(Parcial 30% Final 50% o Final 80%) + Taller 20%

TEORIA 14/02/2022

1. SUCESIONES (Cotas, límites, monotonía)

Def. Una sucesión $(a_n) = a_1, a_2, \dots, a_n$ és una aplicación $a: D \to \mathbb{R}$ cuyo domínio D es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. La imagen de $n \in D$ por a se denota a_n, (a_n), $\{a_n\}$.

ejemplos: $\{n^2-3\}_{n=3}^{\infty}$

$a_n = \frac{1}{n} = 1, \frac{1}{2}, \dots \ \forall n$

$(a_n) = 2n = 2, 4, \dots \ \forall n$

Forma recurrente. $a_0, \dots, a_{k-1}$, $\forall n \geq k$ $\{a_n\}_{n \geq k}^{\infty}$

ej. Sucesión de fibonacci

$a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n+1} + a_{n-2}$

1.1. Cotas

Se dice que (a_n) está acotada si $\exists$ dos números P y Q tq $P \leq a_n \leq Q$ $\forall n$.

Siendo Q una cota superior y la menor de estas cotas és el supremo de (a_n).

Siendo P una cota inferior y la mayor de estas és el infimo de (a_n).

1.2. Límites

Una sucesión (a_n) converge hacia un límite finito x, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ cuando, dado $\varepsilon > 0$ tan pequeño como queramos $\exists N \in \mathbb{Z}$ tq $\forall n > N$ se verifica que $|a_n - x| < \varepsilon$ cauchy

* si una sucesión tiene límite $\Rightarrow$ converge
* Una sucesión tiende a $\pm\infty$ cuando $M>0$ tan grande como queramos $\exists N$ tq $\forall n > N$ $|a_n| > M \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_n > M \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \\ a_n < -M \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \end{cases} \Rightarrow \text{diverge}$$

* una sucesión que no converge ni diverge $\Rightarrow$ oscila

ej. Demuestra que $(1-\frac{1}{n})$ es convergente $a_n = 1-\frac{1}{n}$ $0 \leq a_n \leq 1$

Tenemos que $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = a_n + \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow a_{n+1} \geq a_n$

Propiedades:

① Las sucesiones convergentes són siempre acotadas. ej. $a_n = (-1)^n$

② El límite de una sucesión és único

③ Si $\lim\limits_n a_n = a$ y $\lim\limits_n b_n = b$

* $\lim\limits_n (a_n \pm b_n) = \lim\limits_n a_n + \lim\limits_n b_n = a+b$
* $\lim\limits_n (k a_n) = k \lim\limits_n a_n = ka$, k constante
* $\lim\limits_n (a_n b_n) = \lim\limits_n a_n \cdot \lim\limits_n b_n = a \cdot b$
* $\lim\limits_n \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_n a_n}{\lim\limits_n b_n} = \frac{a}{b}$, $\forall b \neq 0$, $b_n \neq 0$

④ Si $k > 1$, $\lim\limits_n k^n = \infty$

* Si $|r| < 1$ se verifica que $\lim\limits_n r^n = 0$
* Si la sucesion $c_n = a_n^{b_n}$ esta definida $\Rightarrow \lim\limits_n c_n = a^b$

⑤ Indeterminaciones : $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞, 0^0, ∞^0, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$

⑥ Si $\exists$ un natural N tq $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \geq N$ y $\lim_n a_n = a$, $\lim_n b_n = b$, $\lim_n c_n = c$

$\Rightarrow a \leq b \leq c$

⑦ Si $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $b_n \leq a_n \leq c_n$ $\forall n \geq N$ y $\lim_n b_n = \lim_n a_n = e$ $\Rightarrow$ $\lim_n a_n = e$ ← Teorema del sandwich

⑧ Si $\lim_n a_n = 0$ y (b_n) es acotada $\Rightarrow \lim_n a_n b_n = 0$

⑨ Si $\lim_n a_n = +\infty$ y (b_n) es acotada inferiormente $\Rightarrow \lim_n (a_n + b_n) = +\infty$

⑩ Si $\lim_n a_n = -\infty$ y (b_n) es acotada superiormente $\Rightarrow \lim_n (a_n + b_n) = -\infty$

⑪ Si el $\lim_n a_n = \pm\infty$ y (b_n) tiene cota inferior positiva $\Rightarrow \lim_n a_n b_n = \pm\infty$

1.2.1. Indeterminaciones

① $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ $\rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + a_1 n^3 + \dots}{1 + n + n^4}$

* Si grado $P(n) >$ grado $Q(n) \Rightarrow \lim = \pm\infty$
* Si grado $P(n) <$ grado $Q(n) \Rightarrow \lim = 0$
* Si grado $P(n) =$ grado $Q(n) \Rightarrow \lim =$ cociente de los coeficientes de los términos de mayor grado.

ej. $a_n = \frac{6n^3 + 4n + 1}{2n}$ $\lim_n a_n = \infty$

← n^2 mayor exponente

$b_n = \frac{n^2 - \cancel{6n - 2}}{3n^2 - \cancel{4n}}$ $\lim_n a_n = \frac{1}{3}$

② 1^∞ $\rightarrow$ $\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

* Si $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_n (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$

$\left.\begin{matrix} a_n \rightarrow 1 \\ b_n \rightarrow +\infty \end{matrix}\right\}$ $\lim_n a_n^{b_n} = \lim_n (1 + a_n - 1)^{b_n} = \lim_n \left[(1 + a_n - 1)^{\frac{1}{a_n - 1}}\right]^{b_n (a_n - 1)} = e^{\lim_n b_n (a_n - 1)}$

ej. $\lim_n \left(\frac{2n-1}{2n-2}\right)^{3n-1} = e^{\lim_n 3n-1 \left(\frac{2n-1}{2n-2} - 1\right)} = e^{\lim_n \frac{3n-1}{2n-2}} = e^{3/2}$

③ $0 \cdot \infty$ la pasamos a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ o 1^∞

$0 \cdot \infty \Rightarrow 1^\infty$ $\left.\begin{matrix} a_n \rightarrow 0 \\ b_n \rightarrow \infty \end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix} 1 + a_n \rightarrow 1 \\ b_n \rightarrow \infty \end{matrix}\right\}$ $\lim_n (a_n + 1)^{b_n} = e^{\lim_n b_n a_n} \Rightarrow \lim_n b_n a_n = \ln\left(\lim (1 + a_n)^{b_n}\right)$

④ 0^0 o ∞^0 se aplica logaritmo y se reduce a $0 \cdot \infty$

0^0 $\left.\begin{matrix} a_n \rightarrow 0 \\ b_n \rightarrow 0 \end{matrix}\right\}$ $\ln a_n^{b_n} = b_n \cdot \ln a_n$

∞^0 $\left.\begin{matrix} a_n \rightarrow \infty \\ b_n \rightarrow 0 \end{matrix}\right\}$ $\ln a_n^{b_n} = b_n \cdot \ln a_n$

ej. $c_n = \left(\frac{3-2n}{5-3n}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ $\lim a_n = \frac{2}{3}$

Sea $L = \lim_n c_n \Rightarrow \ln(L) = \ln\left(\lim_n \left(\frac{3-2n}{5-3n}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right) = \lim_n \left(\ln\left(\frac{3-2n}{5-3n}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right) = \lim_n \left(\frac{n}{n+1} \cdot \ln\left(\frac{3-2n}{5-3n}\right)\right)$

$= \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln(L) \Rightarrow L = \frac{2}{3}$

Resolución :

1. Halla el límite de : α^n $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_n \alpha^n = \begin{cases} \infty, & \alpha > 1 \\ 1, & \alpha = 1 \\ 0, & -1 < \alpha < 1 \\ \nexists, & \alpha \leq 1 \end{cases} \qquad \lim_n n^\alpha = \begin{cases} \infty, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}$$

Criterios para el cálculo del límite

1. Criterio de la raíz : Sea (a_n) : $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se cumple que :

$$\text{(i) Si } L<1 \Rightarrow \lim_n a_n = 0$$
$$\text{(ii) Si } L>1 \Rightarrow \lim_n |a_n| = \infty$$

2. Criterio del cociente : Sea (a_n) : $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tq $a_n \neq 0$ $\forall n > N$. Supongamos que $\lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

$$\text{(i) Si } L<1 \Rightarrow \lim_n a_n = 0$$
$$\text{(ii) Si } L>1 \Rightarrow \lim_n a_n = \infty$$

3. Criterio de la raíz cociente : Sea (a_n) : $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $a \neq 0$ $\forall n > N$ Si $\lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = L \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{a_n} = L$

$$(b_n) = \sqrt[n]{n} \quad a_n = n, \quad \lim_n \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \exists, \quad \lim_n \frac{n}{n-1} = 1 \Rightarrow \lim_n b_n = 1$$

4. TEOREMA DEL SANDWICH

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \quad n \in \mathbb{N}$$

Termino más grande ↗ ↖ Termino más pequeño

$$b_n = \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+s}} \Rightarrow \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant b_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_n \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_n \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \Rightarrow \lim_n b_n = 1$$

ej: $$\lim_n \frac{P_r(n)}{Q_s(n)} = \lim \frac{P_r n^r + \dots + P_1 n + P_0}{q_s n^s + \dots + q_1 n + q_0} \begin{cases} \pm\infty & r>s \\ \frac{P_r}{q_s} & r=s \\ 0 & r<s \end{cases}$$

DOSSIER PROBLEMAS

T2. ex 4.

