Intervalos de Confianza

Intervalos de Confianza para la Media

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población normal $n\left(\mu, \sigma^2\right)$ con media μ desconocida y varianza σ^2 conocida.

Intervalos de Confianza para la Media

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población normal $n\left(\mu, \sigma^2\right)$ con media μ desconocida y varianza σ^2 conocida.

Halle L y U tales que $P\left(L < \mu < U\right) = 1 - \alpha$, $\quad \alpha$ dado.

$$
\begin{aligned}
P\left(L < \mu < U\right) &= P\left(-U < -\mu < -L\right) \\
&= P\left(\bar{X} - U < \bar{X} - \mu < \bar{X} - L\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - U}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - L}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\mathfrak{z}_1 < Z < \mathfrak{z}_2\right) = 1 - \alpha
\end{aligned}
$$

Intervalos de Confianza

Intervalos de Confianza para la Media

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población normal $n\left(\mu, \sigma^2\right)$ con media μ desconocida y varianza σ^2 conocida.

Halle L y U tales que $P\left(L < \mu < U\right) = 1 - \alpha$, $\quad \alpha$ dado.

$$
\begin{aligned}
P\left(L < \mu < U\right) &= P\left(-U < -\mu < -L\right) \\
&= P\left(\bar{X} - U < \bar{X} - \mu < \bar{X} - L\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - U}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - L}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\mathfrak{z}_1 < Z < \mathfrak{z}_2\right) = 1 - \alpha
\end{aligned}
$$

Donde $\mathfrak{z}_1 = \frac{\bar{X} - U}{\sigma/\sqrt{n}}$ y $\mathfrak{z}_2 = \frac{\bar{X} - L}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Intervalos de Confianza

Intervalos de Confianza para la Media

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población normal $n\left(\mu, \sigma^2\right)$ con media μ desconocida y varianza σ^2 conocida.

Halle L y U tales que $P\left(L < \mu < U\right) = 1 - \alpha$, $\quad \alpha$ dado.

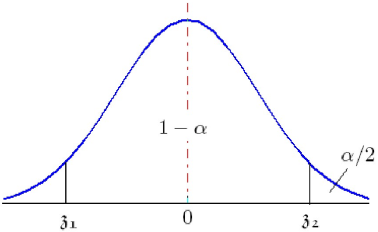
$$\begin{aligned}
P\left(L < \mu < U\right) &= P\left(-U < -\mu < -L\right) \\
&= P\left(\bar{X} - U < \bar{X} - \mu < \bar{X} - L\right) \\
&= P\left(\frac{\bar{X} - U}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X} - L}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\
&= P\left(\mathfrak{z}_1 < Z < \mathfrak{z}_2\right) = 1 - \alpha
\end{aligned}$$

Donde $\mathfrak{z}_1 = \frac{\bar{X}-U}{\sigma/\sqrt{n}}$ y $\mathfrak{z}_2 = \frac{\bar{X}-L}{\sigma/\sqrt{n}}$. Haciendo

$$P\left(Z < \mathfrak{z}_1\right) = P\left(Z > \mathfrak{z}_2\right) = \alpha/2\,.$$

Entonces $\quad \mathfrak{z}_2 = Z_{\alpha/2} \quad$ y $\quad \mathfrak{z}_1 = -Z_{\alpha/2}$.

Intervalos de Confianza

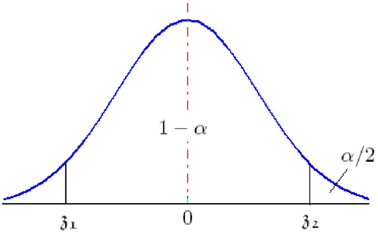


Intervalos de Confianza para la Media

Así,

$$L = \bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad U = \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ .$$

Para una muestra particular se calculan valores para L y U y de esta manera un I.C. al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ es:



Intervalos de Confianza para la Media

Así,

$$L = \bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{y} \quad U = \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ .$$

Para una muestra particular se calculan valores para L y U y de esta manera un I.C. al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ es:

$$\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{X} + Z_{\alpha/2} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \ .$$

Intervalos de Confianza

Intervalos de Confianza para la Media

Para obtener intervalos de confianza unilaterales, de la forma $(l\,,+\infty)$ o $(-\infty\,,\,\mu)$ se procede así: Halle L tal que $P(L<\mu)=1-\alpha\ ,\quad \alpha$ dado.

Intervalos de Confianza para la Media

Para obtener intervalos de confianza unilaterales, de la forma $(l\,,+\infty)$ o $(-\infty\,,\,\mu)$ se procede así: Halle L tal que $P(L<\mu)=1-\alpha$, $\quad\alpha$ dado. Este es un Intervalo unilateral superior. Ahora

$$\begin{aligned} P(L<\mu) &= P\left(-\mu<-L\right)=P\left(\bar{X}-\mu<\bar{X}-L\right) \\ &= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<\frac{\bar{X}-L}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\approx P\left(Z<\mathfrak{z}\right)=1-\alpha \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{z}=\frac{\bar{X}-L}{\sigma/\sqrt{n}}$.

Intervalos de Confianza para la Media

Para obtener intervalos de confianza unilaterales, de la forma $(l\,,+\infty)$ o $(-\infty\,,\,\mu)$ se procede así: Halle L tal que $P(L<\mu)=1-\alpha\;,\quad \alpha$ dado. Este es un Intervalo unilateral superior. Ahora

$$\begin{aligned}P(L<\mu) &= P\left(-\mu<-L\right)=P\left(\bar{X}-\mu<\bar{X}-L\right)\\ &= P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<\frac{\bar{X}-L}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\approx P\left(Z<\mathfrak{z}\right)=1-\alpha\end{aligned}$$

donde $\mathfrak{z}=\frac{\bar{X}-L}{\sigma/\sqrt{n}}$. Usando la tabla de la normal estándar $\mathfrak{z}=z_\alpha$ y así se se obtiene que $L=\bar{X}-z_\alpha\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Intervalos de Confianza para la Media

Para obtener intervalos de confianza unilaterales, de la forma $(l\,,+\infty)$ o $(-\infty\,,\mu)$ se procede así: Halle L tal que $P(L<\mu)=1-\alpha\;,\quad\alpha$ dado. Este es un Intervalo unilateral superior. Ahora

$$P(L<\mu)=P\left(-\mu<-L\right)=P\left(\bar{X}-\mu<\bar{X}-L\right)$$
$$=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<\frac{\bar{X}-L}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)\approx P\left(Z<\mathfrak{z}\right)=1-\alpha$$

donde $\mathfrak{z}=\frac{\bar{X}-L}{\sigma/\sqrt{n}}$. Usando la tabla de la normal estándar $\mathfrak{z}=z_\alpha$ y así se se obtiene que $L=\bar{X}-z_\alpha\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Para una muestra particular se obtiene un I.C Unilateral superior al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ, el cual es de la forma:

$$\left(\bar{x}-z_\alpha\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,+\infty\right)\;.$$

Intervalos de Confianza para la Media

Similarmente un I:C Unilateral inferior al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ es de la forma:

$$\left(-\infty\,,\,\bar{x}+z_{\alpha}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\ .$$

Ejemplo 79

Un fabricante produce anillos para los pistones de un motor de automóvil.

