Práctica 3

Alejandro Cáceres
UPC - Statistics 2019/2020

Objetivo

Regresión líneal

- Ajuste por mínimos cuadradros
- Predicción

Regresión líneal

El ozono es tóxico para la salud, complica casos de asma y de obstrucción polmunar crónica

Si trabajas en la AEMET y tienes que predecir los días que pueden haber niveles altos de ozono para que la agencia de salud pública envíe una alarma de contaminación alta; que predictor usaras, la temperatura o la radiación solar?

A qué temperatura activarías la alarma de contaminación por ozono (niveles mayores de 60)?

cargar y guardar datos

La función **read.table** lee un un fichero de texto en un data.table

```
a <- read.table(file="data.txt", sep=";",
header=TRUE, na.string="NA")
```

- `file="data.txt"` es el nombre del fichero en comillas
- `sep=";"` es la separación de los datos por ;
- `header=TRUE` lee la primer fila como los nombres de las variables
- `na.string="NA"` codifica los missings como NA

cargar datos

Hemos cargado en la variable **a** los datos de airquality que habiamos almacenado en un fichero de texto

```
> head(a)
  Ozone Solar.R Wind Temp Month Day
1    41     190  7.4   67     5   1
2    36     118  8.0   72     5   2
3    12     149 12.6   74     5   3
4    18     313 11.5   62     5   4
7    23     299  8.6   65     5   7
8    19      99 13.8   59     5   8
```

Ozone

Convirtamos ozono en una variable categórica

dozone

```
> a$Ozone
> n <- min(a$Ozone, na.rm=TRUE)
> x <- max(a$Ozone, na.rm=TRUE)
> s <- seq(n, x , length=10)
> dozone <- cut(a$Ozone,breaks=s,right=FALSE)
> dozone
  [1] [38.1,56.7) [19.6,38.1) [1,19.6)     [1,
  [6] [19.6,38.1) [19.6,38.1) [1,19.6)     [1,
> head(a$Ozone)
[1] 41 36 12 18 NA 28
```

a cada valor de ozono se le asigna un intervalo.

Ozone

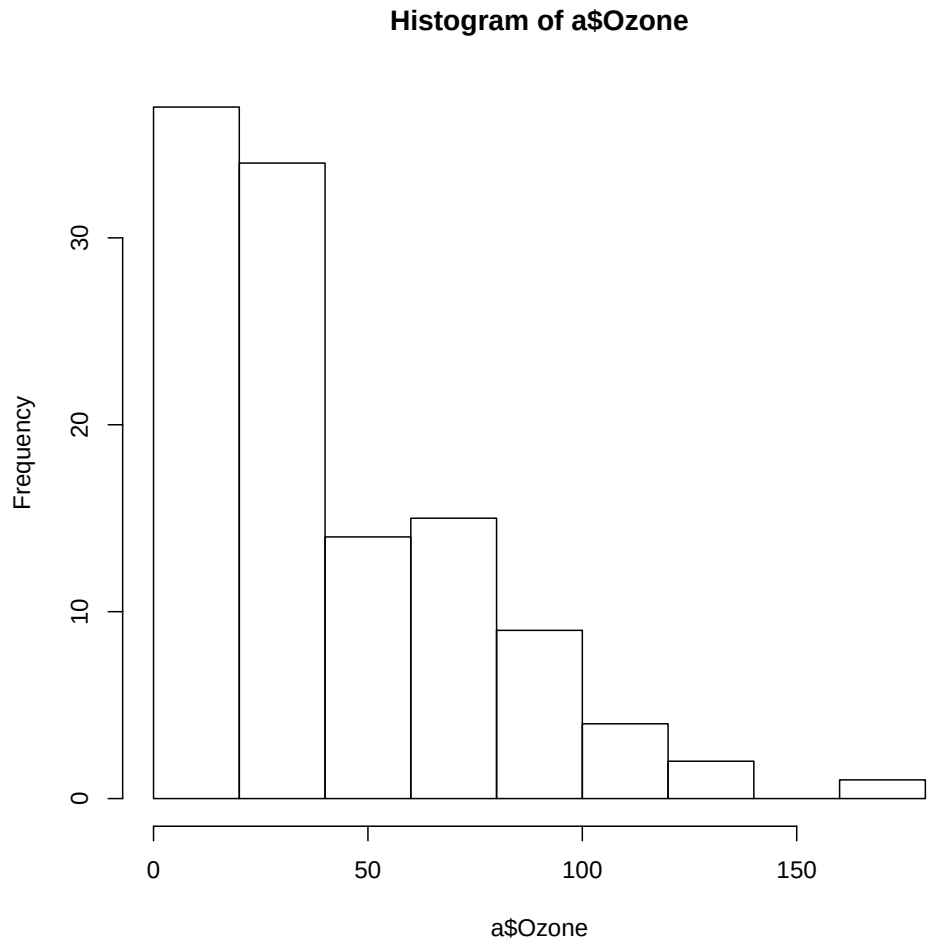
Recordemos las tablas de frecuencia y apliquemoslas a **dozone**

```
> ni <- table(dozone)
> fi <- prop.table(ni)
> Ni <- cumsum(ni)
> Fi <- cumsum(fi)
> tab <- cbind(ni,fi,Ni,Fi)
> tab
             ni          fi  Ni        Fi
[1,19.6)     33 0.286956522  33 0.2869565
[19.6,38.1)  35 0.304347826  68 0.5913043
[38.1,56.7)  15 0.130434783  83 0.7217391
[56.7,75.2)  11 0.095652174  94 0.8173913
[75.2,93.8)  12 0.104347826 106 0.9217391
[93.8,112)    5 0.043478261 111 0.9652174
[112,131)     3 0.026086957 114 0.9913043
[131,149)     1 0.008695652 115 1.0000000
[149,168)     0 0.000000000 115 1.0000000
```

