INTEGRACION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Métodos que no comienzan por si mismos

Métodos Numéricos – G. Pace – Editorial EUDENE -1997.
Métodos Numéricos para Ingenieros.- Chapra y Canale. Ed. McGraw Hill Interamericana.2007.
Análisis Numérico.- Burden y Faires.- Ed. IberoAmérica. 1996.-

Introducción

PROBLEMAS DE VALORES INICIALES QUE NO EMPIEZAN POR SI MISMOS

- Estos métodos pueden ser definidos como aquellos para los cuales un solo valor de la variable dependiente, dada en la solución inicial, no es suficiente para dar inicio al procedimiento de integración numérica.

- Es necesario el conocimiento de más de un punto de la solución, según el caso (en general 3,4 0 más) .

MÉTODO DE MILNE

Sea la ecuación diferencial general de primer orden y primer grado, :

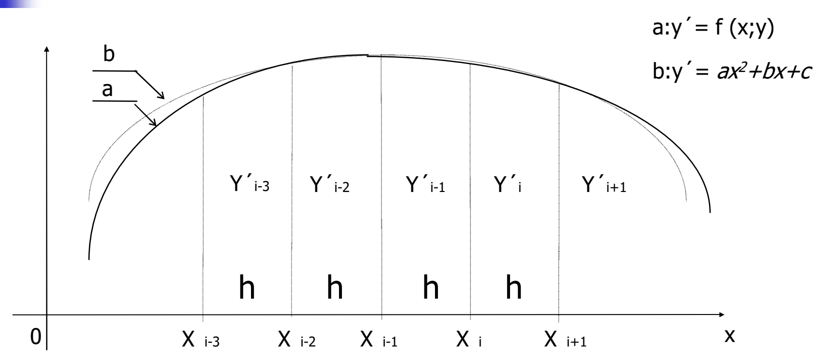
$y' = f(x\,;\,y)$ (10.1)

donde, al menos se conoce un punto de la solución ($x_0\,;y_0$), llamada *Solución Inicial*.

Se dividirá el área bajo un arco dado de la curva $y'=f(x\,;\,y)$ en cuatro intervalos de amplitud h (ver figura 10.1).

El área real bajo esta porción de curva se aproxima considerando el área de estas cuatro franjas como la abarcada por una parábola de segundo grado que tiene tres puntos en común con la curva real

MÉTODO DE MILNE (2)



- Figura 10.1 -

MÉTODO DE MILNE (3)

Si se hace coincidir el eje de las ordenadas con y'_{i-1} no se pierde generalidad y se tiene la ventaja de simplificar las expresiones. De esta manera, el área bajo la parábola está dada por:

$$A = \int_{-2h}^{2h} \left(ax^2 + bx + c\right)dx$$

la que integrada resulta :

$$A = \frac{16}{3}ah^3 + 4ch \qquad (10.2)$$

siendo las constantes *a ; c*:

$$a = \frac{y'_i - 2y'_{i-1} + y'_{i-2}}{2h^2} ; c = y'_{i-1} \qquad (10.3)$$

MÉTODO DE MILNE (4)

➢ Sustituyendo los coeficientes dados por (10.3) en la (10.2) se obtiene, para el área *A* de las cuatro franjas:

$$A = \frac{4}{3}h\left[2y'_i - y'_{i-1} + 2y'_{i-2}\right] \qquad (10.4)$$

Expresión que será utilizada como parte de la ecuación de predicción.

Considerando la ecuación (10.1), esta técnica consiste en obtener valores apropiados de *y* utilizando una ecuación de *PREDICCIÓN* y corrigiendo luego estos valores, por el uso iterativo de una ecuación de *CORRECCIÓN*.

MÉTODO DE MILNE (5)

Ecuación de *PREDICCIÓN DE MILNE* :

$$P(y_{i+1}) = y_{i-3} + A = y_{i-3} + \frac{4}{3}h[2y'_i - y'_{i-1} + 2y'_{i-2}] \qquad (10.5)$$

Utiliza el área de cuatro franjas bajo una aproximación parabólica de segundo grado.