Intervalos de Confianza para la Media

Similarmente un I:C Unilateral inferior al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ es de la forma:

$$\left(-\infty\,,\,\bar{x}+z_{\alpha}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\;.$$

Ejemplo 79

Un fabricante produce anillos para los pistones de un motor de automóvil. Se sabe que el diámetro del anillo tiene una distribución aproximadamente normal.

Intervalos de Confianza para la Media

Similarmente un I:C Unilateral inferior al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ es de la forma:

$$\left(-\infty\,,\,\bar{x}+z_{\alpha}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\,.$$

Ejemplo 79

Un fabricante produce anillos para los pistones de un motor de automóvil. Se sabe que el diámetro del anillo tiene una distribución aproximadamente normal. De la experiencia se ha encontrado que la dispersión en los diámetros es aproximadamente de 0.05 mm.

Intervalos de Confianza para la Media

Similarmente un I:C Unilateral inferior al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ es de la forma:

$$\left(-\infty\,,\,\bar{x}+z_{\alpha}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\ .$$

Ejemplo 79

Un fabricante produce anillos para los pistones de un motor de automóvil. Se sabe que el diámetro del anillo tiene una distribución aproximadamente normal. De la experiencia se ha encontrado que la dispersión en los diámetros es aproximadamente de 0.05 mm. Se escogen al azar 15 anillos y se miden sus diámetros.

Intervalos de Confianza para la Media

Similarmente un I:C Unilateral inferior al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ es de la forma:

$$\left(-\infty\,,\,\bar{x}+z_{\alpha}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\ .$$

Ejemplo 79

Un fabricante produce anillos para los pistones de un motor de automóvil. Se sabe que el diámetro del anillo tiene una distribución aproximadamente normal. De la experiencia se ha encontrado que la dispersión en los diámetros es aproximadamente de 0.05 mm. Se escogen al azar 15 anillos y se miden sus diámetros. El diámetro promedio obtenido fué de 74.04 mm.

Intervalos de Confianza para la Media

Similarmente un I:C Unilateral inferior al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ es de la forma:

$$\left(-\infty\,,\,\bar{x}+z_{\alpha}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\ .$$

Ejemplo 79

Un fabricante produce anillos para los pistones de un motor de automóvil. Se sabe que el diámetro del anillo tiene una distribución aproximadamente normal. De la experiencia se ha encontrado que la dispersión en los diámetros es aproximadamente de 0.05 mm. Se escogen al azar 15 anillos y se miden sus diámetros. El diámetro promedio obtenido fué de 74.04 mm.

a) Calcule en I.C. bilateral al $95\,\%$ para el diámetro medio real de estos anillos.

Intervalos de Confianza para la Media

Similarmente un I:C Unilateral inferior al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ es de la forma:

$$\left(-\infty\,,\,\bar{x}+z_{\alpha}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\,.$$

Ejemplo 79

Un fabricante produce anillos para los pistones de un motor de automóvil. Se sabe que el diámetro del anillo tiene una distribución aproximadamente normal. De la experiencia se ha encontrado que la dispersión en los diámetros es aproximadamente de 0.05 mm. Se escogen al azar 15 anillos y se miden sus diámetros. El diámetro promedio obtenido fué de 74.04 mm.

a) Calcule en I.C. bilateral al $95\,\%$ para el diámetro medio real de estos anillos.

b) Si se desea que la presición del intervalo sea inferior a 0.01, con una confianza del $95\,\%$, ¿Cuál debe ser el mínimo tamaño de muestra para cumplir éste objetivo? Asuma que la media muestral no cambia.

Solución

a) Sea $X_1, \ldots, X_{15}$ una m.a que representa los diámetros de los 15 anillos, cada $X_i \sim n(\mu, 0.05^2)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$.

Solución

a) Sea $X_1, \ldots, X_{15}$ una m.a que representa los diámetros de los 15 anillos, cada $X_i \sim n(\mu, 0.05^2)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$. De la muestra se obtiene $\bar{x} = 74.04\, mm$.

Solución

a) Sea $X_1, \ldots, X_{15}$ una m.a que representa los diámetros de los 15 anillos, cada $X_i \sim n(\mu, 0.05^2)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$. De la muestra se obtiene $\bar{x} = 74.04\,mm$. Un I.C. al 95 % para μ es de la forma:

Solución

a) Sea $X_1, \ldots, X_{15}$ una m.a que representa los diámetros de los 15 anillos, cada $X_i \sim n(\mu, 0.05^2)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$. De la muestra se obtiene $\bar{x} = 74.04\, mm$. Un I.C. al 95 % para μ es de la forma:

$$\bar{X} \pm Z_{0.025} * \frac{\sigma}{\sqrt{15}} .$$

Se sabe que $Z_{0.025} = 1.96$ y $\sigma = 0.05$.

Solución

a) Sea $X_1, \ldots, X_{15}$ una m.a que representa los diámetros de los 15 anillos, cada $X_i \sim n(\mu, 0.05^2)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$. De la muestra se obtiene $\bar{x} = 74.04\,mm$. Un I.C. al 95 % para μ es de la forma:

$$\bar{X} \pm Z_{0.025} * \frac{\sigma}{\sqrt{15}} .$$

Se sabe que $Z_{0.025} = 1.96$ y $\sigma = 0.05$. Así, un I.C. al 95 % para μ es:

Solución

a) Sea $X_1, \ldots, X_{15}$ una m.a que representa los diámetros de los 15 anillos, cada $X_i \sim n(\mu, 0.05^2)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$. De la muestra se obtiene $\bar{x} = 74.04\, mm$. Un I.C. al 95 % para μ es de la forma:

$$\bar{X} \pm Z_{0.025} * \frac{\sigma}{\sqrt{15}} .$$

Se sabe que $Z_{0.025} = 1.96$ y $\sigma = 0.05$. Así, un I.C. al 95 % para μ es:

$$74.04 \pm 1.96 * \frac{0.05}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow (74.02\, , \, 74.07) .$$

Solución

a) Sea $X_1, \ldots, X_{15}$ una m.a que representa los diámetros de los 15 anillos, cada $X_i \sim n(\mu, 0.05^2)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$. De la muestra se obtiene $\bar{x} = 74.04\, mm$. Un I.C. al 95 % para μ es de la forma:

$$\bar{X} \pm Z_{0.025} * \frac{\sigma}{\sqrt{15}} .$$

Se sabe que $Z_{0.025} = 1.96$ y $\sigma = 0.05$. Así, un I.C. al 95 % para μ es:

$$74.04 \pm 1.96 * \frac{0.05}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow (74.02\, , \, 74.07) .$$

b) Recuerde que si θ es el parámetro de interés, la presición de un I.C para θ, digamos (l, u), está dada por $\max(\theta - l, u - \theta)$.

