FÍSICA COMPUTACIONAL

Alejandro Pujante Pérez
49248019 M

Ejercicio 5-21-app

Breve descripción:

En este ejercicio resolveremos una ecuación diferencial de segundo orden con condiciones de contorno.

Índice

1. Ecuación a resolver y método numérico.

Se pide resolver la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(1 - \frac{x}{5}\right)\frac{dy}{dx}y = x$$

con las condiciones de contorno $y(1) = 2$ e $y(3) = -1$.

El principal problema para resolver este ejercicio es que no se trata de un problema de valores iniciales, puesto que se nos dan dos condiciones de contorno para el valor de la función al principio y al final del intervalo donde se pretende resolver la ecuación. Por tanto no podemos aplicar directamente un método numérico como Runge-Kutta de cuarto orden (RK4).

Para ello se ha utilizado el método del disparo, que consiste en proponer un valor de la derivada al principio de la región donde se quiere resolver la ecuación $y'(x_0)$ y resolverlo por un método numérico ya conocido y comprobar si el resultado de la la función y que obtenemos coincide con nuestra condición de contorno $y(x_f)$.

Lo más normal es que no se acierte con la primera pendiente propuesta pero podemos usar un procedimiento para obtener el valor óptimo de la derivada $y'(x_0)$ que consiste en calcular el cero de la función

$$E\left[y'(x_0)\right] = y(x_f) - y_f$$

la diferencia entre el valor propuesto como condición de contorno y el obtenido como solución del método numérico.

Si resolvemos la ecuación con el método de la secante la derivada de la función se puede calcular empleando un procedimiento iterativo de forma que

$$y'_{k+1}(x_0) = y'_k(x_0) - [y_k(x_f) - y_f]\frac{y'_k(x_0) - y'_{k-1}(x_0)}{y_k(x_f) - y_{k-1}(x_f)} \tag{1}$$

Si la ecuación diferencial fuese lineal, este método nos garantiza que tras tres intentos, es decir, proponemos dos derivadas y hacemos una iteración con la expresión anterior, el resultado que se obtiene es realmente bueno. Pero estamos ante un caso de una ecuación diferencial <u>no lineal</u> y por lo tanto no se puede garantizar el buen resultado tras el tercer intento.

Para ello hago un programa donde se calcula la ecuación diferencial por el método de Runge-Kutta (RK4) con dos derivadas propuestas, tras obtener dos soluciones de y_f se recorre un bucle con 20 iteraciones (no hacen falta muchas más) donde se itera con la expresión (1).

Si en alguna de estas iteraciones se alcanza el criterio de convergencia, es decir, que la diferencia entre mi condición final de contorno satisfaga bajo cierta tolerancia la obtenida por el método numérico acabo el bucle y escribo el resultado.

2. Resultados.

Para hallar el resultado he probado con dos valores de la pendiente $y'(x_0) = -1$, $y'(x_0) = -3$ y mediante el método explicado en el apartado anterior he obtenido una pendiente de $y'(x_0) = -2{,}0160$ en la iteración 5 con una tolerancia/error de 10^{-4}.

A continuación se deja la solución $y(x)$ a la ecuación diferencial propuesta.

