

IDENTIFICACION DE SISTEMA MEDIANTE MINIMOS CUADRADOS

SYSTEM IDENTIFICATION ACROSS LEAST SQUARES METHOD

ALEJANDRO BAÑOL ESCOBAR
1088353182

Universidad Tecnológica de Pereira, Risaralda, Pereira, Colombia
alejandro.@utp.edu.co

Resumen— En este documento se presenta un proceso de estimación de parámetros, donde se busca estimar un modelo para una función de transferencia. Para ello todo el proceso de estimación se realiza de mediante una simulación en MATLAB, para lo cual se emplearon datos sintéticos y como estimador se aplicó el método de mínimos cuadrados.

Palabras clave— Identificación de sistemas, función de transferencia, estimación, parámetros.

INTRODUCCIÓN

Algunos problemas en ingeniería requieren de un modelo matemático que describa el comportamiento de un sistema, para así poder aplicar una acción sobre este. Como por ejemplo los sistemas de control.

Pero muchas veces se tienen sistemas que, a pesar de tener un modelo establecido, la precisión de estos es crítica y puede ser requerida una regulación. Entre las razones principales que se tienen para una estimación de parámetros esta:

- Parámetros desconocidos desde el principio, que se pueden atribuir a que el fabricante o proveedor no suministro toda la información.

- Incluso si los parámetros se conocían con anterioridad. Estos pueden cambiar con el tiempo debido al desgaste de los componentes del sistema.

- Algunas modificaciones a la planta, pueden repercutir de manera que causen efectos desconocidos en los parámetros del sistema. La estimación de parámetros se puede aplicar para darse cuenta de estos cambios, lo cual sería un diagnóstico.

Al realizar este proceso de estimación es posible que el sistema deba ajustarse a algún modelo estandarizado, a partir de la observación de la dinámica de la respuesta del sistema podemos intuir un modelo y se buscan los parámetros que me permitan adaptar ese modelo.

II. MARCO TEORICO

Para el desarrollo de este proyecto, es necesario poner a disposición los recursos teóricos y bibliográficos para la comprensión de este documento. A continuación, se presentan una serie de definiciones que facilitaran la comprensión del trabajo realizado.

PSEUDOINVERSA DE MOORE-PENROSE

En el álgebra lineal la pseudoinversa (A^+) de una matriz (A), es una generalización de la matriz inversa. Que fue descrita independientemente por E. H. Moore² en 1920, Arne Bjerhammar³ en 1951 y Roger Penrose⁴ en 1955 [1].

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \quad (1)$$

Ecuación 1. Pseudoinversa de una matriz.

PLANTA

En teoría de control una planta es una función de transferencia que indica la relación entre la señal de entrada y la señal de salida de un sistema. Es un modelo matemático del sistema [2].

TIEMPO DE ESTABLECIMIENTO (t_s)

El tiempo de establecimiento (t_s), es un parámetro transitorio el cual entrega el tiempo necesario para que la respuesta del sistema este dentro de un rango del valor final.

RESPUESTA DINAMICA

La respuesta dinámica de un sistema permite determinar cómo responde un sistema ante diferentes entradas.

III.METODOLOGIA

El objetivo de este proyecto requiere determinar un modelo matemático de un sistema a partir de sus pares de datos de entrada- salida observados. El objeto de estudio será una turbina eólica para la cual a partir de su modelo matemático proporcionado por el fabricante. Se llevará a cabo una captura de datos, que permita obtener un nuevo modelo al realizar la estimación de sus parámetros.

El modelo matemático que describe la respuesta de la turbina eólica se obtuvo del libro “Modern Control Systems de Richard C. Dorf” [3], donde está representada por una función de transferencia de primer orden, en serie con una función de transferencia de segundo orden. La función de transferencia de orden 3 de la turbina eólica está dada por la ecuación 2.

$$G(s) = \left[\frac{1}{rs + 1} \right] \left[\frac{kw^2}{s^2 + 2\zeta ws + w^2} \right]$$

$$G(s) = \left[\frac{kw^2}{rs^3 + rs(2\zeta ws) + rs(w^2) + s^2 + 2\zeta ws + w^2} \right]$$

$$G(s) = \left[\frac{kw^2}{rs^3 + (2\zeta wr + 1)s^2 + (rw^2 + 2\zeta w)s + w^2} \right] \quad (2)$$

Ecuación 2. Función de transferencia de orden 3, en tiempo continuo, que modela la turbina eólica.

