P1

Alejandro Gutiérrez
20677580-7

Comenzamos de las ecuaciones hidrodinámicas del tensor energía - momento

$$\delta\rho = \frac{1}{a^3}\int_p \Delta f \bar{E} \qquad \delta P = \frac{1}{3}\frac{1}{a^3}\int_p \Delta f \frac{1}{\bar{E}}\frac{p^2}{a^2}$$

$$\delta u = \frac{1}{a(\bar{P}+\bar{\rho})}\int_p p^i \frac{1}{\nabla^2}\partial_i \Delta f \qquad \Pi_{ij} = \frac{1}{a^3}\int_p \Delta f \frac{1}{\bar{E}}\cdot\frac{1}{a^2}\left(p_i p_j - p^2\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)$$

aquí $\int_p \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$ y $\Delta f = -\bar{E}\,\partial_{\bar{E}} f\,\Theta$

$\Theta \equiv \frac{\Delta T}{\bar{T}}$ la perturbación de temperatura

$\bar{E}$ la energía no perturbada

Tener en mente que usaremos $\Theta(\vec{x},\vec{p},t) = \Theta(\vec{x},p,\hat{p},t)$ ya que generalmente Θ dependerá débilmente de p pero no de $\hat{p}$

Remplazamos Δf en las ecuaciones

$$\delta\rho = \frac{-1}{a^3}\int_p \bar{E}^2\partial_{\bar{E}} f\,\Theta \qquad \delta P = \frac{-1}{3a^3}\int_p \frac{p^2}{a^2}\Theta\,\partial_{\bar{E}} f$$

$$\delta u = \frac{-1}{a(\bar{P}+\bar{\rho})}\int_p p^i\frac{1}{\nabla^2}\bar{E}\,\partial_{\bar{E}} f\,\partial_i\Theta \qquad \Pi_{ij} = \frac{-1}{a^3}\int_p \partial_{\bar{E}} f\,\Theta\,\frac{1}{a^2}\left(p_i p_j - p^2\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)$$

usando $\int_p = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{1}{2\pi^2}\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\int p^2\,dp$

$$\delta\rho = \frac{-1}{a^3}\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\int p^2\,dp\,\Theta\,\bar{E}^2\partial_{\bar{E}} f \qquad \delta P = -\frac{1}{3a^3}\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\int p^2\,dp\,\frac{p^2}{a^2}\Theta\,\partial_{\bar{E}} f$$

$$\delta u = \frac{-1}{a(\bar{P}+\bar{\rho})}\frac{1}{2\pi^2}\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\int p^2\,dp\,p^i\frac{1}{\nabla^2}\bar{E}\,\partial_{\bar{E}} f\,\partial_i\Theta \qquad \Pi_{ij} = \frac{-1}{a^3 2\pi^2}\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\int p^2\,dp\,\partial_{\bar{E}} f\,\Theta\,\frac{1}{a^2}\left(p_i p_j - p^2\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)$$

$\Downarrow$

aquí se define

$$\Theta(\vec{x},\hat{p},t) = -\left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)^{-1}\frac{1}{2\pi a^3}\int dp\, p^2 \bar{E}^2 \partial_E f \cdot \Theta(\vec{x},p,\hat{p},t)$$

se identifica

$$\delta\rho = \int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\cdot\underbrace{\frac{-1}{a^3 2\pi^2}\int p^2 dp\, \bar{E}^2\partial_E f\,\Theta}_{\Theta} = \left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\Theta(\vec{x},\hat{p},t) \quad (1)$$

$$\delta u = \frac{-1}{a^3(\bar{\rho}+\bar{P})}\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\nabla^2}\partial_i\int\frac{d\Omega_p}{(4\pi)}\int p^2\cdot \underbrace{p}_{=\bar{E}\cdot a}\cdot\hat{p}^i dp\,\bar{E}\partial_E f\,\Theta$$

$$= \frac{-a}{a^3(\bar{\rho}+\bar{P})}\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\nabla^2}\partial_i\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\underbrace{\int p^2\bar{E}^2 dp\,\partial_E f\,\Theta}_{\Theta}\hat{p}^i$$

$$= \left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\frac{a}{(\bar{\rho}+\bar{P})}\frac{1}{\nabla^2}\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\partial_i\Theta(\vec{x},\hat{p},t)\cdot\hat{p}^i \quad (2)$$

$$\delta P = \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{2\pi^2 a^3}\cdot\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\int p^2\cdot\bar{E}^2\partial_E f\,\Theta = \frac{1}{3}\left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\cdot\Theta(\vec{x},\hat{p},t) \quad (3)$$

$p = \bar{E}\cdot a$

$\delta P = \frac{1}{3}\delta\rho$

$$\tilde{\Pi}_{ij} = \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{2\pi a^3}\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\int p^2 dp\,\partial_E f\,\Theta\frac{1}{a^2}\left(p_i p_j - p^2\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)$$

