

Profesor: Luis Felipe Giraldo

Autores:

Isabella Torres
Andrés Mugnier
Alejandro Arias



Análisis Inteligente de Señales y Sistemas: Tarea 6 Solución

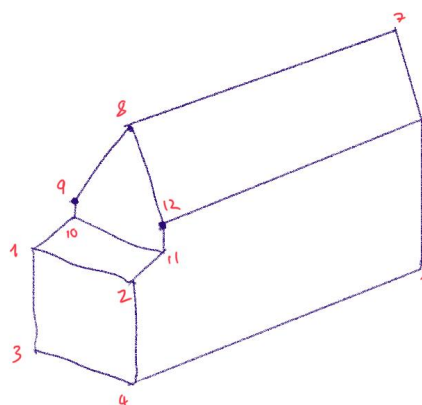
Punto 1

- **Enunciado:** Use el algoritmo de Structure from Motion visto en clase para recuperar la estructura rígida 3D que está en las imágenes `houseimage1.jpg`, ..., `houseimage4.jpg`. Utilice los archivos `main.m` y `getPoints.m` para realizar la reconstrucción. Vea la imagen `reconstruccionEjemplo.png` como ejemplo de una reconstrucción exitosa. Bono opcional (10 puntos): Utilizando matrices de proyección para mapear los puntos 3D en la imagen 2D, mapee la textura en 2D al objeto reconstruido en 3D.

Inicialmente, teniendo en cuenta cuatro imágenes desde distintas perspectivas, se seleccionaron 12 puntos en el orden es el establecido en la figura 1b.



(a) Original



(b) Orden Puntos

Figure 1: Diagramas Casas

Una vez seleccionados los puntos, y teniendo en cuenta la relación dada por la proyección de perspectiva débil de la ecuación 1:

$$r_{ij} = A_i x_i + t_i \quad (1)$$

A partir de la cual se obtiene un modelo simplificado (asumiendo $t_i = 0$) que relaciona todos los puntos en cada imagen con los puntos en el plano 3D:

$$R = AX \quad (2)$$

Donde:

- R : todos los puntos en el plano 2D
- A : matriz de transformación
- X : todos los puntos en el plano 3D

Para poder encontrar una solución adecuada, se plantea un problema de optimización de la ecuación 3 (idealmente $R - AX = 0$):

$$\min \quad \|R - AX\|_F^2 \quad (3a)$$

$$s.a. \quad \text{rank}(AX) = 3. \quad (3b)$$

El cual se soluciona utilizando una factorización mediante la descomposición de valores singulares de la matriz R . Obteniendo:

$$R = TWQ^T \quad (4)$$

Sujeto a la restricción inicial, se tiene:

$$A^*X^* = T_3W_3Q_3^T \quad (5)$$

Donde:

- T_3 : Matriz con las 3 primeras columnas de T
- Q_3 : Matriz con las 3 primeras columnas de Q
- W_3 : Matriz diagonal con los 3 primeros valores de W (ordenados de mayor a menor)

Mediante un despeje de las matrices, es posible obtener una expresión para A^* y X^* así:

$$A^* = T_3\sqrt{W_3} \quad (6)$$

$$X^* = (\sqrt{W_3})Q_3^T \quad (7)$$

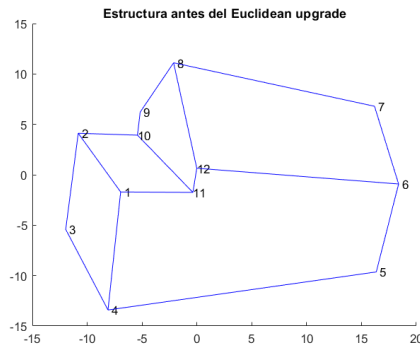
Posteriormente, se realizó la actualización euclideana, mediante la búsqueda de la matriz denominada C con el fin de que, dado:

$$A^*C = \begin{bmatrix} A_1^* \\ \dots \\ A_N^* \end{bmatrix} C \quad (8)$$

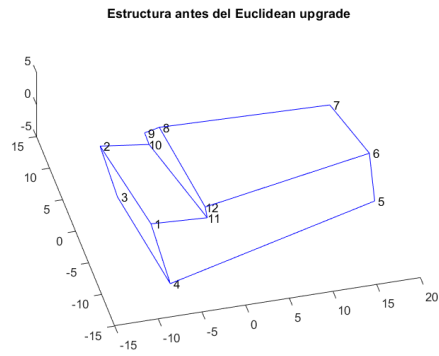
Se cumpla:

$$\begin{aligned} (a_{i1}^*C)^T(Ca_{i2}^*) &= 0 \\ (a_{i1}^*C)^T(Ca_{i1}^*) &= 1 \\ (a_{i2}^*C)^T(Ca_{i2}^*) &= 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Con esta transformación, se busca conservar también los ángulos y las distancias, por lo que corrige la distorsión generada por la proyección. Este mapeo se conforma de rotaciones, traslaciones y reflexiones.

