METODO DE RUNGE-KUTTA

Dada una ec. diferencial de primer orden primer grado que, en su expresión general, puede ser escrita de la siguiente manera:

(9.1) $$y' = f(x\,;\,y)$$

se denomina **MÉTODO DE RUNGE-KUTTA** a todo aquel algoritmo que utiliza como expresión de la recurrencia la fórmula:

(9.10) $$y_{i+1} = y_i + a_1\,k_1 + a_2\,k_2 + \ldots + a_n\,k_n$$

Es decir k_1 aparece en la ecuación k_2, la cual aparece en la k_3, etc. Como cada k es una evaluación funcional, esta recurrencia vuelve eficientes a los métodos **RK** para cálculos en computadora.

METODO DE RUNGE-KUTTA (2)

En la cual las a_i son constantes que más adelante serán calculadas y los k_i toman la forma:

(9.11)
$$k_1 = h\,f[x_i\,;\,y_i]$$
$$k_2 = h\,f[x_i + p_1\,h\,;\,y_i + q_{11}\,k_1]$$
$$k_3 = h\,f[x_i + p_2\,h\,;\,y_i + q_{21}\,k_1 + q_{22}\,k_2]$$
$$\cdots$$
$$k_3 = h\,f[x_i + p_{n-1}\,h\,;\,y_i + q_{n-1;1}\,k_1 + \ldots + q_{n-1;n-1}\,k_2]$$

donde las p y las q son constantes

METODO DE RUNGE-KUTTA (3)

- El valor de **n**, permite establecer, el ORDEN del método de RUNGE-KUTTA;
- Por lo tanto, con más propiedad se debería denominar METODOLOGÍA DE RUNGE-KUTTA, en vez de MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA.

- Estos métodos empiezan por sí mismos, y teóricamente, es posible desarrollar un conjunto de ecuaciones (9.10) y (9.11) que logren cualquier grado de precisión deseado.

- Ventajas de esta metodología : la facilidad de programación y procesamiento.

METODO DE RUNGE-KUTTA (4)

- **Desventaja:** El requisito de que la función $f(x;y)$ debe ser calculada para varios x e y que difieren muy poco, en cada paso del procesamiento.

- Lo anterior lo convierte, en un método menos eficiente en lo que respecta a tiempo de procesamiento que otros métodos de precisión comparable.

- Inconveniente: es la dificultad que se presenta en estimar el error por paso para las soluciones intermedias de los métodos de orden superior de *RUNGE-KUTTA.*

METODO DE RUNGE-KUTTA (5)

Repasaremos algunos conceptos estudiados en el Análisis Matemático.

Dada una función compuesta; como $y' = f(x\,;\,y)$, en la cual es $y=y(x)$, su diferencial total vale:

$$dy' = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (9.12)$$

Donde sus componentes (coeficientes) son los del gradiente de la función.

METODO DE RUNGE-KUTTA (6)

y su **derivada con respecto a la variable *x*,** es:

$$\frac{dy'}{dx} = y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

mientras que la **derivada segunda**, resulta:

$$\frac{d^2y'}{dx^2} = y''' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dx}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} \qquad (9.13)$$

Operando de manera similar, es posible obtener las derivadas de mayor orden.

METODO DE RUNGE-KUTTA (7)

El desarrollo en serie de *TAYLOR* del segundo miembro de $y' = f(x ; y)$, en el punto $(x_i ; y_i)$, se puede expresar mediante:

$$f(x_i + b; y_i + c) = f(x_i; y_i) + b\left[\frac{\partial f(x_i; y_i)}{\partial x}\right] + c\left[\frac{\partial f(x_i; y_i)}{\partial y}\right] +$$

$$\frac{1}{2!}\left\{b^2\left[\frac{\partial^2 f(x_i; y_i)}{\partial x^2}\right] + 2bc\left[\frac{\partial^2 f(x_i; y_i)}{\partial x \partial y}\right] + c^2\left[\frac{\partial^2 f(x_i; y_i)}{\partial y^2}\right]\right\} + \ldots$$

donde las constantes $b;c$ son los incrementos de las variables $x;y$, respectivamente.

