TEMA 1: CONCEPTES BÀSICS DE GRAFS

① PRIMERES DEFINICIONS

* Un graf $G=(V,A)$. És un parell ordenat on V és un conjunt finit no buit i A és un conjunt de parells no ordenats d'elements diferents de V.

vèrtexs → elem. de V ; ordre de G $(|V|)$ = nº de vèrtexs

arestes → elem. de A ; mida de G $(|A|)$ = nº d'arestes

* siguin $u,v \in V$ i $a,e \in A$:

a. u i v adjacents → $uv \in A$ → $u \sim v$ (independents $u \nsim v$)

b. u i e incidents → $e = uw$, per algun $w \in V$

c. e i a incidents → tenen un vertex en comú

d. grau de u, $g(u)$ → nº vertex adjacents a u. ⇒ sigui $m=|A|$ i $n=|V|$ → $0 \leq m < \frac{n(n-1)}{2}$

* MATRIU D'ADJACENCIES: $M_A(G)$ $M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ i } a_j \text{ son adjacents} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$ $(n \times m)$

② GRAUS

* sigui $G=(V,A)$, $|V|=n$ i $v \in V$:

a. grau de v, $g(v)$ → nº d'arestes incidents a v.

b. grau mínim de G, $\delta(G)$ → min. dels $g(v)$, $\forall v \in V$

c. grau màxim de G, $\Delta(G)$ → max. dels $g(v)$, $\forall v \in V$

d. seqüència dels graus de G: succesió decreixent de tots els $g(v)$

Obs: $0 \leq g(u) \leq n-1$. Tot graf d'ordre ≥ 2 té almenys dos vèrtexs amb $g(u)$.

* Lema de les encaixades

$2|A| = \sum_{v \in V} g(v)$ ⇒ tot graf te un nombre parell de vèrtexs amb grau senar

③ ISOFORMISME DE GRAFS

* siguin $G=(V,A)$ i $G'=(V',A')$:

a. G i G' són iguals $(G=G')$ si $V=V'$ i $A=A'$

b. G i G' son isomorfs $(G \cong G')$ si existeix una aplicació bijectiva $f: V \to V'$ tq $\forall u,v \in V$ ⟺ $f(u)f(v) \in V'$

Propietats:

condicions necessàries:

› mateixa mida i ordre

› mateixa sequència de graus

* si $G \cong G'$ es una relació d'equivalència

④ TIPUS DE GRAFS

Graf nul N_n → ordre n, mida 0

Graf trajecte T_n → ordre n, mida $n-1$

Graf roda W_n → ordre n, mida $2n-2$ $(n \geq 4)$

Graf complet K_n → ordre n, mida $\frac{n(n-1)}{2}$

Graf cicle C_n → ordre n, mida n $(n \geq 3)$

* Graf r-regular: ordre n, $\forall u \in V$ tq $g(u)=r$ ⇒ $2|A| = r \cdot |V|$

* Graf bipartit: graf que es divideix en dues parts estables (no complet) → $\sum_{v \in V_1} g(v) = \sum_{u \in V_2} g(u) = |A|$

* Graf bipartit complet $(K_{r,s})$: tots els vèrtex de V_1 son adjacents als de V_2. Ordre $r+s$ i mida $r \cdot$

⑤ SUBGRAFOS

* Subgraf de G, $G'=(V',A')$, on $V' \subseteq V$ i $A' \subseteq A$

Subgraf generador de G, $G'=(V,A')$

Subgraf induït per $S \subseteq V$, $G[S]=(S,A')$, $A'=\{uv \in A : uv \in S\}$

5.1. SUBGRAFS DERIVATS D'UN GRAF

* Graf complementari de G, $G^c = (V,A^c)$ on $A^c = \{uv : u,v \in V \text{ i } uv \notin A\}$

↳ ordre G^c = ordre G, $(G^c)^c = G$.

↳ mida $G^c = \frac{n(n-1)}{2} - m$, $G \cong H$ ⟺ $G^c \cong H^c$

↳ Graf autocomplementari ⟺ $G \cong G^c$ (isomorfs)

* $G-S$, $S\subset V$ → $S=\{v\}$ → $G-v$ ⇒ ordre $G-v = n-1$ i mida $G-v = m-g(v)$
* $G-S$, $S\subset A$ → $S=uv=a$ → $G-a$ ⇒ ordre $G-a=n$ i mida $G-a=m-1$
* $G+a$, $a\in A$ → $A' = A\cup\{a\}$ ⇒ ordre $G+a=n$ i mida $G+a=m+1$
* Graf unió $G\cup G' = (V\cup V', A\cup A')$ ⇒ $G\cap G' = \emptyset$
* Graf producte $G\times G' = (V\times V', A')$ ⇒ ordre $G\times G' = |V|\cdot|V'|$ i mida $G\times G' = |V|\cdot|A'| + |V'|\cdot|A'|$
    - Adyacencias: $(u_1,v_1)\sim(u_2,v_2) \Leftrightarrow (u_1=u_2 \wedge v_1\sim v_2) \vee (u_1\sim u_2 \wedge v_1=v_2)$

