Métodos Numéricos/ Métodos computacionales
INTERPOLACIÓN NUMÉRICA

Bibliografía:

Análisis Numérico – Burden and Faires- Editorial Sudamericana –
Métodos Numéricos para ingenieros. Chapra y Canale. Ed. Mc Graw Hill. 5ta. Edición.

INTRODUCCION (I)

- Cuando en una tabla se busca el valor de una función, para un determinado valor de la variable que no figura explícitamente en ella, se realiza una tarea de interpolación por medio de reglas simples y muy precisas.

INTRODUCCION(II)

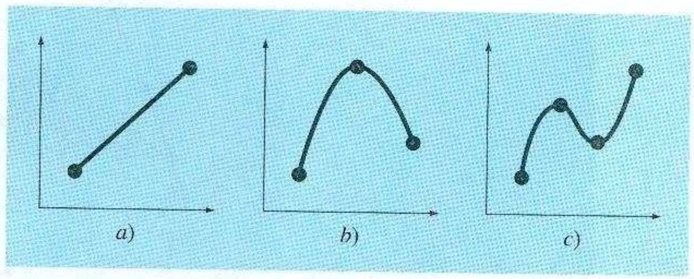
- Por ejemplo, hay solo una línea recta que une dos puntos (polinomio de 1er grado).
- Únicamente una parábola une un conjunto de tres puntos. (interpolación de 2do grado o cuadrática).
- Una parábola cúbica une un conjunto de cuatro puntos (polinomio de 3er. Grado)

Interpolación numérica

- Supóngase que se conocen los valores $y_0; y_1 ;...; y_n$ de la función desconocida, correspondientes a los n+1 valores distintos: $x_0 ; x_1 ; ... ; x_n$ de una variable independiente x.
- El problema, consiste, en determinar el valor aproximado de y que cabe asignar como correspondiente a otro valor de x, distinto de todos los x_i conocidos y comprendidos en el intervalo de trabajo [$x_0 ; x_n$].

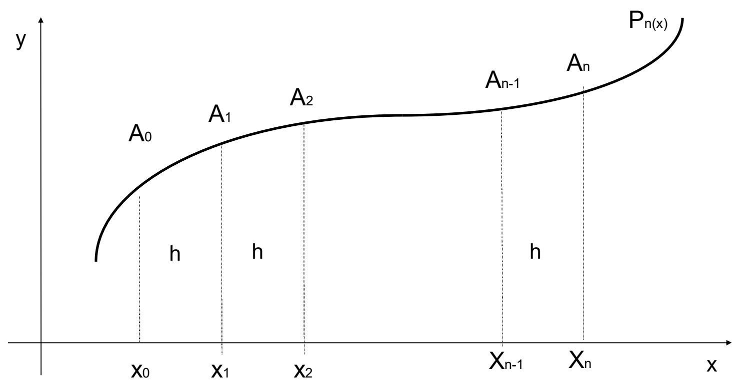
Interpolación numérica (III)

Ejemplos de interpolación polinomial: *a)* de primer grado (lineal) que une dos puntos, *b)* de segundo grado (cuadrática o parabólica) que une tres puntos y *c)* de tercer grado (cúbica) que une cuatro puntos.



* De hecho se puede probar que dados $n + 1$ puntos, con abscisas distintas entre sí, existe uno y sólo un polinomio de grado a lo más n que pasa por estos puntos.

Interpolación numérica



- Figura 7.1 -

•Dados n+1 puntos, con abscisas distintas entre si, existe uno y solo un polinomio de grado a lo más n que pasa por estos puntos.

Interpolación numérica

- Considerando que por los *n+1* puntos A_0 ; A_1 ; ... ; A_n, pasa a lo sumo una parábola que representa un polinomio $P_n(x)$ de grado *n*
- Entonces conocidos *n+1* puntos, la parábola de grado *n* que pasa por ellos permite asignar a cada valor de *x*, un valor de *y*, que será considerado como el valor de interpolación buscado.

TABLAS CON VALORES EQUIDISTANTES

El caso más frecuente: problemas de interpolación cuyas tablas tienen **VALORES EQUIDISTANTES** de la variable *x*; se dará por presupuesto que:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$$

Se presentarán, primeramente, las tablas de diferencias.

