



# FÍSICA COMPUTACIONAL

ALEJANDRO PUJANTE PÉREZ  
49248019 M

---

## Ejercicio 4-31-app

---

### Breve descripción:

En este ejercicio se resolverán las ecuaciones de un péndulo elástico y se analizará su comportamiento.

También se hará una comparación en el movimiento si se somete a un ligero cambio en la constante elástica.

# Índice

1. Problema a resolver.	2
2. Evolución temporal de $\theta$ y $r$ .	3
3. Trayectoria.	4
4. Tensión del resorte.	5
5. Espacio de fases y conservación de la energía.	7
6. Modificación constante $k$ .	8
7. Conclusiones.	11

## 1. Problema a resolver.

Las ecuaciones que describen el movimiento de una masa  $m = 0,25$  kg unida a un resorte (deformable solo a lo largo de su longitud) de masa despreciable, con constante elástica  $k$  y longitud  $L$  son las dos ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -\omega_r^2 x + \frac{g\lambda x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -g - \omega_r^2 y + \frac{g\lambda y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\end{aligned}$$

Donde  $\omega_r = \sqrt{k/m}$  es la frecuencia de la masa colgando del resorte,  $\omega_p = \sqrt{g/L}$  es la frecuencia del péndulo de longitud  $L$  y  $\lambda = \omega_r^2/\omega_p^2$ .

Las constantes  $L = 1$  y  $k = 3,1$  (en relación a mi DNI).

Consideraremos como condiciones iniciales del problema  $x(0) = L$  m ,  $y(0) = 0$  m ,  $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$  m/s.

Para resolver este problema he utilizado el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4), este algoritmo para resolver ecuaciones diferenciales aproxima la función  $y(x)$  que se quiere resolver por una serie de Taylor hasta  $h^2$ , siendo  $h$  el paso, es decir, mediante una parábola.

Este algoritmo necesita de 4 pendientes intermedias que pueden obtenerse del método de Euler, además tiene un buen equilibrio entre potencia de cálculo, precisión y facilidad para programar.

Tenemos entonces ahora que obtener las funciones  $x(t)$ ,  $y(t)$ , donde las ecuaciones que se proponen son ecuaciones diferenciales de segundo orden. Para poder resolverlo por el método de Runge-Kutta se necesita descomponer cada ecuación de segundo orden en dos ecuaciones de primer orden, y utilizando funciones auxiliares ( $y_1, y_2, y_3, y_4$ ), siendo  $y_1 = x(t)$ ,  $y_3 = y(t)$ .

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \quad \frac{dy_3}{dt} = y_4.$$

Tras estos cambios el sistema resultante es de 4 ecuaciones con 4 funciones  $y_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_4 \\ \frac{dy_2}{dt} &= -\omega_r^2 y_1 + \frac{g\lambda y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_3^2}} \\ \frac{dy_4}{dt} &= -g - \omega_r^2 y_3 + \frac{g\lambda y_3}{\sqrt{y_1^2 + y_3^2}}\end{aligned}$$

## 2. Evolución temporal de $\theta$ y $r$ .

Una vez obtenidas las soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales y sabiendo las posiciones  $x(t)$ ,  $y(t)$  se pide calcular la evolución temporal del ángulo  $\theta$ , a partir de la vertical que pasa por el centro de coordenadas, y el radio del resorte.

Estas magnitudes podemos hallarlas sabiendo que

$$\theta = \arctan(x/y) \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Si representamos en una gráfica conjuntamente  $\theta$  (rad) y  $r$  (m) obtenemos lo siguiente.

