FÍSICA COMPUTACIONAL

Alejandro Pujante Pérez
49248019 M

Ejercicio 6-19-app

Breve descripción:

En este ejercicio resolveremos la ecuación del calor para una placa circular con condiciones de contorno y analizaremos las lineas isotermas en el estado estacionario.

Índice

1. Descripción del problema.

Calcularemos la temperatura en el interior de una lámina metálica circular de radio 1 m cuya periferia se halla a 100 C^o en el primer y tercer cuadrante (según mi DNI).

La ecuación que describe la variación de la temperatura u con las coordenadas espaciales y el tiempo es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad D = \kappa/c\rho$$

Como en el estado estacionario se cumple que $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, la ecuación anterior se escribe como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Ecuación equivalente a la ecuación de Laplace pero para la temperatura, que se resolverá con los métodos estudiados para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo elíptico.

Si $u_{i,j}$ es la temperatura en los puntos (x_i, y_j) y discretizamos las derivadas parciales de forma que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}$$

Si hacemos $h_x = h_y$, sustituimos en la ecuación de Laplace y despejando $u_{i,j}$

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1}u_{i,j-1})$$

Este resultado se puede mejorar aplicando sobrerrelajación sucesiva encontrando un ω óptimo.

Una vez planteado el problema queda introducir las condiciones de contorno, este problema se ha resuelto en coordenadas cartesianas, por lo que para las condiciones de contorno se ha definido

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Se proponen unas temperaturas en todo el mallado para comenzar las iteraciones y se imponen las condiciones de contorno.

- Si $r = 1,\ x > 0,\ y > 0$ 1^{er} cuadrante $\rightarrow$ $u_{i,j} = 100$
- Si $r = 1,\ x < 0,\ y > 0$ 2^o cuadrante $\rightarrow$ $u_{i,j} = 0$
- Si $r = 1,\ x < 0,\ y < 0$ 3^{er} cuadrante $\rightarrow$ $u_{i,j} = 100$
- Si $r = 1,\ x > 0,\ y > 0$ 4^o cuadrante $\rightarrow$ $u_{i,j} = 0$

2. Resultados.

Tras resolver el problema con $N_x = 500$ y $N_y = 500$ el número de puntos en x y en y para hacer el mallado se ha obtenido la siguiente distribución de temperaturas en la placa metálica.

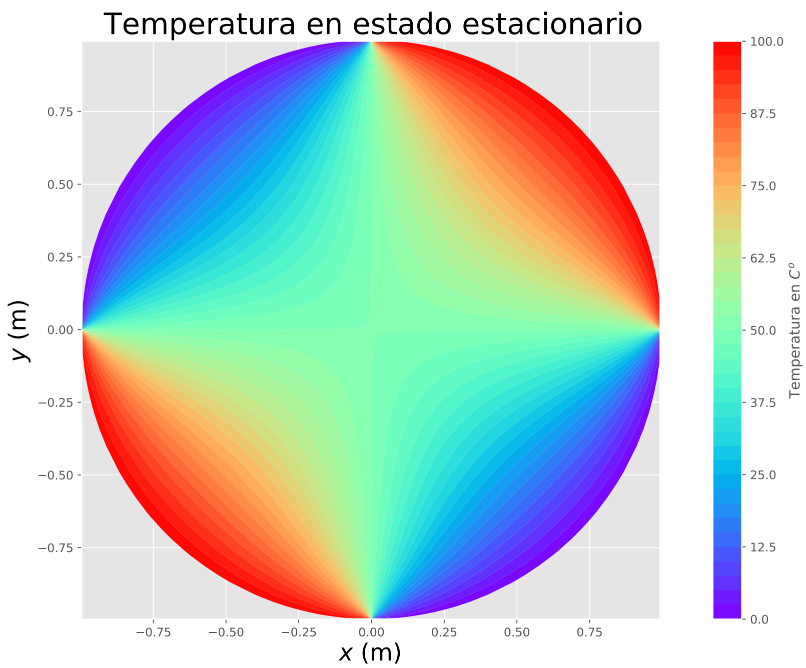

Figura 1: Distribución de temperatura de la placa circular en estado estacionario.

Como se aprecia en la representación, los colores en la escala indican la temperatura en grados C^o, y por tanto en los bordes de los cuadrantes 1 y 2 la temperatura es de 100 grados como así lo indicaban las condiciones de contorno.

Por otra parte en los cuadrantes 2 y 4 la temperatura es 0, como así estaban impuestas en las condiciones de frontera del problema. En el resto de la placa se puede ver como la temperatura se va disipando hacia el centro alcanzándose los 50 C^o en el punto $(0, 0)$.

3. Lineas isotermas.

Queda preguntarnos entonces cuales son los lugares geométricos de la placa que tienen igual temperatura, para eso se representan las líneas isotermas.

