UNIVERSIDAD DE MURCIA

FÍSICA COMPUTACIONAL

ALEJANDRO PUJANTE PÉREZ
49248019 M

Ejercicio 2-67-app

Breve descripción:

En este ejercicio resolveremos un sistema no lineal mediante un método iterativo y representaremos las soluciones obtenidas.

Índice

Nota al corrector: Este ejercicio se resolvió en base a la primera versión del enunciado, con las ctes x , y que se indicaban en función del DNI y no se ha cambiado por aprobación del profesor Rafael García Molina.

1. Sistema problema.

El problema se trata de resolver el siguiente sistema no lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$Acos(\alpha) + Bcos(\beta) = x$$
$$Asin(\alpha) + Bsin(\beta) = y$$

Donde $A = 2$ m , $B = 1$ m, son ctes que representan la longitud de dos segmentos unidos por sus extremos en el mismo plano, $x = 1{,}9$ m , $y = 1{,}1$ m (obtenidos de mis últimas cifras del DNI) son las coordenadas del plano que pertenecen al punto extremo del segmento B.

Por tanto las incógnitas a resolver son los ángulos α y β.

2. Método de resolución.

Puesto que este sistema de ecuaciones no es lineal no podemos resolverlo por el método de descomposición LU, para ello he procedido por un método iterativo.

Despejando la incógnita α de cada una de las ecuaciones podemos obtener una relación entre las dos incógnitas.

$$\alpha = acos(\tfrac{x - Bcos\beta}{A})$$

$$\alpha = asin(\tfrac{y - Bsin\beta}{A})$$

Si estas dos ecuaciones las representamos en una gráfica α vs β, nuestra solución al sistema será donde se corten estas dos curvas, entonces

$$acos(\tfrac{x - Bcos\beta}{A}) = asin(\tfrac{y - Bsin\beta}{A}) \quad \Rightarrow \quad acos(\tfrac{x - Bcos\beta}{A}) - (\tfrac{y - Bsin\beta}{A}) = 0$$

Si ahora plasmamos la última ecuación en una gráfica, (en el eje de abscisas β y en el de ordenadas la ecuación que llamo $f(\beta)$) veremos las soluciones que se obtienen para β, donde la gráfica corte al eje de abscisas la ecuación será igual a 0.

3. Soluciones.

Si representamos la ecuación anterior para obtener las soluciones del ángulo β obtenemos lo siguiente.