En la ecuación 2 se puede observar que los parámetros de la función de transferencia están en términos de las constantes (k, w, r, ζ). Donde k = -7, r = 5 segundos, ζ = 0.005 y w = 20 rad/s. Evaluando cada una de las constantes en la ecuación 2, se tiene los siguiente.

$$G(s) = \left[\frac{-2800}{5s^3 + 2s^2 + 2000s + 400} \right] \quad (3)$$

Ecuación 3. Parámetros de la función de transferencia de orden 3, en tiempo continuo, que modela la turbina eólica.

Después se procedió a obtener la respuesta al escalón del unitario de la función de transferencia que modela la turbina eólica. Mediante MATLAB ® se obtuvo la respuesta del sistema. En la figura 1 se puede observar la respuesta obtenida.

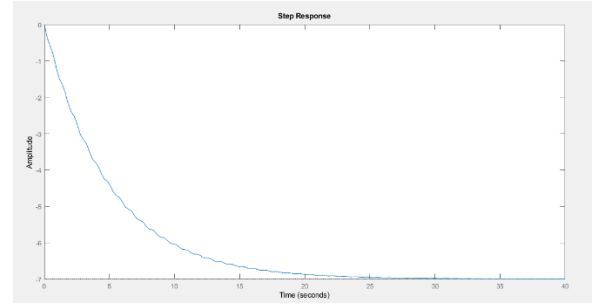


Figura 1. Respuesta al escalón unitario del sistema de la ecuación 3, en tiempo continuo.

Para comprobar la respuesta obtenida, se procedió a implementar un circuito mediante amplificadores operacionales que simulara la turbina eólica, tomando como punto de partida la ecuación 2, la cual se convirtió en forma diferencial.

$$G(s) = \left[\frac{kw^2}{rs^3 + (2\zeta wr + 1)s^2 + (rw^2 + 2\zeta w)s + w^2} \right]$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \left[\frac{\frac{k}{r}w^2}{s^3 + \frac{(2\zeta wr + 1)}{r}s^2 + \frac{(rw^2 + 2\zeta w)}{r}s + \frac{w^2}{r}} \right]$$

$$\left(s^3 + \frac{(2\zeta wr + 1)}{r}s^2 + \frac{(rw^2 + 2\zeta w)}{r}s + \frac{w^2}{r} \right) y(s) = \left(\frac{k}{r}w^2 \right) u(s)$$

$$y'''(t) + d_1y''(t) + d_2y'(t) + d_3y(t) = d_0u(t) \quad (4)$$

Ecuación 4. Forma diferencial de la función de transferencia de la turbina eólica.

El circuito de la figura 2, diseñado con amplificadores operacionales resuelve la ecuación 4, la cual permite simular la respuesta del sistema que se está analizando.

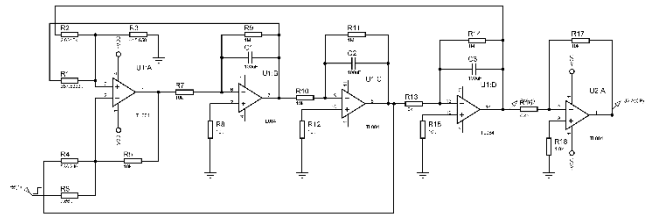


Figura 2. Circuito que simula la respuesta de la turbina eólica.

Al ingresar una entrada al escalón unitario al sistema de la figura 2, se obtuvo la respuesta que se observa en la figura 3.

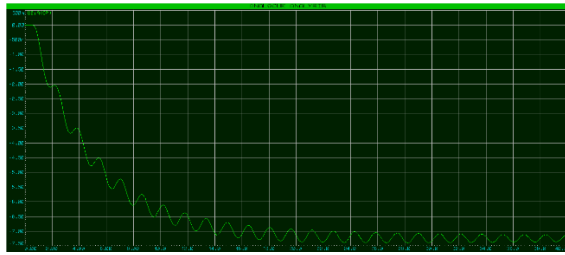


Figura 3. Respuesta al escalón unitario para el circuito de la figura 2.

Por último, se procedió con la construcción del circuito de la figura 2 el cual se sometió a un escalón unitario, la respuesta obtenida se puede observar en las figuras 4.

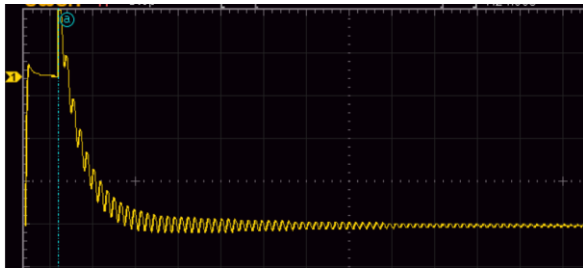


Figura 4. Respuesta al escalón unitario del circuito construido.

