados són diferentes, $g(u) \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$ es decir n números con n grados diferentes $\Rightarrow$ secuencia de grados és : $\underline{n-1}, n-2, \dots, 3, 2, 1, \underline{0}$ contradicción. cqd.

④ Lema de las encajadas $v \in V$, $\sum g(v) = 2 \cdot |A|$

Demo $V = \{v_1, \dots, v_n\}$

$A = \{a_1, \dots, a_m\}$



$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

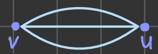
Cada columna tiene 2 unos. Total: $2m$ unos

La fila v_i tiene $g(v_i)$ unos. Total: $\sum g(v_i)$ unos

⑤ $2 \cdot |A| = \sum_{v \in V} g(v) = \sum_{g(v)\text{ par}} g(v) + \sum_{g(v)\text{ impar}} g(v) \rightarrow \sum_{g(v)\text{ impar}} g(v)$ es par $\Rightarrow$ Hay un número par de vértices con grado impar

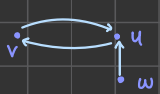
Variantes de la definición:

① MULTIGRAFOS : más de una arista entre dos vértices



② PSEUDOGRAFO : lazos, bucles

③ DIGRAFO : con arestas direccionadas



2. TIPOS DE GRAFOS

GRAFOS NULOS

$A = \emptyset$, N_n

GRAFOS COMPLETOS

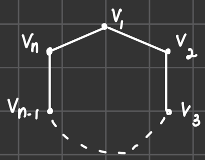
K_n $V = \{ v_1, \dots, v_n \}$, $A = \{ v_i v_j : i \neq j \}$

$K_1 = N_1$ $K_3 =$ 

$K_2 =$ 

GRAFOS TRAYECTOS

T_n $A = \{ v_1 v_2 , v_2 v_3 , \dots , v_{n-1} v_n \}$



$T_1 = N_1 = K_1$

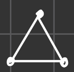
$T_2 = K_2$

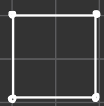
G	orden	tamaño	sec. grados
N_n	n	0	$0, 0, \dots, 0$
K_n	n	$\frac{n(n-1)}{2}$	$n-1, n-2, \dots, n-1$
T_n	n	$n-1$	$\begin{cases} n=1 & 0 \\ n=2 & 1,1 \\ n \geq 3 & 2,2,\dots,2,1,1 \end{cases}$
C_n	n	n	$2, 2, \dots, 2$
W_n	n	$2n-2$	$n-1, 3, 3, \dots, 3$

GRAFOS CICLOS $n \geq 3$

C_n , $A = \{ v_1 v_2 , v_2 v_3 , v_3 v_4 , \dots , v_{n-1} v_n , v_n v_1 \}$

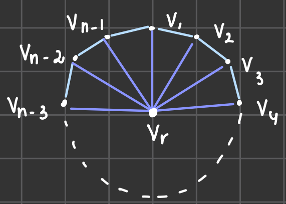
$C_3 = K_3$ $C_4 =$





GRAFOS RUEDA $n \geq 4$

W_n , $A = \{ v_1 v_2 , \dots , v_{n-2} v_{n-1} , v_{n-1} v_1 \} \cup \{ v_r v_i : i = 1, \dots, n-1 \}$



CLASSE TALLER 15/02/2020

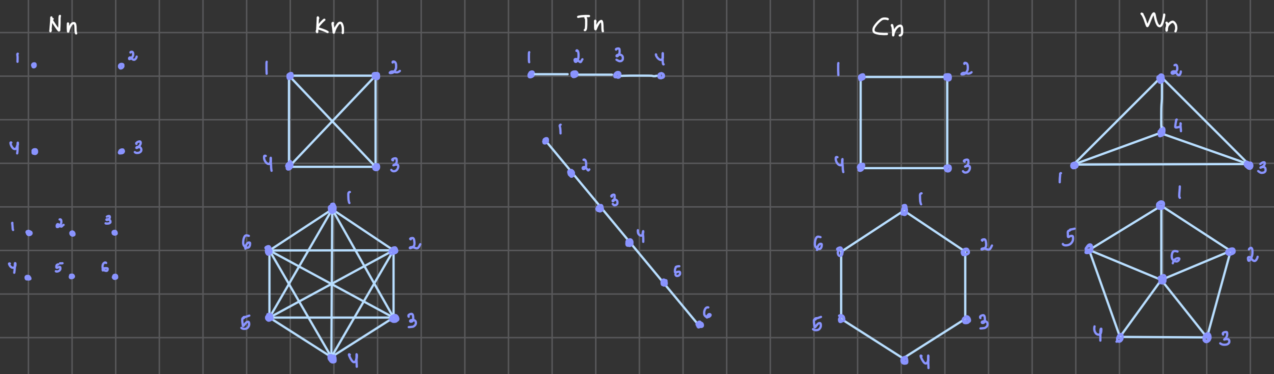
$\star$ $G = (V, A)$ $|V| = n$, $|A| = m$

vertex (V), arestes (A), ordre (n), mida (m)

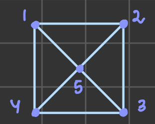
El grau d'un graf = nº arestes incidents

1.1. N_n, K_n, T_n, C_n, W_n

a) Per $n = 4$ i $n = 6$



b) matriu adjacent de W_5



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

	N_n	K_n	T_n	C_n	W_n
ordre	n	n	n	n	n
mida	0	$\frac{n(n-1)}{2}$	$n-1$	n	$2n-2$
gmax	0	$n-1$	$n=2 \to 1$ $n>2 \to 2$	2	$n-1$
gmin	0	$n-1$	1	2	3

1.7 $G = (V, A)$

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

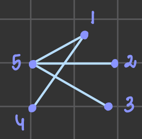
$A = \{12, 13, 23, 24, 34, 45\}$

* conjunt arestes, matriu adjacent, representació gràfica de G^c, $G-4$, $G-45$, $G+25$

G^c té mida $\frac{n \cdot (n-1)}{2} - m_G$

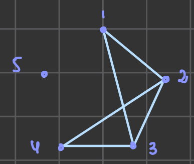
$g_{G^c}(u) = n-1-g_G(u)$

$A^c = \{14, 15, 25, 35\}$

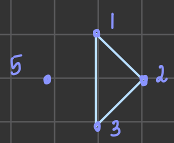


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$G-45$



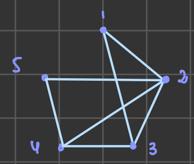
$G-4$



$\cong N_1 \cup C_3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$G+25$



* La quantitat de vertexs de grau senar ha de ser parell SEMPRE!

* Un graf $G = (V, A)$ és bipartit si $\exists V_1$ i V_2 no buits amb $V = V_1 \cup V_2$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ $uv \in A$ $\Rightarrow u \in V_1$ i $v \in V_2$ o a la inversa.

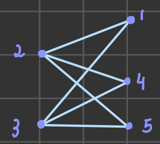
* $G_1 = (V_1, A_1)$ $G_2 = (V_2, A_2)$

$G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, A)$

$$(u_1, v_1) \underset{A}{\sim} (u_2, v_2) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = v_1 & \text{i} \quad u_2 \underset{A_2}{\sim} v_2 \\ v_1 = v_2 & \text{i} \quad u_1 \underset{A_1}{\sim} u_2 \end{cases} \rightarrow u_1 u_2 \in A_1$$

* $K_{r,s}$ bipartit complet

$K_{1,n-1}$



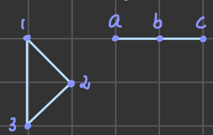
$K_{2,3}$

* HAVEL-HAKIMI

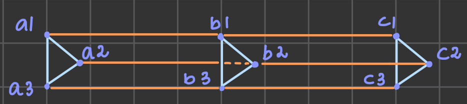
$s, g_1, g_2, \dots, g_s, g_{s+1}, \dots, g_{n-1}$ és grafo

$g_1-1, g_2-1, \dots, g_s-1, g_{s+1}, \dots, g_{n-1}$ és grafo

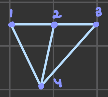
1.10. $K_3 \cup T_3$



$T_3 \times K_3 \Rightarrow (V_T \times V_K) = (a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3)$

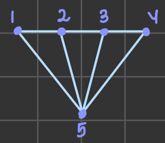


1.15. 1) 3, 3, 2, 2, 2 → es grafo $\underset{\text{HAVEL HAKIMI}}{\Leftrightarrow}$ 2, 1, 1



2) 4, 4, 3, 2, 1 $\underset{\text{H.H}}{\Leftrightarrow}$ 3, 2, 1, 0 No es grafo

3) 4, 3, 3, 2, 2 → es grafo $\underset{\text{H.H}}{\Leftrightarrow}$ 2, 2, 1, 1



4) 3, 3, 3, 2, 2 → No es graf ja que el nº de vertex amb grau imparell no és parell

6) 5, 3, 2, 2, 2 $\underset{\text{H.H}}{\Leftrightarrow}$ No es grafo.

