MÓDULO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

ATILANO ARRIETA V.

CAPITULO I
INTRODUCCION A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.

1.1 OBJETIVOS ESPECIFICOS

Del desarrollo de la presente unidad se espera que el estudiante:

1.1.1 Explore el estudio de los cambios en aspectos variados de la ciencia y la tecnología.
1.1.2 Clasifique cualquier ecuación diferencial.
1.1.3 Determine si una función es o no solución de una ecuación diferencial
1.1.4 Calcule la ecuación diferencial partiendo de su primitiva
1.1.5 Resuelva el problema del valor inicial

1.2 ORIGEN.

Fueron muchos y variados los problemas que dieron origen a las ecuaciones diferenciales, entre los cuales pueden mencionarse los siguientes:
a) Problemas físicos. b) Problemas geométricos. c) Problemas de las primitivas.

En el campo de la física, química, biología e ingeniería son innumerables los problemas que pueden ser descritos y resueltos mediante ecuaciones diferenciales, tales como, la desintegración radiactiva, el crecimiento de la población, las reacciones químicas, la ley de enfriamiento de Newton y la segunda ley de movimiento de Newton.
En economía, las relaciones entre dos o más variables se establecen en función de tasas de cambio, es decir, la tasa de cambio de cualquier variable puede ser expresada como función de las razones de cambio o de los valores de otras variables.
Las tasas de cambio pueden ser establecidas de dos formas; dependiendo si los cambios ocurren en forma continua o discontinuamente; si estos se producen continuamente, las tasas de cambio son expresadas como derivadas y en tales casos las ecuaciones que las contienen son llamadas "ecuaciones diferenciales"; para el caso de los cambios discretos o discontinuos, en ciertos momentos del tiempo, las tasas de cambio son expresadas como diferencias en los valores de las variables, en tal caso las ecuaciones que las contienen se les llama "ecuaciones en diferencias".

Observación: Aquí sólo serán tratadas las ecuaciones diferenciales, es decir, el límite de las ecuaciones en diferencias cuando el período de tiempo tiende a cero.

1.3 DEFINICIONES.

◊ En términos generales, se puede entender por ecuaciones diferenciales a cierto tipo de ecuaciones en las cuales uno o más de sus términos posee derivadas de algunas variables.
◊ Es toda ecuación en la que interviene una función y una o más de sus derivadas.
◊ Es toda ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.
◊ Es toda ecuación que contiene funciones incógnitas, variables independientes, constantes y derivadas de las funciones incógnitas.

Ejemplos: $x\frac{dy}{dx}+y=5$, $y''+3y'-2y=0$; $\frac{\partial^2 Z}{\partial \chi^2}+\frac{\partial V}{\partial y}=\chi^2+y$

A^2V

1.4 CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES.

Una importante clasificación agrupa las ecuaciones diferenciales según el tipo, según el orden y según el grado.

1.4.1 **Según el tipo**, se dividen en ordinarias y en derivadas parciales.

1.4.1.1 **Ordinarias**: Son aquellas ecuaciones diferenciales que contienen las derivadas de una o más variables dependientes, con respecto a una sola variable independiente.

Pueden presentarse de dos formas; $f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{n}(x)) = 0$ llamada implícita y $y^{n}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{n-1}(x))$ conocida como forma normal.

Ejemplos: $\chi \dfrac{d\gamma}{d\chi} - 3\chi = 2$ $\qquad$ $\dfrac{d\gamma}{d\chi} - 2\dfrac{dZ}{d\chi} = 3\chi$

1.4.1.2 **En derivadas parciales**: Corresponden a las ecuaciones diferenciales que contienen las derivadas parciales de una o más variables dependientes, con respecto a dos o más variables independientes.

Ejemplos: $\dfrac{\partial u}{\partial \chi} + \dfrac{\partial u}{\partial \gamma} = 5\chi$ $\qquad$ $\dfrac{\partial u}{\partial \chi} - \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

1.4.2 **Según el orden**: El orden corresponde a la derivada más alta que se encuentre en la ecuación, por lo tanto serán de 1°,2°,3°....,n-1 orden

Ejemplos: 1) $2\dfrac{d^2y}{d\chi^2} - \dfrac{dy}{d\chi} = 1$ es una ecuación ordinaria de segundo orden

2) $y''' + 2(y'')^2 + y' = Cos\chi$ es una ecuación ordinaria de tercer orden

1.4.3 **Según el grado**: El grado de una ecuación diferencial corresponde al exponente, si es un número natural, de la derivada de mayor orden en la ecuación.
Si la derivada de mayor orden está elevada a un exponente no natural, no es posible determinar el grado de dicha ecuación.

Ejemplos: 1) $\dfrac{d^2y}{d\chi^2} + 2\dfrac{dy}{d\chi} - y = 0$, es una ecuación ordinaria de primer grado

2) $\left(\dfrac{d^2y}{d\chi^2}\right)^2 + 5\left(\dfrac{dy}{d\chi}\right)^3 - 4y = x^3$, es una ecuación ordinaria de segundo grado

3) $x^2\sqrt{y'' + 3x} - 2y' = 3Senx$, es ordinaria, de segundo orden y el grado no está definido.

1.5 ECUACIÖN DIFERENCIAL LINEAL: Una importante clasificación de las ecuaciones diferenciales las divide en lineales y no lineales; las lineales son aquellas en las cuales el exponente de la variable dependiente (y) y sus derivadas (y', y'',... y^n) es la unidad, además sus coeficientes solo dependen de la variable independiente x y no deben contener funciones trascendentes de y ni de sus derivadas.

Como estructura general, las ecuaciones diferenciales lineales presentan la siguiente forma: $a_n(\chi)\frac{d^n y}{d\chi^n}+a_{n-1}(\chi)\frac{d^{n-1}y}{d\chi^{n-1}}+\cdots+a_1(\chi)\frac{dy}{d\chi}+a_0(\chi)=f(\chi)$

Ejemplos: $4x\frac{dy}{d\chi}+7x=0$ $\qquad \frac{d^2y}{d\chi^2}-5\frac{dy}{dx}+y=0$ $\qquad x^2\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{dy}{dx}=e^{\chi}$

* Las ecuaciones diferenciales que no cumplan las condiciones de linealidad, se les llama no lineales.

Ejemplos: $\frac{d^3y}{dx^3}+5y^2=0$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2}-5Sen(y)=0$ $\qquad (2-y)\frac{dy}{dx}+2y=e^{\chi}$

1.6 TRABAJO N° 1

I) Clasifica las siguientes ecuaciones diferenciales según el tipo, orden y grado.

1) $\frac{dy}{dx}=2x$, 2) $xdy-ydx=0$

3) $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y=0$ 4) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4-y^2$

5) $\frac{\partial Z}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial y}=Z$ 6) $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+x+y-uz=0$

7) $\frac{\partial^3z}{\partial y^3}+x\left(\frac{\partial^2z}{\partial y^2}\right)^2-xz\frac{\partial z}{\partial x}=0$ 8) $\left(\frac{\partial^3u}{\partial x^3}\right)^2+u^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3-15=0$

9) $\frac{d^4y}{dx^4}+x^2\frac{d^2y}{dx^2}+xy\frac{dy}{dx}-10y=0$ 10) $\frac{\partial^3y}{\partial\chi^3}+xy\frac{\partial y}{\partial u}-3u^4=0$

11) $(1+y)\frac{dy}{dx}+2y=e^{\chi}$ 12) $\frac{d^2y}{dx^2}+Sen(y)=0$

13) $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 2x\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + 3\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^3 = 1 - x$

14) $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3x\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 0$

15) $\frac{d^4 y}{dx^4} + y^2 = 0$

16) $\frac{d^3 y}{dx^3} + x\frac{d^2 y}{dx^2} + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

17) $\frac{d^2 v}{dx^2}\frac{dv}{dx} + x\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + v = 0$

18) $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$

19) $y''' + 2(y'')^2 + y' = Cos\chi$

20) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$

21) $(y'')^3 + 7x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 3x - 1$

22) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = 0$

23) $\frac{d^2 y}{dx^2} + 5x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$

24) $x^2\sqrt{y'' + 3x} - 2y' = 3Senx$

II) Selecciona entre las siguientes ecuaciones aquellas que sean lineales.

1) $y' + x^2 - 1 = y$

2) $3xy'' - 4yy' + ySenx = 4x$

3) $ydx + (xy + x - 3y)dy = 0$

4) $y'' - 2y + 3 = e^x$

5) $4xy' + Cosy = 5x$

6) $\frac{d^2 y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

7) $\left[\frac{d^2 y}{dx^2}\right]^3 + 5y\frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0$

8) $xTgy + y' = x + Cosx$

9) $(1 + y)\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

10) $\frac{d^2 y}{dx^2} + Seny = 0$

1.7 ANALISIS DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

De una ecuación diferencial puede obtenerse valiosa información; para tales fines son cuatro los enfoques generales usados, que recogen de una u otra forma las sugerencias planteadas para la resolución de problemas matemáticos.

1.6.1 Enfoque cualitativo: Este enfoque permite establecer el comportamiento de las soluciones sin llegar a efectuar ninguna formulación matemática, es decir, se hace un bosquejo muy general sin resolver la ecuación.

1.6.2 Enfoque numérico: El enfoque permite calcular o hacer estimaciones de los valores de las funciones incógnitas, partiendo de algunos valores de la variable independiente. Este enfoque se convierte en la única alternativa práctica para problemas de un gran grado de dificultad.

1.6.3 Enfoque analítico: Este enfoque consiste en el conjunto de procedimientos que permiten obtener soluciones implícitas y explícitas de las ecuaciones diferenciales.

1.6.4 Enfoque asintótico o perturbativo: Este enfoque es usado para cursos avanzados de ecuaciones diferenciales, en las ecuaciones analíticas exactas.

Observación: La expresión $y = f(x)$, indica que la variable dependiente y .está en función de la variable independiente x.

Recuerde: $\frac{dy}{dx} = y'$; $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

1.8 SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

1.8.1 DEFINICION:

Una función f definida en algún intervalo I es solución de una ecuación diferencial, si al sustituirla en ella la convierte en una identidad.
Una solución de una ecuación diferencial ordinaria es una función que no contiene derivadas o diferenciales y que satisface la ecuación diferencial dada.
Es el proceso de hallar las soluciones de una ecuación diferencial se le llama integrar la ecuación.
Las soluciones se clasifican en explícitas, si la variable dependiente se expresa en términos de la variable independientes y de constantes, es decir, expresiones de la forma $y = f(x)$ e implícitas, si la variable dependiente no está explícitamente, es decir, expresiones de la forma $f(x, y) = 0$

Ejemplo 1: La ecuación $x^2 + y^2 = 9$ es solución de $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ en el intervalo $-3 \angle x \angle 3$.

Ejemplo 2: La función $y = 3e^{x^2}$ es una solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2xy$ para toda X.

Ejemplo3: La función $xy = 2$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $y' = -\frac{y}{x}$

1.8.2 COMPROBACION DE SOLUCIONES.

Consiste en constatar si una función y sus derivadas satisfacen o no la ecuación diferencial dada.

Para lo anterior, se reemplaza la función en la ecuación diferencial dada y después de derivarla y efectuar las simplificaciones del caso se debe obtener una identidad.

Ejemplo 1: La función $y = x^2$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$, ya que al sustituirla en dicha ecuación, la convierte en $\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} = 2x$.

Puede observarse además que toda función de la forma $y = x^2 + c$, donde c es una constante arbitraria, es también una solución de dicha ecuación, esto es, tiene infinitas soluciones.

Ejemplo2: Comprueba que $f(x) = Sen\theta$ es solución de $y' = Cos\theta$

Solución: Como $y = Sen\theta$,entonces $y' = Cos\theta$, por lo tanto, $Cos\theta = Cos\theta$

Ejemplo3: Determine si $y = e^{3x} + 10e^{2x}$ es solución de $y' - 2y = e^{3x}$

Solución: Como $y = e^{3x} + 10e^{2x}$, entonces $y' = 3e^{3x} + 20e^{2x}$, por lo tanto se tiene que $3e^{3x} + 20e^{2x} - 2(e^{3x} + 10e^{2x}) = e^{3x}$, entonces $3e^{3x} + 20e^{2x} - 2e^{3x} - 20e^{2x} = e^{3x}$, entonces se obtiene finalmente que $e^{3x} = e^{3x}$, lo cual significa que la función $y = e^{3x} + 10e^{2x}$ si es solución de la ecuación diferencial $y' - 2y = e^{3x}$.

Ejemplo4: Determinar si $f(x) = Sen\theta$ es solución de $y'' + y = 0$

Solución: Como $y' = Cosx$ y $y'' = -Senx$, entonces sustituyendo en la ecuación dada se tiene que $-Senx + Senx = 0$

Ejemplo 5: Probar que la familia de funciones $y = Ce^x$ son soluciones de la ecuación diferencial $y' - y = 0$

Solución: Como $y' = Ce^x$, entonces al reemplazar en la ecuación original se tiene que $Ce^x - Ce^x = 0$, lo cual indica que evidentemente es solución y en este caso por tratarse de una familia de soluciones se le llama solución general.

1.9 TRABAJO N° 2

I: Verifica si la función dada es solución de la ecuación diferencial correspondiente.

1) $y = 2e^{3x}$ de $y' = 3y - 3$

2) $y = x^2$ de $y' = 2\frac{y}{x}$

3) $y = x - 1$ de $y' = \frac{y}{x-1}$

4) $y = e^{x^2}$ de $y' = 2xy$

5) $y = x + 3$ de $y' = \frac{y-3}{x}$

6) $y = 3e^{4x} + 2$ de $y' = 4y - 8$

7) $y = \frac{x^4}{16}$ de $y' = xy^{\frac{1}{2}}$

8) $y = xe^x$ de $y'' - 2y' + y = 0$

9) $y = 5Sen5\beta$ de $y' = 25 + y^2$

10) $y = e^{\frac{-x}{2}}$ de $2y' + y = 0$

11) $y = Cosh\phi + Senh\phi$ de $y'' = y$

12) $y = xCos(\ln x)$ de $x^2y'' - xy' = 2y$ para $x > 0$

II: En los ejercicios del 13 al 18, determine si la función dada es solución de la ecuación diferencial $y^{(4)} - 16y = 0$.

13) $y = 3Cosx$

14) $y = 3Cos2x$

15) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 Sen2x + c_4 Cos2x$

16) $y = e^{-2x}$

17) $y = 5\ln x$

18) $y = 5e^{-2x} + 3Cos2x$

III. En los ejercicios del 19 al 24, identifica si cada función es o no solución de la ecuación diferencial $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

19) $u = e^{x+y}$

20) $u = 5$

21) $u = Senxy$

23) $u = x^2y^2$

24) $u = x^2 + y^2$

25) $u = Cosxy$

26) ¿ Para cuales valores de r, la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial dada por $y'' + y' - 6y = 0$

27) Pruebe que la familia de funciones $y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$ es solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1) = 0$

1.10 PRIMITIVA DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

1.10.1 SOLUCION GENERAL: Una solución de una ecuación diferencial en términos de uno o más parámetros se le llama primitiva o solución general; esto se debe a que una ecuación diferencial puede tener muchas soluciones en la medida en que el parámetro o parámetros tomen diversos valores, por lo tanto, al conjunto de todas las soluciones de una ecuación diferencial se le llama solución general.
Por lo expresado anteriormente, una relación entre las variables que contengan n constantes arbitrarias como $y = x^3 + cx^2$ o $y = Ax^2 + Bx$ se le llama primitiva.

Ejemplo: La función y = $\frac{x^3}{3} + c$ es la primitiva o familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x^2$.

1.10.2 SOLUCIÓN PARTICULAR: Una solución para algunos valores de los parámetros se le llama solución particular.

Ejemplo: La función y = $\frac{x^3}{3} + 5$ es una solución particular de $\frac{dy}{dx} = x^2$

Observación: Si la primitiva tiene un solo parámetro esencial, se le llama familia monoparamétrica, biparamérica si tiene dos y familia n paramétrica si contiene n paramétros.

1.10.3 PROCESO PARA CALCULAR LA ECUACIÓN DIFERENCIAL.

En términos generales, de una primitiva que contenga n constantes esenciales (las que no pueden ser reducidas) se puede obtener una ecuación diferencial de orden n sin constantes siguiendo los siguientes pasos.

1. Se deriva la primitiva tantas veces como constantes esenciales halla en ella.
2 Se eliminan las constantes entre la primitiva y las derivadas obtenidas de ellas.

Ejemplo 1: Halla la ecuación diferencial correspondiente a y = $\frac{x^3}{3} + c$

Solución: Como hay una constante, entonces se deriva una sola vez, obteniendo $y' = x^2$ que corresponde a la ecuación pedida.