El proceso previamente descrito se realizó con el objetivo de poder usar el circuito construido, que simula la función de transferencia de la turbina eólica, para poder realizar el proceso de captura de datos y con estos poder realizar la estimación de parámetros para el nuevo modelo.

Lamentablemente dada la contingencia causada por la emergencia del COVID-19, la captura de datos se tuvo que realizar mediante una simulación en MATLAB, al someter la función de transferencia original, ver ecuación 3, a múltiples entradas. En este caso el tamaño de la muestra fue de 1000 datos. Después se procede a registrar los datos de salida mediante un arreglo (ys) los cuales se les ha sumado un ruido gaussiano. Para evitar las condiciones ideales de la simulación y hacerlo un poco más parecido a la realidad.

Este tipo de ruido sigue una función de distribución de Gauss de tal manera que la distribución entre los datos es uniforme, donde la mayor concentración de los datos se da respecto a la media. Adicionalmente de contaminar cada dato con ruido Gaussiano, se multiplica cada uno por una constante, denominada “constante de error”, que vuelve más grande el ruido por si la señal de salida (ys) es muy grande y el ruido no lo alcanza a afectar. Para todos los experimentos la constante de error es de 1.01.

Para los datos de entrada se creó un arreglo(xs) el cual almacena 1000 datos aleatorios obtenidos mediante función rand (), que entrega números que varían entre (0-1), cada dato es

multiplicado por 3 para así variar el rango de los datos de entrada entre (0-3). Después el conjunto de datos se almacenó en un archivo (.mat).

Se ingresó cada dato del arreglo de entrada (xs) a la función de transferencia de la ecuación 3 con un tiempo definido por una frecuencia de muestreo de 0.1 segundos; este valor se escogió dado que al observar la dinámica de los datos se pudo determinar que el intervalo de tiempo entre cada dato era adecuado. Se procedió a graficar la dinámica de los datos de salida, ver figura 5.

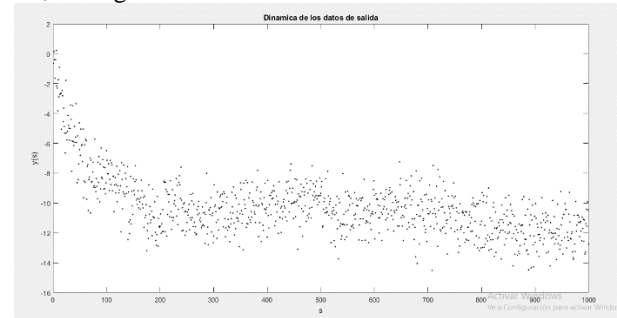


Figura 5. Dinámica de los datos de salida de la función de transferencia de la ecuación 3.

Después de registrar cada uno de los datos del vector de salida (ys), se procede a aplicar un modelo que se ajuste al conjunto de datos, ver ecuación (4). Este modelo tiene 6 parámetros en total que son b_1 , b_2 , b_3 , a_1 , a_2 , a_3 .

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3} \quad (4)$$

Ecuación 4. Modelo de una función de transferencia de orden 3 continua.

En este caso como la función de transferencia que modela la turbina eólica, ver ecuación 3 está en tiempo continuo se procede a aplicar la transformada z que me permite pasar a tiempo discreto, de esta manera se aplica mínimos cuadrados sobre las muestras. Para poder realizar el ajuste de los datos se plantea una ecuación en diferencias. Partiendo de la ecuación 4, se tiene lo siguiente.

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$\frac{y(z)}{x(z)} = \frac{b_1 z^2 + b_2 z + b_3}{z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3}$$

$$b_1 z^2 x_{(z)} + b_2 z x_{(z)} + b_3 x_{(z)} = z^3 y_{(z)} + a_1 z^2 y_{(z)} + a_2 z y_{(z)} + a_3 y_{(z)}$$

$$b_1 x_{(k+2)} + b_2 x_{(k+1)} + b_3 x_{(k)} = y_{(k+3)} + a_1 y_{(k+2)} + a_2 y_{(k+1)} + a_3 y_{(k)}$$

Se resta -3 a cada muestra, para no tener una incongruencia en el código, con el recorrido de cada muestra de la matriz de parámetros.