Solución

a) Sea $X_1, \ldots, X_{15}$ una m.a que representa los diámetros de los 15 anillos, cada $X_i \sim n(\mu, 0.05^2)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$. De la muestra se obtiene $\bar{x} = 74.04\, mm$. Un I.C. al 95 % para μ es de la forma:

$$\bar{X} \pm Z_{0.025} * \frac{\sigma}{\sqrt{15}} .$$

Se sabe que $Z_{0.025} = 1.96$ y $\sigma = 0.05$. Así, un I.C. al 95 % para μ es:

$$74.04 \pm 1.96 * \frac{0.05}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow (74.02\, ,\, 74.07) .$$

b) Recuerde que si θ es el parámetro de interés, la presición de un I.C para θ, digamos (l, u), está dada por $\max(\theta - l, u - \theta)$. Para este ejemplo $\theta = \mu$.

Solución

a) Sea $X_1, \ldots, X_{15}$ una m.a que representa los diámetros de los 15 anillos, cada $X_i \sim n(\mu, 0.05^2)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$. De la muestra se obtiene $\bar{x} = 74.04\, mm$. Un I.C. al 95 % para μ es de la forma:

$$\bar{X} \pm Z_{0.025} * \frac{\sigma}{\sqrt{15}} .$$

Se sabe que $Z_{0.025} = 1.96$ y $\sigma = 0.05$. Así, un I.C. al 95 % para μ es:

$$74.04 \pm 1.96 * \frac{0.05}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow (74.02\, , 74.07) .$$

b) Recuerde que si θ es el parámetro de interés, la presición de un I.C para θ, digamos (l, u), está dada por $\max(\theta - l, u - \theta)$. Para este ejemplo $\theta = \mu$. Debido a que el I.C calculado es simétrico, dicha presición se obtendría como la mitad de la longitud del intervalo, es decir, $1.96 * \frac{0.05}{\sqrt{n}}$.

Solución

a) Sea $X_1, \ldots, X_{15}$ una m.a que representa los diámetros de los 15 anillos, cada $X_i \sim n(\mu, 0.05^2)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$. De la muestra se obtiene $\bar{x} = 74.04\, mm$. Un I.C. al 95 % para μ es de la forma:

$$\bar{X} \pm Z_{0.025} * \frac{\sigma}{\sqrt{15}} .$$

Se sabe que $Z_{0.025} = 1.96$ y $\sigma = 0.05$. Así, un I.C. al 95 % para μ es:

$$74.04 \pm 1.96 * \frac{0.05}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow (74.02\, , 74.07) .$$

b) Recuerde que si θ es el parámetro de interés, la presición de un I.C para θ, digamos (l, u), está dada por $\max(\theta - l, u - \theta)$. Para este ejemplo $\theta = \mu$. Debido a que el I.C calculado es simétrico, dicha presición se obtendría como la mitad de la longitud del intervalo, es decir, $1.96 * \frac{0.05}{\sqrt{n}}$. Debemos hallar el mínimo n tal que:

Solución

a) Sea $X_1, \ldots, X_{15}$ una m.a que representa los diámetros de los 15 anillos, cada $X_i \sim n(\mu, 0.05^2)$, $i = 1, 2, \ldots, 15$. De la muestra se obtiene $\bar{x} = 74.04\,mm$. Un I.C. al 95 % para μ es de la forma:

$$\bar{X} \pm Z_{0.025} * \frac{\sigma}{\sqrt{15}} .$$

Se sabe que $Z_{0.025} = 1.96$ y $\sigma = 0.05$. Así, un I.C. al 95 % para μ es:

$$74.04 \pm 1.96 * \frac{0.05}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow (74.02\,,\, 74.07) .$$

b) Recuerde que si θ es el parámetro de interés, la presición de un I.C para θ, digamos (l, u), está dada por $\max(\theta - l, u - \theta)$. Para este ejemplo $\theta = \mu$. Debido a que el I.C calculado es simétrico, dicha presición se obtendría como la mitad de la longitud del intervalo, es decir, $1.96 * \frac{0.05}{\sqrt{n}}$. Debemos hallar el mínimo n tal que:

$$1.96\,\frac{0.05}{\sqrt{n}} < 0.01 \Leftrightarrow \frac{1.96\,(0.05)}{0.01} < \sqrt{n} \;\therefore\; n > 96.04 \;;\; n \geq 97 .$$

Ejemplo 80

La duración de cierto tipo de foco es una v.a. aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar de 25 horas.

Ejemplo 80

La duración de cierto tipo de foco es una v.a. aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar de 25 horas. El fabricante afirma que la duración promedio real de sus focos es superior a las 1010 horas.

Ejemplo 80

La duración de cierto tipo de foco es una v.a. aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar de 25 horas. El fabricante afirma que la duración promedio real de sus focos es superior a las 1010 horas. Para verificar esto se toma una m.a de 20 focos y se miden sus duraciones.

Ejemplo 80

La duración de cierto tipo de foco es una v.a. aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar de 25 horas. El fabricante afirma que la duración promedio real de sus focos es superior a las 1010 horas. Para verificar esto se toma una m.a de 20 focos y se miden sus duraciones. La duración promedio obtenida en la muestra es de 1014 horas.

Ejemplo 80

La duración de cierto tipo de foco es una v.a. aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar de 25 horas. El fabricante afirma que la duración promedio real de sus focos es superior a las 1010 horas. Para verificar esto se toma una m.a de 20 focos y se miden sus duraciones. La duración promedio obtenida en la muestra es de 1014 horas. ¿Es cierta la afirmación del fabricante? Use un I.C al $95\,\%$ para μ para responder esta pregunta.

Solución

En este caso un I.C unilateral al $95\,\%$ para μ es de la forma: $\left(\bar{X} - z_{0.05}\,\sigma/\sqrt{n}\,,\ \infty\right)$.

Ejemplo 80

La duración de cierto tipo de foco es una v.a. aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar de 25 horas. El fabricante afirma que la duración promedio real de sus focos es superior a las 1010 horas. Para verificar esto se toma una m.a de 20 focos y se miden sus duraciones. La duración promedio obtenida en la muestra es de 1014 horas. ¿Es cierta la afirmación del fabricante? Use un I.C al $95\,\%$ para μ para responder esta pregunta.

Solución

En este caso un I.C unilateral al $95\,\%$ para μ es de la forma: $\left(\bar{X} - z_{0.05}\,\sigma/\sqrt{n}\,,\ \infty\right)$. De la tabla de la normal se obtiene que $z_{0.05} = 1.645\,$.

Ejemplo 80

La duración de cierto tipo de foco es una v.a. aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar de 25 horas. El fabricante afirma que la duración promedio real de sus focos es superior a las 1010 horas. Para verificar esto se toma una m.a de 20 focos y se miden sus duraciones. La duración promedio obtenida en la muestra es de 1014 horas. ¿Es cierta la afirmación del fabricante? Use un I.C al $95\,\%$ para μ para responder esta pregunta.

