

Introducción a la integración numérica

ETSII-UPM

□ Planteamiento del problema

- Se trata de evaluar la **integral definida** de una función mediante un **sumatorio** de valores de esa función en ciertos puntos llamados **nodos**, multiplicados por unos coeficientes de ponderación llamados **pesos**:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) = w_1 f_1 + w_2 f_2 + \dots + w_n f_n$$

-
- Esta expresión implica la sustitución de un sumatorio infinito (la integral) por un sumatorio finito, por lo que se producirá un **error de truncamiento**.
- Se llama **grado de precisión** de la fórmula de integración al **máximo grado de los polinomios** que son integrados **exactamente** por dicha fórmula.
- Para deducir las fórmulas de integración numérica la función $f(x)$ se suele sustituir por el **polinomio de interpolación** $p^{(n)}(x)$ y realizar la integración exacta de este polinomio.
- Si un polinomio de grado n es integrado exactamente es de esperar que el error en la integración numérica de la función $f(x)$ dependa de la derivada de orden $(n+1)$ de dicha función en un punto perteneciente al intervalo de integración.
- La integración numérica es un proceso **más estable y preciso** que la derivación numérica vista previamente.

Fórmulas de Newton-Cotes (1/4)

- Se basan en el polinomio de interpolación de Newton con argumentos igualmente espaciados (fórmula de diferencias finitas).

□ Algunas fórmulas de Newton-Cotes:

- Regla trapezoidal $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$ $err = -\frac{h^3}{12} f''(\zeta)$
- Regla de Simpson $\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$ $err = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\zeta)$
- Regla de Simpson $\frac{3}{8} \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$ $err = -\frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\zeta)$
- Regla de Boole $\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$ $err = -\frac{8h^7}{945} f^{(vi)}(\zeta)$

□ Observaciones:

- En estas fórmulas se supone $x_k = x_0 + kh$.
- Los errores dependen de potencias elevadas de h .
- La fórmula de Simpson tiene una alta relación precisión/coste.
- No se suelen utilizar fórmulas de orden muy grande porque aparecen coeficientes negativos que dan lugar a problemas numéricos.

Fórmulas de Newton-Cotes (2/4)

ETSII-UPM

□ Deducción de la regla de Simpson 3/8

– Se parte del polinomio de interpolación de Newton en diferencias finitas:

$$p^{(n)}(x) = y_0 + \frac{1}{h} \Delta y_0 (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

– Haciendo el cambio de variable $x = x_0 + sh$ $(x - x_0) = sh$

– $x = x_1 + (s-1)h$ $(x - x_1) = (s-1)h$

– $x = x_2 + (s-2)h$ $(x - x_2) = (s-2)h$

– Se llega a:

$$p^{(n)}(s) = y_0 + s \Delta y_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 y_0 =$$

$$= y_0 + s(y_1 - y_0) + \frac{s(s-1)}{2!} ((y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)) + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} (((y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)) - ((y_2 - y_1) - (y_1 - y_0))) =$$

$$= y_0 + s(y_1 - y_0) + \frac{s(s-1)}{2!} (y_2 - 2y_1 + y_0) + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} (y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0)$$

$$\text{– Teniendo en cuenta que } \int_0^3 s ds = \frac{9}{2}; \quad \frac{1}{2!} \int_0^3 s(s-1) ds = \frac{9}{4}; \quad \frac{1}{3!} \int_0^3 s(s-1)(s-2) ds = \frac{3}{8}$$

se obtiene finalmente, después de reordenar términos:

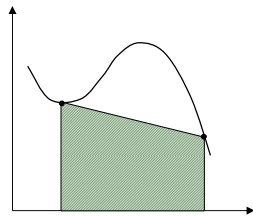
$$\int_{x_0}^{x_3} p^{(3)}(x) dx = h \int_0^3 p^{(3)}(s) ds = \frac{3h}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

Fórmulas de Newton-Cotes (4/4)

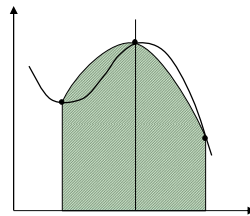
ETSII-UPM

□ El cálculo de los errores de las restantes fórmulas de Newton-Cotes es bastante laborioso y no se incluye en estas transparencias.

