

## SECUENCIAS Y SERIES

Para los estudiantes de programación, es interesante la aplicación de las técnicas de resolución de ejercicios relacionados al cálculo de los términos de una serie o secuencia, por que en ellas se utilizan todas las técnicas elementales de programación, tales como acumuladores, ciclos de diferentes tipos, banderas y por supuesto expresiones de diferentes tipos.

- **SUCESIÓN Y SECUENCIA:** Una sucesión matemática es una función definida sobre los enteros naturales. Una secuencia es una concatenación de símbolos obtenidos a partir de una sucesión. Son semejantes a las sucesiones y se pueden derivar fácilmente de éstas.

Por ejemplo, la definición matemática de la secuencia de Fibonacci es:

$$fib(n) \begin{cases} fib(1) = 0 & \text{Para } n = 1 \\ fib(2) = 1 & \text{Para } n = 2 \\ fib(n) = fib(n-2) + fib(n-1) & \square n > 2 \end{cases}$$

Los primeros 10 términos de esta secuencia son: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, . . . Así, si se toma como base la secuencia de Fibonacci, es sencillo definir una nueva secuencia para el alfabeto A = {0,1} según el siguiente método

$$S(n) \begin{cases} 1 & \text{Si } n \text{ está en la sucesión de Fibonacci} \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

que obtendría como resultado un 1 para el numero natural 1, ya que éste está en la secuencia de Fibonacci; 1 para los números naturales 2 y 3; pero 0 para el numero natural 4, ya que él no pertenece a la secuencia de Fibonacci. Obteniéndose, entonces, la siguiente secuencia de dígitos binarios: 1 1 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 . . .

Observe la relación entre la secuencia de los dígitos binarios generada, la secuencia de Fibonacci: y los números naturales:

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
S(n)	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0

- Los ejercicios típicos para estos casos corresponden a: [1] Determinar los primeros N términos de la secuencia, [2] Determinar los términos de la secuencia menores que N, [3] Determinar los términos comprendidos en el rango abierto de N y M. El problema podría referirse a sumar los términos calculados, o determinar promedios/porcentajes, etc.
- Para calcular, desde el segundo término en adelante, la secuencia de Fibonacci, se requiere recordar los dos últimos términos calculados. El concepto de *recordar* valores obtenidos de cálculos anteriores, se conoce como *un historial* y es interesante desde el punto de vista de programación, porque requiere el uso de variables auxiliares, asignaciones o cambios de valores adecuados.

- **SERIES:** Una serie es la suma de los términos de una sucesión. Se representa una serie con términos  $a_n$  como se muestra a continuación:

$$\sum_{i=1}^N a_n$$

donde N es el índice final de la serie.

A continuación se presenta, como ejemplo, la serie para el cálculo de: **seno de x** y  **$e^x$**

$$\sin X = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + \frac{X^9}{9!} - \frac{X^{11}}{11!} + \frac{X^{13}}{13!} \dots$$

$$e^x = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + \frac{X^5}{5!} + \frac{X^6}{6!} + \frac{X^7}{7!} \dots$$

En el desarrollo de programas para el cálculo de series es muy importante hacer un análisis previo, detallado y preciso de [1] cómo el programa generara el término en sí y [2] cómo se conforman los términos de la serie.

Para la generación de los términos, el programador puede diseñar el programa de tal manera que se trabaje:

- CON EL TÉRMINO COMO UN TODO, en cuyo caso la transición de los elementos se realiza sobre una sola variable. Esta variable se comporta como una productoria del término anterior por la transición para generar el nuevo término. Esta técnica no es apropiada para aquellos casos en que el término de la serie conlleva una sumatoria.
- CON LOS ELEMENTOS QUE CONFORMAN EL TÉRMINO, en este caso se descompone el término en elementos básicos como sumatorias, productorias, signos alternos, cálculos previos o internos.