La ecuación de *CORRECCIÓN DE MILNE* está dada por:

$$C(y_{i+1}) = y_{i-1} + \frac{h}{3}[y'_{i-1} + 4y'_i + P(y'_{i+1})] \qquad (10.6)$$

Y utiliza la regla de *SIMPSON* para determinar el área de dos franjas bajo una curva y suministrar asi, valores corregidos de la variable dependiente.

MÉTODO DE MILNE (6)

La ecuación de *CORRECCIÓN DE MILNE* está dada por:

$$C(y_{i+1}) = y_{i-1} + \frac{h}{3}[y'_{i-1} + 4y'_i + P(y'_{i+1})] \qquad (10.6)$$

- Suponiendo conocidos los valores de y_0, y_1; y_2 ; y_3, el primer paso consiste en obtener el $P(y_4)$, utilizando la ec. (10.5) con i =3
- El valor así hallado se sustituye en la ec. diferencial para obtener y'_4, designado $P(y'_4)$.
- Este último se utiliza , entonces en (10.6) para obtener un corregido de y_4.
- Dado que se ha partido del supuesto que se conocen cuatro valores de y, deben ser calculadas las derivadas primeras en los respectivos puntos: y'_0, y'_1; y'_2 ; y'_3

MÉTODO DE MILNE (7)

Deben ser determinados de alguna manera valores para: y'_1 y'_2 y'_3 , y_1, y_2, y_3

El uso de la serie de *TAYLOR*, resulta preciso para determinar los tres primeros valores que permiten iniciar el procedimiento. Es necesario conocer las derivadas sucesivas primeras en el punto $x=x_0$, para lograr su aplicación.

Es de buena práctica recurrir al uso del Método de Runge-Kutta para obtener aquellos valores iniciales, necesarios para la aplicación del Método de Milne.

La solución de la ecuación $\boldsymbol{y' = f(x\ ;\ y)}$ se puede lograr utilizando el método de *RUNGE-KUTTA* de cuarto orden, pero el método de *MILNE* utiliza menos tiempo de procesamiento y la estimación del error es más sencilla y precisa.

La ecuación de corrección expresada en (10.6), juntamente con la ecuación diferencial dada (10.1), se utilizan en forma iterativa hasta que dos valores consecutivos de y_{i+1} difieran en menos de un cierto **E** previamente establecido.

MÉTODO DE MILNE (8)

Ejemplo 10.1.- Resolver la ecuación diferencial $y'=x+y$, con la condición inicial (0;0) en el intervalo (0;2,4), siendo h=0,3 y tomando **E**<0,001.

Solución: Mediante la serie de *TAYLOR* es posible calcular:

$y(0{,}3) = 0{,}050$; $y'(0{,}3) = 0{,}350$

$y(0{,}6) = 0{,}222$; $y'(0{,}6) = 0{,}822$

$y(0{,}9) = 0{,}560$; $y'(0{,}9) = 1{,}460$

Métodos que no se inician por sí mismos

4. En función a los resultados obtenidos en 3.a complete la siguiente tabla:

x	y	y'
0		
0,2		
0,4		
0,6		

a) Calcule la solución en los puntos x=0,8 y x=1, aplicando el Método de Milne.

MÉTODO DE MILNE (8)

Aplicando sistemáticamente las ecuaciones (10.5), (10.1) y (10.6) se obtiene

x_i	$P(y_{i+1})$	$P(y'_{i+1})$	$C(y_{i+1})$	$C(y'_{i+1})$	$C(y_{i+1})$
1,2	**1,119**	**2,319**	**1,119**	**2,319**	**1,119**
1,5	**1,979**	**3,479**	**1,982**	**3,482**	**1,981**
1,8	**3,248**	**5,048**	**3,249**	**5,049**	**3,249**
2,1	**5,062**	**7,162**	**5,066**	**7,166**	**5,066**
2,4	**7,618**	**10,018**	**7,622**	**10,019**	**7,623**

Error en el Método de MILNE

Las ecuaciones de **Predicción** (10.5) y de **Corrección** (10.6) resultan exactas bajo condiciones muy particulares. Puede demostrarse que el error cometido con la aplicación de las ecuaciones es del orden:

$$\mathbf{E} \leq -\frac{1}{90} h^5 f^{IV}(\theta) \qquad (10.7)$$

donde $x_{i-3} < \theta < x_{i-1}$.

