

Operaciones Matriciales

Operaciones matriciales

Las operaciones matriciales básicas: suma, multiplicación, traspuesta, validación de igualdad de dos matrices, son muy útiles. Al momento de implementar una operación matricial es necesario recordar que debe validarse la compatibilidad de dimensiones. A continuación se presentan las instrucciones para realizar tales tareas.

Para las siguientes operaciones considere que se trabaja con matrices del tipo Integer

Suma de matrices

La suma de matrices se realiza al sumar el elemento i,j de una matriz con el i,j de la otra y colocar el resultado en la posición i,j de la matriz resultado. Deberá verificarse la compatibilidad de dimensiones de las matrices.

$$\begin{bmatrix} C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} FC \times CC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} FA \times CA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} FB \times CB \end{bmatrix}$$

Restricciones: $FA = FB = FC$
 $CA = CB = CC$

$$\begin{bmatrix} C \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 4 \times 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \times 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \times 3 \end{bmatrix}$$

```
Sub SumaMatriz(ByVal A(,) As Integer, _  
    ByVal B(,) As Integer, ByVal Fi As Integer, _  
    ByVal Co As Integer, ByRef C(,) As Integer)  
  
    Dim I,J As Integer  
  
    For I = 1 To Fi  
        For J = 1 To Co  
            C(I,J) = A(I,J) + B(I,J)  
        Next  
    Next  
  
End Sub
```

11	13	15
24	26	28
37	39	41
50	52	54

 =

10	11	12
20	21	22
30	31	32
40	41	42

 +

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

Ec. General: $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

Multiplicación de matrices

La multiplicación de matrices se realiza al sumar el producto de los elementos en la fila i de una matriz con los elementos de la columna j de la otra matriz y colocar el resultado en la posición i,j de la matriz resultado. El proceso deberá verificar la compatibilidad de dimensiones.

$$\begin{bmatrix} C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} FC \times CC \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} FA \times CA \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} FB \times CB \end{bmatrix}$$

Restricciones: $CA = FB$
 $FC = FA$
 $CC = CB$

$$\begin{bmatrix} C \\ 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 2 \times 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 3 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Ec. General:

$$C_{i,j} = \sum_{K=1}^{CA} (a_{i,K} * b_{K,j})$$

```
Sub MultiplicacionMatriz(ByVal A(,) As Integer, _
    ByVal B(,) As Integer, ByVal Fa As Integer, _
    ByVal Ca As Integer, ByVal Fb As Integer, _
    ByVal Cb As Integer, ByRef C(,) As Integer)

    Dim I,J,K As Integer
    Dim Acum As Integer

    For I = 1 To Fa
        For J = 1 To Cb
            Acum = 0
            For K = 1 To Ca
                C(I,J) = A(I,K) * B(K,J)
            Next
            C(I,J) = Acum
        Next
    Next

End Sub
```

Transpuesta de una matriz

La transpuesta de una matriz se refiere a transponer las filas por las columnas de la matriz. Este proceso puede realizarse de dos maneras diferentes dependiendo de las dimensiones de la matriz: a) cuando la matriz es cuadrada y b) cuando la matriz no es cuadrada. En el primer caso es posible realizar el proceso sobre la matriz original, sin embargo, tenga en cuenta que se perderían los valores de la matriz original. En el segundo caso es necesario almacenar la transpuesta sobre otra matriz debido a que las dimensiones no son iguales. Veamos a continuación ambos procesos:

- a) **CASO 1:** Transpuesta sobre si misma: caso en que la matriz es de orden N, En caso contrario esté cambiaria de orden.

Restricciones:

[A] de orden n
[A^T] de orden n

$$\begin{bmatrix} A \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T \\ 3 \times 3 \end{bmatrix}$$

```
Sub TranspuestaEnA(ByRef A(,) As Integer, _
    ByVal N As Integer)

    Dim I,J As Integer
    Dim Temp As Integer

    For I = 1 To N - 1
        For J = I + 1 To N
            Temp = A(I,J)
            A(I,J) = A(J,I)
            A(J,J) = Temp
        Next
    Next

End Sub
```

- b) Transpuesta sobre otra matriz: caso en que la dimensión de la matriz es: FA filas y CA columnas.

Restricciones: [A] de FA x CA
[B] = A^T de CA x FA

$$\begin{bmatrix} B \\ CA \times FA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T \\ FA \times CA \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

```
Sub CrearTranspuesta(ByVal A(,) As Integer, _
    ByVal Fa As Integer, ByVal Ca As Integer, _
    ByRef B(,) As Integer)

    Dim I,J As Integer

    For I = 1 To Fa
        For J = 1 To Cb
            B(I,J) = A(J,I)
        Next
    Next

End Sub
```

Validación de igualdad de matrices

Aunque normalmente esta verificación no es considerada una operación matricial básica, es muy útil en implementaciones al computador. Una variable indexada almacena mas de un valor, esta propiedad impide verificar la igualdad de dos variables indexadas directamente, por lo que es necesario hacerlo elemento a elemento.