Entre los elementos de programación más usados en los programas de series, se encuentran:

- **CONTADORES:** Se usan típicamente para contar el número de términos a calcular, para calcular pares/impares y definir paridad
- **SUMATORIAS:** Variables que almacenan el valor de la serie, o de porciones de los términos
- **PRODUCTORIAS:** Variables apropiadas para el cálculo de factoriales y potencias
- **BANDERAS:** Variables necesarias para detectar cuando debe cambiarse el signo o invertir los términos, o para cálculos especiales que requieran la determinación de un evento
- **CÁLCULOS PREVIOS:** Se refiere a los cálculos necesarios para obtener el primer término de la serie a partir del cual se generaran los siguientes. Tal como el caso de un factorial decreciente o potencias decrecientes
- **CÁLCULOS INTERNOS:** Caso que se presenta cuando no es posible determinar el término a generar a partir del anterior. Como por ejemplo el caso de una potencia donde la base cambia entre términos.

**EJERCICIO 1**

Dados N y X, desarrollar el Diagrama de Flujo de un programa que calcule y escriba cada término de la serie y la suma de los N primeros términos.

$$S = \frac{X}{3!} + \frac{X + X^2}{5!} + \frac{X + X^2 + X^3}{7!} + \frac{X + X^2 + X^3 + X^4}{9!} + \dots$$

Análisis del ejercicio 2 pto.

Estructura cíclica apropiada 1 pto.

