FÍSICA COMPUTACIONAL

ALEJANDRO PUJANTE PÉREZ
49248019 M

Ejercicio 2-51-app

Breve descripción:

En este ejercicio resolveremos una ecuación matricial dadas una matriz A y una b de coeficientes.

También hallaremos el determinante y la inversa de una matriz por el método de descomposición LU.

1. Resolución del sistema de ecuaciones.

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 15 \\ 21 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Tenemos que resolver el sistema $Ax = b$ donde x es el vector de las incógnitas a resolver.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Para la resolución de este sistema he utilizado el método de descomposición LU, que descompone la matriz original en una matriz triangular superior y otra triangular inferior $A = LU$, donde L denota la matriz triangular inferior y U la superior.

Una vez realizados los cálculos los resultados que he obtenido son los siguientes:

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 2 \ , \ x_3 = 3 \ , \ x_4 = 4 \ , \ x_5 = 5$$

Por lo tanto el resultado del vector x solución al sistema de ecuaciones es:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Determinante e inversa de A.

Para calcular el determinante de la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

He procedido por el mismo método que antes, ya que mediante la descomposición LU obtenemos que $detA = detL$ ·detU.

Este resultado es muy sencillo ya que el determinante de L es la unidad y el de U es el producto de sus elementos diagonales, por tanto el determinante de A es

$$detA{=}\prod_{i=1}^{N} = u_{ii}$$

Donde u_{ii} son los elementos de la diagonal de la matriz U. Una vez realizados los calculos hemos obtenido que el determinante de A es:

$$\boxed{|A| = 27}$$

Siguiendo con el método de descomposición LU, procedemos a calcular la inversa de la matriz A, donde hay que tener en cuenta la matriz identidad, $A{\cdot}\mathrm{A}^{-1} = I$.

Descomponiendo las matrices A^{-1} , I en columnas y resolviendo la ecuación anterior, se obtiene la siguiente matriz inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}333 & 0{,}333 & 0{,}333 & -0{,}15 & 0{,}074 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}222 & -0{,}111 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}111 & 0{,}444 \end{pmatrix}$$