Profesor:
Dr. Oldemar Rodríguez Rojas
CIMPA
www.oldemarrodriguez.com
info@oldemarrodriguez.com

Capítulo 4 (continuación)
PLANOS

6.2.2 Ecuación normal de un plano en $I\!R^3$

Una nueva forma de describir un plano, válida sólo para planos en $I\!R^3$, se obtiene al reconocer que su dirección también puede ser determinada por un solo vector, pero en este caso, perpendicular al plano.

Sea $P \in I\!R^3$ un punto del plano y $\vec{n}$ un vector perpendicular al plano.

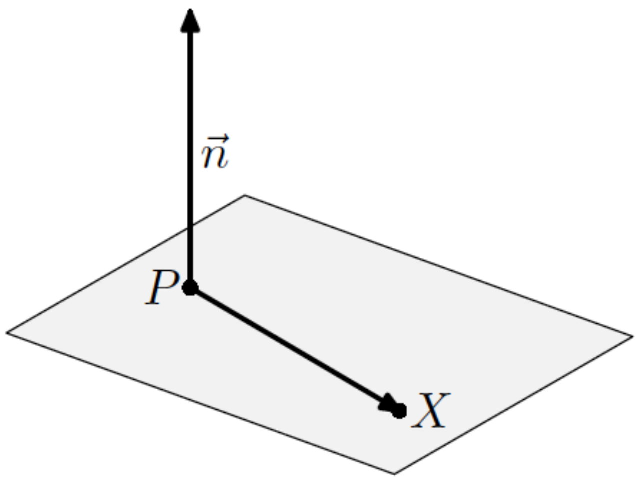

Figura 6.7: Plano que contiene a P, perpendicular a $\vec{n}$.

Todo punto $X \in \mathbb{R}^3$ del plano satisface que $\overrightarrow{PX}$ es un vector en la dirección del plano. Y como $\vec{n}$ es perpendicular (al plano), entonces

$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0.$$

De esta manera, todo punto X, del plano que contiene a P y es perpendicular a $\vec{n}$, satisface:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} &= 0 \\ (X - P) \cdot \vec{n} &= 0 \\ X \cdot \vec{n} &= P \cdot \vec{n}. \end{aligned}$$

La ecuación $(X - P) \cdot \vec{n} = 0$ es conocida, a veces, como ecuación punto normal del plano. Además, si se conviene en que $X = (x, y, z)$, $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $\vec{n} = (a, b, c)$, la ecuación anterior adquiere la forma:

$$\begin{aligned}
X \cdot \vec{n} &= P \cdot \vec{n} \\
(x, y, z) \cdot (a, b, c) &= (p_1, p_2, p_3) \cdot (a, b, c) \\
ax + by + cz &= ap_1 + bp_2 + cp_3
\end{aligned}$$

donde P y $\vec{n}$ son datos conocidos, entonces el lado derecho de la última ecuación se reduce a una constante $d = ap_1 + bp_2 + cp_3$, y la ecuación adquiere la muy conocida forma:

$$ax + by + cz = d.$$

Definición 6.4 (Ecuación normal de un plano en $\mathbb{R}^3$)

Todos los puntos (x, y, z) *de un plano que contenga al punto* $P = (p_1, p_2, p_3)$ *y sea perpendicular al vector* $\vec{n} = (a, b, c)$*, y sólo estos, satisfacen que:*

$$ax + by + cz = d$$

donde $d = ap_1 + bp_2 + cp_3$*. Además se dice que el vector* $\vec{n}$ *es normal al plano, o que el plano contiene a* P *y es normal a* $\vec{n}$*.*

D Definición 4.5.1

Plano

Sea P un punto en el espacio y sea $\mathbf{n}$ un vector dado diferente de cero. Entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$ constituye un **plano** en $\mathbb{R}^3$.

Notación. Por lo general, un plano se denota por el símbolo π.

Sea $P = (x_0, y_0, z_0)$ un punto fijo sobre un plano con vector normal $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$. Si $Q = (x, y, z)$ es otro punto en el plano, entonces $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$.

