Alejandro Gutiérrez
20.677.580-7

P1) d, z medidos exactamente

$v_{RMS} = 600 \text{ Km s}^{-1}$

Sabemos que la velocidad dado H_0 es: $v_{H_0} = H_0 \cdot d$

Entonces la velocidad observada es: $v = v_{H_0} + v_{RMS}$

$$\Rightarrow \quad v = H_0 \cdot d + v_{RMS}$$

$$\Rightarrow \quad H_0 = \frac{v - v_{RMS}}{d} = \frac{v}{d} - \underbrace{\frac{v_{RMS}}{d}}_{\text{esto debe ser menor que el 10\% de } H_0}$$

$$\Rightarrow \frac{v_{RMS}}{d} \leq 0{,}1 \cdot H_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{v_{RMS}}{0{,}1 \cdot H_0} \leq d}$$

$\rightarrow H_0 = 100 \text{ Km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \Rightarrow \boxed{d \geq \frac{600 \text{ Km s}^{-1}}{10 \cdot \text{Km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}} = 60 \text{ Mpc}}$

$\rightarrow H_0 = 70 \text{ Km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \Rightarrow \boxed{d \geq \frac{600}{7} \text{ Mpc} = 85{,}71 \text{ Mpc}}$

//

P2)

a) Principio cosmológico:

Dice que el universo, a partir de una escala mínima, es homogeneo e isotropo.

Con homogeneo nos referimos a que la densidad de materia (y energía) debe estar uniformemente distribuida, sin importar donde nos coloquemos, es decir que existe una invarianza traslacional en cuanto a lo observado.

Con isotropo nos referimos a que no importa la dirección en donde se mire, siempre se observa lo mismo, es decir la densidad de materia se distribuye de igual modo en todas las direcciones. A esto se le asocia una invarianza rotacional.

Consideran además que se asume la física convencional (GR + QM) y que las estructuras galacticas se producirían por pequeñas inhomogeneidades iniciales.

Alejandro Gutiérrez

b) Distancias

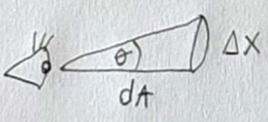
Física: Es la distancia "real", la que mediría una regla en un momento específico dado. Esta cambia con la expansión del universo

Comóvil: Es una distancia definida tal que no cambia debido a la expansión del universo, solo varía por efectos locales del movimiento. Al tiempo presente esta distancia es igual a la física, pero en el pasado, la física era menor.

Luminosidad: Es la calculada en base a la luminosidad intrínseca de la fuente
↓
d_L
y el flujo recibido. Donde este flujo a su vez depende de la luminosidad observada, en clases vimos que $d_L = (1+z)\cdot S(r)$, similar a $\underset{\text{observada}}{\lambda_e} = \underset{\text{emitida}}{\lambda_0}(1+z)$

⇒ Así, se puede entender a d_L como la distancia observada, dada la luminosidad de la fuente y como la expansión del universo le afecta.

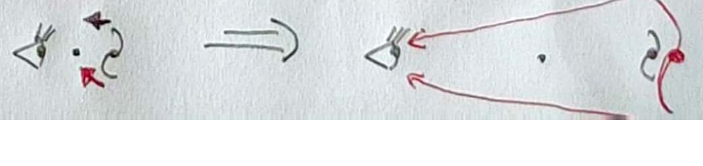
Angular: Es la distancia calculada en base a la geometría y diámetro observado de
↓
d_A
la fuente:



donde $d_A = a \cdot S(r)$
↳ factor de escala

⇒ Es la distancia observada dado el tamaño de la fuente y como la expansión le afecta a este.

⇝ Aquí la d_A decrece para $z \gtrsim 1$, es decir los objetos muy lejanos aparentan ser más grandes de lo que son y por ende se ven más cerca. Esto se debe a que en $z \sim 1$ la D.E. domina y la expansión le gana a la gravedad, así los objetos se alejan y para cuando nos llega su luz, esta parecerá tener mayor ángulo al real, como en el dibujo: t_1 $t_2 > t_1$



→ aparenta ser más grande

Alejandro Gutiérrez

c) Es debido a que el parámetro de Hubble tiene 2 valores medidos por distintos experimentos, el h determina fácilmente de cual valor se habla según $H_0 = 100 \cdot h \ km\, s^{-1} Mpc$
(h → adimensional)

así todo valor que dependa de H_0, dependerá de h, que al ser adimensional es más fácil manejar.

