

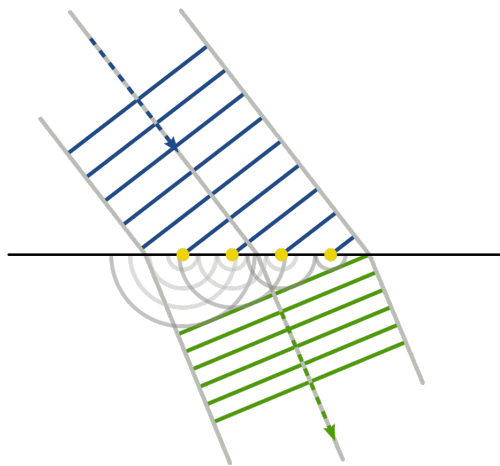
Difracción de Frounhofer

Alejandro Leví Andrade

Universidad Nacional Autónoma de México

Un cuerpo opaco colocado en medio del camino entre una pantalla y una fuente puntual proyecta una sombra complicada hecha de regiones claras y oscuras muy diferentes de las que podría esperarse de los principios de la optica geométrica. El trabajo de Francesco Grimaldi en el siglo *XVII* fue el primer estudio detallado que se publicó sobre esta desviación de luz de propagación rectilínea, a la que denominó Difracción. El efecto es una característica general de los fenómenos ondulatorios que ocurren siempre que una parte de un frente de onda, ya sea sonido, onda material o luz, esté obtruida de alguna manera. Si al encontrar un obstaculo transparente u opaco se altera la amplitud o la fase de una región del frente de onda se producirá refracción, a estos dispositivos se les denomina interferómetros. Los diversos segmentos del frente de onda que se propagan mas allá del obstaculo interfieren, para producir la distriución de densidad de energía particular denominada patrón de difracción.

En general, no hay mucha distinción entre difracción e interferencia, recordemos que la interferencia es la superposición de ondas, comunmente de pocas ondas, la difracción es de muchas ondas. Para aproximarnos al problema tomaremos el Principio de Huygens-Fresnel, el cual dice “Cada punto sin obstrucción de un frente de onda, en un instante de tiempo determinado, sirve como fuente de trenes de onda secundarios esféricos (dela misma frecuencia que la onda primaria). La amplitud del campo optico en cualquier punto mas allá es la superposición de todos estos trenes de onda”. En el caso de la refracción, asi se ve el principio de Huygens-Fresnel:



Imaginenos que tenemos una pantalla opaca que contiene una sola abertura pequeña iluminada por ondas planas de una fuente puntual muy lejana, el plano de observación es una pantalla paralela y muy cercana a la pantalla opaca. En estas condiciones se proyectará sobre la pantalla una imagen de la abertura que es claramente reconocible a pesar de tener unas pequeñas franjas que se ven alrededor de su periferia, si alejamos el plano de observación, la imagen de la abertura adquiere mas estructura mientras que las franjas se vuelven mas sobresalientes. Este fenómeno se deomina **difracción de Fresnel** o de **campo lejano**. Si se aleja aún mas el plano de observación, se producirá un cambio continuo en las franjas, a una gran distancia la distribución proyectada se habrá extendido

considerablemente, en esencia esto cambiará la distribución de las franjas pero no su forma. Esta es la **difracción de Frounhofer** o de **campo lejano**. Como el título lo revela, vamos a centrarnos en el segundo caso para observar el pantron de difracción producido a través de una rendija, esto es, pues la difracción de Frounhofer es matematicamente fácil de entender y expresar, con el solo hecho de acercar la abertura al plano de observación complica mucho el resultado ya que para el caso de Fresnel no siempre existe solución analítica para el campo difractado.

