Operaciones Matriciales

Operaciones matriciales

Las operaciones matriciales básicas: suma, multiplicación, traspuesta, validación de igualdad de dos matrices, son muy útiles. Al momento de implementar una operación matricial es necesario recordar que debe validarse la compatibilidad de dimensiones. A continuación se presentan las instrucciones para realizar tales tareas.

Para las siguientes operaciones considere que se trabaja con matrices del tipo Integer

Suma de matrices

La suma de matrices se realiza al sumar el elemento i, j de una matriz con el i, j de la otra y colocar el resultado en la posición i, j de la matriz resultado. Deberá verificarse la compatibilidad de dimensiones de las matrices.

[C] = [A] + [B]
[FC x CC] [FA x CA] [FB x CB]

Restricciones: FA = FB = FC
CA = CB = CC

[C] [A] [B]
[4 x 3] [4 x 3] [4 x 3]

```
Sub SumaMatriz(ByVal A(,) As Integer, _
  ByVal B(,) As Integer, ByVal Fi As Integer, _
  ByVal Co As Integer, ByRef C(,) As Integer)

  Dim I,J As Integer

  For I = 1 To Fi
    For J = 1 To Co
      C(I,J) = A(I,J) + B(I,J)
    Next
  Next

End Sub
```

11	13	15		10	11	12		1	2	3
24	26	28	=	20	21	22	+	4	5	6
37	39	41		30	31	32		7	8	9
50	52	54		40	41	42		10	11	12

Ec. General: $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

Multiplicación de matrices

La multiplicación de matrices se realiza al sumar el producto de los elementos en la fila i de una matriz con los elementos de la columna j de la otra matriz y colocar el resultado en la posición i, j de la matriz resultado. El proceso deberá verificar la compatibilidad de dimensiones.

[C] = [A] * [B]
[FC x CC] [FA x CA] [FB x CB]

Restricciones: CA = FB
FC = FA
CC = CB

[C] [2 x 2]   [A] [2 x 3]   [B] [3 x 2]

$$\begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Ec. General:

$$C_{i,j} = \sum_{K=1}^{CA} (a_{i,K} * b_{K,j})$$

```
Sub MultiplicacionMatriz(ByVal A(,) As Integer, _
  ByVal B(,) As Integer, ByVal Fa As Integer, _
  ByVal Ca As Integer, ByVal Fb As Integer, _
  ByVal Cb As Integer, ByRef C(,) As Integer)

  Dim I,J,K As Integer
  Dim Acum As Integer

  For I = 1 To Fa
    For J = 1 To Cb
      Acum = 0
      For K = 1 To Ca
        Acum += A(I,K) * B(K,J)
      Next
      C(I,J) = Acum
    Next
  Next

End Sub
```

Transpuesta de una matriz

La traspuesta de una matriz se refiere a transponer las filas por las columnas de la matriz. Este proceso puede realizarse de dos maneras diferentes dependiendo de las dimensiones de la matriz: a) cuando la matriz es cuadrada y b) cuando la matriz no es cuadrada. En el primer caso es posible realizar el proceso sobre la matriz original, sin embargo, tenga en cuenta que se perderían los valores de la matriz original. En el segundo caso es necesario almacenar la traspuesta sobre otra matriz debido a que las dimensiones no son iguales. Veamos a continuación ambos procesos:

a) **CASO 1:** Traspuesta sobre si misma: caso en que la matriz es de orden N, En caso contrario esté cambiaria de orden, sin embargo este proceso también se puede adaptar en matrices de MxN, recordando que algunos intercambios no tendrían valores reales

Restricciones:

[A] de orden n

[A^T] de orden n

[A]   [A^T]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

```
Sub TraspuestaEnA(ByRef A(,) As Integer, _
  ByVal N As Integer)

  Dim I,J As Integer
  Dim Temp As Integer

  For I = 1 To N - 1
    For J = I + 1 To N
        Temp = A(I,J)
        A(I,J) = A(J,I)
        A(J,I) = Temp
    Next
  Next

End Sub
```

b) Transpuesta sobre otra matriz: caso en que la dimensión de la matriz es: FA filas y CA columnas.

Restricciones: [A] de FA x CA

[B] = A^T de CA x FA

[B] = [A^T]

[CA x FA]   [FA x CA]

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

```
Sub CrearTranspuesta(ByVal A(,) As Integer, _
  ByVal Fa As Integer, ByVal Ca As Integer,
  ByRef B(,) As Integer)

  Dim I,J As Integer

  For I = 1 To Ca
    For J = 1 To Fa
        B(I,J) = A(J,I)
    Next
  Next

End Sub
```

Validación de igualdad de matrices

Aunque normalmente esta verificación no es considerada una operación matricial básica, es muy útil en implementaciones al computador. Una variable indexada almacena mas de un valor, esta propiedad impide verificar la igualdad de dos variables indexadas directamente, por lo que es necesario hacerlo elemento a elemento.