P3 | Tenemos que: $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\, dx^i dx^j \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & a^2 & & \\ & & a^2 & \\ & & & a^2 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}$

→ escogemos coordenadas cartesianas y $K=0$ pues la ecuación de conservación no depende de estas elecciones.

así $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0 \Rightarrow T^{\mu\nu}{}_{,\mu} + T^{\alpha\nu}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu} + T^{\mu\alpha}\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} = 0$

⇒ calculemos los christoffel, $g^{-1} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & a^{-2} & & \\ & & a^{-2} & \\ & & & a^{-2} \end{pmatrix}$

$$\boxed{\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\alpha,\beta} + g_{\sigma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma})}$$

$$\Gamma^{i}{}_{0j} = \Gamma^{i}{}_{j0} = \frac{1}{2} g^{i\sigma}(g_{\sigma 0,j} + g_{\sigma j,0} - \underbrace{g_{0j,\sigma}}_{}) $$

↳ $\sigma = 0$ da cero ⇒ $\sigma = K$ ↳ es 0, pues $g_{0j} = 0 \ \forall j$

$$= \frac{1}{2} g^{iK}(\underbrace{g_{K0,j}}_{0} + g_{Kj,0}) = \frac{1}{2} g^{iK}(g_{Kj,0})$$

g diagonal ⇒ solo $K = i = j$ vive de la suma

$$= \frac{1}{2} a^{-2} \cdot \partial_0 a^2 \, \delta^i{}_j = \frac{1}{2a^2} \cdot 2a\dot{a}\, \delta^i{}_j = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i{}_j$$

$$= H \delta^i{}_j$$

Olguinda Gutiérrez

$$\Gamma^{0}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \underbrace{g^{0\sigma}}_{\text{sólo } \sigma=0 \,\to\, g^{00}=-1} (g_{\sigma\alpha,\beta} + g_{\sigma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma})$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\underbrace{g_{0\alpha,\beta}}_{\substack{\text{sólo } \alpha=0\\ \beta=0}} + \underbrace{g_{0\beta,\alpha}}_{\checkmark} - g_{\alpha\beta,0}\right) = -\frac{1}{2}(-g_{\alpha\beta,0}) = \frac{1}{2}\delta^{\alpha}{}_{\beta}\cdot(a^2)^{\cdot}$$

pq al derivar (-1) es cero

$$= \delta^{\alpha}{}_{\beta}\, a\dot{a}$$

Separamos

$$\Gamma^{0}_{00} = \frac{1}{2} g_{00,0} = 0$$

$$\Gamma^{0}_{ij} = \frac{1}{2}\delta^{i}{}_{j}(a^2)^{\cdot} = \frac{1}{2}\delta^{i}{}_{j}\, 2a\dot{a} = a\dot{a}\,\delta^{i}{}_{j}$$

$$\Gamma^{i}_{00} = \frac{1}{2}\underbrace{g^{i\sigma}}_{\text{sólo } \sigma=j}(g_{\sigma 0,0} + g_{\sigma 0,0} - \underbrace{g_{00,\sigma}}_{\text{cero}}) = \frac{1}{2} g^{ij}(2\underbrace{g_{j0,0}}_{\text{cero}}) = 0$$

$$\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\sigma}(g_{\sigma j,k} + g_{\sigma k,j} - g_{jk,\sigma}) \quad / \sigma = l \quad (\sigma = 0 \text{ es } 0)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{g^{il}}_{\delta^{i}{}_{l}\cdot a^{-2}}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l})$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\cdot(\underbrace{g_{ij,k}}_{} + g_{ik,j} - g_{jk,i}) = 0$$

$$\cancel{(\delta^{i}{}_{j}a^2)_{,k}} + \cancel{(\delta^{i}{}_{k}a^2)_{,k}} - (\delta^{j}{}_{k})_{,i}$$

Alejandro Gutiérrez

En resumen:

$\Gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{j0} = H\delta^i_j$ $\qquad \Gamma^i_{00} = 0$

$\Gamma^0_{00} = 0$ $\qquad \Gamma^i_{jk} = 0$

$\Gamma^0_{ij} = a\dot{a}\,\delta^i_j$

Con $T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +\rho & & & \\ & pa^{-2} & & \\ & & pa^{-2} & \\ & & & pa^{-2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = T^{\mu\nu}{}_{,\mu} + T^{\alpha\nu}\Gamma^\mu_{\alpha\mu} + T^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\alpha\mu} = 0$

escogemos $\nu = 0$, así aparece $\dot{\rho}$

$$\Rightarrow \underbrace{T^{00}{}_{,0}}_{+\dot{\rho}} + \underbrace{T^{i0}{}_{,i}}_{0} + \underbrace{T^{\alpha 0}}_{\text{sí } \alpha=0}\Gamma^\mu_{\alpha\mu} + T^{\mu\alpha}\underbrace{\Gamma^0_{\alpha\mu}}_{a\dot{a}\delta^i_j} = 0$$

$$+\dot{\rho} + \underbrace{T^{00}}_{+\rho}\Gamma^\mu_{0\mu} + T^{ij}\,a\dot{a}\,\delta^i_j = 0$$