El error no puede ser calculado con exactitud, pero, puede acotarse tomando el extremo del intervalo que hace máxima la derivada cuarta de *f*.

Generalización del Método de MILNE

Los principios empleados en la deducción de las fórmulas de **Predicción** (10.5) y **Corrección** (10.6) del método se prestan a ser extendidas a otros. Esto hace aumentar la precisión de las fórmulas pero, se requerirán más de cuatro puntos de la curva integral. Para el caso particular de 6 franjas bajo la curva y`(x).:

$$P(y_{i+1}) = y_{i-5} + \frac{3}{10} h\left[11 y'_{i-4} - 14 y'_{i-3} + 26 y'_{i-2} - 14 y'_{i-1} + 11 y'_i\right] \qquad (10.8)$$

$$C(y_{i+1}) = y_{i-3} + \frac{2}{45} h\left[7 y'_{i-3} + 32 y'_{i-2} + 12 y'_{i-1} + 32 y'_i + 7 P(y'_{i+1})\right] \qquad (10.9)$$

El error que se comete por paso, aplicando las expresiones (10.8) y (10.9) es del orden:

$$E \leq \left| -\frac{8}{945} h^7 f^{VII}(\theta) \right| \qquad (10.10) \qquad x_{i-5} < \theta < x_{i-2}.$$

ESTABILIDAD DE LOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

PASO: conjunto de operaciones aritméticas elementales y decisiones lógicas que componen la parte del algoritmo de resolución de una ecuación diferencial, destinada a determinar el valor de la variable en cada punto del intervalo comprometido en el procesamiento.

El error por paso de un método aproximado se denomina **ERROR LOCAL**, puesto que es un error que se introduce en el paso correspondiente del proceso de integración.

El **ERROR TOTAL** que existe en la solución durante un paso particular (diferencia entre el valor verdadero y el valor calculado numéricamente) depende no solo de la magnitud de los errores locales introducidos por ese paso particular, sino también de las características de propagación de los errores locales que se han introducido en los pasos previos.

ESTABILIDAD DE LOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN (2)

Sea la ecuación diferencial: $y' = f(x\,;\,y)$ (10.1)

Definición 10.1.- *"Se dice que un método numérico es* **ESTABLE**, *si en el proceso de integrar una ecuación diferencial, donde $f_y < 0$, la diferencia entre la solución real y la solución numérica (error total), tiende a disminuir en magnitud conforme la integración progresa".*

Definición 10.2.- *"Se dice que un método numérico destinado a resolver ecuaciones diferenciales, es* **RELATIVAMENTE ESTABLE**, *si la velocidad de crecimiento del error total durante el proceso de integración es menor que la velocidad de crecimiento del valor absoluto de la solución".*

ESTABILIDAD DE LOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN (3)

La ***estabilidad*** de un método de integración numérica no se define en el caso en que la derivada con respecto a y sea mayor que cero ($f_y > 0$).

Si (f_y >0) : la solución de la ecuación diferencial crecerá en forma exponencial y el error total generalmente crecerá en la misma forma. Para la solución de una ecuación de ese tipo, sobre un rango extendido de integración, se debe utilizar un método que sea *RELATIVAMENTE ESTABLE*, pues, suponiendo que la solución exacta tiene la forma:

$$y = A\, e^{x} \qquad (10.11)$$

El error total causado por el método numérico en la solución debe tener la forma general siguiente

$$\mathbf{E} = B\, e^{m\, x} \qquad (10.12)$$

Si es $m < 1$, el método se considera relativamente estable

ESTABILIDAD DE LOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN (4)

Estabilidad relativa: es también importante cuando se utiliza para resolver una ecuación, para la cual $f_y < 0$, la solución tiende a cero asintóticamente, porque, se desea una solución precisa que encierre un valor de y muy cercano a cero.