METODO DE RUNGE-KUTTA DE PRIMER ORDEN

A efectos ilustrativos, para aportar claridad respecto de la aplicación de la metodología estudiada, se deduce el algoritmo correspondiente al método de *RUNGE-KUTTA* de 1er. orden el que, se reduce al método de *EULER* cuando $a_1 = 1$, pues, siendo en este caso $n=1$, resulta:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots + a_n k_n$$

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1$$

METODO DE RUNGE-KUTTA DE PRIMER ORDEN (2)

pero, dado que:

$$k_1 = h\, f(x_i\, ;\, y_i) = h\, y_i'$$

entonces, para a_1 =1, se obtiene:

$$y_{i+1} = y_i + h\, y_1' \qquad (9.14)$$

que no es otra cosa que la fórmula de *EULER*, como se deseaba demostrar.

METODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN

Tomando siempre como base la expresión
$y_{i+1} = y_i + a_1\, k_1 + a_2\, k_2 + \ldots + a_n\, k_n,$
y, en este caso, haciendo n=2, se convierte en:

$$(9.15) \qquad y_{i+1} = y_i + a_1\, k_1 + a_2\, k_2$$

donde:

$$(9.16) \qquad \begin{aligned} k_1 &= h\, f(x_i\, ;\, y_i) \\ k_2 &= h\, f(x_i + p_1\, h\, ;\, y_i + q_{11}\, k_1) \end{aligned}$$

METODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN (2)

El problema consiste en determinar los valores de los parámetros:

a_1 ; a_2 ; p_1 ; q_{11} de manera que la expresión:
$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2$ suministre un valor preciso y_{i+1} .

Una interpretación gráfica de las funciones k_i se ilustra

en la figura 9.4. El área sombreada con trazos representa k_1 y el área

sombreada con puntos k_2.

METODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN (3)

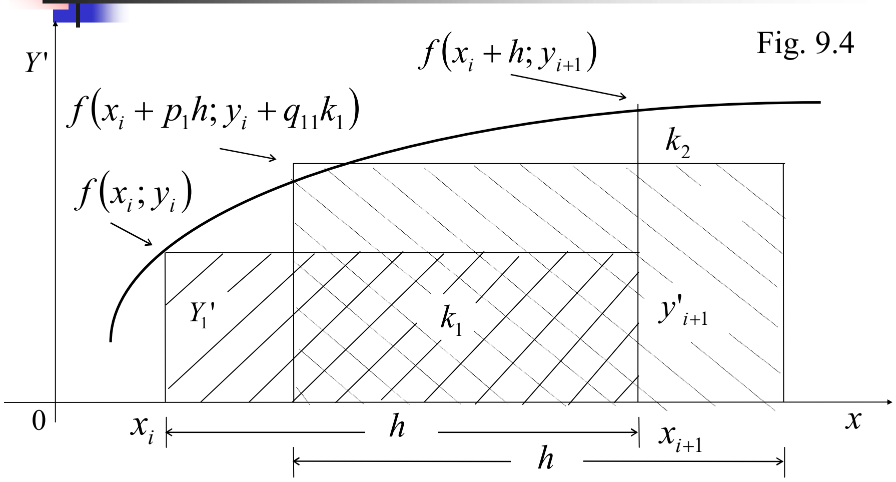

Fig. 9.4

METODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN (4)

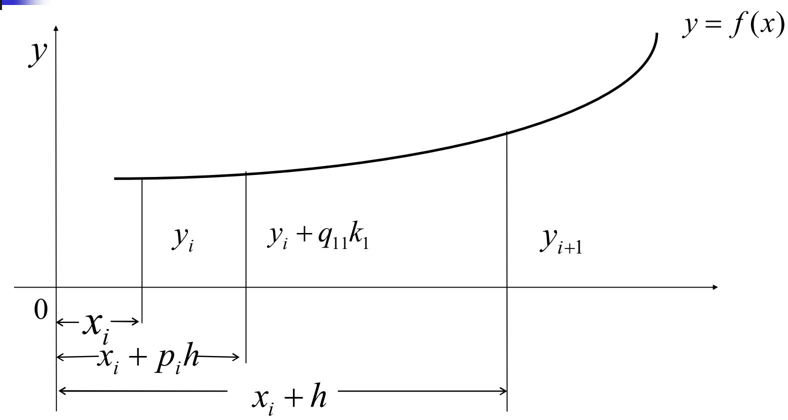

Fig. 9.4

METODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN (5)

Para hallar los valores de $a_1 ; a_2 ; p_1 ; q_{11}$, la expresión

$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2$

se hará equivalente a un desarrollo en serie de *TAYLOR* en el punto $(x_i ; y_i)$.

