UNIVERSIDAD DE MURCIA

FÍSICA COMPUTACIONAL

Alejandro Pujante Pérez
49248019 M

Ejercicio 6-37-app

Breve descripción:

En este ejercicio resolveremos la ecuación de onda en una dimensión dadas las condiciones de contorno y una condición en el instante inicial.

Índice

1. Problema a resolver.

Consideremos una cuerda elástica de longitud L=500 cm que está dispuesta horizontalmente, con sus extremos fijos y sometida a una tensión T= 300 dyn. Inicialmente se estira la cuerda transversalmente para que adopte la forma

$$u(x,0) = \frac{10^{-4}x^4}{exp[2(x/10)^2]-1} \qquad cm$$

e inmediatamente se deja libre. La masa de la mitad izquierda de la cuerda vale 200 g y la de su mitad izquierda vale 300 g (según mi DNI).

2. Planteamiento.

Estamos interesados en estudiar la evolución temporal de la cuerda. Para ello hay que tener en cuenta que la ecuación de onda en una dimensión es una ecuación en derivadas parciales de tipo hiperbólico, por tanto la perturbación u de la cuerda en cualquier posición x e instante t viene dada por la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

con condiciones iniciales $u(x, t_0)$ y $\dfrac{\partial u(x,t_0)}{\partial t} = 0$, siendo $c = \sqrt{T\lambda}$ la velocidad de la onda, T es la tensión y λ es la densidad lineal de la cuerda.

Para discretizar la ecuación diferencial a resolver utilizamos las aproximaciones en diferencia centrada de las derivadas parciales segundas que aparecen siendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_t^2} \qquad\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2}$$

Si sustituimos en la ecuación de onda a resolver tenemos

$$\frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_t^2} = c^2 \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h_x^2}$$

Despejamos ahora de la expresión

$$u_{i,j+1} = \frac{c^2 h_t^2}{h_x^2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + 2\left(1 - \frac{c^2 h_t^2}{h_x^2}\right) u_{i,j} - u_{i,j-1}$$

Esta ecuación ya nos proporciona un método para determinar la solución a la ecuación de onda, pero tenemos una pequeña dificultad para realizar los cálculos, pues no conocemos u en dos instantes consecutivos, conocemos el instante inicial y la derivada inicial en todos los puntos x_i.

Si para el instante inicial utilizamos la aproximación en diferencia centrada para $\dfrac{\partial u(x,t_0)}{\partial t}$ y utilizando la expresión anterior queda

$$u_{i,1} = \frac{c^2 h_t^2}{2h_x^2}(u_{i-1,0} + u_{i+1,0}) + \left(1 - \frac{c^2 h_t^2}{h_x^2}\right) u_{i,0} + h_t \frac{\partial u(x_i,t_0)}{\partial t}$$

Ahora ya tenemos lo necesario para realizar las iteraciones, para ello utilizaremos un vector *uold* para guardar los valores de u en los puntos x_i en el instante t_{j-1}, un vector u para guardar el valor en t_j y por último un vector *unew* para guardar el valor en el instante t_{j+1}.

Para que la solución sea estable se debe de cumplir que

$$h_t \leq \frac{h_x}{c}$$

En nuestro caso imponemos las condiciones de contorno, es decir, la derivada en los extremos debe ser 0 y como condición inicial la función dada.

La cuerda tiene 2 densidades diferentes, por ello se debe resolver el problema en dos partes. Cuando realizamos las iteraciones para guardar los valores en los vectores *uold*, u y *unew* recorremos la primera mitad de la cuerda con los datos de masa y densidad correspondientes a la parte en la que estamos resolviendo la ecuación.

Una vez terminado el planteamiento del problema podemos escoger los instantes t_j en los que recogemos los datos para representarlos gráficamente.

En mi caso he resuelto el problema con h_t=0.003 y un número de pasos temporales nt=1000, es decir el tiempo total es de t= 3 segundos.

Se han recogido los datos de la deformación de la cuerda $u(x_i, t_j)$ en los instantes t_1=0.599 s, t_1=1.2 s, t_3=1.8 s, t_4=2.399 s y t_5=3 s.