TEMA 2: RECORREGUTS, CONNEXIÓ I DISTÀNCIA

① RECORREGUTS

$G=(V,A)$, $u,v\in V$

* u-v recorregut de longitud k és una seq de vèrtex adyacents ⇒ $R: v_0 v_1 \dots v_k$, si $v_0 = v_k$ rec. tancat
    - camí: tots els vèrtex son diferents
    - cicle: recorregut tancat de $k\geq 3$ sense repetir vèrtex

propietats:

> un cicle que passa per dos vèrtex u,v ⇔ hi ha dos u-v camins que no tenen cap vèrtex comú.
> si ∃ u-v recorregut de longitud k ⇒ ∃ camí u-v de longitud $\leq k$ que passa per vèrtex i arestes del recorregut
> si ∃ almenys dos u-v camins dif. ⇒ G conté algún cicle.

② GRAFS CONNEXOS

* $G=(V,A)$, G és connex si $\forall u,v\in V, \exists$ u-v camí
    - G connex i $|V|>1$ ⇒ $g(v)\geq 1$, $\forall v\in V$
* Relació d'equivalència R a V: $xRy \Leftrightarrow \exists$ x-y camí a G
* G NO connex ⇒ G dividit en $k>1$ components connexos tq $V_i\neq\emptyset$, $V_i\cap V_j=\emptyset$ ⇒ $V = V_1\cup V_2 \dots \cup V_k$
    - G_i connex i no hi ha camí entre $v\in G_i$ i $u\in G_j$ $i\neq j$ → $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$, $m=\sum_{i=1}^{k} m_i$

propietats:

> si G connex i $v\in V$ i $a\in A$ ⇒ $\begin{cases} \text{nº de cc de } G-u \leq g(u) \\ \text{nº de cc de } G-a \leq 2 \end{cases}$

> G connex d'ordre n i mida m ⇒ $m\geq n-1$
> G d'ordre n, mida m i k cc ⇒ $m\geq n-k$
> G és 2-regular ⇔ els seus cc son cicles

<u>ALGORISME DFS</u>: Calcular els vèrtexs del component connex d'un vèrtex. (vas fent una pila)

③ VÉRTEX DE TALL I ARESTES PONT

Def: Sigui $G=(V,A)$, $u,v\in V$ i $a\in A$
- → v es vèrtex de tall ⇔ $G-u$ té més cc que G
- → a es aresta pont ⇔ $G-a$ té més cc que G.

* G és 2-connex si és connex i no te vèrtexs de tall ($n\geq 3$)

Propietats:

> G connex i u vèrtex de tall ⇒ $G-u$: $2\leq$ nº cc de $G-u \leq g(u)$
> G connex i a aresta pont ⇒ $G-a$ te 2 cc.
> x vèrtex de tall v a aresta pont ⇔ x v.tall en el seu cc v a ar. pont en el seu cc.

Caracterització:

* G connex, u és vèrtex de tall ⇔ $\exists x,y\in V$, $x\neq y$ tq tot x-y camí passa per u.
* G connex, a és aresta pont ⇔ $\exists x,y\in V$, $x\neq y$ tq tot x-y camí passa per a. (a no es de cap cicle)

④ DISTÀNCIA

* Long. del x-y camí més curt → $d(x,y) = \begin{cases} \min\{\text{long. x-y camí}\} \\ \infty, \text{ si no connex} \end{cases}$
* Desigualtat triangular $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$ per un $z\in V$
    - Diàmetre: $\max\{d(v,u) : v,u\in V\}$
    - Excentricitat d'un vèrtex: $e(u) = \max\{d(u,v) : \forall v\in V\}$ (vèrtexs centrals ⇒ $e(u)$ mínima)
    - Ràdi: $r(G) = \min\{e(u) : u\in V\}$

Propietats :

> u vèrtex central $\Leftrightarrow e(u) = r(G)$

> $D(G) = \max\{e(u) : u \in V\}$

> $r(G) \leq D(G) \leq 2r(G)$

> G no connex $\rightarrow r(G) = D(G) = \infty$

ALGORISME BFS : calcular vertexs del cc + calcular distàncies respecte els diferents punts (cua)

⑤ GRAFS BIPARTITS

Sigui $G = (V, A)$ graf

* G és bipartit $\Leftrightarrow$ tot cicle de G té longitud parella
* G és bipartit $\Leftrightarrow$ no té cicles de longitud senar
* Si a G hi ha un recorregut tancat de long. senar $\Rightarrow$ hi ha un cicle de long. senar
* L'existència de recorreguts tancats de long. parella no assegura l'existència de cicles a G.