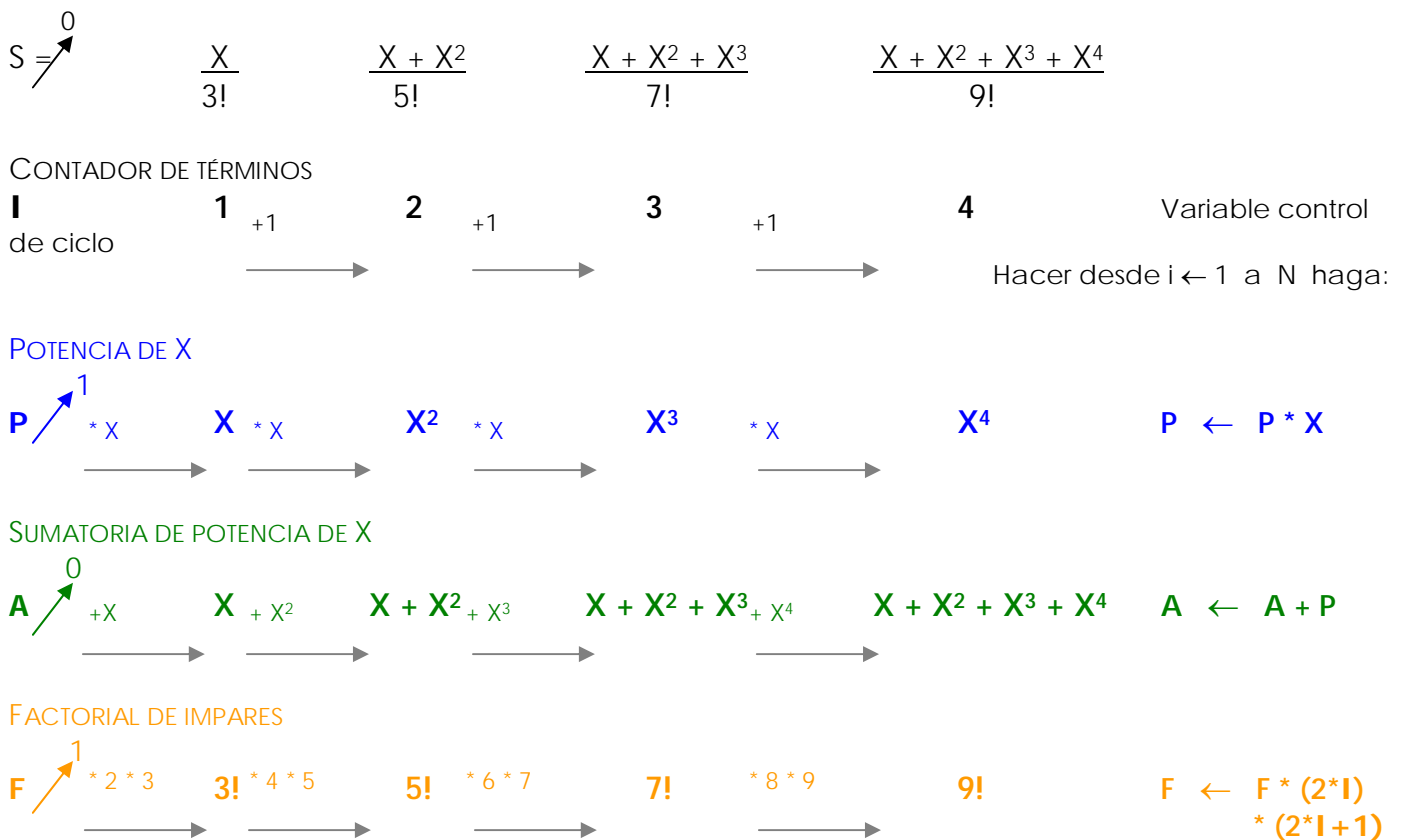
Algoritmo 2 pts

**Análisis del ejercicio:****QUE SE TIENE?**

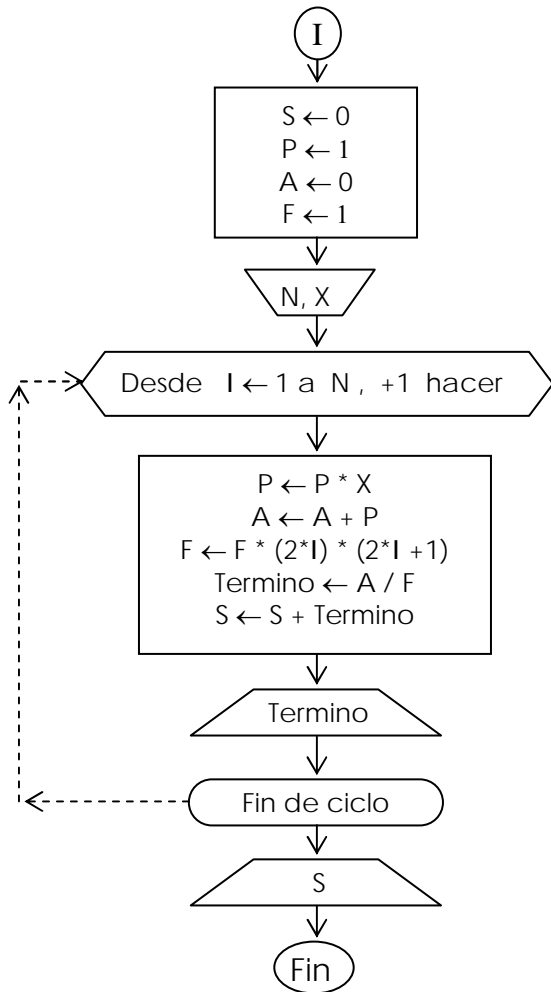
Valores N y X leídos. Se asume que  $N > 0$

**QUE SE PIDE?**

Imprimir los primeros N términos y sumarlos, al final imprimir la suma

**CÓMO LOGRARLO?**

## DIAGRAMA DE FLUJO



Algoritmo serial

Variables

; entrada

N : entero

X : real

; proceso

A : real

P : real

F : entero

; salida

S : real

Inicio

Imprimir "# de Términos:"

Leer N

Imprimir "Valor de X:"