Ozone Vs Solar.R

Recordemos el histograma

```
> hist(a$Ozone)
```



El histograma es un gráfico de ni!

Ozone Vs Solar.R

Vamos a explorar la relación entre Ozone y las otras variables (viento, radiación solar y temperatura)

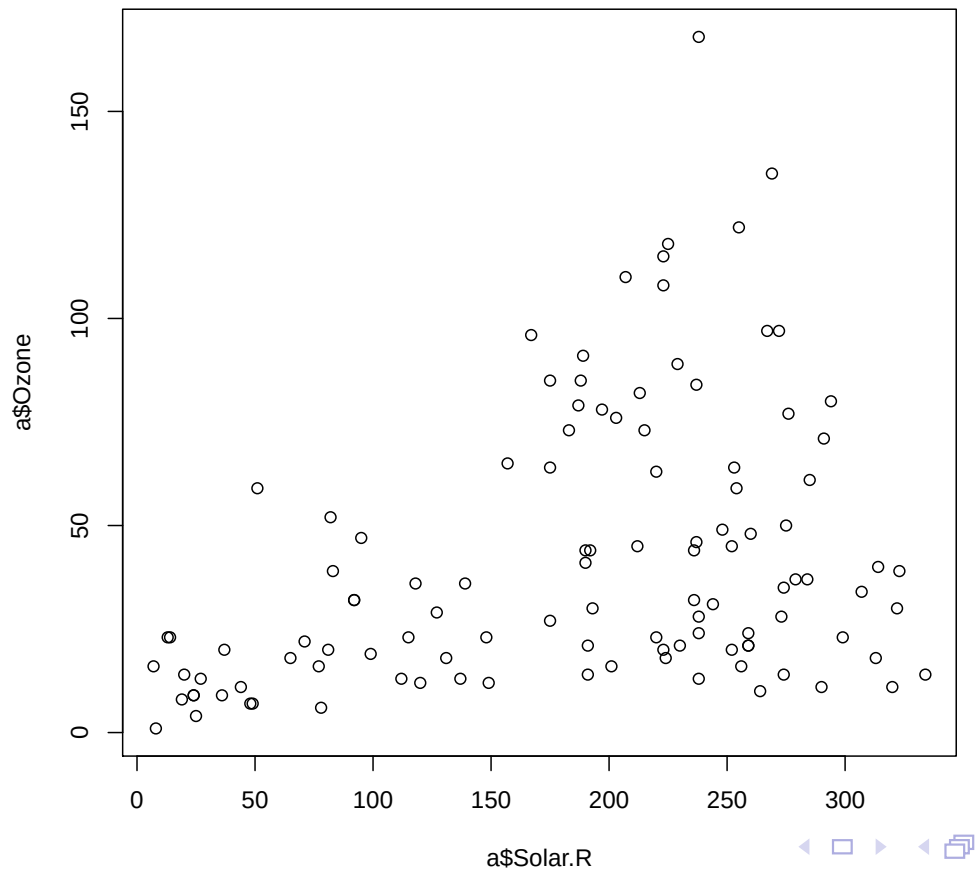
Usa la función **plot** para las variables **a$Solar.R** y **a$Ozone** para ver su dependencia funcional