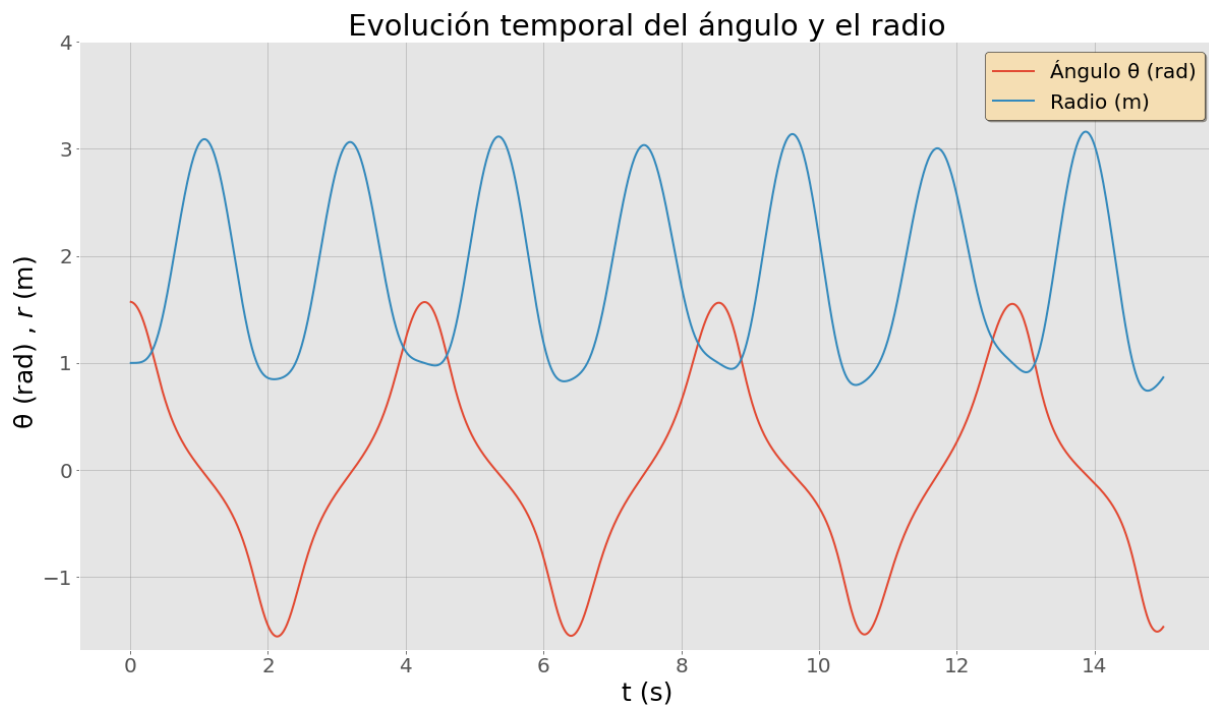


Figura 1: Representación conjunta de la evolución temporal del ángulo  $\theta$  y el radio  $r$  hasta  $t = 15$  s.

Como primera apreciación se ve cierta periodicidad en las dos magnitudes, el ángulo inicial es  $\pi/2$  ya que hemos impuesto como condición inicial que la masa  $m$  comience paralela al eje  $x$ , es decir  $90^\circ$ .

También se aprecia que, cuando el movimiento completa un periodo, el radio ha sufrido dos cambios de longitud pronunciados, esto se debe a la elongación máxima que el muelle sufre cuando el ángulo  $\theta = 0^\circ$ , y en un periodo eso ocurre 2 veces.

### 3. Trayectoria.

Si ahora representamos la curva paramétrica  $y(t)$  vs  $x(t)$  obtenemos la trayectoria real del péndulo a medida que transcurre el tiempo.

