INTEGRACION DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Métodos que comienzan por si mismos

Análisis Numérico. Burden y Faires. 7ma. Edición-.- Cencage Learning Editores. 2009.-
Métodos Numéricos para Ingenieros.- Chapra y Canale. Ed. McGraw Hill Interamericana. 2007.
Métodos Numéricos – G. Pace – Editorial EUDENE -1997.

LA IMPORTANCIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES (1)

- Muchos problemas de física, ingeniería, biología, etc., admiten una formulación en ecuaciones diferenciales.
- No es incorrecto afirmar que: **Todo proceso físico que implique un cambio continuo puede ser enunciado matemáticamente en forma de ecuaciones diferenciales.**
- A modo de ilustración se presenta a continuación algunos ejemplos relevantes en los que aparecen ecuaciones diferenciales.

LA IMPORTANCIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES (2)

- **Caída de los cuerpos con resistencia del medio proporcional a la velocidad.**
- **Descomposición de una sustancia radiactiva.**
- **Tasa de población.**
- **Ley de enfriamiento de Newton.**
- **Ecuación del resorte.**
- **Deflexión de una viga unifome.**
- **Termodinámica: ley del calor de Fourier.**
- **Electromagnetismo: ley de Faraday.**

LA IMPORTANCIA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES (3)

- **Tasa de población.**
- La tasa de cambio con respecto al tiempo "t" de una población x (t) con índices constantes de nacimiento y mortalidad es, en muchos casos y con una modelización, proporcional al tamaño de la población. Esto es:
- $x'(t) - k\, x(t) = 0$
- K es una constante de proporcionalidad

DEFINICIONES BASICAS (1)

- **Def.** Se llama ***ecuación diferencial ordinaria de orden n*** a toda ecuación que establece una relación entre: la variable independiente de la ecuación: x, la función buscada y = f (x) y sus derivadas hasta el orden n:

$$y', y'', y''', \ldots\ldots\ldots, y^{n}$$

DEFINICIONES BASICAS (2)

- Toda ecuación diferencial ordinaria puede ser representada mediante una expresión de la forma:

(*)

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

El termino ***ordinaria*** se emplea para indicar que hay una sola variable independiente en la ecuación.

Si hubiese mas de una variable independiente, hablaríamos de ecuaciones en derivadas parciales

DEFINICIONES BASICAS (3)

- **Def. :** Se llama ***orden de la ecuación diferencial*** al orden de la derivada superior de la función que aparece en la ecuación diferencial
- **Ejemplos:**
- La ecuación y″ + y = 0 es una ecuación de **segundo orden o de orden 2.**
- La ecuación y′ = y es una ecuación de **primer orden o de orden 1**

DEFINICIONES BASICAS (4)

- **Def. :** Toda función y = f(x) que verifica la expresión
- $$F\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0$$
- se dice que es una ***solución o integral*** de la ecuación diferencial.
- Hay que distinguir entre los conceptos de solución general y solución particular.
- **Def. :** Se llama ***solución general*** de una ecuación diferencial a la familia de todas las funciones que verifican la ecuación.
- **Def. :** Se llama ***solución particular*** de una ecuación diferencial a cualquiera de las funciones que verifican la ecuación.

DEFINICIONES BASICAS (5)

- La solución general de la ec. diferencial:
- $y'x + y = 0$
- Es $y(x)= C/x$, donde C es una constante arbitraria.

- La solución general de una ec. diferencial de orden n depende en general , de n constantes arbitrarias. Para cada posible valor de **C** se tiene una sol. de la ec (**solución particular**)

DEFINICIONES BASICAS (6)

- La solución de una ecuación diferencial ordinaria es una función en términos de la variable independiente y de parámetros que satisfacen la ecuación diferencial original.

- Dado que la solución general de una ecuación diferencial depende de constantes arbitrarias, es posible imponer condiciones adicionales a las funciones solución de esas ecuaciones.
- Por ej., imponer que la función solución (o alguna de sus derivadas) pase por algún punto dado del espacio. En este sentido se definen las ecuaciones de Cauchy y las ecuaciones de contorno.