Se desarrolla y_{i+1} en el punto y_i , resultando:

(9.17)
$$y_{i+1} = y_i + h y_i' + \frac{h^2}{2!} y_i'' + \ldots$$

De las expresiones (9.1) y (9.12, diferencial total de una función compuesta), se puede apreciar que:

(9.18) $\quad y_i' = f(x_i ; y_i)$

(9.19)
$$y_i'' = \frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial y} f(x_i ; y_i)$$

METODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN (6)

Sustituyendo ahora, las fórmulas (9.18) y (9.19), se obtiene **(9.20)**

$$y_{i+1} = y_i + h f[x_i ; y_i] + \frac{h^2}{2!}\left[\frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial y} f(x_i ; y_i)\right] + \ldots$$

Observando las ecuaciones ,

(9.15) $y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2$;

$k_2 = h\, f(x_i + p_1 h ; y_i + q_{11} k_1)$

y (9.20) se ve que k_2 debe ser expresado en función de:

$f(x_i ; y_i)$; $\frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial x}$ y $\frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial y}$

si las ecuaciones (9.15) y (9.20) van a contener términos similares.

METODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN (7)

Esto se puede lograr desarrollando $k2 = h\, f(xi + p_1 h ; y_i + q_{11} k_1)$ en términos de una serie de *TAYLOR* para dos variables; según (9.14), considerando que $b = p_1 h;\ c = q_{11} k_1$, se puede escribir:

$$k_2 = h f(x_i + p_1 h; y_i + q_{11} k_1) = h\left\{ f(x_i ; y_i) + p_1 h \frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial x} + \right.$$

$$+ q_{11} k_1 \frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial y} + \frac{1}{2!}\left[p_1^2 h^2 \frac{\partial^2 f(x_i ; y_i)}{\partial x^2} + 2 p_1 q_{11} h k_1 \frac{\partial^2 f(x_i ; y_i)}{\partial x \partial y} + \right.$$

$$\left.\left. + q_{11}^2 k_1^2 \frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial y^2}\right] + \ldots \right\} \qquad \textbf{(9.21)}$$

METODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN (8)

Sustituyendo en $y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2$
la primera de las expresiones $k_1 = h\, f(x_i ; y_i)$
y utilizando los tres primeros términos de (9.21), se obtiene:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 h f(x_i ; y_i) + a_2 h f(x_i ; y_i) + a_2 h^2 \left[\frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial x} p_1 + \right.$$

$$\left. + q_{11} \frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial y} f(x_i ; y_i) \right]$$ (9.22) obtenida a partir de la (9.15)

Comparación termino a termino

Igualando los coeficientes de los términos semejantes de las expresiones (9.20) y

$$y_{i+1} = y_i + h f[x_i ; y_i] + \frac{h^2}{2!} \left[\frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial y} f(x_i ; y_i) \right] + \ldots$$

$$y_{i+1} = y_i + a_1 h f(x_i ; y_i) + a_2 h f(x_i ; y_i) + a_2 h^2 \left[\frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial x} p_1 + \right.$$

$$\left. + q_{11} \frac{\partial f(x_i ; y_i)}{\partial y} f(x_i ; y_i) \right] \quad (9.22)$$

METODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN (9)

Igualando los coeficientes de los términos semejantes de las expresiones (9.20) y (9.22) se obtienen las tres ec. Independientes:

$$(9.23) \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 = 1 \\ a_2 p_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 q_{11} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

que tienen cuatro incógnitas. Se trata de un sistema indeterminado de grado uno. Entonces, asignando un valor arbitrario a una de las incógnitas y resolviendo el sistema para determinar las otras tres, es posible obtener tantos conjuntos diferentes de valores, y a la vez, otros tantos conjuntos diferentes de ecuaciones (9.15) y (9.16) como se desee.

METODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN (10)

El procedimiento no es arbitrario. Puede demostrarse que en el método de segundo orden de *RUNGE-KUTTA*, la mayor precisión se alcanza cuando a_1 *toma el valor* $^1/_2$; con lo cual resulta:

$$a_1 = {}^1/_2 \quad ; \quad a_2 = {}^1/_2 \quad ; \quad p_1 = 1 \quad ; \quad q_{11} = 1$$

con los parámetros reemplazados en las ecuaciones (9.15) y (9.16) se obtiene entonces:

$$(9.24) \qquad \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + {}^1/_2\,(k_1 + k_2) \\ k_1 &= h\,f(x_i\,;\,y_i) \\ k_2 &= h\,f(x_i + h\,;\,y_i + k_1) \end{aligned}$$

expresiones que en conjunto constituyen el **MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN**.

