UNIVERSIDAD DE MURCIA

FÍSICA COMPUTACIONAL

Alejandro Pujante Pérez
49248019 M

Ejercicio 4-76-app

Breve descripción:

En este ejercicio se estudiará la evolución de un sistema de depredadores que se alimentan de la misma presa.

Índice

1. Problema a resolver.

El sistema de ecuaciones diferenciales que sigue un sistema formado por dos poblaciones de depredadores D_1 y D_2 que se alimentan de la misma población de presas p es el siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= ap\left(1-\frac{p}{k}\right) - (b_1D_1 + b_2D_2)p \\ \frac{dD_1}{dt} &= \epsilon_1 b_1 p D_1 - m_1 D_1 \\ \frac{dD_2}{dt} &= \epsilon_2 b_2 p D_2 - m_2 D_2\end{aligned}$$

Donde a=0.1, k=1.5, b_1=0.11, m_1=0.12, ϵ_1=1.1, b_2= 0.25, m_2=0.17, ϵ_2=2.4.

Y las condiciones iniciales del problema son $p(0) = D_2(0)$ =1.7 y D_1=1.

La presa p tiene alimento indefinido, mientras que los depredadores D_1, D_2 van alimentándose de las presas.

Este sistema de ecuaciones se ha resuelto por el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) y utilizando la notación de funciones $y_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. Nuestro sistema queda entonces

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= ay_1\left(1-\frac{y_1}{k}\right) - (b_1y_2 + b_2y_3)y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \epsilon_1 b_1 y_1 y_2 - m_1 y_2 \\ \frac{dy_3}{dt} &= \epsilon_2 b_2 y_1 y_3 - m_2 y_3\end{aligned}$$

Queda entonces resolver este sistema de 3 ecuaciones con tres funciones y_i en función del tiempo.

2. Evolución temporal.

Se pide la evolución de las tres poblaciones en función del tiempo en unidades de tiempo (t.u.) ya que no se indica la unidad temporal, para ello una vez resuelto el sistema podemos representar conjuntamente las poblaciones.