TABLAS CON VALORES EQUIDISTANTES

- Los valores de las diferencias primeras Δ_{yk} se obtienen restando a cada valor y_{k+1} el valor y_k que le antecede en la tabla.
- Las diferencias segundas se obtienen de igual modo, partiendo en este caso, de las diferencias primeras.
- Las terceras se obtienen a partir de las segundas, y así sucesivamente hasta completar la tabla.
- Completar la tabla es llegar a diferencias cuyos valores son poco significativos en valor absoluto

TABLAS de Diferencias Avanzadas

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		$\Delta y_0 = y_1 - y_0$		
$x_1 = x_0 + h$	y_1		$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	
		$\Delta y_1 = y_2 - y_1$		$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
$x_2 = x_1 + h$	y_2		$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	
		$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$
$x_3 = x_2 + h$	y_3		$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\vdots$
		$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\vdots$	$\vdots$
$x_4 = x_3 + h$	y_4	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\Delta^3 y_{n-3} = \Delta^2 y_{n-2} - \Delta^2 y_{n-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$		
$x_n = x_{n-1} + h$	y_n			

TABLAS CON VALORES EQUIDISTANTES

- Observar que:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$
$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$
$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0$$

Recuérdese la expresión de los números combinatorios:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

TABLAS CON VALORES EQUIDISTANTES

- Resulta entonces:

$$\Delta^n y_0 = \sum_{i=o}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} y_{n-i}$$

Así es posible deducir que las diferencias *n*-ésimas de y_0 se forman a partir de la ordenada *n*-ésima y sus *n* ordenadas antecedentes afectadas por los coeficientes del *Triángulo de TARTAGLIA o PASCAL*. Link:
http://www.estadisticaparatodos.es/taller/triangulo/triangulo.html

https://www.youtube.com/watch?v=iQF93rRX9GU

Todas estas diferencias reciben el nombre de **DIFERENCIAS AVANZADAS**.

Confeccionar la tabla de diferencias avanzadas

x	0	1	2	3	4
y	0	1	4	9	16

x	y	Δ y	Δ^2 y	Δ^3y
0	0			
1	1			
2	4			
3	9			
4	16			

FÓRMULA DE NEWTON-GREGORY ASCENDENTE

- Conocidos los valores $y_0 ; y_1 ; ... ; y_n$ de una función, correspondientes a los n+1 valores equidistantes $x_0 ; x_1 ; ... ; x_n$ de la variable, se trata de encontrar el polinomio de grado n:

7.2
$$P_n (x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0) (x - x_1) + ... + a_n (x - x_0) (x - x_1) ... (x - x_{n-1})$$

Los n+1 coeficientes $a_0 ; a_1 ; ... ;a_n$ se determinan imponiendo a la parábola (7.2) las n+1 condiciones de pasar por los puntos A_0 ; A_1 ; ... ; A_n ;

es decir, estableciendo que para $x=x_0 ; x=x_1 ; ... ; x=x_n$, la expresión (7.2) debe ser igual a $y_0 ; y_1 ; ... ; y_n$, respectivamente; es necesario hacer:

FÓRMULA DE NEWTON-GREGORY ASCENDENTE

- $P_n (x_0) = y_0 = a_0$
- $P_n (x_1) = y_1 = a_0 + a_1 (x_1 - x_0)$
- $P_n (x_2) = y_2 = a_0 + a_1 (x_2 - x_0) + a_2 (x_2 - x_0) (x_2 - x_1)$
- . . . .
- $P_n (x_n) = y_n = a_0 + a_1 (x_n - x_0) + \dots + a_n (x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})$
- de donde, despejando resultan:

$$a_0 = y_0$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}$$

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - (x_2 - x_0) a_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_0 - 2h \frac{y_1 - y_0}{h}}{2.1\, h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

FÓRMULA DE NEWTON-GREGORY ASCENDENTE

7.3 $$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}$$

Sustituyendo los valores de los coeficientes, calculados a partir de la expresión (7.3), en la ecuación (7.2), se llega a la Fórmula de **NEWTON-GREGORY ASCENDENTE**:

7.4 $$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ + \frac{\Delta^n y_0}{n!\, h^n}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

Haciendo $x = x_0 + hu$, y sustituyéndola en la expresión (7.4), se obtiene una fórmula de uso más práctico. Bajo estas condiciones es:

FÓRMULA DE NEWTON-GREGORY ASCENDENTE

$x\text{-}x_0 = h\,u$; $x\text{-}x_1 = x\text{-}(x_0 + h) = h\,u\text{-}h = h\,(u\text{-}1)$

etc.; vale decir, la formula de **NEWTON-GREGORY** toma la forma:

7.5
$$P_n(x) = P_n(x_0 + hu) = y_0 + u\,\Delta y_0 + \frac{u(u-1)}{2!}\Delta^2 y_0 +$$
$$+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{u(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

FÓRMULA DE N.G.Ascendente

Considerando que, según la teoría y notación de los números combinatorios, se puede expresar:

$$\frac{u!}{1!\,(u-1)!} = \binom{u}{1} = u$$

$$\frac{u!}{2!\,(u-2)!} = \binom{u}{2} = u\,(u-1)$$

$$\frac{u!}{n!(u-n)!} = \binom{u}{n} = u(u-1)(u-2)\ldots(u-n+1)$$

y considerando a $\Delta^0 y_0 = y_0$, la expresión 7.5 se puede escribir:

(7.6)
$$P_n(x) = \binom{u}{0}y_0 + \binom{u}{1}\Delta y_0 + \binom{u}{2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \binom{u}{n}\Delta^n y_0 =$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{u}{i}\Delta^i y_0$$

Ejemplo en Mathematica.

INTERPOLACIÓN LINEAL

Si en una tabla de valores, las diferencias son nulas, a partir de la segunda en adelante, la formula de *NEWTON-GREGORY* se reduce a la siguiente:

7.7 $$P_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0)$$

Es la expresión analítica de la recta que pasa por los puntos A_0 ; A_1 .

Puede utilizarse cuando, las diferencias tabulares de orden dos y > son nulas; o cuando las diferencias de orden superior Δ^2 ;Δ^3 y siguientes, son despreciables.

En este caso, la curva representativa de la función es reemplazada por la poligonal que se obtiene uniendo los puntos A_0 ; A_1 ; ... ; A_n , con segmentos de recta.

INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA

Si las diferencias tabulares de orden mayor al segundo son nulas; se puede utilizar la fórmula de *NEWTON-GREGORY* incluyendo los términos de segundo orden y menores:

7.8 $$P_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1)$$

Esta es la ecuación de la parábola de segundo grado que pasa por A_0 ; A_1 y A_2 .

No se pierde generalidad si se considera el valor x_1 coincidiendo con el origen de coordenadas (ver figura 7.2), en cuyo caso es:

$$x_0 = -h \quad ; \quad x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = h$$

y la ecuación de la parábola que pasa por los puntos A_0 ; A_1 y A_2 es, en general:

7.9 $$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA

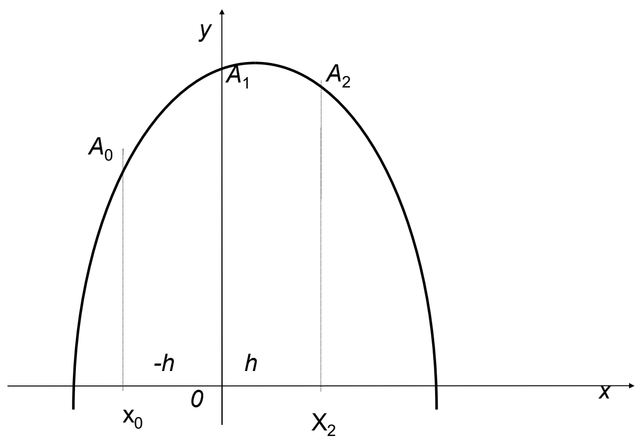


Figura 7.2

INTERPOLACIÓN LINEAL Y CUADRÁTICA

Siendo $x_0 = -h$; $x_1 = 0$ y $x_2 = h$, la expresión (7.8) es válida para todos ellos, entonces, según la (7.9) : *(y = a x² + b x + c), se puede escribir:*

$$\begin{cases} y_0 = a\,x_0^2 + b\,x_0 + c = a(-h)^2 + b(-h) + c \\ y_1 = a\,x_1^2 + b\,x_1 + c = c \\ y_2 = a\,x_2^2 + b\,x_2 + c = a\,h^2 + b\,h + c \end{cases}$$

de la segunda, se obtiene directamente que $c = y_1$; y reemplazando este valor en las otras dos ecuaciones, resulta:

$$\begin{cases} a\,h^2 - b\,h + y_1 = y_0 \\ a\,h^2 + b\,h + y_1 = y_2 \end{cases}$$

de donde, sumando y restando ambas ecuaciones, se obtiene:

$$a = \frac{y_2 - 2\,y_1 + y_0}{2\,h^2} \qquad ; \qquad b = \frac{y_2 - y_0}{2\,h}$$

INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA

valores que reemplazados en la ecuación:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c$$

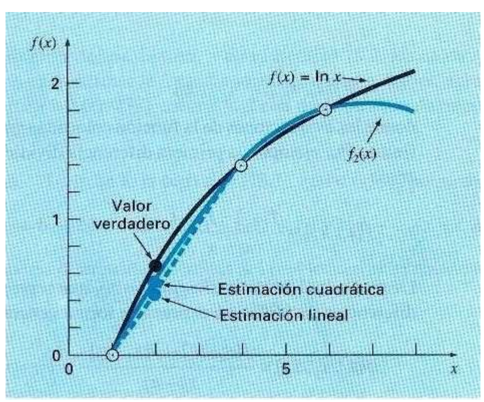
dan como resultado:

$$y = \frac{y_2 - 2\,y_1 + y_0}{2\,h^2}\,x^2 + \frac{y_2 - y_0}{2\,h}\,x + y_1$$

denominada **FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA**.

INTERPOLACIÓN CUADRÁTICA

Ejemplo del uso de la interpolación cuadrática para estimar ln 2. Para comparación se presenta también la interpolación lineal desde x= 1 a 4.



FÓRMULA DE NEWTON-GREGORY DESCENDENTE

Cuando, la interpolación debe efectuarse para un valor de x próximo a x_n o, en general, alejado de x_0 , ->
Aplicar fórmulas de interpolación en las que intervengan las diferencias sucesivas relacionadas con el último valor y_n de la tabla.
Definiendo la diferencia de primer orden mediante la expresión:

(7.11) $\Delta\, y_{n-1} = y_n - y_{n-1} =$ v y_n

y, operando de igual modo al realizado para definir las diferencias avanzadas, en este caso podemos observar la tabla correspondiente:

FÓRMULA DE NEWTON-GREGORY DESCENDENTE

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
x_0	y_0			
		$\nabla y_1 = y_1 - y_0$		
$x_1 = x_0 + h$	y_1		$\nabla^2 y_1 = \nabla y_1 - \nabla y_0$	
		$\nabla y_2 = y_2 - y_1$		$\nabla^3 y_1 = \nabla^2 y_1 - \nabla^2 y_0$
$x_2 = x_1 + h$	y_2		$\nabla^2 y_2 = \nabla y_2 - \nabla y_1$	
		$\nabla y_3 = y_3 - y_2$		$\nabla^3 y_2 = \nabla^2 y_2 - \nabla^2 y_1$
$x_3 = x_2 + h$	y_3		$\nabla^2 y_3 = \nabla y_3 - \nabla y_2$	$\vdots$
		$\nabla y_4 = y_4 - y_3$	$\vdots$	$\vdots$
$x_4 = x_3 + h$	y_4	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\nabla^3 y_{n-2} = \nabla^2 y_{n-2} - \nabla^2 y_{n-3}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\nabla^2 y_{n-1} = \nabla y_{n-1} - \nabla y_{n-2}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$		
$x_n = x_{n-1} + h$	y_n			

Las diferencias calculadas arriba, reciben el nombre de **DIFERENCIAS ATRASADAS**.

FÓRMULA DE NEWTON-GREGORY DESCENDENTE

Para deducir la fórmula correspondiente, es necesario escribirla en forma análoga a la ya utilizada para la ascendente; la expresión de la ecuación del polinomio de grado *n* es:

7.12 $$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)$$

Calculando sus coeficientes $a_0; a_1; \ldots; a_n$ mediante las $n+1$ condiciones que impone el hecho que la parábola (7.12) tenga que pasar por los puntos A_0 ; A_1 ; ...; A_n y operando en forma similar a G.N.A. se obtienen los coeficientes a_i buscados.