Solución

En este caso un I.C unilateral al $95\,\%$ para μ es de la forma: $\left(\bar{X} - z_{0.05}\,\sigma/\sqrt{n}\,,\ \infty\right)$. De la tabla de la normal se obtiene que $z_{0.05} = 1.645$. Asi, Un I.C unilateral al $95\,\%$ para μ es:

Ejemplo 80

La duración de cierto tipo de foco es una v.a. aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar de 25 horas. El fabricante afirma que la duración promedio real de sus focos es superior a las 1010 horas. Para verificar esto se toma una m.a de 20 focos y se miden sus duraciones. La duración promedio obtenida en la muestra es de 1014 horas. ¿Es cierta la afirmación del fabricante? Use un I.C al $95\,\%$ para μ para responder esta pregunta.

Solución

En este caso un I.C unilateral al $95\,\%$ para μ es de la forma: $\left(\bar{X} - z_{0.05}\,\sigma/\sqrt{n}\,,\ \infty\right)$. De la tabla de la normal se obtiene que $z_{0.05} = 1.645$. Asi, Un I.C unilateral al $95\,\%$ para μ es:

$$\left(1014 - 1.645\,\frac{25}{\sqrt{20}}\,,\ \infty\right) \Leftrightarrow (1004.8\,,\ \infty)\,.$$

Ejemplo 80

La duración de cierto tipo de foco es una v.a. aproximadamente normal, con media μ y desviación estándar de 25 horas. El fabricante afirma que la duración promedio real de sus focos es superior a las 1010 horas. Para verificar esto se toma una m.a de 20 focos y se miden sus duraciones. La duración promedio obtenida en la muestra es de 1014 horas. ¿Es cierta la afirmación del fabricante? Use un I.C al $95\,\%$ para μ para responder esta pregunta.

Solución

En este caso un I.C unilateral al $95\,\%$ para μ es de la forma: $\left(\bar{X} - z_{0.05}\,\sigma/\sqrt{n}\,,\ \infty\right)$. De la tabla de la normal se obtiene que $z_{0.05} = 1.645$. Asi, Un I.C unilateral al $95\,\%$ para μ es:

$$\left(1014 - 1.645\,\frac{25}{\sqrt{20}}\,,\ \infty\right) \Leftrightarrow (1004.8\,,\ \infty)\,.$$

Por lo tanto, dado que el valor estipulado por el fabricante se encuentra dentro del intervalo, no es posible afirmar que la duración media de los focos supere las 1010 horas.

I.C para la media, cuando el tamaño de la muestra es grande

Si la muestra aleatoria no proviene de una distribución normal, pero el tamaño de la muestra es grande, el TLC garantiza que:

I.C para la media, cuando el tamaño de la muestra es grande

Si la muestra aleatoria no proviene de una distribución normal, pero el tamaño de la muestra es grande, el TLC garantiza que:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{aprox}{\sim} n(0\,,\,1)\,.$$

I.C para la media, cuando el tamaño de la muestra es grande

Si la muestra aleatoria no proviene de una distribución normal, pero el tamaño de la muestra es grande, el TLC garantiza que:

$$\frac{\bar{X} \; - \; \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \; \overset{aprox}{\sim} \; n(0\,,\;1)\;.$$

Así, un I.C. aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ es:

I.C para la media, cuando el tamaño de la muestra es grande

Si la muestra aleatoria no proviene de una distribución normal, pero el tamaño de la muestra es grande, el TLC garantiza que:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{aprox}{\sim} n(0\,,\,1)\,.$$

Así, un I.C. aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ es:

$$\bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,.$$

I.C para la media, cuando el tamaño de la muestra es grande

Si la muestra aleatoria no proviene de una distribución normal, pero el tamaño de la muestra es grande, el TLC garantiza que:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{aprox}{\sim} n(0\,,\,1)\,.$$

Así, un I.C. aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ es:

$$\bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,.$$

Si σ^2 es desconocida, usamos S^2 como estimador puntual y asi, un intervalo de confianza aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ se obtiene como:

I.C para la media, cuando el tamaño de la muestra es grande

Si la muestra aleatoria no proviene de una distribución normal, pero el tamaño de la muestra es grande, el TLC garantiza que:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{aprox}{\sim} n(0\,,\,1)\,.$$

Así, un I.C. aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ es:

$$\bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,.$$

Si σ^2 es desconocida, usamos S^2 como estimador puntual y asi, un intervalo de confianza aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para μ se obtiene como:

$$\bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}\,.$$

Ejemplo 81

Un articulo publicado en cierta revista presenta las mediciones de tiempos de combustión residual (en seg) de especimenes tratados de ropa de dormir para niños.

Ejemplo 81

Un articulo publicado en cierta revista presenta las mediciones de tiempos de combustión residual (en seg) de especimenes tratados de ropa de dormir para niños. Se seleccionaron 70 especimenes los cuales son sometidos a una prueba de combustión y se miden los respectivos tiempos residuales (en seg).

Intervalos de Confianza

Ejemplo 81

Un articulo publicado en cierta revista presenta las mediciones de tiempos de combustión residual (en seg) de especimenes tratados de ropa de dormir para niños. Se seleccionaron 70 especimenes los cuales son sometidos a una prueba de combustión y se miden los respectivos tiempos residuales (en seg). De estos tiempos se obtiene un tiempo promedio de 9.8525 seg y una desviación estándar de 0.0965 seg.

Intervalos de Confianza

Ejemplo 81

Un articulo publicado en cierta revista presenta las mediciones de tiempos de combustión residual (en seg) de especimenes tratados de ropa de dormir para niños. Se seleccionaron 70 especimenes los cuales son sometidos a una prueba de combustión y se miden los respectivos tiempos residuales (en seg). De estos tiempos se obtiene un tiempo promedio de 9.8525 seg y una desviación estándar de 0.0965 seg. Calcule un I.C. aproximado al $95\,\%$ para el tiempo medio real de combustión en dicho tipo de especímen.

Ejemplo 81

Un articulo publicado en cierta revista presenta las mediciones de tiempos de combustión residual (en seg) de especimenes tratados de ropa de dormir para niños. Se seleccionaron 70 especimenes los cuales son sometidos a una prueba de combustión y se miden los respectivos tiempos residuales (en seg). De estos tiempos se obtiene un tiempo promedio de 9.8525 seg y una desviación estándar de 0.0965 seg. Calcule un I.C. aproximado al $95\,\%$ para el tiempo medio real de combustión en dicho tipo de especímen.

Solución

Sea $X_1, \ldots, X_{70}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de combustión residual de los 70 especímenes usados.

Ejemplo 81

Un articulo publicado en cierta revista presenta las mediciones de tiempos de combustión residual (en seg) de especimenes tratados de ropa de dormir para niños. Se seleccionaron 70 especimenes los cuales son sometidos a una prueba de combustión y se miden los respectivos tiempos residuales (en seg). De estos tiempos se obtiene un tiempo promedio de 9.8525 seg y una desviación estándar de 0.0965 seg. Calcule un I.C. aproximado al $95\,\%$ para el tiempo medio real de combustión en dicho tipo de especímen.

Solución

Sea $X_1, \ldots, X_{70}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de combustión residual de los 70 especímenes usados. Asuma que $E[X_i] = \mu$ y $Var[X_i] = \sigma^2$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ ambos parámetros desconocidos.