Ejemplo 2: Obtener la ecuación diferencial correspondiente a $y = Ae^x + B$
Solución: Por existir dos constantes esenciales, se deriva dos veces, obteniendo $y' = Ae^x$ y $y'' = Ae^x$. Se despeja A en la primera y luego se reemplaza en la segunda para obtener $A = \frac{y'}{e^x}, entonces\ \ y'' = Ae^x = \frac{y'}{e^x} \times e^x = y'$, por lo tanto, la ecuación diferencial pedida es $y'' = y'$

1.11 TRABAJO N° 3

I) Verifica si existe o no correspondencia entre primitiva y ecuación diferencial.

1) $y = Ax \ldots \quad y' = \frac{y}{x}$

2) $y = Ax + B \ldots \quad y'' = 0$

3) $y = e^{x+A} \ldots \quad y' = y$

4) $y = ASen\varphi \ldots \quad y' = yC\operatorname{tg}\varphi$

5) $y = Sen(x + A) \ldots \quad (y')^2 = 1 - y^2$

6) $y = Ae^x + B \ldots \quad y'' = y$

7) $x = ASen(y + B) \ldots \quad y'' = x(y')^3$

8) $\ln y = Ax^2 + B \ldots \quad xyy'' - yy' - x(y')^2 = 0$

9) $y = e^x \ldots \qquad y''' = y$

— falta constantes

10) $y = kx^2 + t \quad \ldots \qquad y''' = 0$

11) $y = e^{x^2+A} \ldots \qquad y' = 2xy$

12) $y = kx^2 \ldots \qquad y' = \frac{2y}{x}$

13) $y = c_1 x + c_2 x^3 \cdots x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$

14) $2x^2 + 3y^2 = C \cdots 2x + 3yy' = 0$

II) En los ejercicios del 15 al 24 , halla la ecuación diferencial correspondiente para cada una de las primitivas.

15) $y = Ax^2 + Bx + C$

16) $(x - C)^2 + y^2 = r^2$

17) $y = ACos(ax) + BSen(ax)$

18) $y = Ae^{2x} + Be^x + C$

19) $y = CZ^2 + C^2$

20) $x^2 + y^2 + C = 0$

21). $y = Ce^x$

22) $x^2 + y^2 = cy$

23) $y = c_1 Sen3x + c_2 Cos3x$

24) $y = c_1 + c_2 \ln x$

25) Halla la ecuación diferencial de la familia de circunferencias de radio variable r cuyos centros están sobre el eje x.

1.12 PROBLEMA DE VALOR INICIAL.

Cuando se quiere verificar la solución de una ecuación diferencial, es decir, determinar una solución particular de dicha ecuación, se tiene el llamado problema del valor inicial que constituye una de las aplicaciones prácticas más importantes de las ecuaciones diferenciales.
Este problema aparece en una ecuación y una o más condiciones; si todas las condiciones del problema se refieren a un mismo valor x de la variable independiente, se denomina problema con condiciones o valores iniciales o problema de Cauchy.
Por lo expuesto anteriormente, el problema del valor inicial consiste en hallar una solución de una ecuación diferencial en donde la función o sus derivadas están sujetas a condiciones pre-establecidas en un intervalo definido.

En términos generales, lo dicho anteriormente consiste en resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ sujeta a $y(x_0) = y_0$ en el caso de ser de primer orden o también $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y,y')$ sujeta a $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y_1$.

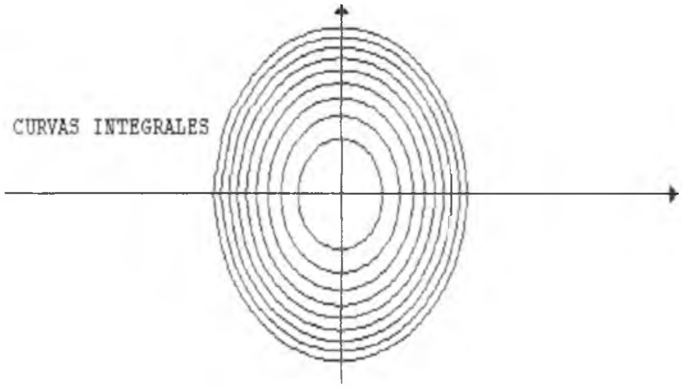
Ejemplo 1: Si $y = Ce^x$ es una familia monoparamétrica de soluciones de $y' = y$ en $(-\infty,\infty)$, halla el problema de valor inicial sujeto a $y(0) = 3$.
Solución: Como $y(0) = 3$, entonces $x_0 = 0$ y $y = 3$, entonces en $y = Ce^x$ se tiene que $3 = Ce^0$, luego $C = 3$, por lo tanto la ecuación solicitada es $y = 3e^x$.

Ejemplo 2: Si $x = c_1Cos4t + c_2Sen4t$ es una familia biparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $x'' + 16x = 0$, determine una solución del problema de valor inicial sujeto a $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ y $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Solución: Inicialmente sustituyendo $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ en la familia $x = c_1Cos4t + c_2Sen4t$, se obtiene la expresión $c_1Cos\left(4\frac{\pi}{2}\right) + c_2Cos\left(4\frac{\pi}{2}\right) = -2$, por lo tanto $c_1 = -2$
Seguidamente se deriva la expresión correspondiente a la familia dada por la expresión $x = c_1Cos4t + c_2Sen4t$, obteniendo $x' = -c_1Sen4t + c_2Cos4t$ y luego se reemplaza $x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ para obtener $-c_1Sen\left(4\frac{\pi}{2}\right) + c_2Cos4\left(4\frac{\pi}{2}\right) = 1$, por lo tanto $c_2 = \frac{1}{4}$, entonces la ecuación final es $x = -2Cos4t + \frac{1}{4}Sen4t$.

Ejemplo 3: La ecuación $y' - y = 0$ tiene por solución general al conjunto de funciones $y = Ce^x$ y una solución particular de dicha ecuación es $y = Ce^x$.

CURVA INTEGRAL: Como las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria son funciones, la gráfica de una solución se le denomina curva integral.
Ejemplo: Las soluciones de la ecuación $yy' = -x$ son $x^2 + y^2 = k$ cuyas curvas integrales son las mostradas en la siguiente figura.



Aquí puede notarse el conjunto de curvas que se forman en la medida en que K toma distintos valores en la ecuación $x^2 + y^2 = k$.

Puede apreciarse en el gráfico anterior, como el problema de la construcción de las curvas integrales se resuelve introduciendo las isoclinas, el lugar geométrico de puntos en los que las tangentes a las curvas integrales tienen una misma dirección.
La familia de isoclinas de una ecuación diferencial se determinan por la ecuación $f(x,y) = k$, que en el específico caso del ejemplo anterior corresponde a la ecuación $x^2 + y^2 = k$.

1.13 PROBLEMA DEL VALOR INICIAL Y LA INTEGRACIÓN.

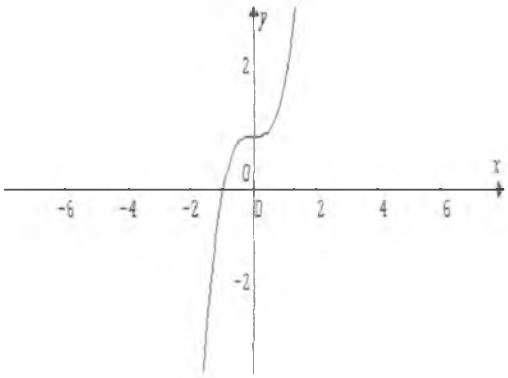
En las ecuaciones diferenciales de primer orden, la primera derivada de una función $y(x)$ depende de la variable independiente x y de la solución desconocida y, es decir, presentan la forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, sin embargo, muchas ecuaciones diferenciales se pueden resolver por integración directa, dando origen a los siguientes casos:

1.13.1 POR INTEGRAL INDEFINIDA.

Este *caso* se da cuando en $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ se tiene que f(x,y) no depende de la solución desconocida y, entonces $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ se convierte en $\frac{dy}{dx} = f(x)$, para tal caso basta con despejar Y, para lo cual se usa una integral indefinida para hallar una solución que satisfaga a $y(x_0) = y_0$

Ejemplo: Resolver $\frac{dy}{dx}=3x^2$ sujeto a $y(2)=9$

Solución: Como $\frac{dy}{dx}=3x^2$ tiene la forma $\frac{dy}{dx}=f(x)$, entonces $dy=3x^2dx$, por lo tanto $\int dy=\int 3x^2dx$, luego $y=x^3+c$; la expresión anterior se le llama solución general, lo cual significa que una ecuación diferencial puede tener muchas soluciones, pero en este caso se busca la que pase por el punto (2,9), entonces $y=x^3+c$, $9=2^3+c$, entonces $c=1$, por lo tanto la solución deseada es $y=x^3+1$



La gráfica corresponde a la solución del problema de valor inicial $\frac{dy}{dx}=3x^2$ sujeto a $y(2)=9$; esto es, la gráfica de la función $y=x^3+1$.

1.13.2 POR INTEGRAL DEFINIDA.

Para resolver ecuaciones diferenciales de la forma $\frac{dy}{dx}=f(x)$ cuando $f(x)$ no es una integral explícita, en muchos casos es recomendable utilizar integrales definidas porque incluye automáticamente la condición inicial.

El proceso consiste en cambiar la variable independiente x por otra t llamada ficticia en $\frac{dy}{dx}=f(x)$ y multiplicar ambos lados de esta ecuación por el diferencial de la nueva variable para luego integrar a ambos lados, desde x_0 a x como límites, es decir, $\frac{dy}{dx}=f(x)$ se convierte en $\frac{dy}{dt}dt=f(t)dt$, entonces integrando a ambos lados $\int_{x_0}^{x} y'(t)dt=\int_{x_0}^{x} f(t)dt+y(x_0)$, entonces se tiene que $y(t)]^{x}_{x_0}=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$, entonces $y(x)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$, por lo tanto $y(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt+y(x_0)$

Observación: Aquí se aplicó el hecho de que $\int f'(x)dx=f(x)$, esto es, la integral de la derivada de una función es igual a la función.

Ejemplo: Resuelve por integral definida la ecuación $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ sujeto a $y(2) = 9$

Solución: Sabemos que $x_0 = 2$ y $y(2) = 9$, aplicando lo dicho anteriormente se tiene que $\frac{dy}{dt}dt = 3t^2dt$, entonces $\int_2^x y'(t)dt = \int_2^x 3t^2dt$, entonces $y(t)]^x_2 = t^3]^x_2$, entonces $y(x) - y(2) = x^3 - 2^3$, luego $y(x) - 9 = x^3 - 8$, por lo tanto $y(x) = x^3 + 1$

Observación: El problema del valor inicial no siempre es posible, ya que algunas ecuaciones diferenciales no tienen solución y muchas de ellas tienen varias soluciones, entonces para identificar si tienen solución y esta es única se hace uso del llamado teorema de existencia y unidad, el cual afirma: Si R es una región rectangular del plano XY, definido por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contiene al punto (x_0, y_0) y si $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe un intervalo I con centro en x_0 y una función única $y(x)$ definida en I, que satisface el problema del valor inicial.

1.14 TRABAJO

1. Si $y = 2x + ce^x$ es una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} - y = 2 - 2x$, halla el problema de valor inicial sujeto a $y(0) = 3$

2. La primitiva de la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ es $y = cx$, halla el problema de valor inicial sujeto a $y(1) = 2$ ¿Qué ocurre en (0,0)?

3. Si $y = \frac{1}{1 + cx^{-1}}$ es una familia monoparamétrica de soluciones de $y' = y - y^2$ determina una solución del valor inicial sujeto a $y(0) = -\frac{1}{3}$

4. Dado que $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ es una familia biparamétrica de soluciones de la ecuación $y'' - y = 0$, halla èl problema de valor inicial sujeto a $y(-1) = 5$ y $y'(-1) = -5$

5. Halla el problema del valor inicial sujeto a $y(0) = 1$ y $y'(0) = 2$ sabiendo que $y = \frac{c_1e^{2x} + c_2}{e^x}$ es una familia biparamétrica de soluciones de $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$

6. Encuentre la solución del problema de valor inicial como integral de $\frac{dy}{dx} = x^4$ con $y(2) = 3$

7. Encuentre la solución del problema del valor inicial como integral de $\frac{dy}{dx} = x^{\frac{3}{2}}$ con $y(3) = 7$

1.15 TRABAJO GENERAL DEL CAPITULO

Utilizando la información presentada , resuelve los siguientes ejercicios.

1) Halla una solución de la ecuación diferencial $y' = x\,y$, que cumpla la condición inicial $y(0) = 5$

2) Demuestre que la función $y = 2 + e^{-x^3}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' + 3x^2 y = 6x^2$.

3) Compruebe que la función $y = \dfrac{2+\ln x}{x}$, es una solución del problema con valor inicial $x^2 y' + x\,y = 1$, para $y(1) = 2$.

4) ¿ Para cuáles valores de k diferentes de cero, la función $y = Senkt$ satisface la ecuación diferencial $y'' + 9y = 0$.?

5) Determina si la función $y = x\,e^x$ es o no solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 0$.

6) Verifica si la función $y = x + 3$ es solución de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-3}{x}$

7) Calcular la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dadas por la función $y = C_1 x^2 + C_2 x + 4$.

8) Identifica la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas $y = C_1 + C_2 e^{-x}$.

9) Verifica que la relación $x^2 + y^2 - 4 = 0$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $y' = -\dfrac{x}{y}$.

En los ejercicios del 7 al 12, identifica si la ecuación diferencial , es o no lineal.

7) $(1-x)y'' - 4xy' + 5y = Cosx$

8) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = Seny$

9) $x\dfrac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

10) $y\,y' + 2y = 1 + x^2$

11) $(Senx)\,y''' - (Cosx)\,y' = 2$

12) $(1-y^2)\,dx + x\,dy = 0$

CAPITULO II

MODELADO CON ECUACIONES DIFERENCIALES.

2.1 OBJETIVOS ESPECIFICOS

Terminado el presente capítulo se espera que el estudiante esté en capacidad de:

2.1.1 Identificar las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos.

2.1.2 Formular ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos.

2.1.3 Interpretar las ecuaciones diferenciales como el lenguaje natural de las ciencias y la ingeniería.

2.2 INTRODUCCION.

Esta sección tiene como objetivo formular y construir ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos.

El modelo matemático suele tener con frecuencia la forma de una ecuación diferencial, ya que en un problema del mundo real, con frecuencia ocurren cambios y lo que se desea es predecir el comportamiento futuro sobre la base de cómo cambian los valores actuales.

MODELO MATEMÁTICO: Es una descripción matemática mediante función o ecuación de un fenómeno del mundo real.

- Es la representación matemáticas de una situación o fenómeno.

Lo anterior significa describir el comportamiento de un sistema o fenómeno de la vida real en términos matemáticos.

Existen muchas taxonomías de modelos, entre las cuales pueden mencionarse normativos y descriptivos; los normativos son usados como guías, por ejemplo la religión personal es un modelo normativo para el aspecto moral; los descriptivos ilustran la realidad pero no incluyen connotaciones de bueno o malo, como ejemplo merecen mencionarse los planos arquitectónicos.

2.3 ASPECTOS GENERALES PARA LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS.

2.3.1 Identificación de las variables causantes del cambio en el sistema.

2.3.2 Se establece un conjunto de hipótesis acerca del sistema a describir, generalmente expresadas como razón o tasa de cambio de una o más variables.

Seguidamente se hace el análisis de un problema, el cual es convertido en un modelo matemático general.

Ejemplo: Un fabricante puede producir tuercas a un costo de \$2 por unidad. Las tuercas se venden a \$5 cada una. A este precio, los consumidores compraron 4000 tuercas al mes. El fabricante planea aumentar el precio de las tuercas y estima que por cada incremento de \$1 en el precio, se venderán 400 tuercas menos cada mes. Expresa la utilidad mensual del fabricante como función del precio de venta.

Solución: Se establece inicialmente en palabras la relación deseada.

- Utilidad = (cantidad de tuercas vendidas) (utilidad por tuerca).

La idea central es expresar la utilidad como función del precio; para tal caso, la variable independiente es el precio y la variable dependiente es la utilidad.
Sea x el precio de venta y P(x) la utilidad correspondiente a ese precio.
Cantidad de tuercas vendidas = 4000-400 (número de aumento de $1).
El número de aumentos de $1 en el precio es X-5, donde $X es el precio actual y $5 el precio inicial de venta.
Cantidad de tuercas vendidas = 4000-400(X-5) =400(15-X).

Utilidad por cada tuerca es la diferencia entre el precio actual y el costo, esto es, utilidad por tuerca = X-2. Luego, sustituyendo en * se tiene: P(x)= 400(15-X) (X-2).

Nota: Una vez construido el modelo, los valores de la o de las variables dependientes describen el sistema representado en el pasado, presente y futuro.

2.4 ALGUNOS MODELOS.

1. FUNCIONALES.

a) DIFERENCIALES: Si Y=F(x) es una función y $\Delta x = d_x$ representa un cambio relativamente pequeño en la variable independiente x, entonces el cambio correspondiente a la variable dependiente Y está dado por : $d_y = F'(x) \times d_x$.

