Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Asignatura:

MÉTODOS COMPUTACIONALES - MÉTODOS NUMÉRICOS

Tema 7

Ejercicios resueltos

2020

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

1. Resolver la ecuación diferencial de primer orden y primer grado

$$y' = \frac{6x^2}{y}$$

con la condición inicial $y_0 = 16,\ x_0 = 4$; h = 0.1

a) Con **Euler** en (4.0 ; 4.4)
b) Con **Euler Modificado** en (4.0 ; 4.4)

Con el **Método de Euler**, conociendo h=0.1 y $y' = \frac{6x^2}{y}$

$x_0 = 4$
$y_0 = 16$

$$y'_0 = f(x_0; y_0) = \frac{6x_0^2}{y_0} = 6 * \frac{4^2}{16} = 6$$

Método de Euler

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$y_{i+1} = y_i + y'_i h$$

$x_1 = x_0 + h = 4 + 0.1 = 4.1$
$y_1 = y_0 + y'_0 * h = 16 + 6 * 0.1 = 16.6$

$$y'_1 = f(x_1; y_1) = \frac{6x_1^2}{y_1} = 6 * \frac{4.1^2}{16.6} = 6.07590$$

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

$x_2 = x_1 + h = 4.1 + 0.1 = 4.2$
$y_2 = y_1 + y'_1 * h = 16.6 + 6.07590 * 0.1 = 17.20759$

$$y'_2 = f(x_2; y_2) = \frac{6x_2^2}{y_2} = 6 * \frac{4.2^2}{17.20759} = 6.15077$$

$x_3 = x_2 + h = 4.2 + 0.1 = 4.3$
$y_3 = y_2 + y'_2 * h = 17.20759 + 6.15077 * 0.1 = 17.82267$

$$y'_3 = f(x_3; y_3) = \frac{6x_3^2}{y_3} = 6 * \frac{4.3^2}{17.82267} = 6.22466$$

$x_4 = x_3 + h = 4.3 + 0.1 = 4.4$
$y_4 = y_3 + y'_3 * h = 17.82267 + 6.22466 * 0.1 = 18.44514$

MÉTODOS COMPUTACIONALES – MÉTODOS NUMÉRICOS

Se pueden organizar los datos obtenidos en una tabla como la siguiente:

i	x_i	y_i	y'_i
0	4	16	6
1	4.1	16.6	6.07590
2	4.2	17.20759	6.15077
3	4.3	17.82267	6.22466
4	4.4	18.44514	

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Con el **Método Modificado de Euler**, conociendo h=0.1 y $y' = \frac{6x^2}{y}$ con E<0.0001

$x_0 = 4$
$y_0 = 16$

$$y'_0 = f(x_0; y_0) = \frac{6x_0^2}{y_0} = 6 * \frac{4^2}{16} = 6$$

Para calcular el predicho de y_1

$x_1 = x_0 + h = 4 + 0.1 = 4.1$
$P(y_1) = y_0 + y'_0 * h = 16 + 6 * 0.1 = 16.6$

$$P(y'_1) = f(x_1; P(y_1)) = \frac{6x_1^2}{y_1} = 6 * \frac{4.1^2}{16.6} = 6.07590$$

Método Modificado de Euler

$$P(y_{i+1}) = y_i + y'_i h$$
$$C(y_{i+1}) = y_i + \left[\frac{y'_i + P(y'_{i+1})}{2}\right] h$$

MÉTODOS COMPUTACIONALES – MÉTODOS NUMÉRICOS

Para calcular el corregido de y_1:

$$C(y_1) = y_0 + \frac{y'_0 + P(y'_1)}{2} * \mathrm{h} = 16 + \frac{6 + 6.07590}{2} * 0.1 = 16.60380$$

$$|C(y_1) - P(y_1)| = |16.60380 - 16.6| = 0.0038 > \mathrm{E}$$

$$C(y'_1) = f(x_1; C(y_1)) = \frac{6x_1^2}{C(y_1)} = 6 * \frac{4.1^2}{16.60380} = 6.07451$$

$$C^1(y_1) = y_0 + \frac{y'_0 + C(y'_1)}{2} * \mathrm{h} = 16 + \frac{6 + 6.07451}{2} * 0.1 = 16.60373$$

$$C^1(y'_1) = f(x_1; C^1(y_1)) = \frac{6x_1^2}{C^1(y_1)} = 6 * \frac{4.1^2}{16.60373} = 6.07454$$

$$|C^1(y_1) - C(y_1)| = |16.60373 - 16.60380| = 0.00007 < E$$

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Para calcular el predicho de y_2

$$x_2 = x_1 + h = 4.1 + 0.1 = 4.2$$

$$P(y_2) = y_1 + y'_1 * h = 16.60373 + 6.07454 * 0.1 = 17.21118$$

$$P(y'_2) = f(x_2; P(y_2)) = \frac{6x_2^2}{P(y_2)} = 6 * \frac{4.2^2}{17.21118} = 6.14949$$