FÓRMULA DE NEWTON-GREGORY DESCENDENTE

En general resulta que:

$$a_n = \frac{\nabla^n y_n}{n!\,h^n}$$

Sustituyendo los coeficientes calculados en la expresión 7.12

$$P_n(x) = y_n + \frac{\nabla y_n}{h}(x - x_n) + \frac{\nabla^2 y_n}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots +$$

$$+ \frac{\nabla^n y_n}{n!\,h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)$$

Realizando el cambio de variable de **x** por **x_n+ h u**, resulta una expresión mas práctica.

FÓRMULA DE LAGRANGE (I)

Si la interpolación debe realizarse por medio de tablas obtenidas experimentalmente, -> en gral. estas poseen intervalos no equidistantes. Para estos problemas, se utiliza **LAGRANGE** que puede deducirse a partir del polinomio de grado *n* al cual se le impone pasar por los *n*+1 puntos A_0 ; A_1 ;…….; A_n , de la forma:

$P_n (x) = a_0 (x - x_1) (x - x_2) ... (x - x_n) + a_1 (x - x_0) (x - x_2) ... (x - x_n) + ...$
……. $+ a_n (x - x_0) (x - x_1) ... (x - x_{n-1}) ...;$

donde c/u de los términos, es a su vez, un polinomio de grado *n* afectado de un coeficiente $\boldsymbol{a_r}$, el cual debe ser hallado.
Los n+1 $\boldsymbol{a_r}$ se determinan imponiendo las *n*+1 condiciones:

$$\begin{array}{lll} para & x = x_0 & \Rightarrow \quad y = y_0 \\ para & x = x_1 & \Rightarrow \quad y = y_1 \\ \dots \; \dots & \dots \; \dots & \dots \; \dots \; \dots \\ para & x = x_n & \Rightarrow \quad y = y_n \end{array}$$

así, se obtienen las ecuaciones:

FÓRMULA DE LAGRANGE (II)

$$\begin{array}{l} y_0 = a_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n) \\ y_1 = a_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n) \\ \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \; \dots \\ y_n = a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1}) \end{array}$$

Despejando los valores de los $\boldsymbol{a_r}$ y sustituyéndolos en el polinomio original, resulta la denominada **FORMULA DE LAGRANGE**:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & + y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)} + \\ & + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)} + \dots + \\ & + y_n \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})} \end{aligned} \tag{7.15}$$

FÓRMULA DE LAGRANGE (III)

Es más cómodo operar con la expresión que se obtiene dividiendo ambos miembros de (7.15) por el producto (x - x_0)(x - x_1) ... (x - x_n), con lo cual resulta:

(7.16)

$$\frac{P_n(x)}{(x-x_0)\dots(x-x_n)} = \frac{y_0}{(x-x_0)(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} +$$

$$+\frac{y_1}{(x-x_1)(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots +$$

$$+\frac{y_n}{(x-x_n)(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

Expresión utilizada en las aplicaciones prácticas para realizar la interpolación en tablas con valores no equidistantes.

FÓRMULA DE LAGRANGE para Valores Equidistantes

Los coeficientes resultan independientes de los valores de las abscisas de la tabla dada y de su incremento tabular h;

Se calculan de una vez para siempre, recibiendo el nombre de **COEFICIENTES LAGRANGIANOS**.

Para facilitar la tarea, se han confeccionado tablas de coeficientes que consideran los casos correspondientes a 3; 4;...; 11, etc. puntos.

Caso particular que corresponde a una tabla de cuatro puntos.

Conocidos los valores f_{-1} ; f_0 ; f_1 ; f_2 correspondientes a x_{-1} ; x_0 ; x_1 ; x_2 , respectivamente, el polinomio de *LAGRANGE* será:

$$f(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_{-1}-x_0)(x_{-1}-x_1)(x_{-1}-x_2)} f_{-1} + \quad + \frac{(x-x_{-1})(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_{-1})(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f_0 +$$

$$+ \frac{(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_{-1})(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f_1 + \quad + \frac{(x-x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_{-1})(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f_2 +$$

FÓRMULA DE LAGRANGE para Valores Equidistantes

donde x_0 - X_{-1} =x_1 -x_0 =x_2 -x_1 = h. Si se considera ahora, el cambio de variable x =x_0 +hu, resulta:

$$f(x) = f(x_0 + hu) = -\frac{u(u-1)(u-2)}{6} f_{-1} +$$

$$+\frac{(u+1)(u-1)(u-2)}{2} f_0 - \frac{(u+1)u(u+2)}{2} f_1 + \frac{(u+1)u(u-1)}{6} f_2$$

