1. Una variable aleatoria X sigue la conocida como función de densidad de probabilidad de Rayleigh:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\theta}\, e^{\frac{-x^2}{2\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

donde θ es un parámetro.
Se sabe que su valor esperado y varianza son

$$E(X) = \sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}; \qquad Var(X) = \frac{4-\pi}{2}\theta$$

Supongamos que se obtiene una muestra aleatoria simple con 10 elementos: $x_1, x_2, \ldots x_{10}$.

(a) Determinar el estimador ($\hat{\theta}_V$) de máxima verosimilitud del parámetro θ.

(b) Determinar el estimador ($\hat{\theta}_{M2}$) del parámetro θ usando el método de los momentos con los momemtos de orden dos.

Solución

(a) Consideramos la función de máxima verosimilitud

$$L(x_1, \cdots, x_{10}, \theta) = \frac{1}{\theta^n}(x_1 x_2 \cdots x_{10})\, e^{-\frac{x_1^2+\cdots+x_{10}^2}{2\theta}}$$

Su logaritmo es

$$\ln(L) = -10\ln(\theta) + \ln(x_1 x_2 \cdots x_{10}) - \frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{2\theta}$$

Igualando a cero la derivada obtendremos el valor del parámetro θ que maximiza la función de verosimilitud:

$$\frac{d}{d\theta}(\ln(L)) = -\frac{10}{\theta} + \frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{2\theta^2} = 0 \quad \Rightarrow \theta = \frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{20}$$

Por tanto el estimador de máxima verosimilitud es

$$\hat{\theta}_V = \frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{20}$$

(b) El momento de orden dos en la población es el valor esperado de la variable X^2. Es decir $E(X^2)$. El momento de orden dos en la muestra es la media de los cuadrados, esto es:

$$\overline{X^2} = \frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{10}$$

Como conocemos el valor esperado y la varianza, podemos calcular $E(X^2)$ mediante la fórmula de Steiner:

$$E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2 = \frac{4-\pi}{2}\theta + \frac{\pi}{2}\theta = 2\theta$$

El método de los momentos consiste en igualar los momentos de la población y de la media muestral. Esto es

$$E(X^2) = \overline{X^2}$$

Por tanto, obtenemos $\theta = \frac{\overline{X^2}}{2}$.
El estimador final es

$$\hat{\theta}_{M2} = \frac{\overline{X^2}}{2} = \frac{x_1^2 + \cdots + x_{10}^2}{20}$$

Observamos que coincide con el estimador de máxima verosimilitud.