



# FÍSICA COMPUTACIONAL

ALEJANDRO PUJANTE PÉREZ  
49248019 M

---

## Ejercicio 3-52-app

---

### Breve descripción:

En este ejercicio obtendremos el potencial creado por una distribución de carga dada y lo compararemos con el potencial creado por una carga puntual.

## Índice

1. Problema a resolver.	2
2. Planteamiento del problema.	2
3. Potencial $V$ .	5
4. Carga puntual y error relativo.	7
5. Comparación de potenciales.	8
6. Conclusiones.	9

## 1. Problema a resolver.

Calcularemos el potencial producido por una carga  $Q = 5$  a.u. distribuida uniformemente sobre un cuadrante de círculo cuyo radio es  $r = 1,5$  a.u. en función de la distancia  $z$  a lo largo de la vertical que pasa por el centro de carga (análogo al centro de masa) de la distribución.

También obtendremos a partir de qué distancia  $z$ , el potencial eléctrico de la distribución difiere en menos del 1 % respecto del potencial creado por la carga  $Q$  situada en el centro de carga.

## 2. Planteamiento del problema.

Antes de calcular el potencial, vamos a dar el resultado del punto del centro de carga (análogo al centro de masas) del cuadrante de círculo.

Calcularemos los puntos  $x_{CM}$ ,  $y_{CM}$  en el plano según las expresiones para calcular el centro de masas de una distribución continua utilizando coordenadas polares.

$$x_{CM} = \frac{\int_S x ds}{\int_S ds} = \frac{\int_0^r \int_0^{\pi/2} r \cos \theta r dr d\theta}{\int_0^r \int_0^{\pi/2} r dr d\theta} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$y_{CM} = \frac{\int_S y ds}{\int_S ds} = \frac{\int_0^r \int_0^{\pi/2} r \sin \theta r dr d\theta}{\int_0^r \int_0^{\pi/2} r dr d\theta} = \frac{4r}{3\pi}$$

El potencial  $V$  producido por una distribución acotada de carga, encerrada en una superficie  $S'$  viene dado por:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' \quad \text{Voltios}$$

Donde  $\vec{r}'$  es el vector que va desde el origen de coordenadas hasta cada uno de los puntos de la superficie cargada,  $\vec{r}$  es el vector que va desde el origen de coordenadas hasta los puntos donde queremos calcular el potencial  $V$  y  $\sigma(\vec{r}')$  es la densidad de carga superficial.

Se pide calcular el potencial a lo largo de la vertical que pasa por el centro de carga, para simplificar el problema tomaremos como centro del sistema de referencia el centro de carga del cuadrante de círculo y unidades atómicas ( $1/4\pi\epsilon_0 = 1$ ).

En nuestro caso trabajaremos en coordenadas cartesianas, de forma que

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= x\hat{i} + y\hat{j} \\ \vec{r} &= z\hat{k} \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}$$

La integral del potencial queda ahora, puesto que la densidad superficial de carga  $\sigma' = \frac{5}{\pi r^2/4}$  a.u. es constante y  $ds'$  en coordenadas cartesianas es  $ds' = dxdy$ .

$$V = \sigma' \int_{S'} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdy \quad \text{a.u.}$$

Queda entonces obtener los límites de integración para la superficie. Recordemos que el centro del sistema de referencia lo hemos puesto en el punto  $P_0 = (\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi})$ .

Los límites para la variable  $x$  es sencillo, ya que que el cuadrante de círculo (en el sistema de referencia considerado) va desde  $x = -\frac{4r}{3\pi}$  hasta  $x = r - \frac{4r}{3\pi}$ .

Los límites de la variable  $y$  van desde  $y = -\frac{4r}{3\pi}$  hasta los valores de la circunferencia, que son una función de  $x$  puesto que están delimitados por el contorno del cuadrante de círculo.

Para obtener la función de  $x$  hasta la que debemos integrar  $y$ , consideremos la ecuación de un círculo centrado en el punto  $(x_0, y_0)$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Ahora bien, nuestro círculo según nuestro sistema de referencia está centrado en el punto  $(-\frac{4r}{3\pi}, -\frac{4r}{3\pi})$ , por tanto, la ecuación quedará:

$$\left(x + \frac{4r}{3\pi}\right)^2 + \left(y + \frac{4r}{3\pi}\right)^2 = r^2$$

Si despejamos  $y$  en función de  $x$  obtenemos

$$\left(y + \frac{4r}{3\pi}\right)^2 = r^2 - \left(x + \frac{4r}{3\pi}\right)^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - \left(x + \frac{4r}{3\pi}\right)^2} - \frac{4r}{3\pi}$$

Ecuación que corresponde al límite superior de la variable  $y$ . Para una mejor visualización se ha representado un diagrama con el problema y el sistema de referencia dado.