Llamando *Li* a los coeficientes *LAGRANGIANOS*, estos pueden ser calculados. Entonces, tomando:

$$L_{-1} = -\frac{u(u-1)(u-2)}{6}$$

$$L_0 = \frac{(u+1)(u-1)(u-2)}{2} \qquad L_1 = \frac{(u+1)u(u+2)}{2} \qquad L_2 = \frac{(u+1)u(u-1)}{6}$$

FÓRMULA DE LAGRANGE para Valores Equidistantes

Teniendo tabulados los coeficientes *L i*, la interpolación se reduce a calcular la expresión:

$$f(x) = L_{-1} f_{-1} + L_0 f_0 + L_1 f_1 + L_2 f_2$$

FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN PARABÓLICA PROGRESIVA

Ventaja: término a término, es posible obtener una cota del error que se ha cometido hasta ese momento.
Sea el polinomio (7.2) ya utilizado al deducir las fórmulas de *NEWTON-GREGORY*:

(7.2) $P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$

Imponiéndole la condición que la curva representativa pase por los n+1 puntos A_0 ; A_1 ;...; A_n .

La condición de pasar por A_0 implica que $y_0 = a_0$; se considera -> una primera aproximación de la fórmula; es decir, como el polinomio de **interpolación de orden cero**:

7.19 $P_0(x) = y_0$

En una 2da. aproximación, se exige que la representación gráfica pase por los puntos A_0 y A_1 , debe verificarse, además:

FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN PARABÓLICA PROGRESIVA

(7.20) $y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$

de la cual puede calcularse el valor de a_1 , que resulta:

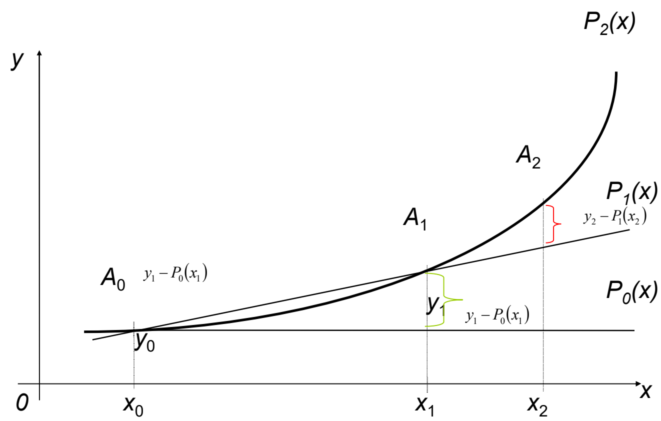
$$a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}$$

donde el numerado de a_1 es la magnitud del error que se comete al estimar x_1 cuando se toma el polinomio de interpolación P_0

Reemplazando este valor de a_1 en la expresión 7.2 y tomando los términos desde el 3ro en adelante valen cero, puede obtenerse el polinomio de interpolación de orden uno, ver figura 7.4, el que resulta:

7.19 $$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - P_0(x_1)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Figura 7.4



esta expresión que es el numerador de a_1 es el error que se cometería si se tomara como valor de y_1 el valor que proporciona el polinomio de interpolación de orden cero.

FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN PARABÓLICA PROGRESIVA

La condición que la curva pase, además, por el punto A_2 , impone para la deducción del polinomio de interpolación, la utilización de la expresión:

$$y_2 = a_0 + a_1 (x_2 - x_0) + a_2 (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

de la cual es posible deducir el valor del nuevo coeficiente a_2 que debe agregarse a la expresión general. Resulta entonces:

$$a_2 = \frac{y_2 - \left[a_0 + a_1 (x_2 - x_0)\right]}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

de donde:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{y_1 - P_0(x_1)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + \frac{y_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}(x - x_0)(x - x_1)$$

FÓRMULA DE INTERPOLACIÓN PARABÓLICA PROGRESIVA

en la cual el numerador de a_2 es el error que se cometería si se tomara como valor de y_2 el valor que proporciona el polinomio de interpolación de orden uno.