Ejemplo: Si $Y = 3X^2$, halla el cambio aproximado en Y si X pasa de 5 a 5.2

Solución: $d_Y = F'(x) \times d_X \Rightarrow d_Y = 6x\, d_X = 6(5)(0,2) = 6$

b) PENDIENTE DE UNA CURVA. La pendiente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, corresponde a un modelo matemático dado por la expresión $\frac{dy}{dx} = m$.

2. MODELOS DEMOGRAFICOS.

La tasa de crecimiento de la población de un país crece proporcionalmente a la población total representada por $P(t)$ en un momento t.

Matemáticamente, la expresión correspondiente es $\frac{dP}{dt} \infty P$, es decir, $\frac{dP}{dt} = KP$, en donde K es llamada constante de proporcionalidad.

Observación: Este es un modelo muy sencillo porque no contempla las posibilidades de inmigración y emigración, es usado actualmente para calcular poblaciones de bacterias en períodos cortos de tiempo.

3. MODELOS ECONOMICOS.

a) **Capitalización continua del interés**: Sea $S(t)$ la cantidad de dinero acumulada en una cuenta de ahorros al cabo de t años, r la tasa de interés anual compuesto continuamente, entonces el crecimiento del capital en el tiempo t está dado por $\frac{dS}{dt} = rS$

b) CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO EXPONENCIAL.

Una cantidad Q(t) crece o decrece exponencialmente cuando su ritmo de crecimiento es proporcional a su tamaño, es decir, $\frac{dQ}{dt} = KQ(t)$, en donde si $K \rangle 0$, se produce crecimiento y decrecimiento si $K \langle 0$.

Como $Q(t) = Q_0 e^{K \times t}$, entonces $\frac{dQ}{dt} = CQ_0 e^{K \times t}$, donde $\frac{dQ}{dt}$ modela la tasa de cambio de una cantidad inicial y K es la tasa de crecimiento.

4. MODELOS QUIMICOS.

a) ENFRIAMIENTO TÉRMICO: La tasa de cambio de la temperatura de la superficie de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura (T) del objeto y la temperatura ambiente (Q) es $\frac{dQ}{dt} = -K(T - Q_0)$.

b) DISEMINACIÓN DE UNA ENFERMEDAD. La tasa o razón con que se difunde una enfermedad es proporcional a la cantidad de personas X(t) que la han contraído en el tiempo t y a la cantidad de personas Y(t) que no han sido expuestas, esto es, $\frac{dx}{dt} = Kxy$.

c) DECAIMIENTO RADIACTIVO:

La tasa a la cual decrece un elemento radiactivo en cualquier momento es proporcional a la cantidad presente de dicho elemento; si N representa la cantidad de sustancia radiactiva en el tiempo t, entonces la tasa de decrecimiento estará dada por la expresión $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, en donde λ es una constante positiva llamada " constante de decrecimiento" , además el signo menos indica precisamente que la cantidad N disminuye cuando t aumenta.

Como el crecimiento o decrecimiento obedece a un modelo exponencial, según lo visto en párrafos anteriores, entonces $N = N_0 e^{k t}$ con N_0 correspondiente a la cantidad inicial cuando $t = 0$.

OBSERVACIÔN: El tiempo necesario para que la sustancia se reduzca a la mitad, se le llama " vida media" y su expresión matemática está dada por $V_m = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

5. MODELOS FISICOS

a) **VACIADO DE UN TANQUE POR UN ORIFICIO**: El cambio del volumen del agua que sale de un tanque por un orificio de área A_0 con una velocidad de $V = \sqrt{2gh}$ donde g es la aceleración de la gravedad y h la altura del agua, está dada por la expresión, $\frac{dv}{dt} = -A_0\sqrt{2gh}$, donde el signo menos indica que V está disminuyendo.

b) LA SEGUNDA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO,
La fuerza que actúa sobre un cuerpo de masa m es proporcional a su aceleración, es decir, $f = m\frac{dv}{dt}$.

c) MOVIMIENTO CON GRAVEDAD:
Al lanzar una pelota hacia arriba desde el piso con una velocidad V_0 y además que la única fuerza que actúa es la gravedad, entonces la altura a la que llega la pelota antes de comenzar a bajar esta dada por $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$.

2.5 PLANTEA EL MODELO CORRESPONDIENTE PARA CADA SITUACIÓN.

1. Ecuación de la curva cuya pendiente en cualquier punto (x,y) es igual al doble de la suma de sus coordenadas.

2. Cien gramos de azúcar que están en agua se convierten en dextrosa a una velocidad proporcional a la cantidad que aún no se ha convertido.

3. En cada punto (x,y), la pendiente de la curva tangente es igual al cuadrado de la abscisa del punto.

4. La población de un país, cuando se permite una inmigración de tasa constante r.

5. La rapidez con que se memoriza algo es proporcional a la cantidad que queda por memorizar.

6. La población de una ciudad aumenta a una velocidad proporcional a la población y a la diferencia entre 200.00 y la población.

7. El radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad del radio presente.

8. El cambio de la población de un país, si la tasa de natalidad y mortalidad son proporcionales a la población presente.

9. Una medicina se inyecta en el torrente sanguíneo de un paciente a un flujo constante r. Al mismo tiempo, esa medicina se desintegra con una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier momento.

10. Una muestra de una sustancia se desintegra a un ritmo que es proporcional a su tamaño.

11. El producto de la masa de un cuerpo por aceleración es igual a fuerza.

12. La razón a la que crece cierta población es de 5000 personas por mes.

13. Se estima que dentro de t meses la población de cierta ciudad cambiará a una razón de $4+t^{\frac{2}{3}}$ personas por mes. Si la población actual asciende a 10000 personas, ¿ cuál será la población dentro de ocho meses.

14. Un barco ve frenado su movimiento por la acción de la resistencia del agua que es proporcional a la velocidad del mismo. Escribir la ecuación que exprese la velocidad del barco.

15. Un objeto se mueve de manera que su velocidad después de t minutos está dada por $v(t)=3+2t+6t^2$ metros por minutos.
¿Qué distancia recorre a los dos minutos.

16. Se estima que el valor de una parcela dentro de t años se incrementará a una razón de $v\ (t)$ pesos por año.
Halla una expresión para la cantidad en que aumentará el valor de la parcela durante los próximos cinco años.

17. La tasa de cambio de la temperatura de la superficie de un objeto es proporcional a la diferencia entre la temperatura del objeto y la temperatura de lo que lo rodea

18. Pendiente una recta paralela al eje x.

19. La pendiente de la recta $y=x$

20. Se lanza una pelota desde el suelo con una velocidad de v_0 de tal forma que la única fuerza es la gravedad ¿Qué tan alto llega antes de comenzar el descenso?

21. La población de una ciudad si las tasas de natalidad y mortalidad son proporcionales a la población presente en cualquier momento t.

22. Si se estira o comprime un resorte x unidades desde su longitud origen natural, entonces ejerce una fuerza que es proporcional a x.

II APLICA LA INFORMACIÓN VISTA ANTERIORMENTE PARA RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS

1) En cierta ciudad la tasa a la cual crece su población en cualquier momento es proporcional al tamaño de esta última. Si la población era de 125000 en 1960 , de 140000 en 1980, ¿ cuál es la población esperada para el año 2000?.

2) Si después de 50 días se tiene el 60% de una sustancia radioactiva, determinar la constante de decrecimiento y la semivida de la sustancia.

3) Se descubre que una herramienta de madera encontrada en una excavación en el medio oriente tiene una razón de C^{14} a C^{12} de 0.6 de la razón correspondiente en un árbol actual. Estimar la antigüedad de la herramienta redondeando al centenar de años.

4) Si después de 100 segundos se tiene el 30% de la cantidad inicial de una muestra radioactiva, evalúe la constante de crecimiento y la semivida del elemento.

5) Si después de 100 segundos se ha desintegrado el 30% de la cantidad inicial de una muestra radioactiva, calcule la constante de decrecimiento y la semivida del elemento.

6) Supóngase que una población sigue un crecimiento exponencial dado por $\frac{dN}{dt} = kN$ para $t \geq t_o$ y de $N = N_o$ cuando $t = t_o$. Calcule N, la magnitud de la población en el tiempo t.

7) Se encontró asesinado en una casa a un hombre. La policía llegó al lugar del crimen a las 11Pm . En ese momento la temperatura del cuerpo era de 31ª C , y una hora más tarde era de 30 ª C. La temperatura del cuarto en el que se encontraba el cuerpo era de 22ª C. Determinar la hora del asesinato.

8) Se estima que dentro de x meses la población de cierto pueblo cambiará a una razón de $2 + 6\sqrt{x}$ personas por mes. Si la población actual es de 5000 personas. ¿ Cuál será la población dentro de 9 meses?

CAPITULO III

SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

3.1 OBJETIVOS ESPECIFICOS:

Al terminar la unidad, el alumno estará en capacidad de:
Identificar las ecuaciones por su tipo correspondiente para utilizar el método apropiado que permita resolver una ecuación diferencial de primer orden.
Resolver ecuaciones ordinarias de primer orden y primer grado aplicando los diversos métodos.
Aplicar las ecuaciones diferenciales en la solución de problemas de su especificidad.

3.2 INTRODUCCION: Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y primer grado es aquella en que se relacionan la variable independiente, la dependiente o función incógnita y su primera derivada. Estas ecuaciones pueden ser escritas por cualesquiera de las siguientes formas: La forma normal, dada por $\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$, la implícita $f(x, y(x), y'(x)) = 0$ y la forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, en donde y es la variable dependiente y x la variable independiente; por lo tanto su solución debe expresar a y como función de x y una constante arbitraria.
Cabe señalar que en $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, la variable dependiente puede ser cualquiera de las dos y la solución generalmente se expresa por medio de una función implícita.

Ejemplo: La ecuación $\frac{dy}{dx} = y^2 Sen\chi$ corresponde a la forma normal, mientras que la ecuación $(3x^2 y - x y)dx + (2x^3 y^2 + x^3 y^4)dy = 0$ pertenece a la forma diferencial.

3.3 ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES

Es toda ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, en la cual $f(x,y)$ es el producto de una función en x y otra función en y, es decir, $f(x,y) = g(x)h(y)$, la cual toma la forma $\frac{dy}{dx} = g(x)\ h(y)$, o también como de la forma $f(x)g(y)dx + h(x)p(y)dy = 0$.

Para su solución, en $\frac{dy}{dx} = g(x)\ h(y)$ si $h(y) \neq 0$, $\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$, luego, si se integra con respecto a x de ambos lados se obtiene $\int \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int g(x,y)dx$; esto es, $\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x,y)dx$ que significa integrar cada lado de la ecuación con respecto a la variable correspondiente.

Otra forma: Si la ecuación $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, relacionada antes toma la forma $M(x)dx + N(x)dy = 0$, se le llama ecuación diferencial de variable separable , en la cual M es una función solo de x y N una función solo de y.
Ejemplo: La ecuación diferencial $(x-1)^2\,y\,dx + x^2(y+1)dy = 0$ es de la forma anterior.

3.3.1 PROCESO GENERAL DE SOLUCION:

En las ecuaciones diferenciales de la forma (1) $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, cuando f es una función independiente de Y, es decir, $f(x,y) = g(x)$ entonces (1) toma la forma $\frac{dy}{dx} = g(x)$, por lo tanto $dy = g(x)\,dx$ en la cual si $g(x)$ es una función continua entonces se puede aplicar integral indefinida a ambos lados obteniendo $\int dy = \int g(x)\,dx, \Rightarrow y = G(x) + c$ en donde $G(x)$ es una primitiva de $g(x)$.
Tomando la ecuación (1) como $\frac{dy}{dx} = g(x)\,h(y)$ y considerando $h(y) \neq 0$, entonces dividiendo (1) por $h(y)$ toma la forma (2) $\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x)$; además como $y = f(x)$ debe ser solución de (2) y haciendo $P(x) = \frac{1}{h(y)}$ se obtiene $P(f(x))f'(x)dx = g(x)dx$ entonces (3) $P(y)\,dy = g(x)dx$ en donde $dy = f'(x)\,dx$. Si se integra (3) a ambos lados respecto a x se obtiene $\int P(y)dy = \int g(x)dx, \Rightarrow F(y) = G(x) + c$, en donde F y G son primitivas de P y g respectivamente.

3.3.2 <u>PROCESO SINTETICO DE SOLUCION</u>:

Teniendo en cuenta los procesos anteriores, se puede recomendar los siguientes pasos para resolver ecuaciones diferenciales de variables separables.

1) Se separan variables en la ecuación dada.
2) Se integra indefinidamente a ambos lados de la ecuación obtenida en uno.
3) Se despeja y, si es posible en la ecuación obtenida en dos, en caso contrario la respuesta será una función implicita.

<u>**OBSERVACIÓN**</u>: En la solución de ejercicios es frecuente utilizar a, $e^{\ln y} = y$.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación diferencial $dx - x\,dy = 0$.

Solución: En $dx - x\,dy = 0$, separando variables se obtiene $dy = \frac{1}{x}dx$, entonces integrando a ambos lados se obtiene $\int dy = \int \frac{1}{x}\,dx, \Rightarrow y = \ln|x| + c.$

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $(1+y)\,dx - (1+x)\,dy = 0$.

<u>Solución</u>: Separando variables en la ecuación dada, $(1+y)\,dx - (1+x)\,dy = 0$ se obtiene $(1+x)\,dy = (1+y)\,dx, \Rightarrow \frac{1}{(1+y)}dy = \frac{1}{(1+x)}dx$; integra a ambos lados se obtiene $\int \frac{1}{1+y}\,dy = \int \frac{1}{1+x}\,dx, \Rightarrow \ln(1+y) = \ln(1+x) + \ln c$, donde puede observarse que $c = \ln c$, luego $\ln(1+y) = \ln(c(1+x)), \Rightarrow e^{\ln(1+y)} = e^{\ln(c(1+x))}, \Rightarrow 1+y = c(1+x), \Rightarrow y = c(1+x) - 1$

Ejemplo 3: Resolver la ecuación diferencial $y^2dx + dy = y\,dx.$

<u>Solución</u>: Mediante la separación de variables, la ecuación dada se transforma en $dy = y\,dx - y^2\,dx, \Rightarrow dy = (y - y^2)\,dx, \Rightarrow \frac{1}{y(1-y)}dy = dx, \Rightarrow \int \frac{1}{y(1-y)}\,dy = \int dx$;

La integral del lado izquierdo de la ecuación resultante se calcula por fracciones parciales, entonces (1) $\int\left(\frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}\right)dy = \int dx, \Rightarrow \int \frac{(A(1-y) + By)}{y(1-y)}dy = x + c$ por lo tanto, $\int\left[\frac{A - Ay + By}{y(1-y)}\right]dy = \int\left[\frac{(B-A)\,y + A}{y(1-y)}\right]dy$, entonces comparando los respectivos numeradores, inicial y final, resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $B - A = 0$ y $A = 1$, luego $A = 1$ y $B = 1$. Sustituyendo en la ecuación (1) se obtiene

$\int \frac{1}{y}\,dy + \int \frac{1}{1-y}\,dy = x + c, \Rightarrow \ln y - \ln(y-1) = x + c, \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{y-1}\right) = x + c$, por lo tanto

$e^{\ln\left(\frac{y}{y-1}\right)} = e^{x+c}, \Rightarrow \frac{y}{y-1} = e^c\,e^x = ce^x, \Rightarrow y = ce^x(y-1) = ce^x\,y - ce^x$,entonces

$ce^x = ce^x\,y - y = y(ce^x - 1), \Rightarrow y = \frac{ce^x}{ce^x - 1}.$

Ejemplo 4: Resolver la siguiente ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = y^2\,Sen\chi$.

<u>Solución</u>: Separando variables se obtiene $\frac{dy}{y^2} = sen\chi\,dx, \Rightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int Sen\chi\,dx$, luego

$-\frac{1}{y} = -Cos\chi + c, \Rightarrow y = \frac{1}{Cos\chi + c}$

3.4 TALLER N° 4.

I. Mediante separación de variables comprueba la solución de cada ecuación :

1) $\frac{dy}{dx} = y^2 Cos\chi$ .... $y = -\frac{1}{Sen\chi}$

2) $e^{-x}\,dy = dx$ .... $y = e^x + c$

3) $\frac{dy}{dx} = y(1-y)$ .... $y = \frac{k\,e^x}{-1 + k\,e^x}$

4) $(x^2-1)\,dy = -2xy\,dx$ .... $x^2 y - y = c$

5) $x^3\,dx + (y+1)^3\,dy = 0$ .... $\frac{x^4}{4} + \frac{(y+1)^4}{4} = c$

II. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales por separación de variables.