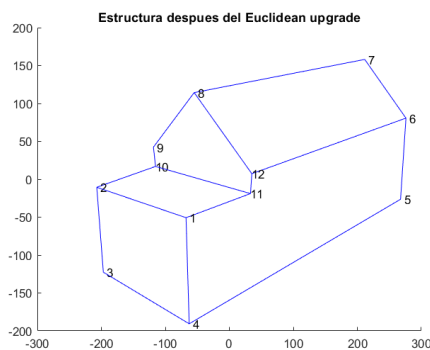


(a) Perspectiva 1

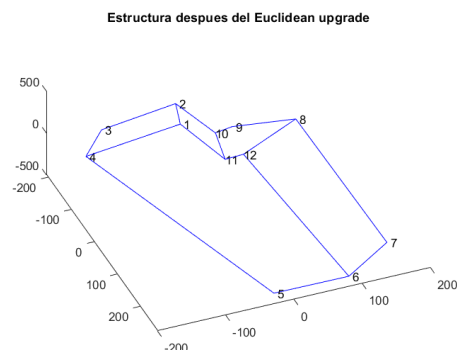


(b) Perspectiva 2

Figure 2: Estructura antes del euclidean upgrade



(a) Perspectiva 1



(b) Perspectiva 2

Figure 3: Estructura después del euclidean upgrade

En las figuras 2 3 se puede observar claramente la comparación de ambas transformaciones, en la que se presenta la proyección antes y después de la transformación, respectivamente. Después de la transformación mejora la visualización de la perspectiva, en la que las rectas que conforman la imagen se ven mas paralelas, corrigiendo también defectos de la cámara.

Punto 2

- **Enunciado:** Las carpetas *images* y *landmarks* contienen imágenes de y landmarks de caras con expresiones faciales de la base de datos FACES <http://faces.mpg.de/>
 - a) Muestre varias imágenes de caras con sus correspondientes landmarks. Esto lo puede hacer utilizando la función *imshow* de Matlab o su equivalente en Python:

Se muestran tres caras con sus respectivos landmarks:

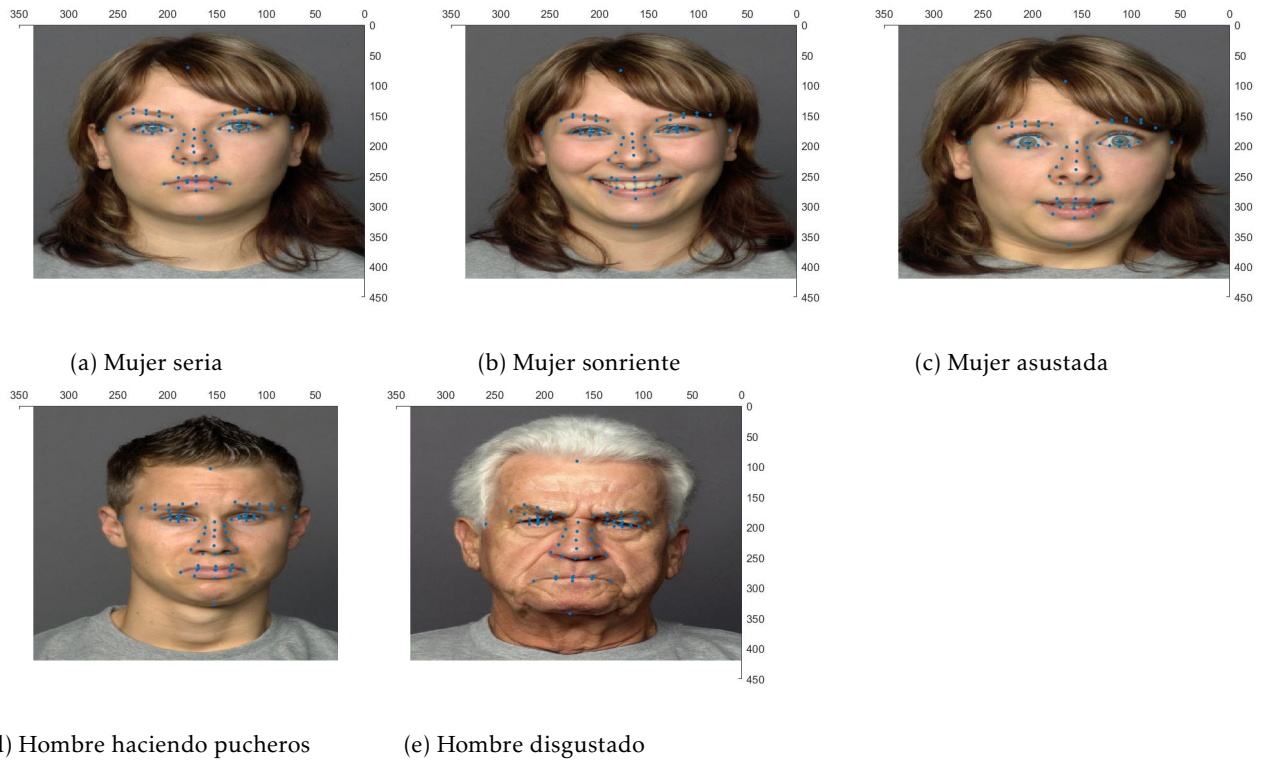


Figure 4: Imágenes de caras con sus landmarks

Como se puede ver en las tres figuras anteriores, las imágenes corresponden a rostros humanos que muestran distintas expresiones faciales. Hay hombres y mujeres de diferentes edades.

Los landmarks corresponden principalmente al contorno de la nariz y una línea que traza el centro de la nariz. También se ven 4 landmarks que delimitan el tamaño de la cara en la parte donde termina la frente, en la parte izquierda y derecha donde termina la cara y en la punta del mentón.

Hay otro grupo de landmarks que trazan los límites de los labios y el centro de la boca, otros para los límites de los ojos y otros para la forma que trazan las cejas del rostro.

- b) Cargue todos los landmarks de la base de datos y gráfíquelos (todos al mismo tiempo) en una imagen 2D. Asegurese que la gráfica no conecte los puntos con líneas.

En la siguiente figura se muestran todos los landmarks superpuestos en una imagen 2D:

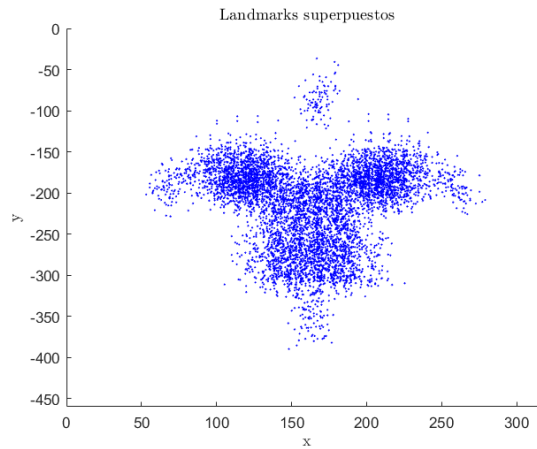


Figure 5: Todos los landmarks superpuestos

Para comprender mejor este resultado, graficamos los mismo landmarks pero con un rostro de fondo:

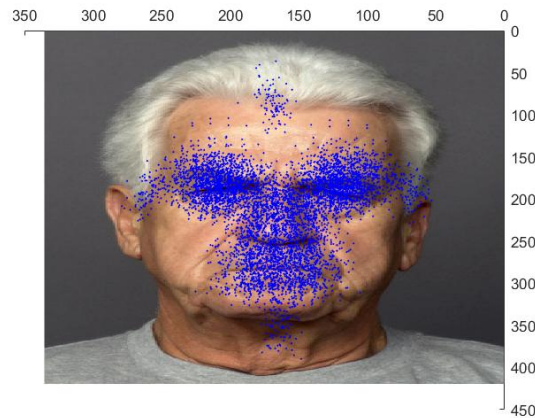


Figure 6: Todos los landmarks superpuestos con rostro

Como se puede ver en las imágenes anteriores, al superponer todos los landmarks se pueden observar las variaciones entre las formas que representa cada landmark.

- c) Realice un ajuste de Procrustes para todo el conjunto de formas definido por los landmarks, y grafique todas las formas resultantes. Compare con el resultado del enunciado b). Resalte la media de Procrustes, y conecte sus landmarks para mostrar el contorno de la cara asociada.

Como se puede ver en las imágenes anteriores, ningún procruste está ni con media cero ni normalizado. Por lo tanto debemos realizar los siguientes pasos para lograr el ajuste de este conjunto de formas:

- * Remover la media de cada forma
- * Poner de norma 1 cada forma
- * Calcular μ la media de todas las formas como el vector propio asociado al mayor valor propio de la matriz $S = \sum_{i=1}^N W_i W_i^*$ donde cada W_i es una de las formas del conjunto.