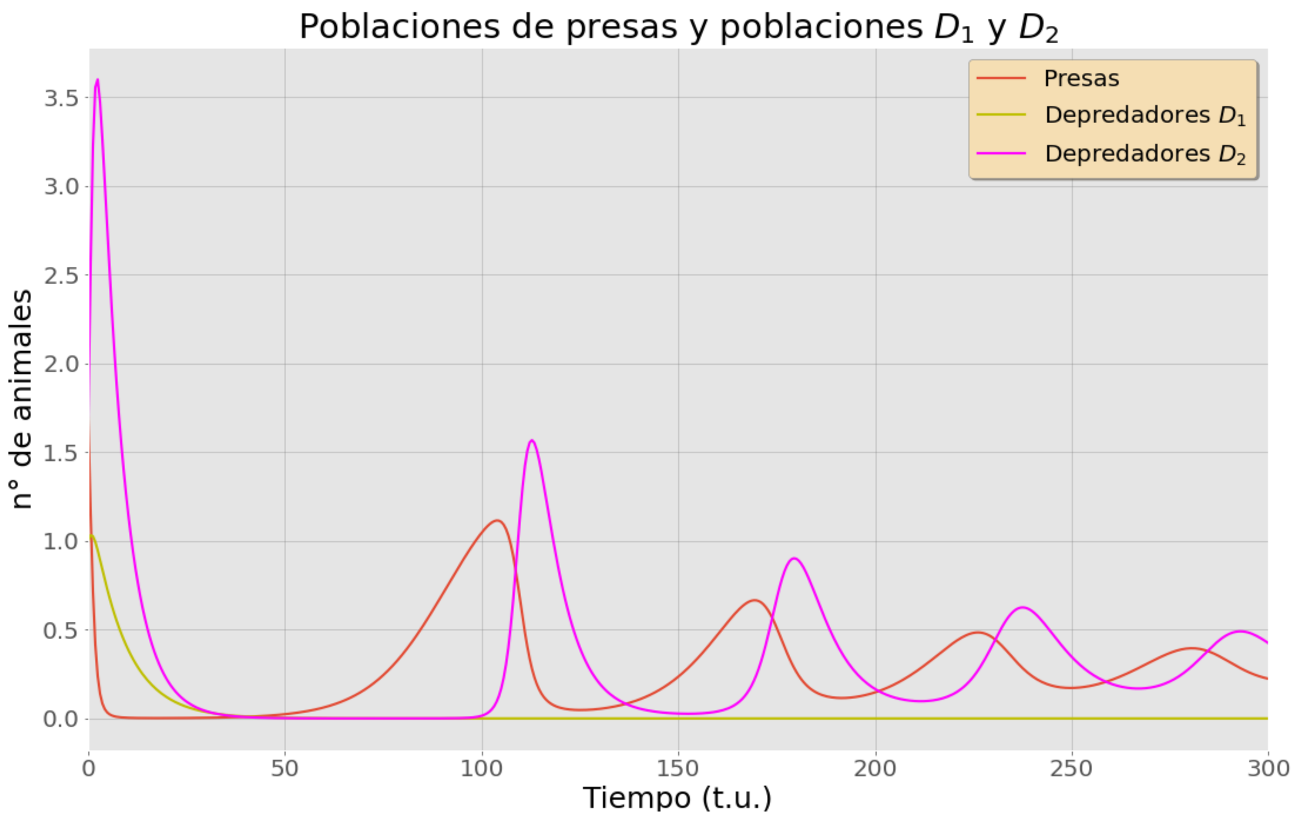

Figura 1: Evolución temporal de poblaciones p, D_1, D_2.

Como se aprecia en la representación, al principio las poblaciones de depredadores se alimentan rápidamente de las presas, por lo que estas mueren y desaparecen muy rápido, como consecuencia los depredadores no pueden alimentarse de la población de presas y más tarde mueren.

Una vez las 3 poblaciones están prácticamente a 0, al no haber depredadores, la población de presas empieza a reproducirse y crece, ahora mientras que la población D_1 no vuelve a crecer nunca más, la población de depredadores D_2 vuelve a crecer cuando hay un número suficiente de presas.

A partir de este momento la población de presas p y la de depredadores D_2 se mantienen oscilando de manera que cuando los depredadores crecen, las presas mueren y poco después los depredadores también puesto que no tienen como alimentarse, y cuando las presas vuelven a crecer ya que no había depredadores, estos se vuelven a alimentar de ellas y se vuelve al mismo punto.

3. Población de equilibrio.

Podemos preguntarnos ahora si estas poblaciones tienden a algún punto de equilibrio, eso significaría que las derivadas de las poblaciones son 0, puesto que tienen un valor constante, entonces

$$\frac{dp}{dt} = 0 = ap\left(1 - \frac{p}{k}\right) - (b_1 D_1 + b_2 D_2)p$$
$$\frac{dD_1}{dt} = 0 = \epsilon_1 b_1 p D_1 - m_1 D_1$$
$$\frac{dD_2}{dt} = 0 = \epsilon_2 b_2 p D_2 - m_2 D_2$$

Podemos suponer que la población D_1=0 puesto que decrece muy rápido y no vuelve a crecer nunca más, y de la tercera ecuación se sabe que

$$0 = \epsilon_2 b_2 p D_2 - m_2 D_2 \quad \rightarrow \quad m_2 D_2 = \epsilon_2 b_2 p D_2$$

$$p = \frac{m_2}{\epsilon_2 b_2} = 0{,}283$$

Sabemos que la población de presas tiende a $p = 0{,}283$, sustituyamos ahora en la primera ecuación para obtener D_2.

$$\frac{dp}{dt} = 0 = ap\left(1 - \frac{p}{k}\right) - (b_1 D_1 + b_2 D_2)p \quad \rightarrow \quad ap\left(1 - \frac{p}{k}\right) = b_2 D_2 p$$

$$D_2 = \frac{a\left(1 - \frac{p}{k}\right)}{b_2} = 0{,}324$$

Por tanto las poblaciones de equilibrio son p=0.283, D_1=0, D_2=0.324

Esta es una forma de obtener las poblaciones de equilibrio de manera analítica mediante el sistema de ecuaciones diferenciales dado, pero si representamos la evolución temporal de nuevo para un mayor dominio del tiempo t podemos comprobarlo también gráficamente.

