

Théorème de Borsuk-Ulam

Alejandro Argüelles Trujillo, Pablo Hueso Merino, Abderrahman Raouindi

February 2023

Abstract

L'objectif fondamental de ce projet est de fournir une preuve du théorème de Borsuk-Ulam et quelques une de ses applications. Après une présentation du théorème et un exemple d'application pratique, on présente quelques versions équivalentes du théorème, et on donne preuves du théorème en dimensions un et deux. On donne ensuite la preuve avec une approche géométrique pour le cas n -dimensionnel. Pour cela, nous introduisons quelques concepts indispensables, notamment les complexes simpliciaux géométriques, l'homotopie et les triangulations. Pour finir nous allons montrer quelques applications intéressantes du théorème de Borsuk-Ulam.

Contents

1	Introduction	3
1.1	Énoncé du théorème et exemple pratique	3
1.2	Versions équivalentes du théorème	3
1.3	En dimension 1	6
1.4	En dimension 2 : "Premiers pas" vers la topologie algébrique .	6
2	Preuve géométrique	7
2.1	Quelques notions géométriques	8
2.1.1	Simplexes	8
2.1.2	Triangulations	8
2.1.3	Fonctions génériques affines par morceaux	10
2.1.4	Homotopie	11
2.2	Démonstration	11
3	Applications	15
3.1	Théorème de Brouwer	15
3.2	Problème de la division du collier	16
3.2.1	Théorème du collier	16

1 Introduction

Dans cette section, on présente l'énoncé du théorème et son origine, et nous cherchons aussi à faire comprendre que, bien qu'il soit compliqué de prouver le théorème de Borsuk-Ulam en toute généralité, il n'est pas si compliqué de travailler avec ce théorème. Sans trop d'efforts, nous dérivons ici six versions équivalentes du théorème. Plus tard, dans la section des applications, nous déduirons également le théorème de Brouwer comme un simple corollaire. Aussi, on propose preuves relativement simples en dimension 1 et 2 du théorème avec différentes approches avant de passer au cas n -dimensionnel.

1.1 Énoncé du théorème et exemple pratique

Le théorème de Borsuk-Ulam est un résultat profond de la topologie algébrique. Une de ses versions plus faciles à comprendre dit que pour toute fonction continue $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, il existe un point $x \in S^n$ vérifiant $f(x) = f(-x)$.

Une interprétation classique du théorème de Borsuk-Ulam est de considérer en dimension 2 la fonction qu'à tout point de la surface de la Terre (qui joue ici le rôle de sphère S^2) associe sa température et sa pression (supposées comme fonctions continues de l'espace). Il y aurait alors en tout temps deux points antipodaux de la surface de la Terre qui auraient la même température et la même pression. Ces points sont variables dans le temps.

1.2 Versions équivalentes du théorème

Version 1 Pour toute application continue $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ il existe un point $x \in S^n$ satisfaisant $f(x) = f(-x)$.

Version 2 Pour toute application antipodale $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (c'est à dire continue et vérifiant $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in S^n$) il existe un point $x \in S^n$ satisfaisant $f(x) = 0$.

Équivalence entre V1 et V2 Soit $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application antipodale. Alors il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$. Par antipodalité de f on

a $f(x) = f(-x)$, i.e. $f(x) = 0$.

Réciproquement, soit $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. On définit $g(x) = f(x) - f(-x)$ g est une application antipodale donc il existe $x \in S^n$ satisfaisant $g(x) = f(x) - f(-x) = 0$, i.e. x satisfait $f(x) = f(-x)$ \square

Version 3 Il n'y a pas d'application antipodale $f : S^n \longrightarrow S^{n-1}$.

Équivalence entre V2 et V3 Supposons qu'il existe $f : S^n \longrightarrow S^{n-1}$ antipodale. On remarque que $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $0_{\mathbb{R}^n} \notin S^{n-1}$, et cela contredit la version 2 du théorème.

Réciproquement, supposons que $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est antipodale et sans zéros. Alors $g(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|_2}$ est bien définie et contredit la version 3 du théorème. Donc la version 2 et la version 3 sont équivalentes \square

Version 4 Il n'y a pas d'application continue $f : B^n \longrightarrow S^n$ qui est antipodale sur le bord; c'est à dire vérifiant $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \partial B^n = S^{n-1}$

Équivalence de V3 et V4 Tout d'abord, montrons que V4 implique V3. On procède par contraposée. Soit U l'hémisphère supérieur de S^n , i.e. $U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}$. On observe que la projection $\pi : (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est un homéomorphisme de U vers B^n . Alors une fonction antipodale $f : S^n \longrightarrow S^{n-1}$ rendrait $g : B^n \longrightarrow S^n$ antipodale sur ∂B^n avec $g(x) = f(\pi^{-1}(x))$.