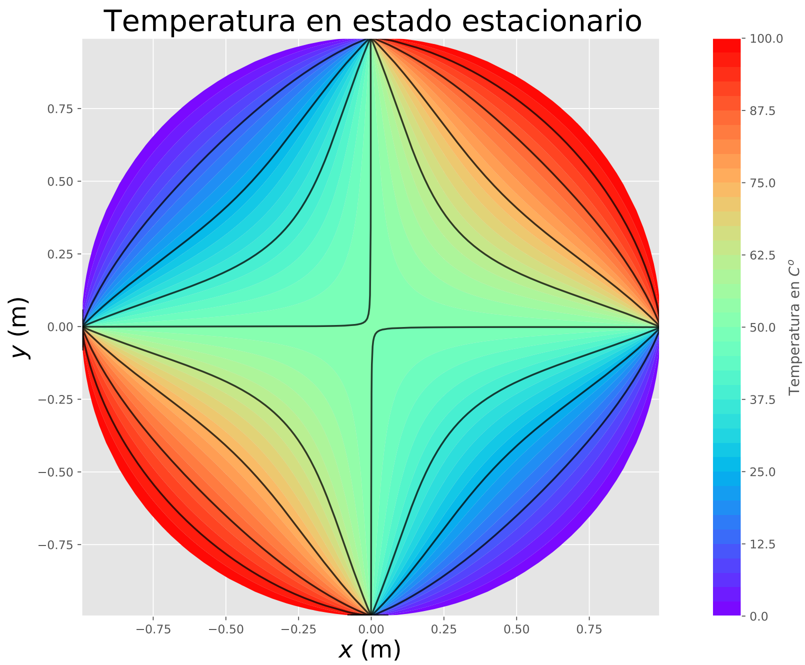

Figura 2: Lineas isotermas en la placa en estado estacionario.

Es interesante ver en que puntos la placa tiene la misma temperatura, se puede ver que cerca de la periferia del círculo las líneas isotermas tienden a tener la forma geométrica del círculo, mientras que para valores más pequeños del radio, estas líneas cambian de tendencia y son mas curvadas hacia el sentido opuesto. esto es porque la temperatura se está viendo afectada por los bordes que están a 0 C^o.

4. Representación 3D.

Podemos ahora representar los datos de forma tridimensional, de forma que en el eje x estén los datos de la variable x, en el eje y los datos de la variable y y en el eje z los datos de temperatura.

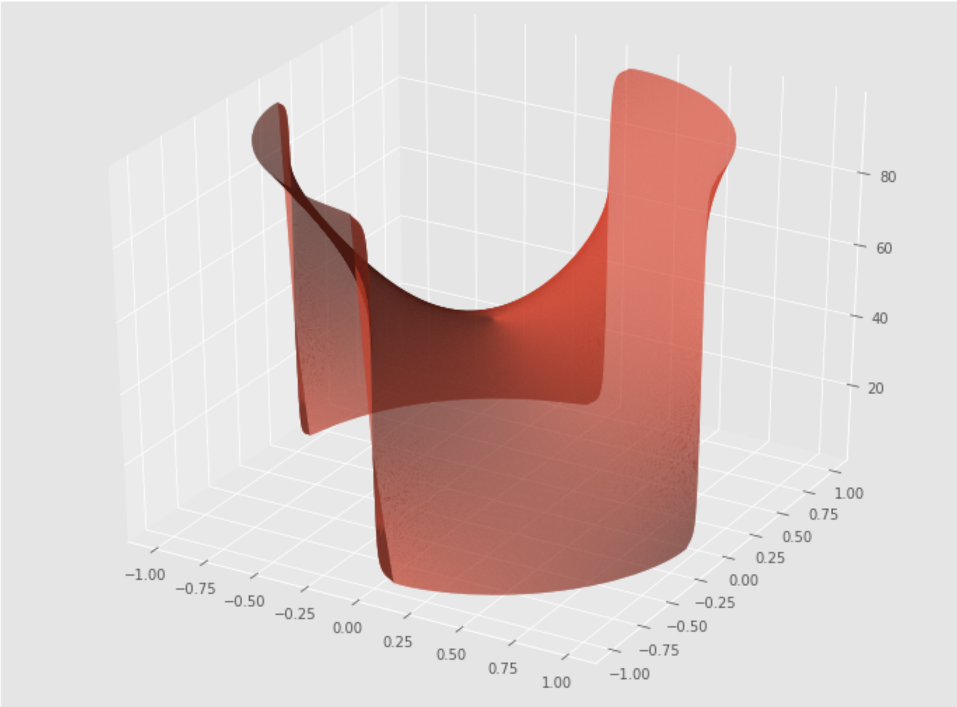

Figura 3: Representación tridimensional de las variables x, y, $u(x, y)$.

Se puede ver claramente como la temperatura se distribuye a lo largo del espacio cumpliendo las condiciones de contorno.

Si nos fijamos en los cuadrantes que están a 100 C^o, conforme nos acercamos al centro de la placa la temperatura disminuye de forma pronunciada al principio y más suavemente cerca del centro.

5. Conclusiones.

Este tipo de ejercicios me parecen de gran interés por sus aplicaciones. Hasta ahora este tipo de problemas se habían resuelto analíticamente mediante funciones de *Green* y ahora mediante los métodos numéricos podemos obtener soluciones a cualquier tipo de problema de contorno, si bien es cierto que la dificultad depende mucho de las condiciones de frontera que se nos presenten y de la geometría del mallado que queramos obtener.

En cuanto a la eficiencia del método, se diferencia en otros problemas en la cantidad de datos que debemos manejar para obtener un buen resultado.