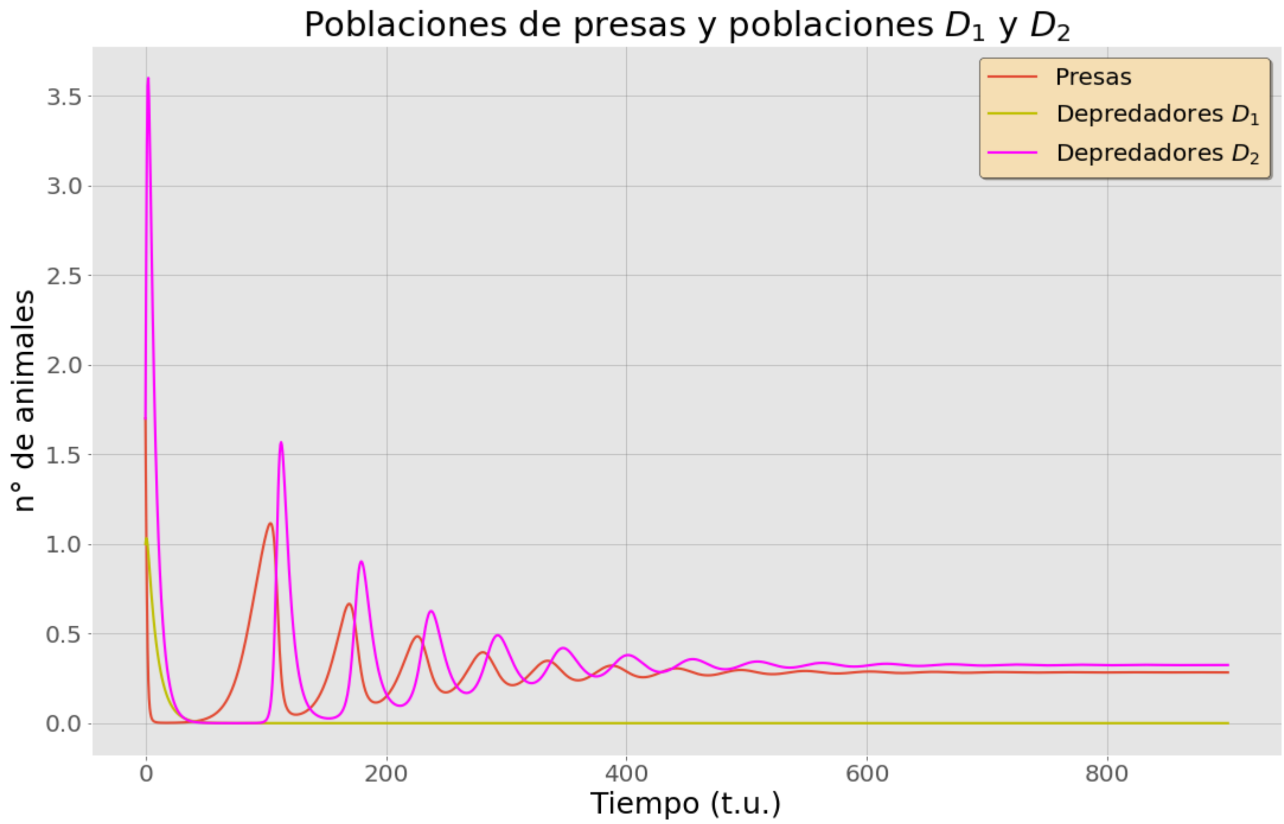

Figura 2: Evolución temporal de poblaciones p, D_1, D_2 para un mayor dominio del tiempo.

Como se había demostrado analíticamente, gráficamente también se puede comprobar que cuando t crece, las poblaciones tienden a dichos puntos de equilibrio.

También se ha comprobado mediante los datos obtenidos del programa (archivo *.dat*) donde se resuelven las ecuaciones diferenciales por tanto quedan corroborados los puntos de equilibrio de las poblaciones.

4. Ecuaciones Lotka-Volterra.

Qué parámetros debemos variar para que las ecuaciones diferenciales anteriores correspondan al sistema de una presa y un solo depredador D_1 que habitualmente se describe mediante la forma estándar de las ecuaciones de Lotka-Volterra.

$$\frac{dp}{dt} = \alpha_1 p - \beta_1 pD$$

$$\frac{dD}{dt} = -\alpha_2 D + \beta_2 pD$$

donde α_i y β_i son parámetros característicos del sistema.