Continuando este análisis y operando de idéntica manera a la estudiada, puede obtenerse el polinomio de interpolación de orden *r*:

$$P_r(x) = y_0 + \frac{y_1 - P_0(x_1)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + \ldots +$$
$$+ \frac{y_r - P_{r-1}(x_r)}{(x_r - x_0)\ldots(x_r - x_{r-1})}(x - x_0)\ldots(x - x_{r-1})$$

donde el numerador de cada coeficiente a_k mide precisamente el valor del error $y_k - P_{k-1}(x_k)$ que se comete al considerar, en lugar del valor y_k, el valor dado por el polinomio de aproximación de orden ($k-1$) en el punto de abscisa $x = x_k$.

Calcule mediante interpolación parabólica progresiva, y con la tabla siguiente, el valor que le corresponde a x= 2

X	1	4	6
y	0	1,386294	1,791759

Indicar la magnitud de la precisión lograda en cada paso!

$$P_r(x) = y_0 + \frac{y_1 - P_0(x_1)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + \ldots + \frac{y_r - P_{r-1}(x_r)}{(x_r - x_0)\ldots(x_r - x_{r-1})}(x - x_0)\ldots(x - x_{r-1})$$

$$+ \frac{y_r - P_{r-1}(x_r)}{(x_r - x_0)\ldots(x_r - x_{r-1})}(x - x_0)\ldots(x - x_{r-1})$$

Calcule mediante interpolación parabólica progresiva, y con la tabla siguiente, el valor que le corresponde a x= 2

X	1	4	6
y	0	1,386294	1,791759

$a_0 = y_0 \qquad P_0(x) = 0$

$$a_1 = \frac{y_1 - P_0(x_1)}{(x_1 - x_0)} = \frac{1{,}386294 - 0}{4 - 1} = 0{,}462098$$

$P_1(x) = 0 + 0{,}462098\ (x - 1)$

$P_1(6) = 0 + 0{,}462098\ (6 - 1) = 2{,}31049$

$$a_2 = \frac{y_2 - P_1(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1{,}791759 - 2{,}31049}{(6-1)(6-4)} = \frac{-0{,}518731}{10} = -0{,}0518731$$

$P_2(x) = 0 + 0{,}462098\ (x - 1) + (-0{,}0518731)\ (x - 1)\ (x - 4)$

$$\boxed{P_r(x) = y_0 + \frac{y_1 - P_0(x_1)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) + \ldots + \quad + \frac{y_r - P_{r-1}(x_r)}{(x_r - x_0)\ldots(x_r - x_{r-1})}(x - x_0)\ldots(x - x_{r-1})}$$

Calcule mediante interpolación parabólica progresiva, y con la tabla siguiente, el valor que le corresponde a x= 2

X	1	4	6
y	0	1,386294	1,791759

$P_0(x) = 0$

$P_1(x) = 0 + 0{,}462098\ (x - 1)$

$P_2(x) = 0 + 0{,}462098\ (x - 1) + (-0{,}0518731)\ (x - 1)\ (x - 4)$

$P_0(2) = 0$

$P_1(2) = 0 + 0{,}462098\ (2 - 1) = 0{,}462098$

$P_2(x) = 0 + 0{,}462098\ (2 - 1) + (-0{,}0518731)\ (2 - 1)\ (2 - 4) = 0{,}5658442$

Calcule mediante interpolación parabólica progresiva, y con la tabla siguiente, el valor que le corresponde a x= 10

x	0	5	15	30
y	63	89	173	429

Indicar la magnitud de la precisión lograda en cada paso!

Calcule mediante interpolación parabólica progresiva, y con la tabla siguiente, el valor que le corresponde a x= 10

x	0	5	15	30
y	63	89	173	429

$a_0 = y_0 = 63$ $\qquad$ $P_0(x) = 63$

$P_1(x) = 63 + 5{,}2\,x$

$P_2(x) = 63 + 5{,}2\,x + 0{,}21\,x\,(x - 5)$

$P_3(x) = 63 + 5{,}2\,x + 0{,}21\,x\,(x - 5) + 0{,}0047\,x\,(X - 5)\,(x - 15)$

DIFERENCIAS ENTRE **METODOS**

LAGRANGE: todos los términos tienen el mismo grado;

Parabólica progresiva: el grado de los distintos términos va en aumento progresivamente.

LAGRANGE: solo es posible determinar una cota del error, y en caso de ser necesaria una aproximación mayor a la obtenida es necesario rehacer integralmente el cálculo.

Parabólica progresiva : los numeradores de los coeficientes indican, sucesivamente, la magnitud de la precisión lograda en el paso anterior.