TEMA 3: GRAFS EULERIANS i HAMILTONIANS

① GRAFS EULERIANS

Sender : recorregut obert que no repeteix arestes

circuit: recorregut tancat que no repeteix arestes

sender eulerià: sender que passa per totes les arestes del graf

circuit eulerià: circuit que passa per totes les arestes del graf

* Graf eulerià : graf que conté almenys un circuit eulerià.

Propietats :

> G euleria $\Leftrightarrow$ tots els vèrtexs tenen grau parell i és connex

↳ Àlg. Fleury : trova circuit eulerià d'un graf. Comença a un vèrtex u i passem per les arestes no pont i després les eliminem.

> G té un sender $\Leftrightarrow$ G té exactament 2 vèrtexs de grau senar

② GRAFS HAMILTONIANS

camí hamiltonià : camí que passa per tots els vèrtexs de G

cicle hamiltonià : cicle que passa per tots els vèrtexs de G

* Graf hamiltonià : graf que conté almenys un cicle hamiltonià

Propietats :

∘ condicions necessàries :

> Ordre $(G) \geq 3$

> És connex

> no té v. tall

(2- connex)

> no té arestes pont

> $\forall u \in V \; g(u) \geq 2$ → $g(u) = 2$ les dues arestes incidents a u són de tot cicle hamiltonià

↳ $g(u) > 2$ un cicle ham. té exactamen 2 arestes incidents a u.

> Si suprimim k vèrtex de G, G-k té com a molts k cc.

∘ Condicions suficients :

> Teorema ore ($G = (V, A)$, ordre$(G) \geq 3$) $\forall u, v \in V$ si $u \not\sim v$ es compleix $g(u) + g(v) \geq n \Rightarrow$ G hamiltonià

> Teorema dirac ($G = (V, A)$, ordre $(G) \geq 3$) $\forall u \in V \; g(u) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow$ G hamiltonià

> Lema: ($G = (V, A)$, ordre$(G) \geq 3$) si $u \not\sim v$ i $g(u) + g(v) \geq n$ llavors G hamiltonià $\Leftrightarrow$ G+uv hamiltonià

TEMA 4: ARBRES

① ARBRES i TEOREMA DE CARACTERITZACIÓ

arbre: Graf connex acíclic

bosc: Graf acíclic on cada cc és un arbre

fulla: vèrtex de grau 1 (d'un arbre)

Propietats :

> G connex $\Rightarrow m \geq n-1$

> G acíclic $\Rightarrow m \leq n-1$

> $T=(V,A)$ arbre $\Rightarrow m=n-1$

> B bosc de k cc $\Rightarrow m=n-k$

> $T=(V,A)$ arbre d'ordre $\geq 2 \Rightarrow$ te almenys 2 fulles

* Per tant, $T=(V,A)$ és arbre si:
    - $\Rightarrow$ és bipartit ($n\geq 2$)
    - $\Rightarrow$ tota aresta es pont
    - $\Rightarrow$ $\forall u$ $g(u)\geq 2$, u vèrtex de tall (exp. fulles)
    - $\Rightarrow$ $T-a$ té 2cc
    - $\Rightarrow$ $T-u$ té $g(u)$ cc

* TEOREMA DE CARACTERITZACIÓ D'ARBRES Sigui $G=(V,A)$ d'ordre n i mida m, les següents són equivalents:
    - G arbre connex i acíclic
    - G connex i $m=n-1$
    - G acíclic i $m=n-1$
    - G connex i totes les arestes són pont
    - G acíclic i $G+a$ ($a\notin A$) té exactament 1 cicle
    - $\forall u,v\in V$ existeix un únic u-v camí.

② ARBRES GENERADORS

Def: un arbre generador de G és un subgraf generador que és un arbre.

$T=(V',A')$ és arbre gen. de G si
- $\rightarrow V'=V$
- $\rightarrow A'\subseteq A$
- $\rightarrow T$ és un arbre

Propietats:

> G té algún arbre generador $\Leftrightarrow$ G és connex

$\Rightarrow$) obvio

$\Leftarrow$) G connexo $\wedge$ G acíclico $\Rightarrow$ G arbol generador de si mismo

G cíclico $\Rightarrow$ sea $a\in A(G)$ de un ciclo a no es puente $\Rightarrow$ $G-a$ connexo

> G connex $\Rightarrow$ conté arbre generador $\Rightarrow$ $\begin{cases}\text{Tota aresta és d'un arbre generador}\\ \text{Les arestes pont són de tot arbre generador.}\end{cases}$

③ ENUMERACIÓ D'ARBRES

* El nº d'arbres generadors diferents del graf complet K_n es n^{n-2}
    - ↳ TEOREMA DE CAYLEY El nº d'arbres diferents d'ordre n amb conjunt de vèrtexs $V[n]=n^{n-2}$.
* seqüència de Püfer de T seq. de vèrtexs de T en què:
    - El vèrtex "i" apareix $g(i)-1$ vegades
    - Les fulles no apareixen