Lo más conveniente es partir de la suposiciones que las matrices son iguales y buscar, entonces, la primera vez que se encuentre que dos valores NO son iguales. Esto es suficiente para concluir que las matrices NO son iguales. El proceso de búsqueda mas apropiado es la búsqueda secuencial que permita detener la búsqueda al momento de encontrar el primer caso en que los valores NO son iguales; de esta manera evitamos hacer comparaciones innecesarias.

$$[C] = [A] + [B]$$

Restricciones: matriz A y B deben tener
dimensiones iguales
FA = FB
CA = CB

$$[A] \quad ? \quad [B]$$

1	2	3		1	2	3
4	5	6	=	4	5	7
7	8	9		7	8	9

$$A[i,j] \quad ? \quad B[i,j]$$

Al final del proceso la variable **igualdad** [de tipo boolean] indica si las matrices son iguales [igualdad = true] o no son iguales [igualdad = false]

```
Function IgualdadMatriz(ByVal A(,) As Integer, _
    ByVal B(,) As Integer, ByVal Fi As Integer, _
    ByVal Co As Integer) As Boolean

    Dim I As Integer = 1
    Dim J As Integer
    Dim Iguales As Boolean = True

    While Iguales And I <= Fi

        J = 1
        While Iguales And J <= Co
            If A(I,J) <> B(I,J) Then
                Iguales = False
            End If
            J = J + 1
        End While
        I = I + 1
    End While

    IgualdadMatriz = Iguales

End Sub
```

Ejercicios Propuestos de Operaciones Matriciales

1. Dadas las matrices:

A			
1	2	3	4
5	6	7	8

C			
11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

B			
10	20	30	40
50	60	70	80

Indique como seria su archivo de datos si lee las matrices en el siguiente orden: A, C, y B

2. Elabore un programa que determine si se cumplen o no las siguientes expresiones matriciales:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{C}^T + \mathbf{A} \mathbf{B}^T$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}$$

3. Elabore un programa con subprogramas el cual dada una matriz A de orden N, indique si la matriz que resulta de restarle a la matriz A su traspuesta da como resultado una matriz semisimetrica, es decir, si para todo $A[i, j]$ se cumple: $A[i, j] = -A[j, i]$
4. a) Desarrolle un subprograma que dado un vector X de M elementos, ordene de mayor a menor sus elementos.
b) Desarrolle un subprograma que dada una matriz X de orden N, devuelva la matriz Z como la traspuesta de X.
c) Desarrolle un subprograma que dada una matriz Z de NxM elementos y un escalar K, devuelva un vector X con los elementos de la fila K de la matriz.

d) Desarrolle un subprograma que dada una matriz Z de NxM elementos y un escalar K, devuelva un vector X con los elementos de la columna K de la matriz.

$$Z = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & -9 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } K=3 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e) Desarrolle un subprograma que dados los vectores X e Y de M elementos cada uno, calcule el producto escalar de los vectores.

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Producto escalar} = 1 \times 4 + 0 \times (-9) + (-1) \times 3 = 1$$

$$Z = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & -9 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } K=2 \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

f) Desarrolle un subprograma que dadas dos matrices X e Y de orden N cada una y haciendo uso de los tres subprogramas anteriores, genere la matriz Z como la multiplicación de la matriz X con la matriz Y, calculando cada elemento [I,J] de la matriz Z como el producto escalar de la Fila I de la matriz X con la columna J de la matriz Y.

g) Desarrolle un programa que haciendo uso de los subprogramas anteriores y de los que Ud. considere necesarios desarrollar para, dadas dos matrices A y B de orden N, determine e imprima la matriz R según la siguiente expresión matricial:

$$[R] = ([A]^T * [B])^T$$

5. a) Desarrolle un subprograma que dada una matriz Z de NxM elementos y un escalar K, devuelva un vector X con los elementos de la fila K de la matriz

$$Z = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & -9 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } K = 2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -9 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Desarrolle un subprograma que dada una matriz Y de MxN elementos y un vector X de M elementos, anexe el vector como última columna de la matriz.

$$Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & -9 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 7 & 9 & -4 \\ 2 & 4 & -9 & 7 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

c) Desarrolle un subprograma que haciendo uso de los subprogramas anteriores genere una matriz A como la traspuesta de una matriz B de NxM elementos, colocando cada fila de B como columna de A. Señal: Comience con el número de columnas de A en cero y anexe consecutivamente las filas de B como columnas de A.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

d) Desarrolle un subprograma que genere una matriz C como la multiplicación de las matrices A de NxK elementos y la matriz B de KxM elementos.

e) Desarrolle un subprograma que retorne un valor booleano TRUE si las matrices son iguales o un valor booleano FALSE si no lo son.

f) Desarrolle un programa que haciendo uso de los subprogramas anteriores más los que considere necesarios para determinar si las matrices $[A]^T$ y $[B]$ conmutan, es decir si $[A]^T * [B] = [B] * [A]^T$