GRAFOS REGULARES

G és r-regular si $g(u) = r$, para todo $u \in V$

ej: 0 - regulares N_n

1 - regulares K_2

2 - regulares C_n $(n \geq 3)$ ⇒ G conexo, 2-regular ⇒ G es un C_n

* LEMA DE LAS ENCAJADAS

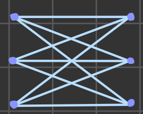
$2 \cdot |A| = r \cdot |V|$

$2 \cdot |A| = \sum_{u \in V} g(u) = r \cdot |V|$

TEORIA 16/02/2022

GRAFOS BIPARTIDOS

$K_{3,3}$



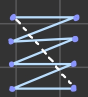
$G = (V, A)$ es un grafo bipartito si V se puede expresar como $V = V_1 \cup V_2$ ∧ $V_1 \neq \emptyset$ ∧ $V_2 \neq \emptyset$ ∧ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ tq $\begin{cases} u, v \in V_1 \Rightarrow u \nsim v \\ u, v \in V_2 \Rightarrow u \nsim v \end{cases}$

★ si n par ⇒ si

si n impar ⇒ NO

V_1 ∧ V_2 se llaman partes estables.

ej: N_n T_n



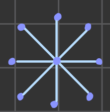
C_n

GRAFOS BIPARTIDOS COMPLETOS

$K_{r,s}$

$|V_1| = r$, $|V_2| = s$ y todas las aristas permitidas

$K_{1,s}$ ⇒ graf estrella



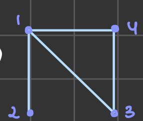
3. SUBGRAFOS

$G = (V, A)$

$G' = (V', A')$ → subgrafo de G

si $V' \subseteq V$, $A' \subseteq A$

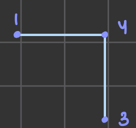
ej: G



$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$A = \{12, 13, 14, 34\}$

G'



$V' = \{1, 3, 4\}$

$A' = \{14, 43\}$

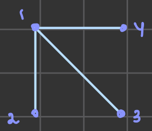
4. GRAFOS INDUCIDOS

$G' = (V', A')$ és inducido si $A' = \{u,v \in A : u,v \in V'\}$

ej: $V' = \{1,3,4\}$, para que sea inducido $A' = \{14, 34, 13\}$ se escribe $G[V']$ subgrafo de G inducido por V'.

5. SUBGRAFO GENERADOR

$G' = (V', A')$ es un subgrafo generador si $V' = V$



6. OPERACIONES

$G = (V, A)$

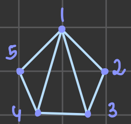
① Eliminar vértices

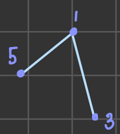
$S \subseteq V$

$G - S = (V - S, A')$

$A' = A - \{ux : u \in S \wedge ux \in A\}$ s'han de treure les arestes dels vertexs eliminats.

ej:

G 

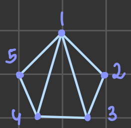
$\Rightarrow$ $G - \{2,4\}$ 

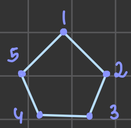
② Eliminar aristas

$S \subseteq A$

$G - S = (V, A - S)$ si $S = \{a\}$, $G - a$

ej:

G 

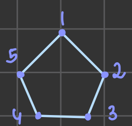
$\Rightarrow$ $G - \{14, 13\}$ 

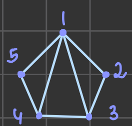
③ Añadir aristas

sea $a = uv \notin A$

$G + a = (V, A \cup \{a\})$

ej:

G 

$\Rightarrow$ $G + \{14, 13\}$ 

④ Grafo complementario

$G = (V, A)$

El grafo complementario de G es : $G^c = (V, A')$ donde $A' = \{uv : uv \notin A\}$

Propiedades :

1) $(G^c)^c = G$

2) $g_{G^c}(u) = (n-1) - g_G(u)$

	ORDEN	TAMAÑO
G	n	m
$u \in V$, $G-u$	$n-1$	$m - g(u)$
$a \in A$, $G-a$	n	$m-1$
$a \in A$, $G+a$	n	$m+1$

TEORIA 21/02/2022

⑤ Grafo unión

$G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$

El grafo unión és:

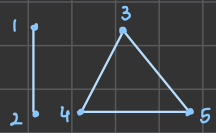
$G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2 , A_1 \cup A_2)$

* se supone que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$K_2 \cup C_3$

$V_1 = \{1,2\}$

$V_2 = \{2,3,4\}$



⑥ Grafo unión (cartesiano)

$G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2 , A')$

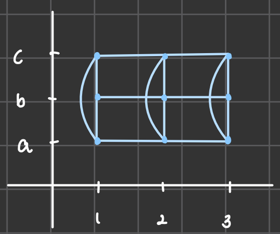
Donde las adyacencias són:

- $(u_1, v_1) \sim (u_2, v_2) \Leftrightarrow (u_1 = u_2 \wedge v_1 \sim v_2) \vee (u_1 \sim u_2 \wedge v_1 = v_2)$

$T_3 \times C_3$

$V(T_3) = \{1,2,3\}$

$V(C_3) = \{a,b,c\}$



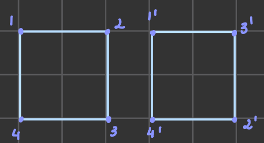
propiedades:

A) $\text{Orden}(G_1 \times G_2) = \text{orden}(G_1) \cdot \text{orden}(G_2)$

B) $\text{Tamaño}(G_1 \times G_2) = \text{tamaño}(G_1) \cdot \text{Orden}(G_2) + \text{tamaño}(G_2) \cdot \text{Orden}(G_1)$

C) $g_{G_1 \times G_2}(u,v) = g_{G_1}(u) + g_{G_2}(v)$

7. ISOMORFISMO DE GRAFOS



* són el mateix graf però amb un canvi de nom dels vertexs però mantenint les adjecencies i les No adjacencies

$G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ són grafos isomorfos si existe la aplicación biyectiva $f: V_1 \to V_2$ tal que, $u \sim v$ en $G_1 \Rightarrow f(u) \sim f(v)$ en G_2 y además $u \not\sim v$ en $G_1 \Rightarrow f(u) \not\sim f(v)$ en G_2.

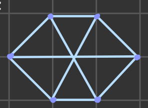
* contrareciproco : $f(u) \sim f(v)$ en $G_2 \Rightarrow u \sim v$ en G_1 , es decir, $G_1 \cong G_2 \Leftrightarrow \exists f: V_1 \to V_2$ biyectiva tq $u \sim v$ en $G_1 \Leftrightarrow f(u) \sim f(v)$ en G_2

principio general:

si G_1 y G_2 són isomorfos entonces G_1 y G_2 tienen las mismas propiedades. Pero NO al revés.

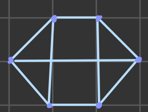
ej 123:

G_5



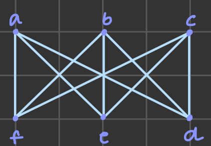
Grafo bipartito completo

G_7



No es un grafo bipartito ya que contiene dos ciclos de longitud 3 (impar)

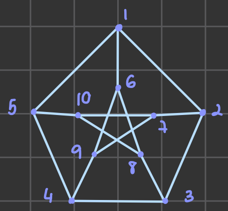
G_6



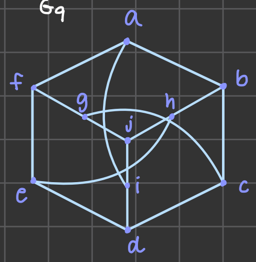
$K_{3,3}$, grafo bipartito de orden 6 , 3-regulares , tamaño 9.

GRAFO DE PETERSEN

G_8, $n = 10$, 3-regulares, tamaño 15.