3. Evolución temporal.

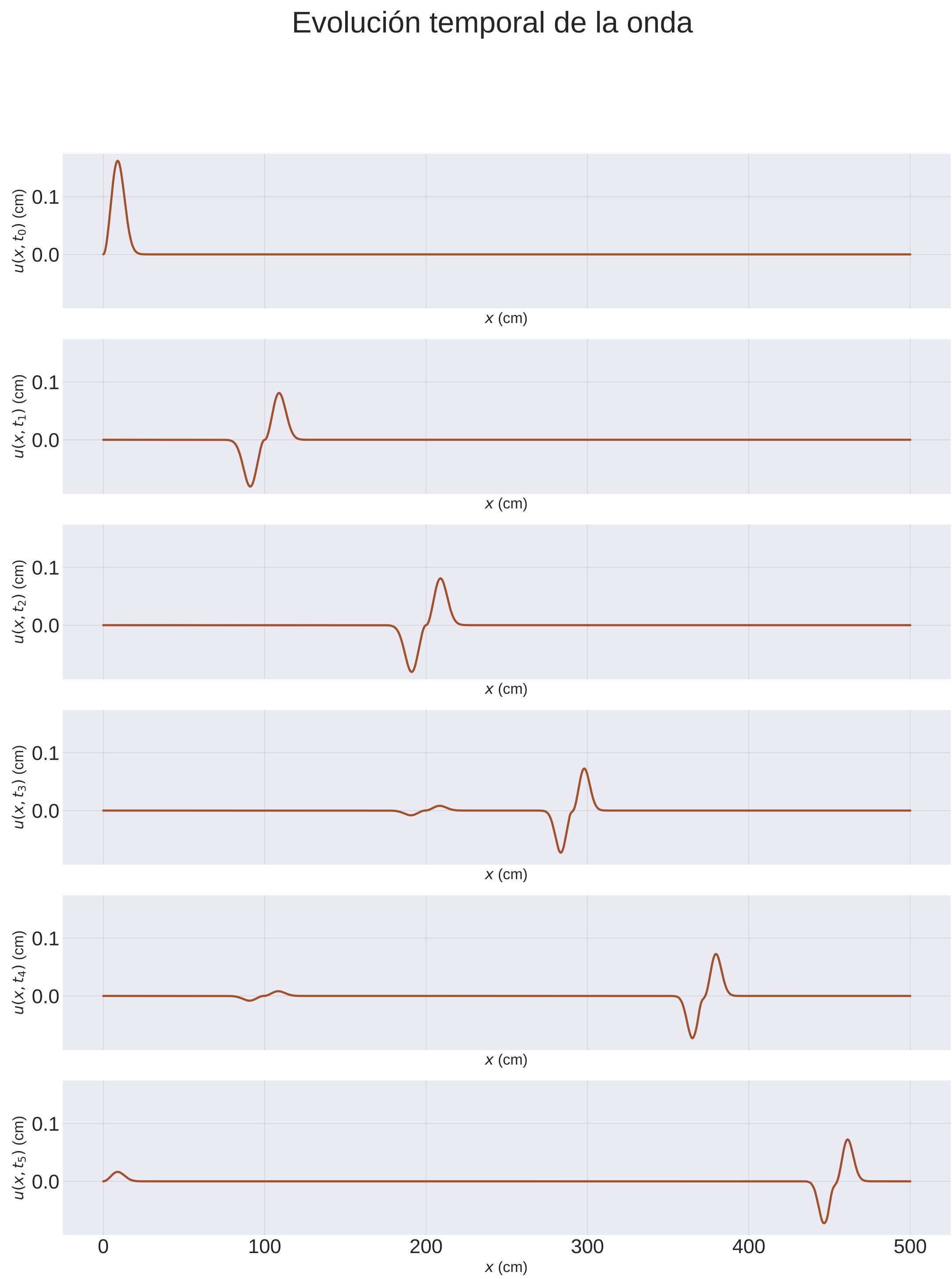

Figura 1: Representación de la onda en los diferentes instantes consecutivamente.

Podemos representar conjuntamente la evolución temporal de la onda en una misma gráfica de forma que tenemos lo siguiente.