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!}$, $|a|>1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\infty}{\infty}$ indeterminació $\Rightarrow$ critéri del cocient $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{n+1!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{a^{n+1}}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{a^n}} =$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n}$, $|a|>1$, $\alpha \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\infty}{\infty}$ Indeterminació $\Rightarrow$ critéri del cocient $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}}}{\frac{n^\alpha}{a^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n^\alpha} =$

$= \frac{1}{a} \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha = \frac{1}{a} < 1 \Rightarrow \lim_n \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$

T2. ex 5.

a) $\lim_n \frac{\cos n}{n^2} = 0$ ← grado denominador + grande

b) $\lim_n \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n} = \lim_n \frac{(2/3)^n + 1}{(2/3)^n - 1} = -1$

c) $\lim_n \frac{2^n}{n!} \Rightarrow \lim_n \frac{\infty}{\infty}$ indeterminació $\Rightarrow$ criteri del cocient $\lim_n \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \lim_n \frac{\cancel{2^{n+1}}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}} =$

$= \lim_n \frac{2}{n+1} = 0$

e) $\lim_n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left(\sqrt{\frac{n+1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_n (n+1 - \sqrt{n(n+1)}) \Rightarrow$ indet. $\infty - \infty$ multipliquem i dividim

pel complementari $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_n (n+1 - \sqrt{n(n+1)}) \cdot \frac{(n+1+\sqrt{n(n+1)})}{(n+1+\sqrt{n(n+1)})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_n \frac{(n+1)^2 - n(n+1)}{n+1+\sqrt{n(n+1)}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_n \frac{n+1}{n+1+\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_n \frac{1}{1+\sqrt{\frac{n\cancel{(n+1)}}{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_n \frac{1}{1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

1.3 Sucesiones monótonas

* (a_n) és creciente si $a_m \leq a_n$ $\forall m<n$ y es estrictamente creciente si $a_m < a_n$ $\forall m<n$.
* (a_n) és decreciente si $a_m \geq a_n$ $\forall m>n$ y es estrictamente decreciente si $a_m > a_n$ $\forall m>n$.

ej: $\left(\frac{n^2}{n+1}\right) = \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}$ és estrictamente creciente

$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right\}$ és monótona decreciente pero no és estríctamente decreciente.

TEOREMA DE CONVERGÉNCIA MONÓTONA

Toda suceσión monótona y acotada es convergente.

(i) si (a_n) es una suceσión creciente y acotada superiormente $\Rightarrow \lim_n (a_n) = \sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$

(ii) si (a_n) es una suceσión decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow \lim_n (a_n) = \inf\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$

RESUMEN SUCESIONES

1. si una suceσión tiene límite $\Leftrightarrow$ convergente
2. suceσiones convergentes són siempre acotadas
3. El límite de una suceσión convergente és único
4. Toda suceσión monótona y acotada es convergente

TALLER 17/02/2022

eloy.cabezas@upc.edu

1. VALOR ABSOLUTO

Def $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Propiedades

1. $|x| \geq 0$

   $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. Desigualdad triangular

   $|x+y| \leq |x| + |y|$

3. $|xy| = |x| \cdot |y|$
4. $a>0$, $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$
5. $a>0$, $|x|>a$: $x>a \vee x<-a$

Def. $x, y \in \mathbb{R}$

Distáncia eucldiana : $d(x,y) = |x-y|$

Def.
* k cota superior de $A \in \mathbb{R}$ si $\forall a \in A$ $a \leq k$
* k cota inferior de $A \in \mathbb{R}$ si $\forall a \in A$ $k \leq a$.
* A acotado superiormente si $\exists k$ cota superior
* A acotado inferiormente si $\exists k$ cota Inferior
* A acotado si A acotado superiormente e inferiormente

Def. $A \in \mathbb{R}$

supremo A : $s = \sup A$ si $\begin{cases} s \text{ es cota superior } (a \leq s \ \forall a \in A) \\ (s-\varepsilon) \text{ no es cota superior } \quad \varepsilon>0 \end{cases}$ si $s \in A \Rightarrow s$ és el máximo de A

infimo A : $i = \inf A$ si $\begin{cases} i \text{ es cota inferior } (i \leq a \ \forall a \in A) \\ (i+\varepsilon) \text{ no es cota inferior } \quad \varepsilon>0 \end{cases}$ si $i \in A \Rightarrow i$ és el mínimo de A

ej. $A = [-1, 2)$

A acotado ya que esta acotado tanto superior como inferiormente

$\sup A = 2$

$\inf A = -1 \in A \Rightarrow$ mínimo de A exemple : 3 MÈTODES

A) $\frac{x-1}{x+1} < 0$

$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \rightarrow x+1 = 0 \; ; \; x = -1$

$\frac{x-1}{x+1} = 0 \; ; \; x - 1 = 0 \; ; \; x = 1$

$(-\infty, -1) \quad (-1, 1) \quad (1, +\infty)$

$f(-2) > 0 \quad -1 \quad f(0) < 0 \quad 1 \quad f(2) > 0$

solució és trova en l'interval $(-1, 1)$

$-1 \qquad 1$

Acotado sup. e inf. $\Rightarrow$ A acotada $\begin{cases} \sup A = -1 \\ \sup A = 1 \end{cases}$

B) $\frac{x-1}{x+1} < 0$

$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x-1 > 0 \\ x+1 < 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x > 1 \\ x < -1 \end{matrix}$ intersección $\varnothing$

sol. $\varnothing \cup (-1, 1) \Rightarrow (-1, 1)$

$\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x < 1 \\ x > -1 \end{matrix}$ Intersección $(-1, 1)$

C) $\frac{x-1}{x+1} < 0$

$x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$ obtenemos $x - 1 < 0$, $x < 1$ sol. $(-1, 1)$ sol. $(-1, 1)$

$x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$ obtenemos $x - 1 > 0$, $x > 1$ sol. $\varnothing$

exemple : $\frac{1}{x+3} > \frac{1}{4}$

a) $x + 3 > 0$: $x > -3$

$4 > x + 3$

$4 - 3 > x$

$x < 1$

sol $(-3, 1)$

b) $x + 3 < 0$: $x < -3$

$4 < x + 3$

$4 - 3 < x$

$1 < x$

sol $\varnothing$

sol. $\varnothing \cup (-3, 1) \Rightarrow (-3, 1)$

A acotado superior e inferiormente

Sup A = 1

Inf. A = -3

exemple : $\frac{x-1}{x+1} \leq \frac{x+1}{x-1}$ * agafem els denominadors i els igualarem a 0

$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$(-\infty, -1) \quad (-1, 1) \quad (1, +\infty)$

$-1 \qquad 1$

1) $(-\infty, -1) \quad (x < -1)$

$(x-1)^2 \leq (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow 0 \leq 4x \Rightarrow 0 \leq x$ sol. $\varnothing$

2) $(-1, 1) \quad (-1 < x < 1)$

$(x-1)^2 \geq (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow -4x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{0}{-4} \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow$ sol $(-1, 0)$

3) $(1, +\infty) \quad (x > 1)$

$(x-1)^2 \leq (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq x^2 + 2x + 1 \Rightarrow -4x \leq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow$ sol. $(1, +\infty)$

R/: $(-1, 0] \cup (1, +\infty) = A$ No acotado superiormente $\rightarrow$ A no acotado $\nexists \sup A$, inf $A = -1$.

exemple : $x^2 + x = 0$

$x^2 + x = 0$

$x(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

$f(-2) > 0 \quad f(-\frac{1}{2}) < 0 \quad f(1) > 0$

$-1 \qquad 0$

Sol. $[-1, 0]$ A acotada

$\sup A = 0 \rightarrow 0 \in A \rightarrow 0$ max de A

$\inf A = -1 \rightarrow -1 \in A \rightarrow -1$ mín de A

exemple : $1 < x^2 < 4$

1) $1 < x^2 \rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

2) $x^2 < 4 \rightarrow x \in (-2, 2)$

$\Big\}$ sol. $x \in (-2,-1) \cup (1,2)$

A acotado. $\sup A = 2$ $\inf A = -2$ sin max ni min $2, -2 \notin A$

exemple : $|2x + 7| \geq 3$

$|x| < a \iff -a < x < a$

$|x| > a \iff x > a$ o $x < -a$

$2x + 7 \geq 3 \Rightarrow 2x \geq -4 \Rightarrow x \geq -2$ sol $[-2, +\infty)$

$2x + 7 \leq -3 \Rightarrow 2x \leq -10 \Rightarrow x \leq -5$ sol $(-\infty, -5]$

$\Big\}$ $(-\infty, -5] \cup [-2, +\infty)$

TEORIA 21/02/2022

SUCESIONES. PROBLEMAS

* TEOREMA DE CONVERGENCIA MONÓTONA : (a_n) monótona y acotada es convergente.

ej6. $\{a_n\}$ tal que $a_1 = -\frac{2}{3}$, $3a_{n+1} = 2 + a_n^3$ si $n \geq 1$

a) Probar que $-2 \leq a_n \leq 1 \ \forall n \geq 1$

Para $n = 1$ se cumple $-2 \leq a_1 \leq 1$

Por inducción. suponiendo que $-2 \leq a_n \leq 1 \Rightarrow$ tenemos que probar $-2 \leq a_{n+1} \leq 1$

$\Rightarrow (-2)^3 \leq (a_n)^3 \leq 1^3 \rightarrow -8 \leq a_n^3 \leq 1 \Rightarrow -6 \leq 2 + (a_n)^3 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq \frac{2 + (a_n)^3}{3} \leq 1 \Rightarrow -2 \leq a_{n+1} \leq 1$ cvd

b) Prueba que a_n es creciente

Queremos demostrar que $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \geq 1$

$3a_{n+1} = 2 + (a_n)^3 \Rightarrow 3a_{n+2} = 2 + (a_{n+1})^3$

Para $n = 1$ $a_2 = 0{,}56 \geq -\frac{2}{3} = a_1$, cierto.

suponemos que $a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow 2 + (a_{n+1})^3 \geq 2 + (a_n)^3 \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1} \Rightarrow \{a_n\}$ creciente. cvd.

c) Prueba que a_n es convergente y encuentra el límite.