Ozone Vs Solar.R

```
> plot(a$Solar.R, a$Ozone)
```

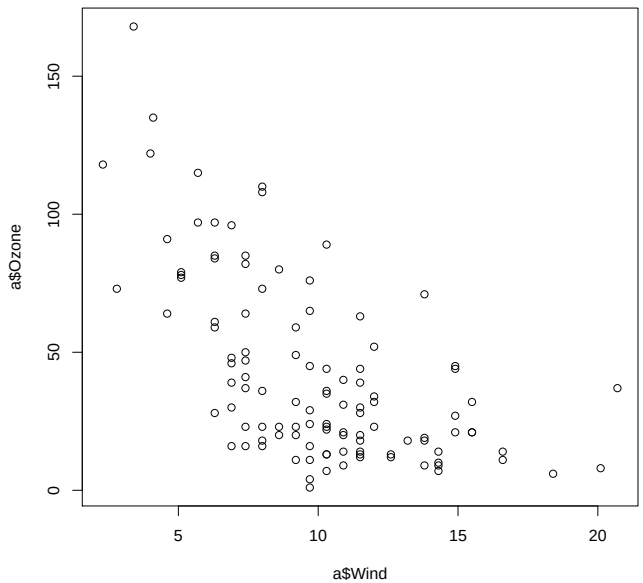
o

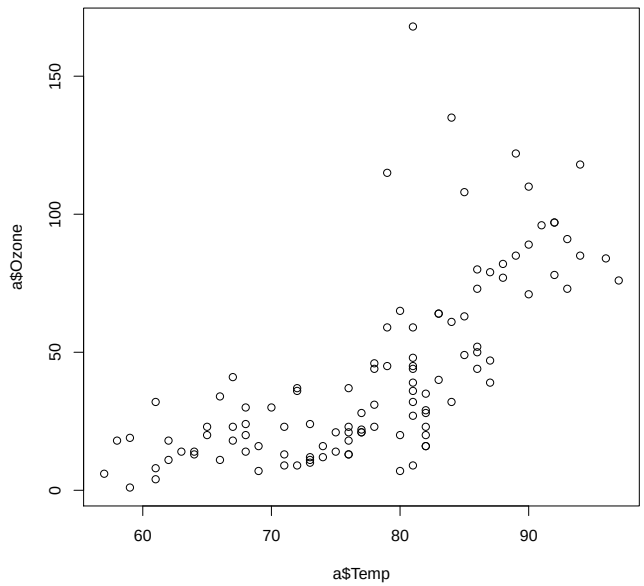
```
> plot(a$Ozone~a$Solar.R)
```



Ozone Vs Solar.R

Cómo son los gráficos para **a$Ozone** como función de **a$Wind** y **a$Temp**?