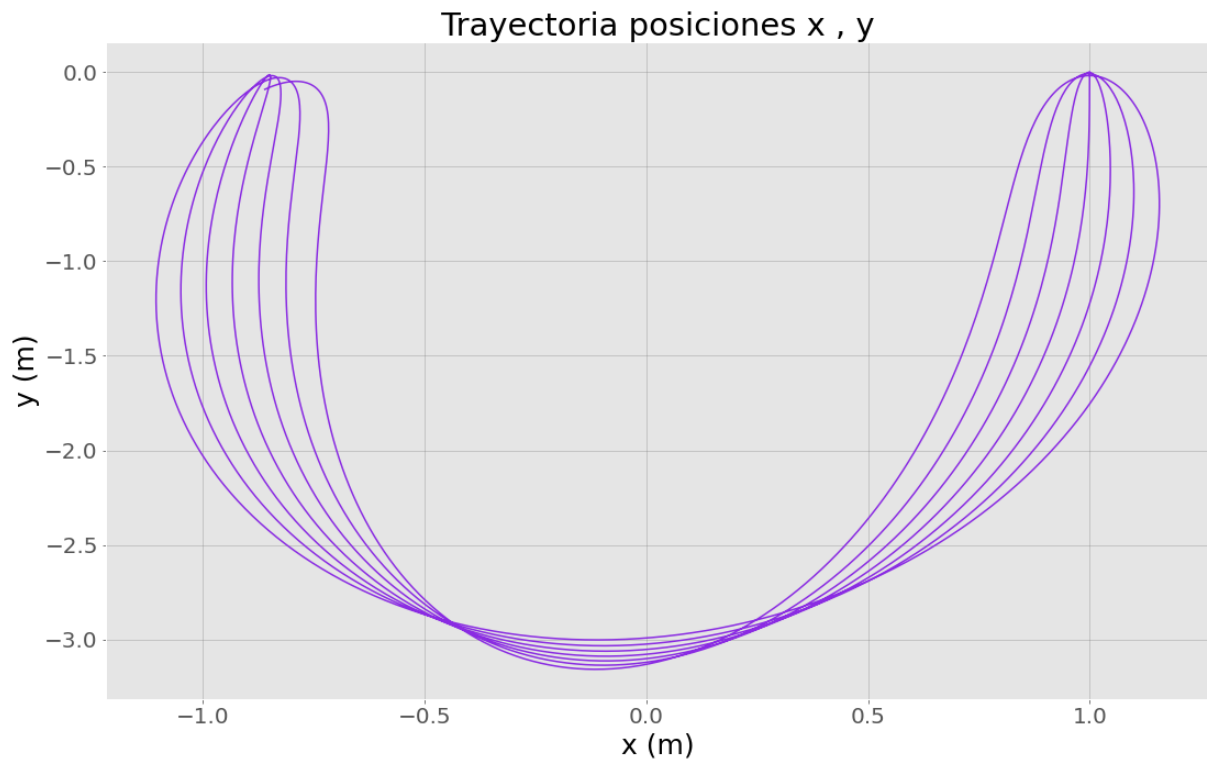


Figura 2: Trayectoria de la masa hasta  $t = 15$  s.

Como era de esperar, la trayectoria tiene similitudes con la de un péndulo simple, a diferencia de que en este caso el radio varía según la elongación del resorte.

Por otra parte en los extremos es donde se produce una mayor diferencia de la posición entre una oscilación y otra.

Para este apartado he realizado una simulación en el lenguaje de programación *Python* con los datos del problema utilizando el módulo *Func.Animation* de la librería *matplotlib*.

Puede verse haciendo click directamente en el enlace que se deja a continuación (YouTube).

[https://youtu.be/Jh\\_xXKluRAg](https://youtu.be/Jh_xXKluRAg)

## 4. Tensión del resorte.

Si queremos representar ahora la tensión que sufre el resorte tenemos que tener en cuenta que la fuerza recuperadora en el muelle es

$$F = -k\Delta x$$

Donde  $\Delta x$  es el desplazamiento del muelle respecto de su posición de equilibrio, es decir, posición final menos posición inicial, y puesto que sabemos su longitud en cada momento ( $r$ ) tenemos que

$$F = k(r - L)$$

Representemos ahora la tensión o fuerza que se ejerce en el resorte en función del tiempo y del ángulo.

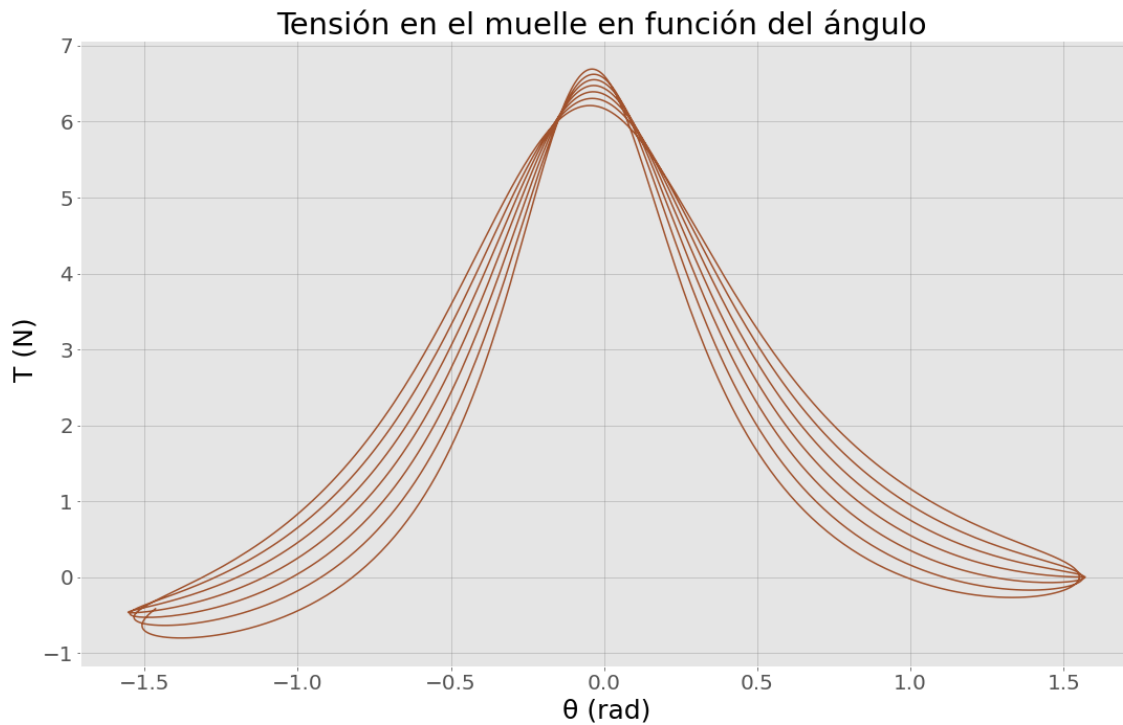


Figura 3: Tensión en el muelle en función del ángulo para un intervalo de  $t = 15$  s.