Como a_n es monótona y acotada (a, b) és convergente.

$3a_{n+1} = 2 + (a_n)^3 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (a_{n+1}) = L \Rightarrow 3L = 2 + L^3$ por propiedades de límites $\Rightarrow L^3 - 3L + 2 = 0 \Rightarrow (L-1)^2(L+2) = 0$

$\Rightarrow L = 1$, $L = 2 \Rightarrow$ sabem que $-2 \leq a_n \leq 1$ i que $a_1 = -\frac{2}{3}$ i la sèrie es creixent per tant $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1}) = 1$.

ej1. Estudia la convergéncia de $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + (a_n)^2}$ $n \geq 2$.

Sabemos que $a_n \geq 0$. Queremos ver que $a_n \leq 2$.

Por inducción. Probamos $n = 1$, $a_1 = 1 \Rightarrow a_1 < 2$.

supongo que $a_n \leq 2$ y probamos que $a_{n+1} \leq 2$. $\Rightarrow 0 \leq a_n \leq 2 \Rightarrow a_n \leq 2 \Rightarrow (a_n)^2 \leq 2^2 \Rightarrow 4 + (a_n)^2 \leq 8$

$\Rightarrow \sqrt[3]{4 + (a_n)^2} \leq 2 \Rightarrow a_{n+1} \leq 2 \Rightarrow$ por inducción $a_n \leq 2$

2. FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

Def. Una función real de variable real es una aplicación $f: D \to \mathbb{R}$ donde $D \subseteq \mathbb{R}$ denominado dominio de f. Si a cada valor que puede tomar $x \in D$ corresponde exactamente un elemento $y \in \mathbb{R}$, donde y és una función de x y se escribe $y = f(x)$. Se dice que y es la imagen de x y x és la antimagen de y.

Propiedades

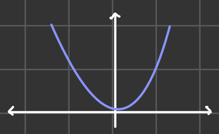
① f injectiva, exhaustiva y bijectiva

② Suponemos que $D \subseteq \mathbb{R}$ siempre que $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$. Una función $f \in D$ es
- PAR si $f(-x) = f(x)\ \forall x \in D$
- IMPAR si $f(x) = -f(x)\ \forall x \in D$

③ La gráfica de una función par és simétrica respecto al eje de las ordenadas y la de una función impar es simétrica respecto al origen.

ej: $f(x) = x^2 = (-x)^2$

$\Rightarrow f(x) = f(-x)$



$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

Cotas

Sea $f \in D$ y $A \subseteq D$

* Si $\exists k \in \mathbb{R} : f(x) \leq k\ \forall x \in A \Rightarrow k$ es una cota superior de f en A. La menor de las cotas superiores de A se denomina supremo.

* Si $\exists k \in \mathbb{R} : f(x) \geq k\ \forall x \in A \Rightarrow k$ es una cota inferior de f en A. La mayor de las cotas inferiores es el infimo.

Límites

Sea f una funcion uniforme definida $\forall x$ en un entorno de $x = x_0$ con la posible excepción de $x = x_0$ (o sea, en un entorno δ reducido de x_0 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ se dice que el número ℓ és el límite de $f(x)$ cuando $\lim\limits_{n} f(x) = \ell$ si $\exists \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in D$ y $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

* Sea $f \in D$ y $x_0 \in \mathbb{R}$: Todos los semientornos derechos (izquierdos) tengan puntos en D. El límite por la derecha (izquierda) determinado en x_0 es ℓ y se escribe $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$.

* Si $\exists$ límites laterales de f en $x_0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

* Estudiar propiedades del límite de funciones, casos indeterminadas del límite de funciones $\infty - \infty$, $0/0$, ∞/∞, 1^∞, ∞^0, 0^0, $0 \cdot \infty$.

Continuidad

Sea $f(x)$ definida y uniforme $\forall x$ próximo a x_0 como también para $x = x_0$ la función $f(x)$ se dice continua en $x = x_0$. Si y solo si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Esto es equivalente a decir que:

① Existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ y $\ell \in \mathbb{R}$

② Existe $f(x_0)$ es decir $f(x)$ debe estar definida en $x = x_0$.

③ $\ell = f(x_0)$

Si ① se verifica para ② y ③ no se dice que f tiene una discontinuidad evitable en x_0. En este caso se puede definir una función F por $F(x_0) = \ell$ y $f(x) = \begin{cases} F(x) & \forall x \in D : x \neq x_0 \\ F(x) \text{ para } x = x_0 \end{cases}$

* Si f no es contínua en x_0 y la discontinuidad no es evitable ⇒ es discontinuidad esencial en x_0. Si ∃ los límites laterales de $f(x_0)$ pero son números reales distintos ⇒ es discontinuidad de salto.
↳ Si ambos o uno de los límites laterales ∄ o son ∞ la discontinuidad es de segunda especie.

Esto es equivalente a decir que $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ y $\ell \in \mathbb{R}$.

2.1. Funciones elementales

Propiedades

① Las funciones elementales son continuas en su dominio de definición

② La suma, resta, producto por un escalar, producto y cociente (denominador $\neq 0$) de funciones contínuas en un punto son continuas en el punto.

③ La composicion de funciones continuas en un punto es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$ ⇒ $(g\circ f)$ es continua en x_0

2.2. Composicion de funciones

Sea $f \in D$ y g una función cuyo dominio contiene el recorrido de $f(D)$ de f. La composicion de f y g es la funcion $g\circ f$ definida por $(g\circ f)(x) = g(f(x))\ \forall x \in D$.

- Propiedad asociativa $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$
- No commutativa $(g\circ f)(x) \neq (f\circ g)(x)$
- Elemento neutro es la función identidad $I(x) = x\ \forall x$ $f\circ I = I\circ f = f$.
- $(f\circ f^{-1})(x) = (f^{-1}\circ f)(x) = I(x) = x\ \forall x$
- $(g\circ f)^{-1} = (f^{-1}\circ g^{-1})$

TALLER 24/02/2022

① $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>1 \\ 1 & \text{si } a=1 \\ 0 & \text{si } -1<a<1 \\ \nexists & \text{si } a=-1 \vee a<-1 \end{cases}$

② $\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>0 \\ 1 & \text{si } a=0 \\ 0 & \text{si } a<0 \end{cases}$

③ $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } P>Q \\ P/Q & \text{si } P=Q \\ 0 & \text{si } P<Q \end{cases}$

④ $\exists \lim_{n\to\infty} a_n \cdot c_n = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ c_n \text{ acotado} \end{cases}$

⑤ $(\sqrt{+\infty} - \sqrt{-\infty})$ ⇒ multiplicar y dividir por el conjugado

⑥ $(1^\infty) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n^{c_n} = 1^\infty = e^{\lim(b_n-1)c_n}$

⑦ CRITERIO DEL SANDWICH

$$\left.\begin{array}{l} a_n \geq c_n \geq b_n,\ \forall n \geq n_0 \\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

⑧ CRITERIO DEL COCIENTE

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Rightarrow \text{si } \begin{cases} L<1 & \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ L>1 & \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \end{cases}$$

⑨ CRITERIO DE LA RAÍZ-COCIENTE $(a_n \neq 0,\ \forall n \geq n_0)$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

⑩ CRITERIO DE LA RAÍZ

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \Rightarrow \text{si} \begin{cases} L<1 & \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \\ L>1 & \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty \end{cases}$$

ex: $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \Rightarrow$ crit. cocient $a_n = \frac{n!}{n^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cancel{n!}\, n^n}{(n+1)^{n+1}\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)} n^n}{(n+1)^{\cancel{n+1}}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \Rightarrow e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{e} < 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

ex: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^7}{7^n} \Rightarrow$ crit. cocient $a_n = \frac{n^7}{7^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^7}{\cancel{7^n}\cdot 7}}{\frac{n^7}{\cancel{7^n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^7}{7n^7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^7+\dots}{7n^7} = \frac{1}{7} < 1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^7}{7^n} = 0$

ex. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{n^n}} \Rightarrow$ Raíz-cocient $a_n = \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{a_n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{(n+2)}\cancel{(n+3)}\dots\cancel{(2n)}(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}\dots\cancel{(2n)}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\,2\cancel{(n+1)}\, n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{(n+1)} \frac{n^n}{(n+1)^n} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{n+1} \frac{n}{n+1} = 4\cdot\frac{1}{e} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n} = \frac{4}{e}$

ex: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}\right) \Rightarrow$ sandwich $n\cdot\frac{n}{n^2+n} \leq \dots \leq n\cdot\frac{n}{n^2+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}\right) = 1$

multiplicamos por el conjugado

ex: $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{3n^3+2n+2} - \sqrt{3n^3-2n-1}}{\sqrt{n^3+n^2+3n} - \sqrt{n^3+n^2-3n}} \cdot \frac{\sqrt{n^3+n^2+3n} + \sqrt{n^3+n^2-3n}}{\sqrt{n^3+n^2+3n} + \sqrt{n^3+n^2-3n}} \cdot \frac{\sqrt{3n^3+2n+2} - \sqrt{3n^3-2n-1}}{\sqrt{3n^3+2n+2} - \sqrt{3n^3-2n-1}} =$

$= \frac{2\sqrt{3}}{9}$

ex: $\lim_{n\to+\infty} \frac{5(n+1)^{n+1}}{(3n^2+1)n^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5(n+1)\cdot(n+1)^n\cdot n}{(3n^2+1)\, n^{n-1}\cdot n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n(n+1)(n+1)^n}{(3n^2+1)\,n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^2+5}{3n^2+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{5}{3}e$

ex: $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n 3^n + 5^{n+1}}{(2^n+1)(3^{n-1}-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6^n+5^{n+1}}{\frac{6^n}{3}-2^n+\frac{3^n}{3}-1} = \frac{1+0}{1/3\cdot 1} = \frac{1}{1/3} = 3$