$p_i p_j \to \bar{E}^2 a^2\hat{p}_i\hat{p}_j$, $\quad p^2 \to \bar{E}^2 a^2$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{-1}{2\pi a^3}\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\left(\hat{p}_i\hat{p}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\int p^2 dp\,\bar{E}^2\partial_E f\,\Theta$$

$$= \frac{1}{3}\left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\cdot\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\Theta(\vec{x},\hat{p},t)\left(\hat{p}_i\hat{p}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right) \quad (4)$$

ahora descomponemos la fluctuación de temperatura en 2 contribuciones

$$\Theta(\vec{x},\hat{p},t) = \underbrace{\Theta^S(\vec{x},\hat{p},t)}_{\text{origen escalar}} + \underbrace{\Theta^T(\vec{x},\hat{p},t)}_{\text{origen tensorial}}$$

→ aquí solo nos enfocamos en la escalar pues es la que genera $\delta\rho, \delta\mathcal{P}$, δu y Π_{ij}, la otra son ondas gravitacionales.

trabajamos en espacio de Fourier (k es la escala de la perturbación)

$$\Theta^S(\vec{x},\hat{p},t) \rightarrow \tilde{\Theta}^S(\vec{k},\hat{p},t) \rightarrow \tilde{\Theta}^S(\vec{k},\mu,t)$$

↳ aquí $\mu \equiv \hat{k}\cdot\hat{p} = \cos(\alpha)$ esto se puede hacer ya que Θ depende de $\hat{k}$ y $\hat{p}$, es conveniente ya que μ admite una expansión cómoda en polinomios de Legendre:

$$\tilde{\Theta}^S(\vec{k},\mu,t) = \sum_\ell \frac{(2\ell+1)}{i^\ell} P_\ell(\mu)\,\tilde{\Theta}^S_\ell(\vec{k},t)$$

aquí $\tilde{\Theta}^S_\ell(\vec{k},t) = \frac{i^\ell}{2}\int_{-1}^{1} d\mu \cdot \tilde{\Theta}^S(\vec{k},\mu,t) P_\ell(\mu)$

esta expansión es equivalente a la expansión en $\hat{p}$ de la clase anterior

Veamos que ocurre en las perturbaciones:

(1) ⇒ $$\delta\rho = \left(T\frac{\delta\bar{\rho}}{\partial T}\right)\int \frac{d\Omega_p}{4\pi}\cdot \Theta^S(\vec{x},\hat{p},t)$$

↳ reemplazamos la sumatoria al pasar a Fourier

$$\delta\tilde{\rho} = \left(T\frac{\delta\bar{\rho}}{\partial T}\right)\sum_\ell \frac{(2\ell+1)}{i^\ell}\tilde{\Theta}^S_\ell(\vec{k},t)\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\cdot P_\ell(\mu)$$

aquí se usa el $\hat{z}$ de coordenadas esféricas como $\hat{k}$ ⇒ $\cos(\alpha) = \cos\theta_p = \mu$

$$\Rightarrow \int\frac{d\Omega_p}{4\pi}P_\ell(\mu) = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi_p}_{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{4\pi}P_\ell(\mu) \underset{P_0(\mu)=1}{=} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}d\mu\, P_\ell(\mu)P_0(\mu) = \frac{\delta_{\ell 0}}{2\ell+1}$$

$$\int P_\ell P_{\ell'} d\mu = \frac{2\delta_{\ell\ell'}}{(2\ell+1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta\tilde{\rho} = \left(T\frac{\delta\bar{\rho}}{\partial T}\right)\tilde{\Theta}_0^s(\bar{k},t)} \quad //$$

$\triangleleft$ como $\delta P = \delta\rho/3$

$$\Rightarrow \boxed{\delta\tilde{P} = \frac{1}{3}\left(T\frac{\delta\bar{\rho}}{\partial T}\right)\tilde{\Theta}_0^s(\bar{k},t)} \quad //$$

ahora δu

$$(2) \Rightarrow \delta u = \left(T\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial T}\right)\frac{a}{(\bar{\rho}+\bar{P})}\frac{1}{\nabla^2}\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\partial_i\Theta(\bar{x},\hat{p},t)\,\hat{p}^i$$

En Fourier $\nabla^{-2} \to k^{-2}$ $\quad \partial_i \to -i k_i = -i k \hat{k}_i$

$$\delta\tilde{u} = \left(T\frac{\delta\bar{\rho}}{\partial T}\right)\frac{a}{(\bar{\rho}+\bar{P})}\cdot k^{-2}\cdot\int\frac{d\Omega_p}{4\pi}\cdot(-i)k\,\underbrace{\hat{k}_i\hat{p}^i}_{\mu}\sum_l\frac{(2l+1)}{i^l}P_l(\mu)\,\tilde{\Theta}_l^s(\bar{k},t)$$

$$= \left(T\frac{\delta\bar{\rho}}{\partial T}\right)\frac{a}{(\bar{\rho}+\bar{P})}\frac{(-i)}{k}\underbrace{\int_0^{2\pi}d\phi_p}_{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{4\pi}\cdot\mu\sum_l\frac{(2l+1)}{i^l}P_l(\mu)\,\tilde{\Theta}_l^s(\bar{k},t)$$

$$= \left(T\frac{\delta\bar{\rho}}{\partial T}\right)\frac{a}{(\bar{\rho}+\bar{P})}\frac{(-i)}{k}\frac{1}{2}\sum_l\frac{(2l+1)}{i^l}\tilde{\Theta}_l^s(\bar{k},t)\underbrace{\int_{-1}^{1}d\mu\cdot\mu P_l(\mu)}$$