$$b_1x_{(k-1)} + b_2x_{(k-2)} + b_3x_{(k-3)} = y_{(k)} + a_1y_{(k-1)} + a_2y_{(k-2)} + a_3y_{(k-3)}$$

$$y_{(k)} = b_1x_{(k-1)} + b_2x_{(k-2)} + b_3x_{(k-3)} - a_1y_{(k-1)} - a_2y_{(k-2)} - a_3y_{(k-3)}$$

Con lo anterior se plantea un sistema matricial de la forma.

$$B = AX$$

Donde (B) es el vector solución conformado por cada valor del vector (ys), (A) es la matriz de parámetros y (X) el vector de parámetros.

$$\begin{bmatrix} y(k=1) \\ \vdots \\ y(k=1000) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{(k-1)} & x_{(k-2)} & x_{(k-3)} & -y_{(k-1)} & -y_{(k-2)} & -y_{(k-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{(k=1000)} & x_{(k=1000)} & x_{(k=1000)} & x_{(k=1000)} & x_{(k=1000)} & x_{(k=1000)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Ecuación 5. Sistema matricial.

Despejando la matriz de parámetros (X).

$$X = A^{-1}B$$

Como se tiene un sistema que tiene más ecuaciones que incógnitas, tenemos un sistema indeterminado. Para estimar la matriz inversa (A^{-1}) se aplica la pseudo inversa de Moore-Penrose.

$$A^{-1} = A^+$$

$$X = A^+B$$

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \quad (6)$$

Ecuación 6. Pseudo inversa de Moore-Penrose.

Con la ecuación (6) se obtiene un conjunto de ecuaciones lineales que se estiman mediante mínimos cuadrados. Finalmente, los parámetros del nuevo modelo en tiempo discreto se presentan en la tabla 1.

Parámetro	Valor
b_1	-0.191
b_2	-0.2734
b_3	-0.09166
a_1	-0.2442
a_2	-0.1744
a_3	-0.4977

Tabla 1. Parámetros estimados para el modelo en tiempo discreto.

Reemplazando los parámetros de la tabla 1 en la ecuación (4), se obtiene el nuevo modelo en tiempo discreto, ver ecuación 7.

$$H(z) = \frac{-0.191z^2 - 0.2734z - 0.09166}{z^3 - 0.2442z^2 - 0.1744z - 0.4977} \quad (7)$$

Ecuación 7. Función de transferencia del nuevo modelo, en tiempo discreto.

Dado que el proceso de estimación se realizó en tiempo discreto, se realizó la conversión del modelo obtenido a tiempo continuo dado que el modelo inicial del cual se obtuvieron los datos para la estimación, ver ecuación (3), también está en tiempo continuo. En el código la función de transferencia en tiempo discreto recibe el nombre de (Hze) y con la función d2c(), se transforma a tiempo continuo, recibiendo el nombre de (Ade).

Los parámetros en tiempo continuo se presentan en la tabla 2.

Parámetro	Valor
b_1	-0.9563
b_2	-12.21
b_3	-1139
a_1	6.978
a_2	451.8
a_3	171.6

Tabla 2. Parámetros estimados para el modelo en tiempo continuo.

Reemplazando los parámetros en el modelo para tiempo continuo se tiene la ecuación 8.

$$H(s) = \frac{b_1s^2 + b_2s + b_3}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}$$

$$H(s) = \frac{-0.9563s^2 - 12.21s - 1139}{s^3 + 6.978s^2 + 451.8s + 171.6} \quad (8)$$

Ecuación 8. Función de transferencia del nuevo modelo, en tiempo continuo.

Si se realiza una comparación entre el modelo estimado, ver ecuación (8) y el sistema inicial, ver ecuación 3.

$$G(s) = \left[\frac{-2800}{5s^3 + 2s^2 + 2000s + 400} \right] \quad (3)$$

Se puede afirmar inicialmente que ambas funciones en su estructura respecto al numerador son diferentes, por ende, su forma matemática no es la misma. Pero lo anterior no

demuestra que el modelo estimado no tenga la misma respuesta dinámica del sistema inicial. A continuación, se propone una métrica de error para validar el modelo aplicado.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

Ecuación 10. Media aritmética.

III. VALIDACION DEL MODELO

Se procedió a realizar una serie de experimentos, que se enuncian a continuación.

1. Se repitió 28 veces la estimación del nuevo modelo para encontrar un valor medio respecto a cada uno de los parámetros, dado que por los efectos del ruido aplicado con una constante de ruido de 1.01, para cada repetición del experimento se producía un cambio en el valor de cada parámetro.
2. Se maneja el total de los datos (n=1000) pero se modifica el valor de la constante de ruido, con el objetivo de determinar como la variación de ruido afecta el nuevo modelo.
3. Del arreglo de entrada con un tamaño de 1000 datos, se extrajeron varias muestras de tamaño n y se lleva a cabo la estimación de parámetros. El objetivo es evaluar el comportamiento del modelo cuando faltan datos o la cantidad de datos es limitada.