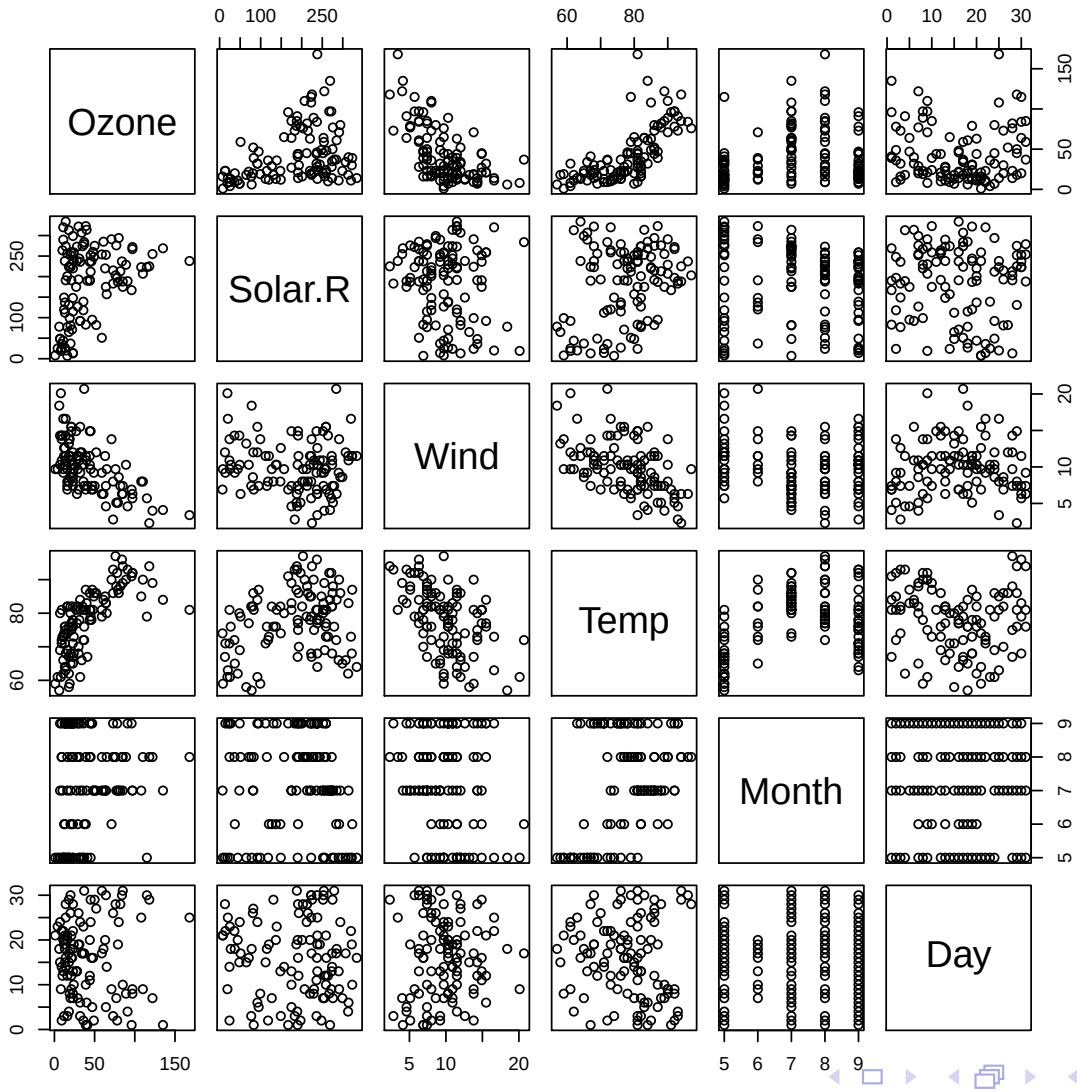




Ozone Vs Solar.R

Usa la función **pairs** sobre la variable **a**

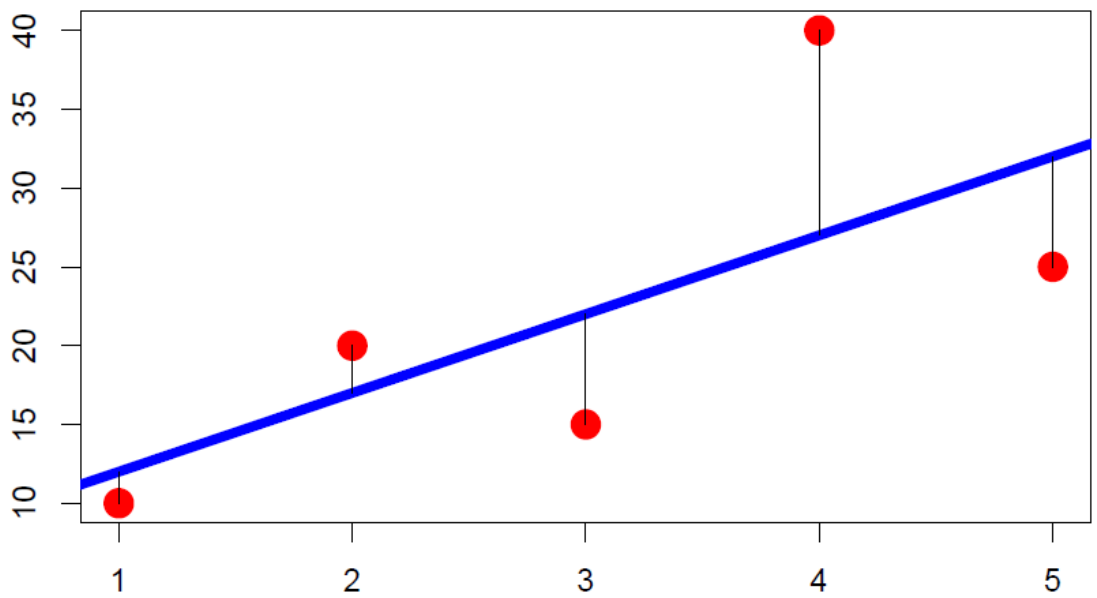
que ves?



Regresión líneal

Dados los datos de dos variables, queremos saber si su relación se puede describir por una línea recta.