G_9



1 → a	6 → f
2 → b	7 → h
3 → c	8 → g
4 → d	9 → e
5 → i	10 → j

2 → b, f, i
3 → c, h
6 → f, i

TEMA 2 : RECORRIDOS

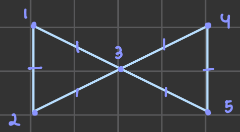
$G = (V, A)$ grafo $u, v \in V$

Un recorrido de u a v (u-v recorrido) és una secuencia: $u = u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, u_k = v$ con $u_i \in V$ y $u_i \sim u_{i+1}$

- k = longitud del recorrido (núm. de aristas = núm. vértices − 1)
- $k = 0$: u.

Terminos:

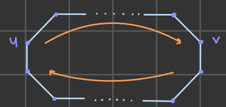
* caminos. no hay vertices repetidos
* recorrido cerrado : $u_0 = u_k$
* ciclo : long. ≥ 3, sin vértices repetidos, excepto $u_0 = u_k$ (primero y último)
* sendero : no hay aristas repetidas
* circuito : sendero cerrado



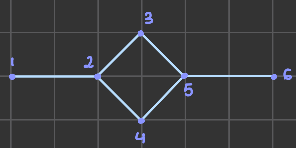
CIRCUITO EULERIANO
1, 3, 4, 5, 3, 2, 1

Propiedades:

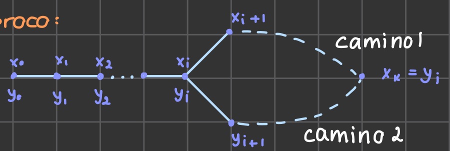
① Hay un ciclo que pasa por $u, v \in V$, $u \neq v$ ⇔ hay dos u-v caminos vértice-disjuntos (excepto u, v)



② Si hay 2 u-v caminos diferentes, entonces G tiene ciclo.



contrarecíproco:



$x_{i+1} \neq y_{i+1}$

$x_i, x_{i+1}, x_k = y_j$

$y_{j-1}, \dots, y_{j+1}, y_1 = x_i$

③ Si existe un u-v recorrido de longitud k, entonces hay un u-v camino de longitud $\leq k$ ($u \neq v$) usando vértices y aristas de la sequencia original.

- $u = u_0, u_1, \dots, u_k = v$
- si hay repeticiones : $u_0, u_1, \dots, u_i, \boxed{\cancel{\dots u_j}} \dots$ consideramos $u_0, u_1, \dots, u_i, u_{j+1}, \dots, u_k$

1. conexión

* G es conexo ⇔ $\forall u, v \in V$ existe un u-v camino.

Obs. G conexo, orden ≥ 2 ⇒ G no tiene vértices aislados (grado 0)

* componentes conexas:

Definimos una relación R ⇒ u R v ⇔ existe un u-v camino ⇒ R es de equivalencia (construimos un recorrido).

Clases de equivaléncia $V_1, V_2, \dots, V_k$

Las componentes conexas són subgrafos inducidos $G[V_i]_{i=1,\dots,k}$

TALLER 22/02/2022

ex 1.18. Demostreu que en un graf bipartit d'ordre n, la mida és menor o igual a $n^2/4$

$*$ $G=(V,A)$ és bipartit si $V = V_1 \cup V_2$ amb $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ $(V_1 \neq \emptyset \wedge V_2 \neq \emptyset)$ i $V_1 \wedge V_2$ són les parts estables.

$uv \in A \Rightarrow u \in V_1 \wedge v \in V_2 \vee u \in V_2 \wedge v \in V_1$

PRIMER MÈTODE:

$|V_1| = s \Rightarrow |V_2| = n-s \Rightarrow$ nombre d'arestes $\leq$ arestes $K_{s,n-s} = s\cdot(n-s)$ $\quad s \in \{1,2,\dots,n-1\}$

$$m = \sum_{u\in V_1} g(u) = \sum_{u \in V_2} g(u)$$

si tenim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\quad x \mapsto x(n-x) = nx - x^2$

Busquem un màxim o un mínim $f'(x) = n-2x \Rightarrow f'(x)=0$; $n-2x=0$; $x = \frac{n}{2}$

mirem si és màx o mín $f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ per $\frac{n}{2}$ tenim un màx absolut (ja que f es una paràbola)

$$f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2} = \frac{n^2}{4}.$$

SEGON MÈTODE:

$s(n-s) \leq \frac{n^2}{4} \Leftrightarrow 4sn - 4s^2 \leq n^2 \Leftrightarrow n^2 + 4s^2 - 4sn \geq 0 \Leftrightarrow (n-2s)^2 \geq 0$ cert.

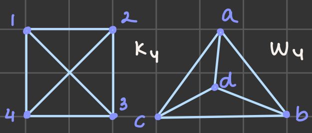
ex 1.19. Graf G d'ordre 9 tq $g(v) \in \{5,6\}$. Prova que almenys hi ha 5 vèrtexs de grau 6 o almenys 6 vèrtexs de grau 5.

grau 5	grau 6	És cert
0	9	A
2	7	A
4	5	A
6	3	B
8	1	B

$\star$ Demostrat que és certa una de les dos propietats sempre!

ex 1.21. Determina tots els grafs d'ordre quatre i mida dos.

$G=(V,A)$ $\wedge$ $H=(W,B)$ són isomorfs $[G \cong H]$ si $\exists\, f: V \to W$ bijectiva, $uv \in A \Leftrightarrow f(u)f(v) \in B$. En tal cas $g_G(u) = g_H(f(u))$



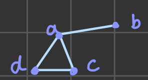
$K_4 \cong W_4$ $\quad$ $1\to a$, $2 \to b$, $3 \to c$, $4 \to d$

$*$ Amb 4 vèrtexs, màxim d'arestes (arestes de $K_4 = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$) podem fer $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$ grafs.

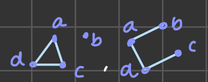
POSIBLES GRAFS: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

ex 1.22. Sigui $V = \{a,b,c,d\}$ i $A = \{ab, ac, ad, dc\}$. Determineu tots els subgrafs de $G=(V,A)$

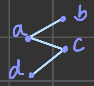
$*$ ordre 4: mida 4 $\rightarrow$



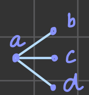
mida 3 $\rightarrow$



$\cong$

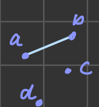


$a\to a$, $b \to b$, $c \to d$, $d \to c$,



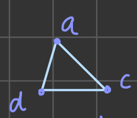
mida 2 $\rightarrow$

mida 1 $\rightarrow$

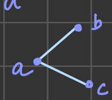


mida 0 N_4

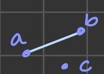
$*$ ordre 3: mida 3



mida 2



mida 1



mida 0 N_3

TEORIA 23/02/2022

ALGORITMOS PARA ENCONTRAR LAS COMPONENTES CONEXAS

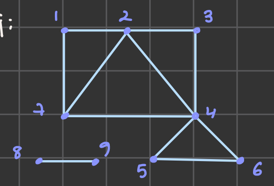
① Algoritmo DFS (busqueda en profundidad)

* necesitas :
  - P: pila (staks)
  - W: lista de vértices
  - B: lista de aristas

* INPUT: $G = (V, A)$, $u \in V$
* OUTPUT: c.c. de V.

P : V
W = {v}
B = ∅
mientras P ≠ ∅
x = último (P)
si existe y tq $x \sim y \wedge y \notin W$
añadir y a P, W
añadir xy a B
si no eliminar x de P.

ej:



DFS: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
W: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
B: ∅, 12, 23, 34, 45, 56, 47
$W \neq B \Rightarrow G$ no es conexo
G[W] cc. de 1.

DISTANCIAS (intro. BFS)

$G = (V, A)$, $x, y \in V$

$$d(x,y) = \begin{cases} \text{longitud del } x\text{-}y \text{ camino más corto si } x,y \text{ están en la misma cc.} \\ \infty \text{ si } x,y \text{ no están en la misma cc.} \end{cases}$$

componentes conexas

La función d es una distancia:
(G conexo) $d: V \times V \to \mathbb{N}$
$(x,y) \to d(x,y)$

a. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
b. $d(x,y) = d(y,x)$
c. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

② Algoritmo BFS (busqueda en ampütud)

* INPUT: $G(V, A)$, $v \in V$
* OUTPUT: cc. de $v \in V$
  distancia de v a todos los vértices de su cc.