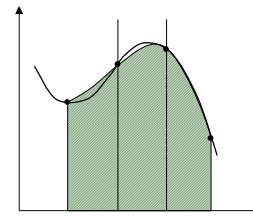
□ Interpretación gráfica de la regla trapezoidal y las dos reglas de Simpson:



$$E = -\frac{1}{12} f''(\xi) h^3$$



$$E = -\frac{1}{90} f^{iv}(\xi) h^5$$

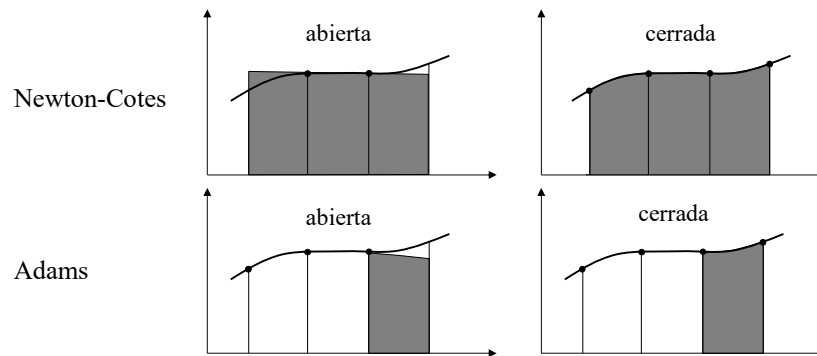


$$E = -\frac{3}{80} f^{iv}(\xi) h^5$$

Fórmulas abiertas y cerradas

Concepto de fórmula de integración abierta

- Se llama **abierta** a una fórmula de integración numérica que no evalúa la función integrando en uno o en los dos extremos del intervalo.
- Las fórmulas abiertas son útiles cuando no se conoce la función en un extremo o tiene un valor infinito (integrales impropias).
- Un caso de gran interés práctico son las **fórmulas de Adams**, que utilizan n puntos, pero sólo desean calcular la integral en el último tramo (ver figuras)



INTEGRACIÓN NUMÉRICA: Problemática inicial.

- ✓ Dentro del campo analítico, perteneciente a la matemática pura, se desconoce la primitiva de la mayor parte de las funciones que ella estudia o si esta se conoce, su aplicación es larga y compleja, para utilizarla con provecho en la resolución de una integral.
- ✓ Incluso, es posible que se desconozca la expresión analítica de la función sobre la cual se desea integrar.
- ✓ Consecuentemente, y en términos generales, es posible asegurar que la gran mayoría de los problemas que se presentan en la práctica, carecen de solución dentro del campo analítico.



INTEGRACIÓN NUMÉRICA (2)

Resumiendo, la imposibilidad, o la inconveniencia, de la aplicación de métodos tradicionales está dada, fundamentalmente, por :

I.- Que no se conozca ninguna primitiva de aquella función que es necesario integrar,

II.- Que aún conociéndose una función primitiva, su aplicación resulte excesivamente compleja o extensa,

III.- Que, directamente, se desconozca la expresión analítica de la función que debe ser integrada.



INTRODUCCION

Cuando el problema en cuestión consiste en calcular la integral definida de una determinada función $f(x)$, dada por:

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (8.19)$$

y se conoce una función $F(x)$, primitiva de $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$, se aplica la regla de *BARROW* :

$$I = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (8.20)$$

- ✓ Cuando no se conoce ninguna primitiva de la función , resulta necesario apelar a métodos de cálculo aproximados. Igual proceder debe adoptarse si, aún conociéndose una primitiva, resulta poco práctico aplicarla, por su complejidad.
- ✓ En ocasiones se cuenta solamente con una tabla de algunos de sus valores, proveniente de resultados experimentales; en cuyo caso, tampoco es posible aplicar la regla de *BARROW*.
- ✓ Considerando que la integral dada por (8.19) equivale a determinar el valor del área bajo la curva de la función $f(x)$, es posible desarrollar diversos métodos aproximados para lograr dicho objetivo.