Para estos experimentos la métrica de error aplicada fue el error RMS, ver ecuación 9. Esta mide el error que hay entre un conjunto de datos, comparando los datos del arreglo de salida del modelo estimado y los datos proporcionados por el modelo inicial.

$$\text{Error}_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}{n}} \quad (9)$$

Ecuación 9. Error RMS.

Dado que el Error RMS no es normalizado, para poder dar soporte a los resultados proporcionados, se obtuvo el tiempo de establecimiento de la respuesta al escalón unitario para errores significativos.

1. En la tabla 3 se presenta el valor de cada parámetro en tiempo continuo, donde la ultima fila corresponde al valor promedio de cada parámetro. En este experimento se maneja el total de los datos (n=1000).

Para calcular el promedio aritmético se aplicó la ecuación 10.

b ₁	b ₂	b ₃	a ₁	a ₂	a ₃	Error RMS
0.3648	- 2.485	- 958.7	6.378	449.1	143.9	0.4413
-0.6569	1.815	- 1184	7.104	462.2	178.7	0.4324
0.8972	- 12.49	- 726	6.256	446	109.7	0.6697
-0.151	- 6.164	- 1178	6.625	444	176.8	0.4781
0.9257	- 14.69	- 1037	7.359	459.4	156.3	0.2549
-0.9343	- 12.34	- 1062	6.757	454.7	158.5	0.4517
0.9851	14.01	- 841.3	6.654	459	126.9	0.7780
-0.5278	- 17.53	- 1174	7.526	460.5	175.3	0.4747
1.138	- 33.27	- 862.9	7.411	448.9	131.1	0.5896
0.1314	- 13.72	- 911	7.489	467.8	137	0.3903
0.1583	- 5.761	- 982.3	7.763	461.9	149.3	0.4799
-0.4114	7.019	- 961.4	6.381	453	144.3	0.4784
-0.3831	- 10.81	- 1002	7.546	463.7	151.6	0.5001
1.081	- 10.03	- 954.5	6.791	448.2	143.3	0.4883
-0.1017	- 3.935	- 1003	6.69	468	151.1	0.4906
-0.5115	- 3.767	- 853.2	6.379	441	128.5	0.3795
-0.2442	- 19.26	- 874	6.314	442.2	131.9	0.4085
-0.1518	- 10.56	- 1204	6.62	449.6	180.6	0.7350
-1.16	14.86	- 950	6.852	447.1	142.1	0.4797
0.807	- 15.24	- 825.6	7.259	461.2	125	0.3108
0.1577	- 16.72	- 797.2	7.607	445.3	122.5	0.3389
0.3227	- 8.373	- 1186	7.196	452.7	177.4	0.7154
0.1064	- 9.221	- 899.2	5.555	445.1	134.5	0.4321
1.297	0.3454	- 923.5	7.224	449.2	140.5	0.4433
-0.2586	- 2.751	- 1195	7.142	458.7	180.2	0.6964
0.8307	- 7.306	- 938.4	6.602	459.3	142	0.4390
0.3906	4.99	- 777.7	7.462	444.2	118.3	0.2948
0.3201	- 29.49	- 1162	7.46	458.9	174.6	0.6798
0.1579	-7.9597	-979.425	6.9429	453.6035	147.5678	0.4911

Tabla 3. Valor promedio para cada parámetro del nuevo modelo en tiempo continuo.

Se procede a calcular la desviación estándar mediante la ecuación 10, para cada uno de los parámetros.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad (10)$$

Ecuación 10. Desviación estándar.

b ₁	b ₂	b ₃	a ₁	a ₂	a ₃
0.6577	10.9741	141.8034	0.5317	8.0005	20.8773

Tabla 4. Desviación estándar para cada uno de los parámetros estimados.

Como se puede observar en la tabla 4, la desviación estándar es alta para los parámetros b_1, b_2, b_3, a_2, a_3 . Donde se puede observar que el caso de los parámetros b_1, b_2 es más grande la desviación que la media, y esto se puede corroborar al observar que, para varias repeticiones del experimento, mucho de los valores obtenidos para estos parámetros difieren mucho entre ellos. El único parámetro confiable es el parámetro a_1 , donde

su desviación estándar es del 0.5317 y su valor medio es de 6.9429, esta desviación es relativamente baja. El parámetro a_2 También es confiable ya que la desviación estándar es de 8.0005.

