Problemas

1. Sea X una variable aleatoria discreta que toma valores 0, 1, -1 con probabilidad $p(X=0)=1/2$, $p(X=1)=\ a$, $p(X=-1)=1/2-a$ donde $0<a<1/2$ es desconocido. Sea $X_1,\dots,X_n$ una muestra aleatoria de X y sea $\bar{X}=\frac{X_1+\dots+X_n}{n}$ el promedio muestral. Definimos el estimador

$$T=\frac{\bar{X}}{2}+\frac{1}{4}$$

(a) Calcula $E(T)$ y $var(T)$.

(b) ¿Es T un estimador insesgado y consistente de a? Justifica tu respuesta.

2. Sea X una variable aleatoria. Hemos visto que $\overline{X}$ (promedio muestral) es un estimador insesgado de $E(X)$.
¿$\overline{X}^2$ es un estimador insesgado de $(E(X))^2$? Justifica tu respuesta.

3. Sigui $X_1,\dots,X_n$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria X que té funció de densitat

$$f_X(x)=\begin{cases}(1+\theta)x^{\theta}, & 0<x<1\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases}$$

on $\theta>-1$. Una mostra aleatòria produeix les dades:

$$x_1=0.92;\ x_2=0.79;\ x_3=0.90;\ x_4=0.65;\ x_5=0.86.$$

(a) Calculeu $E(X)$, en funció del paràmetre θ.

(b) Trobeu un estimador $\hat{\theta}$ del paràmetre θ pel mètode dels moments.

(c) Quina és l'estimació del paràmetre θ corresponent a la mostra de cinc dades?

4. Sigui $X_1,\dots,X_n$ una mostra aleatòria simple d'una variable aleatòria X que té funció de densitat

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{\theta}e^{-x^2/(2\theta)}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

Una mostra aleatòria produeix les dades:

$$x_1=16.88;\ x_2=10.23;\ x_3=4.59;\ x_4=6.66;\ x_5=13.68.$$

(b) Trobeu un estimador $\hat{\theta}$ del paràmetre θ pel mètode de la màxima versemblança.

(c) Quina és l'estimació del paràmetre θ segons la mostra de cinc dades?

5. El tiempo de vida útil (T) de un dispositivo es una variable aleatoria continua con la siguiente función de densidad:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda(t-\tau)}, & t \geq \tau \\ 0, & \text{otros} \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$ y τ son parámetros. Sabemos que su valor esperado es

$$E(T) = \tau + \frac{1}{\lambda}$$

Sea $T_1, T_2, \ldots, T_n$ una muestra aleatoria simple de T:

(a) Supón τ conocida y determina el estimador ($\hat{\lambda}_V$) de máxima verosimilitud del parámetro λ.

(b) Supón τ conocida, determina el estimador ($\hat{\lambda}_M$) de λ por el método de los momentos.

(c) Supón λ conocida, determina el estimador ($\hat{\tau}_M$) de τ por el método de los momentos.

6. Considera una variable aleatoria continua (X) con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha x\, e^{-\alpha x^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

donde α es un parámetro.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple, determina el estimador ($\hat{\alpha}$) de máxima verosimilitud del parámetro α

7. Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria exponencial de parámetro $1/\beta$, $X \hookrightarrow \epsilon\ (1/\beta)$, que tiene por función de densidad $f(x) = \dfrac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$, $x > 0$. Sabiendo que la esperanza de una variable aleatoria exponencial es el inverso de su parámetro ($E(X) = \beta$), y la varianza este valor al cuadrado ($VAR(X) = \beta^2$). Se pide:

(a) Encuentra un estimador $\hat{\beta}$ del parámetro β, por el método de la máxima verosimilitud.

(b) ¿Cuál es la estimación del parámetro β a partir de la muestra aleatoria siguiente: $x_1 = 0.81$, $x_2 = 0.68$, $x_3 = 0.89$, $x_4 = 0.54$, $x_5 = 0.75$?

(c) Calcula la esperanza y la varianza del estimador encontrado. Razona si es un estimador consistente.

8. Sea X una variable aleatoria continua que tiene por función de densidad:

$$f(x) = \frac{2(\theta - x)}{\theta^2},\ 0 \leq x \leq \theta.$$

Sea $X_1, \cdots, X_n$ una muestra aleatoria simple de X. Encuentra un estimador $\hat{\theta}$ del parámetro θ, por el método de los momentos.