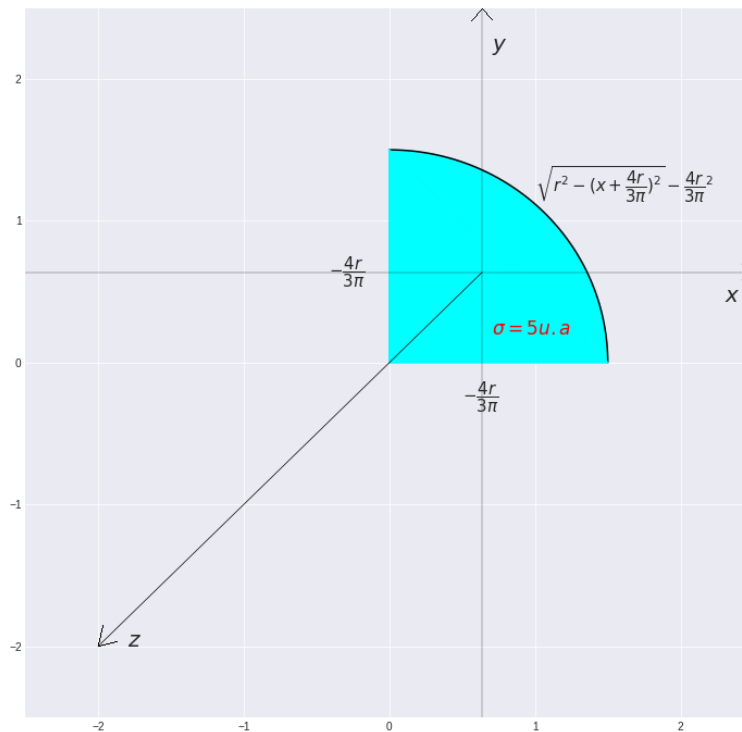


Figura 1: Representación geométrica del problema.

### 3. Potencial $V$ .

Calculados los límites de integración para la variable  $x$  y la variable  $y$ , el potencial creado por la distribución de carga en el eje  $z$  queda como:

$$V = \sigma' \int_{-\frac{4r}{3\pi}}^{r-\frac{4r}{3\pi}} \int_0^{\sqrt{r^2 - \left(x + \frac{4r}{3\pi}\right)^2} - \frac{4r}{3\pi}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy \quad \text{a.u.}$$

El procedimiento para calcular numéricamente esta integral doble dado un valor de  $z$  es el habitual, en mi caso he utilizado la regla de Simpson, tendremos que calcular

$$V = \int_{-\frac{4r}{3\pi}}^{r-\frac{4r}{3\pi}} h(x) dx$$

pero ahora hay que tener en cuenta que la función  $h(x)$  está definida mediante otra integral, que depende de la variable  $x$  a través del integrando  $f(x, y)$ .

$$h(x) = \int_{-\frac{4r}{3\pi}}^{\sqrt{r^2 - \left(x + \frac{4r}{3\pi}\right)^2} - \frac{4r}{3\pi}} f(x, y) dy \quad \text{siendo} \quad f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Para obtener los valores de  $h(x)$  hay que recurrir de nuevo al método de Simpson e integrar respecto de la variable  $y$ .

Una vez se obtiene el valor del potencial resolviendo la integral doble mediante métodos numéricos para un valor de  $z$ , queda entonces estudiarlo desde valores de  $z$  pequeños, es decir, cerca de la distribución de carga, hasta valores lejanos.

Para ello he realizado un bucle donde se recorren valores de  $z$  en un dominio cercano a la distribución y otro caso donde se recorren valores lejanos a  $z$  para poder visualizar mejor el comportamiento del potencial.

Una vez recogidos los datos del potencial en función de la distancia lo representamos y obtenemos lo siguiente:

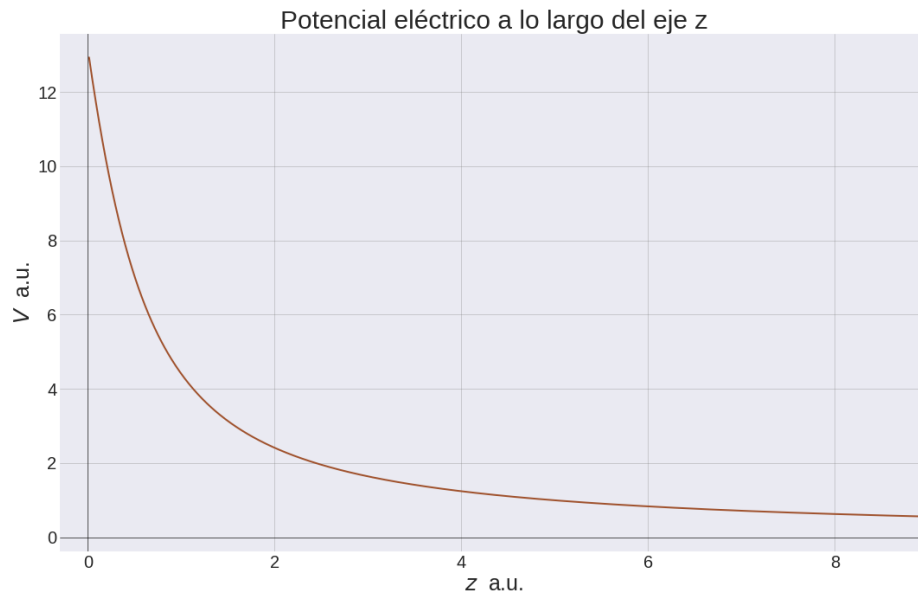


Figura 2: Potencial eléctrico a lo largo del eje  $z$ .

Se puede ver que tiene la tendencia esperada de un potencial eléctrico, para valores pequeños de  $z$  es elevado y decae rápidamente con la distancia al eje  $z$ .

Para valores más elevados de  $z$  tiende a 0 como cabe esperar.

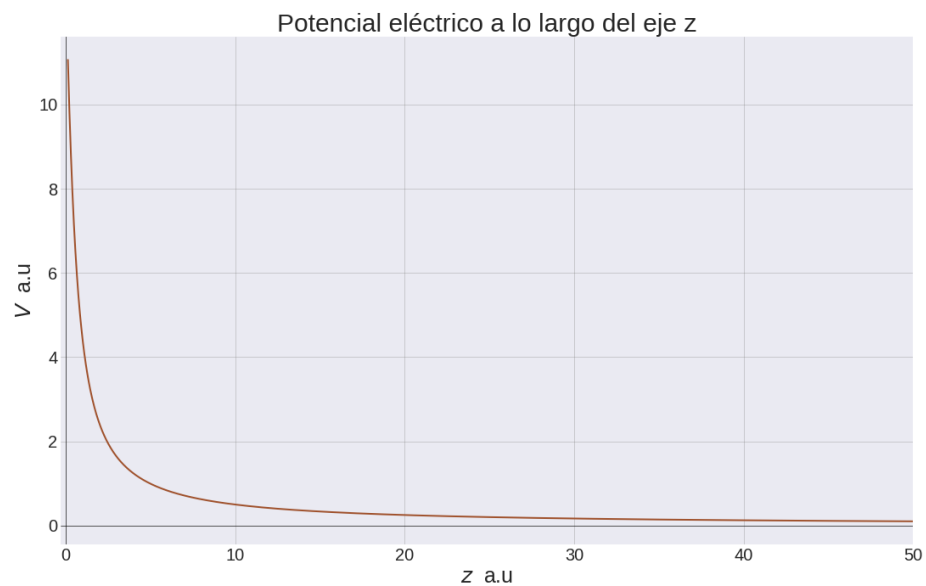


Figura 3: Potencial eléctrico a lo largo del eje  $z$  en un dominio amplio.

## 4. Carga puntual y error relativo.

Se pide ahora estudiar el valor de  $z$  para el cual el potencial eléctrico de la distribución difiere en menos del 1 % respecto del potencial creado por la carga  $Q = 5$  a.u. situada en el centro de carga.

El potencial eléctrico creado por la carga puntual (que llamaremos  $V'$ ) situada en el centro de coordenadas según el sistema de referencia adoptado y en unidades atómicas es:

$$V' = \frac{Q}{z} \quad \text{a.u.}$$

Estamos interesados entonces en conocer cuando el error relativo es del 1 %, esto es

$$\frac{|V - V'|}{V'} = 0.01$$

Para resolver este problema he definido en mi programa una variable para el error relativo entre los dos potenciales según la expresión anterior, y dentro del bucle iterativo donde se calculan los dos potenciales he utilizado una sentencia if para indicarle al programa que cuando el error relativo sea menor o igual que 0.01 se detenga y escriba el valor de  $z$  para el cual se ha cumplido la condición.

Para este apartado he discretizado más el intervalo de  $z$  reduciendo el paso tomando más valores de  $z$ , con esto se consigue mayor precisión.

Una vez realizado esto, he obtenido que el valor de la distancia en el eje para el cual los dos potenciales difieren en menos del 1 % es

$$\boxed{z = 3.923} \quad \text{a.u.}$$



## 5. Comparación de potenciales.

Queda entonces preguntarnos cómo cambian estos potenciales entre ellos, para ello se han representado en una gráfica en función de  $z$ .