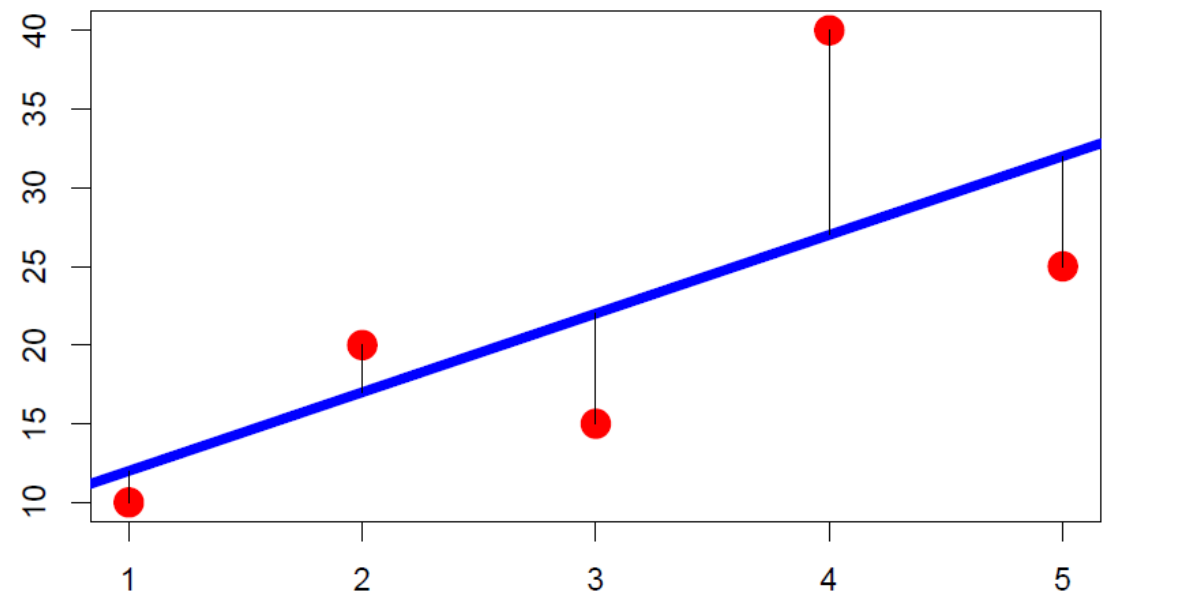
Como hay variación (error) entre las medidas, cuál sería una buena línea recta que describa esa relación?



Regresión líneal

para cada valor de x_i queremos encontrar un valor nuevo $\hat{y}_i$ tal que

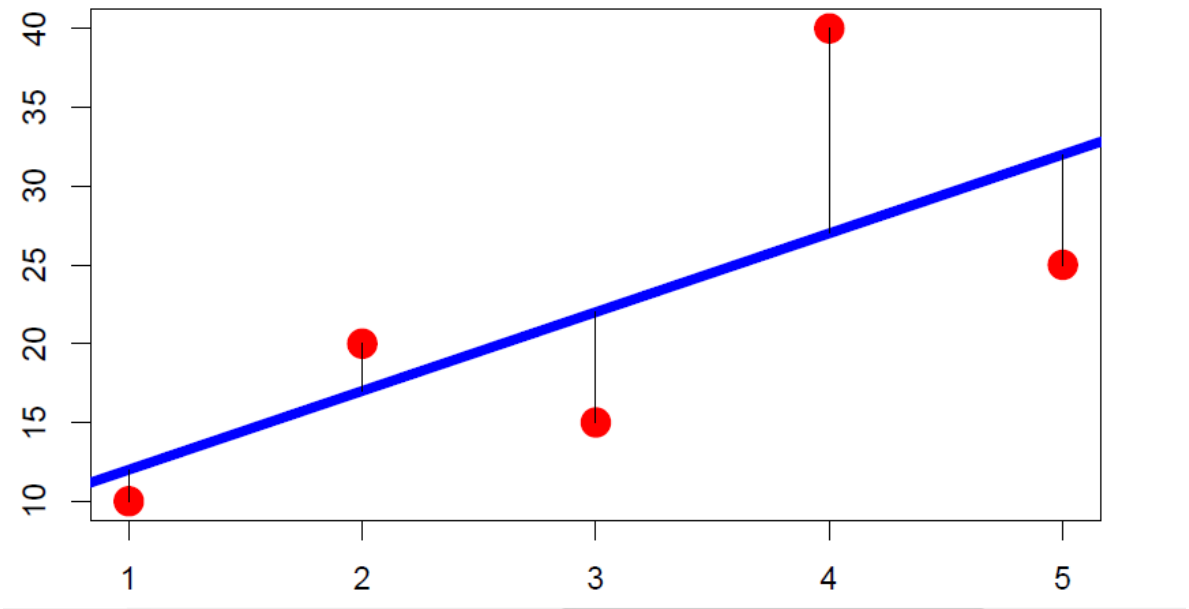
$$\hat{y}_i = mx_i + b$$



o sea queremos determinar m y b

Regresión líneal

Podemos encontrar m y b tal que la suma de las distancias de los datos a los puntos sea mínima



$$Q = \Sigma_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma_{i=1}^{n}(y_i - (mx_i + b))^2$$