1) $\frac{dy}{dx} = Sen5\chi$

2) $\frac{dy}{dx} = (x+1)^2$

3) $dx + e^{3x}\,dy = 0$

4) $dx - x^2\,dy = 0$

5) $(x+1)\frac{dy}{dx} = x + 6$

6) $e^x \frac{dy}{dx} = 2x$

7) $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$

8) $(x-4)\,y^4 dx - x^3(y^3 - 3)dy = 0$

9) $\frac{dy}{dx} = -2x\,y$

10) $\frac{dp}{dt} = P - P^2$

11) $2y\,(x+1)\,dy = dx$

12) $4y\,dx + x\,dy = 0$

13) $4x\,dy - y\,dx = x^2\,dy$

14) $x^2\,dy + 2x\,y\,dx - dy = 0$

15) $\frac{dy}{dx} = Cos3x + 5$

16) $(1 + e^x)\,y\frac{dy}{dx} = e^x$

3.5 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS.

3.5.1 INTRODUCCIÓN: Supóngase que $f(x,y)$ es una función de primeras derivadas parciales continua en una determinada región, su derivada total está dada por $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial}dy$, por lo tanto la ecuación diferencial $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$ se convierte en $df = 0$ cuya solución será $f = c$; a este tipo de ecuaciones diferenciales se les llama exactas, es decir, aquellas que corresponden a la derivada total de una determinada función.

Ejemplo: Para la función $f(x,y) = xy + 2x^3y^2$, su diferencial total está dado por la expresión $df = (y + 6x^2y^2)dx + (x + 4x^3y)dy$.

3.5.2 <u>**DEFINICION**</u>. Una ecuación diferencial es exacta si corresponde a la derivada total de una función definida en una región de plano XY.

<u>OTRA FORMA</u>: Una ecuación diferencial se le llama exacta si la expresión del lado izquierdo es la derivada total de una función.

Ejemplo 1: La ecuación $y\,dx + x\,dy = 0$ es exacta por corresponder a la derivada total de $f(x,y) = xy$.

Ejemplo 2: La ecuación diferencial $y^2dx + 2xy\,dy = 0$ es exacta por que dada la función $f(x,y) = xy^2$, se tiene que $df = y^2dx + 2xydy$; esto es, $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y) = y + 6x^2y^2$ y además $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y) = x + 4x^3y$.

3.5.3 <u>**CRITERIO PARA RECONOCER ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS**</u>.

Sea $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ una ecuación diferencial exacta, entonces existe una función $f(x,y)$ definida en una región R del plano XY, en la cual, para cada $x \in R$ se cumple que $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, en donde comparando término a término se puede observar que $M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$, además como las derivadas parciales cruzadas de $f(x,y)$ son iguales, entonces $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, por lo tanto se puede inferir que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, lo cual constituye la condición para identificar que la ecuación diferencial $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ sea exacta.

Ejemplo: Verificar que la ecuación diferencial $(x^2+2xy)dx+x^2dy=0$ es exacta.

Solución: Aquí $M(x,y)=(x^2+2xy)$ y $N(x,y)=x^2, \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=2x$ y $\frac{\partial N}{\partial x}=2x$, por lo tanto $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}=2x$, lo cual significa que la ecuación es exacta.

3.5.4 **PROCESO SINTETICO DE SOLUCION.**

1) La ecuación dada se modifica hasta darle la forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

2) Se calcula $\frac{\partial M}{\partial y}$ y $\frac{\partial N}{\partial x}$ para verificar si la ecuación es o no exacta.

3) Se integra $M(x,y)$ respecto a x o $N(x,y)$ respecto a y; y como constante de integración se introduce una función arbitraria g en la variable no integrada.

4) Se deriva lo obtenido en (3) con respecto a la variable de la función arbitraria.

5) La expresión obtenida en (4) se iguala a la expresión no integrada en 2.

6) En lo obtenido en (5) se despeja la función arbitraria después de integrarla con respecto a su variable.

7) La función obtenida en (6) se reemplaza en la expresión obtenido en 3.

3.5.6 **EJERCICIOS RESUELTOS.**

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $x^2dy=dy-2xy\,dx$.

Solución: Se reagrupa la ecuación dada obteniendo $2xy\,dx+(x^2-1)dy=0$; se verifica si es o no exacta, esto es, $\frac{\partial M}{\partial y}=2x$ y $\frac{\partial N}{\partial x}=2x$. por lo tanto la ecuación dada es exacta. Se integra $M(x,y)$ o $N(x,y)$, por ejemplo $N(x,y)$ para obtener la función $f(x,y)=\int N(x,y)\,dy=\int(x^2-1)dy=x^2y-y+g(x)$, luego se tiene que $f(x,y)=x^2y-y+g(x)$; la expresión anterior se deriva respecto a x y se iguala a $M(x,y)$ para obtener $2xy+g'(x)=2xy$, luego $g'(x)=0$, entonces $\int g'(x)\,dx=\int 0\,dx, \Rightarrow g(x)=c$. Se reemplaza $g(x)=c$ en $f(x,y)=x^2y-y+g(x)$ para obtener la solución deseada, es decir, $f(x,y)=x^2y-y+c$.

Observación: En el paso (3) se puede integrar $M(x,y)$ y el resultado será el mismo.

Ejemplo 2: Resolver la siguiente ecuación $2x^3\,dx + 3x\,dy = dy - 3y\,dx - y\,dy$.
Solución: Inicialmente a la ecuación se le da la forma $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$,esto es, $(2x^3 + 3y)\,dx + (3x + y - 1)\,dy = 0$, luego $\frac{\partial M}{\partial y} = 3$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 3$, por lo tanto la ecuación es exacta. Sea $f(x,y) = \int (2x^3 + 3y)\,dx$, luego $f(x,y) = \frac{x^4}{2} + 3xy + g(y)$,, entonces $3x + g'(y) = 3x + y - 1, \Rightarrow g'(y) = y - 1, \Rightarrow g(y) = \frac{y^2}{2} - y + c$, luego se tiene que $f(x,y) = \frac{x^4}{2} + 3xy + \frac{y^2}{2} - y + c$, .

Ejemplo 3: Resolver la ecuación $2xy\,dx + x^2\,dy = dy$.
Solución: Mediante la reagrupación de términos se obtiene $2xy\,dx + (x^2 - 1)dy = 0$, luego $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x$, por lo tanto, la ecuación diferencial dada es exacta. Sea $f(x,y) = \int (2xy)\,dx = x^2 y + g(y)$, entonces $x^2 + g'(y) = x^2 - 1$, entonces se tiene que $g'(y) = -1, \Rightarrow g(y) = -y + c$, por lo tanto $f(x,y) = x^2 y - y + c$.

Nota: Toda ecuación diferencial de la forma $M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$ es exacta, es decir, toda ecuación de variable separable es exacta.

3.5.7 TALLER N°5: DESARROLLA EL SIGUIENTE GRUPO DE EJERCICIOS.

I. VERIFICA SI LAS SIGUIENTES ECUACIONES SON O NO EXACTAS.

1) $y(x - 2y)\,dx - x^2\,dy = 0$

2) $x^2\,dx = 0 - xy\,dy - y^2\,dx$

3) $2(u^2 + uv)\,du + (u + v^2)\,dv = 0$

4) $dx - \sqrt{a^2 - x^2}\;dy = 0$

5) $x\,dx + y\,dy = (x^2 + y^2)dx$

6) $y\,dx + x(x^2 y - 1)\,dy = 0$

7) $(x + y - 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$

8) $\frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy = 0$

9) $(3x^2 + 4xy)\,dx + (2x^2 + 2y)\,dy = 0$

10) $2xy\,dx + (1 - x^2)dy = 0$

11) $(Senxy + xyCosxy)\,dx + x^2 Cosxy\,dy = 0$

12) $(x + y^2)\,dx - 2xy)\,dy = 0$

II. VERIFICA LA SOLUCION PARA CADA ECUACION DIFERENCIAL DADA.

1) $2x\,dx + 3y\,dy = dx - 7\,dy$ .... $x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c$

2) $(2xy - 3x^2)\,dx + (x^2 - 2y)\,dy = 0$ .... $x^2y - x^3 - y^2 = c$

3) $2xy^2\,dx + 4\,dy - 3dx + 2x^2y\,dy = 0$ .... $x^2y^2 - 3x + 4y = c$

4) $4x^3y^3\,dx - x^2\,dy = 2xy\,dx - 3x^4y^2\,dy$ .... $x^4y^3 - x^2y = c$

5) $3x\,dy - dy + 2x^3\,dx + y\,dy + 3y\,dx = 0$ .... $x^4 + 3xy + y^2 - 2y = c$

6) $2xy\,dy + (x^2 + y^2)\,dx = 0$ .... $xy^2 + \frac{1}{3}x^3 = c$

III. RESOLVER SI ES POSIBLE CADA ECUACION DIFERENCIAL DADA.

1) $-x\,dy + 2x\,dx = 6y\,dy - y\,dx$

2) $\frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy = 0$

3) $x^3\,dx + 3xy^2\,dy + y^3\,dx = 0$

4) $(5y - 2x)y' - 2y = 0$

5) $(x^2 - x + y^2)dx - (ye^y - 2xy)dy = 0$

6) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 24x}{x^2 + 16}$

7) $(x + y)^2\,dx + (2xy + x^2 - 1y)dy = 0$ Si $y(1) = 1$

8) $2x\,dx + 3y\,dy = dx - 7\,dy$

9) $\frac{y(2 + x^3y)}{x^3}dx = \frac{(1 - 2x^3y)}{x^2}dy = 0$

10) $Cos y\,dx + (y^2 - x\,Sen y)\,dy = 0$

11) $2xy\,dx + x^2\,dy = 3x^2\,dx + 2y\,dy$

12) $ye^x\,dx + e^x\,dy = 0$

13) $(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$ Si $y(3) = 1$

14) $(xy^2 + x)dx + yx^2\,dy = 0$

15) $(2x\,tg(y) + 5)dx + (x^2\sec^2(y))dy = 0$

16) $\frac{(2xy - 1)}{y}dx + \frac{(x + 3y)}{y^2}dy = 0$

17) $(3y^2 + 10xy^2)\,dx + (6xy - 2 + 10x^2y)\,dy = 0$

18) $(2x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0$

19) $x^2\,dx = 0 - 2xy\,dy - y^2\,dx$

20) $2x\,dx + 3y\,dy = dx - 7\,dy$

3.6 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN.

3.6.1 DEFINICION: Toda ecuación diferencial de la forma (1) $a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$, se le llama ecuación diferencial lineal de primer orden.
Para el caso en que $g(x) = 0$,la ecuación se le llama lineal homogénea y si $g(x) \neq 0$, entonces la ecuación se le llama no homogénea o completa.
Si $a_1(x)$ es distinta de cero, entonces al dividir toda la ecuación (1) por $a_1(x)$, toma la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$ (2), llamada forma usual, en donde $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ y $f(x)$ son funciones continuas.

Una caracteristica importante de las ecuaciones lineales de primer orden consiste en que su solución tiene la forma $Y = y_c + y_p$, en donde y_c es la solución de la ecuación $y' + P(x)y = 0$ y y_p es una solución particular de $y' + P(x)y = f(x)$.
En el primer caso, la solución se obtiene por separación de variables, quedando la ecuación $y' + P(x)y = 0$ de la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx$; integrando a ambos lados se obtiene $\int \frac{1}{y}dy = -\int P(x)dx. \Rightarrow \ln y = -\int P(x)dx$, entonces se tiene que

$$y_c = e^{-\int P(x)dx + c} = e^c\, e^{-\int P(x)dx} = k\,e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int P(x)dx}, \quad para \quad cuando \quad c = 1.$$

En el procedimiento anterior se pudo observar que $y_c = k\,e^{-\int P(x)dx}$, en la cual se hizo $c = 1$, la idea es reemplazar el valor de C por una función general de tal forma que $y_p = u(x)y_c$, luego tomando $u(x)y_c$ como solución general en $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$, se obtiene $\frac{d}{dx}(u\,y_c) + P(x)u\,y_c = f(x)$, entonces $u\frac{d\,y_c}{dx} + y_c\frac{du}{dx} + P(x)u\,y_c = f(x)$, entonces $u(\frac{d\,y_c}{dx} + P(x)y_c) + y_c\frac{du}{dx} = f(x)$, luego $y_c\frac{du}{dx} = f(x), \Rightarrow du = \frac{f(x)}{y_c}dx$, por lo tanto se tiene $u = \int \frac{f(x)}{y_c}dx$ y como $y_p = u(x)y_c$, se tiene que $y_p = e^{-\int P(x)dx + c} \times \int \frac{f(x)}{y_c}dx$, luego $y_p = e^{-\int P(x)dx + c} \times \int \frac{f(x)}{e^{-\int P(x)dx}}dx = e^{-\int P(x)dx} \times \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx$, entonces finalmente se tiene que $Y = y_c + y_p = c\,e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx} f(x)dx$.

Nota: En $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$, a la función $f(x)$ se le llama de forzamiento o entrada.

La fórmula anterior es el método general de resolver ecuaciones diferenciales lineales, pero una forma más fácil de manejar dichas ecuaciones consiste en multiplicar la ecuación $Y = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx} f(x)dx$ por $e^{\int P(x)dx}$, entonces se tiene $e^{\int P(x)dx} \times Y = c + \int e^{\int P(x)} f(x)dx$, entonces derivando ambos miembros de la ecuación obtenida anteriormente, se obtiene que $\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx} \times Y\right] = \frac{d}{dx}\left[c + \int e^{\int P(x)} f(x)dx\right], \Rightarrow e^{\int P(x)dx}\frac{dY}{dx} + P(x)e^{\int P(x)dx}Y = e^{\int P(x)dx} f(x)$, ahora al dividir por $e^{\int P(x)dx}$, resulta $\frac{dY}{dx} + P(x)\,Y = f(x)$ la cual corresponde a la ecuación diferencial inicial de primer orden.

3.6.2 PROCESO SINTETICO GENERAL DE SOLUCION.

1. La ecuación dada se convierte a la forma usual.
2. Se identifica y calcula el factor integrante de la ecuación dada, esto es, $e^{\int P(x)dx}$.
3. La ecuación usual se multiplica por el factor integrante.
4. El lado izquierdo de la ecuación obtenida en (3) corresponde a la derivada del factor integrante por la variable dependiente Y (puede ser x).
5. Se integra ambos lados de la ecuación obtenida en (4).

Ejemplo 1: Resolver la ecuación diferencial $x\frac{dy}{dx} - 3y = x^5$.

Solución: Se divide la ecuación dada por X para obtener la forma usual, es decir, $\frac{dy}{dx} - \frac{3}{x}y = x^4$, entonces $F_i = e^{\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{3}{x}dx} = e^{-3\ln x} = e^{\ln x^{-3}} = x^{-3}$, multiplicando por x^{-3}, se obtiene $x^{-3}\frac{dy}{dx} - x^{-4}y = x, \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{-3}y\right) = x, \Rightarrow x^{-3}y = \frac{x^2}{2} + c, \Rightarrow y = \frac{x^5}{2} + cx^3.$

Ejemplo 2: Resolver la ecuación diferencial $(x-1)y' + y = x^2 - 1$

Solución: Se divide por $(x-1)$, entonces $y' + \frac{1}{x-1}y = x+1$, luego el factor integrante es $F_i = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x-1}dx} = e^{\ln(x-1)} = (x-1)$, multiplicado por este factor se obtiene $(x-1)y' + y = (x-1)(x+1), \Rightarrow \frac{d}{dx}[(x-1)y] = x^2 - 1, \Rightarrow (x-1)y = \int (x^2-1)dx = \frac{x^3}{3} - x + c,$

por lo tanto, $y = \frac{x^3 - 3x + c}{3(x-1)}$.

3.6.3 RESUELVE LAS SIGUENTES ECUACIONES DIFERENCIALES.

1) $dy = 4x\,dx - 2xy\,dx$

2) $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^2$

3) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x$

4) $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2$

5) $x\dfrac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$

6) $x\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0$

7) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 3$

8) $3\dfrac{dy}{dx} + 12y = 4$

9) $\dfrac{dy}{dx} = 5y$

10) $\dfrac{dy}{dx} + y = 3^{3x}$

11) $y' + 3x^2 y = x^2$

12) $y' + 2xy = x^2$

13) $\dfrac{dy}{dx} = 2y + x^2 + 5$

14) $\dfrac{dy}{dx} = x + y$

15) $x\dfrac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

16) $\dfrac{dy}{dx} + 5y = 20, \quad Si \quad y(0) = 2$

17) $\dfrac{dq}{dx} = 5x^4 q, \quad Si \quad q(0) = -7$

18) $x\dfrac{dy}{dx} + y = 2x, \quad Si \quad y(1) = 0$

19) $(x^2 + 9)\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$

20) $y\dfrac{dy}{dx} = 2ye^{3y} + x(3y + 2)$

21) $x^2\,dy + (y - 2xy - 2x^2)\,dx$

22) $x\,dy - 3y\,dx = x^2\,dx$

23) $2y\,dx = (y^4 + x)\,dy$

24) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy - 2xe^{-x^2} = 0$

25) $x\dfrac{dy}{dx} = x^3 + y$

26) $\dfrac{dy}{dx} = x + e^y$

3.7 ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS DE PRIMER ORDEN.

3.7.1 FUNCION HOMOGENEA:

Una función $f(x,y)$ se le llama homogénea de grado n si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$, en donde n es un número real.