Para entender la difracción atravez de una rendija rectangular (en 2 dimensiones) primero abordaremos el problema para una rendija de alto despreciable con una distancia D de ancho (1 dimensión). Supongamos que de una fuente lineal coherente (ondas cuya diferencia de fase es constante) provienen frentes de onda hasta chocar con la abertura en cuestión lo que producirá por el principio de Huygens-Fresnel frentes de onda esféricos, puesto que la luz es una onda electromagnética. Cuando la onda se difracta al pasar la abertura, se generan infinitos frentes de onda secundarios, puesto que la condición de Frounhofer es $R \gg D$ donde R es la distancia entre la abertura y el plano de observación, tenemos que el desfase o diferencia de fase entre 2 frentes de onda será:

$$\delta = R - r_i \quad (1)$$

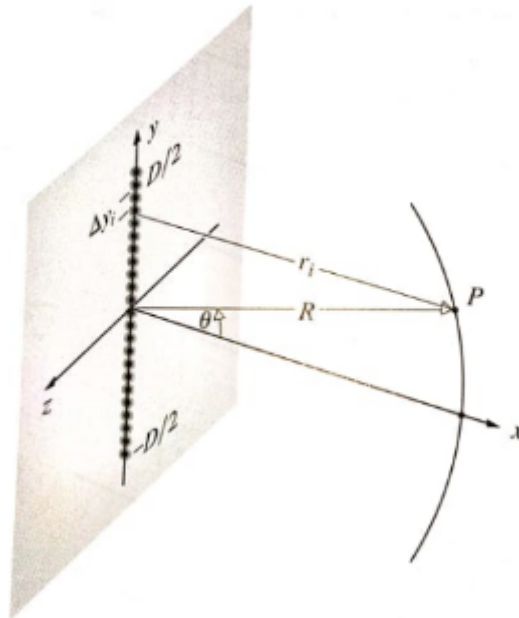
tal que r_i es función de y_i , dada la condición de Frounhofer, la trayectoria de los frentes de onda es casi paralela, por lo que la diferencia de fase la podemos calcular mediante el seno del ángulo entre el vector normal al plano de observación y el vector R , es decir que si $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ entonces:

$$\delta = y_i \sin \theta \quad (2)$$

Igualando la ec. 1 y 2:

$$R - r_i = y_i \sin \theta \quad (3)$$

Gráficamente se ve como:



Despejando el valor de r_i queda:

$$r_i = R - y_i \sin \theta \quad (4)$$

Luego, al incidir frentes de onda en la abertura, estas las consideramos esféricas por lo que la ecuación de una onda esférica para el frente de onda que se genera en r_i es:

$$\Psi(r_i, t) = \frac{A}{r_i} \sin(\omega t - k r_i) \quad (5)$$

Como la distancia total recorrida por los frentes de onda hasta llegar al plano de observación es R , debemos sustituirla en la ecuación anterior en la parte de la amplitud de la onda.

$$\Psi(r_i, t) = \frac{A}{R} \sin(\omega t - kr_i) \quad (6)$$

No lo sustituimos en el argumento del seno pues esa r_i depende de la altura y_i , en cambio en la amplitud si lo hicimos pues solo es la distancia total recorrida por la onda, es decir no depende de y_i , así sustituyendo en la ecuación anterior la ecuación 4 tenemos:

$$\Psi(r_i, t) = \frac{A}{R} \sin(\omega t - k(R - y_i \sin \theta)) \quad (7)$$

La ecuación que encontramos es el campo electromagnético generado por una fuente puntual en la abertura, producida por la onda original, así que para encontrar el campo total difractado, debemos sumar todas las aportaciones hechas por todas las fuentes puntuales en la abertura a una determinada altura y_i , esto es:

$$\Psi(r, t) = \sum_{i=1}^N \frac{A}{R} \sin(\omega t - k(R - y_i \sin \theta)) \Delta y_i \quad (8)$$

Pero como tenemos infinitos frentes de onda producidos en la abertura, al tomar el límite de la partición cuando Δy_i tiende a cero nos queda la siguiente integral de Riemann:

$$\Psi(r, t) = \frac{A}{R} \int_{-D/2}^{D/2} \sin(\omega t - k(R - y \sin \theta)) dy \quad (9)$$

Resolviendo dicha integral nos queda:

$$\Psi(r, t) = \frac{AD}{R} \frac{\sin[(kD/2)\sin\theta]}{(kD/2)\sin\theta} \sin(\omega t - kR) \quad (10)$$