FORMULA DE LOS TRAPECIOS

Supónganse conocidos los $n+1$ valores $x_0; x_1; \dots; x_n$ deducidos de la función $f(x)$, conocida, que cumplen con la condición:

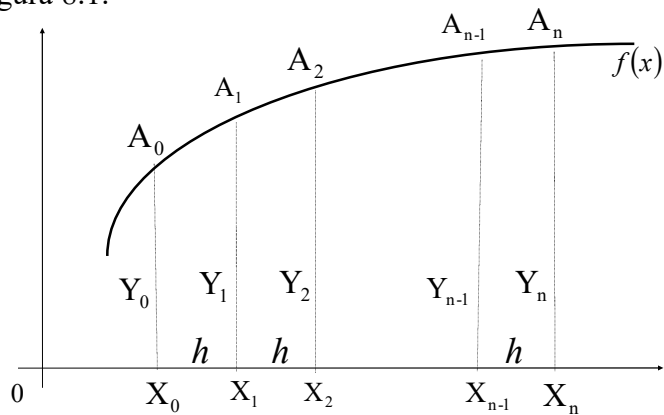
$$x_k - x_{k-1} = h \quad para \quad k = 1; 2; \dots; n$$

Una primera aproximación al valor del área a calcular, limitada por los puntos $x_0; A_0; A_l; \dots; A_n; x_n$ se obtiene considerando la suma de las áreas de los trapecios inscritos en cada una de las superficies parciales limitadas por los puntos,

$$\begin{array}{l} x_0; \mathbf{A}_0; \mathbf{A}_1; x_1 \\ x_1; \mathbf{A}_1; \mathbf{A}_2; x_2 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x_{n-1}; \mathbf{A}_{n-1}; \mathbf{A}_n; x_n \end{array}$$

FORMULA DE LOS TRAPECIOS (2)

Figura 8.1.



FORMULA DE LOS TRAPECIOS (3)

En consecuencia, resulta:

$$\begin{aligned}
 \text{área}(x_0; A_0; A_1; x_1) &\approx \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h \\
 \text{área}(x_1; A_1; A_2; x_2) &\approx \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h \\
 &\dots\dots\dots \\
 \text{área}(x_{n-1}; A_{n-1}; A_n; x_n) &\approx \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h
 \end{aligned}$$

Sumando las expresiones de las áreas así obtenidas, resulta

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) \quad (8.21)$$



FORMULA DE LOS TRAPECIOS (4)

- ✓ La fórmula de los trapecios tiene una precisión suficientemente buena cuando se trata de aplicarla a determinaciones que no requieran una aproximación de orden elevado.
- ✓ En el caso de haberse sustituido la curva, dada por la función continua $f(x)$, mediante la poligonal inscripta, descripta mediante los puntos dados o calculados, el modelo realizado puede clasificarse como una *Discretización*; y no satisface plenamente cuando se trata de obtener gran precisión.



FORMULA DE SIMPSON (1)

- ✓ Basado en la utilización de segmentos de parábola para aproximar los arcos de curva, en lugar de emplear segmentos de recta; es decir utilizar curvas en lugar de una poligonal, se obtiene una mayor precisión en el cálculo de integrales definidas.
- ✓ Primeramente se considerará el caso de la parábola de segundo grado, a partir del que se deducirá la expresión analítica de la fórmula de **SIMPSON**.



FORMULA DE SIMPSON (3)

El primer paso consiste en determinar el área comprendida entre el eje de las x , la parábola de eje vertical que pasa por los tres primeros puntos dados y sus ordenadas extremas.