ERROR DEL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN

Una solución obtenida a partir de la aplicación de las ecuaciones dadas por las expresiones (9.24) tendrá que cometer, forzosamente, un error por truncamiento en cada paso, **del orden de h^3**, ya que, para la obtención de las ecuaciones (9.24) se han utilizado fórmulas truncadas, en las cuales fueron despreciados todos los términos que contienen a h^3 y sus potencias mayores.

El conjunto de expresiones (9.24) se puede utilizar para resolver ecuaciones diferenciales con una precisión equivalente a la del *MÉTODO MODIFICADO DE EULER*.

ERROR DEL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN (2)

Reemplazando los valores de k_1 y k_2 en la expresión de y_{i+1}

$$y_{i+1} = y_i + {}^1/_2\,(k_1 + k_2)$$

de las ecuaciones (9.24), se obtiene:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\{hf(x_i; y_i) + hf[x_i + h; y_i + hf(x_i; y_i)]\} \qquad (9.25)$$

considerando, además, que $f(x_i; y_i) = y_i'$, y llamando a:

$$f[x_i + h; y_i + hf(x_i; y_i)] = P(y'_{i+1})$$

ERROR DEL MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE SEGUNDO ORDEN (3)

Resulta, sustituyéndolas en la (9.25):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{y_i' + P(y_{i+1}')}{2} h$$

que es equivalente al *MÉTODO MODIFICADO DE EULER* cuando se omiten las iteraciones sucesivas, en cada paso.

METODO DE RUNGE-KUTTA DE MAYOR ORDEN

De lo estudiado, es posible deducir que *los MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA* de primero y segundo orden no sustituyen con ventajas apreciables a los de *EULER* y *MODIFICADO DE EULER*, respectivamente.

Para obtener métodos de *RUNGE-KUTTA* con mayor precisión es preciso hacer n=3; 4; ... y seguir un procedimiento similar al utilizado para deducir el *MÉTODO RUNGE-KUTTA* de segundo orden, conservando en los desarrollos en serie de *TAYLOR* los términos que contienen h^3; h^4; ... etc.

METODO DE RUNGE-KUTTA DE MAYOR ORDEN (2)

Por ej., para n=3 se llegará a un sistema de seis ecuaciones con ocho incógnitas, y haciendo una selección particular de valores para dos de esos parámetros, de manera que las expresiones resultantes maximicen la precisión, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones, las que constituyen el *MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE TERCER ORDEN*:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 4k_2 + k_3\right) \qquad (9.26)$$

METODO DE RUNGE-KUTTA DE MAYOR ORDEN (3)

Donde:

$$k_1 = h f\left(x_i ; y_i\right)$$
$$k_2 = h f\left(x_i + \frac{h}{2} ; y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$
$$k_3 = h f\left(x_i + h ; y_i - k_1 + 2k_2\right)$$

El error que se comete al utilizar estas expresiones, resulta:

$$\mathbf{E} \leq h^4$$

pues, se han despreciado en los desarrollos en serie de *TAYLOR*, utilizados para deducirlo, todos aquellos términos que contienen h^4 , y sus potencias mayores.

METODO DE RUNGE-KUTTA DE MAYOR ORDEN (4)

Ya en este orden, el *MÉTODO DE RUNGE-KUTTA* sustituye con ciertas ventajas de precisión a todos los estudiados anteriormente.

El método más frecuentemente utilizado, dentro de la metodología estudiada, es el *MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN*, el que resulta de hacer n=4 en la expresión (9.10), igualar términos hasta los que contienen h^4 y seleccionar un conjunto particular de los parámetros arbitrarios, que maximicen la precisión.

METODO DE RUNGE-KUTTA DE MAYOR ORDEN (5)

Los resultados del cálculo descripto en el párrafo anterior, concluyen en el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \qquad (9.27)$$

donde :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf\left(x_i; y_i\right) \\ k_2 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf\left(x_i + h; y_i + k_3\right) \end{aligned}$$

que, en su conjunto constituyen el método aludido.

