

1 Méthode de Quine

Exercice 1 Prouver les équivalences suivantes :

- (a) $\varphi \rightarrow 0 \equiv \neg \varphi$
- (b) $\varphi \leftrightarrow 1 \equiv \varphi$
- (c) $1 \rightarrow \varphi \equiv \varphi$

Exercice 2 Analyser les formules suivantes par la méthode de Quine :

- (a) $(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \vee s)$
- (b) $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge s)$
- (c) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- (d) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$
- (e) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$
- (f) $(a \wedge b \vee c \wedge d) \wedge (a \rightarrow \neg a) \wedge \neg c$
- (g) $(a \vee b \rightarrow c \wedge d) \wedge (d \vee e \rightarrow f) \wedge (a \wedge \neg f)$
- (h) $p \wedge \neg q \vee r \rightarrow s \wedge \neg p$

Exercice 3 Prouvez par la méthode de Quine :

- (a) $\{w \vee p \rightarrow i; i \rightarrow c \vee s; s \rightarrow u; \neg c \wedge \neg u\} \models \neg w$
- (b) $\{a \rightarrow (b \rightarrow c); a \vee d; b\} \models d \rightarrow c$
- (c) $\{(a \rightarrow b) \wedge (d \vee \neg c); b \rightarrow e; d \rightarrow f; \neg (e \wedge f); a \rightarrow c\} \models \neg a$
- (d) $\{a \rightarrow (b \wedge c); \neg b \vee d; (e \rightarrow \neg f) \rightarrow \neg d; b \rightarrow (a \wedge \neg e)\} \models b \rightarrow e$
- (e) $x \equiv x \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \neg z \vee x \wedge \neg y \wedge z \vee x \wedge \neg y \wedge \neg z$

Exercice 4 Prouvez que $\varphi^{(m)} = a_1 \wedge b_1 \vee \dots \vee a_m \wedge b_m$ s'agrandit jusqu'à atteindre $\mathcal{O}(m.2^m)$ après avoir été transformée en sa FNC.

2 Méthode des tableaux

Exercice 5 Démontrez, par la méthode des tableaux, que :

- (a) $\models (p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \vee s)$
- (b) $\models (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge s)$
- (c) $\models (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- (d) $\models (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$

Exercice 6 Prouvez que :

- (a) $\varphi_1 = (a \wedge b \vee c \wedge d) \wedge (a \rightarrow \neg a) \wedge \neg c$
- (b) $\varphi_2 = (a \vee b \rightarrow c \wedge d) \wedge (d \vee e \rightarrow f) \wedge (a \wedge \neg f)$

sont des contradictions.