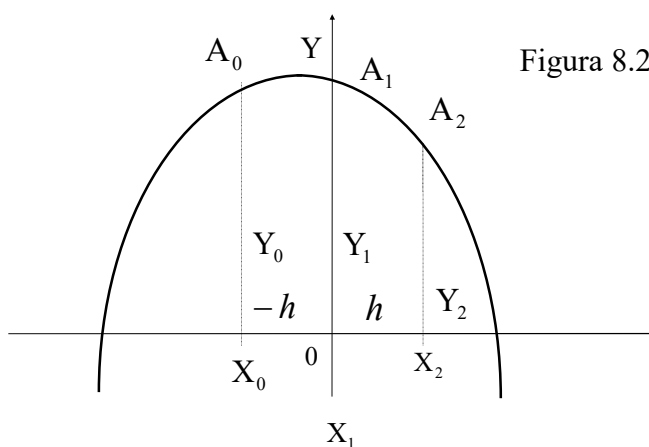
Llamando A_0 ; A_1 ; A_2 a los puntos mencionados y suponiendo que tienen abscisas equidistantes; es decir, que:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = h$$

Considerando, además que, haciendo pasar el eje y por el punto intermedio A_1 no se pierde generalidad (ver figura 8.2).



FORMULA DE SIMPSON (2)





FORMULA DE SIMPSON (4)

Dadas estas condiciones y teniendo en cuenta que, en general, la parábola de segundo grado es:

$$y = a x^2 + b x + c$$

pero, como debe pasar por los tres puntos A_0 ; A_1 ; A_2 , es posible escribir:

$$y_0 = a x_0^2 + b x_0 + c = a (-h)^2 + b (-h) + c = a h^2 - b h + c$$

$$y_1 = a x_1^2 + b x_1 + c = c$$

$$y_2 = a x_2^2 + b x_2 + c = a h^2 + b h + c = a h^2 + b h + c$$



FORMULA DE SIMPSON (5)

Sumando y restando la primera y la última de estas expresiones, y directamente de la segunda, se obtienen los siguientes valores:

$$a = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}; b = \frac{y_2 - y_0}{2h}; c = y_1$$

Valores que serán empleados para reemplazarlos en la expresión de la integral



FORMULA DE SIMPSON (6)

Por otra parte, del análisis sabemos que la expresión analítica del área buscada vale:

$$I = \int_{-h}^h y dx = \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \left[a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \right]_{-h}^h = \frac{2}{3} ah^3 + 2ch$$

Reemplazando en esta última los valores de a y c anteriormente obtenidos, resulta:

$$I = \frac{2y_2 - 2y_1 + y_0}{3} h^3 + 2y_1 h = \frac{h}{3} (y_2 - 2y_1 + y_0 + 6y_1) = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

El conocimiento de tres ordenadas es suficiente para determinar el área limitada por el arco de parábola cuadrática que pasa por los puntos correspondientes.



FORMULA DE SIMPSON (7)

En el caso de que la curva se encuentre descripta mediante una tabla compuesta de $n+1$ puntos $A_0 ; A_1 ; \dots ; A_n$, siendo n un número par y con abscisas $x_0 ; x_1 ; \dots ; x_n$ equidistantes, es posible aplicar la metodología expuesta, cada tres puntos $(A_0 ; A_1 ; A_2) ; (A_2 ; A_3 ; A_4) ;$ etc. y, de este modo, obtener la expresión:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \cong \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots + \frac{h}{3} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$



FORMULA DE SIMPSON (8)

De donde, considerando a los operadores **E**, **P**, **I** con idéntico significado al establecido en el punto anterior, se obtiene:

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \cong \frac{h}{3} (\mathbf{E} + 4\mathbf{I} + 2\mathbf{P}) \quad (8.23)$$

Esta última expresión es la conocida e importante **FORMULA DE SIMPSON**, muy utilizada para determinaciones expeditivas.