Con este análisis podemos concluir que el ruido si afecta mucho los parámetros y pese a que se trato de buscar un valor medio para cada parámetro y así obtener un modelo estándar, este no sería el mejor modelo ya que la desviación estándar de algunos parámetros es muy alta. A continuación, se demuestra que el modelo a partir del valor promedio de los parámetros, ver ecuación 11, no es el mejor.

$$H(s) = \frac{0.1579s^2 - 7.9597s - 979.425}{6.9429s^3 + 453.6035s + 147.5678s + 0.4911} \quad (11)$$

Ecuación 11. Función de transferencia del nuevo modelo, en tiempo continuo a partir del valor promedio de cada parámetro.

Se obtuvo la respuesta al impulso de la función de transferencia de la ecuación anterior, ver figura 6.

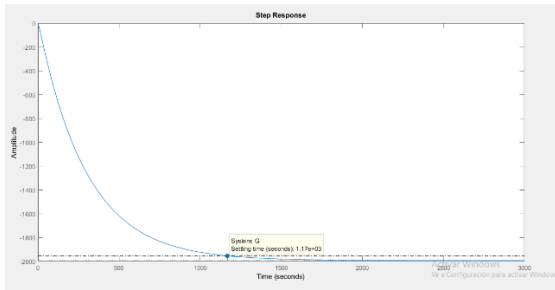


Figura 6. Respuesta al escalón unitario de la función de transferencia de la ecuación 11.

En la figura 6, se puede observar que el modelo con los parámetros promedio, presenta la misma respuesta dinámica del sistema original, ver figura 7.

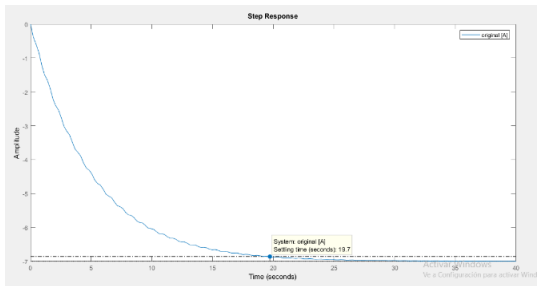


Figura 7. Respuesta al escalón unitario de la función de transferencia de la ecuación 3.

Pero ambos modelos difieren en que su tiempo de establecimiento (ts) es diferente dado que el tiempo de establecimiento para la gráfica de la figura 6 es de $1.17e03$ y el de la respuesta del sistema original es 19.7 segundos.

Con lo anterior podríamos poner en duda la confiabilidad de nuestro proceso de estimación dada la alta desviación, que no necesariamente debe estar asociada al modelo aplicado, también puede ser producto del ruido que afecta a nuestro sistema. Porque si observamos la tabla 3, el error RMS para cada experimento aparentemente era bajo ya que en todos los casos estaba entre (0) y (1).

2. Ahora se procede con el 2 experimento, donde vamos a variar el ruido ya que en el experimento anterior surgieron dudas de como el ruido influye sobre los resultados obtenidos. Recordemos que previamente se había definido una constante de ruido que multiplica a la señal de salida (ys), que es equivalente a una ganancia. Esta se implementó con el objetivo de que, si el ruido Gaussiano no alcanzaba a afectar significativamente la señal, esta constante amplificaba el ruido. En la tabla 5 se presenta la variación de la constante y el erro RMS.

Constante de ruido	Error RMS
Sin ruido	4.4148e-12
0.1	0.0536
0.3	0.0346
0.5	0.1850
0.7	0.2133
0.8	0.3226
0.8	0.3063
0.9	0.6069
1.01	0.4861
1.05	0.4656
1.07	0.5878
1.1	0.6934
1.12	0.5405
1.15	0.6321
1.2	0.8433
1.25	0.5780
1.27	0.5228
1.3	0.8768
1.34	0.8915
1.37	0.7653
1.4	0.7466
1.48	0.8261
1.5	0.9976
1.8	1.1184
2	1.1128
2.5	1.3010
3	1.3349
3.5	1.3479
4	1.5651
4.5	1.5855
5	1.5970
5.5	1.5556
6	1.5831
6.5	1.5961
7	1.6116

7.5	1.6571
8	1.6063
8.5	1.7501
9	1.7694
9.5	1.6151
10	1.7357
20	1.9382
30	2.6094
40	2.2416

Tabla 5. Valor promedio para cada parámetro del nuevo modelo en tiempo continuo.