Ejemplo: Dada la función $f(x,y) = x^4 - x^3 y$, se debe probar que $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$, entonces $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^4 - (\gamma x)^3 (\lambda y) = \lambda^4 x^4 - \lambda^3 x^3 \lambda y = \lambda^4 x^4 - \lambda^4 y$, entonces se tiene que $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^4 (x^4 - x^3 y) = \lambda^4 f(x,y)$, por lo tanto se puede afirmar que la función es homogénea de grado 4.

3.7.2 **DEFINICION**: Una ecuación diferencial de la forma $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ se le denomina homogénea si $M(x,y)\,dx$ y $N(x,y)\,dy$ son homogéneas del mismo grado.

Este tipo de ecuaciones, aunque no son de variables separables, se pueden reducir a ellas mediante un adecuado cambio de variable.

Ejemplo 1: La ecuación diferencial $2x^3 y^2\,dx - 3x^4 y\,dy = 0$ es homogénea de grado 5.

Ejemplo 2: La ecuación diferencial $(x^3 - 1)\,dx + 2y^2\,dy = 0$ no es homogénea.

3.7.3 PROCESO SINTETICO DE SOLUCION.

1. Se identifica la ecuación dada como homogénea.
2. Se efectúa uno de los cambios de variables dados por $y = u\,x$ o $x = v\,y$.
3. Se deriva la expresión tomada en (2) para el cambio de variable.
4. Se reemplaza en la ecuación dada la variable seleccionada y lo obtenido en 3.
5. Se separan variables y se integra la ecuación resultante a ambos lados.
6. Se efectúa el cambio inverso al inicial, es decir, se despeja u o v según el caso para finalmente reemplazarla en (5).

Ejemplo: Resolver la ecuación $(x^3 + y^3)\,dx - 3x\,y^2\,dy = 0$.

Solución: Es claro que la ecuación es homogénea de grado 3. Ahora, si se toma $y = u\,x$, entonces $dy = u\,dx + x\,du$, luego reemplazando en la ecuación original se obtiene $(x^3 + u^3 x^3)\,dx - 3x u^2 x^2 (u\,dx + x\,du) = 0, \Rightarrow x^3(1+u^3)\,dx - 3u^3 x^3\,dx - 3u^2 x^4\,du = 0$, entonces dividiendo por x^3 se obtiene $(1+u^3)\,dx - 3u^3\,dx - 3x u^2\,du = 0$, entonces $(1 + u^3 - 3u^3)\,dx - 3x u^2\,du = 0$, luego separando variables e integrando a ambos lados se obtiene $\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{3u^2}{1-2u^3}\,du, \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}\ln(1-2u^3) + \ln c, \Rightarrow 2\ln x + \ln(1-2u^3) = \ln c$, luego $\ln\left[x^2(1-2u^3)\right] = \ln c$, entonces se tiene que $x^2(1-2u^3) = c, \Rightarrow x^2(1 - 2\frac{y^3}{x^3}) = c$,

finalmente $x^3 - 2y^3 = c\,x$ es la solución de la ecuación.

3.7.4 RESOLVER LOS SIGUIENTES EJERCICIOS UTILIZANDO LA INFORMACIÓN.

I. Identificar si las siguientes funciones son o no homogéneas y determinar el grado:

1) $f(x,y)=x^2-xy$

2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y^2}$

3) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

4) $f(x,y)=\ln x-\ln y$

5) $f(x,y)=x+y\,Sen\left(\dfrac{y}{x}\right)$

6) $f(x,y)=x\,Sen\,y+y\,Senx$

7) $f(x,y)=(x^2+y^2-xy)dx+(y^2-x^2)dy=0$

8) $f(x,y)=x^2+y^2-xy$

II. DE LAS SIGUIENTES ECUACIONES INDICA LAS QUE SEAN HOMOGÉNEAS.

1) $(2x-3y)\,dx+(y-x)\,dy=0$

2) $x\,dy+2y\,dx=0$

3) $(x^2+y^2)\,dx+(x^2-xy)\,dy=0$

4) $(x-y)\,dx+x\,dy=0$

5) $x\,y^2\dfrac{dy}{dx}=y^3-x^3,\ Si\ y(1)=2$

6) $x\,dx+(y-2x)\,dy=0$

7) $(x^2+2y^2)\dfrac{dy}{dx}=x\,y,\ Si\ y(-1)=1$

8) $(y^2-xy)\,dx+x^2\,dy=0$

9) $(x+y)\,dx+(x-y)\,dy=0$

10) $\dfrac{dy}{ds}=\dfrac{y^2+s}{2sy}$

11) $(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$

12) $(xy-x^2)\dfrac{dy}{dx}=y^2$

13) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x+y}$

14) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y}{x+4y}$

3.8 SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES POR SUSTITCIONES.

3.8.1 CASO N°1: CONVERSIÓN A EXACTAS:

Existen muchas ecuaciones diferenciales que no cumplen las condiciones necesarias para ser exactas, en las cuales al hacer algunas modificaciones se transforman en exactas. La idea general consiste en encontrar una expresión, llamada factor integrante, que multiplicada por la ecuación la transforme en una ecuación diferencial exacta.

CALCULO GENERAL DE FACTORES INTEGRANTES

A) Si $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=f(x)$, entonces la expresión $e^{\int f(x)dx}$, es un factor integrante.

B) Si $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}=-g(y)$, entonces la expresión $e^{\int g(y)dy}$. es un factor integrante.

Observación: Después de hallado el factor integrante, se introduce en la ecuación original, se verifica si la nueva ecuación es o no exacta, y en caso afirmativo se aplica el proceso establecido antes para su solución.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación diferencial $(2y-3x)dx+x\,dy=0$.

Solución: Se tiene que $\dfrac{\partial M}{\partial y}=2$ y $\dfrac{\partial N}{\partial x}=1$, luego la ecuación no es exacta; por lo tanto $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\dfrac{2-1}{x}=\dfrac{1}{x}=f(x)$, entonces la expresión $e^{\int f(x)dx}=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x=F_i$, es

un factor integrante; entonces al introducir dicho factor en la ecuación original se obtiene $(2xy-3x^2)dx+x^2dy=0$, la cual es exacta.

Sea $f(x,y)=\int x^2dy=x^2y+g(x)$,luego, $2xy+g'(x)=2xy-3x^2, \Rightarrow g'(x)=-3x^2$, esto es, $g(x)=-x^3+c, \Rightarrow f(x,y)=x^2y-x^3+c, \Rightarrow x^2y=x^3+c$.

3.8.2 CASO N°2: CONVERSION A LINEAL.

ECUACIÓN DE BERNOULLI: Toda ecuación diferencial cuya estructura tenga la forma $\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)y^n$, donde n es cualquier real, se le llama "ecuación de Bernoulli".

Para su solución, la sustitución $u=y^{1-n}$, la convierte en lineal y luego se aplica el proceso visto anteriormente para la solución de este tipo de ecuaciones.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $x\frac{dy}{dx}+y=x^2y^2$.

Solución: Inicialmente se divide por x obteniendo $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=xy^2$, luego como ya tiene la forma de Bernoulli, se hace $u=y^{1-n}=y^{1-2}=y^{-1}$, entonces $\frac{du}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$, entonces despejando se tiene que $\frac{dy}{dx}=-y^2\frac{du}{dx}$; al sustituir en la ecuación $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=xy^2$, esta se transforma en $-y^2\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}y=xy^{-2}$, además como $u=y^{-1},\Rightarrow y=u^{-1}$, por lo tanto se tiene $-u^{-2}\frac{du}{dx}+\frac{1}{x}u^{-1}=xu^{-2}$, al dividir miembro a miembro por $-u^{-2}$ se obtiene $\frac{du}{dx}-\frac{1}{x}u=-x$, la cual es lineal y por lo tanto $F_i=e^{-\int\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=x^{-1}$,entonces $\frac{d}{dx}(x^{-1}u)=-1,\Rightarrow x^{-1}u=-x+c,\Rightarrow u=-x^2+cx$, pero como $u=y^{-1}$, por lo tanto se tiene que $y^{-1}=-x^2+cx,\ \Rightarrow\ \frac{1}{y}=-x^2+cx,\ \Rightarrow\ y=\frac{1}{-x^2+cx}$ es la solución deseada.

3.8.3 CASO N° 3: REDUCCIÓN A SEPARACIÓN DE VARIABLES.

Toda ecuación de la forma $\frac{dy}{dx}=f(Ax+By+C)$, se puede reducir a una ecuación diferencial de variables separables mediante la sustitución $u=Ax+By+C,\ B\neq 0$.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx}=(x+y+1)^2$.

Solución: Sea $u=x+y+1$, entonces $\frac{du}{dx}=1+\frac{dy}{dx}$, luego la ecuación original se convierte en $\frac{du}{dx}-1=u^2,\Rightarrow\ \frac{du}{dx}=u^2+1,\Rightarrow\ \frac{du}{u^2+1}=dx,\Rightarrow\ \int\frac{1}{1+u^2}du=\int dx$, luego se tiene que $\tan^{-1}(u)=x+c$, entonces al multiplica por tan a ambos lados se tiene que $u=\tan(x+c)$, al sustituir u por su equivalente tomada anteriormente se obtiene $x+y+1=\tan(x+c),\ \Rightarrow\ y=\tan(x+c)-x-1$.

Nota: Recuerde que $\int\frac{1}{1+x^2}dx=arcTan(x)+c$.

3.8.4 DESARROLLA CADA UNO DE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS.

3.8.5 APLICA EL CASO N° 1 PARA RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES.

1) $(x^2+y^2+x)\,dx + x\,y\,dy = 0$

2) $(x-y^2)\,dx + 2x\,y\,dy = 0$

3) $(2xy^4e^y + 2x\,y^3 + y)\,dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)\,dy = 0$

4) $(2y-3x)\,dx + x\,dy = 0$

5) $(x^2+y^2)\,dx + x\,y\,dy = 0$

6) $xy\,dy - y\,dx = 0$

II) APLICA EL CASO N° 2 PARA RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES.

1) $x\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{y^2}$

2) $x^2\dfrac{dy}{dx} + y^2 = x\,y$

3) $3(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2x\,y(y^3-1)$

4) $\dfrac{dy}{dx} - y = e^x y^2$

5) $x^2\dfrac{dy}{dx} - 2x\,y = 3y^4,\;\; Si\;\; y(1) = \dfrac{1}{2}$

6) $y^{\frac{1}{2}}\dfrac{dy}{dx} + y^{\frac{3}{2}} = 1,\;\; Si\;\; y(0) = 4.$

III) APLICA EL CASO N°3 PARA RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES.

1) $\dfrac{dy}{dx} = (-5x+y)^2 - 4$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-x-y}{x+y}$

3) $\dfrac{dy}{dx} = Sen(x+y)$

4) $\dfrac{dy}{dx} = Cos(x+y),\;\; Si\;\; y(0) = \dfrac{\pi}{4}$

5) $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y-2x+3}$

6) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x+2y}{3x+2y+2}$

3.9 TALLER SOBRE LOS DISTINTOS METODOS DE RESOLVER ECUACIONES DIFERENCAILES DE PRIMER ORDEN Y PRIMER GRADO.

I) CLASIFICA SIN RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES DIFERENCIALES.

1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x}$

2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{y-x}$

3) $(x+1)\dfrac{dy}{dx}=10-y$

4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\,(x-y)}$

5) $x\,y\,y'+y^2=2x$

6) $2x\,y\,y'+y^2=2x^2$

7) $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}+x\,y=0$

8) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x\,y+y}{x+x\,y}$

9) $(x^2+16)dy+(2x\,y+24x)dx=0$

10) $2y\,dx=(y^4+x)dy$

II) RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES POR EL MÉTODO APROPIADO.

1) $(y^2+1)dx=y\,Sec^2(x)\,dy$

2) $\dfrac{dy}{dx}=Sen5x$

3) $\dfrac{y}{t}\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{e^t}{\ln y},\quad Si\quad y(1)=1$

4) $(2x+y+1)\,y'=1$

5) $(1-x^3)\dfrac{dy}{dx}=3x^2\,y$

6) $y\,dx-4\,(x+y^5)dy=0$

7) $\dfrac{2x}{y}dx-\dfrac{x^2}{y^2}dy=0$

8) $(5y-2x)\,y'-2y=0$

9) $t\,x\dfrac{dx}{dt}=3x+t,\quad Si\quad x(1)=2$

10) $\dfrac{dy}{dx}=e^{3x+2y}$

3.10 ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y GRADO SUPERIOR.

3.10.1 INTRODUCCION: Las ecuaciones diferenciales de primer orden tienen la forma $f(x,y,y')=0$, o también $f(x,y,p)=0$ en donde, $p=\frac{dy}{dx}$.
Para el caso en que el grado de p sea mayor que uno, entonces dicha ecuación será de primer orden y grado superior, en cuyo caso la ecuación toma la forma mostrada seguidamente, (1) $p^n+A_1(x,y)p^{n-1}+A_2(x,y)p^{n-2}+\cdots+A_{n-1}(x,y)p+A_n(x,y)=0$.

3.10.2 PROCESO DE SOLUCION.

Muchas ecuaciones de este tipo pueden ser resueltas respecto a p, respecto a y o respecto a x; en los tres casos el proceso consiste en resolver una o varias ecuaciones de primer orden y primer grado como se muestra seguidamente

3.10.3 **SOLUCION RESPECTO A p**: Estas ecuaciones tienen la forma $p=f(x,y)$.
Para este caso se sugieren los siguientes pasos para su solución:

1). Se factoriza el lado izquierdo de (1) en factores lineales, es decir, toma la forma $(p-f_1)(p-f_2)\cdots(p-f_n)=0$, en donde f_i es una función de las variables x e y.

2). Cada factor obtenido en el paso 1 se iguala a cero (0) y se resuelve por los métodos ya conocidos.

3). El producto de las soluciones obtenidas en 2 será la solución de la ecuación dada.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $x\,p^2+(y-1-x^2)p-x(y-1)=0$.
Solución: Para su factorización, la ecuación se reordena tomando la forma siguiente, $x\,p^2+y\,p-p-x^2\,p-x\,y+x=0,\Rightarrow(x\,p^2-x^2\,p)+(y\,p-x\,y)-(p-x)=0$, por lo tanto se tiene $x\,p(p-x)+y(p-x)-(p-x)=0,\Rightarrow(p-x)(x\,p+y-1)=0$, luego al resolver cada factor se obtiene, $p-x=0,\Rightarrow\frac{dy}{dx}-x=0,\Rightarrow dy=x\,dx,\Rightarrow y=\frac{x^2}{2}+c,\Rightarrow 2y-x^2+c=0$, además $x\,p+y-1=0$, entonces $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=x^{-1}$ la cual es lineal, entonces buscando el factor integrante se obtiene $f_i=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x$, por lo tanto $x\frac{dy}{dx}+y=1$, entonces $\frac{d}{dx}(x\,y)=1,\Rightarrow x\,y=x+c,\Rightarrow x\,y-x+c=0$, luego la solución general está dada por la expresión $(2y-x^2+c)(x\,y-x+c)=0$.

3.10.4 **SOLUCION RESPECTO A Y.**

Estas ecuaciones tiene la forma $y = f(x, p)$, y para su solución puede procederse de la siguiente forma:

1). La ecuación dada se transforma en una de la forma $y = f(x, p)$.

2.) se deriva la ecuación dada respecto a x.

3) Se resuelve la ecuación obtenida en (2) aplicando lo visto en el apartado 3.8.3

4) Se elimina el parámetro p entre la ecuación original y lo obtenido en (2) siempre que sea posible, en caso contrario se expresan x e y separadamente en función de p.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $3x^4 p^2 - x p - y = 0$

Solución: Inicialmente se le da la forma $y = f(x, p)$, obteniendo entonces la ecuación $y = 3x^4 p^2 - x p$; se deriva dicha ecuación con respecto a X para transformarla en $\frac{dy}{dx} = p = 12x^3 p^2 + 6x^4 p\frac{dp}{dx} - p - x\frac{dp}{dx}$,entonces $p = 12x^3 p^2 + 6x^4 p\frac{dp}{dx} - p - x\frac{dp}{dx}$, por lo tanto $2p - 12x^3 p^2 - 6x^4 p\frac{dp}{dx} + x\frac{dp}{dx} = 0$, luego se procede como en el caso anterior, esto es, $2p(1 - 6x^3 p) + (1 - 6x^3 p)x\frac{dp}{dx} = 0$, entonces $(2p + x\frac{dp}{dx})(1 - 6x^3 p) = 0$, aquí se desprecia el factor $(1 - 6x^3 p)$ por no tener el diferencial $\frac{dp}{dx}$, entonces $(2p + x\frac{dp}{dx}) = 0$, por lo tanto $\frac{dp}{dx} = -\frac{2}{x}dx, \Rightarrow \int \frac{1}{p}dp = -2\int \frac{1}{x}dx, \Rightarrow \ln p = -2\ln x + \ln c = \ln\left(\frac{c}{x^2}\right)$, por lo tanto $p = \frac{c}{x^2}$, luego reemplazando en $y = 3x^4 p^2 - x p$ se obtiene $y = 3x^4\frac{c^2}{x^4} - x\frac{c}{x^2} = 3c - \frac{c}{x}, \Rightarrow x y = 3c^2 x - c, \Rightarrow x y = c(3cx - 1)$, que corresponde a la solución de la ecuación diferencial planteada.