Pour la réciproque, on procède également par contraposée. Si $g : B^n \longrightarrow S^n$ est antipodale sur le bord, on peut définir $f(x) = g(\pi(x))$ et $f(-x) = -g(\pi(x))$ pour tout $x \in U$. f est alors définie sur S^n tout entier, car si $x \in S^n$, alors soit $x \in U$ soit $-x \in U$. Il se peut que $x \in U$ et $-x \in U$ (i.e. $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, 0)$, donc $x \in S^{n-1}$). Dans ce cas f reste bien définie, car g est antipodale sur $\partial B^n = S^{n-1}$. Bien sûr, f est continue car continue sur U et sur $-U$ \square

Version 5 Pour tout recouvrement fermé de la sphère F_1, \dots, F_{n+1} par $n+1$ ensembles fermés, il existe au moins un fermé contenant une couple de points

antipodaux; i.e. $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$.

Version 6 Pour tout recouvrement ouvert de la sphère U_1, \dots, U_{n+1} par $n + 1$ ensembles ouverts, il existe au moins un fermé contenant une couple de points antipodaux.

Équivalence V5, V6 et le reste de versions Montrons d'abord que V1 implique V5:

Soit F_1, \dots, F_{n+1} un recouvrement fermé de S^n . On définit une application continue $f : S^n \rightarrow R^n$ par $f(x) = (\text{dist}(x, F_1), \dots, \text{dist}(x, F_n))$. Par V1, on sait qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = f(-x_0)$. Maintenant, si la i -ième coordonnée de $f(x_0)$ est égale à 0, x_0 et $-x_0$ appartiennent à F_i . Si toutes les coordonnées de $f(x_0)$ sont différentes de zéro, alors x_0 et $-x_0$ appartiennent à F_{n+1} \square

Montrons que V5 implique V4:

On procède par contraposée. On utilise le fait qu'il existe un recouvrement fermé F_1, \dots, F_{n+1} de S^{n-1} tel qu'aucun F_i ne contienne une paire de points antipodaux; (pour voir cela, nous considérons un n -simplexe dans R^n contenant 0 dans son intérieur, et nous projetons les faces centralement à partir de 0 sur S^{n-1}). Alors, s'il existe une fonction continue antipodale $f : S^n \rightarrow S^{n-1}$, les ensembles $f^{-1}(F_1), \dots, f^{-1}(F_{n+1})$ contrediraient V5 \square

Maintenant, montrons que V5 implique V6:

On considère un recouvrement ouvert U_1, \dots, U_{n+1} de S^n . Pour tout point x de S^n , on choisit un voisinage V_x dont sa adhérence est contenue dans quelque U_i . L'ensemble des V_x est un recouvrement ouvert de S^n . Donc par compacité, on peut extraire un recouvrement fini V_{x_1}, \dots, V_{x_m} . Maintenant, car

$$\forall x \in S^n, \exists i \in \{1, \dots, n+1\} : \text{ad}(V_x) \subseteq U_i$$

On peut définir:

$$\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, F_i = \bigcup_{x \in \{x_1, \dots, x_m\} : \text{ad}(V_x) \subseteq U_i} \text{ad}(V_x)$$

de sorte que $\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, F_i \subseteq U_i$, F_i est fermé, et F_1, \dots, F_{n+1} est un recouvrement de S^n . Alors, par V5, existe j tel que F_j contient une couple

de points antipodaux, donc U_j aussi \square

Finalelement, montrons que V6 implique V5:

Soit F_1, \dots, F_{n+1} un recouvrement fermé de S^n . On entoure chaque F_i par $U_i = \{x \in S^n : \text{dist}(F_i, x) < \epsilon\}$, on fait $\epsilon \rightarrow 0$ et on utilise la compacité de S^n . Au début on obtient une suite de points x_0, x_1, x_2, \dots de S^n avec $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{dist}(x_j, F_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} \text{dist}(-x_j, F_i) = 0$ pour quelque i fixé. Après, on choisit une sous suite convergente de $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$; la limite est dans F_i car c'est un ensemble fermé, et ça nous fournit la couple antipodale que l'on cherche \square