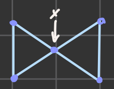
C: V (queue)
W: V (lista de vértices)
B: ∅ (lista de aristas)
D = [-, -, ⋯, -, ⋯] vector de distancias
$u \in V$ $D[u] = d(v,u)$
D[v] = 0
mientras C ≠ ∅
x = primero (C)
si existe y tq $x \sim y$, $y \notin W$
añadir y a C, W
añadir xy a B
D[y] = D[x] + 1
si no eliminar x de C.

propiedades:

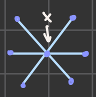
① G conexo de orden $n \geq 3$ y 2-regular $\Rightarrow G \cong C_n$

② G conexo:

- $a = xy \in A \Rightarrow G - a$ es conexo o bien tiene 2 cc. ($G - a$ tiene ≤ 2 cc.)
- $x \in V \Rightarrow G - x$ tiene $\leq g(x)$ cc.



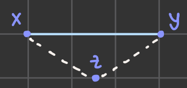
$G - x$ 2 cc.

$K_{1,5}$ 

$G - x$ tiene 5 cc.

ex. G conexo:

a) $a \in A \Rightarrow G - a$ tiene ≤ 2 cc.

$a = xy$ 

En $G - a$ $z \in V$ arbitrario

G conexo $\Rightarrow \exists$ $z - x$ camino

$\rightarrow z, \ldots, \overset{a}{\overline{y, x}}$ (contiene la arista a) $\rightarrow$ $z \ldots y$ $\exists$ un $z - y$ camino en $G - a$

$\rightarrow z, \ldots, y$ (no contiene a) $\rightarrow$ $z \ldots x$ $\exists$ un $z - x$ camino en $G - a$ o bien z está en cc. de y en $G - a$ o bien z esta en la cc de x en $G - a$.

b) $u \in V \Rightarrow G - u$ tiene $\leq g(u)$ cc.

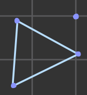
suponemos que u es adyacente $u_1, u_2, \ldots, u_k$

$z \in V$ arbitrario

G conexo $\Rightarrow \exists$ $z - u$ camino $z, \ldots, u_i, u$ para algun u_i, $i = 1, \ldots, k$.

En $G - u$: hay un camino de z a u_i.

Es decir z, u_i están en la misma cc de $G - u$

ex: G conexo, orden n, tamaño m $\Rightarrow m \geq n - 1 \Leftarrow$ Falso  $n = 4$, $m = 4 - 1 = 3$

* INDUCCIÓN COMPLETA SOBRE n

- Base: $n = 1 \Rightarrow G = N_1 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = 0 \geq 1 - 1 \end{cases}$ cierto.
- Paso inductivo: $n \geq 1$

H.I: todos los grafos conexos de orden hasta n cumplen: tamaño $\geq$ orden-1. Sea G un grafo conexo de orden $n+1$. Queremos ver que tamaño$(G) \geq (n+1) - 1 = n$. $u \in V$, $G - u$ tiene cc. $G_1, G_2, \ldots, G_s$ ($s \leq g(u)$). Cada G_i es un grafo conexo, orden $n_i \leq n$ y tamaño m_i. Por H.I $m_i \geq n_i - 1$.

$$\text{tamaño}(G) = \left(\sum_{i=1}^{s} m_i\right) + g(u) \geq \sum_{i=1}^{s} (n_i - 1) + g(u) = \left(\sum_{i=1}^{s} n_i\right) - s + g(u) = (\text{orden}(G) - 1) - s - g(u) \geq \text{orden}(G) - 1$$

$\Rightarrow n \underbrace{- s + g(u)}_{\geq 0} \geq n$

ex: G grafo de orden n, tamaño m, k cc. $\Rightarrow m \geq n - k$

$\forall_i$ $m_i \geq n_i - 1 \Rightarrow \Sigma m_i \geq \Sigma (n_i - 1) = n - k$

2 vértices de corte o de articulación

* ARISTAS PUENTE:

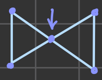
- $u \in V$ es un vértice de articulación si $G - u$ tiene más cc que G.
- $a \in A$ es una arista puente si $G - a$ tiene más cc. que G.

Observaciones:

① G conexo, $u \in V$ vértice de articulación $\Rightarrow G - u$ no es conexo y tiene $\leq g(u)$ cc.

② G conexo, $a \in A$ arista puente $\Rightarrow G - a$ tiene 2cc.

③ $g(u) = 1 \Rightarrow u$ no es vértice de articulación

④ G puede tener vértices de articulación y no aristas puente  $\exists$ v.a $\not\Rightarrow$ $\exists$ a.p.

⑤ K_2 —a— $\begin{cases} \text{a puente} \\ \text{no v.a.} \end{cases}$

⑥ si $G \neq K_2$ y tiene una arista puente, entonces tiene un vértice de articulación. $\exists$c.p. $\Rightarrow \exists$v.a (excepto K_2)

TEOREMA 1: G conexo

① $u \in V$ es vértice de articulación

② $\exists x, y \neq u$ tq todo x-y camino pasa por u.

Demo ① ⇒ ② : sea $x \in V(G_1)$, $y \in V(G_2)$ ⇒ En G-u $\nexists$ x-y camino ⇒ En G $\exists$ x-y camino (G conexo)

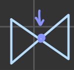
Demo ② ⇒ ① : Hay vértices $x, y \neq u$ tq todo x-y camino pasa por u ⇒ en G-u no hay x-y camino ⇒ G-u no conexo ⇒ u articulación

TEOREMA 2: són equivalentes

① $a \in A$ és una arista punte

② $\exists x, y \in V$ tq todo x-y camino por a.

③ a no está en ningún ciclo.

* CONSECUENCIA: a NO puente ⇔ a está en un ciclo 
No es cierto para vértices

Demo ① ⇒ ② : a puente ⇒ G-a tiene 2cc. G_1 G_2 ⇒ $x \in V(G_1)$, $y \in V(G_2)$ ⇒ En G-a no hay x-y camino ⇒ En G si hay x-y camino (G conexo) ⇒ Todos los x-y caminos en G pasan por a.

Demo ② ⇒ ③ : contrareciproco

$\neg 3 \Rightarrow \neg 2$; a está en un ciclo ⇒ $\forall x, y \in V$ $\exists$ x-y camino que no pasa por a.

Demo ③ ⇒ ① : contrareciproco

$\neg 1 \Rightarrow \neg 3$; $\begin{cases} \text{a no puente} \Rightarrow \text{a está en un ciclo} \\ \text{a no puente} \Rightarrow \text{G-a conexo} \Rightarrow \text{este camino junto con a es un ciclo que contiene a.} \end{cases}$

3. Diámetro, radio y excentricidad

G conexo $x, y \in V$

$d(x, y)$ = longitud del x-y camino más corto.

* Diametro de G : $D(G) = \max d(x,y)$ $x, y \in V$

ex:
1. $D(K_n) = 1 \rightarrow r(K_r) = 1$
2. $D(K_{r,s}) = 2 \rightarrow r(K_{r,s}) = 2$
3. $D(T_n) = n-1 \rightarrow r(T_n) = \lfloor n/2 \rfloor$
4. $D(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor \rightarrow r(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$

* Excentricidad de un vértice : $e(u) = \max d(u,v)$ $x \in V$

ex:
1. K_n $e(u) = 1$
2. $K_{r,s}$ $e(u) = 2$
3. T_5 

* Radio de G : $r(G) = \min e(u)$ $u \in V$

fórmula:

$r(G) \leq D(G) \leq 2r(G)$

$D(G) = \max d(x,y) = \max(\max d(y,x))$

$u \in V$ es central ⇔ $e(u) = r(G)$

4. Caracterización de los grafos bipartitos

① Los ciclos de longitud impar no son bipartitos. Los de longitud par sí

② Si G contiene un ciclo impar, entonces G no es bipartito.

TEOREMA: G es bipartito $\Leftrightarrow$ G no contiene ciclos impares

Demo $\Rightarrow$): ok

Demo $\Leftarrow$): suponemos que G es conexo $\Rightarrow z \in V$ fijo $\begin{cases} V_1 = \{x \in V \mid d(x,z) \text{ par}\} \\ V_2 = \{x \in V \mid d(x,z) \text{ impar}\} \end{cases}$

Hay que ver a) $x, y \in V_1 \Rightarrow x \not\sim y$ b) $x, y \in V_2 \Rightarrow x \not\sim y$.

Suponemos que $x, y \in V$, $x \sim y$ (R.A):

$\exists z, \dots, x$ longitud par

$\exists z, \dots, x$ longitud impar

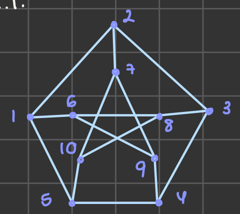
$z \dots x \; y \dots z$ Recorrido cerrado de longitud impar

LEMA: Todo recorrido cerrado de longitud impar contiene un ciclo de longitud impar.