Para calcular el corregido de y_2:

$$C(y_2) = y_1 + \frac{y'_1 + P(y'_2)}{2} * \mathrm{h} = 16.60373 + \frac{6.07454 + 6.14949}{2} * 0.1 = 17.21493$$

$$|C(y_2) - P(y_2)| = |17.21493 - 17.21118| = 0.00375 > \mathrm{E}$$

$$C(y'_2) = f(x_2; C(y_2)) = \frac{6x_2^2}{C(y_2)} = 6 * \frac{4.2^2}{17.21493} = 6.14815$$

MÉTODOS COMPUTACIONALES – MÉTODOS NUMÉRICOS

$$C^1(y_2) = y_1 + \frac{y'_1 + C(y'_2)}{2} * \text{h} = 16.60373 + \frac{6.07454 + 6.14815}{2} * 0.1 = 17.21486$$

$$C^1(y'_2) = f(x_2; C^1(y_2)) = \frac{6x_2^2}{C^1(y_2)} = 6 * \frac{4.2^2}{17.21486} = 6.14818$$

$$|C^1(y_2) - C(y_2)| = |17.21486 - 17.21493| = 0.00007 < E$$

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Para calcular el predicho de y_3

$x_3 = x_2 + h = 4.2 + 0.1 = 4.3$

$$P(y_3) = y_2 + y'_2 * h = 17.21486 + 6.14818 * 0.1 = 17.82968$$

$$P(y'_3) = f(x_3; P(y_3)) = \frac{6x_3^2}{P(y_3)} = 6 * \frac{4.3^2}{17.82968} = 6.22221$$

Para calcular el corregido de y_3*:*

$$C(y_3) = y_2 + \frac{y'_2 + P(y'_3)}{2} * \text{h} = 17.21486 + \frac{6.14818 + 6.22221}{2} * 0.1 = 17.83338$$

$$|C(y_3) - P(y_3)| = |17.83338 - 17.82968| = 0.0037 > \text{E}$$

$$C(y'_3) = f(x_3; C(y_3)) = \frac{6x_3^2}{C(y_3)} = 6 * \frac{4.3^2}{17.83338} = 6.22092$$

MÉTODOS COMPUTACIONALES – MÉTODOS NUMÉRICOS

$$C^1(y_3) = y_2 + \frac{y'_2 + C(y'_3)}{2} * \text{h} = 17.21486 + \frac{6.14818 + 6.22092}{2} * 0.1 = 17.83332$$

$$C^1(y'_3) = f(x_3; C^1(y_3)) = \frac{6x_3^2}{C^1(y_3)} = 6 * \frac{4.3^2}{17.83332} = 6.22094$$

$$|C^1(y_2) - C(y_2)| = |17.83332 - 17.83338| = 0.00006 < E$$

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Para calcular el predicho de y_4

$x_4 = x_3 + h = 4.3 + 0.1 = 4.4$

$$P(y_4) = y_3 + y'_3 * h = 17.83332 + 6.22094 * 0.1 = 18.45541$$

$$P(y'_4) = f(x_4; P(y_4)) = \frac{6x_4^2}{P(y_4)} = 6 * \frac{4.4^2}{18.45541} = 6.29409$$

Para calcular el corregido de y_4*:*

$$C(y_4) = y_3 + \frac{y'_3 + P(y'_4)}{2} * \text{h} = 17.83332 + \frac{6.22094 + 6.29409}{2} * 0.1 = 18.45907$$

$$|C(y_4) - P(y_4)| = |18.45907 - 18.45541| = 0.00366 > \text{E}$$

$$C(y'_4) = f(x_4; C(y_4)) = \frac{6x_4^2}{C(y_4)} = 6 * \frac{4.4^2}{18.45907} = 6.29284$$

MÉTODOS COMPUTACIONALES – MÉTODOS NUMÉRICOS

$$C^1(y_4) = y_3 + \frac{y'_3 + C(y'_4)}{2} * \mathrm{h} = 17.83332 + \frac{6.22094 + 6.29284}{2} * 0.1 = 18.45901$$

$$|C^1(y_4) - C(y_4)| = |18.45901 - 18.45907| = 0.00006 < E$$

Se pueden organizar los datos obtenidos en una tabla como la siguiente

i	x_i	y_i	y'_i
0	4	16	6
1	4.1	16.60373	6.07454
2	4.2	17.21486	6.14818
3	4.3	17.83332	6.22094
4	4.4	18.45901	

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Sabiendo que $y = 2x\sqrt{x}$ es la solución exacta de la ecuación diferencial dada, podemos observar los errores cometidos en los métodos vistos:

i	x_i	y_i (Exacto)	y_i (M. Euler)	y_i (M. modif Euler)	Error (M. Euler)	Error (M. modif. Euler)
0	4	16	16	16		
1	4.1	16.60373452	16.6	16.60373	0.00373452	0.00000452
2	4.2	17.21487729	17.20759	17.21486	0.00728729	0.00001729
3	4.3	17.83333956	17.82267	17.83333	0.01066956	0.00000956
4	4.4	18.45903573	18.44514	18.45902	0.01389573	0.00001573

MÉTODOS COMPUTACIONALES – MÉTODOS NUMÉRICOS

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

MUCHAS GRACIAS…