Para reducir el sistema de 3 ecuaciones a un sistema de 2 ecuaciones sumaremos las dos últimas ecuaciones y haciendo el cambio

$$\epsilon_1 b_1 = \epsilon_2 b_2 \quad ; \quad m_1 = m_2$$

nos queda el sistema

$$\frac{dp}{dt} = ap\left(1 - \frac{p}{k}\right) - b_1 Dp$$
$$\frac{dD}{dt} = \epsilon_1 b_1 pD - m_1 D$$

Ya hemos reducido el sistema de 3 a 2 ecuaciones, para ahora obtener las ecuaciones de Lotka-Volterra hay que hacer el parámetro k muy grande ($k \to \infty$) para que el término p/k se anule, de manera que nos queda el sistema

$$\frac{dp}{dt} = ap - b_1 D$$
$$\frac{dD}{dt} = \epsilon_1 b_1 pD - m_1 D$$

Y para llegar finalmente al sistema de las ecuaciones de Lotka-Volterra los parámetros $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = m_1$, $\beta_1 = b_1$, y $\beta_2 = \epsilon_1 b_1$, de esta forma hemos llegado al sistema propuesto

$$\frac{dp}{dt} = \alpha_1 p - \beta_1 pD$$
$$\frac{dD}{dt} = -\alpha_2 D + \beta_2 pD$$

5. Representación presa depredador.

Se pide ahora que se resuelva el sistema de 3 ecuaciones con los parámetros del apartado anterior.

Si del sistema principal cambiamos los parámetros según el apartado anterior, es decir $\epsilon_1 = \epsilon_2$, $b_1 = b_2$, $m_1 = m_2$ y el parámetro k muy grande comparado con los demás ($k \to \infty$) y representamos la población p y D_1, es decir, una presa y un solo depredador tenemos como resultado la siguiente representación.

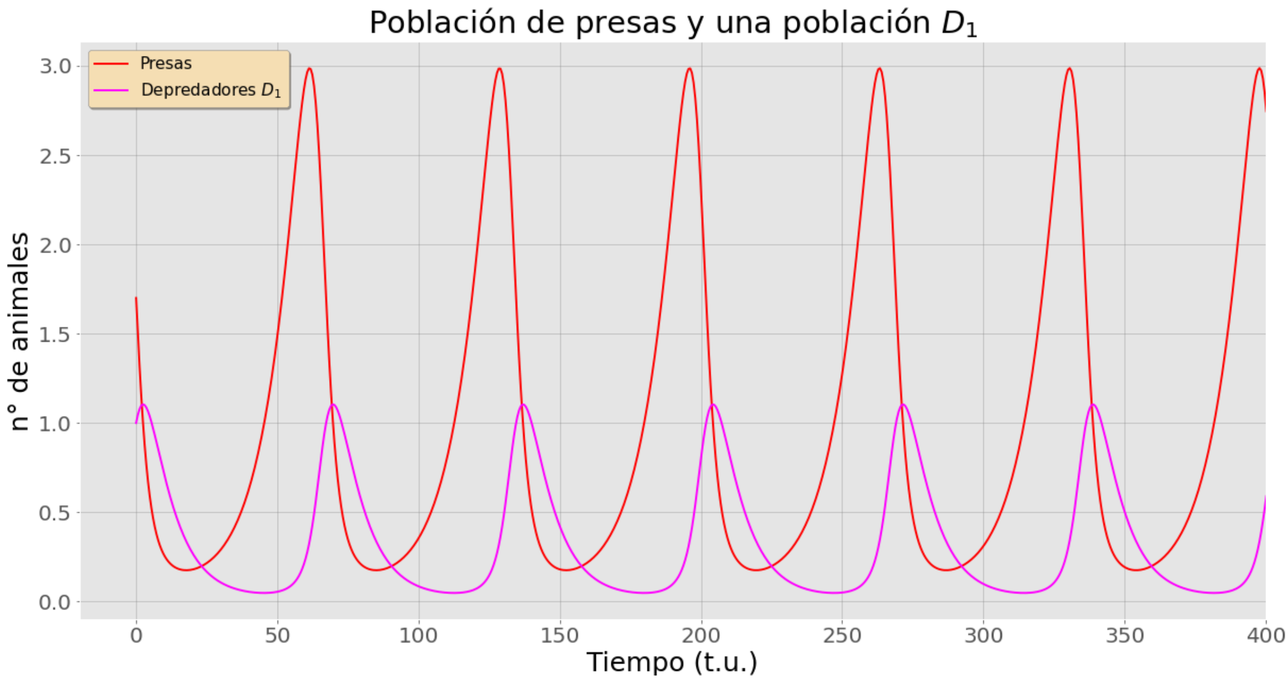

Figura 3: Evolución temporal de poblaciones p, D_1 una presa y un depredador.