Si definimos a $\alpha = (kD/2)\sin\theta$ nos queda como:

$$\Psi(r, t) = \frac{AD}{R} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \sin(\omega t - kR) \quad (11)$$

Luego, la cantidad que puede medirse de forma rápida es la **Irradiancia** que se define como la norma del promedio del vector de Poyting, que se simplifica como:

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \|\Psi\|^2 \quad (12)$$

Lo anterior fue tomando en cuenta que la onda electromagnética se mueve en el vacío pues ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío y μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío. La norma al cuadrado de Ψ es el producto interior de la función consigo misma, como sabemos de Análisis Funcional, el producto interior definido en el espacio de funciones está definido como la siguiente integral:

$$\|\Psi\|^2 = \int_0^{2\pi} \Psi^2 dt \quad (13)$$

Sustituyendo el valor de Ψ :

$$\|\Psi\|^2 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{AD}{R} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \sin(\omega t - kR) \right)^2 dt \quad (14)$$

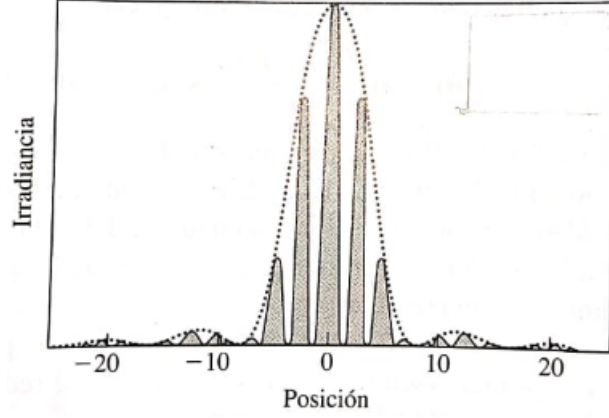
Integrando obtenemos:

$$\|\Psi\|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{AD}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (15)$$

Así, finalmente obtuvimos el patrón de difracción para una rendija de ancho D :

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \quad (16)$$

En donde $I_0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{AD}{R} \right)^2$ y $\alpha = (kD/2) \sin \theta$. A continuación se ve una gráfica de Posición-Irradiancia para una rendija de alto despreciable



Lo anterior fué para una abertura con alto despreciable, si ahora lo hacemos con una abertura rectangular, el procedimiento es muy similar al caso anterior, si consideramos a r como función de 2 variables (y, z) tal que ahora r es un vector, entonces $\vec{r} = r_y \hat{y} + r_z \hat{z}$, así como encontramos la diferencia de fase para el eje y tenemos que para el eje z :

$$r_{z_i} = R - z_i \sin \theta \quad (17)$$

Y para y

$$r_{y_i} = R - y_i \sin \theta \quad (18)$$

Así la ecuación 6 se convierte en la ecuación de una onda plana:

$$\Psi(\vec{r}_i, t) = \frac{A}{R} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}_i) \quad (19)$$

Con $\vec{r}_i = r_{y_i} \hat{y} + r_{z_i} \hat{z}$ y el número de onda k ahora también es un vector tal que $\vec{k} = k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$, si efectuamos el producto punto y expresamos a la función de onda plana en términos de una función exponencial mediante la fórmula de Euler, nos queda:

$$\Psi(\vec{r}_i, t) = \frac{A}{R} e^{[\omega t - k_y r_{y_i} - k_z r_{z_i}]i} \quad (20)$$

Sustituyendo el valor de las componentes de r_i :

$$\Psi(\vec{r}_i, t) = \frac{A}{R} e^{[\omega t - k_y (R - y_i \sin \theta) - k_z (R - z_i \sin \theta)]i} \quad (21)$$

Por lo que el campo resultante será la integral doble a lo largo de la abertura con un alto de a y un ancho de b :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{A}{R} \int \int e^{[\omega t - k_y (R - y \sin \theta) - k_z (R - z \sin \theta)]i} dS \quad (22)$$