Como $\overrightarrow{PQ} \perp \mathbf{n}$, tenemos que $\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n} = 0$. Pero esto implica que

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad \textbf{(4.5.8)}$$

Una manera más común de escribir la ecuación de un plano se deriva de (4.5.8):

Ecuación cartesiana de un plano

$$ax + by + cz = d \qquad \textbf{(4.5.9)}$$

donde $d = ax_0 + by_0 + cz_0 = \overrightarrow{0P} \cdot \mathbf{n}$

EJEMPLO 4.5.6 **Determinación de la ecuación de un plano que pasa por un punto dado y tiene un vector normal dado**

Encuentre un plano π que pasa por el punto (2, 5, 1) y que tiene un vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución De (4.5.8) se obtiene directamente $(x - 2) - 2(y - 5) + 3(z - 1) = 0$, es decir,

$$x - 2y + 3z = -5 \qquad \textbf{(4.5.10)}$$

Los tres planos coordenados se representan de la siguiente manera:

Ejercicio

Encuéntrese la ecuación del plano que pasa por el punto $(3, -1, 7)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{n} = (4, 2, -5)$.

Solución. Por la expresión (3.11), una forma punto-normal es

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0$$

Al realizar las multiplicaciones y agrupar los términos, (3.11) se puede escribir en la forma

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (3.12)$$

en donde a, b c y d son constantes, y a, b y c no son todas cero. Como ilustración, la ecuación del ejemplo 15 se puede escribir como

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0$$

Ejercicio

Encuéntrese la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 1)$ y $P_3(3, -1, 2)$.

Solución alternativa. Supuesto que $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 1)$ y $P_3(3, -1, 2)$ se encuentran en el plano, los vectores $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 1, 2)$ y $\overrightarrow{P_1P_3} = (2, -3, 3)$ son paralelos al plano. Por tanto $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = (9, 1, -5)$ es normal el plano, ya que es perpendicular tanto a $\overrightarrow{P_1P_2}$ como a $\overrightarrow{P_1P_3}$. Con base en esto y en el hecho de que P_1 está en el plano, una forma punto-normal para la ecuación del plano es

$$9(x-1) + (y-2) - 5(z+1) = 0$$

o bien,

$$9x + y - 5z - 16 = 0$$

EJEMPLO 4.5.7 Determinación de la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados

Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos $P = (1, 2, 1)$, $Q = (-2, 3, -1)$ y $R = (1, 0, 4)$.

Solución Los vectores $\overrightarrow{PQ} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\overrightarrow{QR} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ están en el plano y por lo tanto son ortogonales al vector normal, de manera que

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

y se obtiene, usando el punto P en la ecuación (4.5.8),

$$\pi: -(x - 1) + 9(y - 2) + 6(z - 1) = 0$$

es decir,

$$-x + 9y + 6z = 23$$

Observe que si se escoge otro punto, digamos Q, se obtiene la ecuación $-(x + 2) + 9(y - 3) + 6(z + 1) = 0$, que se reduce a $-x + 9y + 6z = 23$. La figura 4.40 presenta un bosquejo de este plano.

Problemas 4.5

De los problemas 38 al 55, encuentre la ecuación del plano.

38. $P = (0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i}$

39. $P = (0, 0, 0)$; $\mathbf{n} = \mathbf{j}$

40. $P = (4, 5, -5)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

41. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

42. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

43. $P = (-8, 0, 10)$; $\mathbf{n} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

44. $P = (1, 2, 3)$; $\mathbf{n} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

45. $P = (2, -1, 6)$; $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

46. $P = (5, -5, 0)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$

47. $P = (-3, 11, 2)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

48. $P = (0, -1, -2)$; $\mathbf{n} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

49. $P = (1, -8, -7)$; $\mathbf{n} = -5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$

50. Contiene a $(1, 2, -4)$, $(2, 3, 7)$ y $(4, -1, 3)$

51. Contiene a $(1, -2, -4)$, $(3, 3, 3)$ y $(0, 0, -1)$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

www.oldemarrodriguez.com

Gracias…