$\to P_1(\mu) = \mu$

$$= \int_{-1}^{1}d\mu\cdot P_1(\mu)P_l(\mu) = \frac{2\delta_{l1}}{(2l+1)}$$

$$= \left(T\frac{\delta\bar{\rho}}{\partial T}\right)\frac{a}{(\bar{\rho}+\bar{P})}\frac{(-\cancel{i})}{k}\frac{\cancel{3}}{\cancel{i}}\tilde{\Theta}_1^s(\bar{k},t)\frac{1}{\cancel{3}}$$

$$\boxed{\delta\tilde{u} = -\left(T\frac{\delta\bar{\rho}}{\partial T}\right)\frac{a}{(\bar{\rho}+\bar{P})}\cdot\frac{a}{k}\tilde{\Theta}_1^s(\bar{k},t)} \quad //$$

Resultado $\delta \Pi_{ij}$

$$(4) \Rightarrow \quad \tilde{\Pi}_{ij} = \frac{1}{3}\left(T \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial T}\right) \cdot \int_0^{2\pi} d\phi_p \int_{-1}^{1} \frac{d\mu}{4\pi} \sum_\ell \frac{(2\ell+1)}{i^\ell} P_\ell(\mu) \tilde{\Theta}^s_\ell(\bar{k},t) \cdot \left(\hat{p}_i \hat{p}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)$$

$$\tilde{\Pi}_{ij} = \frac{1}{3}\left(T \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial T}\right) \frac{1}{2} \sum_\ell \frac{(2\ell+1)}{i^\ell} \tilde{\Theta}^s_\ell(\bar{k},t) \int_{-1}^{1} d\mu \, P_\ell(\mu) \left(\hat{p}_i \hat{p}_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)$$

$$\cdot 1 = \frac{\hat{k}^i \hat{k}^j}{\hat{k}^i \hat{k}^j}$$

$$= \frac{1}{3}\left(T \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial T}\right) \frac{1}{2} \sum_\ell \frac{(2\ell+1)}{i^\ell} \tilde{\Theta}^s_\ell(\bar{k},t) \underbrace{\int_{-1}^{1} d\mu \, P_\ell(\mu) \left(\frac{\mu^2}{\hat{k}^i \hat{k}^j} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)}$$

$$\text{si } i = j \Rightarrow \hat{k}^i \hat{k}^i = 1$$

$$= \int_{-1}^{1} d\mu \, P_\ell(\mu) \left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 3 \int_{-1}^{1} d\mu \, P_\ell(\mu) \underbrace{(3\mu^2 - 1)}_{= P_2(\mu) \cdot 2}$$

$$= 6 \cdot \frac{2\delta_{\ell 2}}{(2\ell+1)}$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ i=j}}{\tilde{\Pi}} = \frac{1}{3}\left(T \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial T}\right) \frac{1}{2} \overbrace{\frac{1}{i^2}}^{-1} \tilde{\Theta}^s_2(\bar{k},t) \cdot 6 \cdot 2$$

$$\boxed{\tilde{\tilde{\Pi}} = -2\left(T \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial T}\right) \tilde{\Theta}^s_2(\bar{k},t)}$$

//

P2/ $\dot{\mathcal{N}} + ik\mu\,\mathcal{N} = -\dot{\Phi} - ik\mu\,\Psi$

Expandimos en polinomios de Legendre $\mathcal{N}(\vec{k},\mu,t) = \sum_{l} \frac{(2l+1)}{i^l} P_l(\mu)\mathcal{N}_l(\vec{k},t)$

$\Downarrow$

$$\sum_l \frac{(2l+1)}{i^l} P_l(\mu)\dot{\mathcal{N}}_l + ik\mu \sum_l \frac{(2l+1)}{i^l} P_l(\mu)\mathcal{N}_l = -\dot{\Phi} - ik\mu\,\Psi$$

recordar $P_0(\mu) = 1$ $\quad P_1(\mu) = \mu \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$

$l=0$/

$\dot{\mathcal{N}}_0 + ik\mu\,\mathcal{N}_0$

$l=1$/

$-3i\,\mu\,\dot{\mathcal{N}}_1 + ik\mu\,(-3i)\,\mu\,\mathcal{N}_1 =$

$= -3i\mu\,\dot{\mathcal{N}}_1 + 3k\mu^2\mathcal{N}_1$

$l=2$/

$-5\,\frac{1}{2}(3\mu^2-1)\dot{\mathcal{N}}_2 + ik\mu\,(-5)\frac{1}{2}(3\mu^2-1)\cdot\mathcal{N}_2$

$= -15\mu^2\dot{\mathcal{N}}_2 + \frac{5}{2}\dot{\mathcal{N}}_2 - ik\mu^3 15\,\mathcal{N}_2 + ik\mu\frac{5}{2}\mathcal{N}_2$

juntando por orden de magnitud en μ:

orden 0/ $\Rightarrow \boxed{\dot{\mathcal{N}}_0 + \frac{5}{2}\dot{\mathcal{N}}_2 = -\dot{\Phi}}$

orden 1/ $\Rightarrow ik\mu\,\mathcal{N}_0 - 3i\mu\,\dot{\mathcal{N}}_1 + ik\mu\frac{5}{2}\mathcal{N}_2 = -ik\mu\,\Psi \qquad / \; \frac{1}{-i\mu}\cdot\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \boxed{\dot{\mathcal{N}}_1 - \frac{k}{3}\mathcal{N}_0 - k\frac{5}{6}\mathcal{N}_2 = \frac{k}{3}\Psi}$

orden 2/ $\Rightarrow 3k\mu^2\mathcal{N}_1 - 15\mu^2\dot{\mathcal{N}}_2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\dot{\mathcal{N}}_2 - k\frac{1}{5}\mathcal{N}_1 = 0}$