1.3 En dimension 1

En dimension $n = 1$ la démonstration du théorème de Borsuk-Ulam est une conséquence immédiate du théorème classique des **valeurs intermédiaires**, en effet:

Soit $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue qui vérifie $f(-x) = -f(x)$ (**antipodale**), et soit x_0 un point du cercle, si $f(x_0) = 0$ il n'y a rien à montrer. Sinon supposons par exemple que $f(x_0) > 0$ alors par antipodalité de la fonction f on a $f(-x_0) < 0$, et le Théorème des valeurs intermédiaires permet de conclure car f est continue et l'image du cercle (connexe) est connexe.

Une autre forme manière de voir le choses passe par l'utilisation d'un argument topologique. S^1 est connexe et S^0 ne l'est pas, donc il n'existe pas de $f : S^1 \rightarrow S^0 = (-1, 1)$ continue et antipodale. Cela est la version (V3) du théorème, qui est bien sur équivalente aux autres.

1.4 En dimension 2 : "Premiers pas" vers la topologie algébrique

En dimension $n = 2$, on va voir que l'argument pour montrer le Théorème de Borsuk-Ulam est presque similaire que pour le cas $n = 1$, sauf qu'au lieu d'un argument topologique de connexité on se servira d'un argument de simple connexité et la différence topologique fondamentale qui existe entre la

sphère S^2 et la sphère S^1 .

En fait la sphère S^2 est **simplement connexe**, ce qui veut dire que tout lacet est homotope à un point (on dit null-homotopic). On peut visualiser ça facilement en prenant n'importe quel lacet sur la sphère et via une déformation continue (**une homotopie**) on voit qu'on peut le réduire à un point.

De là on peut définir la notion du groupe fondamental, ou premier groupe d'homotopie, qu'on peut attacher à tout espace topologique X muni d'un point point de base $x_0 \in X$: il se note alors $\pi_1(X, x_0)$. Dans notre cas on voit que $\pi_1(S^2, x_0) = 0$ pour tout $x_0 \in S^2$, alors que $\pi_1(S^1, x_1) \cong \mathbb{Z}$ pour tout $x_1 \in S^1$ (on le voit facilement car sur le cercle S^1 un lacet peut faire $0, 1, \dots, N$ tours avec $N \in \mathbb{Z}$).

On déduit donc notre théorème, et qu'il ne peut exister de fonction continue antipodale g qui va de $S^2 \rightarrow S^1$, car si de telle fonction existe elle induirait naturellement un morphisme g_* non nul de groupes fondamentales ce qui est impossible car $0 \neq \mathbb{Z}$.

Pour le cas général (**n-dimensionnel**) on se propose maintenant de donner une preuve purement géométrique.

2 Preuve géométrique

Pour prouver le théorème de Borsuk-Ulam dans toute sa généralité (dimension quelconque), nous avons décidé d'utiliser une approche géométrique car il utilise des notions plus élémentaires.

2.1 Quelques notions géométriques

2.1.1 Simplexes

Définition (Simplexe): Un simplexe σ est l'enveloppe convexe d'un ensemble de $n + 1$ points utilisé pour former un repère affine dans un espace affine de dimension n . Les points sont appelés **sommets** de σ et la dimension de σ est $\dim \sigma = n$ (ce simplexe est alors appelé un **n-simplexe**).

On appelle une **face** de σ , l'enveloppe convexe de n'importe quel choix arbitraire de sommets du simplexe σ . Ainsi chaque face est aussi un simplexe, et les faces de dimension $(n-1)$ d'un n -simplexe forment ainsi son enveloppe.

Exemples : Un point est un 0-simplexe, un segment est un 1-simplexe, un triangle est un 2-simplexe, un tétraèdre est un 3-simplexe...

2.1.2 Triangulations

Définition (Triangulation): Soit X un espace topologique et Δ un complexe simplicial. On dit que Δ est une triangulation de X si $X \cong ||\Delta||^1$.

Triangulation du n-cube Ici on présentera une méthode pour trianguler le cube n -dimensionnel $[0, 1]^n$. Même si on va pas l'utiliser dans la preuve on le fait de manière introductive, pour après trianguler $X := C^n \times [0, 1]$ (C^n étant $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_\infty = 1\}$, l'intérieur du cube).

