Estadística

Examen Parcial 1

19 de octubre de 2022 (Curso 2022-2023/1)
Resuelve el problema en la hoja del enunciado.
Anota tu nombre completo en mayúsculas, DNI, grupo e identificador (Id).

APELLIDOS:.. **NOMBRE:**.......................

Puedes utilizar una calculadora no programable. **DNI:** .... **GRUPO:**........ **Id:**.........

Problema 1

1. En un generador termo-eléctrico hay dos alarmas independientes de combustión no controlada. Durante una combustión no controlada, la probabilidad de activación de cada alarma es 0.95 y 0.9. Sean $A1$ el evento de la activación de la alarma más eficiente y $A'1$ el evento de su no activación. Sean $A2$ el evento de la activación de la alarma menos eficiente y $A'2$ el evento de su no activación. Se pide:

(a) Al ocurrir una combustión no controlada, calcula cada una de las probabilidades de que el sistema active 0, 1 y 2 alarmas.

(b) Sea S el evento de que la alarma más eficiente no se active y la otra sí lo haga. ¿Cuál es la probabilidad de S? ¿Cuál es la probabilidad de que S no ocurra?

Solución

(a) Al ocurrir una combustión no controlada, calcula cada una de las probabilidades de que el sistema active 0, 1 y 2 alarmas.

El problema nos da las probabilidades siguientes:

$P(A1) = 0.95$, por lo tanto $P(A'1) = 0.05$

$P(A2) = 0.9$, por lo tanto $P(A'2) = 0.1$

Como los eventos son independietes podemos construir la matriz de probabilidad conjunta con el producto de las marginales. Por lo tanto, la matriz de proabablidad conjunta es

	$A1$	$A'1$	Suma
$A2$	0.855	0.045	$P(A2) = 0.9$
$A'2$	0.095	0.005	$P(A'2) = 0.1$
Suma	$P(A1) = 0.95$	$P(A'1) = 0.05$	1

- Probabilidad de 0 alarmas $P(A'1 \cap A'2) = 0.005$
- Probabilidad de 1 alarma $P(A1 \cap A'2) + P(A'1 \cap A2) = 0.045 + 0.095 = 0.14$
- Probabilidad de 2 alarmas $P(A1 \cap A2) = 0.855$

(b) Sea S el evento de que la alarma más eficiente no se active y la otra sí lo haga. ¿Cuál es la probabilidad de S? ¿Cuál es la probabilidad de que S no ocurra?

- Probabilidad de que la alarma más eficiente no se active y la otra sí lo haga:

$$P(S) = P(A'1 \cap A2) = 0.045$$

- Probabilidad de que S no ocurra

$$P(S') = 1 - P(A'1 \cap A2) = 1 - 0.045 = 0.955$$

Estadística

Examen Parcial 1

19 de octubre de 2022 (Curso 2022-2023/1)
Resuelve el problema en la hoja del enunciado.
Anota tu nombre completo en mayúsculas, DNI, grupo e identificador (Id).

APELLIDOS:.. **NOMBRE:**.......................

Puedes utilizar una calculadora no programable. **DNI:** .... **GRUPO:**........ **Id:**.........

Problema 2

2. De una variable aleatoria discreta X toma valores $\{-10, -5, 0, 5, 10\}$, sabemos que:

$$P(X = k) = 2 \cdot P(X = -k) \text{ para } k = 5, 10;$$
$$P(X = 0) = 0.25$$
$$E[X] = 1.5$$

Se pide:

(a) Calcula la función de distribución de X.

(b) Si definimos la variable $Y = -3 \cdot X + 5$. Calcula $E[Y]$ y $VAR[Y]$.

Solución

(a) Calcula la función de distribución de X.

Consideremos que

$$P(X = -10) = a,\ P(X = -5) = b,\ P(X = 5) = c,\ P(X = 10) = d.$$

En consecuencia, según la información del enunciado, $E[X] = 1.5$, obtenemos la relación

$$-10a - 5b + 0 \cdot 0.25 + 5c + 10d = 1.5$$

y de $P(X = k) = 2 \cdot P(X = -k)$ para $k = 5, 10$ tenemos que

$$c = 2b,\ d = 2a$$

Además, como la suma de probabilidades de una variable aleatoria discreta debe ser 1, construimos la expresión:

$$a + b + 0.25 + c + d = 1$$

A partir de estas ecuaciones deducimos el valor de nuestras incógnitas:

$$a = 0.05; \quad b = 0.2; \quad c = 0.4; \quad d = 0.1$$

que expresamos en la función de probabilidad:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.05 & \text{si } x = -10 \\ 0.20 & \text{si } x = -5 \\ 0.25 & \text{si } x = 0 \\ 0.40 & \text{si } x = 5 \\ 0.10 & \text{si } x = 10 \end{cases} \tag{1}$$

para ayudarnos a construir la función de distribución de X:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -10 \\ 0.05 & \text{si } -10 \leq x < -5 \\ 0.25 & \text{si } -5 \leq x < 0 \\ 0.5 & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ 0.9 & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ 1 & \text{si } 10 \leq x \end{cases} \tag{2}$$

(b) Si definimos la variable $Y = -3 \cdot X + 5$. Calcula $E[Y]$ y $VAR[Y]$.

Utilizando las propiedades del operador $E[]$, sabemos que

$$E[Y] = E[-3X + 5] = -3E[X] + 5 = -3 \cdot 1.5 + 5 = -4.5 + 5 = 0.5$$

Para calcular la varianza de Y, en esta ocasión empezamos por calcular la varianza de X a partir de la relación

$$VAR(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

Como el enunciado nos aporta el valor de $E[X]$, nos falta conseguir el valor de $E[X^2]$. Usando las incógnitas del apartado anterior, $E[X^2]$ se expresa como

$$E[X^2] = (-10)^2 \cdot a + (-5)^2 \cdot b + 0^2 \cdot 0.25 + 5^2 \cdot c + 10^2 \cdot d = 100a + 25b + 0 \cdot 0.25 + 25c + 100d$$

y vale $E[X^2] = 30$. Entonces $VAR(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 30 - 1.5^2 = 27.75$.

En consecuencia, a partir de las propiedades del operador $VAR()$ obtenemos que

$$\boxed{\text{VAR(Y)=VAR(-3Y+5)=9VAR(X)=270}}$$

Estadística

Examen Parcial 1

19 de octubre de 2022 (Curso 2022-2023/1)
Resuelve el problema en la hoja del enunciado.
Anota tu nombre completo en mayúsculas, DNI, grupo e identificador (Id).

APELLIDOS:.. **NOMBRE:**.......................

Puedes utilizar una calculadora no programable. **DNI:** .... **GRUPO:**........ **Id:**.........

Problema 3

3. Una variable aleatoria X tiene como función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ mx - \frac{x^2}{2} - n & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Se pide:

(a) Calcula los valores de m y n para que X sea absolutamente continua.

(b) Sabiendo que $X \geq E[X]$, calcula la probabilidad de que $X \leq 1.5$.

Solución

(a) Calcula los valores de m y n para que X sea absolutamente continua.

La condición necasaria para que X sea absolutamente continua es que su función de distribución, $F(x)$, sea continua, por lo tanto han de coincidir los límites laterales para todos los reales. En este caso, exigimos continuidad en los puntos $x = 1$ y $x = 2$:

$$\lim_{x \to 1^-} (F(x)) = \lim_{x \to 1^+} (F(x)) \quad y \quad \lim_{x \to 2^-} (F(x)) = \lim_{x \to 2^+} (F(x))$$

de donde

$$\frac{1}{2} = m - \frac{1}{2} - n \quad y \quad 2m - 2 - n = 1$$

$$\text{resultando } \boxed{m = 2 \quad y \quad n = 1}$$

Ahora, la función de distribución de X se reescribe de la siguiente forma:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

(b) Sabiendo que $X \geq E[X]$, calcula la probabilidad de que $X \leq 1.5$.

Para conocer el valor esperado de X, calculamos la función de densidad de probabilidad, que obtenemos derivando respecto de x cada tramo de la función de distribución $F(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$$

Así, el valor esperado $E[X]$ es:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_0^1 x^2 \cdot dx + \int_1^2 (2x - x^2) \cdot dx = \left(\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \boxed{1}.$$

La probabilidad demandada es una probabilidad condicionada tal que

$$P(X \leq 1.5 \mid X \geq E[X])$$

Por la definición de probabilidad condicionada y sabiendo que $E[X] = 1$:

$$P(X \leq 1.5 \mid X \geq 1) = \frac{P\left(1 \leq X \leq 1.5\right)}{P(X \geq 1)} = \frac{F(1.5) - F(1)}{1 - F(1)} = \frac{\frac{7}{8} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}.$$