TEORIA 23/02/2022

2.3. CONTINUIDAD DE FUNCIONES. TEOREMA DE BOLZANO

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell,\ \ell\in\mathbb{R} \\ 2.\ \exists f(x_0) \\ 3.\ \ell = f(x_0) \end{cases}$$

DISCONTINUIDADES

① EVITABLE

$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

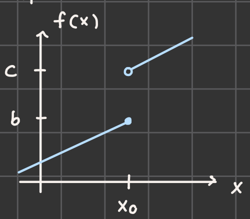
$\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$ pero $\nexists f(x_0)$

② ESENCIAL

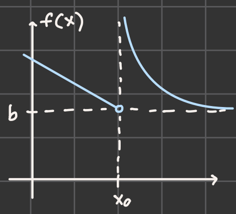
- Salto finito (1ª especie)

$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = b$

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = c$



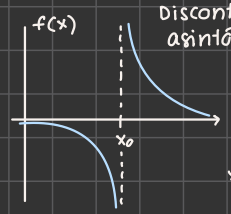
- Salto infinito (2ª espécie)



$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = b$

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$

Discontinuidad asintótica



$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$

TEOREMA DE LA CONSERVACIÓN DE SIGNO

Sea $f(x)$ contínua en x_0 y $f(x_0) > 0$, $(f(x_0) < 0)$ $\exists S = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(c) > 0$ $(f(c) < 0)$ si $c \in S$.

TEOREMA DE BOLZANO

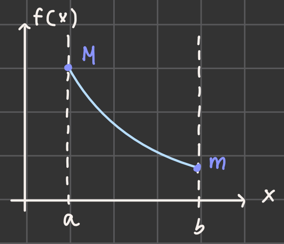
Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a) > 0$ i $f(b) < 0$ o viceversa $\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ tq $f(c) = 0$.

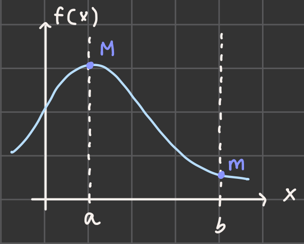
TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sea $f(x)$ continua en $[a,b] \Rightarrow$ cualquier $k \in \mathbb{R}$ cuyo valor este entre $f(a)$ y $f(b)$ existe almenos un valor $c \in [a,b]$ tq $f(c) = k$.

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Si f es contínua en $[a,b] \Rightarrow f([a,b])$ tiene un màximo M y un mínimo m absolutos y el recorrido de f es $f([a,b]) = [m, M] \Leftrightarrow f(m) \leq f(x) \leq f(M)$

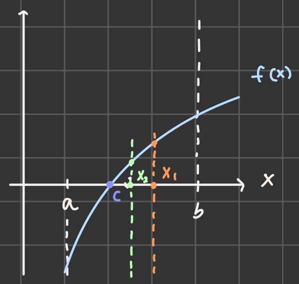




2.4. RESOLUCIÓN APROXIMADA DE ECUACIONES

método de la bisección: sea $f(x) = 0$ y un intervalo $[a,b]$: $\begin{cases} \text{① En el intervalo } f(x) \text{ tiene una raíz } x = c \text{ (única)} \\ \text{② } f(x) \text{ es continua en } [a,b] \\ \text{③ } f(a) \cdot f(b) < 0 \end{cases}$ (②③ BOLZANO)

$\Rightarrow \exists c \in [a,b] : f(c) = 0$.



Primero encontramos un punto $x_1 = \frac{a+b}{2}$.

- Si $f(a) \cdot f(x_1) < 0 \Rightarrow$ la raíz se encuentra en $[a, x_1]$. Repetimos el método con el nuevo intervalo.
- Si $f(x_1) f(b) < 0 \Rightarrow$ la raíz se encuentra en $[x_1, b]$. Repetimos el método con el nuevo intervalo.

En general en la iteración #n del método se tiene que $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, $n = 1, 2 ..$ Al evaluar la función $f(x)$ se selecciona el nuevo intervalo de búsqueda $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ de acuerdo a lo siguiente:

① si $f(a_n) f(x_n) < 0 \Rightarrow c \in [a_n, x_n]$

② si $f(x_n) f(b_n) < 0 \Rightarrow c \in [x_n, b_n]$

③ si $f(x_n) f(a_n) = 0$? $f(x_n) = 0$.

* Error en la aproximación:

suponemos que c es uno de los extremos

- $E_1 = |\text{valor verdad} - \text{valor aprox}| = \left| c - \frac{a+b}{2} \right| = \left| b - \frac{a+b}{2} \right| = \frac{b-a}{2}$
- $E_2 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{b_1 - a_1}{2} \right] = \frac{b-a}{2^2}$
- $E_3 = \frac{b_3 - a_3}{2} = \frac{b-a}{2^3}$
- $E_n = \frac{b-a}{2^n}$ → cota del error

* Aproximación con exactitud ε.

num. de iteraciones

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^n \Rightarrow \ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) < n \cdot \ln 2 \Rightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\ln 2}$$

* convergéncia del método: En cada iteración se busca un intervalo tq $b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}$. según la aproximación con exactitud $\varepsilon \Rightarrow E_n = \frac{b-a}{2^n}$, $n \geq 1$ Por lo tanto $\lim_{n \to \infty} E_n = 0 \Rightarrow |c - x_n| \leq E_n$. Entonces $\lim_{n \to \infty} |c - x_n| = 0$ implica que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a c y esta acotada por una sucesión que converge a 0.

Teorema: si en el intervalo $[a,b]$ $f(x)$ satisface las hipótesis del método de bisección y las aproximaciones x_n son halladas con dicho procedimiento $\Rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ converge a $c \in [a,b]$

Def: Decimos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a c con rapidez de convergencia $O(\beta n)$ dónde $\{\beta n\}_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión con $\beta_n \neq 0 \ \forall n$ si $\frac{|x_n - c|}{|\beta_n|} < k$ para n suficientemente grande ; k constante. $|x_n - c| \leq \frac{b-a}{2n}$ $n \geq 1$,

$O(2^{-n}) \Rightarrow \frac{|x_n - c|}{2^{-n}} \leq \frac{b-a}{k}$

↳ rapidez

* Orden de convergéncia : Decimos que x_n converge a c con orden de convergencia p si $\lim_{n\to\infty} \frac{E_n}{E_{n-1}^p} = \lambda \neq 0$

$\Leftrightarrow E_n \approx \lambda E_{n-1}^p$. Bisección es un método lineal , $p=1$.

* Condición de terminación :

- Cuando $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ o $|f(x_n)| < \varepsilon$

- Cuando tengamos un número determinado de iteraciones

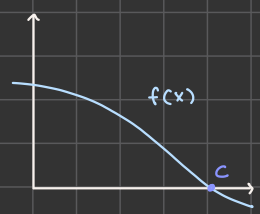
ex: Razonar porqué la equación $e^{-x^2} = 2x$ tiene una solución en el intervalo $[0,1]$ y calcular aprox, con precisión $(0,1)$.

① $f(x) = e^{-x^2} - 2x$ contínua en $[0,1]$

② $f(0) = 1 > 0$

$f(1) = -1{,}63 < 0$

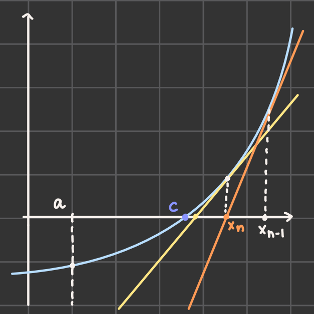
$\Rightarrow \exists c \in (0,1)$ tq $f(c) = 0$



n	a	b	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$
1	0	1	0,5
2	0	0,5	0,25
3	0,25	0,5	

método de la secante. suponiendo $f(a)f(b) < 0$ y contínua en $[a,b]$ tenemos $x_0 = a$, $x_1 = b$ y

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



Pendiente de L_1 pasa por $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ y $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ es

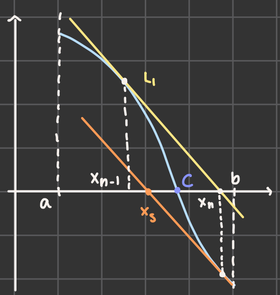
$$m = \frac{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

Eq. de la recta L_1 $\overset{0}{\cancel{f(x_n)}} - f(x_{n-1}) = m(x_n - x_{n-1}) \Rightarrow x_n - x_{n-1} = \frac{-1}{m} f(x_{n-1})$

$\Rightarrow x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})} f(x_{n-1}) \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$

método de Newton-Raphson (método de la tangente) : se considera f contínua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

si $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f$ debe tener almenos un cero en (a,b). Deseamos encontrar la solución de $f(x) = 0$.