Como se ha deducido del primer apartado, el resorte sufre una tensión mayor y por lo tanto una mayor elongación cuando  $\theta = 0^\circ$

En los extremos de las oscilaciones, sobre todo cuando el ángulo es  $-\pi/2$  la tensión en el resorte es negativa, esto es porque el radio del muelle se hace mas pequeño que su radio en reposo.

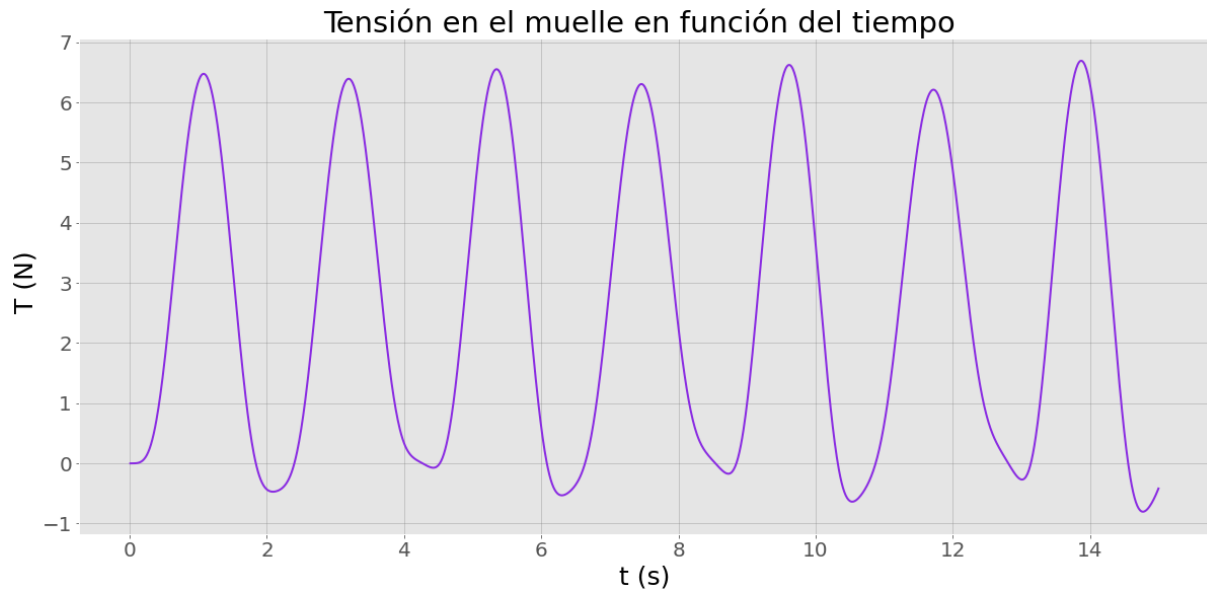


Figura 4: Tensión en el resorte en función del tiempo en un intervalo de  $t = 15$  s.

De esta representación podemos extraer como conclusión que la longitud del muelle está prácticamente siempre por encima de su longitud en reposo ( $L = 1$ ) excepto como se ha comentado en el apartado anterior, en los extremos del movimiento el resorte tiende a recuperar su forma hacia atrás haciendo que la elongación sea menor, de ahí esos pequeños intervalos donde  $r < 1$ .

## 5. Espacio de fases y conservación de la energía.

Podemos ahora representar el diagrama de fases de la solución  $y(t)$

Si el movimiento de un sistema físico es periódico el sistema vuelve al mismo estado después de un ciclo completo. La representación de su trayectoria en el espacio de fases es una curva cerrada.

