Tarea 1
IELE-4017 Análisis Inteligente de Señales y Sistemas
Profesor: Luis Felipe Giraldo Trujillo
2021-I

---

1. Determine cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$. Para cada subespacio encuentre una base y describa el tipo de figura geométrica que forma.

   a) (5 puntos) $U_1 = \{(x_1, x_2, x_3)^\top | x_1 = 2t, x_2 = -t, x_3 = 5t, t \in \mathbb{R}\}$

   b) (5 puntos) $U_2 = \{(x_1, x_2, x_3)^\top | x_1 = 2t^2, x_2 = -t, x_3 = 5t, t \in \mathbb{R}\}$

2. Considere la representación de $x \in L^2[-T/2, T/2], T > 0$, a través de la serie

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, \quad t \in [-T/2, T/2] \tag{1}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt \tag{2}$$

   Aquí el espacio vectorial $L^2[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ está equipado con el producto interno

$$< x, y >= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)y(t)^*dt$$

   a) (20 puntos) Muestre que las funciones de la base $e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, son ortogonales.

   b) (15 puntos) Suponga que $x(t)$ está dado por

$$x(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } |t| \leq 0{,}5 \\ 0, & \text{if } |t| > 0{,}5 \end{cases}, \quad t \in [-1, 1]$$

   Encuentre los coeficientes a_k de la representación de las series de Fourier en la Equaciones (1) y (2), se asume que $x \in L^2[-1, 1]$.

   c) La identidad de Parseval establece que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{T}\|x\|^2$$

   donde $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$. Ahora considere la función $x(t)$ del enunciado b) y solucione los siguientes problemas:

   (i) (5 puntos) Encuentre el valor exacto de la potencia de la señal $\frac{1}{T}\|x\|^2$. No puede utilizar aproximaciones numéricas.

   (ii) (10 puntos) Encuentre el mínimo N tal que $\sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2$ contenga el $97\,\%$ de la potencia de la señal (es decir, $0{,}97\frac{1}{T}\|x\|^2$).

(iii) (20 puntos) Utilizando Matlab o Python grafique la función

$$s_M(t) = \sum_{k=-M}^{M} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}, \quad t \in [-1, 1]$$

para $M = 0, 1, \frac{N}{4}, \frac{N}{2}, \frac{3N}{4}, N$, donde N es el valor encontrado en el enunciado anterior (redondee al entero más cercano si es necesario). Traslape la función $x(t)$ para cada uno de los casos.

(iv) (20 puntos) Utilizando Matlab o Python grafique $\|x - s_M\|_2^2$ versus M, para los valores de M del enunciado (iii). Puede utilizar Matlab o Python para encontrar una aproximación de la integral. Brevemente discuta el resultado.