La ecuación de L_1 és $\overset{0}{\cancel{f(x_n)}} - f(x_{n-1}) = \overset{f'(x_{n-1})}{m}(x_n - x_{n-1}) \Rightarrow x_n = x_{n+1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Sea $f(c) = 0$ para aproximar c se siguen los siguientes pasos :

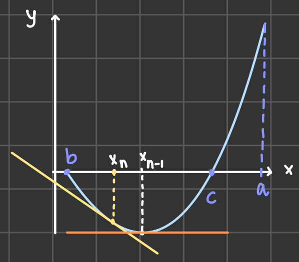
① Se efectua una estimacion inicial x_1 cercana a c (una gráfica es útil)

② La nueva aproximación se determina como $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

③ $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

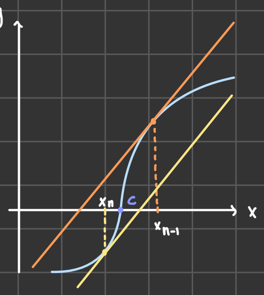
★ SITUACIONES DÓNDE EL MÉTODO NO CONVERGE

1)



* Derivada nula
* Aproximación x_n muy alejada de la raiz

2)

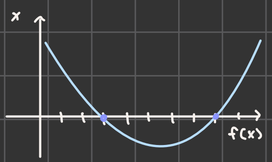


* Cerca de un punto de inflexión

TEORIA 2/03/2022

ex 6. a) Separar las dos soluciones reales de la eq. $x - 3\ln x = 0$

$f(x) = x - 3\ln x$



$f(x)$ contínua $(0, +\infty)$

$f(1) = 1 > 0$ $\quad$ $f(4) = -0{,}14 < 0$

$f(2) = -0{,}08 < 0$ $\quad$ $f(5) = 0{,}17 > 0$

Pel teorema de Bolzano $\exists\, c_1 \in (1,2)$ tq $f(c_1) = 0$ y $\exists\, c_2 \in (4,5)$ tq $f(c_2) = 0$

b) $\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{2-1}{2^n} \leq 0{,}5\ 10^{-3} \Rightarrow \frac{1}{0{,}6 \cdot 10^{-3}} \leq 2^n \Rightarrow n \geq \frac{\ln(2\cdot 10^{-3})}{\ln(2)} \Rightarrow n \geq 11$

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$
1	1	2	1,5
2	1,5	2	1,75
3	⋮	⋮	⋮
⋮			
11	1,856	1,857	1,856 $\approx c_1$

c) Aplicar método de la secante (precisión 3 decimales)

$|f(x_n)| < 0{,}0005$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

$x_0 = 1,\ x_1 = 2$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1) = 1{,}926$$

* Seguim successió fins que la funció compleixi la inecuació. $c_1 = 1{,}8572$

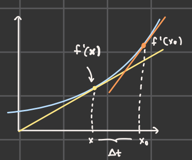
$f(1{,}8572) \sim -1{,}9 \cdot 10^{-5} < 0{,}0005$

3. DERIVADAS

Def La derivada de una función $y = f(x)$ con respecto a x en un punto $x = x_0$ se define por el límite $y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

* una función es derivable en un punto x_0 de su dominio si $\exists$ el límite $y(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $= \lim_{\Delta x \to x} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

INTERPRETACION GEOMÉTRICA



$m_{sec} = \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$

$\Delta x = 0 \rightarrow$ pendiente de la recta tangente

* Sea $f \in D$ y D' el conjunto de los puntos de D en los cuales f es derivable. La función $f': D' \to \mathbb{R}$ se denomina derivada. Si f' es también derivable $\Rightarrow f'', f''', \dots, f^{(n)}$ (n-ésima derivada de f)

* Una función es derivable en x si su derivada en x $\exists$.
* Una función es derivable en un intervalo (a,b) si es derivable en todos los puntos del intervalo.
* Si f es derivable en $x_0 \Rightarrow$ continua en x_0

Ej: $f(x) = |x|$

(i) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

(ii) $f(0) = 0$

★ UNA FUNCIÓ ES DERIVABLE EN UN PUNT x SI: $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \exists f'(x) = f'(x)^+ = f'(x)^-$

* Las funciones elementales son derivables en su dominio de definición.
* La $(+)(-)$, producto por una constante, producto, potencia y cociente (denom. $\neq 0$) de funciones derivables en un punto, son derivables en el punto.
* La composición de funciones derivables en un punto es derivable en ese punto.

3.1. Regla de la cadena

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

$$y = g(u), \quad u = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = g'(u) \frac{du}{dx} = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

La derivada de $f(x) = u(x)^{v(x)}$

Pasa multiplicando

- $\ln f(x) = v(x) \cdot \ln(u(x))$ y derivamos estos miembros $\frac{1}{f(x)} f'(x) = v'(x) \ln(u(x)) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x)$

TALLER 3/03/2022

ex 8. e) $\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^{\frac{n^2+2}{n+1}} = 1^\infty \Rightarrow e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)\frac{n^2+2}{n+1}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+n\cancel{+1}-(\cancel{n^2}-n\cancel{+1})}{n^2-n+1} \cdot \frac{n^2+2}{n+1}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n^2-n+1} \cdot \frac{n^2+1}{n+1}} =$

$= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+2n}{n^3+\cancel{n^2}-\cancel{n^2}-\cancel{n}+\cancel{n}+1}} = e^2$

f) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[5]{\frac{2n+3}{3n+4}}\right)^{\left(\frac{n^3+1}{n^3+n}\right)^{n^2+1}} = \left(\sqrt[5]{\frac{2}{3}}\right)^{1/e}$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[5]{\frac{2n+3}{3n+4}} = \frac{2}{3}$
- $e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n^3+n} \cdot n^2+1} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}+1-(\cancel{n^3}+n)}{n^3+n} \cdot n^2+1} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{(1-n)(n^2+1)}{n^3+n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1-n^3-n}{n^3+n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

ex 9. $\{a_n\}$ $a_1 = 1$, $a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}$ $n > 1$

a) Dem. $0 < a_n < 2$ $\forall n \geq 1$

Per inducció:

* Pas base $a_1 = 1$
  $a_2 = \sqrt{1+a_1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\Rightarrow 0 < a_1, a_2 < 2$

* HI : suposem cert fins n: $0 < a_n < 2$
* TI : cert per $n+1$? $(0 < a_{n+1} < 2)$
  $1 < a_{n+1} < 3 \Rightarrow \sqrt{1} < \sqrt{a_{n+1}} < \sqrt{3} \Rightarrow 0 < 1 < a_{n+1} < \sqrt{3} < 2$ cvd.

b) Dem $\{a_n\}$ creixent

per inducció: $a_{n+1} > a_n \ \forall n$

* Pas base $a_1 = 1$ $a_2 > a_1$
  $a_2 = \sqrt{1+a_1} = \sqrt{2}$
* HI: suposo cert fins n : $a_n > a_{n-1}$
* TI: vull veure que $a_{n+1} > a_n$
  $a_n > a_{n-1} \Rightarrow a_n + 1 > a_{n-1} + 1 \Rightarrow \sqrt{a_n+1} > \sqrt{a_{n-1}+1} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$ cvd.

c) Dem $\{a_n\}$ convergente. Calcula el límite.

TEOREMA DE CONVERGÉNCIA MONÓTONA: toda sucesión monótona acotada es convergente.

$\{a_n\}$ creciente (b) y acotada (a) $\Rightarrow \{a_n\}$ convergente

$a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}$

$L = \sqrt{1+L} \Rightarrow L^2 = 1+L \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \in [0,2] & 0 < a_n < 2 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \leq L \leq 2 \end{cases}$

ex 10. $\{a_n\} \to a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2n-1)}{2\cdot 4\ 6 \ldots (2n)}$ $n \geq 1$

a) a_1, a_2, a_3. Obtenir $a_{n+1} = f(a_n)$

$a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} = \frac{3}{8}$; $a_3 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{5}{16}$

$a_{n+1} = \underbrace{\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots (2n)}}_{a_n}\frac{(2n+1)}{(2n+2)} \Rightarrow a_{n+1} = a_n \frac{2n+1}{2n+2}$

b) Dem $\{a_n\}$ decreciente $a_{n+1} < a_n$

$a_{n+1} = \underbrace{\frac{2n-1}{2n+2}}_{<1 \ \forall n} \cdot a_n < a_n \ \forall n$

c) TCM. toda sucesión monótona acotada es convergente.

d) Dem $\{a_n\}$ convergente

$\{a_n\}$ monótona (dem. anteriormente)

$\{a_n\}$ acotada sup. por a_1 $\Rightarrow$ ¿inferiormente? obvio $0 < a_n \ \forall n$. $\{a_n\}$ acotada $\Big\} \Rightarrow a_n$ convergente

ex 14. $\{a_n\} = \{\sqrt{3}, \sqrt{3+\sqrt{3}}, \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}, \ldots\}$

a) Llei de recurrència per aquesta successió $\Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{3+a_n}$

b) $\{a_n\}$ fitada

$a_n < 3$? Per inducció:

* Pas Base $a_1 = \sqrt{3}$
  $a_2 = \sqrt{3+\sqrt{3}} < 3$

* Suposo cert $a_n < 3$; $a_{n+1} < 3$?

$a_n < 3 \to a_n + 3 < 6 \Rightarrow \sqrt{a_n+3} < \sqrt{6} \Rightarrow a_{n+1} < \sqrt{6} < 3$ cvd.

c) $\{a_n\}$ creixent?

Per inducció: $a_1 = \sqrt{3}$ $a_2 > a_1$
$a_2 = \sqrt{3+\sqrt{3}}$

* HI suposo cert fins n, $a_n > a_{n-1} \to a_{n+1} > a_n$

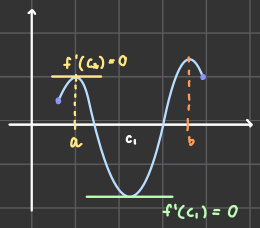
$a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_n > a_{n-1}$? $\Rightarrow a_n + 3 > a_{n-1} + 3 \Rightarrow \sqrt{a_n+3} > \sqrt{a_{n-1}+3} \Rightarrow a_{n+1} > a_n$ cvd.

d) TCM monótona + acotado $\Rightarrow$ convergente

$a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} \Rightarrow L = \sqrt{3+L} \Rightarrow L = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\begin{cases} \frac{1+\sqrt{13}}{2} & 0 < a_n < 3 \\ \cancel{\frac{1-\sqrt{13}}{2}} & 0 \leq L \leq 3 \end{cases}$ $L \in [0,3$

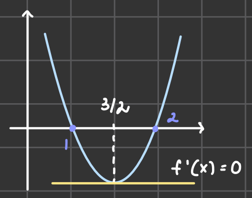
TEORIA 07/03/2022

TEOREMA DE ROLLE (Unidad de soluciones) : Sea f continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = 0$



$f(a) = f(b)$

Ej: Encontrar las intersecciones en x de $f(x) = x^3 - 3x + 2$ y demostrar que $f'(x) = 0$ en algún punto entre las dos intersecciones.



