1 Preuves à l'aide des tables de vérité

Exercice 1 *Montrez que $\varphi_1 \models \varphi_2$ pour :*

(a) $\varphi_1 = A \rightarrow B \wedge \neg B$, $\varphi_2 = \neg A$

(b) $\varphi_1 = A$, $\varphi_2 = B \rightarrow A \wedge B$

(c) $\varphi_1 = A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $\varphi_2 = A \wedge B \rightarrow C$

(d) $\varphi_1 = A \wedge \neg B$, $\varphi_2 = \neg A \rightarrow C \vee A$

Exercice 2 *Montrez que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$ pour :*

(a) $\varphi_1 = (A \vee \neg B) \wedge \neg (\neg B \wedge A)$, $\varphi_2 = \neg A \leftrightarrow \neg B$

(b) $\varphi_1 = (A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B)$, $\varphi_2 = A \vee C \rightarrow B$

2 Détermination de formules propositionnelles

Exercice 3 *Trouver une formule à 3 lettres propositionnelles dont chaque modèle contient exactement deux lettres sur les trois.*

Variante : trouver une formule à 3 lettres propositionnelles dont chaque modèle contient un ou deux lettres sur les trois.

3 Connecteurs et complétude

Exercice 4 *En plus des connecteurs CJ, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ et $\neg$, considérons également les connecteurs, $\uparrow$, $\downarrow$, $\leftarrow$, $\not\rightarrow$, $\not\leftarrow$, $\not\leftrightarrow$, définis par la table de vérité suivante :*

		$p \uparrow q$	$p \downarrow q$	$p \leftarrow q$	$p \not\rightarrow q$	$p \not\leftarrow q$	$p \not\leftrightarrow q$
1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0

Soit C l'ensemble de tous ces connecteurs. Pour chaque sous-ensemble E de C, on note $BF(E)$ l'ensemble de toutes les fonctions booléennes exprimées par des formules obtenues à partir des connecteurs de E. On notera également :

$$E_1 \preceq E_2 \quad si \quad BF(E_1) \subseteq BF(E_2)$$
$$E_1 \asymp E_2 \quad si \quad BF(E_1) = BF(E_2)$$

et on dit que $E \subseteq C$ est complet si $BF(E_1)=BF(E_2)$.

Montrez que :

(a) $\{\neg, \vee\} \asymp C$ *(c)* $\{\neg, \rightarrow\} \asymp C$ *(e)* $\{\downarrow\} \asymp C$

(b) $\{\neg, \wedge\} \asymp C$ *(d)* $\{\uparrow\} \asymp C$

4 Dualité

Exercice 5 *Définissez la table de vérité du connecteur dual de $\rightarrow$.*

Exercice 6 *Montrez que le connecteur $\circ$ est le dual du connecteur $\bullet$ si et seulement si $\bullet$ est lui-même dual de $\circ$.*

5 Formes normales

Exercice 7 (Forme Normale Disjonctive (FND ou DNF)) *Soit la formule*

$$\varphi = (x \leftrightarrow \neg\, z) \vee (\neg\, x \leftrightarrow y)$$

(a) Déterminez la FND de φ au moyen de sa table de vérité.
(b) Déterminez une FND de φ par développement.
Question : Comment vérifier les résultats ?
(c) Déterminez sa FND complète (c'est-à-dire sa FND où toutes les conjonctions contiennent toutes les lettres) à partir de la seconde formule.

Exercice 8 (Forme Normale Conjonctive (FNC ou CNF)) *Considérons à nouveau la formule φ de l'exercice précédent.*
(a) Déterminez une FNC de φ par développement.
(b) Déterminez une FNC de φ en utilisant le principe de dualité.
(c) Déterminez la FNCl de φ, c'est-à-dire sa Forme Normale Clausale.