Probabilidad conjunta

1. Una fábrica suministra ladrillos a buen precio, pero un porcentaje elevado de ellos es defectuoso. Con objeto de mejorar la calidad del producto, se someten los ladrillos a un ensayo no destructivo antes de su venta. Este ensayo da como buenos el 99% de los que son no defectuosos y da por malos el 98% de los que son defectuosos. Sabiendo que un ladrillo de esta fábrica tiene una probabilidad de 0.893 de ser aceptado como bueno en el ensayo de calidad, determina:

(a) La probabilidad de que un ladrillo sea defectuoso.

(b) La probabilidad de que un ladrillo no sea defectuoso y no sea aceptado.

(c) Comprueba si los sucesos '*ladrillo defectuoso*' y '*ladrillo no aceptado*' son independientes.

2. En una avenida hay un sistema de 3 semáforos sucesivos. La probabilidad de encontrar el primer semáforo en rojo es 0.6. En los siguientes semáforos, tenemos las probabilidades $P(R_{j+1}|R_j) = 0.15$ y $P(R_{j+1}|R_j) = 0.25$, para $j = 1, 2$, donde R_j representa el suceso [*encontramos en rojo el semáforo* j*-ésimo*]. Aceptando que la probabilidad de encontrar en rojo un semáforo depende únicamente del estado del semáforo anterior, calcula la probabilidad de que, al circular por el sistema de tres semáforos, ocurran los siguientes sucesos:

(a) Encontramos todos los semáforos en rojo.

(b) Encontramos algún semáforo en rojo.

(c) Encontramos, exactamente, un semáforo en rojo.

3. En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado equilibrado de seis caras, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado. Definimos los siguientes sucesos:
A: Obtener un número par en el dado,
B: Obtener un número mayor o igual a 5 en el dado,
C: Obtener dos caras al lanzar la moneda,
D: Obtener exactamente una cara al lanzar las monedas, y
G: Ganar,

(a) Se sabe que una persona ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

4. Tenemos tres cajas (caja 1, caja 2, caja 3) en las que se almacenan condensadores de tres capacidades diferentes ($0.01\mu F$, $0.1\mu F$, $1.0\mu F$), como se muestra en el cuadro siguiente:

μF	caja 1	caja 2	caja 3	Total
0.01	20	95	25	140
0.1	55	35	75	165
1.0	70	80	145	295
Total	145	210	245	600

Definimos $0.01\mu F$, $0.1\mu F$ y $1.0\mu F$ como los sucesos de extraer un condensador de $0.01\mu F$, $0.1\mu F$ y $1.0\mu F$, respectivamente. De igual forma, definimos $c1$, $c2$ y $c3$ a los sucesos de elegir la caja 1, la caja 2 y la caja 3, respectivamente. Escogemos al azar una caja y de ella, a su vez, un condensador. Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar la caja 2 y un condensador de $0.1\mu F$?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya seleccionado un condensador de $0.01\mu F$?

5. Un lote de 50 arandelas contiene 30 arandelas cuyo grosor excede las especificaciones de diseño. Se seleccionan 3 arandelas al azar y sin reemplazo del lote. Definimos el suceso A_i como la í-ésima arandela extraída más gruesa que las especificaciones de diseño, $i = 1, 2, 3$. Se pide:

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que las tres arandelas seleccionadas sean más gruesas que las especificaciones de diseño?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la tercera arandela seleccionada sea más gruesa que las especificaciones de diseño?

6. Se ha programado lanzar un satélite desde Cabo Cañaveral (Florida, EEUU) y otro desde la base Tanegashima (Japón). Denominamos suceso A al lanzamiento de Florida y B al de Japón. Si A y B son eventos independientes con $P(A) < P(B)$, conociendo que la probabilidad de que cualquiera de las dos misiones tenga éxito es 0.626 y que la probabilidad de que ambas misiones tengan éxito simultáneamente vale 0.144, se pide:

(a) Determina los valores de $P(A)$ y $P(B)$.

Probabilidad Condicional

1. Una fábrica suministra ladrillos a buen precio, pero un porcentaje elevado de ellos es defectuoso. Con objeto de mejorar la calidad del producto, se someten los ladrillos a un ensayo no destructivo antes de su venta. Este ensayo da como buenos el 99% de los que son no defectuosos y da por malos el 98% de los que son defectuosos. Sabiendo que un ladrillo de esta fábrica tiene una probabilidad de 0.893 de ser aceptado como bueno en el ensayo de calidad, determina:

(a) Si la probabilidad de que un ladrillo sea defectuoso es 0.1, calcula la probabilidad de que un ladrillo que ha sido aceptado esté en malas condiciones.

