Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Asignatura:

MÉTODOS COMPUTACIONALES - MÉTODOS NUMÉRICOS -

Método de Faddeev-Leverrier

2024

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Supóngase que se ha obtenido, como un modelo matemático de algún problema determinado. El siguiente sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (0-\lambda)x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + (3-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

El problema consiste en determinar el polinomio característico utilizando el Método de Faddeev-Leverrier. Para ello se deben generar las matrices B_k a partir de la matriz A del sistema siendo A:

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Entonces, como $\boldsymbol{B_1} = \boldsymbol{A}$

$$B_1 = A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow b_1 = tr\, B_1 = 3 + 0 + 3 = 6$$

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Luego como $\boldsymbol{B_2} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B_1} - \boldsymbol{b_1 I})$

Resulta:

$$B_2 = A(\boldsymbol{B_1} - \boldsymbol{b_1 I}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} * \left(\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 6 * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} * \left(\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} tr\, B_2 = \frac{1}{2}\,(11 + 8 + 11) = 15$$

MÉTODOS COMPUTACIONALES – MÉTODOS NUMÉRICOS

Luego como $\boldsymbol{B_3} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B_2} - \boldsymbol{b_2 I})$

Resulta:

$$B_3 = A(\boldsymbol{B_2} - \boldsymbol{b_2 I}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} * \left(\begin{vmatrix} 11 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 11 \end{vmatrix} - 15 * \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} * \left(\begin{vmatrix} 11 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 11 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow b_3 = \frac{1}{3} tr\, B_3 = \frac{1}{3}\,(8 + 8 + 8) = 8$$

Sustituyendo los valores de los b_k en el polinomio de Faddeev-Leverrier

$$(-1)^n(\lambda^n - b_1\lambda^{n-1} - b_2\lambda^{n-2} - \dots - b_{n-1}\lambda - b_n) = 0$$

$$(-1)^3(\lambda^3 - b_1\lambda^2 - b_2\lambda - b_3) = 0$$

$$(-1)^3(\lambda^3 - 6\lambda^2 - 15\lambda - 8) = 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = 0$$

O multiplicando a ambos miembros por -1:

$$\boldsymbol{\lambda^3 - 6\lambda^2 - 15\lambda - 8 = 0}$$

Supongamos que tenemos que hallar un autovalor y su vector asociado:

Para hallar los autovalores tenemos que encontrar las raíces del polinomio característicos:

$$\boldsymbol{\lambda^3 - 6\lambda^2 - 15\lambda - 8 = 0}$$

Por la Regla de Descartes, si **λ** es positivo:

+ - - -

Observamos un cambio de signo, entonces existe una raíz real positiva

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Por el Método de Tanteos separamos la raíz:

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = -8$$

$$x_1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = -28$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow f(x_2) = -54$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow f(x_3) = -80$$

$$x_4 = 4 \Rightarrow f(x_4) = -100$$

$$x_5 = 5 \Rightarrow f(x_5) = -108$$

$$x_6 = 6 \Rightarrow f(x_6) = -98$$

$$x_7 = 7 \Rightarrow f(x_7) = -64$$

$$x_8 = 8 \Rightarrow f(x_8) = 0 \;\therefore\; \boldsymbol{8\ es\ raíz}$$

MÉTODOS COMPUTACIONALES – MÉTODOS NUMÉRICOS

Reemplazando en el sistema dado:

$$\begin{cases} (3-8)x_1 & +2x_2 & +4x_3 = 0 \\ 2x_1 & +(0-8)x_2 & +2x_3 = 0 \\ 4x_1 & +2x_2 & +(3-8)x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Aplicando eliminación de Gauss:

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & -7.2 & 3.6 \\ 0 & 3.6 & -1.8 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 0 & -7.2 & 3.6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

De lo que resulta:

$$-5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$
$$-7.2x_2 + 3.6x_3 = 0$$

Universidad Nacional del Nordeste
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

De lo que resulta:

$$-5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$
$$-7.2x_2 + 3.6x_3 = 0$$

Tomando $\boldsymbol{x_3 = -1}$:

$-7.2x_2 + 3.6 * (-1) = 0 \Rightarrow x_2 = 3.6 : (-7.2) = -0.5$

Luego: $-5x_1 + 2 * (-0.5) + 4 * (-1) = 0 \Rightarrow x_1 = (4+1) : (-5) = -1$

Autovalor: 8 y su vector asociado: $\begin{vmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{-0.5} \\ \mathbf{-1} \end{vmatrix}$