* Proyectar cada forma W_i a la media μ como $W_i^p = W_i \frac{W_i^* \mu}{W_i^* W_i}$

Primero le damos una media de 0 a todas las formas, es decir se centran en el origen. Los resultados de este procedimiento para todas las formas se muestra en la siguiente figura:

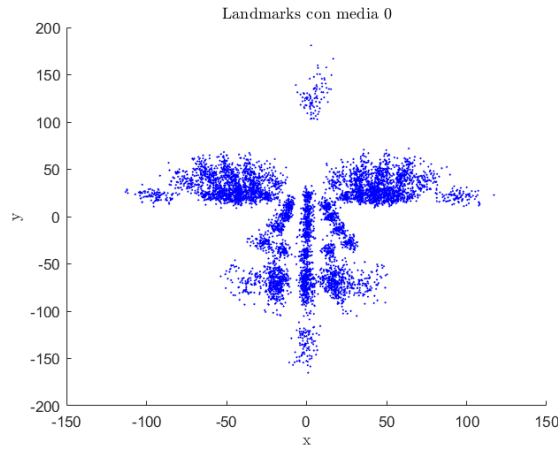


Figure 7: Todos los landmarks superpuestos con media 0

Como se puede ver en la figura anterior ya todas las formas están centradas en el origen, ahora se procede a normalizar todas las formas:

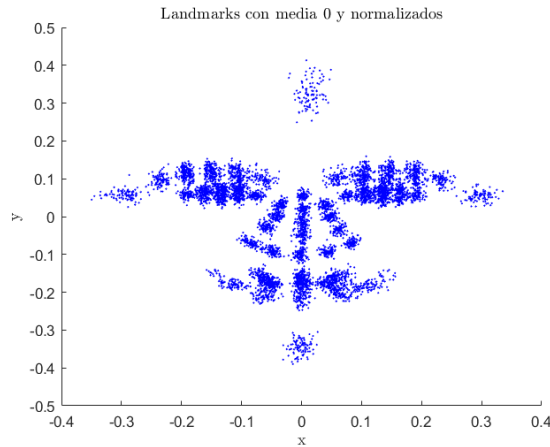


Figure 8: Todos los landmarks superpuestos con media 0 y normalizados

Como se puede ver en la figura anterior ahora estamos trabajando en un rango $[-0.25, 0.25] \times [-0.4, 0.3]$ cuando antes todas las formas estaban en el rango $[-150, 150] \times [-200, 200]$. Es decir, ahora todas las formas tienen norma 1 y media cero.

Como ya todas las formas están en una forma más estándar, se procede a calcular la matriz S que termina siendo una matriz de 67×67 con entradas complejas y a esta se le calculan los vectores y valores propios. El vector propio asociado al valor propio más grande es precisamente la forma de la media μ . En la siguiente figura se muestra esta media en rojo con los bordes del rostro que respresenta:

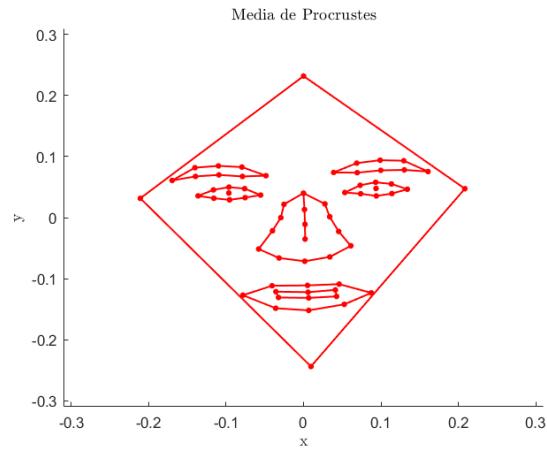


Figure 9: Mmedia de las formas

Ahora que se tiene la media de las formas, se procede a proyectar cada forma sobre la media. Se obtiene el siguiente resultado:

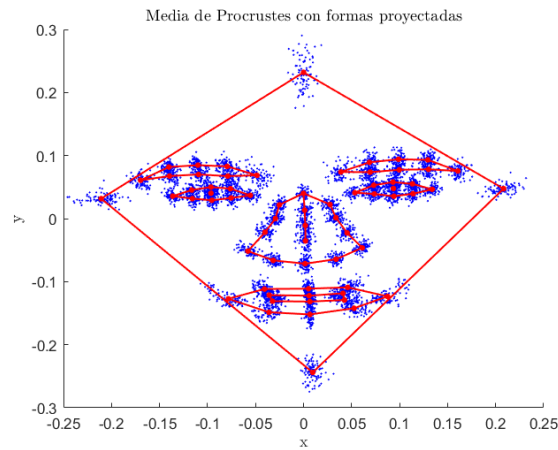


Figure 10: Procrustes ajustados con su media

Como se puede ver en la figura anterior, al realizar el ajuste de procrustes se logra llevar a todas las formas a una representación en la cuál son comparables entre ellas. en la figura 5, antes teníamos una nube de formas en la cual era más complicado realizar cualquier tipo de análisis pues todas estas formas vienen de rostros y expresiones distintas por lo que tienen dimensiones muy distintas entre ellas. Al realizar el ajuste de procrustes podemos reconocer inmediatamente los rasgos faciales que represntas estos landmarks y podríamos empezar a analizar las variaciones que hay entre ellos.