$f(x) = 0$

$(x-1)(x-2) = 0$, $x = 1$; $x = 2$

$f(1) = f(2) = 0$

$\Rightarrow \exists\, c \in (1,2)$ tq $f'(c) = 0$

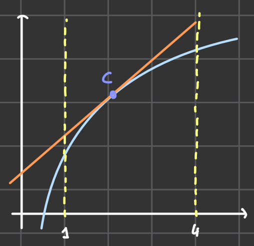
$f'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

TEOREMA DE CAUCHY : si f y g continuas en $[a,b]$ y derivables en $(a,b) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ tq $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

* Variante: $g(x) = x$

TEOREMA VALOR MEDIO DE LAGRANGE: si f es continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ tq $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Ej: Dada $f(x) = 5 - \frac{4}{x}$, determina los valores de c en $(1,4)$ tales que $f'(c) = \frac{f(4)-f(1)}{4-1}$



Pendiente de la recta $(1, f(1)), (4, f(4))$ $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = 1 \Rightarrow \exists c \in (1,4)$ tq $f'(c) = 1$

$f'(x) = \frac{4}{x^2} = 1$; $x = \pm 2$

* si f es derivable en (a,b) y $f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ es constante en (a,b)
* si $f'(x) > 0\ \forall x \in I \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en I.
  - ↳ si $f'(x) \geq 0$ f es creciente en I.
* si $f'(x) < 0\ \forall x \in I \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en I.
  - ↳ si $f'(x) \leq 0$ f es decreciente en I

<u>EXTREMOS RELATIVOS</u> : f tiene un max./min. relativo en $x = x_0$ cuando $f(x) \leq f(x_0)$ / $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in U$, dónde U es un entorno de x_0.

- Si f tiene un extremo relativo en x_0 y $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$

<u>PUNTO CRÍTICO</u> : sea f definida en x_0 si $f'(x_0) = 0$
si f no es derivable en x_0 $\Big\}$ x es un punto crítico de f

3.2. CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

① si $f'(x) = 0$ y $\exists \delta > 0$ → $\forall x$ con $x_0 - \delta < x < x_0$ se cumple que $f'(x) < 0$
→ $\forall x$ con $x_0 < x < x_0 + \delta$ se cumple que $f'(x) > 0$ $\Big\}$ mínimo relativo

② si $f'(x) = 0$ y $\exists \delta > 0$ → $\forall x$ con $x_0 - \delta < x < x_0$ se cumple que $f'(x) > 0$
→ $\forall x$ con $x_0 < x < x_0 + \delta$ se cumple que $f'(x) < 0$ $\Big\}$ máximo relativo

③ si $f'(x)$ es positiva o negativa en ambos lados de $x_0 \Rightarrow f(x_0)$ no es un máx ni un mín

REGLA DE L'HÔPITAL: si f y g son diferenciables en (a,b) excepto en $x_0 \in (a,b)$ posiblemente, y si $g'(x) \neq 0$ para $x \neq x_0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (se puede repetir)

* CONVEXIDAD: sea I un intervalo en el dominio de f

- f es convexa si $\forall a, x, b \in I$ con $a < x < b$ se tiene $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow f(x) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

* CONCAVIDAD: f es concava en I si $\forall a, b, x \in I$ con $a < x < b$ se tiene $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow f(x) > f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

★ si f(x) es convexa o cóncava la tang. en todo punto de la grafica queda por debajo o por encima de la función.

convexa f' creciente en I

cóncava f' decreciente en I

CRITERIO DE CONCAVIDAD/CONVEXIDAD

sea f y f'' $\exists$ en I
- si $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ convexa
- si $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ cóncava

3.3. CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

① si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0 \rightarrow$ mínimo relativo en x_0

② si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0 \rightarrow$ màximo relativo en x_0

PUNTOS DE INFLEXIÓN: es un punto donde la función pasa de concava a convexa o al revés. Una función tiene un punto de inflexión si:

- $f''(x_0) = 0$ o no està definida
- $f''(x)$ cambia de signo en un entorno de $x = x_0$

PROBLEMAS

3. Demostrar que $f(x) = x^3 - 3x + m$ no tiene dos ceros en $[0,1]\ \forall m \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 - 3x + m$

$f(x)$ contínua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \quad x = \pm 1 \rightarrow x = 1$ ya que estamos trabajando en el intervalo $(0,1)$.

$\Rightarrow c \in (0,1) \cdot f'(c) = 0$

$f(1) \cdot f(0) < 0$

$f(1) = -2 + m \quad \Rightarrow \quad m \in [0,2)$

$f(0) = m > 0$

4. Considera la equacion $e^{-x} = \ln x$

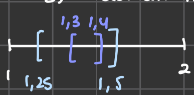
a) Demuestra que tiene solución

$f(x) = e^{-x} - \ln x$ continua en $[1, +\infty)$

$f(1) = \frac{1}{e}$, $f(2) \sim -0{,}56 < 0$

T. BOLZANO $\Rightarrow \exists c \in (1,2) \subset [1, +\infty) : f(c) = 0$

b) Dad un intervalo que contenga solución. (de long. 0,1)



$f(1{,}5) \sim -0{,}18 \qquad f(1{,}3) \sim 0{,}01$

$f(1{,}25) \sim 0{,}063 \qquad f(1{,}4) \sim -0{,}09$

La solución se encontrarà en el intervalo de long. 0,1 (1'4, 1'3)

c) Razona por que f no puede tener dos soluciones en $[1,+\infty)$

$\exists c \in [1,+\infty) : f'(c)=0$

$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x} < 0 \quad \forall x \in [1,+\infty)$

$f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [1,+\infty)$, $f'(x)$ no tiene dos soluciones en $[1,+\infty)$

d) Aplica Newton - Raphson

$$x_{n+1} = x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_0 = 1 \rightarrow x_1 = x_0 + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \rightarrow x_1 = 1 + \frac{1/e}{1/e+1} = 1{,}26844$$

$$x_1 = 1{,}26844 \rightarrow x_2 = 1{,}26844 + \frac{f(1{,}26844)}{f'(1{,}26844)} = 1{,}30979$$

$x_2 = 1{,}30979$

$x_3 = 1{,}30979 \qquad |x_3 - x_4| = 0{,}00001 < 10^{-4}$

$x_4 = 1{,}30980$

5. a) $y = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \rightarrow 1^\infty$ indet

$$\ln y = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = \lim_{x\to\infty}\left[x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+1/x}\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{-1/x^2}}$$

L'HÔPITAL $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1 \Rightarrow \ln y = 1 \Rightarrow y = e$

b) $y = \lim_{x\to 0} (\sin x)^x = 1 \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0} x \ln(\sin x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin x)}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-1/x^2} = \lim \frac{\cot x}{-1/x^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{\tan x} = \lim \frac{-2x}{\sec^2 x} = 0 \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = 1$

3.4. FÓRMULA DE TAYLOR

Objetivo: mostrar como usar funciones polinómicas como aproximación de funciones elementales.

* Sea f una función n veces derivable en un punto a. El polinómio de taylor de grado n para f en a es: $P_n(f,a,x) = fa + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$
* La diferéncia $R_n(f,a,x) = f(x) - P_n(f,a,x)$ se denomina resto (o residuo) n-ésimo de Taylor de la función f en a.

ej: Dada $f(x) = e^x$ encontrad el polinomio de Taylor de orden 2 para $a=0$.

$P_1(e^x, 0, x) = f(0) + f'(a)(x-a) = 1 + x$

$P_2(e^x, 0, x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Propiedades:

> El valor de $P_n(f,a,x)$ y el de todas sus derivadas hasta orden n en el punto a coinciden con los de la función f evaluada en este punto.

> TEOREMA DE TAYLOR-YOUNG : Sea I un intervalo, f definida en I y $a \in I$ supongamos que f es n-1 veces derivable en I y que $\exists f^{(n)}(a)$ Entonces $R_n(f,a,x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_n(f,a,x)}{(x-a)^n} = 0$

ERROR: $|R_n(f,a,x)| = |f(x) - P_n(f,a,x)|$

$f(x) = P_n(f,a,x)$

* cuando $a=0$ entonces se llama fórmula de Mac Laurin

> Teorema de Taylor : sea f una función $n+1$ veces derivable en un entorno U de a. $\Rightarrow$ para cada $x \in U \setminus \{a\}$ $\exists$ un punto c entre x y a tq $R_n(f,a,x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

↳ resto de Lagrange

* Sean f y g funciones con derivada n-ésima en el punto 0 y sean $p = P_n(f,0,x)$ y $q = P_n(g,0,x)$:
  - Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el polinomio de Taylor de grado n de $\alpha f + \beta g$ en $a=0$ es $\alpha p + \beta q$
  - El polinomio de Taylor de grado n de $f \cdot g$ esta dado por pq, suprimiendo los términos de grado $>n$.
  - Si $g(0) \neq 0 \Rightarrow$ polinomio de Taylor de grado n de f/g está dado por la división de p y q hasta el grado n incluido.

- si $f(0)=0$ el polinomio de Taylor de grado n de $(g\circ f)$ en $a=0$ es el polinomio obtenido de $(g\circ p)$ suprimiendo los términos de grado $>n$.