La triangulation est la suivante: Soit S_n l'ensemble de permutations de $\{1, \dots, n\}$, pour tout permutation $p \in S_n$ notons

$$\sigma_p = \text{convex}\{0, e_p(1), e_p(1) + e_p(2), e_p(1) + e_p(2) + \dots + e_p(n)\}$$

L'union de ces σ_p forme une triangulation du cube.

On ne donne pas l'explication de pourquoi ceci est vrai car la démonstration est un peu longue et le résultat n'est pas relevant pour la preuve ni pour

¹La notation $||\Delta||$ signifie l'union de tous les simplexes contenus dans Δ .

l'esprit de cet article. Quand même, l'idée est de commencer en $(0, 0, \dots, 0)$ et commencer à bouger un pas dans chaque direction positive de \mathbb{R}^n i.e, e_1, e_2, \dots jusqu'à aboutir le sommet $(1, 1, \dots, 1)$. La figure 1 exemplifie la méthode en dimension $n = 3$.

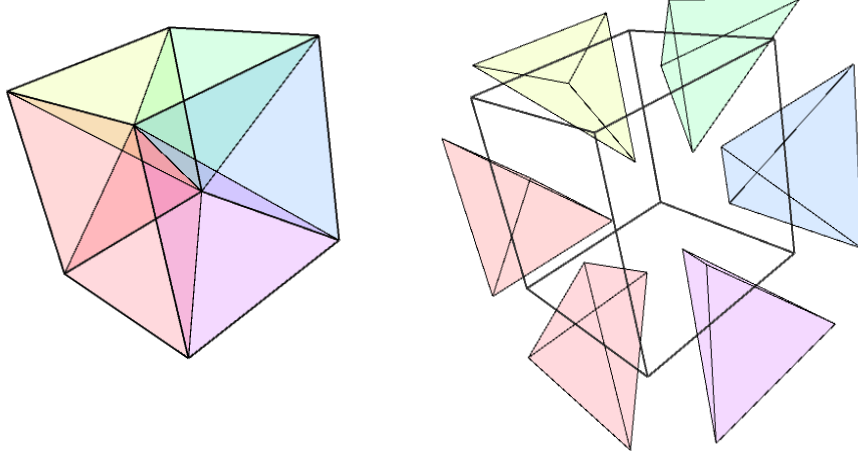


Figure 1: Simplexification du 3-cube en 6 simplexes suivant le méthode de la diagonale. Pour une visualisation plus détaillée aller vers <https://www.youtube.com/watch?v=J4sjaNxI-Ws>

Triangulation du prisme Soit σ un simplexe et $P := \sigma \times [0, 1]$ le prisme $(n+1)$ -dimensionnel de base σ , voici une méthode pour le trianguler: Notons v'_0, v'_1, \dots, v'_n les sommets de la base de P et $v''_0, v''_1, \dots, v''_n$ les sommets du toit de P . Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, notons

$$\sigma_i = \text{convex}\{v'_0, v'_1, \dots, v'_i, v''_i, v''_{i+1}, \dots, v''_n\}$$

Puisque v'_0, v'_1, \dots, v'_i sont affinement indépendants, $v''_i, v''_{i+1}, \dots, v''_n$ aussi et ce deux groupes de points différent dans leur dernière coordonnée, $v'_0, v'_1, \dots, v'_i, v''_i, v''_{i+1}, \dots, v''_n$ sont affinement indépendants et forment un simplexe $(n+1)$ -dimensionnel. Leur union forme une triangulation du prisme.

Triangulation de l'espace $X := C^n \times [0, 1]$.

L'espace X est triangulé comme suit : Nous prenons la surface du cube à n dimensions et examinons chacune de ses faces en les "segmentant" en petits

cubes de dimension $n - 1$. Si nous devons segmenter une arête pour le cas où le cube est de dimension 2, nous le faisons avec autant de coupes équidistantes qu'il est pratique pour la preuve ultérieure. S'il s'agit de segmenter la face d'un cube en 3 dimensions, on fait une grille, un quadrillage de carrés égaux et ainsi de suite pour les dimensions suivantes.

Maintenant, pour chaque partie S de la segmentation de la surface du cube de base, nous la joignons à la même segmentation du cube supérieur de manière à former le prisme $S \times [0, 1]$, que nous triangulerons par la suite comme expliqué précédemment. Ce faisant, nous devons faire attention à la diagonale sur laquelle nous triangulons le prisme afin que la triangulation finale soit invariante par v (voir plus bas).