Al realizar este experimento lo primero que se pudo observar es que cuando hay ausencia de ruido sobre arreglo de salida (ys), la respuesta obtenida con el nuevo modelo es igual al modelo original. En la tabla 5 se puede observar que el error es igual a 4.4148×10^{-12} es decir el error es 0. No conforme con esto se procedió a obtener la respuesta al impulso del nuevo modelo sin error, ver figura 8.

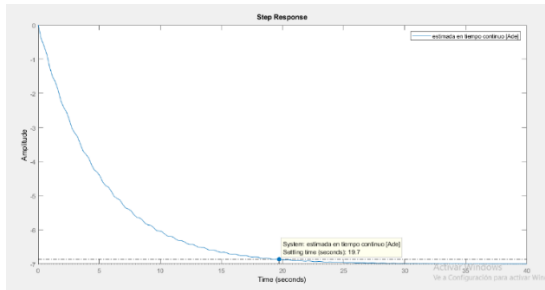


Figura 8. Respuesta al escalón unitario del nuevo modelo sin ruido.

En la figura 8, se puede observar que el tiempo de establecimiento (t_s) es el mismo de la respuesta del modelo original, ver figura 7. Conforme fue modificando el valor de la constante de error, el error RMS fue ascendiendo y por ende también se pudo observar el modelo estimado para cada error presentaba en su respuesta la misma dinámica del sistema original, el tiempo de establecimiento (t_s) empezó a cambiar.

A continuación, se muestran algunos de los resultados más significativos, ver tabla 6.

Constante de ruido	Valor en estado estable (seg.)
0.1	19.8
0.8	14.3
0.9	11
1.01	12.3
1.8	5.45
4	1.74
5	1.42
7	0.969

10	0.653
20	0.353
40	0.291

Tabla 6. Tiempo de establecimiento para diferentes valores de la constante de ruido.

Como se puede observar en la tabla 6 conforme aumenta la constante de ruido, este se amplifica acusando que el error RMS aumente tal como se observa en la tabla 5. La dinámica de la respuesta del nuevo modelo también se pudo ver afectada, se presentan 3 casos puntuales.

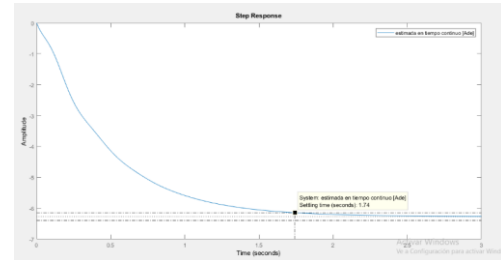


Figura 9. Respuesta al escalón unitario del nuevo modelo con una constante de ruido de 4.

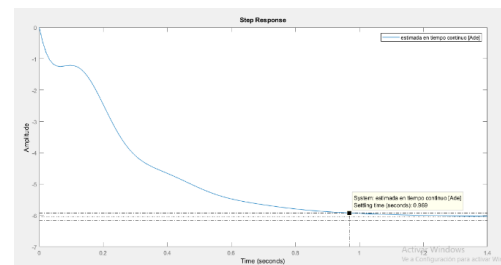


Figura 10. Respuesta al escalón unitario del nuevo modelo con una constante de ruido de 7.

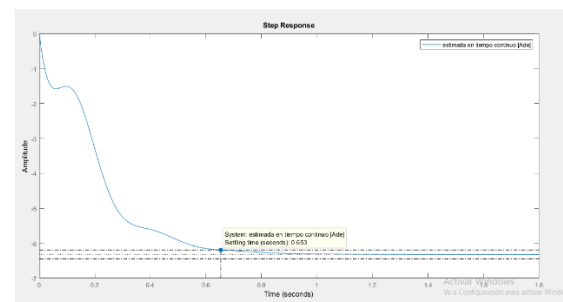


Figura 11. Respuesta al escalón unitario del nuevo modelo con una constante de ruido de 10.

En las figuras 9, 10 y 11, se puede observar que se presentan unas deformaciones cuando la señal inicia su descenso para alcanzar el estado estable. En la figura 9 este cambio es leve, pero para dos figuras restantes si es más visible. Para una constante de ruido de 40 el cambio es la dinámica de la respuesta alto. Ver figura 12.

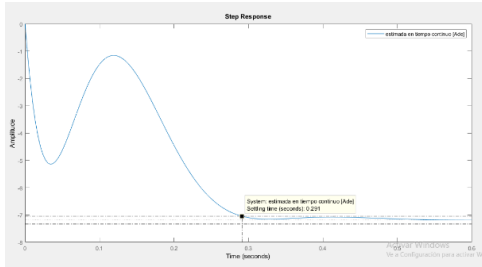


Figura 12. Respuesta al escalón unitario del nuevo modelo con una constante de ruido de 40.