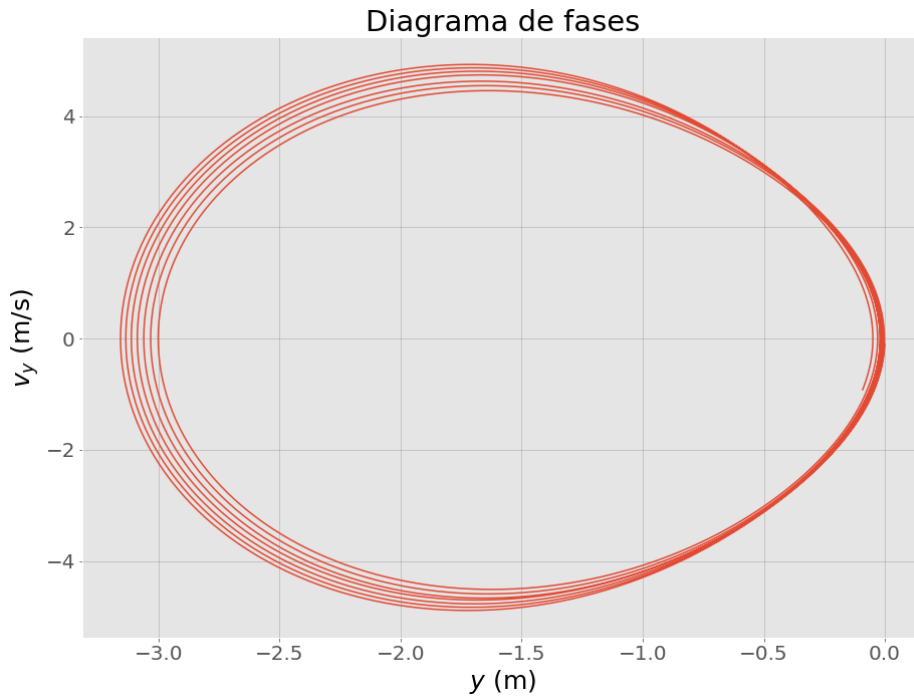


Figura 5: Diagrama de fases de la solución  $y(t)$ .

El movimiento que se está estudiando es un sistema cerrado en el cual solo actúan fuerzas conservativas por tanto es de esperar que el valor de la energía  $E$  se conserve.

El valor de la energía es la suma de la potencial, la cinética más la elástica, es decir

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgy + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2 \quad [J]$$

De las condiciones iniciales sabemos que la energía cinética es 0 J puesto que la masa está en reposo, la energía potencial elástica es 0 J porque el muelle no está desplazado de su posición de equilibrio y la gravitatoria es 0 J también porque se encuentra en  $y = 0$ .

Por tanto  $E = 0$  J en todo el movimiento, veamos la evolución temporal de la energía total.



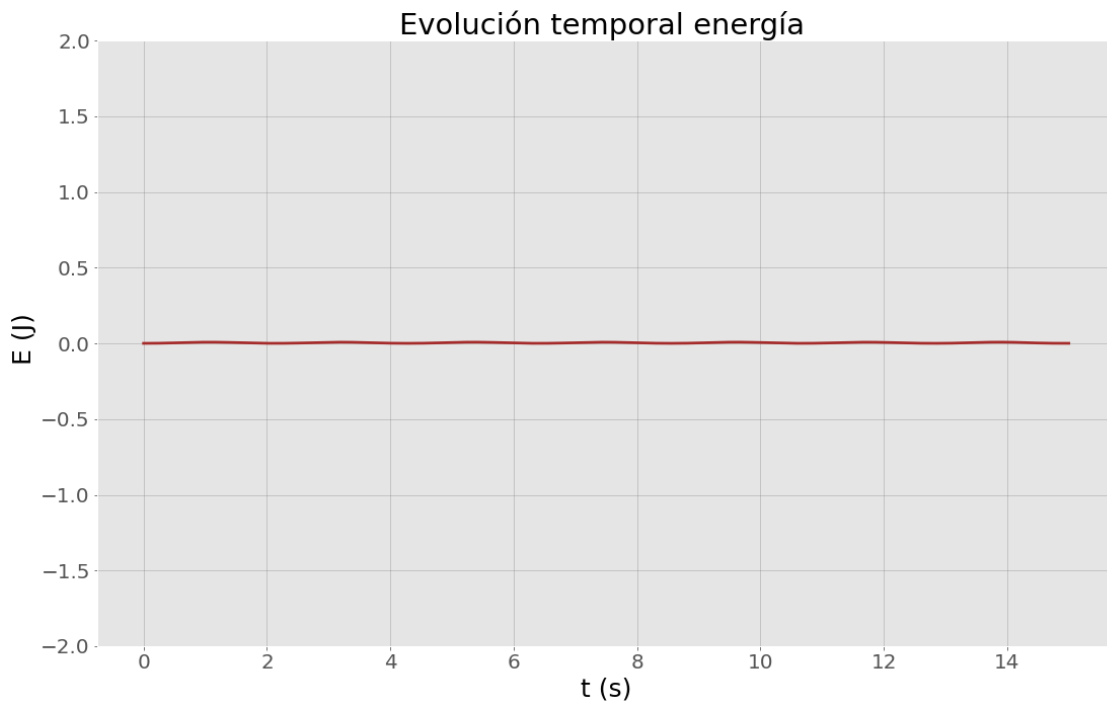


Figura 6: Evolución temporal de la energía en un intervalo de  $t = 15$  s.

Como se había deducido, la energía es constante igual a 0 J en todo el movimiento, es decir, la energía se conserva y la potencial compensa a la cinética y a la elástica puesto que una es negativa y las otras positivas.

