

**12.** Una variable aleatoria  $X$  sigue la conocida como función de densidad de probabilidad de Rayleigh:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

donde  $\theta$  es un parámetro.

Se sabe que su valor esperado y varianza son

$$E(X) = \sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}; \quad Var(X) = \frac{4-\pi}{2}\theta$$

Supongamos que se obtiene una muestra aleatoria simple con 10 elementos:  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ .

- (a) Determinar el estimador ( $\hat{\theta}_V$ ) de máxima verosimilitud del parámetro  $\theta$ .
- (b) Determinar el estimador ( $\hat{\theta}_{M2}$ ) del parámetro  $\theta$  usando el método de los momentos con los momentos de orden dos.

---

## Solución

---

(a) Consideramos la función de máxima verosimilitud

$$L(x_1, \dots, x_{10}, \theta) = \frac{1}{\theta^{10}} (x_1 x_2 \cdots x_{10}) e^{-\frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{2\theta}}$$

Su logaritmo es

$$\ln(L) = -10 \ln(\theta) + \ln(x_1 x_2 \cdots x_{10}) - \frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{2\theta}$$

Igualando a cero la derivada obtendremos el valor del parámetro  $\theta$  que maximiza la función de verosimilitud:

$$\frac{d}{d\theta}(\ln(L)) = -\frac{10}{\theta} + \frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{2\theta^2} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{20}$$

Por tanto el estimador de máxima verosimilitud es

$$\hat{\theta}_V = \frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{20}$$

(b) El momento de orden dos en la población es el valor esperado de la variable  $X^2$ . Es decir  $E(X^2)$ . El momento de orden dos en la muestra es la media de los cuadrados, esto es:

$$\overline{X^2} = \frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{10}$$

Como conocemos el valor esperado y la varianza, podemos calcular  $E(X^2)$  mediante la fórmula de Steiner:

$$E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2 = \frac{4-\pi}{2}\theta + \frac{\pi}{2}\theta = 2\theta$$

El método de los momentos consiste en igualar los momentos de la población y de la media muestral. Esto es

$$E(X^2) = \overline{X^2}$$

Por tanto, obtenemos  $\theta = \frac{\overline{X^2}}{2}$ .

El estimador final es

$$\hat{\theta}_{M2} = \frac{\overline{X^2}}{2} = \frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{20}$$

Observamos que coincide con el estimador de máxima verosimilitud.