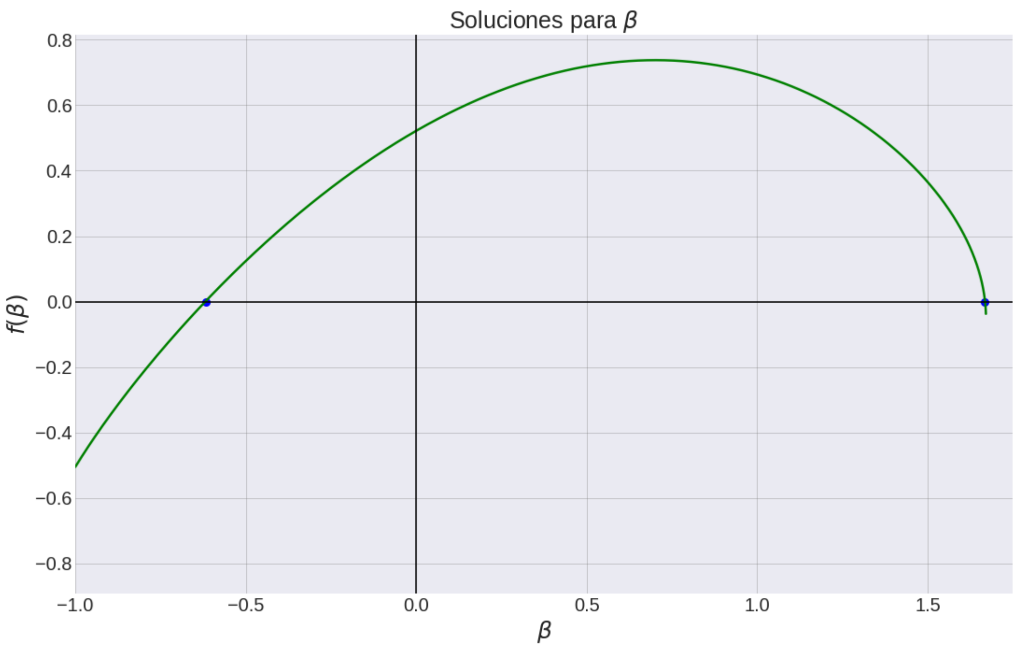

Figura 1: Soluciones de β con menor magnitud en valor absoluto.

Podemos ver las soluciones de β más próximas a 0, para saber exactamente cuales son he aplicado el método iterativo de bisección, dando valores por la izquierda y la derecha de cada 0.

Solución 1:

Daremos como primer resultado el cero que es negativo, para el cual se ha obtenido $\underline{\beta = -0{,}6186}$ rad con un error de 10^{-7}.

Sabido el valor de β, para saber el de α no hay más que sustituir en alguna de las ecuaciones para las cuales hemos despejado α teniendo en cuenta nuestras ctes.

$$\alpha = acos(\frac{1{,}9 - cos(-0{,}6186)}{2}) \quad , \quad \underline{\alpha = 0{,}9972} \text{ rad}$$

Estos resultados están expresados en radianes, el resultado en grados sexagesimales para una mejor visualización son los siguientes:

$$\boxed{\alpha = 57{,}14^o} \quad ; \quad \boxed{\beta = -35{,}44^o}$$

<u>Solución 2:</u>

Este segundo resultado al sistema de ecuaciones se obtiene del cero que es positivo. Al igual que antes se puede obtener este cero por el método de bisección, en este caso hallamos $\underline{\beta = 1{,}6682}$ rad con un error de 10^{-7}.

Con el mismo procedimiento que antes:

$$\alpha = acos(\tfrac{1{,}9-cos(1{,}6682)}{2}) \quad , \quad \underline{\alpha = 0{,}0524} \text{ rad}$$

Los resultados que se han dado al igual que antes son en radianes, por tanto en grados sexagesimales son:

$$\boxed{\alpha = 3^o} \quad ; \quad \boxed{\beta = 95{,}58^o}$$

Pero, ¿Son estas las únicas soluciones al sistema de ecuaciones? La respuesta la encontramos si en la ecuación que hallamos las soluciones de β ampliamos el dominio.

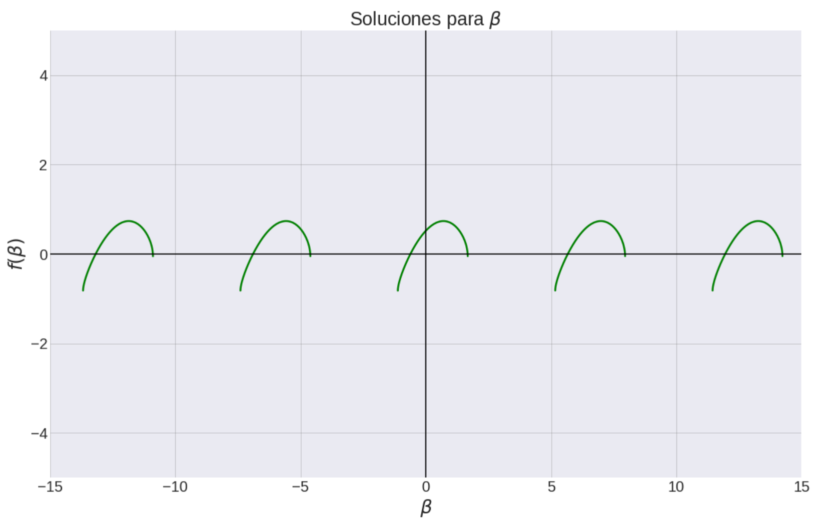

Figura 2: Soluciones de β periódicas.