REGLA DE LOS TRES OCTAVOS DE SIMPSON (1)

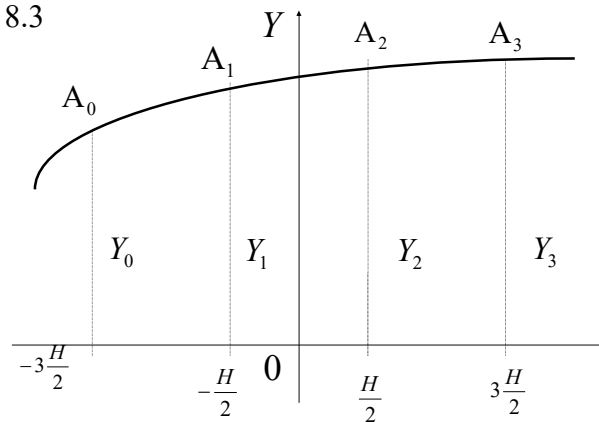
✓ Como es fácil apreciar, la fórmula de *SIMPSON*, solo es válida y utilizable en el caso en que se haya subdividido el intervalo de integración en un número de franjas tal, que la cantidad de puntos resultantes; vale decir, los que describen la curva $y = f(x)$, sea impar.

✓ Esto sucede cuando el número de franjas aludido es par.

✓ El mismo Simpson ha desarrollado una fórmula utilizable en el caso que el número ***n* de franjas sea impar**.

REGLA DE LOS TRES OCTAVOS DE SIMPSON (2)

Figura 8.3



REGLA DE LOS TRES OCTAVOS DE SIMPSON (3)

La deducción de la correspondiente fórmula es similar a la realizada para la de *SIMPSON*, excepto que, para la determinación de las áreas parciales, es necesario utilizar parábolas de tercer grado que conecten cuatro puntos consecutivos de la curva en cuestión.

La forma general de la ecuación de tercer grado representada por una parábola cúbica es:

$$y = a x^3 + b x^2 + c x + d \quad (8.24)$$



REGLA DE LOS TRES OCTAVOS DE SIMPSON (4)

Para determinar los valores de los parámetros a ; b ; c ; d es necesario imponer a la expresión (8.24), la condición que pase por los cuatro puntos A_0 ; A_1 ; A_2 ; A_3 y ubicar el eje de las y como se indica en la figura 8.3, lo cual no hace perder generalidad al razonamiento; con ello el intervalo de integración resulta:

$$-\frac{3h}{2} \leq x \leq \frac{3h}{2}$$



REGLA DE LOS TRES OCTAVOS DE SIMPSON (5)

Se puede calcular el área buscada mediante la expresión:

$$I = \int_{-\frac{3h}{2}}^{\frac{3h}{2}} (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx \right]_{-\frac{3h}{2}}^{\frac{3h}{2}} =$$

$$= \frac{3^4 ah^4}{4 \cdot 2^4} + \frac{3^3 bh^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{3^2 ch^2}{2^3} + \frac{3dh}{2} - \frac{3^4 ah^4}{4 \cdot 2^4} - \frac{3^3 bh^3}{3 \cdot 2^3} - \frac{3^2 ch^2}{2^3} + \frac{3dh}{2} =$$

de donde:

$$I = \frac{2 \cdot 3^3 bh^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{2 \cdot 3dh}{2}$$



REGLA DE LOS TRES OCTAVOS DE SIMPSON (6)

Y, realizando las operaciones indicadas, resulta:

$$I = \frac{3^2 b h^3}{2^2} + 3dh \quad (8.25)$$

Para calcular los valores de las constantes que intervienen en el cálculo es necesario hacer:

$$y_0 = a\left(-\frac{3h}{2}\right)^3 + b\left(-\frac{3h}{2}\right)^2 + c\left(-\frac{3h}{2}\right) + d$$

$$y_1 = a\left(-\frac{h}{2}\right)^3 + b\left(-\frac{h}{2}\right)^2 + c\left(-\frac{h}{2}\right) + d$$

$$y_2 = a\left(\frac{h}{2}\right)^3 + b\left(\frac{h}{2}\right)^2 + c\left(\frac{h}{2}\right) + d$$

$$y_3 = a\left(\frac{3h}{2}\right)^3 + b\left(\frac{3h}{2}\right)^2 + c\left(\frac{3h}{2}\right) + d$$