La ecuación anterior nos es familiar pues es la transformada de Fourier de la función $F(y, z) = 1$ evaluada en los límites correspondientes, en donde $dS = dydz$. Si separamos la función exponencial respecto a cada variable nos queda:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{A}{R} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{[\omega t - k_y(R-y \sin \theta) - k_z(R-z \sin \theta)]i} dy dz \quad (23)$$

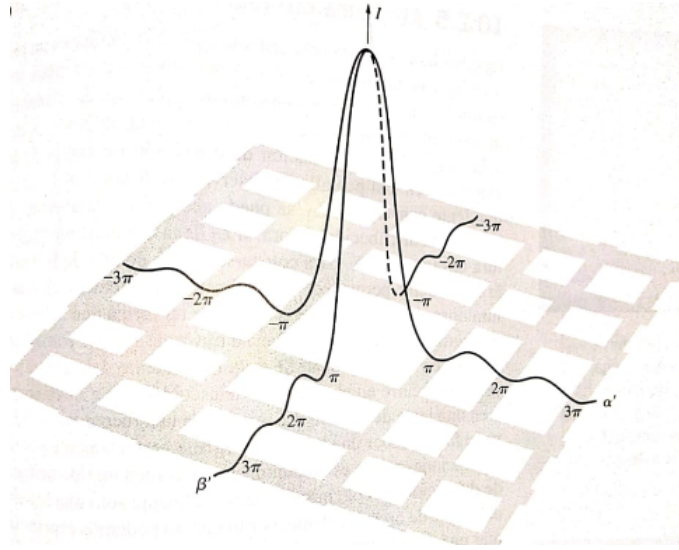
Del resultado obtenido de la ecuación 10, tenemos que el resultado de integrar dicha función exponencial al hacer la sustitución de $\alpha = (k_y a/2) \sin \theta$ y $\beta = (k_z b/2) \sin \theta$ nos queda como:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{Aab}{R} e^{(\omega t - kR)i} \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \quad (24)$$

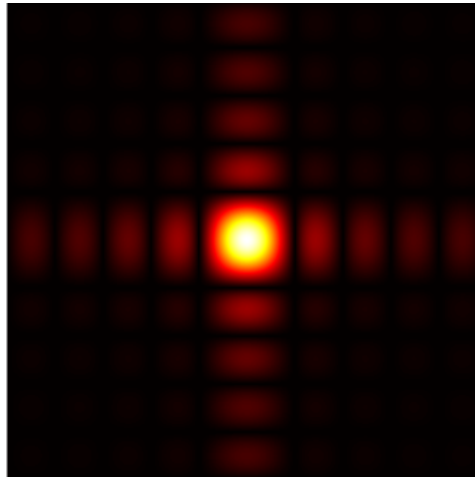
Siguiendo el mismo procedimiento de las ecuaciones 10 a 16 para cada variable, tenemos que la irradiancia total es:

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \quad (25)$$

En donde $I_0 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{Aab}{R} \right)^2$, $\alpha = (k_y a/2) \sin \theta$ y $\beta = (k_z b/2) \sin \theta$, tal que el área de la abertura es $area = ab$ y A es la amplitud original de la onda. A continuación se muestra la gráfica Posición-Irradiancia pero ahora para una abertura cuadrada:



Por lo que el patrón de difracción esperado será la proyección en el plano $Y - Z$ de la superficie resultante, pues la irradiancia esta sobre el eje X . De forma experimental, haciendo la aproximación de Frounhofer, se obtiene el siguiente patrón de difracción para una abertura cuadrada de ancho = 0.000006m y alto = 0.000006m (se sobreexpuso la imagen para distinguir con mas detalle el patrón de interferencia).