3.10.5 **SOLUCION RESPECTO A X.**

Este tipo de ecuaciones tiene la forma $x = f(y, p)$, y para su solución se siguen los mismos pasos vistos en la sección 3.9, salvo que en el primero, acá se deriva con respecto a Y.

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $p^3 - 2xyp + 4y^2 = 0$.

Solución: Dándole la forma $x = f(y,p)$, se obtiene $2x = p^2 y^{-1} + 4yp^{-1}$, entonces derivando respecto a Y se obtiene $2\frac{dx}{dy} = \frac{2}{p} = \frac{2p}{y}\frac{dp}{dy} - \frac{p^2}{y^2} + \frac{4}{p} - \frac{4y}{p^2}\frac{dp}{dy}$, entonces da $2y^2 p = 2yp^3\frac{dp}{dy} - p^4 + 4y^2 p - 4y^3\frac{dp}{dy}, \Rightarrow p^4 - 2yp^3\frac{dp}{dy} + 4y^3\frac{dp}{dy} - 2yp^2 = 0$, por lo tanto $p^3\left(p - 2y\frac{dp}{dy}\right) - 2y^2\left(p - 2y\frac{dp}{dy}\right) = 0, \Rightarrow \left(p - 2y\frac{dp}{dy}\right)(p^3 - 2y) = 0$, entonces desechando el factor que no tiene diferencial se tiene que $\left(p - 2y\frac{dp}{dy}\right) = 0$, entonces se tiene que ,

$\frac{dy}{y} = \frac{2}{p}dp, \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy = 2\int\frac{1}{p}dp, \Rightarrow \ln y = 2\ln p + \ln c = \ln(cp^2), \Rightarrow y = cp^2, \Rightarrow p^2 = \frac{1}{c}y = ky$;

por lo tanto , reemplazando en la ecuación original se obtiene $2x = \frac{ky}{y} + \frac{4y}{\sqrt{ky}}$, luego $2x = k + \frac{4y}{\sqrt{ky}}, \Rightarrow 2x\sqrt{ky} = k\sqrt{ky} + 4y$, luego la ecuación anterior se transforma para obtener $k\sqrt{ky} - 2x\sqrt{ky} + 4y = 0, \Rightarrow \sqrt{ky}(k - 2x) = -4y$, si se eleva al cuadrado ambos miembros se obtiene $ky(k-2x)^2 = 16y^2, \Rightarrow k(k-2x)^2 = 16y$

3.11 APLICA LA INFORMACIÓN Y RESUELVE LOS EJERCICIOS PLANTEADOS.

1) $y = 3px + 6p^2 y^2$

2) $y = 2px + p^4 x^2$

3) $16 + 2p^2 y - p^3 x = 0$

4) $x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0$

5) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$

6) $8yp^2 - 2xp + y = 0$

7) $y^2 p^2 + 3px - y = 0$

8) $p^2 - xp + y = 0$

9) $16y^3 p^2 - 4px + y = 0$

10) $p^2 - xp - y = 0$

CAPITULO IV

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

4.1DEFINICION: La ecuación $a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$, en donde $a_n(x)\neq 0$, $a_i(x)$ con $i=1,2,\ldots,n$ y g son funciones continuas en χ, recibe el nombre de ecuación diferencial de orden n.

Si $g(x)=0$, entonces la ecuación anterior se le llama " ecuación diferencial lineal homogénea".

Ejemplo: La ecuación $x\frac{d^2 y}{dx^2}-3x\frac{dy}{dx}+2y=7x$ es lineal no homogénea, pero $y''-5xy'+3y=0$ es lineal homogénea.

4.2 OPERADORES DIFERENCIALES.

En este contexto, el símbolo D representa el operador diferencial ya que transforma una función diferenciable en otra función.

Ejemplo 1: Si $f(x)=Sen^2\theta$, $\Rightarrow D(f(x))=D(Sen^2\theta)=2Sen\theta Cos\theta=g(x)$

Ejemplo 2: Si $g(x)=5x^2-7x+9$, $\Rightarrow D(g(x))=D(5x^2-7x+9)=10x-7=h(x)$

Se puede notar con facilidad que toda ecuación diferencial lineal de orden superior puede ser escrita en función del operador diferencial de acuerdo con el siguiente convenio.

$\frac{dy}{dx}=Dy$, $\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=D(Dy)=D^2y$, en términos generales se tiene que $\frac{d^n y}{dx^n}=D^n y$.

Ejemplos: 1) $5y'''-xy''+3xy'+4y=2x-1$, $\Rightarrow 5D^3-xD^2y+3xDy+4y=2x-1$

2) $y''+5y'+6y=5x-3$, $\Rightarrow D^2y+5D+6y=5x-3$ o también $(D^2+5D+6)y=5x-3$.

Ejemplo 3: Si $3\frac{d^3 y}{dx^3}-2\frac{d^2 y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}-7y=x^2-3$, $\Rightarrow (3D^3-2D^2+4D-7)y=x^2-3$

Nota: La ecuación diferencial lineal de orden n en términos del operador diferencial queda representado por $L=a_n(x)D^n+a_{n-1}(x)D^{n-1}+\cdots+a_1(x)D+a_0(x)$, por lo tanto las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas y no homogéneas se expresan por $L(y)=0$ y $l(y)=g(x)$.

Es de notar que D cumple con $D(c\,f(x))=c\,D\,f(x)$ y $D\{f(x)+g(x)\}=D\,f(x)+D\,g(x)$, en donde c representa una constante arbitraria cualesquiera.

4.3 PRIMER PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN

Dada una ecuación diferencial de orden n, con $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ soluciones para x en un intervalo I, entonces la combinación lineal $y = c\, y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \ldots + c_k y_k$, en donde las c_i, con $i = 1,2,\ldots,k$ son constantes cualesquiera, es también una solución de la ecuación dada.

Ejemplo: Probar que si $y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones de $y'' - 9y = 0$, entonces $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es también una solución.

Solución: Como $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$, entonces $y' = 3c_1 e^{3x} - 3c_2 e^{-3x}$ y además se tiene que $y'' = 9c_1 + 9c_2 e^{-3x}$, entonces reemplazando en $y'' - 9y = 0$ se obtiene la expresión $\left(9c_1 + 9c_2 e^{-3x}\right) - \left(9c_1 e^{3x} + 9c_2 e^{-3x}\right) = 0$

Nota: Si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ son funciones continuas y $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$ constantes arbitrarias, se afirma que estas funciones son linealmente independientes si los únicos valores de las constantes en $c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + \ldots + c_n f_n = 0$ es cero. Si no todas las constantes son cero, entonces las funciones son linealmente dependientes.

4.4 EL WRONSKIANO

Si $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ son funciones continuas en algún intervalo con al menos $n-1$ derivadas, entonces el determinante formado por las funciones y sus $n-1$ derivadas se le llama el Wronskiano de las funciones, es decir.

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \det\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & f_3' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & f_3^{n-1} & \cdots & f_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Observación: Si $W \neq 0$, entonces las funciones son linealmente independientes y en caso contrario se afirma que son linealmente dependientes.

Ejemplo: Determine si $f_1(x) = e^{3x}$ y $f_2(x) = e^{-3x}$ son linealmente independientes o linealmente dependientes.

Solución: $W(f_1, f_2) = \det\begin{pmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{pmatrix} = -3e^0 - 3e^0 = -3 - 3 = -6 \neq 0$, por lo tanto son linealmente independientes.

Ejemplo 2: Determinar si $f_1(x) = e^{-2x}$ y $f_2(x) = e^{2x}$ son linealmente dependientes o linealmente independientes.

Solución: $W(f_1, f_2) = \det\begin{pmatrix} e^{-2x} & e^{2x} \\ -2e^{-2x} & 2e^{2x} \end{pmatrix} = 2e^0 + 2e^0 = 2 + 2 = 4 \neq 0$, por lo tanto las funciones son linealmente independientes.

4.5 CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES DE ECUACIONES.
Si $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ son soluciones linealmente independiente de una ecuación lineal homogénea, entonces forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación dada.
Ejemplo: En los ejemplos anteriores probamos que $y_1 = e^{3x}$ y $y_2 = e^{-3x}$ son soluciones linealmente independientes de $y'' - 9y = 0$, por lo tanto constituyen un conjunto fundamental de soluciones.

4.6 UTILIZA LA INFORMACIÓN PARA RESOLVER LOS SIGUIENTES EJERCICIOS.

I) Determina si las siguientes funciones son linealmente independientes o dependientes.

1) $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2$ y $f_3(x) = 4x - 3x^2$

2) $f_1(x) = 0,\ f_2(x) = x$ y $f_3(x) = e^x$

3) $f_1(x) = 5,\ f_2(x) = Cos^2 x$ y $f_3(x) = Sen^2 x$

4) $f_1(x) = 2 + x$ y $f_2(x) = 2 - x$

5) $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = 2e^x$ y $f_3(x) = e^x$

6) $f_1(x) = e^{-x}$ y $f_2(x) = e^{2x}$

7) $f_1(x) = x^3,\ f_2(x) = x^2$ y $f_3(x) = x^{-2}$

8) $f_1(x) = Senx$ y $f_2(x) = Cosx$

9) $f_1(x) = Lnx,\ f_2(x) = xLnx$ y $f_3(x) = x^2 Lnx$

10) $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x$ y $f_3(x) = x^2$

II PRUEBA SI LAS SIGUIENTES FUNCIONES FORMAN O NO UN CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DADA.

1) $f_1(x) = e^{-3x}$ y $f_2(x) = e^{4x}$ de $y'' - y' - 12y = 0$ en $(-\alpha, \alpha)$

2) $f_1(x) = e^x Cos2x$ y $f_2(x) = e^x Sen2x$ de $y'' - 2y' + 5y = 0$ en $(-\alpha, \alpha)$

3) $f_1(x) = x^3$ y $f_2(x) = x^4$ de $x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$ en $(0, \alpha)$

4) $f_1(x) = 1,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = Cosx^2$ y $f_4(x) = Senx$ de $y''' + y'' = 0$ en $(-\alpha, \alpha)$.

5) $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = x^3$ y $f_3(x) = x^{-2}$ de $x^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} - 6x\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0$

6) $f_1(x) = Senx$ y $f_2(x) = Cosx$ de $y'' + y = 0$

7) $f_1(x) = e^{5x}$ y $f_2(x) = e^{-4x}$ de $y'' - y' - 20y = 0$

4.7 REDUCCION DE ORDEN

Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, esto es, $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ y si se conoce una solución y_1 de ella en un intervalo I, siempre es posible hallar una segunda solución y_2 partiendo de y_1 de tal forma que constituyan un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación dada.
La idea consiste en construir y_2 de tal forma que sea linealmente independiente con y_1, es decir, su relación $\frac{y_2}{y_1} = u(x)$ debe ser una función en x y no una constante, por lo tanto se obtiene que $y_2 = u\,y_1$.

Este método consiste en hallar $u(x)$, convirtiendo la ecuación original en otra equivalente de primer orden la cual puede ser resuelta por uno de los métodos ya conocidos, de acuerdo con el siguiente proceso.

En (1) $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, dividiendo por $a_2(x)$ da $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en algún intervalo. Si $y_1(x)$ es una solución de (1) y sea $y = u(x)y_1(x) \Rightarrow y' = u'y_1 + u\,y_1'$ y $y'' = u''y_1 + u'y_1' + u'y_1' + uy_1''$, por lo tanto $y'' + P(x)y' + Q(x)y = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + P(u'y_1 + uy_1') + Q(u\,y_1) = 0$, entonces agrupando se tiene $y'' + P(x)y' + Q(x)y = u(y_1'' + P\,y_1' + Q\,y_1) + y_1u'' + (2y_1' + P\,y_1)u' = 0$, como el primer paréntesis es igual a cero, entonces $y_1u'' + (2y_1' + P\,y_1)u' = 0$, entonces haciendo $w = u'$ y separando variable da $y_1w' + (2\,y_1' + P\,y_1)w = 0, \Rightarrow \frac{w'}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1} + P = 0$, luego al integrar a ambos miembro, se obtiene $\int \frac{1}{w}dw + 2\int \frac{y_1'}{y_1}dx = -\int P(x)dx, \Rightarrow Lnw + Lny^2{}_1 = -\int P(x)dx + c$, entonces,

$$Ln\left(w\,y_1^2\right) = -\int P(x)dx + c, \Rightarrow w\,y^2{}_1 = e^{-\int P(x)dx + c} = ce^{-\int P(x)dx}, \Rightarrow w = c\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y^2{}_1},$$ como $w = u'$,

entonces $u' = c\frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1}$, entonces $u = c\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx + k$, al tomar las constantes como $c = 1$ y $k = 0$, se obtiene que $u = \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx$.

Al reemplazar en $y_2 = u\,y_1$ se obtiene $y_2 = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2}dx$ como una segunda solución de la ecuación diferencial $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, partiendo de la solución conocida inicialmente $y_1(x)$.

En resumen, el método de reducción de orden consiste en las siguientes etapas:

1) Se hace $y = u\,y_1$, se sustituye en la ecuación planteada y se simplifica para obtener una ecuación de segundo orden en la variable u.
2) En la ecuación obtenida en (1) se hace $w = u'$ para obtener una ecuación de primer orden en la variable w.
3) Se resuelve la ecuación obtenida en (2) por los métodos conocidos para obtener w.
4) Como $w = u'$, se resuelve esta ecuación según lo obtenido en (3) para conocer a u.
5) Se reemplaza lo obtenido en (4) en $y = u\,y_1$ para obtener y_2.

Ejemplo 1: Hallar una segunda solución de $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$, sabiendo que $y_1(x) = x$ una solución.

Solución: Sea $y = u\,y_1 = ux$, entonces reemplazando y en la ecuación original se obtiene $x^2(ux)'' + 3x(ux)' - 3(ux) = 0$, entonces $x^2(u'x + u)' + 3x(u'x + u) - 3(ux) = 0$, entonces $x^2(u''x + u' + u') + 3x(u'x + u) - 3(ux) = 0$, luego $x^2(u''x + 2u') + 3x(u'x + u) - 3(ux) = 0$, luego $x^3u'' + 2x^2u' + 3x^2u' + 3xu - 3xu = 0, \Rightarrow x^3u'' + 5x^2u' = 0$, dividiendo por x^2 se obtiene $xu'' + 5u' = 0$, si se hace $w = u'$, entonces $xw' + 5w = 0$, por lo tanto dividiendo por x se obtiene $w' + \frac{5}{x}w = 0$, entonces $\int \frac{1}{w}dw = -5\int \frac{1}{x}dx, \Rightarrow Lnw = -5Lnx + Lnc = Ln\left(\frac{c}{x^5}\right)$, por lo tanto $w = cx^{-5}$. Puesto que $w = u'$, entonces $u' = cx^{-5}, \Rightarrow u = -\frac{cx^{-4}}{4} + k = cx^{-4} + k$, luego reemplazando en $y = u\,y_1 = ux, \Rightarrow y_2 = (cx^{-4} + k)x = cx^{-3} + kx$, finalmente se puede afirmar que el conjunto fundamental de soluciones de $x^2y'' + 3xy' - 3y = 0$ está dado por $\{x, cx^{-3} + kx\}$

4.8 DETERMINA UNA SEGUNDA SOLUCION PARA CADA ECUACIÓN PLANTEADA.

1) $y'' + 5y' = 0, \quad y_1 = 1$

2) $y'' - y' = 0, \quad y_1 = 1$

3) $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y_1 = e^{2x}$

4) $y'' - y' = 0, \quad y_1 = e^x$

5) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y_1 = x^2$

6) $y'' + 9y = 0, \quad y_1 = Sen3x$

7) $y'' - xy' + y = 0, \quad y_1 = x$

8) $x^2y'' - 3xy' + y = 0, \quad y_1 = x^{-1}$

9) $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0, \quad y_1 = x^{-1}$

10) $y'' + 10y' + 25y = 0, \quad y_1 = e^{-5x}$

4.9 SOLUCION DE ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS DE ORDEN n CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Estas ecuaciones tienen la forma $a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$, en donde a_i son constantes y $a_n \neq 0$. Toda ecuación de la forma anterior tiene por soluciones funciones de la forma $y = e^{mx}$, en donde m es una raíz de la ecuación característica correspondiente.

Al tomar $y = e^{mx}$, entonces $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2 e^{mx}$; reemplazando en $ay'' + by' + cy = 0$ se obtiene $am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0, \Rightarrow e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0, \Rightarrow am^2 + bm + c = 0$, en lo anterior se dividió por e^{mx} ya que esta siempre es distinta de cero para cualquier valor real de la variable y además m debe ser una raíz de la ecuación cuadrática $am^2 + bm + c = 0$, la cual es conocida como " ecuación característica" de la ecuación diferencial dada.