DEFINICIONES BASICAS (7)

Def.: Para una ec. dif. de orden n dada por la formula: $F\left(x, y, y', y'',\ldots\ldots, y^{(n)}\right) = 0$

se define ***problema de Cauchy*** a la ecuación diferencial junto con n condiciones adicionales de la forma:

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', y'',\ldots\ldots y^{n}\right) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

DEFINICIONES BASICAS (8)

Ejemplo: La solución general de la ecuación y''(x)+y = 0, depende de dos constantes arbitrarias:

$$y(x) = C_1 sen(x) + C_2 \cos(x)$$

Esto implica que, de todas las soluciones de la ecuación, es posible seleccionar aquella que cumpla, por ejemplo, condiciones del tipo y(0) = 0, y'(0) = 3, de donde la

solución obtenida es y (x) = 3 sen (x).

DEFINICIONES BASICAS (9)

Se dice pues que esta función es la solución del problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y''(x) + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow y(x) = 3sen(x)$$

DEFINICIONES BASICAS (10)

- **Def.:** Para una ecuación diferencial de orden n, dada por la formula (*) se define ***problema de contorno*** a la ecuación diferencial junto con n condiciones adicionales de la forma:

$$\begin{cases} F(x, y, y' y'', \ldots\ldots, y^n) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y(x_{n-1}) = y_{n-1} \end{cases}$$

DEFINICIONES BASICAS (11)

- Dada una ecuación diferencial de orden n, cuando se imponen **n** condiciones adicionales sobre la función y sus derivadas en **un mismo punto** (una condición para cada orden de derivación) hablamos de **problemas de Cauchy.**
- Si se impone a la función solución **pasar por n puntos dados** (y no se impone ninguna condición sobre las derivadas de la función), hablamos de **problemas de contorno.**
- Existe una tercera posibilidad, que es la de combinar las dos anteriores. En este caso, se hablaría de **problemas mixtos**

DEFINICIONES BASICAS (12)

Ejemplo: Dada la ecuación y''(x)+y = 0, resolver un problema de contorno significa imponer condiciones exclusivamente de la función solución sobre 2 puntos, por ejemplo:

$$y(0) = 1, y(\frac{\pi}{2}) = 0$$

DEFINICIONES BASICAS (12)

- De donde la solución obtenida es: y(x) = cos(x).
- Se dice que esta función es la solución del problema de contorno:

$$\begin{cases} y''(x) + y = 0 \\ y(0) = 1 \qquad \Rightarrow y(x) = \cos(x) \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN (1)

- Cualquier ecuación diferencial de primer orden tiene la forma: F(x,y,y') = 0
- Siendo x la variable del problema e y(x) la función buscada en la ecuación.
- Algunas de estas ecuaciones ya son conocidas como indican los sig. Teoremas:

- **TEOREMA:**
- La ecuación y' = 0 tiene como solución general la familia de funciones y(x) = C, donde C es cualquier numero real.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN (2)

- **TEOREMA:**
- Si f (x) es una función continua, la ecuación y' = f(x) tiene como solución general la familia de funciones

$$y(x) = C + \int f(x)dx$$

EJEMPLO:
La ecuación y' = x es del tipo anterior. Por tanto, la solución general:

$$y(x) = C + \frac{x^2}{2}$$

INTRODUCCIÓN (1)

Aplicación de métodos de resolución numérica para ecuaciones diferenciales ordinarias **resulta necesario o imprescindible cuando:**

• Es imposible la aplicación de la integración exacta, se desean calcular para valores de la variable *x*, los valores numéricos correspondientes de *y*, que satisfacen una ecuación diferencial dada, con un cierto grado de aproximación previamente establecido.
• El proceso de integración será realizado prescindiendo del conocimiento de la expresión analítica de la función solución *y*=*y*(*x*) que resolvería, el problema.

INTRODUCCIÓN (2)

•En aquellos casos en que la solución exacta no resuelve el problema en forma práctica.

• Necesidad de recurrir al uso de computadoras, por las características propias del problema, que involucran un número muy grande de pasos, de proceso complejo, imposible de realizar mediante métodos analíticos.