Leer x

; inicio contadores y acumuladores

S&lt;-0

P&lt;-1

A&lt;-0

F&lt;-1

; Ciclo para generar los términos

Para I&lt;- 1 hasta N hacer

; Determino los elementos

;del término

P&lt;- p \* x

A&lt;- A + P

F&lt;- F \* (2\*i)\* (2\*i -1)

; ARMO EL TÉRMINO

Termينو&lt;- A/F

; Uso EL TÉRMINO

S&lt;- S + termino

Finpara

Imprimirln" La suma de los  
 primeros ", N, "terminos de la  
 serie es ", S

Fin

**EJERCICIO 2**

Dados los valores de X y R, elabore el Diagrama de Flujo de un programa que determine el valor aproximado de

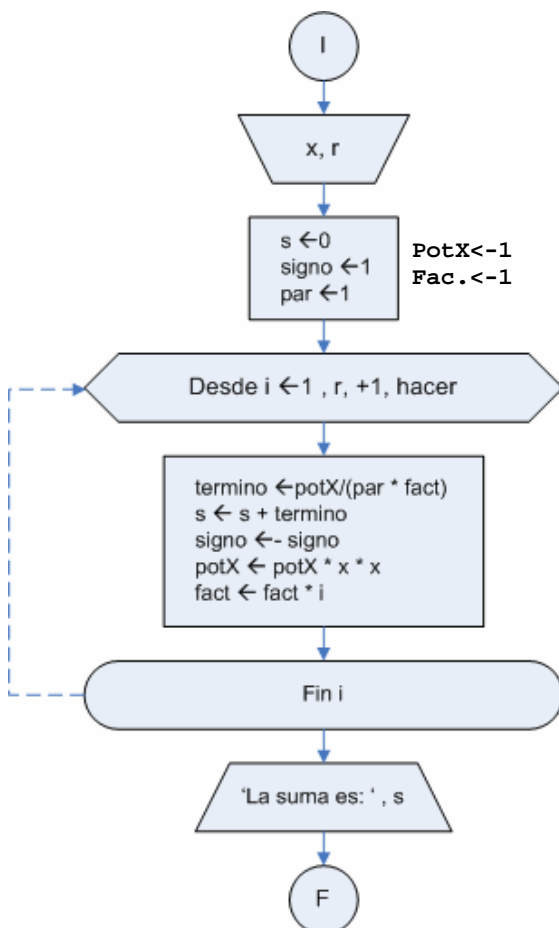
$$e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)}$$

según el desarrollo de los primeros R términos, empleando el método de Taylor, el cual se muestra a continuación,

$$e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} = 1 - \frac{x^2}{2*1!} + \frac{x^4}{4*2!} - \frac{x^6}{6*3!} + \frac{x^8}{8*4!} - \dots$$

**ANÁLISIS DEL PROBLEMA**

ELEMENTO:						FORMULA	INICIO
i:	1	2	3	4	5		
signo:	+	-	+	-	+	signo ← - signo	signo ← 1
potX:	1	x <sup>2</sup>	x <sup>4</sup>	x <sup>6</sup>	x <sup>8</sup>	potX ← potX * x * x	potX ← 1
fact:	1	1!	2!	3!	4!	fact ← fact * i   <sub>i&gt;1</sub>	fact ← 1
par:	1	2	4	6	8	par ← 2 * i   <sub>i&gt;1</sub>	par ← 1



Algoritmo serie2

Variables

```

; entrada
N      : entero
R      : real
; proceso
Signo  : real
Par    : real
Potx   : real
; salida
S      : real
  
```

Inicio

Imprimir "# de Términos:"

Leer N

Imprimir "Valor de X:"

Leer x

S ← 0

Signo ← -1

par ← 0

potx ← 1

Para I ← 1 hasta N hacer

termino ← potx/(par \* fact)

S ← s + termino

SIGNO ← -SIGNO

POTX ← POTX \* X \* X

FACT ← -FACT \* I

Finpara

Imprimirln" La suma de los

primeros ", N, "terminos de la serie

es ", S

Fin