2. Un canal de comunicación utiliza dos símbolos de entrada $\{a, b\}$ y dos símbolos de salida $\{0, 1\}$. Se sabe que $\Pr(a) = 0.6$, $\Pr(b) = 0.4$, $\Pr(0|a) = 0.2$ y $\Pr(0|b) = 0.6$. Una vez recibido uno de los símbolos 0 o 1 se decide qué símbolo ha sido transmitido según la regla siguiente:

$\Pr[a|0] \geq \Pr[b|0]$, decidir a. Análogamente, $\Pr[a|1] \geq \Pr[b|1]$, decidir a. $\Pr[a|0] < \Pr[b|0]$, decidir b. Análogamente, $\Pr[a|1] < \Pr[b|1]$, decidir b. Se pide:

(a) Si se recibe el símbolo 0 cuál ha sido el símbolo de entrada.

(b) Si se recibe el símbolo 1 cuál ha sido el símbolo de entrada.

(c) Calcula la probabilidad de cometer un error.

3. Un determinado tipo de componente electrónico se distribuye en lotes de 20 unidades. Sabemos que el 60% de los lotes no contienen componentes defectuosos, y que el 10% contienen exactamente 2 componentes defectuosos. Además, también sabemos que un lote puede contener, como máximo, 2 componentes defectuosos.

(a) Seleccionamos un lote al azar ¿cuál es la probabilidad de que el lote no contenga algún componente defectuoso?

(b) Si seleccionamos un lote al azar y, dentro de este lote, seleccionamos aleatoriamente 2 componentes, ¿cuál es la probabilidad de que los dos componentes sean defectuosos?

(c) Seleccionamos un lote al azar y, dentro de este lote, seleccionamos aleatoriamente 2 componentes. Si observamos que los dos elementos seleccionados no son defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que el lote no contenga ningún componente defectuoso?

4. Per detectar la presència d'un cert tipus de bacteri a l'aigua es realitza un test. Si l'aigua conté el bacteri, el test dóna positiu el 70% de vegades. Si no hi ha bacteri, detecta l'absència (el test dóna negatiu) un 60% de les vegades. A més sabem que la probabilitat que una mostra tingui bacteris d'aquest tipus és del 0.2. Calculeu la probabilitat que hi hagi bacteris, si el test dóna positiu.

5. En una determinada población, el 20% de los individuos son hipertensos (H). Además, algunas de las personas saben (S) si son o no hipertensas, y otras no lo saben. La probabilidad que siendo hipertensos sepan si lo son o no es del 0.7 y la probabilidad que no siendo hipertensos no sepan si lo son o no es de 0.6. En esta población, si una persona no sabe si es o no hipertensa, ¿cuál es la probabilidad que lo sea?

6. Tenemos tres cajas (caja 1, caja 2, caja 3) en las que se almacenan condensadores de tres capacidades diferentes ($0.01\mu F$, $0.1\mu F$, $1.0\mu F$), como se muestra en el cuadro siguiente:

μF	caja 1	caja 2	caja 3	Total
0.01	20	95	25	140
0.1	55	35	75	165
1.0	70	80	145	295
Total	145	210	245	600

Definimos $0.01\mu F$, $0.1\mu F$ y $1.0\mu F$ como los sucesos de extraer un condensador de $0.01\mu F$, $0.1\mu F$ y $1.0\mu F$, respectivamente. De igual forma, definimos $c1$, $c2$ y $c3$ a los sucesos de elegir la caja 1, la caja 2 y la caja 3, respectivamente. Escogemos al azar una caja y de ella, a su vez, un condensador. Se pide:

(a) Si ha sido seleccionado un condensador de $1.0\mu F$, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja 1?

7. Se ha programado lanzar un satélite desde Cabo Cañaveral (Florida, EEUU) y otro desde la base Tanegashima (Japón).

(a) La persona encargada del mantenimiento del sistema de propulsión en Florida es bastante distraída y se olvida testearlo a veces. La probabilidad de que se olvide de testear el sistema es 2/3. El sistema no está en muy buenas condiciones, así que si se testea tiene la misma probabilidad de funcionar que de estropearse, pero la probabilidad de que funcione si no se testea es de 0.25. Denominamos O al suceso olvidar testear el sistema y F al suceso que indica que el sistema funciona. Si el sistema se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona encargada del mantenimiento olvidara testearlo?

8. Se tienen tres cajas marcadas con el número $i = 1, 2, 3$. La caja i tiene i bolas blancas y $3 - i$ bolas negras. Se elige una caja al azar. A continuación, se extraen al azar dos bolas de dicha caja sin remplazo. Se pide:

(a) Calcula la probabilidad de que las dos bolas sean blancas.

(b) Alguien ha realizado este proceso y solo sabemos el resultado final: las dos bolas extraídas han sido blancas. Se quiere tener una idea de cuál ha sido la caja a la que pertenecen las bolas. Determina la caja que tiene la mayor probabilidad de pertenencia y expón cuál es esa probabilidad.

Variables Discretas

1. Una variable aleatòria discreta X pren només els valors $\{0, 1, 2, 3\}$. Sabem que la probabilitat de l'esdeveniment $X = 0$ és el doble de la probabilitat de l'esdeveniment $X = 1$. Sabem també que l'esperança de la variable és 2 i que $E(X^2) = 5$.

(a) Calculeu la funció de probabilitat $f(x)$ de la variable X, és a dir, $f(x) = P(X = x)$ per a $x \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(b) Calculeu la variancia de la variable X, és a dir, $var(X)$.