La velocidad de disminución del error total debe ser mayor que la de la solución. En forma analítica, si la solución tiene la forma:

$$y = A\, e^{-x} \qquad (10.13)$$

entonces el error total producido por el método debe tener la forma general:

$$\mathbf{E} = B\, e^{-m\, x} \qquad (10.14)$$

en el cual $m > 1$, para que el método se considere relativamente estable.

ESTABILIDAD DE LOS MÉTODOS DE INTEGRACIÓN (5)

Los conceptos de *ESTABILIDAD* y *ESTABILIDAD RELATIVA* son independientes y no excluyentes; de ningún modo el primero implica al segundo, como parte propia; ni tampoco que, el segundo invalida al primero de los mencionados.

La propagación de los errores durante una integración no es un obstáculo serio en la solución de la mayoría de los problemas prácticos. El uso de valores relativamente pequeños de *h* suministrará respuestas suficientemente precisas, independientemente de las características de *estabilidad o estabilidad relativa* del método numérico empleado.

Sin embargo, si se desearan soluciones sobre intervalos de integración muy grandes, se deberá recurrir a métodos estables o relativamente estables

MÉTODO DE HAMMING

Este método,permite resolver ecuaciones diferenciales del tipo $y' = f(x\,;\,y)$ y es *ESTABLE* y *RELATIVAMENTE ESTABLE*.

Se trata,de un método del tipo *PREDICTOR - CORRECTOR*

Utiliza, la misma fórmula de predicción que el método de *MILNE*:

$$P(y_{i+1}) = y_{i-3} + \frac{4}{3}h\left[2y'_i - y'_{i-1} + 2y'_{i-2}\right] \qquad (10.15)$$

Para obtener una mejor aproximación de este valor se utiliza la denominada ECUACIÓN GENERALIZADA DE CORRECCIÓN DE HAMMING dada por la siguiente expresión:

$$y_{i+1} = a_i y_i + a_{i-1}y_{i-1} + a_{i-2}y_{i-2} + h\left[b_{i+1}y'_{i+1} + b_i y'_i + b_{i-1}y'_{i-1}\right] \qquad (10.15)$$

MÉTODO DE HAMMING (2)

Sustituyendo los valores de y_{i-2}; y_{i-1}; y'_i; y'_{i-1}; y'_{i+1}; por sus respectivos desarrollos en serie de *TAYLOR* en función de y_i, se obtiene:

$$y_{i+1} = a_i y_i + a_{i-1}\left[y_i + y_i'(-h) + \tfrac{1}{2!}y_i''(-h)^2 + \tfrac{1}{3!}y'''_i(-h)^3 + \ldots\right] + \\ + a_{i-2}\left[y_i + y_i'(-2h) + \tfrac{1}{2!}y_i''(-2h)^2 + \tfrac{1}{3!}y_i''(-2h)^3 + \ldots\right] + \\ + h\left\{b_{i+1}\left[y_i' + y_i''h + \tfrac{1}{2!}y_i'''h^2 + \tfrac{1}{3!}y_i^{IV}h^3 + \ldots\right] + b_i y_i' + \right. \\ \left. + b_{i-1}\left[y_i' + y_i''(-h) + \tfrac{1}{2!}y_i''(-h)^2 + \tfrac{1}{3!}y_i^{IV}(-h)^3 + \ldots\right]\right\} \quad (10.16)$$

El desarrollo en serie de *TAYLOR de* la función y_{i+1}, resulta:

$$y_{i+1} = y_i + hy_i' + \frac{1}{2!}h^2 y_i'' + \frac{1}{3!}h^3 y_i''' + \ldots \quad (10.17)$$

