Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Asignatura

MÉTODOS COMPUTACIONALES - MÉTODOS NUMÉRICOS -

Método de las potencias

2024

Dado el siguiente sistemas de ecuaciones

a) determine el valor propio mayor y su vector asociado.
b) determine el mínimo autovalor y su vector asociado.

$$\begin{cases} (3{,}556-\lambda)x_1 - 1{,}778x_2 = 1{,}778 \\ -1{,}778x_1 + (3{,}556-\lambda)x_2 - 1{,}778x_3 = 0 \\ -1{,}778x_2 + (3{,}556-\lambda)x_3 = 1{,}778 \end{cases}$$

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

a) Para hallar el máximo autovalor
Consideramos la solución inicial $(1,1,1)^T$

$$\begin{bmatrix} 3,556 & -1,778 & 0 \\ -1,778 & 3,556 & -1,778 \\ 0 & -1,778 & 3,556 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1,778 \\ 0 \\ 1,778 \end{Bmatrix} = 1,778 * \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Así la primera estimación del valor propio es 1,778.
La siguiente iteración consiste en multiplicar A por $(1,0,1)^T$.

$$\begin{bmatrix} 3,556 & -1,778 & 0 \\ -1,778 & 3,556 & -1,778 \\ 0 & -1,778 & 3,556 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,556 \\ -3,556 \\ 3,556 \end{Bmatrix} = 3,556 * \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto el valor propio estimado en la segunda iteración es 3,556 que puede utilizarse para determinar el error estimado:

$$|E_{\%}| = \left|\frac{3,556 - 1,778}{3,556}\right| * 100 = 50\%$$

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Luego el proceso puede repetirse.
Tercera iteración:

$$\begin{bmatrix} 3,556 & -1,778 & 0 \\ -1,778 & 3,556 & -1,778 \\ 0 & -1,778 & 3,556 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5,334 \\ -7,112 \\ 5,334 \end{Bmatrix} = 5,334 * \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.333 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Donde $|E_{\%}| = \left|\frac{5,334-3,556}{5,334}\right| * 100 = 33\%$
Cuarta iteración:

$$\begin{bmatrix} 3,556 & -1,778 & 0 \\ -1,778 & 3,556 & -1,778 \\ 0 & -1,778 & 3,556 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 1 \\ -1,333 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5,926 \\ -8,296 \\ 5,926 \end{Bmatrix} = 5,926 * \begin{Bmatrix} 1 \\ -1,400 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Donde $|E_{\%}| = \left|\frac{5,926-5,334}{5,926}\right| * 100 = 10\%$

MÉTODOS COMPUTACIONALES – MÉTODOS NUMÉRICOS

Quinta iteración:

$$\begin{bmatrix} 3,556 & -1,778 & 0 \\ -1,778 & 3,556 & -1,778 \\ 0 & -1,778 & 3,556 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 1 \\ -1,400 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6,045 \\ -8,534 \\ 6,045 \end{Bmatrix} = 6,045 * \begin{Bmatrix} 1 \\ -1,412 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Donde $|E_{\%}| = \left|\frac{6,045-5,926}{6,045}\right| * 100 = 2\%$

Por lo que el máximo autovalor será 6, 045 y su vector asociado (1 -1,412 1)^{T}

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

b) Para hallar el mínimo autovalor.

Se halla la matriz inversa de la matriz de coeficientes (con el Método de Gauss-Jordan)

$$\begin{bmatrix} 3,556 & -1,778 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1,778 & 3,556 & -1,778 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1,778 & 3,556 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2,667 & -1,778 & 0,5 & 1 & 0 \\ -1,778 & 3,556 & 0 & 0 & 1 \\ -0,5 & 0 & 0,281 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2,371 & 0,333 & 0,667 & 1 \\ -0,333 & 0,375 & 0,187 & 0 \\ -0,667 & 0,187 & 0,375 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0,422 & 0,281 & 0,140 \\ 0,281 & 0,563 & 0,281 \\ 0,140 & 0,281 & 0,422 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

MÉTODOS COMPUTACIONALES – MÉTODOS NUMÉRICOS

Consideramos la solución inicial $(1\ 1\ 1)^T$

$$\begin{bmatrix} 0{,}422 & 0{,}281 & 0{,}140 \\ 0{,}281 & 0{,}563 & 0{,}281 \\ 0{,}140 & 0{,}281 & 0{,}422 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{843}{1000} \\ \frac{9}{8} \\ \frac{843}{1000} \end{Bmatrix} = 843/1000 * \begin{Bmatrix} 1 \\ 375/281 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Luego $\frac{1}{\lambda} = \frac{843}{1000}$, por lo que la primera aproximación del autovalor es λ=1,1862.

Repetimos el procedimiento:

$$\begin{bmatrix} 0{,}422 & 0{,}281 & 0{,}140 \\ 0{,}281 & 0{,}563 & 0{,}281 \\ 0{,}140 & 0{,}281 & 0{,}422 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 1 \\ 375/281 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{937}{1000} \\ \frac{369047}{281000} \\ \frac{937}{1000} \end{Bmatrix} = 937/1000 * \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}4016 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Luego $\frac{1}{\lambda} = \frac{937}{1000}$, por lo que la segunda aproximación del autovalor es λ=1,0672.

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Reiterando el procedimiento:

$$\begin{bmatrix} 0{,}422 & 0{,}281 & 0{,}140 \\ 0{,}281 & 0{,}563 & 0{,}281 \\ 0{,}140 & 0{,}281 & 0{,}422 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}4016 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}9558 \\ 1{,}3511 \\ 0{,}9558 \end{Bmatrix} = 0{,}9558 * \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}4136 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Luego el autovalor es λ=1,0462 y $|E_{\%}| = \left|\frac{1{,}0462-1{,}0672}{1{,}0462}\right| * 100 = 2\%$

El mínimo autovalor es 1,0462 y su vector asociado es $\begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}4136 \\ 1 \end{Bmatrix}$.

MÉTODOS COMPUTACIONALES – MÉTODOS NUMÉRICOS