TALLER 1/03/2022

- Un recorregut de longitud k es una seqüència de k+1 vèrtexs adjacents $v_0 v_1 v_2 \dots v_k \Rightarrow$ si $v_0 = v_k$, es a dir, és tancat.
- Un camí és un recorregut sense vèrtexs repetits.
- Un cicle és un recorregut tancat de longitud ≥ 3 on els únics repetits són el primer i l'últim

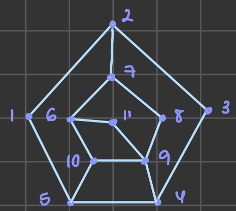
ex 2.1.



Petersen

1, 2, 3, 4, 5, 10, 7, 9, 6, 8

cicles: 1, 2, 3, 4, 5, 1



1, 5, 10, 6, 11, 9, 4, 3, 2, 7, 8

cicle long. 9: 1, 2, 7, 8, 9, 11, 6, 10, 5, 1

ex 2.2. Grau mínim de G és d, aleshores G conté un camí de longitud d:

Sigui $u_0, u_1, u_2, \dots, u_k$ un camí de long. màxima a G hem de demostrar $k \geq d$.

* Reducció a l'absurd, suposem $k < d \Rightarrow \exists v$ adjacent a u_0 i $v \notin \{u_1, \dots, u_k\} \Rightarrow v u_0 u_1 \dots u_k$ és un camí més llarg $\Rightarrow$ contradicció, cvd.

- $u \sim v$ són un cicle $\Leftrightarrow$ hi ha 2 camins diferents entre u i v
- G és acíclic si no té cicles
- $\exists$ u-v recorregut de longitud $k \Rightarrow \exists$ u-v camí de longitud $\leq k$ $\delta(G) \geq 2 \Rightarrow$ G té un cicle
- G es connex si $\forall u, v$ vèrtexs, hi ha un u-v camí $u \equiv_G v \Leftrightarrow \exists$ u-v camí a G. Les classes d'equivalència són $V_1, V_2, \dots, V_k$ i $\langle V_1 \rangle \cup \langle V_2 \rangle \dots \cup \langle V_k \rangle = G$ on $k(G)$: quantitat de cc d'un graf. Ordre $(G) = \sum_{i=1}^{k} |V_i|$, mida $(G) = \sum_{i=1}^{k}$ mida $\langle V_i \rangle$.
- v es un vèrtex de tall $\Leftrightarrow$ $k(G - v) > k(G)$
- G connex i v de tall $\Rightarrow$ G−v no és connex i té $\leq g(v)$ cc.
- a pont si $k(G-a) > k(G)$
- G connex i a aresta pont $\Rightarrow$ G−a no és connex, té 2cc.
- v de tall $\Leftrightarrow \exists$ u i w tals que tot u-w-camí passa per v
- a = uv aresta son equivalents si:
  ① a és pont
  ② $\exists$ x, y i tot x-y camí passa per a
  ③ a no es a cap cicle

* Poden haver vèrtexs de tall i no arestes pont :
  - $a = uv$ aresta pont $\Rightarrow$ $g(u)=1$ no és de tall
    $g(u) \geq 2$ és de tall

PRICIPI DEL COLOMAR " si hi ha més coloms que colomars, en algun colomer hi ha dos o més coloms"
r colomars i mes de $r \cdot s$ coloms $\Rightarrow$ en algun colomar hi ha $s+1$ o més coloms.
G te 13 vértexs i 3cc $\Rightarrow$ En algun cc hi ha almenys 5 vértexs, $13 > 3 \cdot 4$ $\rightarrow$ en algún cc hi ha 5 o més vèrtexs.
ex: $a \leq b \leq c$ ordres dels 3 cc $\Rightarrow a+b+c = 13 \Rightarrow c+c+c \geq 13 \Rightarrow 3c \geq 13 \Rightarrow c \geq \frac{13}{3} \geq 4{,}5 \Rightarrow c \geq 5$.

TEORIA 2/03/2022

TEMA 3: GRAFOS EULERIANOS

3.1. Grafos Hamiltonianos
Euler, Hamilton
Puentes de königsberg
Def.:
1. un sendero es euleriano si contiene todas las aristas
2. un circuito es euleriano si contiene todas las aristas
3. un camino es hamiltoniano si contiene todos los vértices
4. Un ciclo es hamiltoniano si contiene todos los vértices
5. G es un grafo euleriano $\Leftrightarrow$ G conexo i G tiene un circuito euleriano
6. G es un grafo hamiltoniano $\Leftrightarrow$ G tiene un ciclo hamiltoniano

TEOREMA EULER:
G conexo no trivial ($\neq N_1$)
G euleriano $\Leftrightarrow$ Todos los grados son pares.

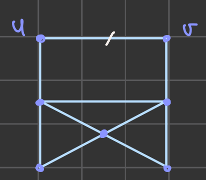
Demo: $\Rightarrow$) suponemos G euleriano $\Rightarrow \exists$ un ciclo que contiene todas las aristas una vez.
$x_0, x_1, \ldots, x_r, x_0$ $\rightarrow$ Todas las aristas (1 vez)
$\rightarrow$ Todos los vértices
- si $x_i \neq x_0$, cada vez que entramos en x_i salimos por una arista diferente. Por tanto: $g(x_i)$ es par
- x_0 : arista inicial + arista final + aristas intermedias $\Rightarrow g(x_0)$ par

$\Leftarrow$) orden $n \geq 3$ x_0 como los grados son pares: hay un ciclo que pasa por x_0
- si $G = C_0$: ya esta
- si $G \neq C_0$: existe un x_1 de C_0 con $g(x_1) \geq 4$ (par)
- si $G = C_0 \cup C_1$: ya esta $\Rightarrow$ G es la unión de varios ciclos

$\Rightarrow$) como antes

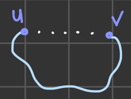
3.2. Corolario
G conexo, no euleriano
* G tiene un sendero euleriano $\Leftrightarrow$ G tiene xactamente dos vértices de grado impar (u, v)

En tal caso, el sendero euleriano empieza en u y acaba en v o al revés.



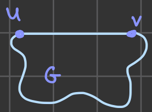
$u, \ldots, v, \cancel{u}$

Demo: $\Rightarrow$) como antes

$\Leftarrow$) a) $u \not\sim v$ 

$G + uv$ es conexo y todos los vértices tienen grado par

$\Downarrow$

b) $u \sim v$ 

$\exists$ un circuito euleriano : $u, \dots, v, u$ en $G + uv$

$\Downarrow$

$u, \dots, v$ es un sendero euleriano de G

Sea x un vértice nuevo : $x \notin V$

G': $V \cup \{x\}$

$A \cup \{xu, xv\}$

G' conexo y todos los vértices tienen grado par $\Rightarrow$ G euleriano : $x, u, \dots, v, x$ circuito euleriano de G'

$\Rightarrow$ $u, \dots, v$ sendero euleriano de G.

GRAFOS HAMILTONIANOS

$G = (V, A)$ grafo

* G es hamiltoniano $\Leftrightarrow$ G tiene un ciclo hamiltoniano (recorrido cerrado que pasa una vez por todos los vértices)

Tipos de condiciones :

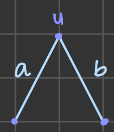
- NECESÁRIAS :

① G hamiltoniano $\Rightarrow$ G conexo $\wedge$ $n \geq 3$

② G hamiltoniano $\Rightarrow$ $\forall v \in V$ $g(v) \geq 2$

③ G hamiltoniano $\Rightarrow$ G no tiene v.a.

④ G hamiltoniano $\Rightarrow$ $G - \{k \text{ vértices}\}$ tiene $\leq k$ c.c.



Obs: si hay vertices u tal que $g(u) = 2$ y G es hamiltoniano, todos los ciclos hamiltonianos pasan por a y por b.

- SUFICIENTES : condicion S $\Rightarrow$ G hamiltoniano

* Teorema de Ore : si para cada $u, v \in V$, $u \not\sim v$ se cumple $g(u) + g(v) \geq n$ entonces G hamiltoniano.
* Teorema de Dirac : si para cada $u \in V$ $g(u) \geq \frac{n}{2}$ entonces G hamiltoniano

TEMA 4 : ARBOLES

$T = (V, A)$ es arbol $\Leftrightarrow$ T es conexo $\wedge$ T no tiene ciclos

T es un bosque $\Leftrightarrow$ los cc de T son arboles $\Leftrightarrow$ T aciclico

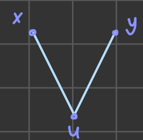
Propiedades :

① Todo arbol no trival ($\neq N_1$) tiene almenos un vértice de grado 1, sino todos los grados serian ≥ 2 y entonces T seria un ciclo.