REGLA DE LOS TRES OCTAVOS DE SIMPSON (7)

Resolviendo, por cualquier método, el conjunto de ecuaciones simultáneas y reemplazando sus valores en la expresión (8.25):

$$I = \frac{9h^3}{4} \left[\frac{2(y_0 + y_3) - 2(y_1 + y_2)}{8h^2} \right] + \frac{3h}{16} [9(y_1 + y_2) - (y_0 + y_3)]$$

de lo que, en definitiva, resulta:

$$I = \int_{-\frac{3h}{2}}^{\frac{3h}{2}} f(x) dx = \frac{3h}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) \quad (8.26)$$

que es la expresión analítica de la denominada **REGLA DE LOS TRES OCTAVOS DE SIMPSON**.



REGLA DE LOS TRES OCTAVOS DE SIMPSON (8)

- ✓ Al quitarle tres franjas a una zonificación dada por una cantidad impar de ellas, da como resultado una cantidad par, a la que puede aplicarse la fórmula de *SIMPSON* ya estudiada.
- ✓ Por ejemplo, si se estuviera frente al problema de calcular el área subdividida en 47 franjas, la *REGLA DE LOS TRES OCTAVOS DE SIMPSON* se podría utilizar para aproximar el área bajo la curva ocupada por las tres primeras franjas. El área bajo las 44 franjas restantes, luego de ser calculada mediante la fórmula de *Simpson*, se sumaría a la de las tres anteriores.



METODOS COMBINADOS

- En algunas ocasiones resulta interesante combinar algunos de los métodos analizados anteriormente para resolver satisfactoriamente algunos problemas.
- Supongamos dada $f(x)$ en un intervalo (a,b) Cerrado, sobre el cual se desea obtener la integral de dicha función. Supóngase también que se dispone de 5 segmentos de recta.
- Una opción sería aplicar el método de Trapecios. No obstante debido al enorme error por Truncamiento resulta aconsejable combinar las reglas de Simpson de $1/3$ y $3/8$ para atacar el problema. Así la regla de Simpson $1/3$ sería aplicada a los dos primeros segmentos (3 puntos) mientras que para los otros 3 segmentos restantes se recurre a la regla de Simpson $3/8$. Así se obtiene una estimación del error de tercer orden para todo el intervalo.



METODOS COMBINADOS

Ejercicio: Aplicar esta idea para calcular la integral de la función:

$f(x) = 300x^5 - 800x^4 + 600x^3 - 200x^2 + 25x - 0.2$ sobre el intervalo $(0.5, 0.25)$ con 5 segmentos sobre dicho intervalo. Efectuar un análisis comparativo y analizar el error aplicando distintos métodos.



INTEGRACIÓN DE ROMBERG

Introducción

- Las funciones a integrar numéricamente principalmente son de dos tipos: una tabla de valores o una función.
- Con información tabulada, se está limitando al número de puntos que se tengan
- Si se tiene la función, se pueden generar tantos valores de $f(x)$ como se requiera para alcanzar la exactitud aceptable.
- La extrapolación de Richardson, es un método que combina dos estimaciones numéricas de la integral para obtener un tercer valor más exacto.
- El algoritmo computacional para implementar la extrapolación de Richardson se llama Integración de Romberg.



INTEGRACIÓN DE ROMBERG

- La integración de Romberg es una técnica diseñada para obtener integrales numéricas de funciones de manera eficiente. Se basa en aplicaciones sucesivas de la regla del trapecio.
- Sin embargo, a través de las manipulaciones matemáticas, se alcanzan mejores resultados con menos trabajo.

