ECUACIONES LINEALES SIMULTANEAS HOMOGENEAS

Métodos Numéricos /Análisis Numérico/ Métodos computacionales

Objetivo: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales homogéneas por métodos aproximados.

SISTEMAS DE ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Se considerará la solución de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas **HOMOGÉNEAS**, que tienen la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m=0 \end{cases} \qquad (6.20)$$

El sistema puede ser escrito en notación matricial:

$$\mathbf{A}\,.\,\mathbf{X}=\mathbf{0} \qquad (6.21)$$

Generalidades

➢Un conjunto de ecuaciones homogéneas como el (6.20) tiene siempre una solución, ya que la matriz ampliada y la del sistema presentan, el mismo rango.

➢Si el rango *r* de la matriz de los coeficientes del conjunto de ecuaciones es igual al orden *n*, el sistema tiene una única solución, que es la denominada *SOLUCIÓN TRIVIAL* ($x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$).

➢Para este conjunto de ecuaciones, todas las ecuaciones del sistema son linealmente independientes -> Det A $\neq 0$.

Generalidades (2)

➢Existen soluciones *NO TRIVIALES* si, y solo si, $r < n$.

- ➢Entonces Det A = 0,
- ➢ **r :** nro de ec. Linealmente independientes
- ➢ **n-r:** Ec. Linealmente dependientes

➢Para este tipo de soluciones, no se encuentran valores únicos para las incógnitas. Se establecen relaciones entre las incógnitas.
➢Cualquier combinación de valores de x_i que satisface estas relaciones constituye una solución.

➢Los problemas más importantes que se plantean en la aplicación de ecuaciones homogéneas son aquellos denominados de **VALORES CARACTERÍSTICOS**

Generalidades (3)

Cuando se trata de escribir un modelo matemático las ecuaciones pueden escribirse, de manera cartesiana, en la forma:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_{n2}+\ldots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0 \end{cases} \qquad (6.22)$$

donde, los a_{ij} son reales, las x_i son las variables del sistema y lambda es un parámetro particular del sistema que tiene valores, en general, desconocidos.

En la notación matricial

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{X} = \mathbf{0} \qquad (6.23)$$

Generalidades (4)

➢En donde al incorporar la matriz identidad **I**, se puede utilizar a (**A** - **λ I**) como matriz de coeficientes.

➢La matriz columna **X** recibe el nombre de **VECTOR CARACTERÍSTICO ó AUTOVECTOR ó EIGENVECTOR**; siendo las x_i las componentes de dicho vector característico.

➢Los valores que se obtienen para lambda se conocen **como VALORES CARACTERÍSTICOS ó AUTOVALORES ó EIGENVALORES** de la matriz **A**.

Generalidades (5)

Dado que lambda aparece como incógnita, es posible, hacer que el determinante de dicha matriz sea igual a cero y, llamando **D** a este, resulta:

$$\text{(6.24)} \quad D = \left[A - \bar{\lambda} I\right] = 0$$

y encontrando valores para lambda que hagan **D** = 0, se tendrá la solución.

El desarrollo algebraico del determinante **D** produce un polinomio de grado *n,* de la forma:

$$\text{(6.25)} \quad \lambda^{n} + p_{1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_{n} = 0$$

Generalidades (6)

- Este polinomio recibe el nombre de **POLINOMIO CARACTERÍSTICO** ó **ECUACIÓN CARACTERÍSTICA**

- **Es necesario resolver el POLINOMIO** y obtener los lambda λ que hacen D=0.

- Las **n** raíces reciben el nombre **AUTOVALORES** o **VALORES CARACTERISTICOS.**

- Los valores característicos, se sustituyen, uno a la vez, en el conjunto original de ecuaciones para obtener un sistema correspondiente de relaciones entre las incógnitas ***x*** para cada sustitución.

Generalidades (7)

- Las relaciones dependerán del rango (r) de la matriz (A - λ I).
- Si es r = n - 1, las relaciones serán tales que la hipótesis de un valor para una incógnita, producirá un valor correspondiente para c/u de las ecuaciones restantes;
- si r = n - 2, las relaciones serán tales que se tendrán que suponer los valores de dos incógnitas para poder obtener un valor correspondiente a c/u de las incógnitas restantes.

Generalidades (8)

Cuando *n* es relativamente pequeño (2 ó 3), el desarrollo de determinantes por menores para obtener el polinomio característico es sencillo; y la posterior determinación de raíces no presenta grandes dificultades.

•Para calcular el determinante de una matriz de *n* * *n,* se requieren de o (n!) multiplicaciones/divisiones y sumas/restas. Incluso con valores de n relativamente pequeños, la cantidad de cálculos se torna inmanejable.

