

Estadística

Problemas del tema 6

1. Una cierta componente es crítica en la operación de un sistema eléctrico y debe ser reparada inmediatamente si falla. La vida media de la componente es de 100 horas y su desviación estándar es 30 horas.

- a) Si se toma una muestra de 50 componentes, ¿cual es la probabilidad de que la media muestral no difiera de la media poblacional más de 1 hora?
- b) ¿Cuántas componentes deben tenerse preparadas en stock para que la probabilidad de que el sistema funcione durante 2750 horas consecutivas sea 0.95? (asume que la duración de la componente es una variable normal)

2. En una industria alimentaria, un sistema automático envasa al vacío raciones de platos preparados. El peso de las raciones envasadas es una variable aleatoria X con media $\mu_x = 250$ gr, y desviación típica $\sigma_x = 20$ gr. Posteriormente, las raciones se empaquetan en lotes de 50 unidades para su distribución. Sea Y el peso, en kg, de un lote de 50 unidades.

- (a) Cuál es la distribución de probabilidad aproximada de la variable aleatoria Y .
- (b) Calcula la probabilidad de que un lote de 50 unidades pese más de 12.75 kg.
- (c) El sistema de envasado permite ajustar el valor de μ_x ¿Qué valor de μ_x debemos usar para que el 95% de los lotes de 50 unidades tengan un peso inferior a 11.5kg?

3. Les alçades de 10000 estudiants tenen una distribució aproximadament normal de mitjana $\mu = 174.5$ cm i desviació típica $\sigma = 6.9$ cm. Considereu una mostra aleatòria simple de 25 estudiants

$$X_1, X_2, \dots, X_{25}$$

i la seva mitjana mostral $\bar{X} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} X_i$.

- (a) Calculeu l'esperança i la desviació típica de la mitjana mostral.
- (b) Calculeu la probabilitat que la mitjana mostral sigui inferior a 173.
- (c) Considereu ara un conjunt de 200 mostres aleatòries de 25 estudiants cadascuna. Sigui \bar{X}_1 la mitjana mostral de la primera mostra, \bar{X}_2 la mitjana mostral de la segona mostra, i així successivament. Sigui ara Y la variable aleatòria discreta que mesura quantes d'aquestes mitjanes mostrals són inferiors a 173. Quin és el valor esperat de mitjanes mostrals que seran inferiors a 173?
- (d) Quina hauria de ser la mida de la mostra perquè el valor esperat de mitjanes mostrals que són inferiors a 173 sigui 9?

4. El temps de vida útil d'una màquina de fer pa és un variable aleatòria normal amb mitjana de 7 anys i desviació típica d'un any.

- (a) Determineu la probabilitat de que la vida mitjana d'una mostra aleatòria de 9 d'aquestes màquines estigui compresa entre 6.4 i 7.2 anys.
- (b) Determineu el valor θ pel qual el 15% de les mitjanes de mostres aleatòries de mida 9 siguin majors a θ (percentil 85).

5. Un proceso industrial está formado por n pasos sucesivos independientes. La duración de cada paso X_i , con $i = 1, 2, \dots, n$, varía de manera aleatoria según una distribución de media 10 minutos y desviación típica de 1 minuto. Sea $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ la duración total (en minutos) del proceso.

- (a) Si el número de pasos es $n = 100$, calcula la probabilidad que el proceso total tenga una duración superior a 1025 minutos.
- (b) Si sabemos que la duración total del proceso cumple $P(X \leq 655.68) = 0.975$, ¿cuál es, en este caso, el número de pasos del proceso?

6. La probabilidad que una determinada pieza sea defectuosa es 0.4. Si analizamos 2000 piezas, ¿cuál es la probabilidad que el número de piezas defectuosas se sitúe entre 791 i 809, ambos incluidos?

7. Una máquina fabrica resistencias eléctricas que tienen una media de 40 ohms y una desviación estándar de 2 ohms. Considera una muestra aleatoria simple de 36 de esas resistencias $(R_1, R_2, \dots, R_{36})$ para contestar a las siguientes cuestiones:

- (a) Calcula la esperanza y la desviación estándar de la media muestral.
- (b) Calcula la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 39.5 ohms.
- (c) Calcula la probabilidad de que si se conectan en serie todas las resistencias de la muestra, la resistencia total (R_T) sea mayor que 1458 ohms? Ten en cuenta que $R_T = \sum_{i=1}^{36} R_i$

8. Se sabe que la vida útil de una máquina tiene una desviación estándar de 16 meses, se pide:

- (a) Si se considera una muestra aleatoria de 10 máquinas, ¿puedes calcular la probabilidad de que la media muestral esté entre ± 2 meses de la media poblacional (error estándar ≤ 2)? Justifica tu respuesta.
- (b) Calcula el tamaño de la muestra para que la probabilidad de que la media muestral esté entre ± 2 meses de la media poblacional sea 0.9.

9. La media de la vida útil de cierta bombilla es 3000 horas con una desviación típica de 696 horas. Si se toma una muestra aleatoria simple de 36 bombillas.

- (a) ¿Cuál es el valor esperado, la desviación típica y la distribución de la media muestral?

- (b) Halla la probabilidad de que la media muestral esté entre 2670.56 y 2809.76 horas
- (c) ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para tener una probabilidad de 0.01 de que la media muestral sea igual o mayor que 3219.24 horas?

10. El peso de los adultos del género masculino en una población se distribuye normalmente con una media de 78 kg y una varianza de 169 kg².

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un grupo seleccionado de forma aleatoria de 36 hombres tenga un peso promedio de menos de 75.7 kg?
- (b) Si se toma una muestra de n hombres, ¿cuál debería ser como máximo el tamaño de la muestra n para que la suma de sus pesos sea superior a 3200 kg con una probabilidad menor a 1.5%?

11. Un cierto tipo de cable se fabrica con una resistencia media a la tracción de 80 kg y una varianza de 36 kg².

- (a) Si se selecciona de forma aleatoria una muestra de 9 cables, ¿cuál es la probabilidad de que su resistencia media sea menor que 79 kg?. Si la muestra es de n cables, ¿cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra (n) para que el promedio de sus resistencias sea menor que 79 kg con una probabilidad menor a 5%?
- (b) Un cliente exige que, para una muestra de 9 cables, el promedio de sus resistencias sea menor que 79 kg con una probabilidad menor a 5%. El proceso de fabricación permite variar la resistencia media, pero no su varianza. Para optimizar costos, ¿cuál debería ser el valor mínimo de la resistencia media de fabricación para satisfacer al cliente?. Asuma que la resistencia sigue una distribución normal.

12. Una compañía realiza a sus 1000 empleados una prueba de aptitud. Los resultados de la prueba están distribuidos normalmente con una media de 75 puntos y una desviación típica de 15 puntos. Se pide:

- (a) Si se toma una muestra de 25 de los 1000 resultados de la prueba, calcula la probabilidad de que la diferencia entre la media de la muestra y la media de la población sea menor o igual a 5 puntos. ¿Cuál es el valor de esta probabilidad si el tamaño de la muestra es de 100?. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, ¿cuál es tu conclusión principal?
- (b) Si se toma una muestra de 9 resultados de la prueba, encuentra el valor C tal que la probabilidad de que la media de la muestra sea mayor que C valga 0.015.