P1. G mida 8

vertes u i v $\Rightarrow g(u) = 3$ i $g(v) = 4$

a) Ordre i seq. de graus

$\Sigma g(u) + \Sigma g(v) = 2m \Rightarrow 3x + 4y = 16$

El nombre de vèrtexs senars ha de ser parell per tant x ha de ser parell. $0 \leq x \leq 4$

$n = x + y$

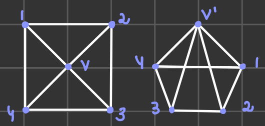
Suposem que $x = 4 \Rightarrow 3 \cdot 4 + 4y = 16 \Rightarrow 4y = 4 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$ podria ser correcte $n = 5$ (4,3,3,3,3)

suposem que $x = 2 \Rightarrow 3 \cdot 2 + 4y = 16 \Rightarrow 4y = 10 \Rightarrow$ no pot ser ja que $4 \nmid 10$.

suposem que $x = 0 \Rightarrow 4y = 16 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow n = 0 + 4$ no pot haber vèrtexs de grau 4 en $n(G) = 4$.

Sol. : $n = 5$ (4,3,3,3)

b)



si tenim un graf G tq $n(G) = 5 \Rightarrow \exists! \, v \in V$ adjacent a tots els altres.

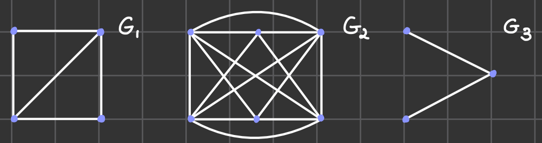
Si fem $G - v$ obtenim un graf 2 regular $\Rightarrow$ un cicle en aquest cas C_4.

G no pot ser la unió de dos cicles per que $n \geq 6$. Per tant la unica opció per aquest cas es afegir a un cicle d'ordre 4 un vertex adyacent a tots els altres, per tant G és isomorf a una roda d'ordre 5 W_5.

P2 $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$

On $m(G_1) = 5$ $n(G_1) = 4$, G_2 graf complet d'ordre 6 i G_3 graf isomorf a un bipartit complet $K_{1,2}$

a) Vèrtexs de tall i arestes pont de G.



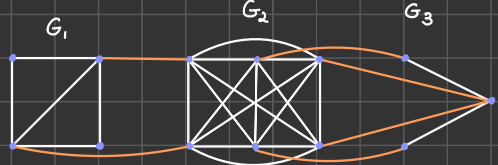
El component G_1 no té cap vèrtex de tall ja que si eliminem un vèrtex obtenim un C_3 o T_3 tots dos connexos. Tampoc té arestes pont ja que totes son d'un cicle d'ordre 3.

El component connex G_2 no te vèrtexs de tall ja que si eliminem un vèrtex obtenim un K_5 connex i no té arestes pont ja que totes pertanyen a cicles d'ordre ≥ 3.

El component connex G_3 té un vèrtex de tall de grau 2 i dues arestes pont.

G té un vèrtex de tall i dues arestes pont.

b) Un graf és eulerià si és connex i tots el vèrtexs tenen grau parell $\Rightarrow$ 6 arestes

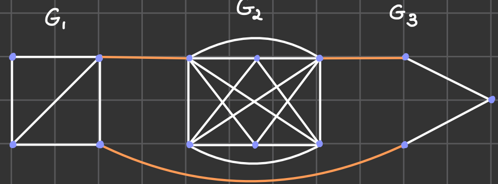


c) Un graf hamiltonià si té un cicle hamiltonià $\Rightarrow$ cicle que passa per tots els vèrtexs de G.

3arestas

Hamiltonia :

* condició necessària $g(v) \geq 2$.



P3. Sigui G un graf d'ordre n i mida m. Sabem que si es suprimeix una de les arestes s'obté un graf isomorf a G^c.

a) $G - a \cong G^c$ $G = m \Rightarrow G - a = m - 1$

$G - a \wedge G^c$ tenen la mateixa mida

$m(G_c) = \frac{n(n-1)}{2} - m$ ← mida màx.

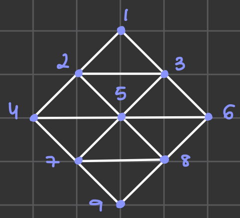
← restas la mida de G.

$m - 1 = \frac{n(n-1)}{2} - m$

$m = \frac{n(n-1)+2}{4}$

P4. $G=(V,A)$ on $V=[9]$ i $A=\{12,13,23,24,25,35,36,45,47,56,67,58,68,78,79,89\}$

a) Excentricitat, diàmetre, radi i centre



L'excentricitat d'un vèrtex és el màx. de les distàncies amb els altres.

$e(1) = e(9) = 4$

$e(2) = e(3) = e(7) = e(8) = 3$

$e(4) = e(6) = 2$

$e(5) = 2$

VÈRTEX	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ECENT	4	3	3	2	2	2	3	3	4

$D(G)$ = màx. de les excentricitats = 4.

$r(G)$ = mín. de les excentricitats = 2.