•Cuando *n* es grande ésta determinación se vuelve muy difícil, sino imposible y se debe apelar, a algún procedimiento numérico tal como alguno de los que se presentan a continuación.

Método de FADEEV-LEVERRIER

- Este método constituye una técnica eficiente para generar los coeficientes p_i del polinomio característico (6.25), tanto, cuando la matriz **A** de los coeficientes es simétrica, como cuando no lo es.

(6.25) $$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$$

- Tiene la ventaja adicional de que se obtiene automáticamente, al finalizar el proceso, la matriz inversa del sistema $\mathbf{A}^{-1}$.

- **TRAZA** de una matriz:
- La traza de una matriz cuadrada, que será designada mediante " *tr* **A** " es:

(6.26) $$\boldsymbol{tr\ \mathrm{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}}$$

Método de FADEEV-LEVERRIER (1)

Genera en su procedimiento, una sucesión de matrices $\mathbf{B_1}$; $\mathbf{B_2}$; ...; $\mathbf{B_n}$ de las que se obtienen una serie de valores, que se denominarán b_k (k = 1; 2;...;n) que sustituidos en el **POLINOMIO DE FADEEV-LEVERRIER**:

(6.27) $$(-1)^n\left(\lambda^n - b_1\lambda^{n-1} - \ldots - b_{n-1}\lambda - b_n\right) = 0$$

dan como resultado los coeficientes p_k

El factor $(-1)^n$ se utiliza para dar a los términos los signos que tendría el polinomio característico si hubiese sido generado desarrollando el determinante correspondiente.

Método de FADDEEV-LEVERRIER (2)

Los valores de b_k se obtienen así:

$$\mathbf{B_1} = \mathbf{A} \quad ; \quad b_1 = tr\,\mathbf{B_1}$$
$$\mathbf{B_2} = \mathbf{A}\,(\,\mathbf{B_1} - b_1\,\mathbf{I}\,) \quad ; \quad b_2 = {}^1/_2\; tr\,\mathbf{B_2} \qquad (6.28)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{B_n} = \mathbf{A}\,(\,\mathbf{B_{n-1}} - b_{n-1}\,\mathbf{I}\,) \quad ; \quad b_n = {}^1/_n\; tr\,\mathbf{B_n}$$

Puede demostrarse que la inversa de la matriz **A**, cuyos valores característicos se desea hallar, se determinan a partir de la ecuación:

$$(6.29) \qquad \mathbf{A^{-1}} = {}^1/\mathrm{b_n}\,(\,\mathbf{B_{n-1}} - b_{n-1}\,\mathbf{I}\,)$$

Método de FADDEEV-LEVERRIER (3)

- Ejemplo: supóngase que se ha obtenido, como modelo matemático de algún problema determinado, el siguiente sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = 0 \\ 2x_1 & + & (0-\lambda)x_2 & + & 2x_3 & = 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & (3-\lambda)x_3 & = 0 \end{cases}$$

Método de FADDEEV-LEVERRIER (4)

- Se debe generar las matrices B_k a partir de la matriz A del sistema. Siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- Entonces:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow b_1 \cong trB_1 = 3 + 0 + 3 = 6$$

Método de FADDEEV-LEVERRIER (5)

- De la misma manera

$$B_2 = A*(B_1 - b_1 * I) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} * \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_2 \cong \frac{1}{2} * trB_2 = \frac{1}{2}(11 + 8 + 11) = 15$$

Método de FADDEEV-LEVERRIER (6)

$$B_3 = A*(B_2 - b_2 * I) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} * \left\{ \begin{bmatrix} 11 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_3 \cong \frac{1}{3} * trB_3 = \frac{1}{3}(8+8+8) = 8$$

- Sustituyendo los valores de los b_k en el polinomio de FADDEEV-LEVERRIER, se obtiene:

$$(-1)^3 * (\lambda^3 - 6\lambda^2 - 15\lambda - 8) = 0$$

Método de FADDEEV-LEVERRIER (7)

- Del cual resulta:

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = 0$$

- O, multiplicando por -1

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 - 15\lambda - 8 = 0$$

- Que es el polinomio característico. Obteniendo la raíces de la ecuación dada mediante cualquier método, resultan los valores propios.

$$\lambda_1 = 8;$$
$$\lambda_2 = -1;$$
$$\lambda_3 = -1$$

Método de FADDEEV-LEVERRIER (8)

- Los que, sustituidos de uno por vez en el sistema, permite el calculo de las componentes x_j (j=1; 2; 3) de los vectores característicos o autovectores.
- Finalmente, para hallar la matriz inversa del sistema, se debe hacer

$$A^{-1} = \frac{1}{8} * \left\{ \begin{bmatrix} 11 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 11 \end{bmatrix} - 15 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{8} & \frac{2}{8} & \frac{4}{8} \\ \frac{2}{8} & -\frac{7}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{4}{8} & \frac{2}{8} & -\frac{4}{8} \end{bmatrix}$$

Método de las POTENCIAS

➢El método de las **POTENCIAS** es un método iterativo.