P3) · $\rho_a(\vec{x},t) = \bar{\rho}_a(t, \delta t(\vec{x},t))$

Primero las condiciones iniciales, al ser iniciales se dan en un momento muy atrás en el tiempo donde todas las perturbaciones eran superhorizon, es decir que su escala $\lambda > R_H \Rightarrow \delta\rho$ no crece.

Aquí $\rho(t,\vec{x}) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(t,\vec{x})$ con $\bar{\rho}$ el Background y $\delta\rho$ la perturbación, pero como esta última no crece si nos desplazamos un delta de tiempo $\delta t(\bar{x},t)$

$\rho(t,\vec{x}) = \bar{\rho}(t+\delta t(t,\vec{x})) \Rightarrow$ La densidad evoluciona como el Background pues $\delta\rho$ no puede crecer.

Ahora sabemos que δt es un desplazamiento en el tiempo pequeño. Pero además en este momento inicial todas las especies se mantienen en equilibrio termico pues están acoplados en el baño termico. Así para distintas especies con igual escala el δt es el mismo, pues además entrarán al horizonte al mismo tiempo. $\Rightarrow \delta t_a(\bar{x},t) = \delta t_b(\bar{x},t) \Rightarrow$ "función universal"

$$\Rightarrow \frac{\delta\rho_a}{\dot{\rho}} = \frac{\delta\rho_b}{\dot{\rho}_b}$$ (si se aplica un Taylor a ρ)

$$\Rightarrow \frac{\delta\rho_a(t,\bar{x})}{\bar{\rho}_a + \bar{P}_a} = \frac{\delta\rho_b(t,\bar{x})}{\bar{\rho}_b + \bar{P}_b}$$ condición inicial adiabatica

P4 Comenzamos desde las ecuaciones para el fluido vistas en AUX:

$$\delta' = -\left(1+\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}\right)\cdot(\nabla\vec{v} - 3\Phi') - 3\mathcal{H}\left(\frac{\delta P}{\delta\rho} - \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}\right)\delta$$ continuidad

$$\vec{v}' = -\left(\mathcal{H} + \frac{\bar{P}'}{\bar{\rho}+\bar{P}}\right)\vec{v} - \frac{1}{\bar{\rho}+\bar{P}}\nabla\delta P - \nabla\Phi$$ Euler

aquí al incluir los bariones al plasma la relación $\bar{\rho} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{c_s^2}\bar{P}$ cambia por la

aproximación tight coupling aquí $c_s^2 = 1/3 \rightarrow c_s^2 = \frac{1}{3(1+R)} = \frac{1}{3m_{eff}}$

con m_{eff} la masa efectiva del oscilador y $R \equiv \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} > 0 \Rightarrow c_s$ disminuye

Desarrollando el termino proporcional a δ en la ec. de continuidad

desaparece pues $P \propto \rho \Rightarrow \frac{\delta P}{\delta\rho} - \frac{\bar{P}}{\bar{\rho}} = c_s^2 - c_s^2 = 0$

y el $\mathcal{H}$ en la ecuación de Euler se cancela con $\frac{\bar{P}'}{\bar{\rho}+\bar{P}}$

$\Downarrow$ Aproximamos $R \sim$ constante, pues para nuestro analisis servirá

$$\delta' = -\left(1+\frac{\bar{\rho}\cdot c_s^2}{\bar{\rho}}\right)(\nabla\vec{v} - 3\Phi') \quad / \; ()'$$

$$\vec{v}' = -\frac{1}{\bar{\rho}(1+c_s^2)}\nabla(c_s^2\delta\rho) - \nabla\Phi \quad / \; \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} = \delta \quad / \nabla$$

$$\Rightarrow \quad \delta'' = -(1+c_s^2)(\nabla\vec{v}' - 3\Phi'')$$

$$\nabla\vec{v}' = -\frac{1}{(1+c_s^2)}\cdot c_s^2\cdot\nabla^2\delta - \nabla^2\Phi$$

$\Downarrow$ reemplazamos $\nabla \vec{v}'$ en la primera ecuación

$$\delta'' = -(1+c_s^2)\left(-\frac{1}{1+c_s^2}\cdot c_s^2 \nabla^2 \delta - \nabla^2 \Phi - 3\Phi''\right)$$

$$\delta'' = \underbrace{c_s^2 \nabla^2 \delta}_{\substack{\text{presión} \\ \text{rad}}} + \underbrace{(1+c_s^2)\nabla^2 \Phi}_{\text{grav.}} + \underbrace{3(1+c_s^2)\Phi''}_{\text{rel. términos R.G.}}$$