② Todas las aristas son puente. si a no es puente entonces a está en un ciclo.

③ T-a tiene 2 cc

④ Todo vertice u tq $g(u) \geq 2$ es un vertice de corte



- si no : T-u es conexo $\Rightarrow$ en T-u hay x-y camino $\Rightarrow$ en T hay un ciclo

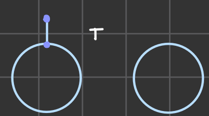
⑤ T-u tiene $g(u)$ cc , en particular : u hoja $\Rightarrow$ T-u arbol

⑥ T tiene tamaño $n-1$, t conexo $\Rightarrow$ $m \geq n-1$.

Inducción sobre n:

Base : $n = 1 \Rightarrow T = N_1$, $m = 0 = n-1$

Pas inductiu : H.I. cierto para árboles de orden n.



Sea T un árbol de orden n+1

Sea $u \in V(T)$ hoja ($g(u) = 1$)

Per H.I : tamaño $(T-u) = n-1$ $\Rightarrow$ tamaño (T) = Tam $(T-1) + 1 = n$

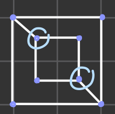
TALLER 15/03

3.4. Valors d'r i s perquè $K_{r,s}$ sigui eulerià

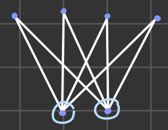
v de $K_{r,s}$ $\Rightarrow$ $g(v) = \begin{cases} r \\ s \end{cases}$ $\Rightarrow$ eulerià si r i s són parells

3.6. $\left.\begin{array}{l} g(v) \text{ parell } \forall v \\ G \text{ connex} \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ G no té arestes pont

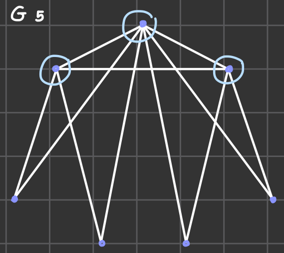
3.9 G_3



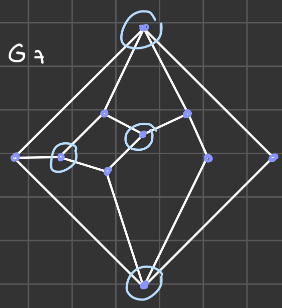
G_4



G_5



G_7



* vèrtex eliminats

sempre ens interessa eliminar els vèrtexs de major grau

"TIPS" DE TEORIA

G connex i no trivial

$\Rightarrow$ G eulerià $\Leftrightarrow$ tots els vèrtexs tenen grau parell

camí hamiltonià
cicle hamiltonià } els quals passen per tots els vèrtexs

$\Rightarrow$ G hamiltonià si té un cicle hamiltonià

CONDICIÓ NECESSÀRIA (val per demostrar que NO) $\rightarrow$ G hamiltonià $\begin{cases} g(v) \geq 2 \\ S \subset V \text{ i } |S| = k \Rightarrow G-S \text{ té com a molt } k \text{ cc.} \end{cases}$

3.10. G bipartit hamiltonià $\Rightarrow$ les parts estables tenen el mateix cardinal

V_1 i V_2 parts estables $|V_1| = r \wedge |V_2| = s$

$\left.\begin{array}{l} G - V_1 \text{ té } s \text{ cc} \Rightarrow s \leq r \\ G - V_2 \text{ té } r \text{ cc} \Rightarrow r \leq s \end{array}\right\}$ $s = r$

3.11. G hamiltonià $\Rightarrow$ $r = s$ (3.10), $K_{r,r} \Rightarrow$ hamiltonià?

$u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_r v_r u_1$ cicle

$\{u_1, \dots, u_r\} = V_1$

$\{v_1, \dots, v_r\} = V_2$

"TIPS" DE TEORIA

CONDICIONS SUFICIENTS

1) ORE

$\left.\begin{array}{l} n = \text{ordre}(G) \geq 3 \\ u, v \text{ no adyacents } g(u) + g(v) \geq n \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ G hamiltonià

2) DIRAC

$\left.\begin{array}{l} n = \text{ordre}(G) \geq 3 \\ \forall v \in V,\ g(v) \geq n/2 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ G hamiltonià

CONDICIÓ NECESSÀRIA (val per demostrar que NO) $\rightarrow$ G hamiltonià $\Rightarrow$ $\begin{cases} g(v) \geq 2 \\ S \subset V \text{ i } |S| = k \Rightarrow G-S \text{ te com a molt } k \text{ cc.} \end{cases}$

3.16. ordre $(G) \geq 2$

$g(v) \geq \frac{n-1}{2}$

dem: que G té un camí hamiltonià

Considerem $G + z$

$z \notin V$ i $G + z$ té totes les arestes vz amb $v \in V$.

$\left.\begin{array}{l} g(z) = n \geq \frac{n+1}{2} \Leftrightarrow 2n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1 \\ v \neq z \Rightarrow g_{G+z}(v) \geq \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2} \end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ Per DIRAC $G+z$ hamiltonià $z v_1 v_2 \dots v_n z$ cicle hamiltonià

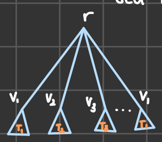
TEORIA 16/03

Prop $T=(V,A)$ árbol de orden $n \Rightarrow$ tam. $= n-1$.

* Todo arbol tiene almenos dos hojas

Obs. sea $\Delta = \Delta(T)$ = grado máximo

sea $r \in V(T) : g(r) = \Delta$



Cada árbol T_i tiene almenos 2 hojas

Conclusión T tiene almenos una hoja

* TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN DE LOS ÁRBOLES $T=(V,A)$ grado de orden n, tamaño m son equivalents:

1. T conexo y acíclico (árbol)
2. T acíclico y $m=n-1$
3. T conexo y $m=n-1$
4. T conexo y toda arista es puente
5. $\forall u,v \in V$ existe un único u-v camino
6. T acíclico y para toda $a \notin A$ $T+a$ tiene exactamente un ciclo

1) $\Rightarrow$ 2) ya está

2) $\Rightarrow$ 3) Hip: T acíclico $\wedge$ $m=n-1$

Tesis: T conexo

$T_1, T_2, T_3, \dots, T_k$ cc de T

Cada T_i es árbol : $m_i = n_i - 1$; $i=1,\dots k$

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n-k \overset{\text{HIP.}}{=} n-1 \Rightarrow k=1$$

3) $\Rightarrow$ 4) Hip: T conexo $\wedge$ $m=n-1$

Tesis: Toda arista es puente

$a \in A(T)$, $m(T-a) = m(T)-1 = n-1-1 = n-2 < n-1 \Rightarrow T-a$ no conexo $\Rightarrow$ a es puente

★ $m \geq n-1 \Rightarrow G$ conexo

$m \leq n-2 \Rightarrow G$ no conexo

4) $\Rightarrow$ 5) Hip: T conexo $\wedge$ toda $a \in A$ es puente

Tesis: $\forall u,v \in V$ $\exists!$ u-v camino

$u,v \in V$

T conexo $\Rightarrow \exists$ u-v camino

Si hay 2 caminos diferentes, entonces T tiene un ciclo $\Rightarrow$ las aristas del ciclo no son puente

5) $\Rightarrow$ 6) Hip. $\forall u,v \in V$ $\exists!$ u-v camino

Tesis: T acíclico

$a \notin A \Rightarrow T+a$ tiene exactamente 1 ciclo

Si T tiene un ciclo habría dos vértices u,v con más de un u-v camino

Hip. $\Rightarrow T$ conexo

6) $\Rightarrow$ 1) Hip: T acíclico $\wedge$ $T+a$ exact. 1 ciclo

Tesis: T conexo $\wedge$ T acíclico

$u,v \in V$

$u \sim v$ ya esta

$u \nsim v \Rightarrow T+uv$ tiene exact. 1 ciclo

4.1. ÁRBOLES GENERADORES

Un arbol generador de un grafo G es un subgrafo generador que es árbol

① Subgrafo generador

② Conexo
③ Acíclico $\Big\}$ Árbol

> TEOREMA G tiene un a.g $\Leftrightarrow$ G conexo

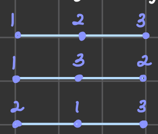
$\Rightarrow$) Obvio

$\Leftarrow$) G conex $\wedge$ G acíclico $\Rightarrow$ G árbol (es a.g de si mismo)