Regresión líneal

Derivando con respecto a m y b

$$Q = \Sigma_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \Sigma_{i=1}^{n}(y_i - (mx_i + b))^2$$

e igualando a cero obtenemos

$$m = \frac{\Sigma_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\Sigma_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

y

$$b = \bar{y} - m\bar{x}$$

Regresión líneal

calculemos m y b para la relación entre **a$Solar.R** y **a$Ozone**

Regresión líneal

Para facilitar los cálculos vamos quitar todos los "NA" de **a**, usando la función **complete.cases**

```
> select <- complete.cases(a)
> head(select)
[1] TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE TRUE
> a <- a[select,]
> head(a)
  Ozone Solar.R Wind Temp Month Day
1    41     190  7.4   67     5   1
2    36     118  8.0   72     5   2
3    12     149 12.6   74     5   3
4    18     313 11.5   62     5   4
7    23     299  8.6   65     5   7
```

Regresión líneal

calculemos m y b para la relación entre **a$Solar.R** y **a$Ozone**

- asignemos **x** a **a$Solar.R** y **y** a **a$Ozone**
- asignemos **xbar** a la media de **x** y **ybar** a la media de **y**
- usando **sum** asignemos a **m** la cantidad

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

- asignemos **b** a

$$\bar{y} - m\bar{x}$$

Regresión líneal

```
x <- a$Solar.R
y <- a$Ozone

xbar <- mean(x)
ybar <- mean(y)

m <- sum((x-xbar)*(y-ybar))/sum((x-xbar)^2)
b <- ybar-m*xbar

> m
[1] 0.1271653
> b
[1] 18.59873
```

Regresión líneal

Vamos a definir una función que prediga el valor de **y** en x=20 o en cada uno de los valores de **x** (**ypred**)

```
> ypred <- function (x) {m*x+b}

> ypred(0)
[1] 18.59873

> ypred(20)
[1] 21.14203

> ypred(x)
  [1] 42.76013 33.60423 37.54635 58.40146 56.6
```

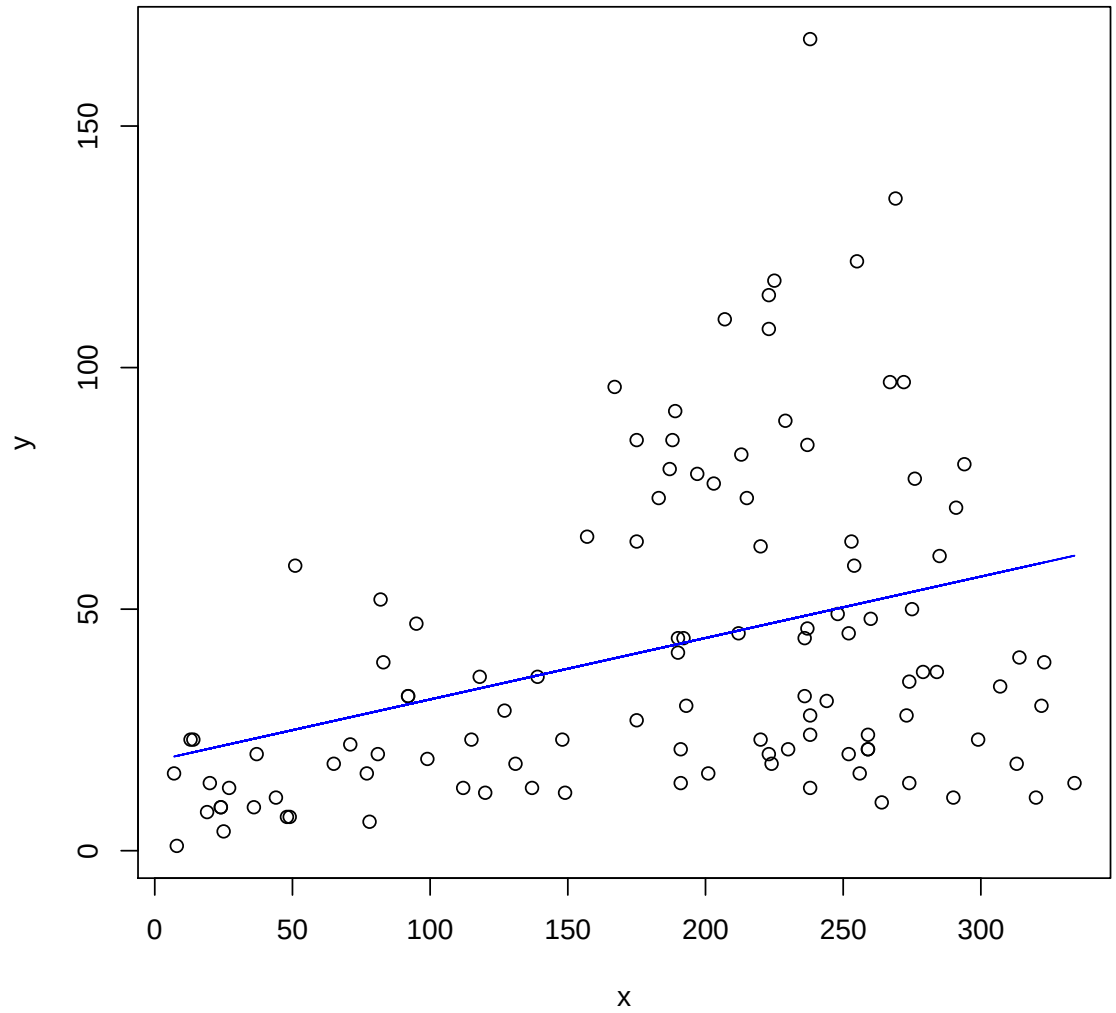
la función es vectorial!