Como se se ve en la gráfica, las dos poblaciones van oscilando sin parar, de forma que cuando las presas crecen, los depredadores acaban con ellas y más tarde los depredadores descienden puesto que no tienen de que alimentarse, así se completan ciclos completos.

También podemos representar el diagrama de fases para la solución de una presa y un depredador para ver que es una curva cerrada.

Figura 4: Diagrama de fases de las poblaciones p y D_1.

Ahora se va a representar la misma población de presas p y depredadores D_1 haciendo $k = 1{,}5$.

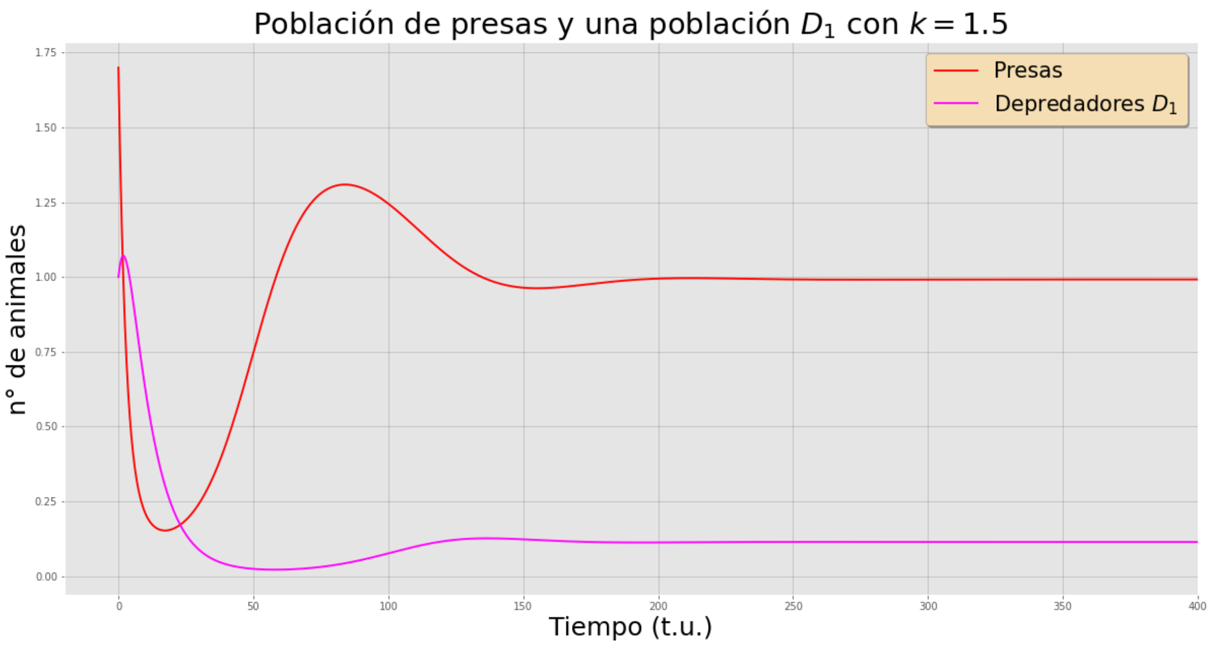

Figura 5: Diagrama de fases de las poblaciones p y D_1.

Se puede ver que si no hacemos $k \to \infty$ las poblaciones convergen rápidamente a un punto de equilibrio.

6. Conclusiones.

La mayoría de los procesos en la naturaleza están descritos por modelos de ecuaciones diferenciales, movimientos de sistemas, reacciones químicas, modelos epidémicos... Mediante el algoritmo de Runge-Kutta podemos solventar estos problemas de manera muy fácil y hacer un manejo y una interpretación de ellos de una forma muy sencilla.