Intervalos de Confianza

Ejemplo 81

Un articulo publicado en cierta revista presenta las mediciones de tiempos de combustión residual (en seg) de especimenes tratados de ropa de dormir para niños. Se seleccionaron 70 especimenes los cuales son sometidos a una prueba de combustión y se miden los respectivos tiempos residuales (en seg). De estos tiempos se obtiene un tiempo promedio de 9.8525 seg y una desviación estándar de 0.0965 seg. Calcule un I.C. aproximado al $95\,\%$ para el tiempo medio real de combustión en dicho tipo de especímen.

Solución

Sea $X_1, \ldots, X_{70}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de combustión residual de los 70 especímenes usados. Asuma que $E[X_i] = \mu$ y $Var[X_i] = \sigma^2$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ ambos parámetros desconocidos. Usando el TLC, se tiene que un I.C aproximado al $95\,\%$ para μ es de la forma: $\bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}$.

Ejemplo 81

Un articulo publicado en cierta revista presenta las mediciones de tiempos de combustión residual (en seg) de especimenes tratados de ropa de dormir para niños. Se seleccionaron 70 especimenes los cuales son sometidos a una prueba de combustión y se miden los respectivos tiempos residuales (en seg). De estos tiempos se obtiene un tiempo promedio de 9.8525 seg y una desviación estándar de 0.0965 seg. Calcule un I.C. aproximado al $95\,\%$ para el tiempo medio real de combustión en dicho tipo de especímen.

Solución

Sea $X_1, \ldots, X_{70}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de combustión residual de los 70 especímenes usados. Asuma que $E[X_i] = \mu$ y $Var[X_i] = \sigma^2$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ ambos parámetros desconocidos. Usando el TLC, se tiene que un I.C aproximado al $95\,\%$ para μ es de la forma: $\bar{x} \pm Z_{\alpha/2}\,\frac{s}{\sqrt{n}}$.

Del enunciado se tiene que: $\bar{x} = 9.8525$, $s = 0.0965$, $n = 70$ y $\alpha = 0.05$.

Ejemplo 81

Un articulo publicado en cierta revista presenta las mediciones de tiempos de combustión residual (en seg) de especimenes tratados de ropa de dormir para niños. Se seleccionaron 70 especimenes los cuales son sometidos a una prueba de combustión y se miden los respectivos tiempos residuales (en seg). De estos tiempos se obtiene un tiempo promedio de 9.8525 seg y una desviación estándar de 0.0965 seg. Calcule un I.C. aproximado al $95\,\%$ para el tiempo medio real de combustión en dicho tipo de especímen.

Solución

Sea $X_1, \ldots, X_{70}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de combustión residual de los 70 especímenes usados. Asuma que $E[X_i] = \mu$ y $Var[X_i] = \sigma^2$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ ambos parámetros desconocidos. Usando el TLC, se tiene que un I.C aproximado al $95\,\%$ para μ es de la forma: $\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$.

Del enunciado se tiene que: $\bar{x} = 9.8525$, $s = 0.0965$, $n = 70$ y $\alpha = 0.05$. De la tabla de la normal se tiene que $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$.

Ejemplo 81

Un articulo publicado en cierta revista presenta las mediciones de tiempos de combustión residual (en seg) de especimenes tratados de ropa de dormir para niños. Se seleccionaron 70 especimenes los cuales son sometidos a una prueba de combustión y se miden los respectivos tiempos residuales (en seg). De estos tiempos se obtiene un tiempo promedio de 9.8525 seg y una desviación estándar de 0.0965 seg. Calcule un I.C. aproximado al $95\,\%$ para el tiempo medio real de combustión en dicho tipo de especímen.

Solución

Sea $X_1, \ldots, X_{70}$ una muestra aleatoria que representa los tiempos de combustión residual de los 70 especímenes usados. Asuma que $E[X_i] = \mu$ y $Var[X_i] = \sigma^2$, para $i = 1, 2, \ldots, n$ ambos parámetros desconocidos. Usando el TLC, se tiene que un I.C aproximado al $95\,\%$ para μ es de la forma: $\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$.

Del enunciado se tiene que: $\bar{x} = 9.8525$, $s = 0.0965$, $n = 70$ y $\alpha = 0.05$. De la tabla de la normal se tiene que $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$.

Intervalos de Confianza

Finalmente un I.C aproximado al $95\,\%$ para μ es:

Intervalos de Confianza

Finalmente un I.C aproximado al $95\,\%$ para μ es:

$$9.8525 \pm 1.96\,\frac{0.0965}{\sqrt{70}} \;\Leftrightarrow\; 9.8525 \pm 0.0226 \;\Leftrightarrow\; (9.8299,\; 9.9751)\,.$$

Finalmente un I.C aproximado al $95\,\%$ para μ es:

$$9.8525 \pm 1.96\,\frac{0.0965}{\sqrt{70}} \;\Leftrightarrow\; 9.8525 \pm 0.0226 \;\Leftrightarrow\; (9.8299,\, 9.9751)\,.$$

Si este proceso se realiza de manera rutinaria, se espera que aproximadamente en el $95\,\%$ de las veces, el tiempo medio de combustión de los especímenes se encuentre entre los 9.82994 y 9.9751 segundos.

Intervalo de Confianza para una proporción

Sea X una v.a. tal que $X \sim bin(n,\, p)\,.$

Intervalos de Confianza

Finalmente un I.C aproximado al $95\,\%$ para μ es:

$$9.8525 \pm 1.96\,\frac{0.0965}{\sqrt{70}} \;\Leftrightarrow\; 9.8525 \pm 0.0226 \;\Leftrightarrow\; (9.8299,\, 9.9751)\,.$$

Si este proceso se realiza de manera rutinaria, se espera que aproximadamente en el $95\,\%$ de las veces, el tiempo medio de combustión de los especímenes se encuentre entre los 9.82994 y 9.9751 segundos.

Intervalo de Confianza para una proporción

Sea X una v.a. tal que $X \sim bin(n,\, p)$. El T.C.L. garantiza que:

Intervalos de Confianza

Finalmente un I.C aproximado al $95\,\%$ para μ es:

$$9.8525 \pm 1.96\,\frac{0.0965}{\sqrt{70}} \;\Leftrightarrow\; 9.8525 \pm 0.0226 \;\Leftrightarrow\; (9.8299,\, 9.9751)\,.$$

Si este proceso se realiza de manera rutinaria, se espera que aproximadamente en el $95\,\%$ de las veces, el tiempo medio de combustión de los especímenes se encuentre entre los 9.82994 y 9.9751 segundos.

Intervalo de Confianza para una proporción

Sea X una v.a. tal que $X \sim bin(n,\, p)$. El T.C.L. garantiza que:

$$\frac{X - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\; n\overbrace{\to +\infty}^{aprox}\; n(0,\,1)\,.$$

Finalmente un I.C aproximado al $95\,\%$ para μ es:

$$9.8525 \pm 1.96\,\frac{0.0965}{\sqrt{70}} \;\;\Leftrightarrow\;\; 9.8525 \pm 0.0226 \;\;\Leftrightarrow\;\; (9.8299,\, 9.9751)\,.$$

Si este proceso se realiza de manera rutinaria, se espera que aproximadamente en el $95\,\%$ de las veces, el tiempo medio de combustión de los especímenes se encuentre entre los 9.82994 y 9.9751 segundos.