Lo más conveniente es partir de la suposiciones que las matrices son iguales y buscar, entonces, la primera vez que se encuentre que dos valores **NO** son iguales. Esto es suficiente para concluir que las matrices NO son iguales. El proceso de búsqueda más apropiado es una búsqueda secuencial que permita detectar el primer caso en que los valores NO son iguales y de esta manera evitamos hacer comparaciones innecesarias.

[C] = [A] + [B]

Restricciones: matriz A y B deben tener dimensiones iguales
FA = FB
CA = CB

[A] ? [B]

1	2	3		1	2	3
4	5	**6**	=	4	5	**7**
7	8	9		7	8	9

A[i,j] ? B [i,j]

Al final del proceso la variable **iguales** [tipo boolean] indica si las matrices son iguales [iguales = true] o no son iguales [iguales = false]

```
Function IgualdadMatriz(ByVal A(,) As Integer, _
  ByVal B(,) As Integer, ByVal Fi As Integer, _
  ByVal Co As Integer) As Boolean

  Dim I As Integer = 1
  Dim J As Integer
  Dim Iguales As Boolean = True

  While Iguales And I <= Fi

    J = 1
    While Iguales And J <= Co
      If A(I,J)<>B(I,J) Then
        Iguales = False
      End If
      J = J +1
    End While
    I = I + 1

  End While

  IgualdadMatriz = Iguales

End Sub
```

Ejercicios Propuestos de Operaciones Matriciales

1. Dadas las matrices:

A

1	2	3	4
5	6	7	8

C

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

B

10	20	30	40
50	60	70	80

Indique como seria su archivo de datos si lee las matrices en el siguiente orden: A, C, y B

2. Elabore un programa que determine si se cumplen o no las siguientes expresiones matriciales:

$$\mathbf{A^T\,B + C = C^T + A\,B^T}$$

$$\mathbf{A^T\,B = B^T\,A}$$

3. Elabore un programa con subprogramas el cual dada una matriz A de orden N, indique si la matriz que resulta de restarle a la matriz A su transpuesta da como resultado una matriz semisimetrica, es decir, si para todo A[i, j] se cumple: A[i, j] = -A[j, i]

4. a) Desarrolle un subprograma que dado un vector X de M elementos, ordene de mayor a menor sus elementos.
   b) Desarrolle un subprograma que dada una matriz X de orden N, devuelva la matriz Z como la traspuesta de X.
   c) Desarrolle un subprograma que dada una matriz Z de NxM elementos y un escalar K, devuelva un vector X con los elementos de la fila K de la matriz.

   d) Desarrolle un subprograma que dada una matriz Z de NxM elementos y un escalar K, devuelva un vector X con los elementos de la columna K de la matriz.

$$Z = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & -9 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{K} = 3 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   e) Desarrolle un subprograma que dados los vectores X e Y de M elementos cada uno, calcule el producto escalar de los vectores.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } Y = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Producto escalar} = 1\text{x}4 + 0\text{x}(\text{-}9) + (\text{-}1)\text{x}3 = 1$$

$$Z = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & -9 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{K} = 2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -9 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

f) Desarrolle un subprograma que dadas dos matrices X e Y de orden N cada una y haciendo uso de los tres subprogramas anteriores, genere la matriz Z como la multiplicación de la matriz X con la matriz Y, calculando cada elemento [I,J] de la matriz Z como el producto escalar de la Fila I de la matriz X con la columna J de la matriz Y.

g) Desarrolle un programa que haciendo uso de los subprogramas anteriores y de los que Ud. considere necesarios desarrollar para, dadas dos matrices A y B de orden N, determine e imprima la matriz R según la siguiente expresión matricial:

$$[R] = ([A]^T * [B])^T$$

5. a) Desarrolle un subprograma que dada una matriz Z de NxM elementos y un escalar K, devuelva un vector X con los elementos de la fila K de la matriz

$$Z = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & -9 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } K = 2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -9 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Desarrolle un subprograma que dada una matriz Y de MxN elementos y un vector X de M elementos, anexe el vector como última columna de la matriz.

$$Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & -9 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 7 & 9 & -4 \\ 2 & 4 & -9 & 7 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

c) Desarrolle un subprograma que haciendo uso de los subprogramas anteriores genere una matriz A como la traspuesta de una matriz B de NxM elementos, colocando cada fila de B como columna de A. Seña: Comience con el número de columnas de A en cero y anexe consecutivamente las filas de B como columnas de A.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

d) Desarrolle un subprograma que genere una matriz C como la multiplicación de las matrices A de NxK elementos y la matriz B de KxM elementos.

e) Desarrolle un subprograma que retorne un valor booleano TRUE si las matrices son iguales o un valor booleano FALSE si no lo son.

f) Desarrolle un programa que haciendo uso de los subprogramas anteriores más los que considere necesarios para determinar si las matrices $[A]^T$ y $[B]$ conmutan, es decir si $[A]^T * [B] = [B] * [A]^T$