Aquí

En Fourier

$$\delta'' + c_s^2 k^2 \delta = -k^2(1+c_s^2)\Phi + 3(1+c_s^2)\underbrace{\Phi''}_{\Phi \approx \text{constante}}$$

$$\Rightarrow \delta'' + \frac{1}{3(1+R)} k^2 \delta = -k^2 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3(1+R)}\right)}_{\frac{4+3R}{3(1+R)}} \Phi$$

$$\delta'' = -\frac{1}{3(1+R)} k^2 \delta - \frac{4k^2}{3(1+R)}\Phi - \frac{3Rk^2}{3(1+R)}\Phi$$

Con $S = \frac{\delta_r}{4} + \Phi \Rightarrow S'' = \frac{\delta_r''}{4}$

$$4S'' = -\frac{k^2}{3(1+R)}\cdot\left(\delta + 4\Phi + 3R\Phi\right)$$

$$S'' = \frac{-k^2}{3(1+R)}\left(\underbrace{\frac{\delta}{4} + \Phi}_{S\text{ original}} + \underbrace{\frac{3R}{4}\Phi}_{\text{offset a } S}\right)$$

↓

si usamos $\mathcal{S}_2 = \frac{\delta}{4} + \bar{\Phi} + \frac{3R}{4}\Phi$

obtenemos un oscilador armonico: $\mathcal{S}_2'' = -c_s^2 \cdot k^2 \mathcal{S}_2$ pero con una frecuencia también distinta al caso solo con fotones.

aún así antes teníamos $S = \frac{\delta}{4} + \Phi \Rightarrow S(\vec{k},\eta) = A(\vec{k})\cos\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\eta\right) + B(\vec{k})\sin\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\eta\right)$

Ahora con una frecuencia distinta se define el horizonte de sonido $r_s(\eta) = \int_0^\eta d\eta' c_s(\eta') = \frac{\eta}{\sqrt{3(1+R)}}$ y de la ecuación $S'' = -k^2 c_s^2 S - \frac{3R}{4}k^2 c_s^2 \Phi$

$$\Rightarrow S(\vec{k},\eta) = A(\vec{k})\cos\left(\frac{k}{\sqrt{3(1+R)}}\eta\right) + B(\vec{k})\sin\left(\frac{k}{\sqrt{3(1+R)}}\eta\right) + \Delta$$

con Δ el ansatz de la solución particular $\Rightarrow \underbrace{\Delta''}_{=0} = c_s^2 k^2 \Delta - \frac{3R}{4}k^2 c_s^2 \Phi \Rightarrow \boxed{\Delta = -\frac{3R}{4}\Phi}$

$$\Rightarrow S(\vec{k},\eta) = A(\vec{k})\cos(k \cdot r_s) + B(\vec{k})\sin(k r_s) + \Delta$$

aquí $S(\vec{k},\eta) = T_s(k,\eta)\cdot \mathcal{R}(\vec{k},0)$

aquí $\mathcal{R} \sim$ constante $\Rightarrow \dot{\mathcal{R}} = 0 \Rightarrow \dot{S} = 0 \Rightarrow B = 0$

$$S(\vec{k},\eta) = \underbrace{A(\vec{k})}_{\mathcal{R}}\cos(k \cdot r_s) + \underbrace{\Delta}_{\propto \mathcal{R}}$$

$\Downarrow$

$$S(\vec{k},\eta) = \mathcal{R}\,\underbrace{\left(\cos(k\cdot r_s) + C\right)}_{T_s(k,\eta)}$$

$$\Rightarrow T_s(k,\eta^*) \propto \cos(k\cdot r_s^*) + C$$

contribución dominante a un l dado

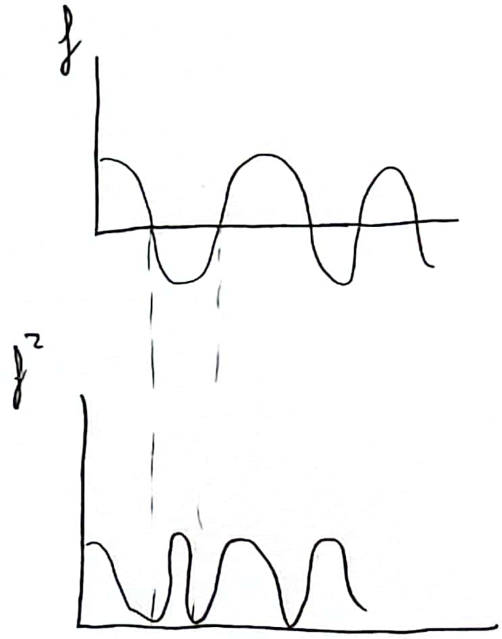
$k \sim \dfrac{l}{x_*}$

constante $\sim 14\,\text{Gpc}$

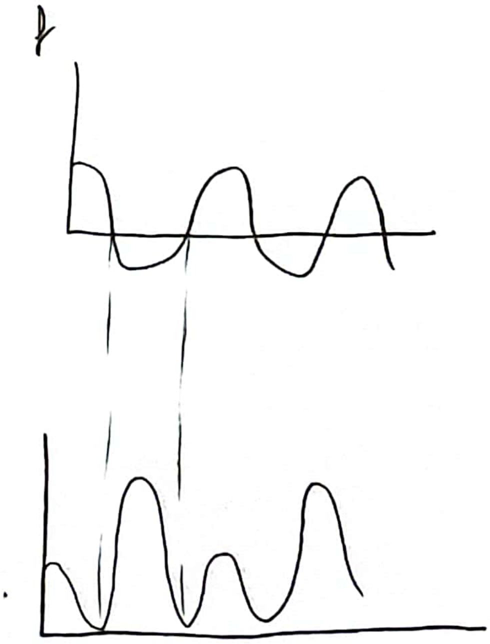
donde a diferencia del caso solo con rad. cambia la frecuencia y se añade una constante a la temperatura

$$\Rightarrow C_l \propto \left(\cos\left(\frac{l}{x_*}\cdot r_s^*\right) + C\right)^2$$