## 6. Modificación constante $k$ .

Sumamos ahora a la constante elástica  $10^{-4}$  y repetimos los cálculos. En lo que resta de ejercicio llamaremos a  $k_1 = 3,1$  a la anterior constante y  $k_2 = 3,001$  a la nueva .

Las condiciones iniciales del problema siguen siendo las mismas, por tanto es interesante ver si surge algún efecto significativo en el movimiento si se cambia la constante elástica.

Para ello se pueden representar los valores de la posición  $y$  del resorte con la primera constante ( $y_{k_1}$ ), y los valores de la posición  $y$  cuando cambiamos la constante elástica ( $y_{k_2}$ )

En un intervalo corto de tiempo es de esperar que la diferencia sea prácticamente nula, pues el cambio de la constante  $k$  es muy pequeño pero, ¿Qué pasará si miramos las posiciones cuando  $t$  se hace más grande?

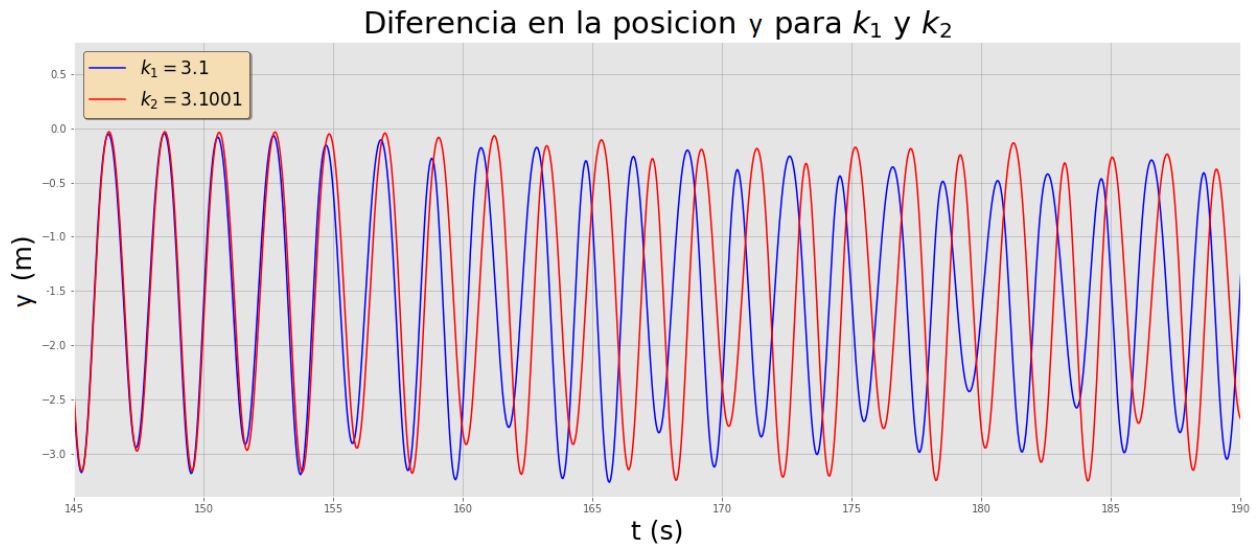


Figura 7: Posiciones  $y(t)$  para  $k_1$  y  $k_2$

Efectivamente cuando  $t = 145$  s las posiciones son prácticamente iguales, pero a partir de  $t = 150$  s empiezan a ser diferentes, además conforme pasa el tiempo el movimiento empieza a ser totalmente distinto. Podemos representar ahora esta diferencia de posiciones (en valor absoluto) en función del tiempo.