MÉTODO DE HAMMING (3)

Igualando los coeficientes, en la expresión (10.16) con los homólogos de (10.17), se llega al siguiente conjunto de ecuaciones lineales simultáneas:

$$(10.18)\quad \begin{cases} a_i + a_{i-1} + a_{i-2} = 1 \\ -a_{i-1} - 2a_{i-2} + b_{i+1} + b_i + b_{i-1} = 1 \\ \tfrac{1}{2}a_{i-1} + 2a_{i-2} + b_{i+1} - b_{i-1} = \tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{1}{6}a_{i-1} - \tfrac{4}{3}a_{i-2} + \tfrac{1}{2}b_{i+1} + \tfrac{1}{2}b_{i-1} = \tfrac{1}{6} \\ \tfrac{1}{24}a_{i-1} + \tfrac{2}{3}a_{i-2} + b_{i+1} - \tfrac{1}{6}b_{i-1} = \tfrac{1}{24} \end{cases}$$

Sistema con seis incógnitas. Será necesario, de una sexta ecuación para determinar su valor. *HAMMING* demuestra que $\mathbf{a_{i-1} = 0}$, se logra una ecuación de corrección que es *estable y relativamente estable* cuando se imponen ciertas condiciones a la magnitud del incremento *h*.

MÉTODO DE HAMMING (4)

Utilizando $\boldsymbol{a_{i-1}} = \mathbf{0}$**,** el sistema (10.18) arroja los siguientes valores:

$$a_i = \tfrac{9}{8}; a_{i-1} = 0; a_{i-2} = -\tfrac{1}{8}; b_{i+1} = \tfrac{3}{8}; b_i = \tfrac{3}{4}; b_{i-1} = -\tfrac{3}{8} \qquad (10.19)$$

La sustitución de los valores obtenidos, en la ecuación (10.15) produce la **ECUACIÓN DE CORRECCIÓN DE HAMMING**:

$$C(y_{i+1}) = \tfrac{1}{8}\{9y_i - y_{i-2} + 3h[P(y'_{i+1}) + 2y'_i - y'_{i-1}]\} \qquad (10.20)$$

MÉTODO DE HAMMING (5)

Esta ecuación es *ESTABLE y RELATIVAMENTE ESTABLE* cuando f_y<0, si se toma:

$$h < \frac{0{,}75}{|f_y|} \qquad (10.21)$$

Usada conjuntamente con la ecuación (10.20), para realizar la iteración hasta lograr la convergencia deseada

La ecuación de corrección es *RELATIVAMENTE ESTABLE* para la solución de las ecuaciones diferenciales en intervalos donde f_y>0, cuando:

$$h < \frac{0{,}4}{f_y} \qquad (10.22)$$

MÉTODO DE HAMMING (6)

Para mantener pequeño el error por paso, el valor de h debe ser menor que los especificados por las relaciones (10.21) y (10.22). En este método es del orden de h^5.

Operación del método: calcular los valores de y_{i-2}; y_{i-1}; y_i; y'_{i-2}; y'_{i-1}; y'_i,
Una vez obtenidos, predecir el valor de y_{i+1} por medio de la fórmula (10.5) de predicción de *MILNE,* luego utilizar la ecuación diferencial dada (10.1) para calcular una predicción de la derivada primera
Por último, corregir las predicciones mediante la aplicación iterativa de la fórmula de corrección de *HAMMING* (10.20), hasta obtener la convergencia deseada.