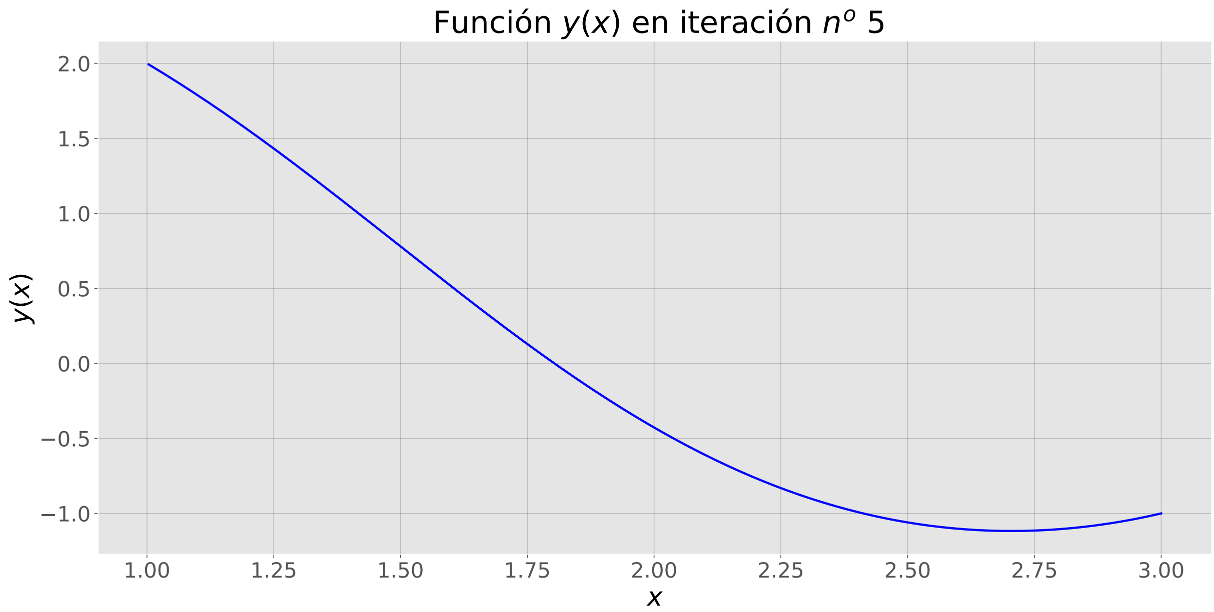

Figura 1: Función $y(x)$ solución a la ecuación diferencial.

Se puede comprobar que la solución es correcta ya que cumple nuestras condiciones de contorno

$$y(1) = 2 \qquad y(3) = -1$$

3. Otro método.

También se ha resuelto este problema procediendo por el método del disparo pero sin realizar un bucle que alcance un criterio de convergencia, sino dando dos valores propuestos iniciales de la derivada e iterando con 7 disparos en la expresión (1).

Los resultados para este método han sido los siguientes.

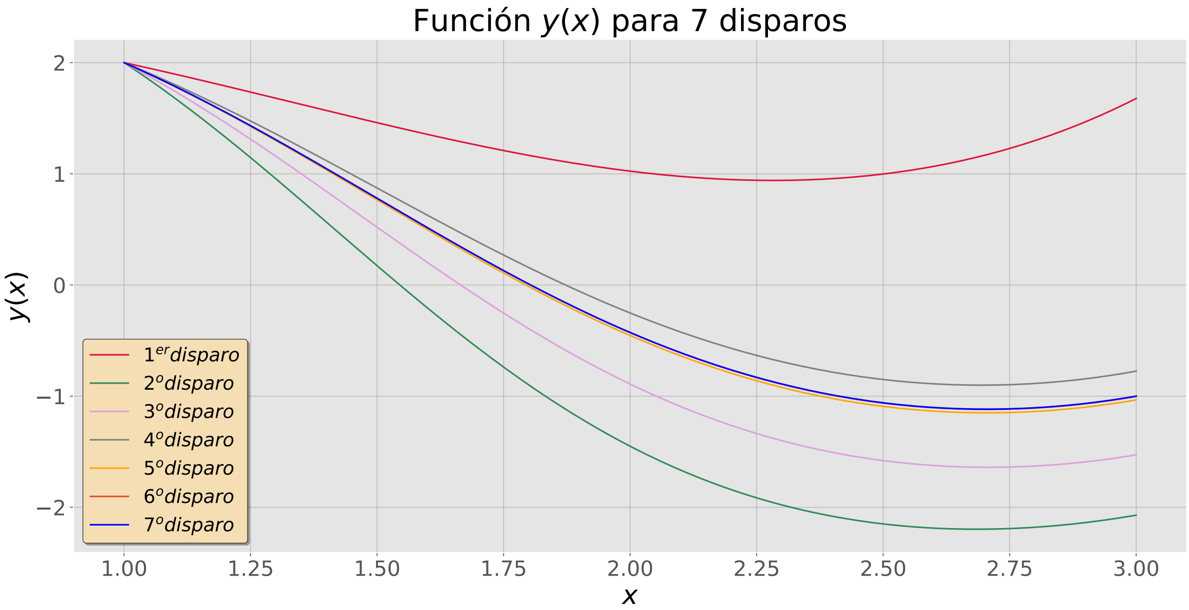

Figura 2: Función $y(x)$ con 7 disparos solución a la ecuación diferencial.

Se puede ver que este método también es realmente efectivo y converge rápido, se obtiene un muy buen resultado en la iteración 6.