$\Rightarrow$ antes solo con rad.



ahora con el offset



$\Rightarrow$ Los bariones contribuyen a aumentar los picos impares de C_l en el CMB, atenuan los pares y cambian la frecuencia de las oscilaciones.

P5] Primero notar que la función de transferencia describe la evolución de las perturbaciones a través de las épocas al cruzar por la transición rad/mat.

En general se tiene que el potencial Φ es:

$$\underbrace{\Phi(\vec{k},a)}_{} \approx \underbrace{\Phi_p(\vec{k})}_{\text{potencial primordial (seteado por inflación)}} \cdot \underbrace{T(k)}_{\text{func de trans. (evolución de la perturbación a través de las épocas)}} \cdot \underbrace{D_1(a)}_{\text{func de crecimiento (evolución independiente de la escala en tiempos tardíos)}}$$

En particular $\Phi(\vec{k},a) = \frac{9}{10} \cdot \Phi_p(\vec{k})\, T(k) \cdot \frac{D_1(a)}{a}$

y Φ se relaciona con la variación de materia δ por la ecuación de Poisson, es decir se puede llegar a $\delta(\vec{k},a) = \frac{3}{5} \cdot \frac{k^2}{\Omega_m H_0^2} \cdot \Phi_p(\vec{k}) \cdot T(k) \cdot D_1(a)$ $\quad (\ast)$

$\Rightarrow$ ya tenemos una relación $\delta \leftrightarrow T$, ahora la idea es resolver las ecuaciones de Einstein y de Boltzmann para δ y así relacionar ese resultado con $(\ast)$ para determinar $T(k)$ en algún régimen (super o sub-horizon)

En particular usaremos las ecuaciones de Boltzmann para materia:

(1) $\dot{\delta} + ikv = -3\dot{\Phi}$

(2) $\dot{v} + \frac{\dot{a}}{a} v = ik\Phi$

además de la ecuación para Φ:

(3) $k^2 \cdot \Phi = 4\pi G a^2 \left[\rho_{dm}\delta + 4\rho_r \Theta_{r,0} + \frac{3aH}{k}\left(i\rho_{dm} v + 4\rho_r \Theta_{r,1}\right)\right]$

al definir $y \equiv \frac{a}{a_{eq}} = \frac{\rho_{dm}}{\rho_r}$ y hacer el cambio de variable

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{dy}{d\eta}\frac{d}{dy} = aHy \underbrace{\frac{d}{dy}}_{(\ )'}$$

$\Downarrow$ se obtiene

$\Downarrow$

$$(4)\quad \delta' + \frac{ikv}{aHy} = -3\Phi' \qquad (6)\quad k^2\Phi = \frac{3y}{2(y+1)}a^2H^2\delta$$

$$(5)\quad v' + \frac{v}{y} = \frac{ik\Phi}{aHy}$$

derivando (4) y usando (5) para hacer desaparecer v'

$$\Rightarrow \delta'' - \frac{ik(2+3y)v}{2aHy^2(1+y)} = \underbrace{-3\Phi''}_{\Phi'' << k^2} + \underbrace{\frac{k^2\Phi}{a^2H^2y^2}}_{\text{con (6)}}$$

$\Phi'' << k^2$ pues estamos en el caso sub-horizonte (modos pequeños)

$$\frac{3y\,a^2H^2\delta}{2(y+1)\cdot a^2H^2y^2} = \frac{3\delta}{2(y+1)y}$$

el v lo volvemos a eliminar con la ecuación (4) y despreciamos Φ'' nuevamente.

$$\Rightarrow \delta'' + \frac{2+3y}{2y(y+1)}\cdot\delta' - \frac{3}{2y(y+1)}\delta = 0$$

→ esta ecuación nos dice cómo evolucionan las perturbaciones de materia en el caso sub-horizonte.