Intervalo de Confianza para una proporción

Sea X una v.a. tal que $X \sim bin(n,\, p)$. El T.C.L. garantiza que:

$$\frac{X - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}}\; \overbrace{n \to +\infty}^{aprox}\; n(0,\,1)\,.$$

Recuerde que un estimador puntual insesgado para p es $\hat{p} = \frac{X}{n}$.

Intervalo de Confianza para una proporción

Intervalo de Confianza para una proporción

Ahora

Intervalo de Confianza para una proporción

Ahora

$$\frac{X - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}} = \frac{n\,\left[\frac{X}{n} - p\right]}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}} = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}} \underbrace{\approx}_{n \to +\infty} n(0,\ 1)\ .$$

Intervalo de Confianza para una proporción

Ahora

$$\frac{X - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}} = \frac{n\,\left[\frac{X}{n} - p\right]}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}} = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}} \underbrace{\approx}_{n \to +\infty} n(0,\,1)\ .$$

Hallemos L y U tal que $P(L < p < U) = 1 - \alpha$, para α dado.

Intervalo de Confianza para una proporción

Ahora

$$\frac{X - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}} = \frac{n\,\left[\frac{X}{n} - p\right]}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}} = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}} \underbrace{\approx}_{n \to +\infty} n(0,\,1)\;.$$

Hallemos L y U tal que $P(L < p < U) = 1 - \alpha$, para α dado.

$$\Leftrightarrow P\left(\hat{p} - U < \hat{p} - p < \hat{p} - L\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\hat{p} - U}{\sqrt{p\,(1-p)\,/n}} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p\,(1-p)\,/n}} < \frac{\hat{p} - L}{\sqrt{p\,(1-p)\,/n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\hat{p} - U}{\sqrt{p\,(1-p)\,/n}} < Z < \frac{\hat{p} - L}{\sqrt{p\,(1-p)\,/n}}\right) \approx 1 - \alpha$$

Intervalo de Confianza para una proporción

Ahora

$$\frac{X - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}} = \frac{n\,\left[\frac{X}{n} - p\right]}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}} = \frac{\frac{X}{n} - p}{\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}} \underbrace{\approx}_{n \to +\infty} n(0,\ 1)\ .$$

Hallemos L y U tal que $P(L < p < U) = 1 - \alpha$, para α dado.

$$\Leftrightarrow P\left(\hat{p} - U < \hat{p} - p < \hat{p} - L\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{\hat{p} - U}{\sqrt{p\,(1-p)\,/n}} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p\,(1-p)\,/n}} < \frac{\hat{p} - L}{\sqrt{p\,(1-p)\,/n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\hat{p} - U}{\sqrt{p\,(1-p)\,/n}} < Z < \frac{\hat{p} - L}{\sqrt{p\,(1-p)\,/n}}\right) \approx 1 - \alpha$$

Sea $z_1 = \dfrac{\hat{p} - U}{\sqrt{p\,(1-p)\,/n}}$ y $z_2 = \dfrac{\hat{p} - L}{\sqrt{p\,(1-p)\,/n}}$.

Intervalos de Confianza

Intervalo de Confianza para una proporción

Reemplazando z_1 y z_2 se tiene que

Intervalo de Confianza para una proporción

Reemplazando z_1 y z_2 se tiene que

$$P(z_1 < Z < z_2) \approx 1 - \alpha \, .$$

Intervalo de Confianza para una proporción

Reemplazando z_1 y z_2 se tiene que

$$P(z_1 < Z < z_2) \approx 1 - \alpha \, .$$

Una propuesta para z_1 y z_2 asume que las áreas a izquierda de z_1 y a la derecha de z_2 son iguales a $\alpha/2$.

Intervalo de Confianza para una proporción

Reemplazando z_1 y z_2 se tiene que

$$P(z_1 < Z < z_2) \approx 1 - \alpha \, .$$

Una propuesta para z_1 y z_2 asume que las áreas a izquierda de z_1 y a la derecha de z_2 son iguales a $\alpha/2$. Con esto se tiene que $z_1 = -z_{\alpha/2}$ y $z_2 = z_{\alpha/2}$.

Intervalo de Confianza para una proporción

Reemplazando z_1 y z_2 se tiene que

$$P(z_1 < Z < z_2) \approx 1 - \alpha \, .$$

Una propuesta para z_1 y z_2 asume que las áreas a izquierda de z_1 y a la derecha de z_2 son iguales a $\alpha/2$. Con esto se tiene que $z_1 = -z_{\alpha/2}$ y $z_2 = z_{\alpha/2}$. Al reemplazar z_1 y z_2 se obtiene:

Intervalo de Confianza para una proporción

Reemplazando z_1 y z_2 se tiene que

$$P(z_1 < Z < z_2) \approx 1 - \alpha \, .$$

Una propuesta para z_1 y z_2 asume que las áreas a izquierda de z_1 y a la derecha de z_2 son iguales a $\alpha/2$. Con esto se tiene que $z_1 = -z_{\alpha/2}$ y $z_2 = z_{\alpha/2}$. Al reemplazar z_1 y z_2 se obtiene:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p\,(1-p)/n}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha \;\; \Leftrightarrow \;\; P\left(\left|\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p\,(1-p)/n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha \, .$$

Intervalo de Confianza para una proporción

Reemplazando z_1 y z_2 se tiene que

$$P(z_1 < Z < z_2) \approx 1 - \alpha\,.$$

Una propuesta para z_1 y z_2 asume que las áreas a izquierda de z_1 y a la derecha de z_2 son iguales a $\alpha/2$. Con esto se tiene que $z_1 = -z_{\alpha/2}$ y $z_2 = z_{\alpha/2}$. Al reemplazar z_1 y z_2 se obtiene:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p\,(1-p)/n}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha \;\;\Leftrightarrow\;\; P\left(\left|\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p\,(1-p)/n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha\,.$$

Al despejar p se obtiene una ecuación de segundo grado, cuyas dos soluciones están dadas por:

Intervalo de Confianza para una proporción

Reemplazando z_1 y z_2 se tiene que

$$P(z_1 < Z < z_2) \approx 1 - \alpha\ .$$

Una propuesta para z_1 y z_2 asume que las áreas a izquierda de z_1 y a la derecha de z_2 son iguales a $\alpha/2$. Con esto se tiene que $z_1 = -z_{\alpha/2}$ y $z_2 = z_{\alpha/2}$. Al reemplazar z_1 y z_2 se obtiene:

$$P\left(-z_{\alpha/2} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p\,(1-p)/n}} < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha \;\Leftrightarrow\; P\left(\left|\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p\,(1-p)/n}}\right| < z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha\ .$$

Al despejar p se obtiene una ecuación de segundo grado, cuyas dos soluciones están dadas por:

$$p = \frac{\hat{p} + \frac{Z^2_{\alpha/2}}{2n} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} + \frac{Z^2_{\alpha/2}}{4n^2}}}{\left(1 + \frac{Z^2_{\alpha/2}}{n}\right)}\ .$$

Intervalo de Confianza para una proporción

Los límites de un I.C. aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para p viene dado por las dos soluciones antes descritas en la solución anterior.