MÉTODO DE EULER

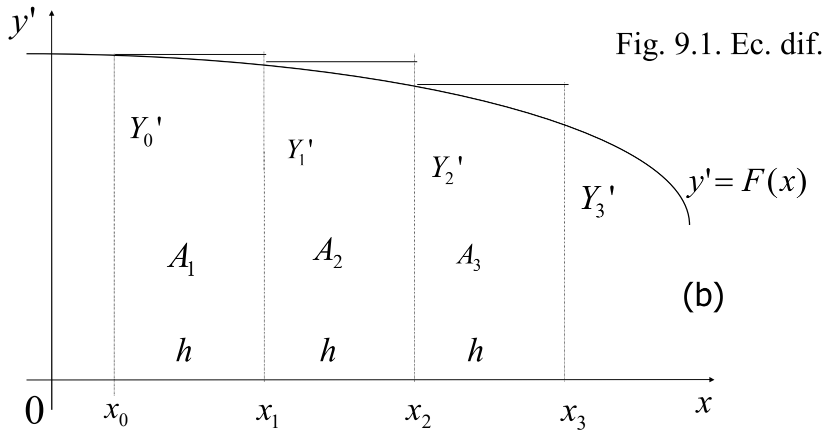
La forma general de las expresiones de las ecuaciones diferenciales de primer orden, que serán tratadas a continuación:

$$y' = f(x;y) \qquad (9.1) \qquad F(x,y,y') = 0$$

en la cual, y' no es simplemente función de la variable independiente x, sino también de la variable dependiente y, cuyos valores deben ser calculados.

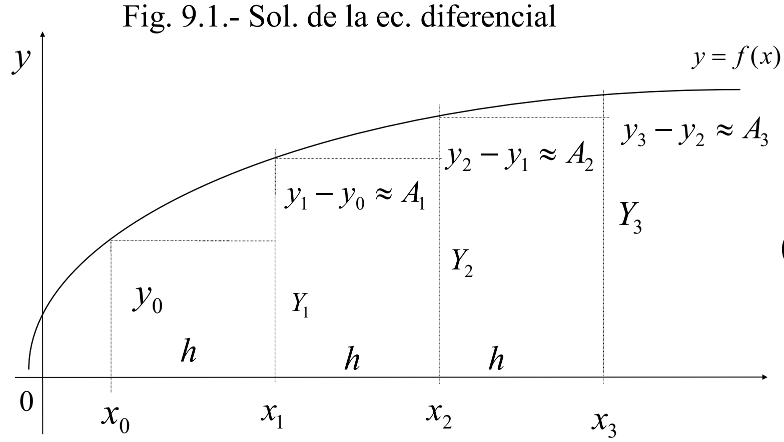
• No es posible, la integración directa de la misma mediante algunas reglas estudiadas con anterioridad.
• y(x) la función buscada en la ecuación.

MÉTODO DE EULER (2)



MÉTODO DE EULER (3)

Fig. 9.1.- Sol. de la ec. diferencial



MÉTODO DE EULER (4)

Un método simple que permite una solución aproximada de $y'=f(x;y)$ cuando se conoce una condición inicial $y=y_0$ para $x=x_0$.

Supóngase que, tanto la ecuación dada **como la solución de** la misma:

$$y=y(x) \qquad (9.2)$$

tienen la forma general de la figura 9.1 *(b)* y 9.1 *(a)*, respectivamente.

MÉTODO DE EULER (5)

La parte *(b)* de la gráfica puede ser representada dado que por la relación $y=y(x)$, el valor de y puede ser escrito:

$$y' = f(x;y) = f[x;y(x)] = F(x)$$

Dado que la solución es conocida para un valor inicial $(x_0 ;y_0)$ es posible determinar el valor inicial de y' haciendo uso de la ecuación $y'=f(x;y)$; entonces, reemplazando los respectivos valores iniciales dados, en la ecuación original, resulta el valor de y_0':

$$y_0' = f(x_0 ; y_0)$$

MÉTODO DE EULER (6)

La variación de *y* desde $x=x_0$ hasta $x=x_0+h$ se representa mediante el área bajo la curva *y′* entre los valores señalados de *x*; teniendo en cuenta que:

$$\int_{x_0}^{x_1} y' dx \cong A_1$$

y, reemplazando ambos miembros por sus valores respectivos, es:

$$[y]_{x_0}^{x_1} \cong y_0'(x_1 - x_0)$$

y, en definitiva:

$$y(x_1) - y(x_0) = y_1 - y_0 \cong y_0' h$$

MÉTODO DE EULER (7)