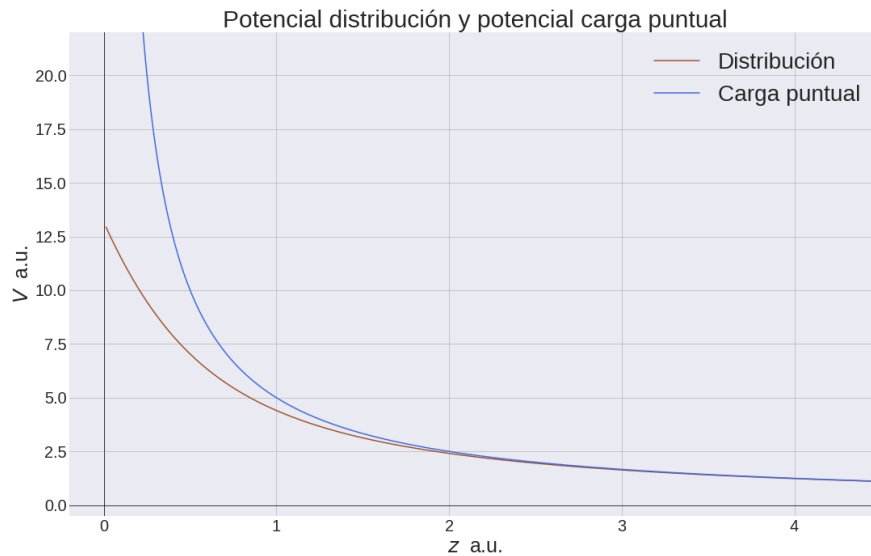


Figura 4: Potencial eléctrico producido por la distribución y por la carga puntual.

Como cabe esperar, los dos potenciales tienden a igualarse conforme  $z$  aumenta, también podemos hacer este análisis si representamos la diferencia entre los dos potenciales (en error relativo) en función de  $z$ .

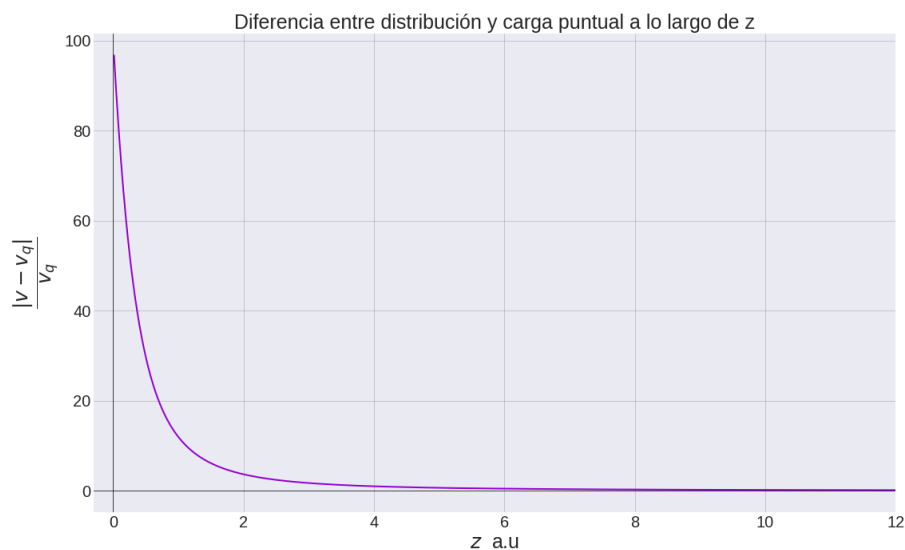


Figura 5: Diferencia en valor relativo de los dos potenciales según aumenta  $z$ .

Para valores cercanos a la distribución los potenciales difieren considerablemente como es de esperar puesto que geoméricamente son muy diferentes si los miramos de cerca.

Conforme  $z$  aumenta, la diferencia converge a 0 ya que la distribución superficial de carga se comporta como una carga puntual cuando la distancia tiende a infinito.

## 6. Conclusiones.

Calcular potenciales eléctricos analíticamente de distribuciones que no tengan cierta simetría y en puntos que no sean muy concretos (sobre ejes de rotación, etc...) es por lo general muy complicado.

Este ejercicio es un claro ejemplo de que los métodos numéricos tienen una gran potencia en el sentido de que nos permiten calcular, en este caso, el potencial eléctrico producido por prácticamente cualquier distribución de carga, incluso si no fuese uniforme, en puntos de alrededor aplicando un poco de geometría, lo que quizá haya sido más complicado del problema, su planteamiento geométrico.