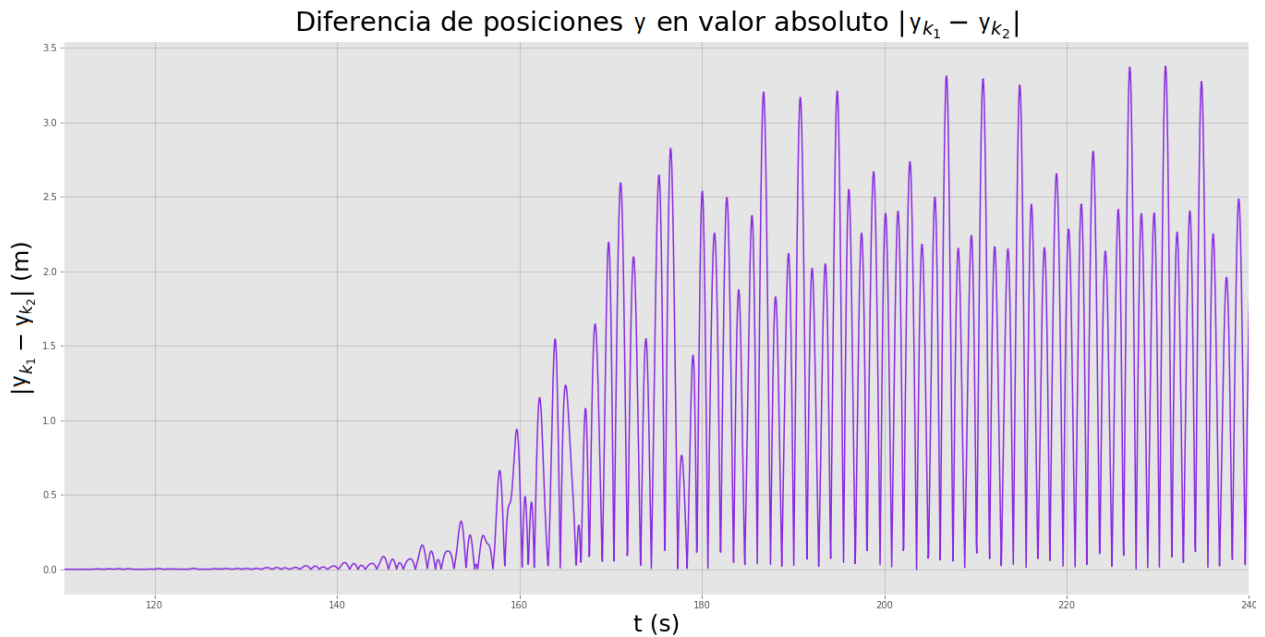


Figura 8: Diferencia en valor absoluto  $y(t)$  para  $k_1$  y  $k_2$  en función del tiempo.

Como se ha visto en la representación de las posiciones, en  $t = 140$  s. se empieza a notar una ligera diferencia, a partir de ahí llega a ser de hasta más de 3 m.

Cabe destacar que esta diferencia se ha detectado resolviendo las ecuaciones diferenciales en un intervalo de tiempo  $80 < t < 250$  con un paso  $h = 0,034$ .

Los cálculos que restan son prácticamente iguales exceptuando que cuando  $t > 145$  s se empiezan a notar algunas diferencias en la trayectoria, para comprobarlo podemos superponer las dos curvas y ver las diferencias.