(c) Es defineix una nova variable aleatòria $Y = 2X - 1$. Quin és el recorregut d'aquest variable? Calculeu $P(3 < Y \leq 5)$. Calculeu també l'esperança i la variància de la variable Y.

2. Con la variable aleatoria X, cuya función de probabilidad $P(X = x)$ viene dada en la tabla siguiente:

X	$P(X = x)$
10	0.1
12	0.3
14	0.25
15	0.15
17	
20	0.15

(a) Calcula la esperanza matemática y la desviación estándar de la variable aleatoria X.

(b) Sea $F(x)$ la función de distribución de probabilidad, calcula: $F(33)$, $F(14.5)$, $F(3)$, $P(10 < X \leq 17.5)$.

3. Una estadística recibe, de una variable aleatoria discreta X, la siguiente Función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.2 & -1 \leq x < 0 \\ 0.35 & 0 \leq x < 1 \\ 0.45 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

(a) Calcula la esperanza matemática y la desviación estándar de la variable aleatoria X.

(b) Dada la variable aleatoria $Y = 2X - 3$, ¿cómo se relacionan las esperanzas matemáticas y las varianzas de X e Y?

Variables Continuas

1. La función de densidad de una variable aleatoria continua X se define como:

$$f(x) = \begin{cases} k(a+bx) & \text{si } x \in (0,1); \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1). \end{cases}$$

Se sabe además que la esperanza es $E[X] = \frac{4}{7}$. Determina:

(a) El valor de las constantes a, b y k y la varianza de X.

(b) Función de distribución asociada a X.

(c) La mediana de X.

2. Sea la función siguiente

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ \dfrac{x^2 - a}{b}, & 2 \leq x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

(a) Calcula los valores a y b para que $F(x)$ sea función de distribución de una variable aleatoria absolutamente continua X.

(b) Calcula la desviación típica de la variable aleatoria X.

(c) ¿Cúál es la probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor inferior a 3.5 sabiendo que ha tomado un valor superior a 3?

3. Consideramos la variable aleatoria X que tiene la siguiente función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{\pi(1+x^2)}, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$

(a) Determina el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ de manera que la función f_X sea realmente una función de densidad de probabilidad.

(b) Calcula $E(X)$.

(c) Calcula la función de distribución de probabilidad.

4. Sea X el esfuerzo vibratorio en la paleta de una turbina de viento a una determinada velo-cidad, en un túnel de viento. En el artículo "Blade fatigue life assessment with application to VAWTS" publicado en la revista científica *Journal of Solar Energy Engineering* se propone la distri-bución de Rayleigh, con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta^2} \cdot e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

como modelo para la distribución de X, donde θ es un parámetro (es decir un número fijo).

(a) Comprueba que f es una función de densidad.

(b) Calcula la función de distribución de la variable aleatoria continua X (es decir $p(X \leq x)$).

5. Una estructura metálica puede sufrir, debido al calor, una dilatación que (medida en centímetros) es una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 > x \\ ax & 0 \leq x \leq 3 \\ b & 3 < x < 5 \\ \frac{b}{3}(8-x) & 5 \leq x \leq 8 \\ 0 & 8 < x \end{cases}$$

(a) Sabiendo que la función de densidad de probabilidad es una función continua de x, determina a y b.

(b) Si con un instrumento se ha observado que la estructura se ha dilatado más de 3 centímetros, ¿con qué probabilidad la dilatación estará entre 3 y 5 centímetros?

6. El beneficio que obtiene un distribuidor mayorista con un determinado tipo de pieza varía de una partida a otra. Para una partida dada, el beneficio unitario (en euros/pieza) se puede modelar como una variable aleatoria absolutamente continua X con la siguiente función de distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \dfrac{1}{80}\left(17 + 16x - x^2\right) & -1 \leq x < 7 \\ 1 & 7 \leq x \end{cases}$$

(a) Calcula la probabilidad de que, en una partida seleccionada al azar, se produzcan beneficios. Calcula el beneficio unitario medio μ_x.

(b) Una partida se considera de bajo rendimiento cuando el beneficio unitario es inferior a 2 euros/pieza. Calcula la probabilidad de que, en una partida de bajo rendimiento seleccionada al azar, se produzcan beneficios.

7. Las partículas son un componente muy importante de la contaminación atmosférica en muchas áreas. Es interesante estudiar los tamaños de las partículas contaminantes. Sea X el diámetro, en micr ómetros, de una partícula elegida aleatoriamente. Supón que en cierta área, la función de densidad de probabilidad de X es inversamente proporcional al volumen de la partícula; es decir, supón que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^3} & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

donde c es una constante. Se pide:

(a) Encuentra el valor de c para que $f(x)$ sea función de densidad y calcula el diámetro medio de las partículas.

(b) Busca la función de distribución. El término PM_t se refiere a partículas con diámetros menores o iguales a t micrómetros. ¿Qué proporción de partículas PM_{10} son $PM_{2.5}$?