2.1.3 Fonctions génériques affines par morceaux

Définition: Soit T une triangulation de l'espace X , et f une fonction continue. On dit que $\|f\|$ est une extension affine de f si elle étend f affinement sur chaque simplexe de T , i.e si σ est un simplexe de T et v_1, \dots, v_n ses sommets, pour chaque x à l'intérieur de σ , $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ (cordonnées barycentriques de x), on définit $\|f\|(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(v_j)$.

Cette définition d'extension affine sera utilisée dans la démonstration du Théorème. Une autre notion qui sera introduite dans la démonstration aussi est la "généricité" de l'extension affine et qui on verra consiste à choisir dans l'espace des extensions affines de la fonction f ceux qui ne s'annulent pas sur les simplexes de dimension inférieure strictement à $n - 1$. Si on a une triangulation T d'un espace X , une extension affine est générique sur T si elle ne s'annule pas sur les simplexes de dimension inférieure à $n - 1$, et on peut voir que l'espace de fonctions qui vérifient cette propriété est dense dans l'espace des fonctions affines, car on a un nombre **fini** de simplexes sur T et sur chaque simplexe cet espace de fonctions est dense.

Ceci permettra dans la preuve d'assurer l'existence d'extensions affines et génériques à chaque petite perturbation de notre fonction de départ f .

2.1.4 Homotopie

On va introduire une notion de grande utilité à l'heure de démontrer le théorème. Cette notion est l'homotopie et elle est définie de la manière suivant.

Définition (Homotopie): Soient X et Y deux espaces topologiques et f et g deux fonctions continues de X à Y , une homotopie entre f et g est une fonction continue $H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ qui va de l'espace produit de X avec $[0, 1]$ vers Y tel que $H(\cdot, 0) = f$ et $H(\cdot, 1) = g$.

Voir ci-dessous quelques schémas des homotopies sur le carre et le bord du cube dans les figures 3 et 4. Nous avons également créé des animations plus élaborées de ces concepts qui peuvent être vues dans les liens suivants ² et ³

2.2 Démonstration

On va montrer la deuxième version du théorème (V2) de Borsuk-Ulam (voir 1.2 Versions équivalentes du théorème).

Soit $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue antipodale i.e, $\forall x, f(x) = -f(-x)$, on va montrer par l'absurde que f possède nécessairement un zéro.

Tout d'abord, rappelons que la sphère S^n est homéomorphe à la surface du cube en dimension $n + 1$, ici noté $C^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_\infty = 1\}$ donc on va montrer le résultat pour $f : C^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Introduisons la fonction $g : C^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, la projection "naturelle" en dimension $n + 1$, dans \mathbb{R}^{n+1} on prend que les n premiers coordonnées i.e, $g(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Remarquons que g à exactement deux zéros sur C^n qu'on notera $n = (0, 0, \dots, 1)$ et $s = (0, 0, \dots, -1)$ le "pôle nord" et le "pôle sud" de g .

L'idée principal de la preuve c'est de construire une homotopie bien adaptée entre la fonction g et la fonction f , qui aura un chemin de "zéros", avec comme origine l'un des deux zéros de la fonction g et qui nous mènera

²<https://www.youtube.com/watch?v=iF3DVEncZkU>

³<https://www.youtube.com/watch?v=yIrsT67qgdE>

forcement vers une contradiction vu qu'on a suppose que f n'a pas de zéros.

L'homotopie qu'on veut considérer est définie par

$$F : C^n \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, t) \longmapsto tf(x) + (1 - t)g(x)$$

Notons que F est définie sur l'espace $(n+1)$ -dimensionnel $X := C^n \times [0, 1]$ et notons $C^n \times \{0\}$ le cube de départ (où g agit) et $C^n \times \{1\}$ le cube d'arrivée (où f agit). Conceptuellement, X peut être vu comme un cylindre vide dont chaque extrême est un des cubes antérieurement mentionnés et le bord du cylindre étant l'interpolation de g avec f .