Intervalo de Confianza para una proporción

Los límites de un I.C. aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para p viene dado por las dos soluciones antes descritas en la solución anterior.

Intervalo de Confianza para una proporción

Los límites de un I.C. aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para p viene dado por las dos soluciones antes descritas en la solución anterior.

Una aproximación más sintética se obtiene al evaluar el efecto de n grande en los límites anteriormente hallados. Si n es muy grande, entonces: $\frac{Z^2_{\alpha/2}}{2n}$, $\frac{Z^2_{\alpha/2}}{4n^2}$, $\frac{Z^2_{\alpha/2}}{n}$ son aproximadamente 0. Así, la expresión para un I.C aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para p se obtiene como:

Intervalos de Confianza

Intervalo de Confianza para una proporción

Los límites de un I.C. aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para p viene dado por las dos soluciones antes descritas en la solución anterior.

Una aproximación más sintética se obtiene al evaluar el efecto de n grande en los límites anteriormente hallados. Si n es muy grande, entonces: $\frac{Z^2_{\alpha/2}}{2n}$, $\frac{Z^2_{\alpha/2}}{4n^2}$, $\frac{Z^2_{\alpha/2}}{n}$ son aproximadamente 0. Así, la expresión para un I.C aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para p se obtiene como:

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\,.$$

Ejemplo 82

Se lleva a cabo un estudio para determinar la efectividad de una vacuna contra la gripe.

Intervalos de Confianza

Intervalo de Confianza para una proporción

Los límites de un I.C. aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para p viene dado por las dos soluciones antes descritas en la solución anterior.

Una aproximación más sintética se obtiene al evaluar el efecto de n grande en los límites anteriormente hallados. Si n es muy grande, entonces: $\frac{Z^2_{\alpha/2}}{2n}$, $\frac{Z^2_{\alpha/2}}{4n^2}$, $\frac{Z^2_{\alpha/2}}{n}$ son aproximadamente 0. Así, la expresión para un I.C aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para p se obtiene como:

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\,.$$

Ejemplo 82

Se lleva a cabo un estudio para determinar la efectividad de una vacuna contra la gripe. Se administra la vacuna a una muestra aleatoria de 3000 sujetos y 13 contraen gripe.

Intervalos de Confianza

Intervalo de Confianza para una proporción

Los límites de un I.C. aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para p viene dado por las dos soluciones antes descritas en la solución anterior.

Una aproximación más sintética se obtiene al evaluar el efecto de n grande en los límites anteriormente hallados. Si n es muy grande, entonces: $\frac{Z^2_{\alpha/2}}{2n}$, $\frac{Z^2_{\alpha/2}}{4n^2}$, $\frac{Z^2_{\alpha/2}}{n}$ son aproximadamente 0. Así, la expresión para un I.C aproximado al $100(1-\alpha)\,\%$ para p se obtiene como:

$$\hat{p} \pm Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\,.$$

Ejemplo 82

Se lleva a cabo un estudio para determinar la efectividad de una vacuna contra la gripe. Se administra la vacuna a una muestra aleatoria de 3000 sujetos y 13 contraen gripe. Obtenga un I.C aproximado al $95\,\%$ para la proporción real de sujetos vacunados que contraen gripe.

Solución

Sea X: # sujetos vacunados que contraen gripe de los 3000 vacunados.

Intervalos de Confianza

Solución

Sea X: # sujetos vacunados que contraen gripe de los 3000 vacunados. Según el enunciado se tiene que:

Solución

Sea X: # sujetos vacunados que contraen gripe de los 3000 vacunados. Según el enunciado se tiene que: $\alpha = 0.05$, $Z_{0.025} = 1.96$, $\hat{p} = \frac{X}{3000} = \frac{13}{3000}$.

Solución

Sea X: # sujetos vacunados que contraen gripe de los 3000 vacunados. Según el enunciado se tiene que: $\alpha = 0.05$, $Z_{0.025} = 1.96$, $\hat{p} = \frac{X}{3000} = \frac{13}{3000}$. Un I.C aproximado al $95\,\%$ para p es:

Solución

Sea X: # sujetos vacunados que contraen gripe de los 3000 vacunados. Según el enunciado se tiene que: $\alpha = 0.05$, $Z_{0.025} = 1.96$, $\hat{p} = \frac{X}{3000} = \frac{13}{3000}$. Un I.C aproximado al $95\,\%$ para p es:

$$\frac{\frac{13}{3000} + \frac{1.96^{\,2}}{2(3000)} \pm 1.96\sqrt{\frac{\frac{13}{3000}\left(1-\frac{13}{3000}\right)}{3000} + \frac{1.96^2}{4(3000)^{\,2}}}}{\left(1 + \frac{1.96^{\,2}}{3000}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0.004974 \pm 0.002436}{1.00128} \Leftrightarrow (0.002535, 0.007401)\,.$$

Solución

Sea X: # sujetos vacunados que contraen gripe de los 3000 vacunados. Según el enunciado se tiene que: $\alpha = 0.05$, $Z_{0.025} = 1.96$, $\hat{p} = \frac{X}{3000} = \frac{13}{3000}$. Un I.C aproximado al $95\,\%$ para p es:

$$\frac{\frac{13}{3000} + \frac{1.96^{\,2}}{2(3000)} \pm 1.96\sqrt{\frac{\frac{13}{3000}\left(1-\frac{13}{3000}\right)}{3000} + \frac{1.96^2}{4(3000)^{\,2}}}}{\left(1 + \frac{1.96^{\,2}}{3000}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0.004974 \pm 0.002436}{1.00128} \Leftrightarrow (0.002535, 0.007401)\,.$$

Usando el I.C. tradicional:

Solución

Sea X: # sujetos vacunados que contraen gripe de los 3000 vacunados. Según el enunciado se tiene que: $\alpha = 0.05$, $Z_{0.025} = 1.96$, $\hat{p} = \frac{X}{3000} = \frac{13}{3000}$. Un I.C aproximado al $95\,\%$ para p es:

$$\frac{\frac{13}{3000} + \frac{1.96^{\,2}}{2(3000)} \pm 1.96\sqrt{\frac{\frac{13}{3000}\left(1-\frac{13}{3000}\right)}{3000} + \frac{1.96^2}{4(3000)^{\,2}}}}{\left(1+\frac{1.96^{\,2}}{3000}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0.004974 \pm 0.002436}{1.00128} \Leftrightarrow (0.002535, 0.007401)\ .$$

Usando el I.C. tradicional:

$$\frac{13}{3000} \pm 1.96\sqrt{\frac{\frac{13}{3000}\left(1-\frac{13}{3000}\right)}{3000}} \Leftrightarrow (0.001982, 0.006684)\ .$$

Solución

Sea X: # sujetos vacunados que contraen gripe de los 3000 vacunados. Según el enunciado se tiene que: $\alpha = 0.05$, $Z_{0.025} = 1.96$, $\hat{p} = \frac{X}{3000} = \frac{13}{3000}$. Un I.C aproximado al $95\,\%$ para p es:

$$\frac{\frac{13}{3000} + \frac{1.96^{\,2}}{2(3000)} \pm 1.96\sqrt{\frac{\frac{13}{3000}\left(1-\frac{13}{3000}\right)}{3000} + \frac{1.96^2}{4(3000)^{\,2}}}}{\left(1 + \frac{1.96^{\,2}}{3000}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0.004974 \pm 0.002436}{1.00128} \Leftrightarrow (0.002535, 0.007401)\,.$$

Usando el I.C. tradicional:

$$\frac{13}{3000} \pm 1.96\sqrt{\frac{\frac{13}{3000}\left(1-\frac{13}{3000}\right)}{3000}} \Leftrightarrow (0.001982, 0.006684)\,.$$

El primer intervalo es más exacto que el segundo, pero para efectos prácticos, se suele usar la versión más tradicional, es decir, el segundo intervalo, a pesar de que los límites de este último 'subestiman' el valor real de p.