En las tres últimas expresiones, los primeros miembros representan los valores exactos y los segundos, los valores aproximados. Despejando y_1 de la última, resulta:

$$y_1 = y_0 + y_0' h \qquad (9.4)$$

Habiéndose determinado una aproximación precisa al valor de y_1 por medio de la expresión anterior, utilizando valores pequeños de *h*, es posible obtener una aproximación de y_1' a partir de $y'=f(x;y)$, ya que:

$$y_1' = f(x_1 ; y_1) \qquad (9.5)$$

MÉTODO DE EULER (8)

Entonces, como la diferencia y_2 -y_1 es aproximadamente igual al área comprendida bajo y' desde x_1 hasta x_2 ; o sea, A_2 de la figura 9.1 *(a)*, resulta:

$$y_2 = y_1 + y_1{}'h \qquad (9.4)$$

Procediendo de la misma manera se pueden determinar los sucesivos valores de y_i , obteniéndose la expresión general:

$$y_{n+1} = y_n + y_n{}'h \qquad (9.5)$$

MÉTODO DE EULER

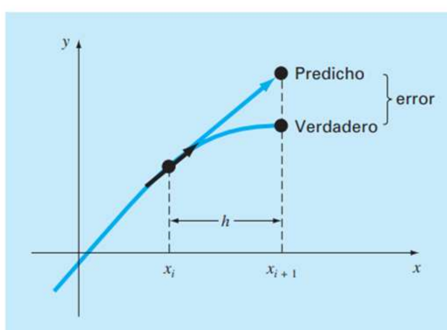


FIGURA 25.2
Método de Euler.

MÉTODO DE EULER

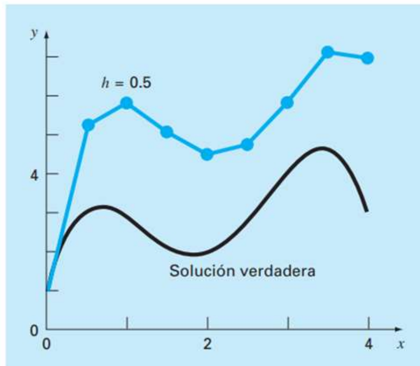
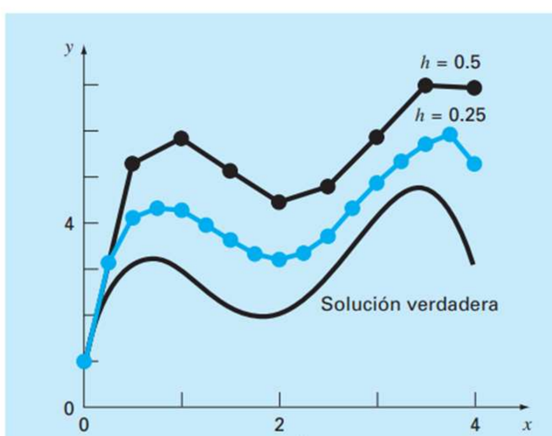


FIGURA 25.3
Comparación de la solución verdadera con una solución numérica usando el método de Euler, para la integral de $y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$ con un tamaño de paso de 0.5. La condición inicial en $x = 0$ es $y = 1$.

MÉTODO DE EULER



MÉTODO DE EULER (9)

La que generalmente, es conocida como **FORMULA DE INTEGRACIÓN HACIA ADELANTE DE EULER**.

El *MÉTODO DE EULER* se clasifica como **MÉTODO QUE EMPIEZA POR SI MISMO**

• Solo requiere de un valor de la variable dependiente para hallar la solución; es decir, el conocimiento de un único punto de la solución (valor inicial) como para dar origen al procedimiento.