ERROR EN LOS METODO DE RUNGE-KUTTA DE MAYOR ORDEN

En el último algoritmo, dado por las expresiones (9.27), debido a que se han despreciado en los desarrollos en serie de *TAYLOR* correspondientes, los términos que contienen h^4, como aquellos que contienen potencias mayores, se comete un error:

$$\mathbf{E} \leq h^5$$

lo que convierte a este, en un **método apto** para resolver problemas normales de ingeniería y otras ramas científicas.

ERROR EN LOS METODO DE RUNGE-KUTTA DE MAYOR ORDEN (2)

En general, por la misma razón apuntada al estudiar el error de los métodos de *RUNGE-KUTTA* del orden primero al cuarto, para el de orden n será:

$$\mathbf{E} \leq h^{n+1}$$

por lo cual, al menos teóricamente, es posible desarrollar un conjunto de ecuaciones que tenga cualquier grado deseado de precisión, con solo tomar n suficientemente grande.

METODO DE RUNGE-KUTTA PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Será considerada primeramente, la posibilidad de solución de dos ecuaciones diferenciales de primer orden primer grado de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = f[x; u(x); v(x)] \\ \dfrac{dv}{dx} = f[x; u(x); v(x)] \end{cases} \qquad (9.28)$$

cuya solución inicial viene dada por: $u = u_0$; $v = v$ cuando $x = x_0$.

METODO DE RUNGE-KUTTA PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES (2)

Utilizando el método de cuarto orden de *RUNGE-KUTTA* es posible establecer el siguiente conjunto de ecuaciones para resolver el sistema (9.28)

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (9.29)$$

donde:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf_1(x_i; u_i; v_i) \\ k_2 &= hf_1\left(x_i + \frac{h}{2}; u_i + \frac{k_1}{2}; v_i + \frac{q_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf_1\left(x_i + \frac{h}{2}; u_i + \frac{k_2}{2}; v_i + \frac{q_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf_1(x_i + h; u_i + k_3; v_i + q_3) \end{aligned} \qquad ()$$

METODO DE RUNGE-KUTTA PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES (3)

Además: $$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}\left(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4\right) \qquad (9.31)$$

donde, los nuevos elementos q_1 ; q_2 ; q_3 ; q_4 , toman los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
q_1 &= hf_2\left(x_i; u_i; v_i\right) \\
q_2 &= hf_2\left(x_i + \frac{h}{2}; u_i + \frac{k_1}{2}; v_i + \frac{q_1}{2}\right) \\
q_3 &= hf_2\left(x_i + \frac{h}{2}; u_i + \frac{k_2}{2}; v_i + \frac{q_2}{2}\right) \\
q_4 &= hf_2\left(x_i + h; u_i + k_3; v_i + q_3\right)
\end{aligned} \qquad (9.32)$$

METODO DE RUNGE-KUTTA PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES (4)

La solución comienza sustituyendo los valores iniciales de $x; u; v$, en las ecuaciones diferenciales dadas, para obtener valores iniciales de f_1 ; f_2 , que multiplicados por h, dan los valores de k_1 ; q_1 de las ecuaciones (9.30) y (9.32), respectivamente.

Conocidos los valores de k_1 ; q_1 se calculan k_2 ; q_2 , después k_3 ; q_3 , y finalmente, k_4 ; q_4 . Luego se aplican las fórmulas de recurrencia (9.29) y (9.31) para determinar los valores u_1 ; v_1 para $x_1=x_0+h$.

METODO DE RUNGE-KUTTA PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES (5)

Estos valores se utilizan entonces, como valores iniciales para comenzar otro paso del proceso, que acabará calculando los valores de u_2 ; v_2 para $x_2=x_1+h=x_0+2h$, y así sucesivamente, hasta cubrir totalmente el rango de integración deseado.

Es obvio que se pueden resolver sistemas de cualquier número de ecuaciones diferenciales, con solo utilizar un conjunto de ecuaciones como los mostrados, por cada una de las variables dependientes que aparecen en el sistema dado de ecuaciones, que se trata de resolver.

METODO DE RUNGE-KUTTA PARA ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Por el *ANÁLISIS MATEMÁTICO*, se sabe que toda ecuación diferencial de orden n, superior al primero ($n>1$), que toma la forma general:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x; y; y'; y'';\ldots; y^{n-1}\right) \qquad (9.33)$$

puede ser transformada en un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden con $n+1$ incógnitas, con solo sustituir las n-1 derivadas que aparecen en el segundo miembro de (9.33) por sendas variables dependientes.