* Sea I un intervalo (o un dominio o un punto a). La clase $C^n(I)$ esta formada por todas las funciones f cuyo dominio contiene I y tales que $\forall x\in I$ $\exists f^{(n)}$ y son continuas.
  - La clase $C^0(I)$ es el espacio de las funciones continuas, $C^1(I)$ espacio de funciones con 1ª derivada continua
  - $C^n(I)=\{f: \forall \alpha\in\mathbb{N},\ \alpha\le n,\ f^{(\alpha)}\in C^0(I)\}$
  - $C^\infty(I)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I)$ espacio de funciones infinitamente derivables en I.

3.4.1. FÓRMULAS DE TAYLOR PARA ALGUNAS FUNCIONES:

$a=0$

$$e^x = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+e^c\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\ln(x+1) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\ldots$$

$$\left.\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{x+1}\\ f''(x)&=\frac{-1}{(x+1)^2}\\ f'''(x)&=\frac{2}{(1+x)^3}\end{aligned}\right\} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+e)^{n+1}}$$

* ACOTACIÓN DEL ERROR: sea $f\in C^{n-1}(U)$ dónde U es un entorno de a y supongamos que la función $f^{(n+1)}$ está acotada por una constante K en el intervalo abierto de extremos a y $x\in U$, entonces: $|f(x)-P_n(f,a,x)| = |R_n(f,a,x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \le \frac{K}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$; $K=\max_{s\in[a,x]\vee s\in[x,a]}|f^{(n+1)}(s)|$

3.4.2. MONOTONÍA Y EXTREMOS RELATIVOS

* Sea $f\in C^n(a)$ tal que $f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$ y $f^n(a)\neq 0$:
  - n par y $f^n(a)>0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo en a
  - n par y $f^n(a)<0 \Rightarrow f$ tiene un màximo en a.
  - n impar $\Rightarrow f$ no tiene extremos relativos
  - n impar y $f^n(a)>0 \Rightarrow$ directamente creciente en un entorno de a.
  - n impar y $f^n(a)<0 \Rightarrow$ directamente decreciente en un entorno de a.

Demo: Del polinomio de Taylor tenemos que $P_n(f,a,x)=f(a)+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$ donde $R_n(f,a,x)=f(x)-P_n(f,a,x)$

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(f,a,x)}{(x-a)^n}\ 0 \quad\wedge\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_n(f,a,x)}{(x-a)^n}=0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}=\frac{f^n(a)}{n!} \quad ; \quad \operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Com $f^n(a)\neq 0$ esto implica que $\exists\delta>0$ y se cumple que $\forall x\in I$ con $0<|x-a|<\delta$ se tiene $\operatorname{sgn}\left(\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}\right)=\operatorname{sgn}(f^n(a))$

- si n par $\operatorname{sgn}(f(x)-f(a))=\operatorname{sgn}(f^n(a))$
  - $\to$ si $f^n(a)>0 \Rightarrow f(x)>f(a)$ $\forall x\in I$ f tiene un mínimo relativo en a.
  - $\to$ si $f^n(a)<0 \Rightarrow f(x)<f(a)$ $\forall x\in I$ f tiene un màximo relativo en a.
- si n impar $\Rightarrow (x-a)^n<0$ si $x\in a$ y $(x-a)^n>0$ si $x>a$. Luego $f(x)-f(a)$ tiene un signo contrario si $x\in I\cap(a,a+\delta)$ Por tanto f no tiene extremo.
- si n impar y $f^n(a)>0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en un entorno de a.
- si n impar y $f^n(a)<0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en un entorno de a.

* n impar:
  - $(x-a)^n<0$ para $x<a$ y $f^n(a)>0 \Rightarrow f(x)<f(a)$
  - $(x-a)^n>0$ para $x>a$ y $f^n(a)<0 \Rightarrow f(x)<f(a)$

ejemplo: Encuentra los valores extremos de $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 4 = 4(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = (x+1)^3 \Rightarrow x_0 = -1$

Tratamos de determinar la naturaleza de $x_0 = -1$

$f''(x) = 12x^2 + 24x + 12$, $f''(-1) = 0$

$f'''(x) = 24x + 24$, $f'''(-1) = 0$

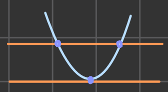
$f^{IV}(x) = 24$, $f^{IV}(-1) = 24$

$x_0 = -1$ es un mínimo relativo de $f(x)$.

3.4.3. CONVEXIDAD

* Sea $f \in C^n(a)$: $f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^n(a) \neq 0$:
  - n par y $f^n(a) > 0 \Rightarrow$ f es convexa en un entorno de a.
  - n par y $f^n(a) < 0 \Rightarrow$ f es cóncava en un entorno de a.
  - n impar $\Rightarrow$ f tiene un punto de inflexión en a.

* convexa



$f(x) < \frac{f(a) - f(b)}{b-a}(x-a)$; $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$

cóncava al contrario

Demo: $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))}{(x-a)^n} = \frac{f^n(a)}{n!}$; $\text{sgn}\left(\frac{f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a))}{(x-a)^n}\right) = \text{sgn } f^n(a)$

n par $\Rightarrow$ $f(x) > f(a) + f'(a)(x-a)$ y $f^n(a) > 0$

$\Rightarrow$ $f(x) < f(a) + f'(a)(x-a)$ y $f^n(a) < 0$

TEORIA 16/03

POLINOMIO DE TAYLOR

$Pn(f, a, x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + f^n(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$

TEOREMA DE TAYLOR

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^n(I)$ y $\exists f^{(n+1)}(a)$ en I, $a \in I$

$\Rightarrow \forall x \in Dom(f)$ $\exists c$ entre a y x tq $f(x) = Pn(f, a, x) + f^{(n+1)}(c)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

* ACOTACIÓN DEL ERROR $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^{n+1}(I)$; $x, a \in I$

1. Usar el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x) = \sqrt[3]{1728 + x}$ para calcular $\sqrt[3]{1731}$. Acotar el error:

$f(0) = 12$, $f'(0) = \frac{1}{432}$, $f''(0) = \frac{1}{1'9744}$

$P_2(f, 0, x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(1728 + x)^{-2/3}$

$f''(x) = \frac{-2}{9}(1728 + x)^{-5/3}$

$f'''(x) = \frac{10}{27}(1728 + x)^{-8/3}$

$P_2(f, 0, x) = 12 + \frac{x}{432} + \frac{x}{2239488}$
$\phantom{P_2(f, 0, x) = 12 + \frac{x}{432} + }2$

$f(3) \simeq P_2(f, 0, 3) = 12,0069$

El error cometido en la aprox. es:

$|R_2(f, 0, 3)| = \left|\frac{f'''(c) \cdot 3^3}{3!}\right| = \frac{10 \cancel{3^3}}{6 \cdot \cancel{3^3}(1728 + c)^{8/3}}$

$|R_2(f, 0, 3)| < \frac{10}{6 \cdot 10^8} < \frac{10}{12^8} \sim 3,9 \cdot 10^{-9}$

$1728 = 12^3$

2. Considera $f(x) = \ln(1-x)$

a) Hallar los 5 primeros términos $\neq 0$ del polinómio de Taylor en $a = 0$ y el resto de Lagrange

$f(x) = \ln(1-x)$, $f(0) = 0$

$f'(x) = (1-x)^{-1}$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = -(1-x)^{-2}$, $f''(0) = -1$

$f'''(x) = 2(1-x)^{-3}$, $f'''(0) = 2$

$\vdots$

$f^n(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1-x)^{-n}$

$f^{IV}(0) = -3!$

$f^V(0) = 4!$

$P_5(f, 0, x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + f^{IV}(0)\frac{x^4}{4!} + f^V(0)\frac{x^5}{5!} =$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{\cancel{3!}x^4}{4 \cdot \cancel{3!}} + \frac{\cancel{4!}x^5}{5 \cdot \cancel{4!}} =$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$

$R_5(f, 0, x) = f^6(c)\frac{x^6}{6!} = \frac{-x^6}{6(1-c)^6}$

b) Determina el grado del polinómio para obter el valor $\ln 0{,}75$ con $\varepsilon < 10^{-3}$.

$\ln 0'75 = f(0{,}25)$

$|R_n(f, 0, 0'25)| = f^{n+1}(c)\,\dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{(0{,}25)^{n+1}}{(n+1)(1-c)^{n+1}} \quad c \in [0, 0'25]$

$c \in [0, 0'25] < \dfrac{(0{,}25)^{n+1}}{(n+1)(1-c)^{n+1}} = \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$

$\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1} < 10^{-3}$

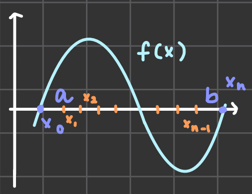
$n = 3, \ \dfrac{1}{4 \cdot 3^4} = 0{,}003 \ ; \ n = 4 \ \ldots = 0{,}000082 < 10^{-3}$

TEORIA 21/03

– TEMA 6: INTEGRALES –

INTEGRAL DE RIEMAN

6.1. Sumas de Riemann



- f en $[a, b]$
- $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

  $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ partición de $[a, b]$
- $C_k \in [x_{k-1}, x_k]$

⇒ Se trata de ir haciendo rectángulos para aproximar al máximo el área de debajo de la curva.

- $A_k = f(c_k)\,\Delta x_k$

  ↳ $S_R = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$

✱ Límite de las sumas de Riemann

Def: f función definida en $[a, b]$. Decimos que un # I es la integral de f en $[a, b]$ y que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = I = \int_a^b f(x)\,dx$ si se cumple que:

★ Dado $\varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: para toda partición P de $[a, b]$ con $\|P\| < \delta$ y cualquier elección de $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tenemos que $\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - I\right| < \varepsilon$.