Extrapolación de Richardson

- Hay técnicas de corrección del error para mejorar los resultados de la integración numérica con base en la misma estimación de la integral. Dichos métodos usan dos estimaciones de una integral para calcular una tercera más exacta y, en general, se les conoce como extrapolación de Richardson.



INTEGRACIÓN DE ROMBERG

- Combinando dos estimaciones con la regla de trapecio de $O(h_2)$. Para obtener una nueva estimación de $O(h_4)$

$$I = \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$$

- Calculada dos integrales mejoradas de $O(h_4)$ con base a tres estimaciones de la regla de trapecio.
- Estos dos cálculos mejorados pueden, a su vez, combinarse para generar un valor aún mejor con $O(h_6)$. Donde $I(m)$ es la estimación mayor y $I(l)$ la estimación menor:

$$I = \frac{16}{15}I(m) - \frac{1}{15}I(l)$$



INTEGRACIÓN DE ROMBERG

- De manera similar dos resultados de $O(h^6)$ se combinan para calcular una integral que es $O(h^8)$:

$$I = \frac{64}{63} I_{(m)} - \frac{1}{63} I_{(l)}$$



INTEGRACIÓN DE ROMBERG

- Usar la regla del trapecio para integrar numéricamente

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

Desde $a=0$ hasta $b=0.8$ hasta . El valor exacto de la integral es 1.640533.

Usar la información obtenida para calcular mejores estimaciones de la integral con Extrapolación de Richardson.



INTEGRACIÓN DE ROMBERG

- Combinando dos estimaciones con la regla de trapecio de $O(h^2)$ para obtener una nueva estimación de $O(h^4)$:

$$I = \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$$



INTEGRACIÓN DE ROMBERG

Combinando las estimaciones $O(h^2)$ se obtiene:

estimación de orden $h^4 = 1.36747$ para segmento 2 - 1

estimación de orden $h^4 = 1.62347$ para segmento 4 - 2

estimación de orden $h^4 = 1.63947$ para segmento 8 - 4



INTEGRACIÓN DE ROMBERG

- Calculada dos integrales mejoradas de $O(h^4)$ con base a tres estimaciones de la regla de trapecio, estos dos cálculos mejorados pueden mejorarse, a su vez, combinarse para generar un valor aun mejor con $O(h^6)$. Donde m es estimación mayor y l estimación menor:

$$I = \frac{16}{15}I_{(m)} - \frac{1}{15}I_{(l)}$$



INTEGRACIÓN DE ROMBERG

Combinando las estimaciones $O(h^4)$ obtenidas se obtiene una estimación mejorada de

estimación de orden $h^6 = 1.64053$ para segmento h4b - h4
 estimación de orden $h^6 = 1.64053$ para segmento h4c - h4b



INTEGRACIÓN DE ROMBERG

- De manera similar dos resultados $O(h^6)$ se combinan para calcular una integral que es $O(h^8)$:

$$I = \frac{64}{63} I_{(m)} - \frac{1}{63} I_{(l)}$$

estimación de orden $h^8 \approx 1.64053$ para segmento $h_{6b} - h_6$



INTEGRACIÓN DE ROMBERG

- Resumen

Resultados de la regla del trapecio de aplicación múltiple para estimar la integral.

n	h	I
1	0.8	0.1728
2	0.4	1.0688
4	0.2	1.4848
8	0.1	1.6008



INTEGRACIÓN DE ROMBERG

- Representación grafica de la sucesión de estimaciones de la integral generada usando la integración de Romberg

$Q(h^2)$	$Q(h^4)$	$Q(h^6)$	$Q(h^8)$
0.1728 1.0688	1.367467		
0.1728 1.0688 1.4848	1.367467 1.62347	1.640533	
0.1728 1.0688 1.4848 1.6008	1.367467 1.62347 1.639467	1.640533 1.640533	1.640533