Si G tiene ciclos : sea $a \in A(G)$ de un ciclo a no es puente $\Rightarrow$ $G-a$ conexo

* Enumeración de árboles (etiquetas)

ej: $V = \{1,2,3\}$

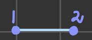


$V = \{1,2,\dots,n\} = [n]$

> TEOREMA DE CAYLEY $n \geq 3$

Hay n^{n-2} árboles etiquetadas de orden n

$n=1$ N_1 

$n=2$ K_2 

* Árboles etiquetadas con $V=\{1,\dots,n\}$ $\to$ V^{n-2} sequència de Prüfer

- $T \to (a_1,\dots,a_{n-2})$

ÁRBOL $\Rightarrow$ SEC. DE PÜFER

$T_1 = T$, $k=1$ mientras $k \leq n-2$

b_k = hoja mínima de T_k $\quad a_k \sim b_k$

$T_{k+1} = T_k - \{b_k\}$ $\quad k = k+1$

ej: $T_3 = ([11], \{12,13,24,25,36,37,48,49,5\text{-}10,5\text{-}11\})$

$(3,3,1,2,4,4,2,5,5)$ long. 9

Observaciones:

① Cada T_k es árbol

② Los b_k's son diferentes pero las a_k's no necesariamente

③ $x \in V$ aparece $g(x-1)$ veces

④ Las hojas no aparecen

- $T \to (a_1,\dots,a_{n-2})$

SEC. DE PÜFER $\Rightarrow$ ÁRBOL

$(a_1,a_2,\dots,a_{n-2}) \in V^{n-2}$

$a_{n-1} = n$, $A_0 = \emptyset$, $k=1$, mientras $k \leq n-1$

$b_k = \min(V - (\{a_k, a_{k+1},\dots,a_{n-1}\} \cup \{b_1,\dots,b_{k-1}\}))$

$A_{k+1} = A_k \cup \{a_k b_k\}$ $\quad k = k+1$

ej: $b_1 = \min(V - \{3,1,2,4,5,11\} \cup \{\}) = 6$

$b_2 = \min(V - \{3,1,2,4,5,11\} \cup \{6\}) = 7$

$b_3 = \min(V - \{3,1,2,4,5,11\} \cup \{6,7\}) = 3$

TEORIA 21/03

PARCIAL 11/2020

$G = (V, A)$ graf d'ordre n i mida m

$V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$G^* = (V^*, A^*)$

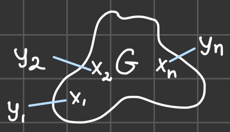
$V^* = V \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

$A^* = A \cup \{x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n\}$

a) $\text{ordre}(G^*) = 2n$

$\text{mida}(G^*) = m+n$

sec de $G = (d_1, \dots, d_n) \Rightarrow$ sec de $G^* = (d_1+1, \dots, d_n+1, \overbrace{1, \dots, 1}^{n})$



b) $G = C_n \quad n \geq 3$

$r(C_n^*)$, $D(C_n^*)$

En C_n $\quad e(x_i) = \lfloor n/2 \rfloor$

$r(C_n) = D(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$

En C_n^* $\quad e(x_i) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$

$e(y_i) = \lfloor n/2 \rfloor + 2$

$r(C_n^*) = \lfloor n/2 \rfloor + 1$

$D(C_n^*) = \lfloor n/2 \rfloor + 2$

$n \geq 3$ C_n^* bipartito $\Leftrightarrow$ C_n bipartito $\Leftrightarrow n$ par

$n \geq 1$ K_n^* bipartit? K_n bipartit $\Leftrightarrow n = 2$

K_2 —— $= K_{1,1}$

$n \geq 3$ K_n^* no bipartit

$n = 2$ K_2^* $\underbrace{\quad}_{K_2}$ sí

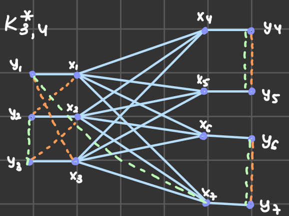
$n = 1$ K_1^* —— sí

c) G conexo con 3 aristas puente

aristas puente de $G^* = n+3$ (las 3 + x_iy_i)

vèrtices de corte de $G^* = n$ ($x_1, \dots, x_n$)

d) $K_{3,4}^*$



+5 arestas → euleriano

+4 arestas → hamiltoniano

e) $x_1, \dots, x_7, y_1, \dots, y_7$

DFS $x_1, x_4, x_2, x_5, x_3, x_6, y_6, x_7, y_7, y_3, y_5, y_2, y_4, y_1$

BFS $x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, y_1, x_2, x_3, y_4, y_6, y_6, y_7, y_2, y_3$

- TEMA 5 : MATRICES, SISTEMAS, DETERMINANTES -

K cuerpo $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p$ (p primo), ...)

$M_{m\times n}(K)$: conjunto de matrices con m filas, n columnas. $A = (a_{ij})\,_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$

$M_n(K)$: matrices cuadradas $m = n$

Tipos:

1. Nula $0_{m\times n}$
2. Identidad $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M_n(K)$
3. Diagonal $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$
4. Triangulares
   - → SUPERIORES $\begin{pmatrix} \diagdown & * \\ 0 & \diagdown \end{pmatrix}$ $a_{ij} = 0$ si $i > j$
   - → INFERIORES $\begin{pmatrix} \diagdown & 0 \\ * & \diagdown \end{pmatrix}$ $a_{ij} = 0$ si $i < j$

Operaciones:

* Suma : $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ $\Rightarrow A + B = (a_{ij} + b_{ij})$
* Producto escalar : $\lambda \in K$, $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})$

Propiedades:

1. Asociativa $(A+B)+C = A+(B+C)$
2. Commutativa $A+B = B+A$
3. Elemento neutro $A + 0 = A$
4. Inversos : dada A existe A' tal que $A + A' = 0$, $A = (a_{ij}) \Rightarrow A' = (-a_{ij}) = (-1)A = -A$
5. Distributiva :
   - $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
   - $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
   - $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$
   - $1 \cdot A = A$

TALLER 19/04/2022

* Sistema d'equacions lineals

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 7 \\ x + y - z &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

$\left.\begin{array}{l} r(A) = r(A') = 2 \\ 3 \text{ incognites} \end{array}\right\}$ C.I amb $3-2 = 1$ grau de llibertat

RESUM TEORIA:

$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$; A té m files (equacions) i n columnes (incognites)

→ matriu del sistema ; $A' = (A \,|\, b) \Rightarrow$ matriu ampliada

* TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBÉNIUS

Rang (A) = Rang $(A') = r \Rightarrow$ sistema compatible
- $r = n \Rightarrow$ compatible Determinat
- $r < n \Rightarrow$ sistema compatible indeterminat amb $n-r$ graus de llibertat

Rang $(A) <$ Rang $(A') \Rightarrow$ sistema incompatible.

ÀLGEBRA LINEAL

1. MATRIUS I VECTORS

1.2. Espai vectorial $\mathbb{R}^n$ ← siendo n la dimensión

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow$ vector real

* Anomenem espai vectorial $\mathbb{R}^n$ al conjunt $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Suma de vectors

$x = (x_1, \dots, x_n)$
$y = (y_1, \dots, y_n)$ $\Rightarrow x + y = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$

Propietats

1) Associativa: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $(x+y)+z = x+(y+z)$
2) Commutativa: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $x+y = y+x$
3) $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ compleix $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x + \vec{0} = \vec{0} + x = x \rightarrow$ Element neutre.
4) $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $-x = (-x_1, \dots, -x_n) \rightarrow x + (-x) = \vec{0}$.