Une notion très important dans la preuve est l'antipodalité. Pour l'instant on a parlé que de l'antipodalité sur les deux cubes $C^n \times \{0\}$ et $C^n \times \{1\}$ mais

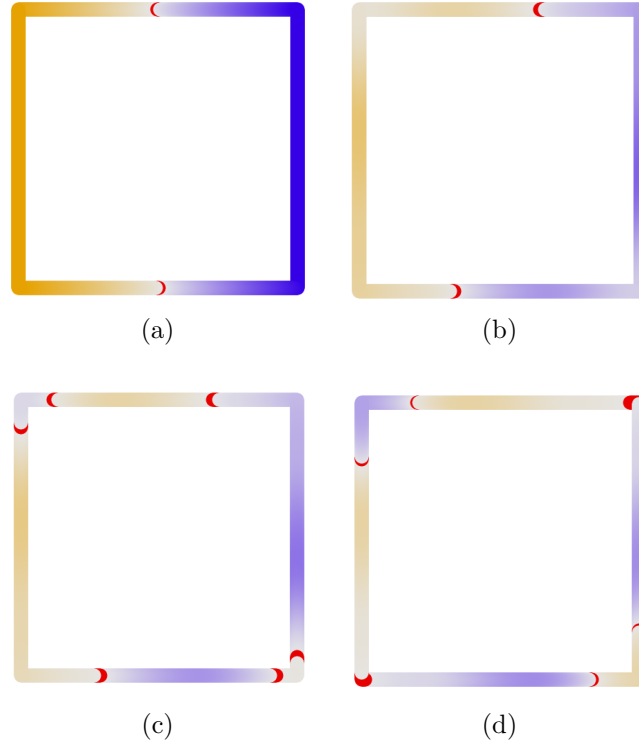


Figure 2: (a) est la fonction f du carré à $[0,1]$ représenté avec un heatmap (0 représenté par le rouge), (d) est g et (b) et (c) étant $H(\cdot, 0.3)$ et $H(\cdot, 0.6)$

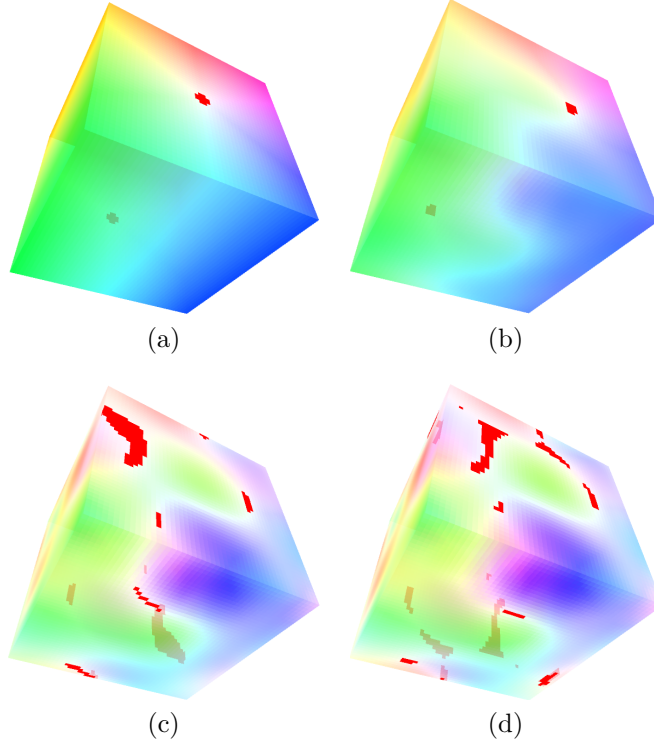


Figure 3: (a) représente la fonction f du bord du cube carré à \mathbb{R}^2 représenté avec un colormap (0 représenté par le rouge), (d) est g et (b) et (c) étant $H(\cdot, 0.3)$ et $H(\cdot, 0.6)$

on va la prolonger a X de la façon suivante: l'antipodal d'un point (x, t) dans X est $(-x, t)$ ⁴. On notera a partir de maintenant v cette application.

Regardons l'ensemble $Z := F^{-1}(0) \subset C^n \times [0, 1]$ des zéros de la fonction F . Cet ensemble, et pour des fonctions f suffisamment "génériques", va être formé de cycles et de chemins. Le coeur de la preuve va être d'approcher F par des fonctions affines par morceaux génériques, dont leurs zéros auront très clairement cette propriété et voir dans chaque approximation que f doit avoir des zéros (par l'absurde). Finalement, par compacité on conclura que F aura de zéros sur le cube d'arrivée $C^n \times \{1\}$, et donc f aussi.