- $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ (suma finita) $\sim \int f(x)\,dx$ (suma infinita)

✱ Integrabilidad de Riemann

- → Toda función acotada monótona en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$
- → Toda función continua es integrable en $[a, b]$

✱ Teorema: CRITERIO DE LEBESGUE PARA LA INTEGRAL DE RIEMANN

↳ Sea f una funcion definida y acotada en $[a, b]$ y sea D el conjunto de las discontinuidades de f en $[a, b]$ ⇒ f es IR en $[a, b]$ ⇔ D tiene medida cero (cualquier función continua o con un conjunto numerable de discontinuidades es integrable).

Propiedades: si f y g son integrables en $[a, b]$ ⇒

① fg es integrable en $[a, b]$

② f/g es integrable en $[a, b]$ si está definido

③ $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \ , \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

④ $|f|$ tambien es integrable y $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

* Reglas que satisfacen las integrales definidas

① $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

② $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

③ si $f(x) \geq g(x)$ en $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)$

④ $\int_a^a f(x) = 0$

* ÁREA BAJO LA CURVA

Def.: Si $y = f(x)$ es no negativa e integrable en $[a,b] \Rightarrow$ el área bajo la curva $y = f(x)$ en $[a,b]$ es $A = \int_a^b f(x)\,dx$

* PROMEDIO O VALOR MÉDIO DE UNA FUNCIÓN

Def.: Si f es integrable en $[a,b] \Rightarrow$ su promedio es $\text{prom}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

* TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL Si $f(t)$ es una función integrable en I la integral de cualquier $a \in I$ a $x \in I$ se define como $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

◦ Teorema: si f es continua en $[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y su derivada es $\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(t)$ se dice que $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$

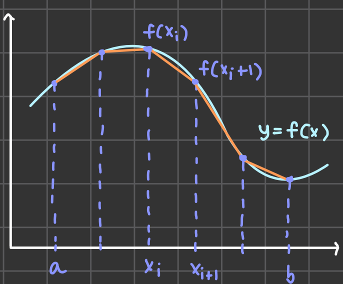
* REGLA DE BARROW Si f es continua en $[a,b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

* Sea f una función continua en $[a,b]$ y u, v funciones derivables en un punto x_0 : $u(x_0), v(x_0) \in [a,b] \Rightarrow F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ es derivable en x_0 y

$F'(x_0) = f(v(x_0))\,v'(x_0) + f(u(x_0))\,u'(x_0)$

6.2. Integración numérica

* Regla del trapecio : Sea f continua en $[a,b]$ consideremos una partición $x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ de puntos equiespaciados y todos los intervalos tienen la misma amplitud $h = \frac{b-a}{n}$.



* Si tengo una recta que pasa por $(x_i, f(x_i))$ y $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$

$\Rightarrow$ el àrea del trapecio de i-ésimo intervalo es $A_i = h\left(\frac{f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2}\right)$

$= \frac{h}{2}\left(f(x_{i+1}) + f(x_i)\right)$. $T = \frac{h}{2}\left(f(\overset{=a}{x_0}) + f(x_1)\right) + \frac{h}{2}\left(f(x_1) + f(x_2)\right) + \ldots + \frac{h}{2}\left(f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$

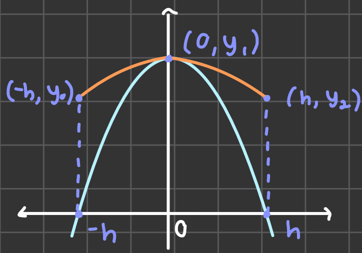
◦ Sea f una función con segunda derivada continua en $[a,b]$ $h = \frac{b-a}{n}$ y $x_i = a + ih$ para $i = 0, \ldots, n$. Si $|f''(x)| < M\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow$ el error que se comete en la aprox. $\int_a^b f(x)\,dx \simeq h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2}\right)$ es menor que $\frac{(b-a)^3}{12n^2}M$ máx. (cota sup.)

* Estimación del error: (cuando $n \to \infty$ y $h \to \infty$)

- $T = \left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)h + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)h \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T = 0 + \int_a^b f(x)\,dx$
- Consideramos el intervalo $[x_i, x_{i+1}] \Rightarrow f(x) = p(x) + r(x)$ para $x_i < x < x_{i+1}$

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) - p(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} r(x) = R_i$; $R = \sum_{i=0}^{n-1} R_i$. El error de interpolación para un polinomio de 1er orden $r(x) = \frac{f''(c_i)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})$, $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$. $R_i = \frac{1}{2} f''(c_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)(x-x_{i+1})\,dx = \frac{1}{2} f''(c_i)\left(\frac{-h^3}{6}\right) =$
$= -h^5 \frac{f''(c_i)}{12}$, $h = x_{i+1} - x_i$, $R = \sum_{i=0}^{n-1} R_i = -\frac{nh^3}{12} f''(c)$ dónde $c \in [a,b]$. $|R| \leqslant \left|\frac{(b-a)^2 M}{12n^2}\right|$; $h = \frac{b-a}{n}$.

* Regla de Simpson



- Intervalo $h = \frac{b-a}{n}$
- Parábolas $y = Ax^2 + Bx + C$
- Área debajo de la parábola $A_P = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)$

* Para calcular A, B y C se utilizan los puntos $(-h, x_0)$, $(0, x_1)$, (h, x_1)

$\Rightarrow p(-h) = y_0$, $p(0) = y_1$, $p(h) = y_2$:

$$\int_{-h}^{h} p(x)\,dx = \frac{2}{3}\left(\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}\right)h^3 + 2y_1 h = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx \simeq \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{1}{3}h(y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots +$
$\frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$

* Sea f una función con derivada 4^{ta} continua en $[a,b]$, $h = \frac{b-a}{n}$ con $n = 2m$ par y $x_i = a + ih$ para $i = 0, \dots, n$. Si $|f^{IV}(x)| < M$ $\forall x \in [a,b]$ entonces el error que se comete en la aproximación és :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i}-1) + f(b)\right) \text{ es menor que } \frac{(b-a)^5 M}{180n^2}$$

* Estimación del error: $\int_a^b f(x)\,dx = S - \underbrace{\frac{b-a}{180} f^4(c) h^4}_{\text{del cálculo avanzado en interpolación}}$

- Cuando $h \to 0 \Rightarrow E_S = \frac{b-a}{180} f^4(c) h^4 \Rightarrow |E_S| \leqslant \frac{b-a}{180} M h^2$

- TEMA 7: Funciones de varias variables -

① ESPACIO EUCLÍDEO $\mathbb{R}^n$

Producto escalar entre dos vectores $u = (u_1, \dots, u_n)$ y $v = (v_1, \dots, v_n)$ $\Rightarrow$ $u \cdot v = u_1 v_1 + \dots + u_n \cdot v_n$

* Propiedades:

- $u \cdot v = v \cdot u$
- $u(v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
- $(\lambda u) \cdot v = \lambda (u \cdot v) = u \cdot (\lambda v)$

Norma o módulo de un vector $u = (u_1, \dots u_n)$ $\Rightarrow$ $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$

* Propiedades:

- $\|u\| \geq 0$
- $\|u\| = 0$ si solo si $u = 0$
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

★ Se dice que un vector v és unitário si $\|v\| = 1$

Si queremos saber el ángulo entre dos vectores u, v $\Rightarrow$ $u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cdot \cos \alpha$

② TOPOLOGIA EN $\mathbb{R}^n$

La distancia entre dos puntos $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ denotada $d(x,y) = \|y - x\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$

* Propiedades:

- $d(x,y) \geq 0$
- $d(x,y) = 0$ si solo si $x = y$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\Rightarrow$ Desigualdad triangular

③ INTRO: FUNCIONES DE DIVERSAS VARIABLES

Sean n y m números naturales. Una función de n variables reales es una aplicación $f: D \to \mathbb{R}^m$ dónde D es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ denominado dominio de f.

Si $m = 1$, se dice que f es una función real o escalar.

Si $m \geq 2$ se dice que f es una función vectorial (o tambien m-vectorial).

La función f hace corresponder a cada elemento $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ exactamente un elemento $y \in \mathbb{R}^m$, el cual se denota por $y = f(x)$; en este caso, se dice que y es la imagen de x (x antiimagen / original de y). El conjunto de imágenes se denota por $f(D)$ y se denomina recorrido / imagen de f.

④ LÍMITES Y CONTINUIDAD

Sea f una función real de dominio D y a un punto de acumulación de D:

- El límite de f en a es el número real ℓ si, para cada entorno $B_\varepsilon(\ell)$ de ℓ, existe un entorno $B_\delta(a)$ tq todos los puntos $x \in D \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ tienen sus imágenes en $B_\varepsilon(\ell)$. Para cada $\varepsilon > 0$ $\exists! \, \delta > 0$ tq:

$$x \in D \wedge 0 < d(a,x) < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

* Dados un punto a i un número real $r > 0$ se def. la bola de centro a y radio r, denotada por $B_r(a)$ como el conjunto de puntos cuya distancia a "a" es menor que "r":

$$B_r(a) = \{ x \in \mathbb{R}^n : d(a,x) < r \}$$

- El límite de f en a, si existe, és único $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

- El límite de f en a es $+\infty$ $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si para cada $k > 0$, existe un entorno $B_\delta(a)$ tal que todos los puntos $x \in D \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ cumplen $f(x) > k$ si:

$$x \in D \wedge 0 < d(a,x) < \delta \Rightarrow f(x) > k$$

- El límite de f en "a" es $-\infty$ $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si para cada $K<0$ existe un entorno $B_\delta(a)$ tal que todos los puntos $x \in D \cap (B_\delta(a) \setminus \{a\})$ cumplen $f(x) < K$ si:

$$x \in D \wedge 0 < d(a,x) < \delta \Rightarrow f(x) < K$$