MÉTODO DE EULER (10)

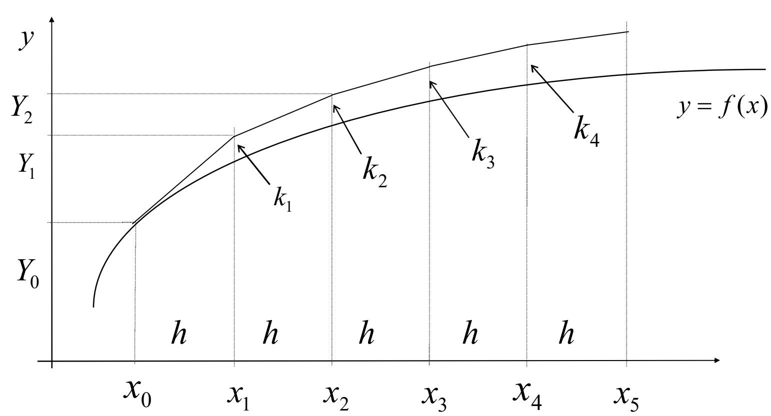


Fig. 9.2

MÉTODO DE EULER (11)

La representación de la solución $y=y(x)$ obtenida por *EULER*, puede apreciarse en la figura 9.2, donde es posible observar que el método de *EULER* se aproxima, en efecto, por medio de segmentos de recta a la solución exacta del problema. Se obtiene una aproximación a la curva representativa de la solución mediante una poligonal.

ERROR EN EL METODO DE EULER

Comparando la ecuación $y_{n+1} = y_n + y'_n \ h$ con la expresión del desarrollo en serie de Taylor se observa:

- Constituida por los dos primeros términos de Taylor.
- Se desprecian los términos que contienen h^2 y potencias superiores sucesivas de h.
- El error que se introduce en cada paso debido al uso de esta ecuación truncada es, conocido como error por truncamiento y su valor es:

(9.6) $\mathbf{E} \leq h^2$

h se debe mantener lo más pequeño posible

METODO MODIFICADO DE EULER

Si *h* es grande-> los efectos de la propagación de los errores, invalidarían cualquier resultado obtenido, luego de un número no muy grande de pasos.

El método de EULER, es poco preciso.

METODO MODIFICADO DE EULER (2)

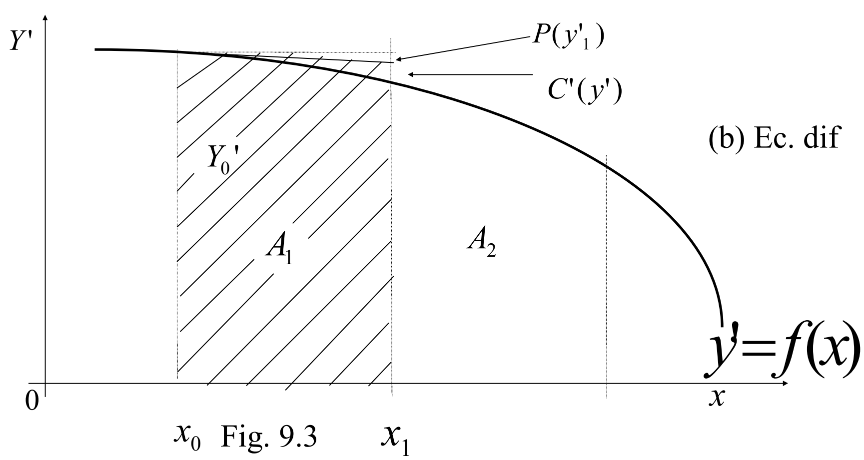
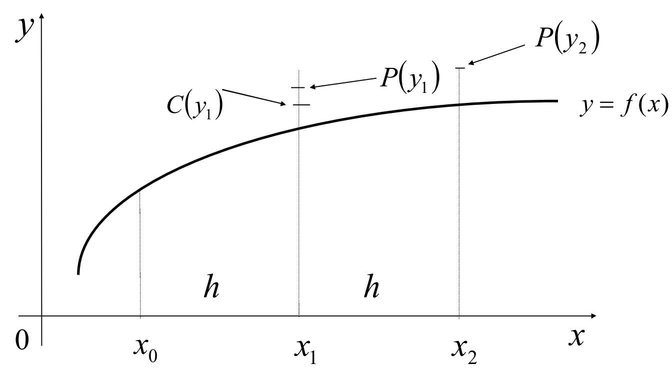


Fig. 9.3

METODO MODIFICADO DE EULER (3)



Sol. (a)

Fig. 9.3

METODO MODIFICADO DE EULER (4)

Si se considera la ecuación diferencial de 1er. Orden y primer grado

$$y' = f(x\,;\,y) \qquad (9.1)$$

en la que se conoce el valor de $y=y_0$ cuando $x=x_0$; suponiendo también que, las representaciones gráficas de *y* e *y'*, son las que se muestran en la figura 9.3*(a)* y 9.3*(b)*.