➢Utilizado en aquellos casos en que solamente se desea conocer el autovalor más pequeño y/o más grande, juntamente con sus autovectores asociados.

➢

➢Una ventaja adicional de este método es que los autovalores se obtienen simultáneamente con sus respectivos autovectores.

Método de las POTENCIAS (2)

Para determinar el autovalor más grande, supóngase que tanto los elementos de la matriz como del autovalor son reales. Sea el sistema:

$$\left(A-\bar{\lambda} I\right)X = 0 \qquad (6.38)$$

donde, realizando el producto indicado por el paréntesis, se obtiene:

$$AX - \bar{\lambda} IX = AX - \bar{\lambda} X = 0$$

y transponiendo términos:

$$AX = \bar{\lambda} X \qquad (6.39)$$

Método de las POTENCIAS (3)

Haciendo uso sistemático de esta última ecuación (6.39) y realizando los siguientes pasos:

I.- Asignar valores arbitrarios a las componentes de **X**, y designándolo con $\mathbf{X_0}$ se sustituye en el 1er. Miembro de A X= λX , con lo cual se obtiene la primera aproximación del 2do. miembro. En general, resulta satisfactorio tomar los valores para x_i = 1; 2; ... ;n.

$$AX_0 = \bar{\lambda} X_1$$

II.- Dividir los elementos del vector $\lambda\mathbf{X_1}$ por λ x_1 , para que la primera componente se reduzca a la unidad.

Método de las POTENCIAS (4)

III.- Se utilizan las componentes del vector obtenido como valores mejorados de **X**, sustituyéndolos en el primer miembro de (6.39) para volver a obtener así, una mejor aproximación en un siguiente paso.

IV.- Se repiten los pasos **II** y **III** hasta que la expresión (6.39) quede esencialmente satisfecha. Es decir se cumpla con la cantidad **E fijada de antemano.**

Al iterar se conforma una sucesión:
$\mathbf{A\,X_0}$; $\mathbf{A^2\,X_0}$; ... ; $\mathbf{A^k\,X_0}$,
$\mathbf{X_0}$: vector arbitrario supuesto inicialmente. Las potencias de la matriz **A** que componen la sucesión, son las que le dan el nombre al método.

Método de las POTENCIAS (5)

Como determinar el autovalor más pequeño y su autovector asociado.?

Es necesario premultiplicar por la inversa de **A**, resultando:

$$AX = \lambda X$$

$$A^{-1}\;A\,X = A^{-1}\lambda\,X$$

$$X = A^{-1}\lambda\,X$$

Método de las POTENCIAS (6)

Dividiendo esta última expresión por el valor de λ, y permutando ambos miembros, resulta:

$$A^{-1}X = \frac{1}{\lambda}X \qquad (6.36)$$

La que producirá una convergencia al valor más pequeño del autovalor lambda.

Método de las POTENCIAS (7)

CONCLUSIONES

- Convergencia puede resultar lenta: Si los autovalores máximo e inmediatamente menor tienen valores similares; o, si otro tanto ocurre con el mínimo e inmediatamente mayor.

- La convergencia es hacia el autovalor máximo: Si el autovalor máximo tiene multiplicidad dos, pero, las componentes del autovector convergen a cualquiera de los dos que están asociados a aquel; dependiendo esto, del vector **X** supuesto inicialmente.

Método de las POTENCIAS (8)

➢En caso que el vector supuesto inicialmente sea ortogonal con el autovector asociado al autovalor máximo de la matriz traspuesta, convergirá al autovalor que le sigue en magnitud en lugar de hacerlo al máximo.

➢Como los autovalores son cantidades que hacen que el determinante de la matriz de coeficientes ($\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I}$) sea cero, el rango r de la matriz de los coeficientes debe ser necesariamente menor que el orden n de la matriz

Método de las POTENCIAS (9)

➢Si el rango de la matriz de coeficientes es una unidad menor que el orden, el sistema de ecuaciones homogéneas que se va a resolver contiene n-1 ecuaciones independientes para determinar los n componentes de los autovectores.

Método de las POTENCIAS (10)

- Si el rango de la matriz de coeficientes es dos unidades menor que el orden, es necesario suponer valores para dos componentes del autovector para hallar valores para otras componentes. Habrá solo n-2 ecuaciones independientes en el sistema. Se dice que el espacio de soluciones es bidimensional.

- Si n-r = 3, se deben suponer tres componentes del autovector, y el espacio de soluciones será tridimensional. El razonamiento es idéntico cuando el grado de indeterminación es mayor.