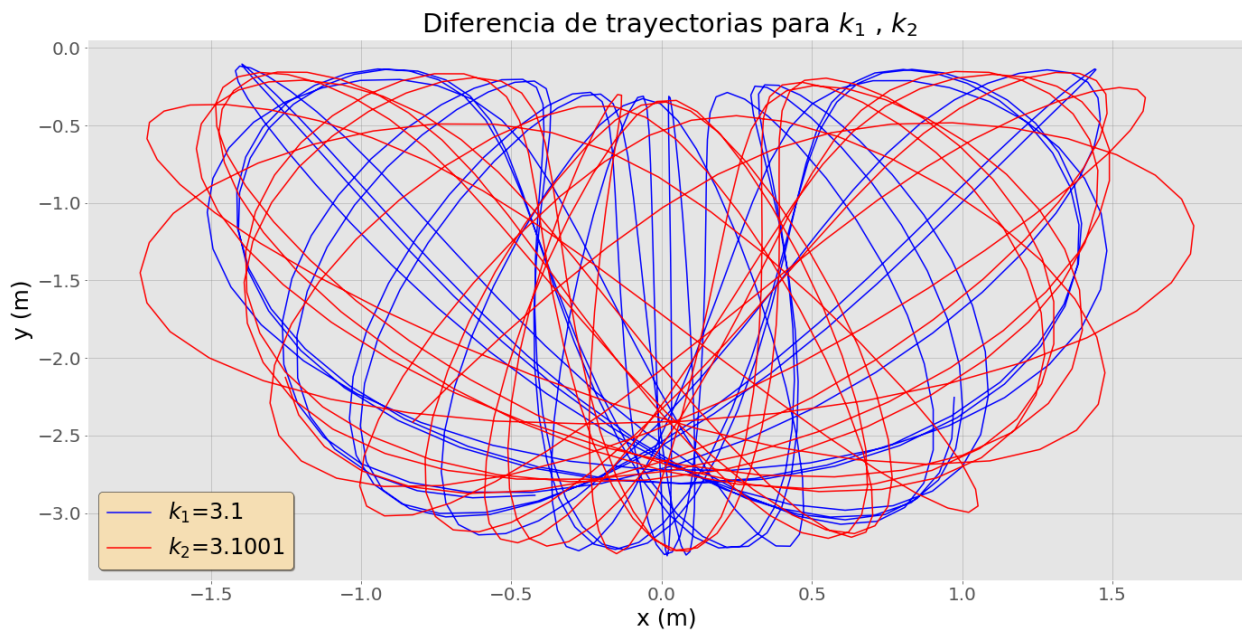
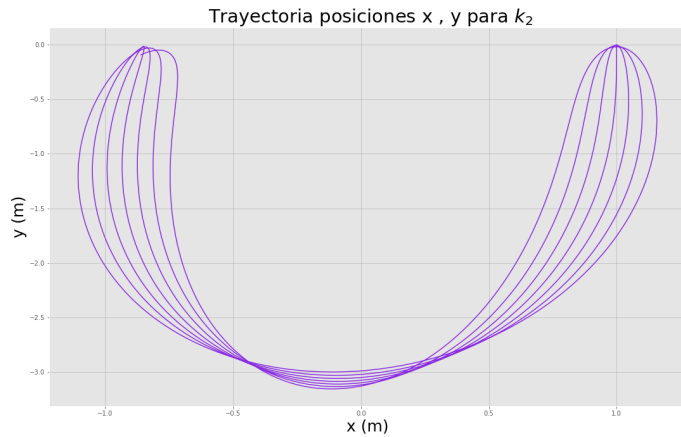
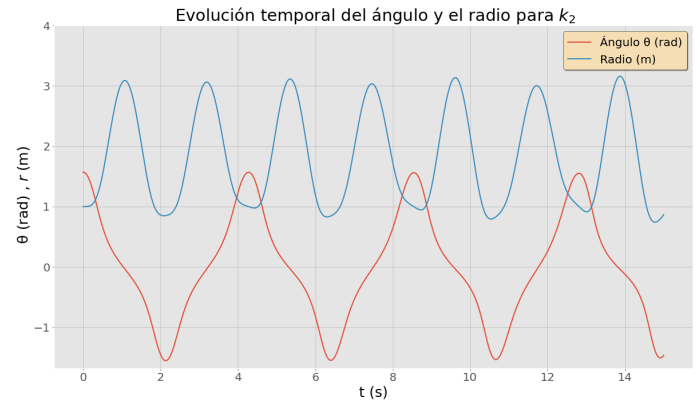
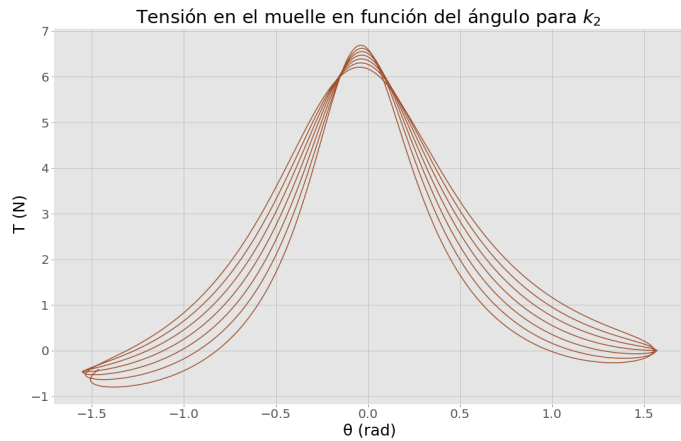
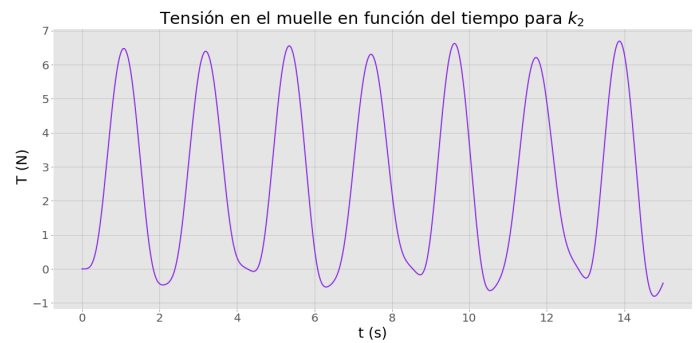


Figura 9: Superposición de curvas paramétricas  $x(t)$ ,  $y(t)$  cuando  $t > 145$  s.

Como se puede ver las dos trayectorias son totalmente diferentes, podemos concluir entonces que el sistema es sensible a condiciones iniciales.

A continuación se deja la representación de todos los cálculos repetidos para  $k_2$  como se indica en el apartado.

Figura 10: Trayectoria para  $k_2$ Figura 11: Radio y ángulo en función del tiempo para  $k_2$ Figura 12: Tensión del resorte en función del ángulo para  $k_2$ Figura 13: Tensión del resorte en función del tiempo para  $k_2$ 

## 7. Conclusiones.

Este ejercicio muestra a la perfección la utilidad de los métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales de cualquier orden, en este caso aplicados a la mecánica, ya que podemos entonces predecir cualquier movimiento utilizando mecánica de Lagrange si hacemos un correcto planteamiento del problema eligiendo las coordenadas generalizadas y obteniendo las ecuaciones de movimiento.