METODO MODIFICADO DE EULER (5)

•Se sustituye en $y' = f(x\,;\,y)$ el valor inicial conocido de y,
•Se obtiene el correspondiente valor de y' para $x=x_0$; y mediante la fórmula de EULER, se obtiene un valor aproximado para y_1, mediante la siguiente expresión

$$P(y_1) = y_0 + y_0' h \qquad (9.7)$$

llamado **VALOR DE PREDICCIÓN** de y_1. En la expresión (9.7), el término $y_0' h$ es el área rectangular A_1.

Este área es diferente al área real bajo la curva dada, -> el valor de predicción de y_1, difiere del valor real.

METODO MODIFICADO DE EULER (6)

Si el valor de predicción de y_1 se sustituye en $y' = f(x\,;\,y)$, se obtiene un valor aproximado de y_1'.
y_1' se basa en el valor de predicción se utiliza -> la notación $P(y_1')$ para representarlo: $P(y'_1) = (f(x_1; P(y_1))$
Luego utilizando el área trapecial rayada que se muestra en 9.3 (a) como aproximación al área verdadera y', es posible determinar un valor corregido de y_1, :

$$C(y_1) = y_0 + \frac{y_0' + P(y_1')}{2} h \qquad (9.8)$$

denominada **ECUACIÓN DE CORRECCIÓN**.

METODO MODIFICADO DE EULER (7)

Esta característica del método es la que permite que se lo clasifique como **MÉTODO PREDICTOR-CORRECTOR**.

El valor corregido y_1 se sustituye a continuación en (9.1) para obtener un valor corregido de y_1', de la siguiente manera:

$$C(y_1') = f\,[x_1\,;\,C(y_1)]$$

Este procedimiento se continúa hasta que, para dos valores consecutivos de y_1, su diferencia en valor absoluto, sea menor que un cierto **E**, positivo y arbitrario, que satisfaga las condiciones de precisión deseadas.

METODO MODIFICADO DE EULER (7)

La forma general de las ecuaciones (9.7) y (9.8), para su aplicación en cualquier paso, insertas en el proceso de cálculo, son: (9.9)

(a) $P(y_{i+1}) = y_i + y_i' h$

(b) $P(y_{i+1}') = f\left[x_{i+1}; P(y_{i+1})\right]$

(c) $C(y_{i+1}) = y_i + \dfrac{y_i' + P(y_{i+1}')}{2} h$

$C(y_{i+1}') = f\left[x_{i+1}; C(y_{i+1})\right]$ (d)

$C(y_{i+1}) = y_i + \dfrac{y_i' + C(y_{i+1}')}{2} h$ (e)

METODO MODIFICADO DE EULER (8)

Donde, las expresiones (9.9) *(d)* y *(e)* deben ser iteradas hasta tanto dos aproximaciones sucesivas de $C(y_{i+1})$ cumplan con la condición de error, previamente establecida.

El *método modificado de EULER* es un método que *EMPIEZA POR SI MISMO* y se clasifica como de *PREDICTOR-CORRECTOR*, destinado a resolver *PROBLEMAS DE VALORES INICIALES*.

METODO MODIFICADO DE EULER (9)

Es posible demostrar que el error por paso que resulta de la aplicación del método modificado de *EULER*, está en el orden de:

$$\mathbf{E} \leq h^3$$

por lo que resulta de mayor precisión que el método de *EULER* estudiado en el punto anterior.

Ejercicio:

- Resolver la ecuación diferencial de primer orden y primer grado $y' = 6x^2 / y$
- Con la condición inicial $y_0=16$, $x_0 = 4$; $h = 0.1$
- A) Con Euler .- (4,0 – 4,4)
- B) Con Euler Modificado.- (4,0 – 4,4)
- C) Compare y analice los errores entre ambos métodos .