Regresión líneal

Queremos comparar nuestros datos con la recta mx+b

```
> plot(y ~ x)
> lines(x, ypred(x),col="blue")
```

Regresión líneal



Regresión líneal

Qué tanto se asemeja la relación entre **x** e **y** a una recta?

Queremos una medida $R^2 > 0$

- $R^2 = 1$ es una recta perfecta!
- $R^2 = 0$ es lo mas lejano a una recta!
  (qué es la mas lejano a una recta?)

Regresión líneal

- $\sum_{i=1..n}(y_i - \bar{y})^2$ mide cuanto varían los datos y_i con respecto a la media
- $\sum_{i=1..n}(ypred_i - \bar{y})^2$ mide cuanto varían las **predicciones** de la línea respecto a la media

cuanto porcentaje de variación de los datos es explicado por variación de la recta?

Regresión líneal

Coefficiente de variación

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1..n}(ypred_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1..n}(y_i - \bar{y})^2}$$

- $R^2 = 1$ cuando los datos caen todos en una línea
- $R^2 = 0$ cuando los datos se distribuyen en un disco (y ninguna recta es mejor que otra)
- R es el coeficiente de correlación de Pearson

Regresión líneal

Calculemos

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1..n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1..n}(y_i - \bar{y})^2}$$

para nuestros datos
donde $\hat{y}_i = ypred_i = ypred(x)$

Regresión líneal

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1..n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1..n}(y_i - \bar{y})^2}$$

```
R2 <- sum((ypred(x)-ybar)^2)/sum((y-ybar)^2)
> R2
[1] 0.1213419
```

El 12% de la variacion de los datos es explicado por una dependencia líneal (subyacente) entre x e y

Regresión líneal

Todo esto (y algo más) se hace con la función **lm** de R

```
#usando el data.frame a (parametro data)
mod <- lm(Ozone ~ Solar.R, data=a)

#usando las variables x e y
mod <- lm(y ~ x)
```

Regresión líneal

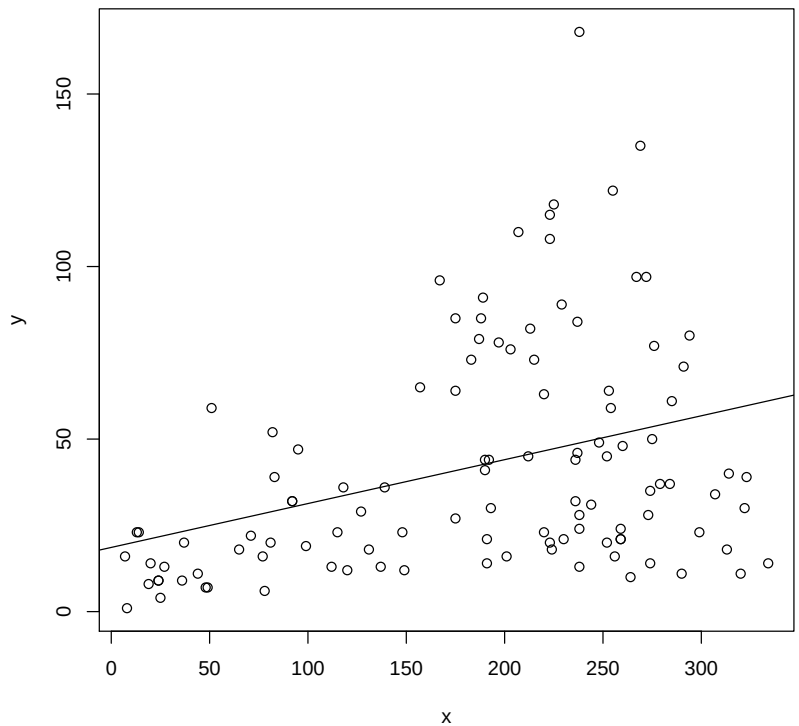
Todo esto (y algo mas) se hace con la función **lm** de R. Hay que usar la función **summary** sobre **mod**

```
> summary(mod)

Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-48.292 -21.361  -8.864  16.373 119.136

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 18.59873    6.74790   2.756 0.006856 **
x            0.12717    0.03278   3.880 0.000179 ***
---
Signif. codes:  0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1   1

Residual standard error: 31.33 on 109 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.1213,Adjusted R-squared:  0.1133
F-statistic: 15.05 on 1 and 109 DF,  p-value: 0.0001793
```

Regresión líneal

El gráfico de la línea se recupera con la función **abline** sobre el resulatdo de **lm**

```
plot(x, y)
abline(mod)
```



Regresión líneal

Y los valores de la prodicción sobre la línea recta se obtienen con la función **predict**.