Tout d'abord puisque on suppose que $f : C^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ n'a pas de zéro (par l'absurde), on peut donc trouver un $\epsilon > 0$ tel que $\|f(x)\| > \epsilon \forall x \in C^n$ (par

⁴ $(x, t) := (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, t) \in \mathbb{R}^{n+2}$

compacité de C^n)

On va maintenant décrire une méthode pour construire des approximations \tilde{F} de F de telle manière qui va nous permettre que:

1. \tilde{F} soit affine par morceaux.
2. $\left\| \tilde{F} - F \right\|_{\infty} < \frac{\epsilon}{2}$.
3. Chaque \tilde{F} ne possède pas de 0 sur le cube d'arrivée $C^n \times \{1\}$
4. \tilde{F} soit générique.

A fin d'atteindre cet objectif, nous nous servons de la triangulation T (fait dans Triangulation de l'espace X , section 2.1.2). Cette triangulation sera invariante par v , c'est à dire $\forall \sigma \in T, v(\sigma) \in T$.

Maintenant on fait des successives subdivisions barycentriques jusqu'à que le diamètre de chaque simplexe soit assez petit pour qu'on aie 2 (par uniforme continuité de F sur X). Alors notre \tilde{F} va être la fonction affine par morceaux qui coïncide avec F sur les sommets de la triangulation et dont l'intérieur des simplexes est défini par extension affine de ses sommets. On a trouve une perturbation vérifiant le premier et le deuxième prérequis.

On rappelle que on avait choisi $f : C^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que n'avait pas de zéros. Par compacité, il va exister un $\epsilon > 0$ tel que $\|F(x)\| > \epsilon \forall x \in C^n$. Grâce a cela on va pouvoir assurer que si $\left\| \tilde{F} - F \right\|_{\infty} < \frac{\epsilon}{2}$ alors \tilde{F} n'a pas des zéros. Troisième prérequis aussi vérifié.

Il reste a perturber un peu \tilde{F} pour obtenir le dernier prérequis et que l'approximation de F soit aussi générique. Ceci est possible d'après la densité des fonctions génériques dans l'espace de fonctions affines par morceaux. Sur le cube de départ $C^n \times \{0\}$ on choisit les zéros de g (\tilde{s} et \tilde{n}) afin qu'ils soient à l'intérieur d'un simplexe.

Maintenant qu'on à construit \tilde{F} assez générique, $Z = F^{-1}(0)$ est forme des cycles polygonaux et d'un chemin polygonal γ de dimension 1 qui relie \tilde{n} et \tilde{s} (les zéros de g). Notons que ce dernier est vrai car on a suppose que \tilde{F} n'a pas de zéros sur le cube d'arrivée $C^n \times \{0\}$ et car on a un nombre fini de simplexe qui Z peut parcourir.

Remarquons pour finir que γ est invariant par v , donc il aurait un point fixe ($v(x) = x$ et $v(x) = -x$ ce qui est impossible). \square

Important: En pratique l'ajustement de la fonction F se fait dans le processus de suivi de l'arc du polygone. Quand l'arc intersecte un simplexe de dimension inférieure à n , F sera ajustée pour supprimer cette intersection. Cette méthode peut ainsi être implémentée numériquement pour trouver les zéro de la fonction f en suivant l'arc du polygone (**simplex method of linear programming**).

3 Applications

Dans cette section, nous montrons quelques-unes des diverses applications du théorème. Bien qu'il s'agisse d'un théorème de topologie, nous verrons qu'il n'est pas seulement utile pour prouver des théorèmes dans cette branche, mais qu'il a des applications surprenantes en combinatoire, par exemple.

3.1 Théorème de Brouwer

Théorème : Soit un entier $n \geq 1$, et soit B^n la boule unité de R^n , tout application continue $f : B^n \longrightarrow B^n$ possède un point fixe.

Preuve :

Supposons que f n'a aucun point fixe. Soit $g : B^n \longrightarrow S^{n-1}$ la fonction qui associe à x l'intersection de la sphère avec la demi-droite reliant x à $f(x)$. La fonction g est bien définie car on a supposé par l'absurde que la fonction f n'a pas de point fixe.

La fonction g est la fonction identité sur le bord de la boule ∂B^n (i.e. sur la sphère S^{n-1}), donc en particulier elle est antipodale, or ceci est impossible (voir Version 4 (V4) du théorème).