Al aplicar la fórmula cuadrática se obtiene que $m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, donde $b^2 - 4ac$ se le llama el discriminante de la ecuación cuadrática.

En resumen, para resolver ecuaciones lineales de orden n con coeficientes constantes se tiene el siguiente proceso.

4.10. PROCESO SINTETICO DE SOLUCION

1) En la ecuación dada se reemplaza y por e^{mx} y se deriva según lo indicado.
2) En lo obtenido en (1) se factoriza e^{mx} y por ser este siempre distinto de cero se divide la ecuación resultante por ese factor.
3) Se resuelve la ecuación obtenida en (2), la cual se le denomina "ecuación característica".
4) La solución general de la ecuación plateada se obtiene reemplazan $m_1, m_2 \ldots, m_n$ en $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_n e^{m_n x}$ por los valores de m obtenidos en (3).

Nota: En la solución de este tipo de ecuaciones se pueden presentar los siguientes casos:

A: El polinomio característico tiene raíces reales distintas
B: El polinomio característico tiene raíces reales repetidas
C: El polinomio característico tiene raíces complejas conjugadas.

A: Raíces reales distintas: Se da cuando $b^2 - 4ac \rangle 0$, en este caso $m_1 \neq m_2$

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $y'' - y' - 20y = 0$

Solución: Haciendo $y = e^{mx}$, entonces $(e^{mx})'' - (e^{mx})' - 20e^{mx} = 0$, entonces se obtiene $m^2 e^{mx} - me^{mx} - 20e^{mx} = 0, \Rightarrow e^{mx}(m^2 - m - 20) = 0, \Rightarrow m^2 - m - 20 = 0$ por ser $e^{mx} \neq 0$ se pudo dividir ambos miembros por ese factor. Resolviendo la ecuación anterior se obtiene lo siguiente $(m-5)(m+4) = 0, \Rightarrow m - 5 = 0$ o $m + 4 = 0$, $m_1 = 5$ o $m_2 = -4$, por lo tanto la solución general tiene la forma $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-4x}$.

B: Raíces reales repetidas: Se da cuando $b^2 - 4ac = 0$, en éste caso se tiene que $m_1 = m_2$, es decir, hay una sola solución $y_1 = e^{m_1 x}$, pero en $m = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ se tiene que $m_1 = -\dfrac{b}{2a}$ ya que $b^2 - 4ac = 0$, por lo tanto $y_2 = y_1 u = e^{m_1 x} \displaystyle\int \frac{e^{-2m_1 \int dx}}{e^{2m_1 x}} dx = e^{m_1 x} \int \frac{e^{2m_1 x}}{e^{2m_1 x}} dx = e^{m_1 x} \int dx = x e^{m_1 x}$, luego $y_2 = x e^{m_1 x}$.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $y'' - 6y' + 9y = 0$

Solución: Si $y = e^{mx}$,entonces $\left(e^{mx}\right)'' - 6\left(e^{mx}\right)' - 9e^{mx} = 0$,entonces $m^2 e^{mx} - 6me^{mx} + 9e^{mx} = 0$, entonces $m^2 - 6m + 9 = 0$, $\Rightarrow$ $(m-3)(m-3) = 0$, $\Rightarrow$ $m_1 = m_2 = 3$, por lo tanto la solución general es $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$.

Nota: En el ejemplo anterior puede notarse que la raíz se repite dos veces, por lo tanto se afirma que la raíz es de multiplicidad dos, es decir, la multiplicidad de una raíz es el número de veces que ella se repite.

C: Raíces complejas conjugadas: Este caso se cumple cuando $b^2 - 4ac \angle 0$, y en tales circunstancias se tiene que $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, donde $\alpha \rangle 0$ y $\beta \rangle 0$ son números reales, por lo tanto la solución general será $y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$.

Para dar la respuesta en el campo de los reales se utiliza la fórmula de Euler, convirtiendo la solución en la forma $y = c_1 e^{\alpha x} Cos\beta x + c_2 e^{\alpha x} Sen\beta x = e^{\alpha x}\left(c_1 Cos\beta x + c_2 Sen\beta x\right)$. .

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 10y = 0$

Solución: Haciendo $y = e^{mx}$, se obtiene $\left(e^{mx}\right)'' - 2\left(e^{mx}\right)' + 10e^{mx} = 0$, entonces efectuando las operaciones indicadas se obtiene $e^{mx}\left(m^2 - 2m + 10\right) = 0$, $\Rightarrow m^2 - 2m + 10 = 0$, por lo tanto se cumple que $m = 1 \pm 3i$, entonces $m_1 = 1 + 3i$ y $m_2 = 1 - 3i$, entonces se cumple que $\alpha = 1$ y $\beta = 3$, luego la solución general es $y = c_1 e^x Cos3x + c_2 e^x Sen3x = e^x\left(c_1 Cos3x + c_2 Sen3x\right)$.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $y'''' + 2y'' + y = 0$

Solución: La ecuación auxiliar es $m^1 + 2m^2 + 1 = 0. \Rightarrow \left(m^2 + 1\right)^2 = 0, \Rightarrow m_1 = m_2 = \pm i$, entonces puede notarse que $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, por lo tanto $y = e^0\left(c_1 Cosx + c_2 Senx + c_3 xCosx + c_4 xSenx\right)$.

4.11 APLICA LA TEORIA VISTA PARA RESOLVER LAS SIGUIENTES ECUACIONES.

I: Resuelve los siguientes ejercicios para verificar las respuestas planteadas en cada uno.

1) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=0$ $\qquad y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$

2) $\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}-12\frac{dy}{dx}=0$ $\qquad y=c_1+c_2e^{4x}+c_3e^{-3x}$

3) $y'''-3y''+3y'-y=0$ $\qquad y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+c_3x^2e^{x}$

4) $y''+4y=0$ $\qquad y=c_1Cos2x+c_2Sen2x$

5) $y''''+4y''=0$ $\qquad y=c_1+c_2x+c_3Cos2x+c_4Sen2x$

II . Halla la solución general de las ecuaciones diferenciales planteadas seguidamente.

1) $y''+2y'-15y=0$ $\qquad$ 2) $y'''+25y=0$

3) $y'''+y''-2y'=0$ $\qquad$ 4) $y''''-4y''-5y'=0$

5) $y''-4y'+3y=0$ $\qquad$ 6) $y''''-16y=0$

7) $8y''+2y'-y=0$ $\qquad$ 8) $y''''-6y'''+125y''-8y'=0$

III: Construye la ecuación diferencial cuya solución general es la planteada en cada ejercicio.

1) $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}$ $\qquad$ 2) $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-4x}$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$ $\qquad$ 4) $y=c_1+c_2x$

IV: Halla la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales sujetas a las siguientes condiciones.

1) $y''+6y'+5y=0,\ Si\quad y''-y=0,\ Si\quad y(0)=0\quad y\quad y'(0)=3$

2) $y''-y=0,\ Si\quad y(0)=2\quad y\quad y'(0)=-2$

4.12 ECUACIONES LINEALES NO HOMOGÉNEAS DE COEFICIENTES CONSTANTES.

4.12.1 INTRODUCCION.

En la sección 4.1 se estableció que las ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas tienen la forma $a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$, si $a_i(x)$ con $i=1,2,\ldots,n$ son constantes reales y g una función continua en algún intervalo, entonces dicha ecuación se le llama " lineal no homogénea de coeficientes constantes".

En cuanto a la solución de este tipo de ecuaciones, cabe señalar que cualquier función y_p sin parámetros que la satisfaga se le llama " solución particular", además por el principio de superposición, si $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ son soluciones de $a_n\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0 y=0$ y y_p es una solución particular de (1) $a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$, entonces $y=c\,y_1+c_2y_2+c_3y_3+\ldots+c_ky_k+y_p$ es también una solución de la ecuación (1).

4.12.2 METODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Es un método para hallar una solución particular de una ecuación lineal no homogéneas de coeficientes constantes teniendo en cuenta el principio de superposición; la solución de tales ecuaciones están dadas por $y=y_c+y_p$, por lo tanto implica dos etapas:

a) Hallar la función complementaria y_c

b) Determinar una solución particular de la ecuación no homogénea, y_p

NOTA: Este método se aplica para cuando $g(x)$ tiene una de las siguientes formas: Una constante, un polinomio, una función exponencial, sumas y productos finitos de las anteriores.

No es aplicable cuando $g(x)$ es igual a $\ln x$, $\frac{1}{x}$, $\tan x$, $Sen^{-1}x$.

4.12.3 ALGUNAS FORMAS GENERALES PARA y_p

$g(x)$	**Forma de y_p**
Constante	A
Polinomio lineal	$Ax+B$
Polinomio cuadrático	Ax^2+Bx+c
Polinomio cúbico	Ax^3+Bx^2+cx+D
$Sen\beta\chi$	$ACos\beta\chi+BSen\beta\chi$
$e^{\alpha\chi}$	$Ae^{\alpha\chi}$
$xe^{\alpha\chi}$	$(Ax+B)e^{\alpha\chi}$
$x^n e^{\alpha\chi}$	$(Ax^n+Bx^{n-1}+\cdots+k)e^{\alpha\chi}$
$e^{\alpha\chi}Sen\beta\chi$	$Ae^{\alpha\chi}Cos\beta\chi+Be^{\alpha\chi}Sen\beta\chi$

4.12.4 PROCESO PARA CALCULAR y_p

1) De acuerdo con la forma de $g(x)$ se construye y_p
2) La expresión para y_p construida en (1) se deriva y se reemplaza en el lado izquierdo de la ecuación dada.
3) Se reducen términos semejantes en lo obtenido en (2) y se compara término a término con el lado derecho de la ecuación original.
4) Se hallan los valores de los coeficientes desconocidos y luego se sustituyen en y_p planteada en (1).

OBSERVACIÓN: Como la solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes tiene la forma $y = y_c + y_p$. entonces basta calcular y_c según lo visto en la sección 4.10 y y_p de acuerdo con el proceso visto inmediatamente anterior.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$

Solución: Inicialmente se procede a la búsqueda de y_c; esto es, $y'' - 3y' + 2y = 0$, entonces $m^2 - 3m + 2 = (m-2)(m-1) = 0, \Rightarrow m - 2 = 0$ ó $m - 1 = 0$, esto es $m = 2$ ó $m = 1$, luego $y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Seguidamente se halla y_p, teniendo en cuenta que $g(x) = 2x^2 + 1$, por lo tanto la forma de esta será $y_p = Ax^2 + Bx + C, \Rightarrow y_p' = 2Ax + B$ y $y_p'' = 2A$, al reemplazar en la ecuación original se obtiene $2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 + 1$, entonces al simplificar se obtiene $2Ax^2 + (-6A + 2B)x + (2A - 3B + 2C) = 2x^2 + 0x + 1$, luego igualando término a término queda $2A = 2$, $-6A + 2B = 0$, y $2A - 3B + 2C = 1$, entonces al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene que $A = 1$, $B = 3$ y $C = 4$, por lo tanto y_p tendrá la siguiente equivalencia. $y_p = Ax^2 + Bx + C = x^2 + 3x + 4$, esto es, $y_p = x^2 + 3x + 4$.

Finalmente la solución será $y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 4$.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $y'' - y = 3e^{-x}$

Solución: Se hace $y'' - y = 0, \Rightarrow m^2 - 1 = 0, \Rightarrow m_1 = -1$ y $m_2 = 1$, luego $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$.

Como $g(x) = 3e^{-x}$, es decir, una expresión de la forma $Ae^{\alpha x}$, se toma $y_p = Ax^k e^{-x}$, en donde k es el número de veces que α se repite como raíz del polinomio característico, entonces $y_p = Ax\,e^{-x}$, entonces $y_p' = Ae^{-x} - Axe^{-x}$ y $y_p'' = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x}$, sustituyendo en la ecuación original se obtiene $y'' - y = -2Ae^{-x} + Axe^{-x} - Axe^{-x} = 3e^{-x}$, luego $-2Ae^{-x} = 3e^{-x}$, entonces $A = -\frac{3}{2}$, por lo tanto $y_p = Axe^{-x} = -\frac{3}{2}xe^{-x}$, entonces $y_p = -\frac{3}{2}xe^{-x}$, por lo tanto la solución general será $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x - \frac{3}{2}xe^{-x}$.

4.12.4 UTILIZA LA TEORIA TRATADA PARA DESARROLLAR LOS EJERCICIOS.

I: IDENTIFICA PARA CADA EJERCICIO EL CASO CORRESPONDIENTE A y_p.

1) $y'' - y = -3$

2) $y'' - 4y = x^2 + 17x$

3) $y'' - 7y = 5x - 3$

4) $y'' + 4y = 3e^{2x}$

5) $y'' - y' + y = 2Sen3x$

6) $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$

7) $y'' - 8y' + 25y = 5x^3 e^{-x} - 7e^{-x}$

8) $y'' + 4y = xCosx$

9) $y'' + 9y' = x^3$

10) $y'' + 2y' + y = x^3 e^{-x}$

II: Resolver los siguientes ejercicios utilizando el método de coeficientes indeterminados.

1) $y'' + 3y' + 2y = 3$

2) $y'' - 2y' + y = e^x$

3) $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$

4) $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$

5) $y'' - 4y' - 3y = Cos2x$

6) $y'' + 3y = -48x^2 e^{3x}$

7) $y''' - 6y'' = 3 - Cosx$

8) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$

9) $y^{(4)} + 2y'' + y = (x-1)^2$

10) $y'' - 5y' = 2x^3 - 4x^2 - x + 6$

III: Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales sujetas a las condiciones iniciales indicadas.

1) $y'' + 4y = -2$, $Si \quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \quad y \quad y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$

2) $2y'' + 3y' - 2y = 14x^2 - 4x - 11$, $Si \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

3) $5y'' + y' = -6x - x + 6$, $Si \quad y(0) = 0 \quad y \quad y'(0) = -10$

4.13 METODO DEL ANULADOR

4.13.1 INTRODUCCION: Es un método para resolver ecuaciones lineales no homogéneas con coeficientes constantes.

OPERADOR: En este contesto será tomado como un símbolo matemático que denota un conjunto de operaciones que deben realizarse.

Simbólicamente, la expresión $a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=L\,(y)$ se le llama operador lineal de orden n con $D^n y=\frac{d^n y}{dx^n}$.

OPERADOR ANULADOR: Si L es un operador de tal forma que $L(f(x))=0$, entonces a L se le llama "operador anulador".

NOTA: La ecuación diferencial lineal no homogénea general de orden n en términos del operador L queda expresado por $L\,(y)=g(x)$.

4.13.2 ALGUNOS OPERADORES ANULADORES

1) El operador diferencial D^n, anula cualquiera de las funciones $k, x, x^2,\ldots,x^{n-1}$.
2) El operador diferencial $(D-\alpha)^n$, anula cada una de las siguientes funciones: $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x},\ldots,x^{n-1}e^{\alpha x}$, en donde $\alpha \in R$ es una raiz de la ecuación diferencial dada y n es su multiplicidad.
3) El operador diferencial $\left(D^2-2\alpha D+\left(\alpha^2+\beta^2\right)\right)^n$, anula cualquiera de las funciones:

$$e^{\alpha x}Cos\beta x,\ xe^{\alpha x}Cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}Cos\beta x,\ldots,x^{n-1}e^{\alpha x}Cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}Sen\beta x,\ xe^{\alpha x}Sen\beta x,\ x^2e^{\alpha x}Sen\beta x,\ldots,x^{n-1}e^{\alpha x}Sen\beta x$$

4.13.3 ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS OPERADORES

1) Los operadores pueden ser manejados como entes algebraicos, por lo tanto pueden ser factorizados.
2) Los operadores son distributivos con respecto a la adición y la sustracción.
3) Los factores de un operador diferencial lineal con coeficientes constantes son conmutativos.

4.13.4 EJERCICIOS

1: Si $L(y)=xy''+y$, *calcula* $L(Senx)$

Solución: $L(Senx)=x(Senx)''+Senx=x(Cosx)'+Senx=-xSenx+Senx$

2: Si $g(x)=2x^3-5x^2+3x,\Rightarrow D^4\left(2x^3-5x^2+3x\right)=D^4\left(2x^3\right)-D^4\left(5x^2\right)+D^4(3x)=0$

3: Si $g(x)=e^{3x},\Rightarrow (D-3)(g(x))=Dg(x)-3g(x)=D\left(e^{3x}\right)-3e^{3x}=3e^{3x}-3e^{3x}=0$

4: Si $g(x)=Cos2x,\Rightarrow \left(D^2+4\right)(g(x))=D^2(Cos2x)+4Cos2x=-4Cos2x+4Cos2x=0$

4.13.5 PROCESO SINTETICO DE SOLUCIÓN

1) Se halla la solución complementaria y_c, de la ecuación homogénea asociada a la ecuación dada.
2) Se identifica el anulador correspondiente a $g(x)$ y se aplica a ambos lados de la ecuación.
3) Se calcula la solución de la ecuación homogénea formada por el lado izquierdo de la ecuación obtenida en (2).
4) Se construye y_p con lo obtenido en (3), exceptuando lo correspondiente a y_c.
5) Se reemplaza y_p obtenida en (4), en la ecuación original para determinar las constantes.
6) Se sustituyen los valores obtenidos en (5) en la ecuación construida en (4) y finalmente se construye $y = y_c + y_p$.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $y'' - 4y' - 12y = x - 6$

Solución: En $y'' - 4y' - 12y = 0, \Rightarrow m^2 - 4m - 12 = (m-6)(m+2) = 0,\ m_1 = -2$ y $m_2 = 6$, por lo tanto $y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{6x}$.