Se pueden ver más soluciones de forma periódica, si calculamos las soluciones positivas y las reducimos al primer cuadrante tenemos, además de las ya obtenidas:

- $\beta_1 = 5{,}6646$ $\qquad \beta_1 = 324{,}55^o \rightarrow \quad -35{,}44^o$
- $\beta_2 = 7{,}9514$ $\qquad \beta_2 = 455{,}58^o \rightarrow \quad 95{,}58^o$
- $\beta_3 = 11{,}9477$ $\qquad \beta_3 = 684{,}55^o \rightarrow \quad -35{,}44^o$
- $\beta_4 = 14{,}2346$ $\qquad \beta_4 = 815{,}58^o \rightarrow \quad 95{,}58^o$

Como vemos las soluciones se repiten a lo largo del dominio de la ecuación, por tanto solo existirán dos parejas de ángulos para los que la configuración de los segmentos se ajusta a nuestras condiciones impuestas, son las que hemos llamado *Solución* 1 y *Solución* 2.

4. Representación de las soluciones.

Para ver graficamente las soluciones representemos los segmentos A y B y los angulos α y β obtenidos en la *Solución* 1.

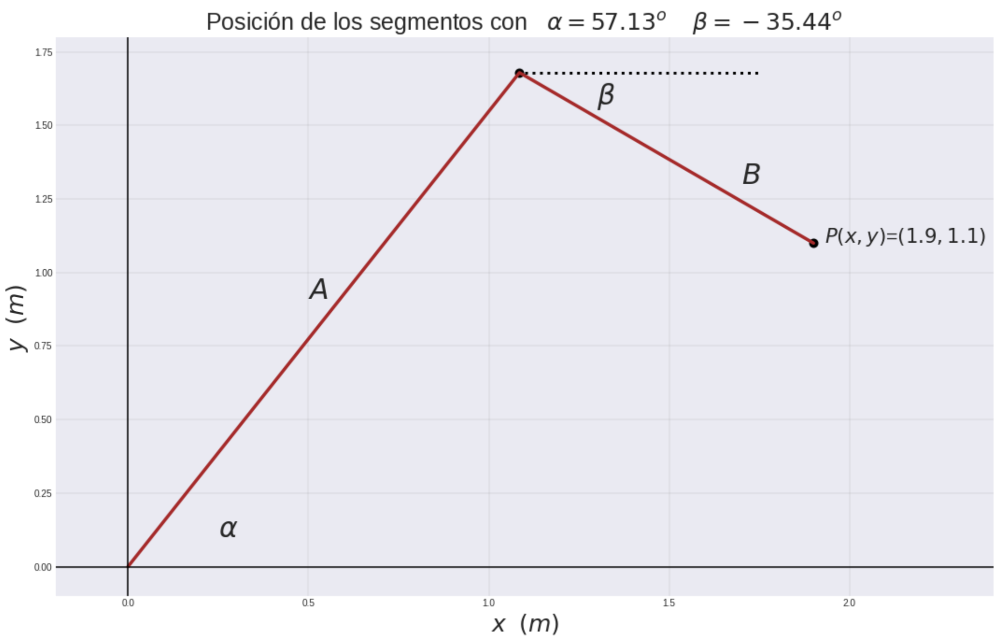

Figura 3: Soluciones de β periódicas.

De esta forma podemos comprobar de una forma más visual que hemos obtenido la solución al problema que buscabamos.

5. Conclusiones.

Aunque el problema parece sencillo lo he encontrado muy útil para resolver sistemas que no son lineales ya que la mayoría de casos se presentan problemas de este estilo.