Donc f admet bien un point fixe. \square

3.2 Problème de la division du collier

Deux voleurs ont volé un collier précieux d'une valeur presque incommensurable, non seulement à cause des pierres précieuses (diamants, saphirs, rubis, etc.), mais aussi parce que celles-ci sont serties dans du platine pur. Les voleurs ne connaissent pas la valeur des pierres de différentes sortes, et ils veulent donc diviser les pierres de chaque sorte de manière équitable. Aussi, afin de dépenser le minimum de platine possible, ils veulent diviser le collier avec le minimum de coupures possible. On suppose que le collier est ouvert (avec deux bouts). On suppose qu'il y a n sortes de pierre différentes, et que chaque pierre apparaît un nombre pair de fois (pour qu'une division équitable puisse exister). C'est facile de voir qu'on peut avoir besoin d'au moins n coupures pour trouver une division équitable (on met les pierres du premier type ensembles, après toutes les pierres du deuxième type...) En fait le théorème du collier montre que cela est le pire cas possible.

3.2.1 Théorème du collier

Tout collier (ouvert) à n sortes de pierres peut être divisé équitablement entre deux voleurs avec au plus n coupures.

Pour démontrer ce théorème dans le cas discret, il suffit de le montrer dans son cas continu; voyons pourquoi:

Donner n coupes d'un collier (ouvert) revient à donner n coupes de l'intervalle $[0, 1]$. Imaginons qu'on a n types de pierre et t_i pierres du type i ; en total on a d pierres avec $d = \sum_{i=1}^n t_i$. On divise alors $[0, 1]$ en d intervalles de la forme $[\frac{k-1}{d}, \frac{k}{d}[$ (la pierre k -ième correspond à cet intervalle). Maintenant supposons qu'on a trouvé une division équitable avec au plus n coupes (on assigne '+' ou '-' à chaque partie du collier si c'est pour le premier voleur ou le deuxième, respectivement). On peut avoir un nombre de coupures non entières supérieur à 0 (avec une coupure non entière on veut dire qu'une pierre serait coupée; la coupure n'est pas située dans un point de la forme $\frac{k}{d}$) mais précisément parce que la division est équitable et à chaque voleur le correspond un nombre entier de pierres, si il y a une coupure qui coupe une pierre, alors il y a forcément une autre qui coupe une pierre du même type. On peut décaler les deux coupures de sorte que l'équilibre est conservé. On procède par récurrence sur le nombre de coupures non entières, et on obtient une division équitable entière. Donc il suffit de montrer le théorème

du collier dans son continu.

On note pour tout $k \in \{1, \dots, d\}$, $type([\frac{k-1}{d}, \frac{k}{d}[) = i$ si cet intervalle correspond à une pierre du type i . À continuation, pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$ on définit les ensembles $T_i = \{x \in [0, 1] : \exists k \in \{1, \dots, d\} : x \in [\frac{k-1}{d}, \frac{k}{d}[\text{ et } type([\frac{k-1}{d}, \frac{k}{d}[) = i\}$ c'est à dire, T_i est l'ensemble de points x de $[0, 1]$ tels que x est situé dans une pierre du type i . On définit maintenant les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{T_i}$ (qui vaut 1 si x est dans une pierre du type i et 0 sinon). Chaque indicatrice définit une mesure sur $[0, 1]$ par $\mu_i(A) = \int_A \mathbb{1}_{T_i}(x) dx$. $\mu_i(A)$ indique donc la fraction de pierre du type i qui est dans la partie A du collier.

Maintenant, notons qu'il y a une correspondance univoque entre choisir un point de S^n et diviser l'intervalle $[0, 1]$ en $n + 1$ parties (n coupes produisent $n+1$ parties): avec tout point $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in S^n)$, on choisit $n+1$ parties de $[0, 1]$ de longueurs respectives $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2, x_{n+1}^2$, c'est à dire, chaque coupe est située en $c_i = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_i^2 \in [0, 1]$, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n, n + 1\}$. Après, chaque partie $I_j = [c_{j-1}, c_j]$ correspond à un des deux voleurs. Notons s_i le signe de la i -ième partie. Le signe s_j est choisi avec $s_j = sign(x_j)$. Alors on peut définir une fonction continue $g : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (coordonnée par coordonnée):

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n+1} sign(x_j) \mu_i(I_j)$$

Si on définit $g(x)$ ainsi, $g_i(x)$ représente la quantité de pierre du type i qui correspond au premier voleur moins la quantité de pierre du type i qui correspond au deuxième. La fonction est clairement antipodale, donc par la deuxième version de Borsuk-Ulam il existe $x \in S^n$ vérifiant $g(x) = 0$. Un tel x nous donne une division équitable. \square