La predicción del ozono para una radiación solar de 20 es:

```
> predict(mod, data.frame(x=20))
       1
21.14203
```

que clase tiene `mod`?

Regresión líneal

nota: la clase de mod es una nueva estructura `lm`, generada por la funcion **lm**

```
> class(mod)
[1] "lm"
```

predict es una función sobre la estructura `lm`. Qué genera predict?

Observación:
vector $\rightarrow$ data.frame(vector) $\rightarrow$ lm(data.frame) $\rightarrow$ predict(lm) $\rightarrow$ vector

Regresión exponencial

Estudiemos ahora la dependencia de **a$Ozone** con **a$Temp**

- hagamos un gráfico de Ozone Vs Temp y otro de log(Ozone) Vs temp
- usa la función **lm** para Ozone Vs Temp y otra para log(Ozone) Vs Temp
- pinta el gráfico para cada una con su recta de regresión
- Cuál regresión explica mas variabilidad?
- Cuál es mejor predictor del ozono, la radiación solar o la temperatura?

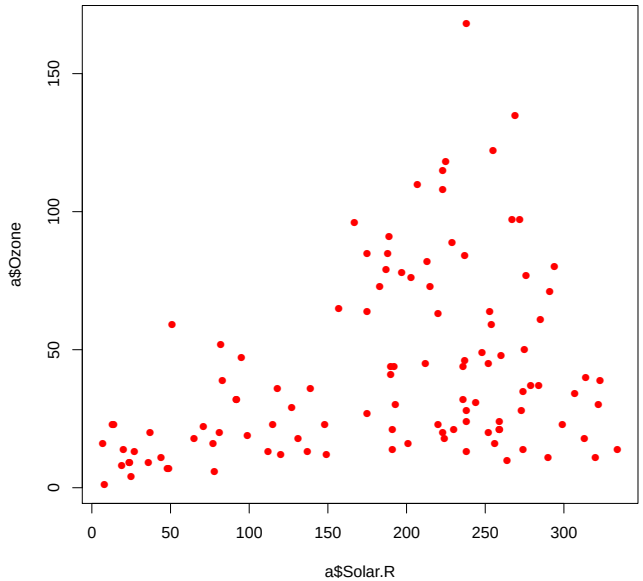
Regresión exponencial

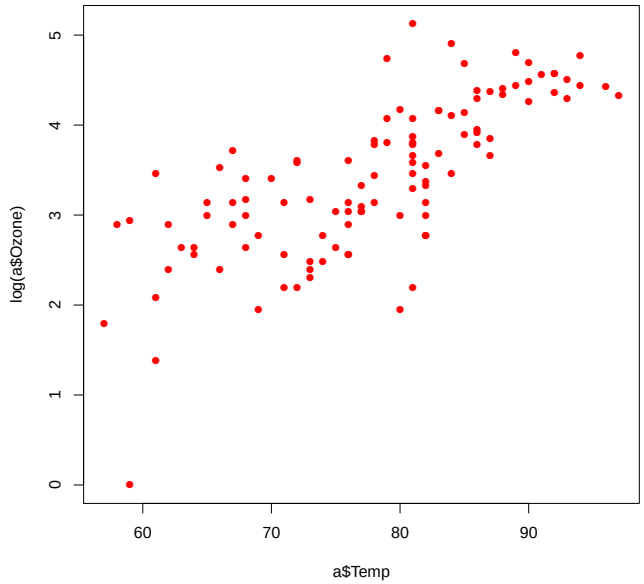
El ozono es tóxico para la salud, complica casos de asma y de obstrucción polmunar crónica

Si trabajas en la AEMET y tienes que predecir los días que pueden haber niveles altos de ozono para que la agencia de salud pública envíe una alarma de contaminación alta; que predictor usaras, la temperatura o la radiación solar?

A qué temperatura activarías la alarma de contaminación por ozono (niveles mayores de 60)?

Regresión líneal





A 80F (26C) la mayoría de días supera los límites de ozono (Oz=60,log(Oz)=4.09).

Por qué hay días de bajo ozono con alta radiación solar?