- En el último experimento se busca determinar si para obtener un nuevo modelo que se aproxime al sistema original, es importante el número de muestras con el cual se va a realizar la estimación de parámetros. Se presenta los resultados obtenidos para 25 muestras de diferentes tamaños, que se extrajeron del arreglo de entrada (xs) de forma aleatoria. Ver tabla 3.

Cantidad de datos (n)	Error RMS
10	5.3416
20	3.6272
35	2.5844
50	2.3369
80	1.5209
110	1.0279
140	0.9992
170	0.6782
210	0.6464
240	0.3965
270	0.4236
310	0.5287
340	0.5487
380	0.3651
420	0.5370
470	0.5066
500	0.3685
560	0.4038
620	0.5211
750	0.5020
830	0.3404
910	0.3806
940	0.2689
980	0.2806
1000	0.2369

Tabla 7. Error RMS para el nuevo modelo a partir diferentes tamaños de muestras.

En la tabla 7 se puede evidenciar que el numero de datos de los cuales se dispone para poder realizar la estimación de parámetros, para el nuevo modelo, si es importante, ya que conforme aumente el número de muestras el error, disminuye. De hecho, se puede concluir que para este proyecto se hubiera podido haber tomado una mayor cantidad de muestras para poder disminuir el error.

A continuación, se presenta algunos casos de como la respuesta dinámica del nuevo modelo, se ve afectada por la cantidad de muestras, ver figuras 13 y 14.

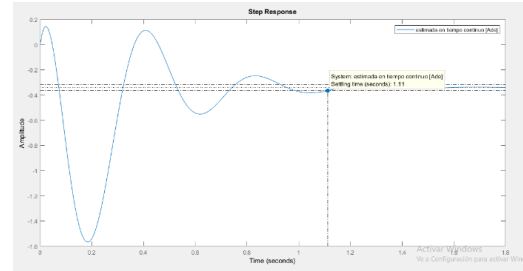


Figura 13. Respuesta al escalón unitario del nuevo modelo, para un total de 10 muestras.

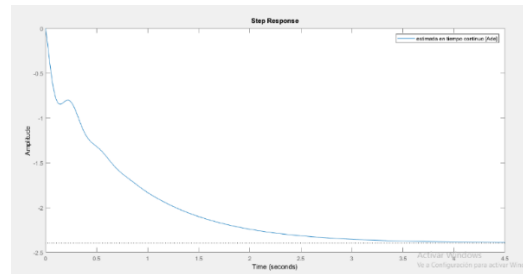


Figura 14. Respuesta al escalón unitario del nuevo modelo, para un total de 20 muestras.

IV. CONCLUSIONES

- Se puede concluir que en proceso de estimación de parámetros el ruido el cual altera los datos tiene graves repercusiones a la hora de realizar el proceso de estimación de un nuevo modelo. Por eso se recomienda si existe la posibilidad, aplicar un filtro que permitan eliminar datos espurios para así disminuir el ruido.
- El hecho de que tengamos una gran cantidad de datos no garantiza que podamos realizar la estimación de un nuevo modelo que se logre ajustar a la dinámica de los deseada.

3. Es de vital importancia fijar una métrica de error que nos ayude a validar nuestro modelo, como en este caso donde el error RMS jugó un papel muy importante dentro del estudio realizado. Sin una métrica de error nuestro análisis y conclusiones carecerían de credibilidad.
4. Aparte de establecer una métrica de error, se recomienda buscar otro tipo de métricas que sirvan para poder validar el nuevo modelo, que nos permitan ampliar el rango de identificación de fallas durante el proceso de análisis. Como en este caso, el haber incluido el tiempo de establecimiento (t_s), fue de mucha ayuda para validar los resultados obtenidos.

V. BIBLIOGRAFIA

[1]. Wikipedia “Pseudoinversa de Moore-Penrose” [online], URL: https://es.wikipedia.org/wiki/Pseudoinversa_de_Moore-Penrose

[2]. Wikipedia “Control theory” [online], URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Control_theory

[3]. DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. *Modern control systems*. Pearson, 2011. Páginas 674, 675. Google scholar [online]. URL:

[4]. “What is system identification” [online], URL: https://indico.cern.ch/event/11749/contributions/1328397/attachments/57048/82143/control_theory_3.pdf

[5]. ControlTheoryPro “Introduction to System Identification” [online], URL: http://wikis.controltheorypro.com/Introduction_to_System_Identification