Esta ecuación tiene una solución:

$$\boxed{\delta(k,y) = C_1\cdot D_1(y) + C_2\cdot D_2(y)} \quad (7) \quad \text{válida para } y >> y_H$$

el factor de escala cuando el modo entra al horizonte

Con $D_1(y) = y + 2/3$

$$D_2(y) = D_1(y)\cdot \ln\left(\frac{\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}-1}\right) - 2\sqrt{1+y}$$

Por otro lado de las ecuaciones (1) y (2), por esta vez sin hacer ningún cambio de variable:

(1) $\dot{\delta} + ikv = -3\dot{\Phi} \Rightarrow \ddot{\delta} + ik\dot{v} = -3\ddot{\Phi}$

(2) $\dot{v} + \frac{\dot{a}}{a}v = ik\Phi$ reemplazo para eliminar v'

$$\Rightarrow \ddot{\delta} + ik\left(-\frac{\dot{a}}{a}\cdot v + ik\Phi\right) = -3\ddot{\Phi} \quad / \text{con } (1)$$

$$\Rightarrow \ddot{\delta} + ik\left(-\frac{\dot{a}}{a}(-3\dot{\Phi} - \dot{\delta})\frac{1}{ik} + ik\Phi\right) = -3\ddot{\Phi}$$

$$\Rightarrow \ddot{\delta} + \frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = -3\ddot{\Phi} + k^2\Phi - \frac{3\dot{a}}{a}\cdot\dot{\Phi}$$

aquí $\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{\eta}$

$$\Rightarrow \ddot{\delta} + \frac{1}{\eta}\dot{\delta} = S(k,\eta) \qquad \text{con } S(k,\eta) = -3\ddot{\Phi} + k^2\Phi - \frac{3}{\eta}\dot{\Phi}$$

aquí se tiene la solución homogénea más la particular

$$\delta(k,\eta) = c_1 + c_2\ln(\eta) - \int_0^\eta d\eta'\, S(k,\eta')\,\eta'(\ln[k\eta'] - \ln[k\eta])$$

Por las condiciones iniciales $\delta \sim$ cte en $\eta = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ y $c_1 = \delta(k,0) = \frac{3\Phi_p}{2}$

de la integral se espera que el termino $S(\eta')\ln(k\eta')$ tienda a una constante pues a medida que crece η, $S \to 0$ y $\ln \to \infty$, en cambio $S(\eta')\cdot\ln(k\eta)$ será simple proporcional a $\ln(k\eta)$ dado que no se integra

$$\Rightarrow \text{la solución tendrá la forma } \delta(k,\eta) = \underbrace{A\,\Phi_p\,\ln(B)}_{\text{constante}}\cdot\underbrace{\ln(k\eta)}_{\text{proporcional a } k\eta} = A\,\Phi_p\ln(Bk\eta)$$

Ahora de dicha ecuación $\delta(k,\eta) = A\,\Phi_p \ln(Bk\eta)$

la igualamos a (7), que era nuestra otra solución en $\delta(k,y)$

$$A\,\Phi_p \ln\left(\frac{B y_m}{y_H}\right) = C_1 \cdot D_1(y_m) + C_2 D_2(y_m) \qquad \text{con } \underset{\substack{\downarrow \\ \text{variable}}}{y_H \ll y_m \ll 1}$$

Esta se puede derivar en y_m

$$\Rightarrow \frac{A\,\Phi_p}{y_m} = C_1 D_1'(y_m) + C_2 D_2'(y_m)$$

despejando $C_1 \Rightarrow$ $$C_1 = \frac{D_2'(y_m)\, A \ln(B y_m / y_H) - D_2(y_m)\cdot(A/y_m)}{D_1(y_m) D_2'(y_m) - D_1'(y_m) D_2(y_m)}\,\Phi_p$$

dado que $y \ll 1$ se puede aproximar:

$$C_1 \longrightarrow -\frac{9A\,\Phi_p}{A}\left[\frac{-2}{3}\ln\left(\frac{B y_m}{y_H}\right) - \left(\frac{2}{3}\right)\ln(4/y_m) + 2\right]$$

Con esto y volviendo de $y \to a$

$$\boxed{\delta(\vec{k},a) = \frac{3A\,\Phi_p(\vec{k})}{2}\ln\left[\frac{4Be^{-3}a_{eq}}{a_H}\right] D_1(a)} \quad (8) \qquad a \gg a_{eq}$$

Aquí en escalas pequeñas $\frac{a_{eq}}{a_H} = \sqrt{2}\,\frac{k}{k_{eq}}$ y si relacionamos (8) con

la primera ecuación $\Phi(\vec{k},a) = \frac{3}{5}\frac{k^2}{\Omega_m H_0^2}\cdot \Phi_p(\vec{k})\, T(k)\, D_1(a)$

$$\Rightarrow T(k) = \frac{5A\,\Omega_m H_0^2}{2k^2 a_{eq}}\ln\left[\frac{4Be^{-3}\sqrt{2}\,k}{k_{eq}}\right] \qquad k \gg k_{eq}$$

definiendo $k_{eq} = a_{eq} H(a_{eq}) = \sqrt{2}\, H_0\, a_{eq}^{-1/2}$

$$\Rightarrow \boxed{T(k) = \frac{12 k_{eq}^2}{k^2}\cdot \ln\left(\frac{k}{8k_{eq}}\right)} \qquad k \gg k_{eq}$$

P7 $\xi(x_1; x_2) = \xi(x_1)\,\xi(x_2)$

En un universo homogeneo, se tiene invarianza traslacional, es decir ξ solo importa de la distancia y dirección de donde se mida de manera separada

$$\Rightarrow \xi(x_1, x_2) = \xi(x_1 - x_2)$$

Por otro lado en uno isotropico el angulo no importará tampoco, así ξ solo depende del modulo de la distancia y no donde se mire.