Ejemplo 83

En una muestra de 85 soportes para el cigueñal de un motor, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo permitido.

Ejemplo 83

En una muestra de 85 soportes para el cigueñal de un motor, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo permitido. Se desea usar esta información para obtener una estimación de la proporción de soportes para cigueñal que tienen un terminado más rugoso de lo permitido. Obtenga un I.C. aproximado al $95\,\%$ para p: Proporción de soportes de cigueñal con terminado más rugoso de lo permitido.

Ejemplo 83

En una muestra de 85 soportes para el cigueñal de un motor, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo permitido. Se desea usar esta información para obtener una estimación de la proporción de soportes para cigueñal que tienen un terminado más rugoso de lo permitido. Obtenga un I.C. aproximado al $95\,\%$ para p: Proporción de soportes de cigueñal con terminado más rugoso de lo permitido.

Solución

Sea X: No de soportes con terminado más rugoso de lo permitido.

Ejemplo 83

En una muestra de 85 soportes para el cigueñal de un motor, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo permitido. Se desea usar esta información para obtener una estimación de la proporción de soportes para cigueñal que tienen un terminado más rugoso de lo permitido. Obtenga un I.C. aproximado al $95\,\%$ para p: Proporción de soportes de cigueñal con terminado más rugoso de lo permitido.

Solución

Sea X: No de soportes con terminado más rugoso de lo permitido. por las condiciones del la muestra se puede afirmar que $X \sim bin(85,\, p)$.

Ejemplo 83

En una muestra de 85 soportes para el cigueñal de un motor, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo permitido. Se desea usar esta información para obtener una estimación de la proporción de soportes para cigueñal que tienen un terminado más rugoso de lo permitido. Obtenga un I.C. aproximado al $95\,\%$ para p: Proporción de soportes de cigueñal con terminado más rugoso de lo permitido.

Solución

Sea X: No de soportes con terminado más rugoso de lo permitido. por las condiciones del la muestra se puede afirmar que $X \sim bin(85,\, p)$. Del enunciado se tiene que: $\hat{p} = \frac{x}{85} = \frac{10}{85} = 0.12$.

Ejemplo 83

En una muestra de 85 soportes para el cigueñal de un motor, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo permitido. Se desea usar esta información para obtener una estimación de la proporción de soportes para cigueñal que tienen un terminado más rugoso de lo permitido. Obtenga un I.C. aproximado al $95\,\%$ para p: Proporción de soportes de cigueñal con terminado más rugoso de lo permitido.

Solución

Sea X: No de soportes con terminado más rugoso de lo permitido. por las condiciones del la muestra se puede afirmar que $X \sim bin(85,\, p)$. Del enunciado se tiene que: $\hat{p} = \frac{x}{85} = \frac{10}{85} = 0.12$. Un I.C aproximado al $95\,\%$ para p es de la forma:

Ejemplo 83

En una muestra de 85 soportes para el cigueñal de un motor, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo permitido. Se desea usar esta información para obtener una estimación de la proporción de soportes para cigueñal que tienen un terminado más rugoso de lo permitido. Obtenga un I.C. aproximado al $95\,\%$ para p: Proporción de soportes de cigueñal con terminado más rugoso de lo permitido.

Solución

Sea X: No de soportes con terminado más rugoso de lo permitido. por las condiciones del la muestra se puede afirmar que $X \sim bin(85,\, p)$. Del enunciado se tiene que: $\hat{p} = \frac{x}{85} = \frac{10}{85} = 0.12$. Un I.C aproximado al $95\,\%$ para p es de la forma:

$$0.12 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.12(0.88)}{85}} \quad \Leftrightarrow \quad 0.12 \pm 0.069 \quad \Leftrightarrow \quad (0.051, 0.189)\ .$$

Ejemplo 83

En una muestra de 85 soportes para el cigueñal de un motor, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo permitido. Se desea usar esta información para obtener una estimación de la proporción de soportes para cigueñal que tienen un terminado más rugoso de lo permitido. Obtenga un I.C. aproximado al $95\,\%$ para p: Proporción de soportes de cigueñal con terminado más rugoso de lo permitido.

Solución

Sea X: No de soportes con terminado más rugoso de lo permitido. por las condiciones del la muestra se puede afirmar que $X \sim bin(85,\, p)$. Del enunciado se tiene que: $\hat{p} = \frac{x}{85} = \frac{10}{85} = 0.12$. Un I.C aproximado al $95\,\%$ para p es de la forma:

$$0.12 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.12(0.88)}{85}} \quad \Leftrightarrow \quad 0.12 \pm 0.069 \quad \Leftrightarrow \quad (0.051, 0.189)\ .$$

Con una confianza aproximada del $95\,\%$ se puede afirmar que la porporción de cigueñales con terminaciones más rugosas que lo permitido estara entre el $5.1\,\%$ y $18.9\,\%$.

Ejemplo 83

En una muestra de 85 soportes para el cigueñal de un motor, 10 tienen un terminado que es más rugoso de lo permitido. Se desea usar esta información para obtener una estimación de la proporción de soportes para cigueñal que tienen un terminado más rugoso de lo permitido. Obtenga un I.C. aproximado al $95\,\%$ para p: Proporción de soportes de cigueñal con terminado más rugoso de lo permitido.

Solución

Sea X: No de soportes con terminado más rugoso de lo permitido. por las condiciones del la muestra se puede afirmar que $X \sim bin(85,\, p)$. Del enunciado se tiene que: $\hat{p} = \frac{x}{85} = \frac{10}{85} = 0.12$. Un I.C aproximado al $95\,\%$ para p es de la forma:

$$0.12 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.12(0.88)}{85}} \quad \Leftrightarrow \quad 0.12 \pm 0.069 \quad \Leftrightarrow \quad (0.051, 0.189)\;.$$

Con una confianza aproximada del $95\,\%$ se puede afirmar que la porporción de cigueñales con terminaciones más rugosas que lo permitido estara entre el $5.1\,\%$ y $18.9\,\%$. Usando la fórmula más exacta, se tiene un I.C aproximado al $95\,\%$ para p es : $(0.089,\, 0.228)$.