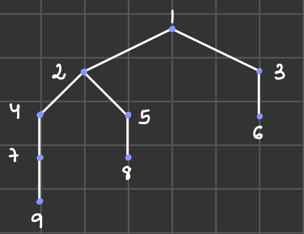
Vèrtexs centrals = vèrtexs d'excentricitat mínima = 4, 5 i 6

El centre de G és el subgraf induït pels vèrtexs centrals $\Rightarrow G = (\{4,5,6\}, \{45, 56\})$.

b) Arbre generador T obtingut pel BFS començant per $v=1$.

TAULA ADYACÈNCIES

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\cancel{2}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	$\cancel{2}$	3	$\cancel{4}$	5	7
$\cancel{3}$	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	$\cancel{5}$	$\cancel{3}$	5	$\cancel{5}$	6	8
	$\cancel{4}$	$\cancel{5}$	$\cancel{7}$	$\cancel{4}$	8	$\cancel{8}$	7	
	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$		$\cancel{6}$		$\cancel{9}$	9	
				$\cancel{7}$				
				$\cancel{8}$				



$(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$

c) Seq. de Prüfer de T

arbre	min{fulles}	Penja de:
$T_0 = T$	6	3
$T_1 = T_0 - 6$	3	1
$T_2 = T_1 - 3$	1	2
$T_3 = T_2 - 1$	8	5
$T_4 = T_3 - 8$	5	2
$T_5 = T_4 - 5$	2	4
$T_6 = T_5 - 2$	4	7

seq. de Prüfer
$(3,1,2,5,2,4,7)$

P1. a) G ordre$(G) = n$ mida$(G) = m$ $a = xy \in G$

	$G-x$	$G-a$	$G-\{x,y\}$	G^c
ordre	$n-1$	n	$n-2$	n
mida	$m-g(x)$	$m-1$	$m-g(x)-g(y)+1$	$\frac{n(n-1)}{2}-m$

b) Def. graf bipartit: Sigui $G=(V,A)$ és bipartit si existeixen dos conjunts no buits tq $V = V_1 \cup V_2$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i únicament $V_1 \sim V_2$ ($V_1 \nsim V_1 \wedge V_2 \nsim V_2$).

Caracterització. G és bipartit $\Leftrightarrow n \geq 2 \wedge$ no conté cicles de longitud senar.

c) Demostra que si tots els vèrtexs de G tenen $g(v) \geq 2 \Rightarrow G$ conté algún cicle.

Per demostrar-ho trovaré un cicle a G. Sigui $v_0 \in V$ $g(v_0) \geq 2$ per tant es adyacent a un altre vèrtex v_1 tq $g(v_1) \geq 2$ per tant v_1 es adyacent a un altre vèrtex $v_2 \neq 0$ tq $g(v_2) \geq 2$ que o bé és adyacent a v_0 i ja hauriem trovat un cicle o bé podem allargar el camí tq $v_0 v_1 \dots v_i \Rightarrow g(v_i) \geq 2 \Rightarrow$ si $v_i \sim v_k \in \{v_0, v_1 \dots v_{i-2}\}$ el graf conte un cicle $v_k v_{k+1}, \dots, v_i v_k$.

P2. Considerem $G_1 = (V_1, A_1) \wedge G_2 = (V_2, A_2)$ d'ordres $n_1 \wedge n_2$ tq $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i siguin $w, w' \notin V_1 \cup V_2$

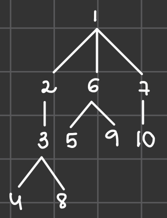
Definim $G = (V,A)$: $V = V_1 \cup V_2 \cup (w, w') \wedge A = A_1 \cup A_2 \cup \{wv : v \in V_1 \cup V_2\} \cup \{w'v : v \in V_1 \cup V_2\}$. Es a dir $G = G_1 \cup G_2$ afegint dos vèrtexs adicionals w, w' adyacents a tots els vèrtexs de $G_1 \wedge G_2$.

a) $D(G)$, $r(G)$, vèrtexs centrals i arestes pont de G.

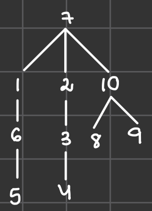
Tots els vèrtexs de G tenen excentricitat 2 per def. de G ja que $x \in V_1 \cup V_2$ $d(w,x) = 1 \Rightarrow d(w,w') = 2$ wxw' $\Rightarrow$ si tenim $x \in V_1 \wedge x \in V_2$ $\exists xwy$ a G $\Rightarrow d(x,y) = 2 \Rightarrow D(G) = 2$ $r(G) = 2$ i tots els vèrtexs de G són centrals. G No té arestes pont pq totes les arestes de G pertanyen a algún cicle (ex: $xwyx$).

P1. G connex $\Rightarrow \forall u,v \in V \; \exists$ un camí u-v a $G \Rightarrow$ 1 única component connexa $\Rightarrow$ consecuentment $g(v) \geq 1$ com a mínim $\Rightarrow$ v adyacent a un vértex com a mínim $\Rightarrow$ pertant $m \geq n-1$

P2. a)



$(1,2,6,7,3,5,9,10,4,8)$



$(7,1,2,10,6,3,8,9,5,4)$

b) $G_n \Rightarrow$ 3cc un isomorf a T_n un altre a C_n i el tercer a K_n per $n \geq 3$. Calcula el mínim nº d'arestes que cal afegir a G_n per que sigui eulerià segons la paritat de n.