Estadística

Problemas del tema 5

1. En un laboratorio de energía nuclear se van a realizar diferentes experimentos con particulas radiactivas. Ayuda a los experimentadores resolviendo las siguientes cuestiones:

(a) Se considera un experimento con un contador de partículas radiactivas, por el que las partículas pasan de manera independiente. Sea λ el número medio de partículas que pasan por minuto. Sea X la variable aleatoria "número de partículas que pasan por minuto", y sea Y la variable aleatoria "número de partículas que pasan por medio minuto". Si la probabilidad de que el contador mida al menos una partícula radiactiva en un minuto es de 0.996, calcula la probabilidad de que el contador mida menos de 2 partículas radiactivas en medio minuto.

(b) Determina el valor del primer cuartil de la variable aleatoria Y.

(c) En un recinto del laboratorio, en el que podemos considerar que disponemos de una infinidad de partículas, hay partículas radiactivas y no radiactivas. Se sabe que hay un 20 % de partículas radiactivas. Seleccionamos al azar 5 partículas con un microcaptador. Calcula la probabiliad de que la mayoría de las particulas seleccionadas no sean radiactivas.

(d) Calcula y explica el valor esperado de la variable aleatoria del apartado (c).

2. Sabemos que un 2% de las copias de un libro son defectuosas. De 50 copias de este libro:

(a) ¿cuál es la probabilidad de que como mínimo 3 de ellas no sean defectuosas?

(b) Calcula la probabilidad de que 3 libros sean defectuosos. ¿Cómo se calcularía usando una distribución de Poisson?

3. Estamos interesados en estudiar el tiempo de espera en una determinada parada de una linea de autobuses urbanos. En condiciones de tráfico normal, el número de autobuses que pasan cada hora por la parada es una variable aleatoria que tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda = 6$ autobuses/hora.

(a) Un viajero llega a la parada en el momento justo que acaba de salir el autobús. Calcula la probabilidad de que tenga de esperar más de 20 minutos hasta la llegada del próximo autobús.

(b) Un viajero ha llegado a la parada en el momento justo que acababa de salir el autobús, y lleva 10 minutos esperando. Calcula la probabilidad de que, a partir de ese momento, tenga de esperar menos de 10 minutos adicionales hasta la llegada del próximo autobús.

4. En una población, la probabilidad de que en un parto nazca un niño es $p = 0.51$. Consideramos una familia de 4 hijos.

(a) Determina la probabilidad de que tenga exactamente un niño o exactamente una niña.

(b) Calcula la probabilidad de que la familia tenga al menos dos chicos.

(c) Consideremos otra familia. Calcula el número exacto de hijos que debe tener para que la probabilidad de tener al menos una chica sea mayor de 0.75.

5. El número de personas que cogen la baja laboral en una empresa por día sigue una distribución de Poisson. El porcentaje de días en que se produce una única baja es la mitad del porcentaje de días en el que no se produce ninguna baja.

(a) Calcula el número medio de bajas por día.

(b) Calcula la probabilidad de que en un día haya 2 bajas y el día siguiente haya 2 bajas más.

(c) Calcula la probabilidad de que en el periodo de 3 días haya, como máximo, 2 bajas.

6. Sea X la distancia en metros que recorre un animal desde el lugar donde nace hasta el primer territorio desocupado que encuentra. Según el artículo "Competition and dispersal from multiple nests"publicado en la revista científica Ecology, para las ratas canguro, la distancia X se puede modelar mediante una variable aleatoria con distribución exponencial con parámetro $0.01386m^{-1}$.

¿Cuál es el valor de la distancia mediana que recorre un animal desde el lugar donde nace hasta el primer territorio desocupado que encuentra?

7. En un Hospital se está experimentando con dos tratamientos. El 40% de los pacientes recibe el tratamiento A y el 60% restante el tratamiento B. De los que reciben el tratamiento A, el resultado es positivo en un 80% de los casos, lo que quiere decir que se curan. De los que reciben el tratamiento B, un 70% de los casos se curan (resultado positivo).

(a) Calcula la probabilidad de que un paciente haya recibido el tratamiento A, sabiendo que se ha curado.

(b) Seleccionamos 5 pacientes al azar. Calcula la probabilidad de que al menos 3 de estos pacientes se curen (independientemente del tratamiento que hayan recibido).

8. La probabilitat de rebre de manera errònia un bit enviat per un canal de transmissió digital és de 0.1. Siguin els resultats de les transmissions independents. Indiqueu la variable aleatòria i el model de distribució que feu servir a cada apartat.

(a) Calculeu la probabilitat que hagi 15 bits correctament rebuts abans del primer erroni.

(b) Si hem rebut 50 bits, quina és la probabilitat que s'hagi rebut, com a molt, 3 bits erronis?

9. A un gran magatzem, el número de clients que arriben a una caixa cada 15 minuts pot modelar-se com un procés de Poisson de mitjana 5.

(a) Calculeu la probabilitat que un individu, situat a la cua d'una caixa, hagi d'esperar més de 3 minuts fins deixar de ser l'últim.

(b) Si un individu ja porta 3 minuts esperant a la cua d'una caixa, calculeu la probabilitat que hagi d'esperar menys de 6 minuts fins deixar de ser l'últim.