Producte per un real

$x = (x_1, \dots, x_n)$
$\alpha \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$

Propietats

1) Distributiva $\forall x, y \in \mathbb{R}$ i $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \rightarrow \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$; $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
2) Pseudoassociativa $\forall x \in \mathbb{R}^n$ i $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \rightarrow (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
3) Llei d'identitat $\forall x \in \mathbb{R}^n \rightarrow 1x = x$

1.3. Espai vectorial de les matrius

matriu d'ordre $m \times n \in \mathbb{R}$, (m → files, n → columnes)

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$$

* matriu nula → tots els coeficients són 0.
* matriu fila → d'ordre $1 \times n$
* matriu columna → d'ordre $n \times 1$
* matriu transposada $A = (a_i^j) \Rightarrow A^t = (b_i^j)$ on $(b_i^j) = (a_j^i) \Rightarrow (A^t)^t = A$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
* matriu simètrica → quan $A = (a_i^j) = A^t$ $\quad$ A simètrica $\Leftrightarrow A = A^t \Leftrightarrow a_i^j = a_j^i \ \forall i, j$.
* matriu antisimètrica → quan $A = -A^t$ $\quad$ A antisimètrica $\Leftrightarrow A = -A^t \Leftrightarrow a_i^j = -a_j^i \ \forall i, j$.
* matriu quadrada → d'ordre $n \times n$
* matriu triangular superior → coeficients per sota de la diagonal són 0, $a_i^j = 0$ si $j > i$
* matriu triangular inferior → coeficients per sobre de la diagonal són 0, $a_i^j = 0$ si $i > j$
* matriu diagonal → $a_i^j = 0$ si $i \neq j$.
* matriu identitat → $a_i^j = 0$ si $i \neq j$ i $a_i^j = 1$ si $i = j$.

Suma de matrius

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & k \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+k \end{pmatrix}$

Propietats

1) Associativa $\forall A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $(A+B)+C = A+(B+C)$
2) Commutativa $\forall A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A+B = B+A$
3) La matriu nula compleix $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ $A+0 = 0+A = A$
4) $A = (a_i^j) \rightarrow (-1)A \Rightarrow A + (-1)A = 0 \Rightarrow$ oposada $\rightarrow -A$

Producte per un real

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$

Producte de matrius

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & k \end{pmatrix}$ $\Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bk \\ cx+dz & cy+dk \end{pmatrix}$

Per poder multiplicar dues matrius $A\ m \times n$ $\quad B\ \alpha \times \beta$ $\quad n = \alpha$ i la matriu resultant ha de ser $m \times \beta$

Propietats

1) Associativa $A(BC) = (AB)C$
2) Distributiva $A(B+C) = AB + AC$ i $(A+B)C = AC + BC$
3) Identitats $I_m A = A = A I_n$ $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$
4) Pseudoassociativa $\alpha(AB) = (\alpha A)B$

Proposició: La transposada d'un producte de matrius es el producte de les transposades en ordre invers $(AB)^t = B^t A^t$

2. SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

2.1. Solucions d'un sistema d'equacions lineals

Un sistema d'equacions lineals (o sistema lineal de n incògnites és un conjunt de m equacions

$$(*)\begin{cases} a_1^1 x^1 + \dots + a_n^1 x^n = b^1 \\ a_1^2 x^1 + \dots + a_n^2 x^n = b^2 \\ \vdots \\ a_1^m x^1 + \dots + a_n^m x^n = b^n \end{cases}$$

m eq. n incog. → m files n columnes → $m\times n$ mat. associada

* mat. ampliada → m files n+1 columnes

Si tot es sistema està igualat a 0 el sistema es homogeni.

Tipus de sistemes:

* sistema compatible (1 sol.)
  - sistema compatible determinat (una única solució)
  - sistema compatible indeterminat (més d'una solució)
* sistema incompatible (no té sol.)

2.2 El mètode de Gauss-Jordan

Pas 1) Es porta a la primera posició una equació amb coeficient de la incognita x^1 no nul

Pas 2) Es divideix la primera eq. pel coeficient de x^1 per obtenir un 1 a x^1.

Pas 3) Anar escalonant la matriu.

Discussió i resolució de sistemes escalonats reduïts

1) El s. conté una equació de tipus $0 = b$ amb $b \neq 0$ ⇒ S.I.

2) Si totes les incògnites són principals, el sistema escalonat reduït es de la forma $\begin{cases} x^1 = b^1 \\ x^2 = b^2 \\ \vdots \\ x^n = b^n \end{cases}$

⇒ S.C.D

3) Si existeixen incognites lliures i el sistema escalonat reduït és de la forma $\begin{cases} x_1 = -c_{n+1}^1 x^{n+1} - \dots + d^1 \\ x^2 = -c_n^2 + x^{n+1} - \dots + d^2 \\ \vdots \\ x^{\cdot} = -c_{n+1}^n x^{n+1} - \dots + d^n \end{cases}$

⇒ S.C.I trovem la solució asignant valors arbitraris

2.3. Rang d'una matriu = num. de files no nules

2.4. Teorema Rouché-Frobenius

* Un sistema es compatible si només si $rg(A) = rg(A|b)$.
* S.C.D si $rg(A) = rg(A|b) = n$.

3. MATRIU INVERSA

* matriu inversa

mat A i mat B diem que B es la inversa de A si $AB = BA = I_n \Rightarrow B = A^{-1}$

$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

Trovem la inversa de manera que $(A | I_n)$ ⇒ convertim A en la matriu identitat llavors $(I_n | A^{-1})$.

4. DETERMINANTS

Una matriu serà invertible ⇔ $\det(A) \neq 0$.

* mat. d'ordre 2: $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
* mat. d'ordre 3: $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

matriu adjunta: $Ad.(A) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_i^j)$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$Ad.(A) = \begin{pmatrix} (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Si hem de calcular el det. d'una matriu triangular inferior $\det(A) = \begin{vmatrix} a^1_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & 0 \\ \vdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix} = a^1_1 \cdot a^2_2 \cdots a^n_n$ (el producte dels elements de la diagonal.

Def. El det. d'una matriu quadrada A és la seva imatge per una aplicació $\det : M_{n\times m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que compleix : 1) MULTI LINEAL : si multiplicas una fila/columna por un entero k, el determinante será $\det(A)\cdot k$.
Si tienes una fila/columna expresada como una suma $A = \begin{pmatrix} a & b+c \\ d & e+f \end{pmatrix}$ $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$.

2) ALTERNADA : si es canvien files o columnes per facilitar el càlcul del det. es canvia el signe del determinant.

3) $\det(I_n) = 1$

* Si A → té una columna/fila de 0 valors $\det(A) = 0$
→ té dues columnes/files iguals $\det(A) = 0$
→ si sumem una combinació lineal de les altres files/columnes a una fila/columna, el det. no varia

Inversa de A : $A^{-1} = \frac{A}{|A|} \cdot (Adj)^t$ * signes matriu adjunta $(-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$Rg(A) = Rg(A^t)$

4.1. Regla de Cramer (resolució de sistemes per det.)

Tenim $x + y + z = b \Rightarrow x = \frac{|A'|}{|A|}$ on A' es a on $x \leftrightarrow b$.

5. BASES DE $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{\begin{array}{l} P_B^{B'} = P_C^{B'} \cdot \underbrace{(P_C^{B})^{-1}}_{P_B^C} \\ (P_B^{B'})^{-1} = P_{B'}^{B} \end{array}}$$

5.1. Rang i independència lineal

* si $rg = k \neq 0 \Rightarrow$ vectors són independents
* si $rg = 0 \Rightarrow$ vectors són dependents

A $\mathbb{R}^n$ el màxim nombre de vectors independents és n.

Exercicis :

①
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

②
$$\begin{cases} 5x + 2y - z = 2 \\ x - y + 3z = 8 \\ -2x + 3y + 2z = -3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & -7 & 16 & 38 \\ 0 & 1 & 8 & 13 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 72 & 129 \end{array}\right) \quad z = \frac{43}{24}, \quad y = 13 - 8\left(\frac{43}{24}\right), \quad x = 8 + \left(13 - 8 \cdot \frac{43}{24}\right) - 3 \cdot \frac{43}{24}$$

③ $\mathbb{R}^4$

$u = (13, -41, 35, -9)$
$v = (1, 3, -5, 2)$ $\Rightarrow u = \alpha \cdot v + \beta \cdot w$ $(13, -41, 35, -9) = \alpha \cdot (1, 3, -5, 2) + \beta (4, -4, 0, 1)$
$w = (4, -4, 0, 1)$

$$\begin{matrix} 1 & 4 & 13 \\ 3 & -4 & -41 \\ -5 & 0 & 35 \\ 2 & 1 & -9 \end{matrix} \qquad \begin{cases} \alpha + 4\beta = 13 \\ 3\alpha - 4\beta = -41 \\ -5\alpha = 35 \\ 2\alpha + \beta = -9 \end{cases}$$

$-5\alpha = 35 \rightarrow \alpha = -7$
$-7 + 4\beta - 13 = 0$
$4\beta - 20 = 0 \rightarrow \beta = 5$

son linealment dependents