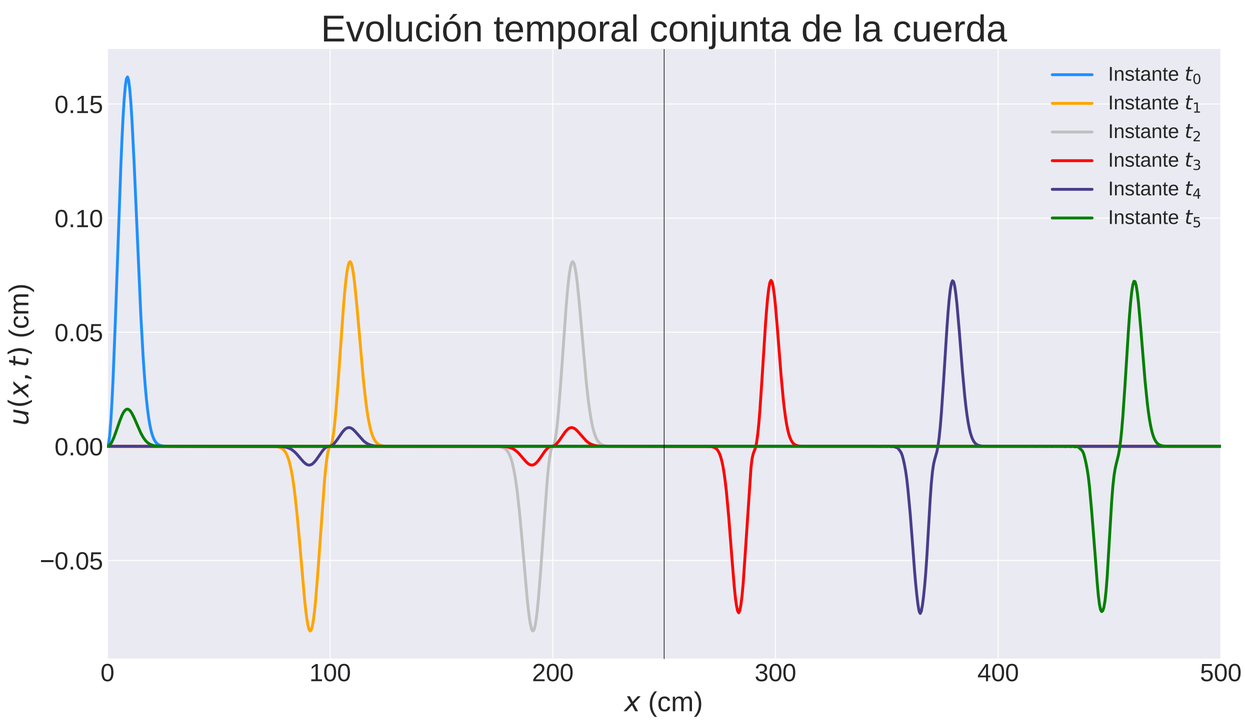

Figura 2: Representación de la onda en los diferentes instantes conjuntamente.

Para ver mejor la evolución temporal de la onda he realizado una simulación en *Python*. Puede verse pinchando directamente en el enlace que aparece a continuación (YouTube).

https://youtu.be/BPhhiVw6cFY

El comportamiento de la cuerda así como su explicación física se comentarán en la siguiente sección.

4. Comportamiento de la cuerda.

En el instante inicial la función dada por el enunciado del problema y por tanto la forma nos da una cuerda estirada hacia arriba cerca del extremo izquierdo. Una vez la cuerda se suelta comienza el movimiento, una parte del pulso de la cuerda sigue su movimiento hacia la derecha, mientras que la otra mitad hacia la izquierda, esta última encontrándose con el extremo izquierdo de la cuerda, que como está fijo se refleja y cambia el sentido de su elongación, como si de una onda estacionaria se tratase.

La cuerda sigue su propagación, donde se pueden diferenciar el pulso hacia arriba y otro hacia abajo como consecuencia de la reflexión nada más comenzar. Recordemos que la cuerda tiene dos densidades diferentes, en mi caso la densidad de la primera mitad (ρ_1) es menor que la de la segunda mitad (ρ_2), por tanto cuando la atraviesa el punto medio hay una parte de la cuerda que sufre una reflexión hacia el lado izquierdo y otra que se transmite hacia el lado derecho.

Analicemos bien lo que ocurre en esta parte de la cuerda. Sean $u_t(x,t)$ y $u_r(x,t)$ las elongación de las ondas transmitida y reflejada respectivamente y A_t, A_r sus amplitudes máximas, entonces en x=250 se debe cumplir que

$$u_t(250,t) = u_r(250,t)$$

$$\frac{\partial u_t(250,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_r(250,t)}{\partial x}$$

por lo tanto si A es la amplitud de la onda original incidente, y $k_2 = k_1\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$ son los números de onda para cada parte de la cuerda se debe cumplir

$$A_t + A_r = A$$

$$k_1 A - k_1 A_r = k_2 A_t$$

sustituyendo en las expresiones nos queda

$$A_r = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} A = \mathbf{r} A \qquad A_t = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}} A = \mathbf{t} A$$

Siendo **r** y **t** los coeficientes de reflexión y transmisión respectivamente.

$$\boxed{\mathbf{r} = \frac{\sqrt{\rho_1} - \sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}} \qquad \boxed{\mathbf{t} = \frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1} + \sqrt{\rho_2}}}$$

Por tanto como nuestras densidades son $\rho_1 = 2/5$ gr/cm y $\rho_2 = 3/5$ gr/cm tenemos una relación entre la amplitud inicial y la transmitida y reflejada.

$$A_r = 0{,}1A \qquad A_t = 0{,}898A$$

siendo A la amplitud máxima de la onda incidente, en este caso A=0.008

Si la segunda mitad de la cuerda tiene más densidad el pulso reflejado se invierte, y al contrario el pulso reflejado no se invierte ya que se produce un cambio de signo en el coeficiente **r**.

Los pulsos de onda siguientes irán reflejándose consecutivamente tanto en la pared como en el cambio de densidades ya comentado.

5. Conclusiones.

Este ejercicio me ha parecido realmente curioso, la variabilidad que nos da este método numérico para resolver cualquier tipo de problema es casi infinita, solamente con unas condiciones de contorno el problema se puede simular perfectamente, además como en este caso, podemos ver lo que ocurre cuando una onda cambia su densidad en pleno pulso.