10. Un satélite está formado por cuatro componentes. El satélite funciona perfectamente si al menos dos de los cuatro componentes funcionan correctamente. Cada componente funciona de forma independiente y la probabilidad que cada componente funcione correctamente es de 0.6. Sea X la variable aleatoria discreta que cuenta el número de componentes del satélite que funcionan correctamente.

(a) ¿Cuál es la probabilidad que el satélite funcione perfectamente?

(b) Calcula (en función de k), el resultado de:

$$\frac{P(X = k + 1)}{P(X = k)}$$

para $k = 0, 1, 2, 3$.
ATENCIÓN: No se trata de una probabilidad condicionada.

11. El número de seísmos registrados durante un período de 100 años en cierta región montañosa se distribuye según un modelo de Poisson de media 2.1 seísmos/siglo. Sabiendo que la región lleva 10 años sin seísmos, calcula la probabilidad de que no pase en total un cuarto de siglo para que aparezca el próximo seísmo.

12. En un día festivo, la probabilidad de ser atendido cuando una persona llama para reservar mesa en alguno de los restaurantes de una determinada cadena es del 40%. Si llaman 10 personas, ¿cuál es la probabilidad de que como mínimo 2 no sean atendidas? Indica la variable aleatoria y el modelo de distribución.

13. Un sistema con 5 componentes requiere para su funcionamiento que al menos 4 estén disponibles. Se sabe que la probabilidad de funcionamiento de un componente es 0.95 y que los fallos se producen de forma independiente. Se pide:

(a) Declara la variable aleatoria X que cuenta el número de componentes que funcionan correctamente en el sistema. Calcula la probabiliad para que un sistema funcione.

(b) En una empresa que emplea un gran número de estos sistemas, un ingeniero de control supervisa continuamente los sistemas, seleccionándolos de forma aleatoria y analizando su estado de funcionamiento. Declara la variable aleatoria Y que cuenta el número de sistemas analizados hasta que el ingeniero encuentra 2 sistemas que no funcionen. Calcula $P(Y \geq 4)$.

(c) Calcula el valor esperado de los apartados anteriores. Comenta estos valores.

14. En un determinado parque eólico, el tiempo entre dos incidentes consecutivos producidos por la caída de rayos se puede modelar mediante una variable aleatoria exponencial T con media $\mu_T = 52.8$ días.

(a) Calcula la probabilidad de que en este parque se produzca un período superior a 120 días sin ningún incidente por caída de rayos.

(b) Sabiendo que han transcurrido 42 días desde el último incidente, calcula la probabilidad de que se produzca algún incidente en los próximos 30 días.

(c) El tiempo mediano entre incidentes es el valor M_T que cumple $P(T \leq M_T) = 0.5$. Calcula el valor de M_T. Observando el valor de M_T, ¿crees que el tiempo medio μ_T es un buen descriptor de tendencia central para este tipo de variable?

15. El 30% de los habitantes de Barcelona durante la primavera padecen de alergia. Durante una noche de primavera en una de las salas de urgencias del Hospital Clínico se registró la asistencia de 20 enfermos de diversas dolencias. Suponiendo aleatoriedad, se pide:

(a) Calcula la probabilidad de que al menos 3 de ellos fueran asistidos por alergia.

(b) Si finalmente de entre los 20 enfermos se sabe que el 25% sufrían de alergia. Calcula la probabilidad de que al reunir aleatoriamente a 7 del total de enfermos (o sea de los 20) en una sala de reposo adjunta la mayoría fueran enfermos por alergia.

16. En cierta reacción nuclear los tiempos de vida de las partículas NNN se distribuyen normalmente y los tiempos de vida de las partículas EEE se distribuyen exponencialmente. Se sabe que la probabilidad de que las partículas NNN vivan más de 42 horas es de 0.9452 y de que superen las 52 horas de vida es de 0.34458. Y se sabe que la probabilidad de que las partículas EEE vivan más de 48 horas es de 0.38122. Se pide:

(a) Calcula la probabilidad de que una partícula NNN no viva más de 2 días.

(b) Calcula la probabilidad de que una partícula EEE que ha vivido 2 días no viva 2 horas más.

17. Responde a las siguientes cuestiones:

(a) El número de averías en una línea de tren por mes sigue un modelo probabilístico de Poisson. Se ha comprobado experimentalmente que, en el periodo de un mes, es igual de probable que se produzca alguna avería o ninguna. Con esta información, determina la probabilidad de que haya más de una avería a lo largo de tres meses.

(b) La empresa pone "sello plus"a un trimestre sin averías. A partir del primero de Enero, se quiere predecir el número de trimestres con averías que han de pasar hasta que se observe el primer trimestre plus. Expresa la función de probabilidad de la variable que predice dicho número y calcula su valor medio. Calcula la probabilidad de que tengan que pasar dos trimestres con averías antes de observar el primer trimestre "plus".

18. En cierta intersección vial ocurren (en promedio) 3 accidentes por mes. Asumiendo que todos los meses tienen 30 días y que existen 360 días en el año, se pide:

(a) La probabilidad de que en esa intersección pasen 3 meses hasta encontrar un mes con un máximo de 1 accidente.

(b) El número de días al año en que se espera que no haya accidentes en la intersección.