Para simular el patrón de difracción de Frounhofer, hicimos un programa en python con el compilador Visual Code Studio, para obetener dicho patrón pero de forma teórica, de tal forma que podamos comparar el resultado experimental con el teórico, el código utilizado es el siguiente:

```

from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

teta = np.linspace(-np.pi/2,np.pi/2,500)
sin_teta = np.sin(teta)
(a,b) = np.meshgrid(sin_teta,sin_teta)

#Parámetros de la abertura para un caso particular en metros

#Sí se toman valores entre 0.00009 a 0.000001 para la abertura se verá el patron,
#entre mas pequeña la abertura mejor se vera el patron de difracción
ancho = 0.000005
alto = 0.000005
x_0 = ancho/2
y_0 = alto/2
R = 10                                #distancia entre la abertura y la pantalla
A = ancho*alto                        #área de la abertura

#Parámetros de la onda electromagnética en el vacío en el SI
lamda = 7*10**(-7)                   #longitud de onda de la luz roja
k = 2*np.pi/lamda                   #número de onda
epsilon_0 = 8.8541878176*10**(-12)  #permitividad electrica
mu_0 = 4*np.pi*10**(-7)             #permeabilidad magnética

#Campo difractado e Irradiancia
alfa = x_0*k
beta = y_0*k
I_0 =(1/2)*np.sqrt(epsilon_0/mu_0)*(1/2)*(A/R)**2  #irradiancia original

def z(x, y):
    sinc_x = (np.sin(alfa*x)/(alfa*x))
    sinc_y = (np.sin(beta*y)/(beta*y))
    return I_0*(sinc_x**2)*(sinc_y**2)

fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)
ax.contourf(a,b,z(a,b),vmin=0, vmax=I_0/20,levels=1000,cmap='hot')
plt.show()

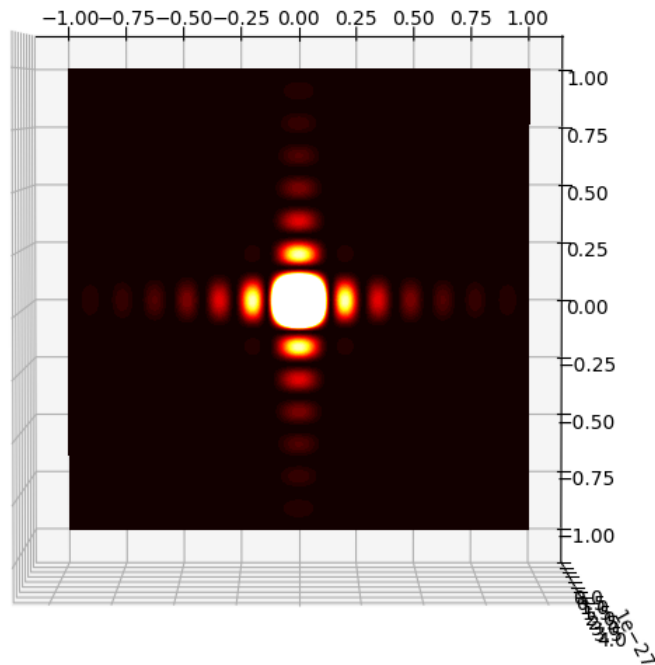
```

En dicho código supusimos que la amplitud de la onda es $A = 1$ y la variable A en el código es el área de la abertura que como sabemos en nuestra ecuación 25 es $area = ab$.

Los parámetros tomados son para un laser rojo que se difracta al pasar por una abertura de ancho $= 0.000005\text{m}$ y alto $= 0.000005\text{m}$, tal que la distancia entre el plano de observación y la abertura es $R = 10\text{m}$, por lo que la condición de Fraunhofer se cumple al tener que $R \gg ancho$ y $R \gg alto$.

La gráfica que arroja el programa es una superficie como la gráfica de la ecuación 25, así que para ver el patrón de difracción debemos de rotar la gráfica de tal forma que veamos el plano $Y - Z$ es decir, la “base” de la superficie.

El patrón de difracción resultante del código es:



Notamos que el parecido entre el resultado experimental y el teórico mediante un programa en python es muy muy similar, por lo que ahora tenemos una gran herramienta para simular patrones de interferencia de difracción de Frounhofer para aberturas rectangulares, para una abertura circular es otro tema un poco mas complicado pues el campo difractado resultante tomará en cuenta la forma integral de las funciones de **Bessel**. Por el momento nos conformamos con una abertura rectangular.