Es claro que D^2 anula a $x - 6$, por lo tanto aplicando este anulador a ambos lados de la ecuación original se obtiene $D^2(D^2 - 4D - 12)y = D^2(x-6) = D^2 x - D^2 6 = 0$. entonces se obtiene $D^2(D^2 - 4D - 12)y = 0, \Rightarrow D^2(D^2 - 4D - 12) = 0, \Rightarrow D^2(D-6)(D+2) = 0$, entonces se tiene $D_1 = D_2 = 0,\ D_3 = -2$ y $D_4 = 6$, entonces $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x} + c_4 e^{6x}$. Se puede notar que los dos últimos términos de la ecuación anterior corresponden a y_c, por lo tanto $y_p = c_1 + c_2 x$, entonces al reemplazar esta expresión en la ecuación original se obtiene $(c_1 + c_2 x)'' - 4(c_1 + c_2 x)' - 12(c_1 + c_2 x) = x - 6$, entonces $0 - 4c_1 - 12c_1 - 12c_2 x = x - 6$, entonces se tiene $-12c_2 x = 1x$ y $-4c_2 - 12c_1 = -6$, por lo tanto $c_2 = -\dfrac{1}{12}$ y $c_1 = \dfrac{19}{36}$, luego se tiene que $y_p = \dfrac{17}{36} - \dfrac{1}{12}x$, luego la respuesta general se obtiene por $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{6x} - \dfrac{1}{12}x + \dfrac{19}{36}$.

Ejemplo 2: Halla una solución de la ecuación $y'' - y = e^x$

Solución: Se calcula y_c en $y'' - y = 0, \Rightarrow m^2 - 1 = 0, \Rightarrow m = \pm 1$, luego $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$.

Ahora se busca una solución particular y_p: Como $g(x) = e^x$, entonces $D - 1$ es un anulador, por lo tanto $(D-1)(y'' - y) = (D-1)e^x = De^x - e^x = e^x - e^x = 0$, entonces $(D-1)(D^2-1) = 0$, luego $(D-1)(D+1)(D-1) = 0, \Rightarrow D_1 = -1, \Rightarrow m_2 = m_3 = 1$, luego $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + c_3 x e^x$, por lo tanto $y_p = c_3 x e^x$, entonces $(c_3 x e^x)'' - c_3 x e^x = e^x, \Rightarrow 2c_3 e^x + c_3 x e^x - c_3 x e^x = e^x$, por lo tanto se tiene que $2c_3 e^x = e^x, \Rightarrow c_3 = \dfrac{1}{2}$, entonces se concluye que $y_p = c_3 x e^x = \dfrac{1}{2} x e^x, \Rightarrow y_p = \dfrac{1}{2} x e^x$, finalmente la solución de la ecuación es $y = y_c + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \dfrac{1}{2} x e^x$.

4.13.6 UTILIZA LA INFORMACIÓN PARA DAR RESPUESTA A CADA EJERCICIO.

I: Resolver cada ejercicios, teniendo en cuenta que L representa un operador diferencial.

1) Si $L = 2D + x,\ halla\ L(x^3)$

2) Si $L = xD^2 + 1,\ halla\ L(Senx)$

3) Si $L = D^2 + xD,\ halla\ L(3e^{-x})$

4) Si $L = D^2 + 1,\ halla\ L(Senx + 3)$

5) Si $L = xD^2 + x^2D - x + 1,\ halla\ L(x^4 + 1)$

6) Si $L = D^3 - D + 1,\ halla\ L(e^{-x})$

II: COMPRUEBE QUE EL OPERADOR ANULA LA FUNCION CORRESPONDIENTE.

1) $f(x) = 10x^3 - 2x;\ D^4$

2) $y = 4e^{\frac{x}{2}};\ 2D - 1$

3) $y = e^{2x} + 3e^{-5x};\ (D-2)(D+5)$

4) $f(x) = 2Cos8x - 5Sen8x;\ D^2 + 64$

III: CONSTRUYE UN OPERADOR DIFERENCIAL LINEAL ANULADOR PARA CADA UNA DE LAS SIGUIENTES FUNCIONES.

1) $g(x) = 1 + 6x - 2x^3$

2) $g(x) = x^3(1 - 5x)$

3) $g(x) = 1 + 7e^{2x}$

4) $g(x) = 1 + Senx$

5) $g(x) = Cos2x$

6) $g(x) = 13x + 9x^2 - Sen4x$

IV: UTILIZA EL METODO DEL ANULADOR PARA RESOLVER LOS SIGUIENTES EJERCICIOS.

1) $y'' - 9y = 54$

2) $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

3) $y''' + y'' = 8x^2$

4) $y'' - y' - 12y = e^{4x}$

5) $y'' - 2y' - 3y = 4e^x - 9$

6) $y'' + 25y = 6Senx$

7) $y'' - 2y' + y = x^3 + 4x$

8) $y'' + 6y' + 9y = -xe^{4x}$

9) $y'' - y = x^2e^x + 5$

10) $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$

11) $y'' - 2y' + 5y = e^xSenx$

12) $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x - x + 16$

4.14 VARIACION DE PARÁMETROS

4.14.1 INTRODUCCION: Es un método para hallar una solución particular y_p de una ecuación lineal no homogénea conociendo la solución de la ecuación homogénea asociada, es decir, debe conocerse y_c de antemano y además a diferencia del método del anulador, no se requiere condiciones especiales para $g(x)$, y los coeficientes pueden no ser constantes.

A este método se le llama " variación de parámetros" ya que las constantes de la solución complementaria de la ecuación homogénea asociada son cambiadas por funciones.

4.14.2 PROCESO DEDUCTIVO

Se considera aquí para efectos de simplificación, ecuaciones lineales no homogéneas de segundo orden , es decir. ecuaciones de la forma (1) $y'' + P(x)y' + Q(x)y = g(x)$.

Supóngase que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada, entonces $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es la solución complementaria; la idea general consiste en hallar funciones u_1, u_2 tal que $y = u_1 y_1 + u_2 y_2$ sea una particular de (1), esto es, se necesitan funciones u_1, u_2 de tal forma que la primera derivada de $y = u_1 y_1 + u_2 y_2$ sea la misma siendo las funciones constantes o no, es decir, $y' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$ y $y' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$, entonces se tiene que $u_1 y_1' + u_2 y_2' = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + u_1' y_1 + u_2' y_2$; para que lo anterior se cumpla, es necesario que $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$.

Sustituyendo $y = u_1 y_1 + u_2 y_2$ en (1), $(u_1 y_1 + u_2 y_2)'' + P(u_1 y_1 + u_2 y_2)' + Q(u_1 y_1 + u_2 y_2) = g(x)$, entonces $(y_1'' + P y_1' + Q y_1) u_1 + (y_2'' + P y_2' + Q y_2) u_2 + u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x)$, como y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea asociada, entonces los dos primeros términos de la expresión anterior se anulan, entonces $u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x)$. De lo anterior se puede construir el sistema $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$

$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x)$, el cual al ser resuelto por cualquier método, permite hallar a u_1', u_2' para que finalmente por integración se calculen u_1 y u_2, de tal forma que $y = u_1 y_1 + u_2 y_2$ sea una solución particular de la ecuación (1), esto es, $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$; por último, la solución general $y = y_c + y_p$ estará dada por $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2$.

4.14.3 PROCESO SINTETICO DE SOLUCION.

1) La ecuación dada se convierte a la forma regular dividiendo por el coeficiente de y''.

2) Si no se conocen, se calculan y_1 y y_2 de la ecuación homogénea asociada.

3) Se resuelve el sistema $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x)$$

4) Se integra lo obtenido en (3) para calcular u_1 y u_2.

5) Se construye y_p con lo obtenido en (4) y y_c con lo obtenido en (2).

6) Se construye la solución general mediante $y = y_c + y_p$.

Ejemplo: Resolver la ecuación $y'' - y = e^{2x}$.

Solución: Inicialmente se calcula la solución complementaria, y_c, en $y'' - y = 0$, entonces $m^2 - 1 = 0, \Rightarrow m_1 = -1$ y $m_2 = 1$, por lo tanto $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$.

Seguidamente se halla y_p, haciendo el cambio de parámetros para obtener $y = u_1 e^{-x} + u_2 e^x$.,

entonces se construye el siguiente sistema de ecuaciones. $\begin{aligned} e^{-x} u_1' + e^x u_2' &= 0 \\ -e^{-x} u_1' + e^x u_2' &= e^{2x} \end{aligned}$

Entonces si $A = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^x \\ -e^{-x} & e^x \end{pmatrix}, \Rightarrow |A| = 1 + 1 = 2$, $B = \begin{pmatrix} 0 & e^x \\ e^{2x} & e^x \end{pmatrix}, \Rightarrow |B| = -e^{3x}$ y además se tiene que $C = \begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{2x} \end{pmatrix}, \Rightarrow |C| = e^x$, entonces $u_1' = \dfrac{|B|}{|A|} = \dfrac{-e^{3x}}{2}, \Rightarrow u_1 = -\dfrac{1}{6} e^{3x}$,

similarmente se tiene que $u_2' = \dfrac{|C|}{|A|} = \dfrac{e^x}{2}, \Rightarrow u_2 = \dfrac{1}{2} e^x$, entonces

$y_p = u_1 e^{-x} + u_2 e^x = -\dfrac{1}{6} e^{3x} e^{-x} + \dfrac{1}{2} e^x e^x = \dfrac{1}{3} e^{2x}$, por lo tanto $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \dfrac{1}{3} e^{2x}$. es la solución de la ecuación dada.

4.14.4 UTILIZA LA INFORMACIÓN PARA DESARROLLAR LOS EJERCICIOS.

I: En los ejercicios del 1 al 4 se da un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada para $\chi \rangle 0$, aplica el método de variación de parámetros para hallar la solución general.

1) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3$ $\{x, x^2\}$

2) $x^2 y'' + xy' - y = x^{\frac{1}{2}}$ $\{x, x^{-1}\}$

3) $x^2 y'' + 2xy' = x^{-1}$ $\{1, x^{-1}\}$

4) $y'' - 4y' + 4y = (x+1) e^{2x}$ $\{e^{2x}, xe^{2x}\}$

II: Resuelve las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas por variación de parámetros.

1) $y'' + y = Secx$

2) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

3) $y'' + 5y' + 4y = e^x$

4) $y'' - y' - 6y = e^{-2x}$

5) $y'' - y = x$

6) $y''' - y'' = e^x$

7) $y''' - y' = e^{2x}$

8) $y''' + 3y'' - y' - 3y = e^x$

4.15 ECUACION DE CAUCHY- EULER

4.15.1 INTRODUCCION: Generalmente la solución de las ecuaciones lineales con coeficientes variables es implicita, además sus soluciones frecuentemente son numéricas o por serie de potencias; en esta sección serán tratadas una serie especial de ecuaciones lineales con coeficientes variables llamadas " ecuaciones de Cauchy-Euler", las cuales tienen soluciones de la forma $y = x^m$, en donde m es una raíz de la ecuación homogénea asociada.

4.15.2 DEFINICION.

Toda ecuación que tenga la forma $a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$, en donde a_i, $i = 1,2,3,\ldots,n$ son números reales, se le llama " ecuaciones de Cauchy-Euler".

La característica fundamental de este tipo de ecuaciones es de que para el k- eximo término, el exponente de la variable correspondiente coincide con el orden de la ecuación en ese término.

4.15.3 PROCESO DE SOLUCION

Inicialmente se aplicará para ecuaciones lineales homogéneas y finalmente se describe la forma para las lineales no homogéneas.

1) En la ecuación dada se hace la sustitución $y = x^m$, donde m es una raíz por identificar de la ecuación característica asociada.

2) Los valores obtenidos en (1) se reemplazan en $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + \cdots + c_n x^{m_n}$.

NOTA: Lo obtenido en (2) corresponde a la solución para el caso de ecuaciones lineales homogéneas, para las lineales no homogéneas lo construido en (2) corresponde solo a y_c, de tal forma que la otra parte, es decir, y_p , será hallado por variación de parámetros.

4.15.4 CASOS POSIBLES EN LA SOLUCION.

En la solución de este tipo de ecuaciones se presentan como en secciones anteriores los tres casos conocidos, es decir, raíces reales distintas, raíces reales repetidas y raíces complejas conjugadas.

- Para el primer caso, basta reemplazar los valores de m en $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + \cdots + c_n x^{m_n}$.
- Para raíces reales repetidas, la solución general de este tipo de ecuaciones será de la forma $y = c_1 x^m + c_2 x^m \ln x + \cdots + c_n x^m (\ln x)^n$
- Si las raíces son complejas conjugadas, es decir, tengan la forma $m_1 = \alpha + i\beta$ y $m_2 = \alpha - i\beta$, entonces la solución general tendrá la forma $y = x^\alpha ((c_1 Cos(\beta \ln x) + c_2 Sen(\beta \ln x))$.

Ejemplo 1: Resolver la ecuación $x^2 y'' - 2y = 0$.

Solución: Se hace $y = x^m$, entonces $x^2 (x^m)'' - 2x^m = 0, \Rightarrow x^2 (m(m-1)) x^{m-2} - 2x^m = 0$, entonces

$x^m (m(m-1)) - 2x^m = (m(m-1) - 2)x^m = 0, \Rightarrow m(m-1) - 2 = 0, \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$, entonces se tiene que $(m-2)(m+1) = 0, \Rightarrow m_1 = -1$ y $m_2 = 2$, por lo tanto la solución general será la expresión $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^2$.

Ejemplo 2: Resolver la ecuación $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x$

Solución: Se hace $y = x^m$ en la ecuación homogénea asociada, obteniendo la expresión $x^2(x^m)'' - 3x(x^m)' + 3x^m = 0, \Rightarrow x^2(m(m-1))x^{m-2} - 3x\,m\,x^{m-1} + 3x^m = 0, \Rightarrow m(m-1) - 3m + 3 = 0$, entonces $m^2 - 4m + 3 = 0, \Rightarrow (m-3)(m-1) = 0, \Rightarrow m_1 = 1$ y $m_2 = 3$, por lo tanto la solución complementaria es $y_c = c_1 x + c_2 x^3$.

Seguidamente, la ecuación original se le da la forma regular para aplicarle variación de parámetros, obteniendo $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 2x^2 e^x$, entonces $y = u_1 x + u_2 x^3$ será una solución de la ecuación dada, por lo tanto, $A = \begin{pmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{pmatrix}, \Rightarrow |A| = 3x^3 - x^3 = 2x^3$; $B = \begin{pmatrix} 0 & x^3 \\ 2x^2 e^x & 3x^2 \end{pmatrix}, \Rightarrow |B| = -2x^5 e^x$, además $C = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & 2x^2 e^x \end{pmatrix}, \Rightarrow |C| = 2x^3 e^x$, por lo tanto $u_1' = \frac{-2x^5 e^x}{2x^3} = -x^2 e^x$, entonces integrando por partes se obtiene $u_1 = -x^2 e^x + 2xe^x - 2e^x$, además $u_2' = \frac{2x^3 e^x}{2x^3} = e^x, \Rightarrow u_2 = e^x$, por lo tanto se tiene que $y_p = u_1 x + u_2 x^3 = (-x^2 e^x + 2xe^x - 2e^x)x + e^x x^3, \Rightarrow y_p = 2x^2 e^x - 2xe^x$, luego la solución general es $y = y_c + y_p = c_1 x + c_2 x^3 + 2x^2 e^x - 2xe^x$.

4.15.5 RESOLVER LOS SIGUIENTES EJERCICIOS MEDIANTE LA INFORMACION.

I: Mediante Cauchy- Euler resolver las siguientes ecuaciones lineales homogéneas.

1) $x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0$

2) $4x^2 y'' + 8xy' + y = 0$

3) $x^2 y'' + 3xy' + 3y = 0$

4) $xy'' + y' = 0$

5) $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$

6) $25x^2 y'' + 25xy' + y = 0$

7) $x^3 y''' + xy' - y = 0$

8) $x^3 y''' - 6y = 0$

II: Resolver las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas mediante Cauchy-Euler.

1) $x^2 y'' + y' = x$

2) $xy'' - 4y' = x^4$

3) $2x^2 y'' + 5xy' + y = x - x^2$

4) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^4 e^x$

5) $x^2 y'' - xy' + y = 2x$

6) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$