$\downarrow i = j$ 3 veces

$$+\dot{\rho} + \rho\,(\cancelto{0}{\Gamma^0_{00}} + \underbrace{\Gamma^i_{0i}}_{3H}) + 3pa^{-2}a\dot{a} = 0 \qquad /\cdot(-1)$$

$$\dot{\rho} + \rho\,3H + 3p\underbrace{\frac{\dot{a}}{a}}_{H} = 0$$

$$\boxed{\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0}$$

//

P4) Tenemos que la entropía S se conserva.

Alejandro Gutiérrez
20.677.580-7

además la densidad de entropía dada es $s = \frac{(\rho + P)}{T} = \frac{S}{V}$

$$\Rightarrow \quad S_i = S_f \quad \Rightarrow \quad s_i \cdot V_i = s_f \cdot V_f$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(\rho_i + P_i)}{T_i} \cdot V_i = \frac{(\rho_f + P_f)}{T_f} \cdot V_f$$

aquí el volumen $V = a^3$

$$\Rightarrow \quad (\rho_i + P_i)\frac{a_i^3}{T_i} = (\rho_f + P_f) \cdot \frac{a_f^3}{T_f} \quad (1)$$

Estudiamos el caso cuando los neutrinos están totalmente desacoplados i.e. $k_B \cdot T > 1\,\text{MeV}$ desde este punto las reacciones $e^+ + e^- \rightleftharpoons \nu + \bar{\nu}$ no son llevadas a cabo y la temperatura de los neutrinos empieza a evolucionar de manera distinta. Llegamos al punto de $\sim 0{,}5\,\text{MeV}$ donde los e^- y e^+ ya no tienen suficiente energía para ir solos, así ocurre $e^- + e^+ \to 2\gamma$ y pasan su energía a los fotones. Así nuestro momento inicial i es antes de la aniquilación $e^- + e^+$ donde $\underbrace{T_\nu = T_\gamma}_{\text{T fotones (bariones con } e^- \text{ y } e^+)}$ y el momento final f es después de la aniquilación $e^- + e^+$ donde se espera que T_γ aumente c/r a T_ν.

Dicho esto, recordamos de clases y de auxiliar que para materia relativista:

$$\rho_{boson} = g_* \cdot \frac{\pi^2}{30} T^4$$

$$\rho_{fermion} = g_* \cdot \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} T^4$$

$$P = \frac{1}{3}\rho$$

$\Rightarrow$ momento inicial $\to$ γ y e^-, e^+

$$\rho_i = \rho_\gamma + \rho_{e^-,e^+} = \Big(\underbrace{2}_{g_{*\gamma}} + \frac{7}{8} \cdot \underbrace{4}_{g_{*e^-e^+}}\Big) \frac{\pi^2}{30} \underbrace{T_i^4}_{T_\nu}$$

momento final

$$\rho_f = \rho_\gamma = 2 \cdot \frac{\pi^2}{30} \underbrace{T_f^4}_{T_\gamma}$$

Alejandro Gutiérrez

Al reemplazar en (1) (entonces $\rho + P = \frac{4}{3}\rho$)

$$\frac{4}{3}\underbrace{\left(2+\frac{7}{8}\cdot 4\right)}_{\frac{11}{2}}\frac{\pi^2}{30}T_\gamma^4\cdot\frac{a_i^3}{T_\gamma} = \frac{4}{3}(2)\frac{\pi^2}{30}T_\gamma^4\cdot\frac{a_f^3}{T_\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{11}{4}\cdot T_\gamma^3 a_i^3 = T_\gamma^3 a_f^3 \qquad /()^{1/3}$$

$$\Rightarrow \quad T_\gamma a_f = T_\gamma a_i\left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}$$

Ahora sabemos que $T_\gamma \propto \frac{1}{a}$ $\Rightarrow$ T_γ decrece con la expansión del universo

$$T_{\gamma\, inicial}\cdot a_{inicial} = \text{constante} = T_{\gamma\, final}\cdot a_{final}$$

$$\Rightarrow \frac{T_{\gamma i}\cdot a_i}{a_f} = \underbrace{T_{\gamma f}}$$

T_γ en el mismo tiempo que T_γ

"$T_\gamma(t) = \frac{T_\gamma(\text{inicial})}{a(t)}$"