$$\xi(x_1, x_2) = \xi(|x_1 - x_2|)$$

P8 $\delta(\vec{k}) = \int d^3r\, \delta(\vec{r})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$

$$\xi(\vec{k}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, P(\vec{k})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Sabemos de clases que el power spectrum se define como:

$$P(\vec{k}) = V|\delta(\vec{k})|^2 = V\delta(\vec{k})\,\delta(\vec{k})^*$$

/ notamos que $\delta(\vec{k})\,\delta(\vec{k})^*$ es la transformada de Fourier de esa cantidad pero en el espacio real.

$$\Rightarrow P(\vec{k}) = \frac{1}{V}\int \delta(\vec{x})\cdot\delta(\vec{y})\, e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}\, dV_x\, dV_y$$

Pero aquí $\xi(\vec{r}) = \langle \delta(\underbrace{\vec{y}+\vec{r}}_{\text{"}\vec{x}\text{"}})\,\delta(\vec{y})\rangle = \frac{1}{V}\int \delta(\vec{y}+\vec{r})\,\delta(\vec{y})\, dV_y$

debido a la def. de ξ

con $\vec{r} = \vec{x}-\vec{y}$

entonces se ve que $P(\vec{k}) = \int \xi(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, dV$

si asumimos isotropía $\Rightarrow \xi(\vec{r}) \to \xi(|\vec{r}|)$ (no depende del ángulo)

$\vec{k}\cdot\vec{r} \to k\cdot r\cos\theta \qquad dV \to r^2 dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

$$P(k) = \int \xi(r)\, r^2 dr \underbrace{\int_0^\pi e^{-ikr\cos\theta} \sin\theta\, d\theta}_{\text{es como } f(g)\cdot g'} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi}_{2\pi}$$

vemos que $\frac{d}{d\theta}\left(e^{-ikr\cos\theta}\right)' = e^{-ikr\cos\theta}\cdot(-ikr)(-\sin\theta)$

$$= e^{-ikr\cos\theta}\cdot ikr\sin\theta$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-ikr\cos\theta}}{ikr}\Big|_0^\pi = \frac{e^{-ikr\cdot(-1)} - e^{-ikr\cdot 1}}{ikr} = \frac{\sin(kr)\cdot 2i}{ikr}$$

$\Downarrow$

$$P(k) = \int \xi(r) \cdot r^2 dr \cdot \frac{\sin(kr)}{kr} \cdot 4\pi$$

Ahora considerando el promedio de ensemble:

$$V \langle \delta(k)\, \delta(k')^* \rangle = \frac{1}{V} \int \langle \delta(\vec{x})\, \delta(\vec{y}) \rangle e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x} + i\vec{k}'\cdot\vec{y}}\, dV_x\, dV_y \qquad / \ \vec{r} = \vec{x} - \vec{y}$$

$\Rightarrow dV_r = dV_x$

$$= \frac{1}{V} \int \underbrace{\langle \delta(\vec{y})\, \delta(\vec{y}+\vec{r}) \rangle}_{\text{es } \xi(\vec{r})} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{y} - i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, dV_r\, dV_y$$

$$= \frac{1}{V} \int \xi(\vec{r})\, e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{y} - i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, dV_r\, dV_y$$

$$= \underbrace{\frac{1}{V} \int e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{y}}\, dV_y}\ \underbrace{\int e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \xi(\vec{r})\, dV_r}_{\text{El } P(\vec{k}) \text{ antes calculado}}$$

aquí en nuestra convención de Fourier $\Rightarrow \delta_D(\vec{k}) = (2\pi)^{-3} \cdot \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d^3\vec{x}$

en nuestro caso $\vec{k} \to \vec{k} - \vec{k}'$ y $\vec{x} \to \vec{y}$

$$= \frac{(2\pi)^3}{V} \cdot \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') \cdot P(\vec{k})$$

y como $\delta(\vec{k}) = \delta^*(-\vec{k})$ pues es función $\mathbb{R}$

$$\boxed{V \langle \delta(\vec{k})\, \delta(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 V^{-1} P(\vec{k}) \cdot \delta_D(\vec{k} + \vec{k}')}$$

ξ y P son útiles para entender el inicio y formación de las galaxias que hoy observamos y que componen la estructura a gran escala. Esto desde un punto de vista estadístico.

Dado que no podemos hacer experimentos o "otras realizaciones del universo" en cosmología, solo podemos usar observaciones y analizar su estadística para entender como se formó y evolucionó nuestro universo. Aquí justamente ξ y su transformada de Fourier P contienen la información estadística de la materia observada. ξ nos dice como se correlacionan (a través de la gravedad) los distintos puntos observados, y P se puede relacionar directamente con la varianza de las perturbaciones de materia, básicamente como se aglomera la materia a distintas escalas.
Así la evolución del P nos dice como se fueron formando y aglomerando las galaxias.
Además nos dan una forma de buscar las perturbaciones iniciales que vinieron del periodo de inflación y que se relacionan con la física del universo temprano.
Continuando con lo último mencionado también se pueden apreciar las BAO, que vienen de la interacción rad-mat en los inicios del universo y como estas afectaron posteriormente a la evolución y formación de las galaxias.

En resumen ξ y P son útiles pues nos dan información de como y a partir de qué física se formaron las galaxias.