Método Modificado de HAMMING

La mayor parte del error que se comete en el cálculo del valor de predicción, se puede eliminar utilizando la siguiente ecuación:

$$M(y_{i+1}) = P(y_{i+1}) - \frac{112}{121}\left[P(y_i) - C(y_i)\right] \qquad (10.23)$$

Este valor se sustituye luego en la ecuación diferencial y se obtiene un valor modificado de $y'_{i+1,}$ $M(y'_{i+1})$; se utiliza en la ecuación de corrección para obtener

$$C(y_{i+1}) = \tfrac{1}{8}\left\{9y_i - y_{i-2} + 3h\left[P(y'_{i+1}) + 2y'_i - y'_{i-1}\right]\right\} \qquad (10.24)$$

El valor del corregido puede a su vez mejorarse utilizando la expresión:

$$F(y_{i+1}) = C(y_{i+1}) - \frac{9}{121}\left[P(y_{i+1}) - C(y_{i+1})\right] \qquad (10.25)$$

Donde F(y $_{i+1}$) representa directamente, es decir sin iteraciones, el VALOR FINAL DEL MÉTODO MODIFICADO DE HAMMING

Método Modificado de HAMMING (2)

Este método también resulta *estable y relativamente estable* si se aplica en el caso en que f_y<0, tomando el incremento:

$$h < \frac{0{,}65}{\left|f_y\right|}$$

En caso contrario; cuando f_y>0, resulta *relativamente estable* tomando al incremento:

$$h < \frac{0{,}4}{f_y}$$

ANÁLISIS DEL ERROR

El objetivo primordial del análisis del error consiste en suministrar un método para controlar el error total

El error total en cualquier paso proviene, de las siguientes fuentes:

a) El *ERROR POR REDONDEO*

b) El *ERROR POR TRUNCAMIENTO*

c) El *ERROR ACUMULADO*

ANÁLISIS DEL ERROR (2)

Se debe recordar que, en ocasiones, los valores iniciales con que se da origen al proceso están afectados de ciertos errores denominados *INHERENTES*. En estos casos no tiene ningún sentido calcular la solución con mayor precisión que la que justifican los datos utilizados, seleccionando un tamaño de paso demasiado pequeño

Tarea critica es definir el tamaño del paso. Es necesario examinar el efecto de cada uno de los errores por paso, en función del incremento y su influencia sobre el error total.

ANÁLISIS DEL ERROR (3)

El error POR REDONDEO está presente en cada paso y su magnitud depende de la capacidad del soporte de la computadora utilizada.
Es independiente del tamaño del intervalo, y aumenta en proporción con el número de pasos comprometidos en el procesamiento.

El error POR TRUNCAMIENTO aparece también en cada paso del proceso, pero es función de la magnitud del intervalo h, ya que varía con el orden del error h^{n}.
La única forma de controlar el error total por paso consiste en controlar el error por truncamiento, en cada paso el error total disminuye conforme se reduce el error por truncamiento de cada paso.

SELECCIÓN DE UN MÉTODO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Habiéndose estudiado algunos de los métodos de integración numérica existentes, para resolver ecuaciones diferenciales, y el error que en cada uno de ellos se comete.

Es conveniente compararlos desde un punto de vista tal que permita seleccionar el más apto para una aplicación determinada, siguiendo ciertos criterios definidos:

SELECCIÓN DE UN MÉTODO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA (2)

1. Cuando el intervalo de integración de un problema es relativamente corto, es poco probable que la estabilidad sea un problema , de manera que un método simple como el de **Euler o Modificado de Euler**, es aceptable

2. Para intervalos que involucran un gran nro de pasos, el error por truncamiento por paso debe mantenerse pequeño. Los métodos de **Milne** y de **Hamming** resultan adecuados en este caso.

3. En caso de intervalos muy grandes, deberá utilizarse el método de **Hamming** para valores de ***h*** que lo hagan estable, además de realizar un análisis del error en cada paso

SELECCIÓN DE UN MÉTODO DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA (3)

4. Cuando se desea un error por truncamiento por paso pequeño y no es importante el tiempo por procesamiento, resulta conveniente el método de **4to orden de Runge-Kutta**

5. Si el rango de integración es intermedio, y además debe considerarse la acumulación del error y el tiempo por procesamiento, pero ninguno como factor critico, se utilizan los métodos **modificado de Euler o Runge-Kutta de orden 3.**