Usando esto tenemos la relación de las T después de que los e^+ y e^- se aniquilaron

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T_\gamma}{T_\gamma} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}}$$

P5) En clases vimos que a partir de las ecuaciones de Friedmann:

Alejandro Gutiérrez

$$H^2 = H_0^2 \left(\underbrace{\Omega_{r,0} \cdot a^{-4}}_{\text{radiación}} + \underbrace{\Omega_{m,0}\, a^{-3}}_{\text{materia}} + \underbrace{\Omega_{K,0}\, a^{-2}}_{\text{curvatura}} + \underbrace{\Omega_{DE}}_{\text{energía oscura, pero sin usar la ec. de estado}} \right)$$

aquí $a^{-1} = (1+z)$

$$\Rightarrow H^2(z) = H_0^2 \left(\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{K,0}(1+z)^2 + \Omega_{DE}(z) \right)$$

Para encontrar el $\Omega_{DE}(z)$ usamos la ecuación de conservación pero con un $w_{DE}(z)$ arbitrario, así: $\dot{\rho} = -3H(\rho + P)$ con $P = \rho \cdot w_{DE}$ → "w_{DE} efectivo"

$$\Rightarrow \dot{\rho} = -3H\rho(1+w_{DE}) \quad / \; H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{(1+z)^{\cdot}}{(1+z)} = \frac{dz/dt}{1+z}$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = -3 \cdot \frac{dz}{dt} \frac{\rho}{(1+z)} (1+w_{DE}) \qquad w_{DE} = w_{DE}(z)$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -3 \cdot \frac{dz}{1+z} \cdot (1+w_{DE}) \quad / \int$$

$$\Rightarrow \ln(\rho/\rho_0) = -3 \int_0^z \frac{(1+w_{DE})}{1+z} dz$$

$$\Rightarrow \rho = \rho_0 \, e^{-3\int_0^z \frac{(1+w_{DE})}{1+z} dz} \quad / \cdot \frac{1}{\rho_c} \to \rho \text{ crítico}$$

$$\boxed{\Omega_{DE} = \Omega_{DE,0}\, e^{-3\int_0^z \frac{(1+w_{DE})}{1+z} dz}}$$

Alejandro Gutiérrez

Remplazando Ω_{DE} en $H^2 = \ldots$

$$\Rightarrow H^2(z) = H_0^2\left(\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{K,0}(1+z)^2 + \Omega_{DE,0}\, e^{-3\int_0^z \frac{(1+w_{DE})}{1+z}dz}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\frac{H^2}{H_0^2} - \Omega_{r,0}(1+z)^4 - \Omega_{m,0}(1+z)^3 - \Omega_{K,0}(1+z)^2\right]\frac{1}{\Omega_{DE,0}} = e^{-3\int_0^z \frac{(1+w_{DE})}{1+z}dz}$$

$$\ln(\%) = -3\int_0^z \frac{(1+w_{DE})}{1+z}dz \quad \Big/ \frac{d}{dz}$$

Lo cancela la $\int_0^z$

$$\Rightarrow \frac{1}{\%}\cdot\frac{d\%}{dz} = -3\,\frac{(1+w_{DE}(z))}{1+z}$$

$$\Rightarrow \frac{\left[\frac{2H\cdot H'}{H_0^2} - \Omega_{r,0}\cdot 4(1+z)^3 - \Omega_{m,0}\,3(1+z)^2 - \Omega_{K,0}\cdot 2(1+z)\right]\frac{1}{\cancel{\Omega_{DE,0}}}}{\left[\frac{H^2}{H_0^2} - \Omega_{r,0}(1+z)^4 - \Omega_{m,0}(1+z)^3 - \Omega_{K,0}(1+z)^2\right]\frac{1}{\cancel{\Omega_{DE,0}}}} = -3\,\frac{(1+w_{DE})}{1+z}$$

$$\Rightarrow \left\{-\frac{\left[\frac{2H}{H_0^2}\frac{dH}{dz} - \Omega_{r,0}\cdot 4(1+z)^3 - \Omega_{m,0}\,3(1+z)^2 - \Omega_{K,0}\cdot 2(1+z)\right]\cdot(1+z)}{3\left[\frac{H^2}{H_0^2} - \Omega_{r,0}(1+z)^4 - \Omega_{m,0}(1+z)^3 - \Omega_{K,0}(1+z)^2\right]}\right\} - 1 = w_{DE}(z)$$